Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Бандура Андрій Іванович

УДК 517.55

ДИСЕРТАЦІЯ
ВЛАСТИВОСТІ КЛАСІВ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ІНДЕКСУ

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _____ А.І. Бандура

Науковий консультант:
Скасків Олег Богданович
доктор фізико-математичних
наук, професор

Львів – 2018

АНОТАЦІЯ

Бандура А. І. Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “Математичний аналіз” (111 — Математика). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

Дисертація складається зі вступу, 7 розділів, висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, предмет, об’єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв’язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У роботі об’єктом вивчення є класи цілих та аналітичних в кулі чи у полікрузі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних чи обмеженого L-індексу за напрямком. Такі класи є доволі широкими. Про це свідчать доведені теореми існування. Зокрема, для цілої функції $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ існує додатна неперервна функція $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ така, що F — обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, тоді і тільки тоді, коли F має обмежену кратність нульових точок. Для цілих та аналітичних в одиничній кулі функцій від декількох змінних обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних встановлено критерії приналежності функцій до відповідних класів, теореми існування та інші властивості, які описують локальне поводження їхніх частинних похідних на кістяках полікруга чи коефіцієнтів розвинень у степеневий ряд знайдено точні оцінки зростання логарифма максимуму модуля таких функцій на кістяку полікруга, причому вдалося покращити одну одновимірну оцінку зростання, встановлену М. М. Шереметою.

Знайдено достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних цілих та аналітичних в кулі розв’язків систем лінійних рівнянь з частинними

похідними вищих порядків та отримано точні оцінки їхнього зростання через параметри, залежні від коефіцієнтів систем. Запропоновано повністю новий підхід у теорії функцій від декількох змінних обмеженого індексу — використання вичерпання багатовимірного простору кулями замість полікругів, що дозволило виявити нові характеристичні властивості функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних через оцінку максимуму модуля таких функцій та їхніх похідних на сфері.

Вперше отримано аналоги логарифмічного критерію у вигляді достатніх умов та оцінки максимуму модуля через мінімум модуля для цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Знайдені обмеження описують поводження частинних логарифмічних похідних за усіма змінними ззовні деяких виняткових множин та міру нульової множини цілої функції в полікрузі.

Досліджено характеристичні властивості цілих та аналітичних в одиничній кулі функцій від декількох змінних обмеженого L-індексу за напрямком, знайдено точні оцінки зростання логарифма максимуму модуля таких функцій на колі, а також виділено підклас цілих функцій необмеженого індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b}$ таких, що на кожній зрізці вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ вони мають обмежений індекс, та знайдено функцію L, для якої деякі цілі функції з описаною властивістю матимуть обмежений L-індекс за тим самим напрямком. Водночас повністю доведено гіпотезу про можливість послаблення достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком для цілих функцій (оцінка максимуму модуля, мінімуму модуля на колі, логарифмічний критерій) через заміну квантора загальності на квантор існування деякого радіуса.

Доведено достатність умов у гіпотезі М. М. Шеремети [213] про обмеженість l-індексу деяких композицій аналітичних функцій від однієї змінної та дано відповідь на питання М. М. Шеремети про обмеженість $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних композицій цілих функцій. Отримано достатні умови обмеженості l-індексу цілих розв'язків рівняння $w' = f(z, w)$. Виявлено факт істотності умови „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“, тобто, її не можна замінити на умову „F — голоморфна

на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ у теорії цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком.

Встановлено аналог теореми Хеймана для аналітичних в полікрузі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних та описано поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд таких функцій. Узагальнено результати Пойя-Клуні про зростання композиції цілих функцій на випадок деяких композицій аналітичних функцій. Досліджується взаємозв'язок між класами функцій обмеженого l_ρ-індексу та функціями цілком регулярного зростання через побудову функцію скінченного порядку ρ і цілком регулярного зростання, нулі якої не задовольняють відомі умови Левіна C та (C') і яка причому має необмежений l_ρ-індекс. Запропоновано підхід до введення поняття обмеженості l-індексу для мероморфних функцій.

Узагальнюючи одновимірні результати на багатовимірний комплексний простір, у багатьох випадках нам вдалося досягти покращення нових відповідних одновимірних наслідків через послаблення достатніх умов або через уточнення нерівностей.

Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. Вони мають теоретичний характер та можуть бути використані в багатовимірному комплексному аналізі, аналітичній теорії диференціальних рівнянь.

Ключові слова: ціла функція, аналітична функція, куля, полікруг, похідна за напрямком, частинна похідна, обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, обмежений L-індекс за напрямком, лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку, системи лінійних рівнянь з частинними похідними, розподіл нулів.

ABSTRACT

Bandura A.I. *Properties of classes of holomorphic functions of bounded index.* — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 — Mathematical analysis (111 - Mathematics), Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

The thesis consists of an introduction, 7 sections, conclusions, references. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

The objects of investigations are classes of entire and analytic functions in the unit ball or in a polydisc of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables index or of bounded L-index in direction. These classes are quite wide. This is proved by the existence theorems. Particularly, for an entire function $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ there exists a positive continuous function $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ such that F has bounded $\mathbf{L}$-index in direction if and only if F has bounded multiplicity of zero points.

For entire and analytic functions of several variables in the unit ball of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables there is established characterizations of these classes, existence theorems and other properties which describe local behavior of the partial derivatives on the skeletons of polydisc or estimates of coefficients of power series expansions. Also we have obtained sharp growth estimates of logarithm of maximum modulus for these functions on the skeleton of polydisc. In this way, we improve some growth estimate for functions of one variable proved by M. M. Sheremeta.

There are deduced sufficient conditions of boundedness of the $\mathbf{L}$-index in joint variables for entire and analytic solutions in the unit ball of linear higher-order systems of partial differential equations. For these solutions we find sharp estimates of its growth by parameters depending of the coefficients of the system.

Developing a new approach in function theory of bounded index a usage ball exhaustion instead polydisc in multidimensional complex space allowed us to discover new characteristic properties of functions of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables by estimate of maximum modulus of the functions and its derivatives on a sphere.

As sufficient conditions there are presented analogs of logarithmic criterion for entire functions of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables. The obtained conditions describe behavior of partial logarithmic derivatives in all variables outside some

exceptional sets and a measure of zero zet in polydisc.

We also examine characterizations of entire and analytic functions in the unit ball of several variables of bounded L-index in a direction. For these classes there are sharp growth estimates of logarithm maximum modulus on a circle. Using logarithmic criterion there is selected a subclass of entire functions of unbounded index in any direction such that they have bounded index in each slice $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ for a given $z^0 \in \mathbb{C}^n$. For some functions with described property there is a constructed a positive continuous function such that they have bounded L-index in the same direction. We fully prove a hypothesis about weaker sufficient conditions of L-index boundedness in direction for entire functions (estimate of maximum modulus, minimum modulus on a circle, logarithmic criterion) by replacement of universal quantifier on existential quantifier of some radius.

The sufficiency of conditions in Sheremeta's hypothesis [213] about the boundedness of l-index for some compositions of analytic functions of one variable is proved. We also present an answer to Sheremeta's question about the boundedness of the $\mathbf{L}$-index in joint variables for compositions of entire functions of several variables.

The sufficient conditions of l-index boudedness of entire solutions of equation $w' = f(z, w)$ are presented. This is revealed that the condition „F is holomorphic in $\mathbb{C}^n$“ is essential. It can not be replaced by the condition "F is holomorphic on all slices of the form $z^0 + t\mathbf{b}$" in the theory of entire functions of bounded L-index in the direction.

An analog of Hayman's Theorem for analytic functions in a polydisc of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables is proved. We describe the behavior of power series expansions coefficients for these functions. The results of Polya-Clunie about the growth of the composition of entire functions are generalized for a case of some compositions of analytic functions. The relationship between classes of functions of a bounded l_ρ-index and functions of completely regular growth are considered. We construct a function of finite order ρ and a completely regular growth whose zeros do not satisfy the known Levin conditions C and (C') and the function has an unbounded l_ρ-index. We propose approach to genaralize a concept of l-index boundedness for meromorphic functions.

Generalizing one-dimensional results on a multidimensional complex space we have been able in many cases to improve the new corresponding one-dimensional corollaries as by the weakening of sufficient conditions so by refinement of inequalities.

All results of the thesis are new. They have a theoretical meaning and can be used in multidimensional complex analysis and analytic theory of differential equations.

Keywords: entire function, analytic function, ball, polydisc, derivative in direction, partial derivative, bounded **L**-index in joint variables, bounded L-index in direction, linear non-homogeneous n-th order differential equation, system of linear partial differential equations, zero distribution.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

1. Bandura, A.: Composition of entire functions and bounded L-index in direction. Mat. Stud. **47**(2), 179–184 (2017). doi: 10.15330/ms.47.2.179-184
2. Бандура, А., Скасків, О.: Логарифмічна похідна за напрямком та розподіл нулів цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком. Укр. мат. журн., **69**(3), 426-432 (2017). Engl. transl.: Bandura, A., Skaskiv, O.: Directional logarithmic derivative and the distribution of zeros of an entire function of bounded L-index along the direction. Ukr. Math. J. **69**(3), 500–508 (2017). doi: 10.1007/s11253-017-1377-8
3. Bandura, A., Skaskiv, O.: Entire functions of bounded **L**-index: Its zeros and behavior of partial logarithmic derivatives. J. Complex Analysis **2017**, 1–10 (2017). Article ID 3253095. doi: 10.1155/2017/3253095
4. Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic in an unit ball functions of bounded **L**-index in joint variables, Ukr. Mat. Visn., **14**(1), 1–15 (2017). Engl. transl.: Bandura, A., Skaskiv, O.: Functions analytic in a unit ball of bounded **L**-index in joint variables. J. Math. Sci. **227**(1), 1–12 (2017). doi: 10.1007/s10958-017-3570-6
5. Bandura, A., Skaskiv, O., Filevych, P.: Properties of entire solutions of some linear PDE's. J. Appl. Math. Comput. Mech. **16**(2), 17–28 (2017). doi: 10.17512/jamcm.2017.2.02
6. Bandura, A.I.: Some improvements of criteria of L-index boundedness in direction. Mat. Stud. **47**(1), 27–32 (2017). doi: 10.15330/ms.47.1.27-32
7. Bandura, A.I., Petrechko, N.V.: Properties of power series of analytic in a bidisc functions of bounded **L**-index in joint variables. Carpathian Math. Publ. **9**(1), 6–12 (2017). doi: 10.15330/cmp.9.1.6-12
8. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Analytic functions in the unit ball of bounded L-index: asymptotic and local properties. Mat. Stud. **48**, (1), 37–73 (2017). doi:10.15330/ms.48.1.37-73
9. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Growth of entire functions of bounded L-index in direction. Mat. Met. Phys.-mech. fields **60** (1), 22–31 (2017)
10. Bandura, A., Skaskiv, O.: Asymptotic estimates of entire functions of bounded **L**-index in joint variables. Novi Sad J. Math., **48** (1), 103–116 (2018). doi: 10.30755/NSJOM.06997
11. Bandura, A.I.: The properties of entire functions of bounded value L-distribution in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(13)**, 50–55 (2011)
12. Bandura, A.I.: The metric properties of a space of entire functions of bounded L-index in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(17)**, 46–52 (2012)
13. Bandura, A.I.: A modified criterion of boundedness of L-index in direction. Mat. Stud. **39**(1), 99–102 (2013)
14. Bandura, A.I.: A class of entire functions of unbounded index in each direction. Mat. Stud. **44**(1), 107–112 (2015). doi: 10.15330/ms.44.1.107-112
15. Bandura, A.I.: Entire function of unbounded index in any real direction. Prykarpatskyi Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(29)**, 24–30 (2015)
16. Bandura, A.I.: Properties of positive continuous functions in $\mathbb{C}^n$. Carpathian Math. Publ. **7**(2), 137–147 (2015). doi: 10.15330/cmp.7.2.137-147

17. Bandura, A.I.: Sum of entire functions of bounded L-index in direction. Mat. Stud. **45**(2), 149–158 (2016). doi: 10.15330/ms.45.2.149-158
18. Bandura, A.I., Bordulyak, M.T., Skaskiv, O.B.: Sufficient conditions of boundedness of **L**-index in joint variables. Mat. Stud. **45**(1), 12–26 (2016). doi: 10.15330/ms.45.1.12-26
19. Bandura, A.I., Petrechko, N.V.: Sum of entire functions of bounded index in joint variables. Electr. J. Math. Anal. Appl. **6**(2), 60–67 (2018).
20. Bandura, A.I., Petrechko, N.V., Skaskiv, O.B.: Analytic in a polydisc functions of bounded **L**-index in joint variables. Mat. Stud. **46**(1), 72–80 (2016). doi: 10.15330/ms.46.1.72-80
21. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Boundedness of L-index in direction of functions of the form $f(\langle z, m\rangle)$ and existence theorems. Mat. Stud. **41**(1), 45–52 (2014)
22. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Open problems for entire functions of bounded index in direction. Mat. Stud. **43**(1), 103–109 (2015). doi: 10.15330/ms.43.1.103-109
23. Бандура, А.: Добуток двох цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком є функцією з того ж класу. Буковин. матем. журн. **4**(1-2), 8–12 (2016)
24. Бандура, А., Скасків, О.: Метричний простір Ієра, теорема існування та цілі функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. Буковин. матем. журн. **5**(3-4), 8–14 (2017)
25. Бандура, А., Петречко, Н.: Властивості степеневого розвинення цілої функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **82**, 27–33 (2016)
26. Бандура, А.: Нові критерії обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій. Мат. вісник НТШ **13**, 58–67 (2016)
27. Bandura, A.I., Sheremeta, M.M.: Bounded l-index and $l-M$-index and compositions of analytic functions. Mat. Stud. **48** (2), 180-188 (2017). doi: 10.15330/ms.48.2.180-188
28. Bandura, A.: Bounded l-index and infinite products of infinite genus. Visn. Lviv Un-ty, Ser. Mech. Math. Issue **84**, 71–79 (2017).
29. Bandura, A.I.: Analytic functions in the unit ball of bounded value L-distribution in a direction. Mat. Stud. **49** (1), 75–79 (2018). doi: 10.15330/ms.49.1.75-79
30. Bandura, A., Skaskiv, O.: Entire functions of several variables of bounded index. Publisher I. E. Chyzhykov, Chyslo, Lviv (2016)
31. Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic functions in the unit ball. Bounded **L**-index in joint variables and solutions of systems of PDE's. LAP Lambert Academic Publishing, Beau Bassin (2017)

Список праць здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Bandura, A.: A new class of functions of bounded L-index in direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблем теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, pp. 31–32. Івано-Франківськ (2011). Ворохта, 23-28 лютого 2011 року
2. Bandura, A.: The properties of a space of entire functions of bounded L-index in direction. Int. conf. dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: abstracts of reports, p. 122. Lviv (2012). Lviv, September 17-21, 2012
3. Bandura, A.: About boundedness and unboundedness of L-index of entire functions. Int. conf. “Complex analysis and related topics”: abstracts, p. 8. Lviv (2013). Lviv, September 23-28, 2013
4. Bandura, A.: A improvement of some criterion of boundedness L-index in direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 35–36. Івано-Франківськ (2013). Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013

5. Bandura, A.: Distribution of zeros of analytic in an unit ball functions of bounded L-index in direction. IV International Hahn conference dedicated to the 135-th anniversary of Hans Hahn: book of abstracts, pp. 222–223. Chernivtsi (2014). Chernivtsi, June 30 - July 5, 2014
6. Bandura, A.: Growth of analytic in an unit ball functions of bounded L-index in direction. IX-th Summer school Algebra, Topology and Analysis, pp. 3–4. Ivano-Frankivs'k (2014). Polianytsia, July 7 - July 18, 2014
7. Bandura, A.: Analytic in the unit ball functions of bounded L-index in direction and everywhere dense in a sequence of balls set. II International Seminar on Analytic functions, pp. 3–4. Ivano-Frankivs'k (2015). Ivano-Frankivsk, June 1-3, 2015
8. Bandura, A.: Entire function of unbounded index in any direction. Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаґе. Тези доповідей, с. 133–134. ЧНУ, Чернівці (2015). Чернівці, 1-4 липня 2015 року
9. Bandura, A.: Estimate of maximum modulus by minimum modulus for entire functions of bounded L-index in direction. Int. conf. "Complex analysis and related topics": abstracts, pp. 10–11. ЛНУ ім. І. Франка, Львів (2016). Lviv, May 30-June 4, 2016
10. Bandura, A.: L-index in direction of function of form $f(\sqrt{z_1 z_2})$. International Conference «Contemporary Problems of Natural Sciences» «Tarapov Readings-2016»: abstracts, p. 38. ХНУ, Харків (2016). Kharkiv, March 1-15, 2016
11. Bandura, A.: Remark about bounded L-index in direction $\mathbf{b}$ of function $\cos\sqrt{z_1 z_2}$. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 50. ПНУ ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ (2016). Ворохта, 24-27 лютого 2016
12. Bandura, A.: Sums of entire functions of bounded L-index in direction. Друга Всеукр. наук. конф. „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції, с. 7–8. ІФНТУНГ (2016). Івано-Франківськ, 13-15 жовтня 2016
13. Bandura, A.: Analytic in a ball functions of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables. Int. conf. in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach: book of abstracts, p. 111. Lviv (2017). Lviv, Ukraine, September 18 – 23, 2017
14. Bandura, A.: Estimate minimum modulus of entire function of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 52. Івано-Франківськ (2017). Ворохта, 22-25 лютого 2017
15. Bandura, A., Petrechko, N.: Analytic functions in a bidisc of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables. Int. conf. "Complex analysis and related topics": abstracts, pp. 63–64. ЛНУ ім. І. Франка, Львів (2016). Lviv, May 30-June 4, 2016
16. Bandura, A., Petrechko, N., Skaskiv, O.: Dominating polynomial of power series of analytic in bidisc functions of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables: book of abstracts. Int. conf. in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, pp. 128–129. Lviv, Ukraine, September 18 – 23, 2017
17. Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic in a ball functions of bounded L-index in direction. Всеукр. наук. конф. „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції, с. 31 – 33. Івано-Франківськ (2011). Яремче, 13-15 жовтня 2011
18. Bandura, A., Skaskiv, O.: Existence theorems for analytic in a ball functions of bounded L-index in direction. International scientific conference “Theory of approximation of functions and its applications” dedicated to the 70th anniversary of corresponding member of NASU, prof. A. I. Stepanets: abstracts, p. 117. Kamianets-Podilsky, May 28 — June 3, 2012
19. Bandura, A.I.: Sufficient conditions of strongly boundedness index in direction for entire functions of 0 genus with “plane” zeros. Book of abstracts: Int. conf. „Complex analysis and its applications“, p. 12. Kharkiv (2011). Kharkiv, August 16-18, 2011

20. Bandura, A.I.: Growth estimate of entire functions of bounded **L**-index in joint variables. Int. conf. "Computational methods and Function theory 2017", pp. 33–34. UMCS, Lublin (2017). Lublin, Poland, July 10 – 15, 2017
21. Bandura, A.I., Kulinich, H.: Some problems in the theory of entire functions of unbounded index in direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 42–43. Івано-Франківськ (2014). Ворохта, 24 лютого - 2 березня 2014
22. Bandura, A.I., Kulinich, H.: The order of entire functions of bounded index on direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 7. Івано-Франківськ (2015). Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015
23. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Behavior of partial logarithmic derivatives and distribution of zeros of entire functions. Int. conf. "Theory of appoximation of functions and its applications"in honor of 75th anniversary of corresponding member of NASU, prof. A. I. Stepanets: abstracts, p. 18. Slovyansk, May 28 — June 3, 2017
24. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Properties of entire solutions of some linear PDE's: book of abstracts. Int. conf. on Differential equations, Mathematical Physics and Applications, p. 55. Vinnytsia, Vasyl Stus Donetsk Nat. Univ. (2017). Cherkasy, Ukraine, October, 17 – 19, 2017
25. Bandura, A.I.: Composition of entire functions and bounded L-index in direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 5. Івано-Франківськ (2018). Ворохта, 27 лютого - 2 березня 2018 року
26. Bandura, A.: Analytic solutions in the unit ball of system of partial differential equations and bounded **L**-index in joint variables. XIXth Int. conf. on analytic functions and related topics. Book of absracts, p. 32-33. University of Rzeszów (2018). Rzeszów, Poland, 25-29 June 2018
27. Бандура, А., Петречко, Н.: Два критерії обмеженості L-індексу за сукупністю змінних аналітичних у бікрузі функцій. II Всеукр. наук. конф. „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції, с. 18–19. ІФНТУНГ (2016). Івано-Франківськ, 13-15 жовтня 2016
28. Бандура, А., Петречко, Н.В., Скасків, О.Б.: Аналог теореми Хеймана для аналітичних у бікрузі функцій обмеженого **L**-індексу. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 114–115. ПНУ ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ (2017). Ворохта, 22-25 лютого 2017 року
29. Бандура, А. І., Скасків, О.Б.: Аналітичні функції в одиничній кулі обмеженого L-індексу за напрямком. Всеукр. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези с. 9. Івано-Франківськ (2018). Ворохта, 27 лютого - 2 березня 2018

Список публікацій, які додатково відображають результати дисертації

1. Bandura, A.I., Kulinich, H.M.: Entire functions of strongly bounded L-index in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(21)**, 46–52 (2013)
2. Bandura, A.I., Kulinich, H.M., Shegda, L.M.: The order of entire functions of bounded index in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(25)**, 22–25 (2014)
3. Скасків, О. Б., Бандура А. І.: Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції. ЛНУ-ІФНТУНГ, Львів – Івано-Франківськ (2015)
4. Bandura, A., Petrechko, N., Skaskiv, O.: Maximum modulus in a bidisc of analytic functions of bounded **L**-index and an analogue of Hayman's theorem. Mat. Bohemica, (2018) doi:10.21136/MB.2017.0110-16
5. Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic in the unit ball functions of bounded L-index in direction. `https://arxiv.org/abs/1501.04166`

ЗМІСТ

Анотація 2

Abstract 5

Перелік умовних позначень 14

Вступ 17

Розділ 1. Вихідні положення, огляд літератури та основні напрямки дослідження 27

1.1 Огляд відомих результатів, які відносяться до тематики дисертаційного дослідження . . . 27

1.2 Основні напрямки та результати дослідження . . . 36

1.2.1 Аналітичні в кулі функції обмеженого L-індексу за напрямком. . . 36

1.2.2 Аналітичні в кулі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. . . 40

1.2.3 Аналітичні в полікрузі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. . . 47

1.2.4 Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком. . . 48

1.2.5 Цілі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. . . 54

1.2.6 Обмежений l-індекс та M-індекс для функцій від однієї змінної. . . 61

Розділ 2. Аналітичні в кулі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за напрямком 65

2.1 Основне означення та властивості функцій обмеженого L-індексу за напрямком . . . 67

2.2 Допоміжний клас $Q^n_{\mathbf{b}}$ . . . 72

2.3 Критерії обмеженості L-індексу за напрямком, пов'язані з поводженням функції F . . . 73

2.4 Оцінка максимуму модуля на більшому колі через максимум модуля на меншому колі та через мінімум модуля . . . 78

2.5 Логарифмічна похідна та нулі. . . 84

2.6 Обмеженість L-індексу за напрямком аналітичних розв'язків деяких рівнянь з частинними похідними . . . 89

2.7 Зростання аналітичних в $\mathbb{B}^n$ функцій обмеженого L-індексу за напрямком . . . 93

Висновки до розділу 2 . . . 96

Розділ 3. Аналітичні в кулі функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних 97
3.1 Основні означення та позначення 97
3.2 Властивості $Q(\mathbb{B}^n)$. 99
3.3 Локальне поводження похідних функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних 100
3.4 Локальне поводження максимуму модуля аналітичної в кулі функції 107
3.5 Аналог теореми Хеймана для аналітичних в кулі функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних 113
3.6 Деяке застосування до рівнянь з частинними похідними: схема . . . 117
3.7 Обмеженість l_j-індексу за кожним напрямком $\mathbf{1}_j$ 118
3.8 Властивості степеневого розвинення аналітичних в одиничній кулі функцій 121
3.9 Оцінки зростання аналітичних в кулі функцій 124
3.10 Обмежений **L**-індекс за сукупністю змінних в обмеженій області . . . 131
3.11 Вичерпання одиничної кулі кулями меншого радіуса 132
3.12 Обмеженість L-індексу за сукупністю змінних аналітичних розв'язків систем рівнянь з частинними похідними 141
3.13 Оцінка максимуму модуля на кістяку полікруга 151
3.14 Поводження частинних логарифмічних похідних 154
Висновки до розділу 3 157

Розділ 4. Аналітичні в полікрузі функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних 159
4.1 Основні означення та позначення. 160
4.2 Поводження похідних аналітичних у полікрузі функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних 161
4.3 Аналог теореми Хеймана для аналітичних у бікрузі функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних 162
4.4 Деяка властивість степеневого розвинення аналітичної в бікрузі функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. 167
Висновки до розділу 4 168

Розділ 5. Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком 170
5.1 Цілі функції обмеженого L-розподілу значень за напрямком 172
5.2 Цілі функції необмеженого індексу за напрямком 175
5.3 Сума цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком 186
5.4 Модифіковані твердження про обмеженість L-індексу за напрямком 192
5.5 Обмеженість індексу цілих розв'язків деяких диф.рівнянь 200

5.6 Зростання цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком 212
5.7 Композиція цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком . . . 217
5.8 Метричні властивості простору цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком 223
Висновки до розділу 5 227

Розділ 6. Цілі функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних 229
6.1 Властивості функцій з класу Q^n 232
6.2 Локальні властивості функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних та їхніх частинних похідних 234
6.3 Аналоги достатніх умов логарифмічних критеріїв обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних 258
6.4 Аналог теореми Хеймана та її застосування до систем рівнянь з частинними похідними та композицій цілих функцій 269
6.5 Простори цілих функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних 294
6.6 Існування неперервної функції $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ такої, що ціла функція F має обмежений **L**-індекс за сукупністю змінних 298
6.7 Оцінки зростання цілих функцій 300
6.8 Достатні умови обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних для суми цілих функцій 307
Висновки до розділу 6 311

Розділ 7. Обмежений l-індекс та M-індекс для функцій однієї змінної 313
7.1 Обмежений l-індекс деяких композицій 315
7.2 Обмежений $l - M$-індекс деяких композицій 318
7.3 Обмеженість l-індексу та цілком регулярне зростання цілих функцій 322
7.4 Лінійні однорідні диференціальні рівняння з коефіцієнтами, що швидко зростають 328
7.5 Мероморфні функції обмеженого l-індексу 331
Висновки до розділу 7 335

Висновки 337

Список використаних джерел 340

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Для розділу 2

- $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ — заданий напрямок, $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $\overline{\mathbb{B}^n} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \le 1\}$, $L : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ $L(z) > \frac{\beta|\mathbf{b}|}{1-|z|}$, $\beta = \mathrm{const} > 1$, $\mathbf{b} \ne 0$.
- Для заданого $z \in \mathbb{B}^n$ позначимо $S_z = \{t \in \mathbb{C} : z + t\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n\}$, $l_z(t) = L(z + t\mathbf{b})$, $g_z(t) = F(z + t\mathbf{b})$.
- Для $\eta \in [0, \beta]$, $z \in \mathbb{B}^n$, визначимо $\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) = \inf\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z)} : |t| \le \frac{\eta}{L(z)}\right\}$, $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta, L) = \inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) : z \in \mathbb{B}^n\}$, та $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) = \sup\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z)} : |t| \le \frac{\eta}{L(z)}\right\}$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta, L) = \sup\{\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) : z \in \mathbb{B}^n\}$.
  Якщо це спричинятиме неоднозначностей, то $\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, t_0, \eta) \equiv \lambda_1^{\mathbf{b}}(z, t_0, \eta, L)$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z,\ t_0,\ \eta) \equiv \lambda_2^{\mathbf{b}}(z, t_0, \eta, L)$, $\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta) \equiv \lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, L)$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) \equiv \lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta, L)$, $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \equiv \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta, L)$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) \equiv \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta, L)$.
- Через $Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ визначимо клас усіх функцій L таких, що для всіх $\eta \in [0, \beta]$ $\quad 0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$.
- $\mathbb{D} \equiv \mathbb{B}^1$, $Q_\beta(\mathbb{D}) \equiv Q_{1,\beta}(\mathbb{D})$.
- Нехай $g_{z^0}(t) := F(z^0 + t\mathbf{b})$. Якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\quad g_{z^0}(t) \ne 0$ для всіх $t \in S_{z^0}$, то $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \emptyset$; якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\quad g_{z^0}(t) \equiv 0$, то $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \{z^0 + t\mathbf{b} \colon t \in S_{z^0}\}$. А якщо при деякому $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\quad g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ та a_k^0 — нулі $g_{z^0}(t)$, тобто, $F(z^0 + a_k^0\mathbf{b}) = 0$, то
$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \bigcup_k \left\{z^0 + t\mathbf{b} \colon |t - a_k^0| \le \frac{r}{L(z^0 + a_k^0\mathbf{b})}\right\}, \quad r > 0.$$
- $n_{\mathbf{b}}\big(r, z^0, 1/F\big) = \sum_{|a_k^0| \le r} 1$ — лічильна функція нулів a_k^0 функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$. Якщо це спричинятиме неоднозначностей, то $n(r, z^0, 1/F) = n_{\mathbf{b}}(r, z^0, 1/F)$.

Для розділу 3

- $\mathbf{1}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $[0, 2\pi]^n = \underbrace{[0, 2\pi] \times \cdots \times [0, 2\pi]}_{n \text{ раз}}$.
- для $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in [0, 2\pi]^n$ та $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ позначимо $\|K\| = k_1 + \cdots + k_n$, $Re^{i\Theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_n e^{i\theta_n})$, $K! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$.
- для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ використовуватимемо такі формальні позначення: $|A| = \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2}$, $arg\, A = (arg\, a_1, \ldots, arg\, a_n)$, $A \pm B = (a_1 \pm b_1, \ldots, a_n \pm b_n)$, $AB = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$, $A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdot \ldots a_n^{b_n}$, однак не порушуючи при цьому умов існування вказаних виразів.
- Для z, $w \in \mathbb{C}^n$ визначимо $\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n$, де $\overline{w}_k$ — комплексно спряжене число до w_k.
- для A, $B \in \mathbb{R}^n$ позначимо $\max\{A, B\} = (\max\{a_1, b_1\}, \ldots, \max\{a_n, b_n\})$, а запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$ для всіх $j \in \{1, \ldots, n\}$; подібно визначається відношення $A \le B$.
- Полікруг $\mathbb{D}^n(z^0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$.
- Кістяк полікруга $\mathbb{T}^n(z^0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| = r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$.
- Замкнений полікруг $\mathbb{D}^n[z^0, R] = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| \le r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$.

- для $K = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ та частинних похідних цілої функції $F(z) = F(z_1, \dots, z_n)$ використовуємо запис
$$F^{(K)}(z) = \frac{\partial^{\|K\|} F}{\partial z^K} = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} F}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}.$$
- $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)|\colon\ z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)\}$.
- Відкрита куля $\mathbb{B}^n(z^0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n :\ |z - z^0| < r\}$, сфера $\mathbb{S}^n(z^0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - z^0| = r\}$, замкнена куля $\{z \in \mathbb{C}^n :\ |z - z^0| \le r\}$ — через $\mathbb{B}^n[z^0, r]$, $\mathbb{B}^n = \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)$, $\mathbb{D} = \mathbb{B}^1 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$.
- Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, де $l_j(z) : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що
$$(\forall z \in \mathbb{B}^n)\colon\ l_j(z) > \beta/(1 - |z|),\ j \in \{1, \dots, n\}, \tag{1}$$
де $\beta > \sqrt{n}$ — деяка стала.

  Через $Q(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас функцій $\mathbf{L}$, які задовольняють (1) та $(\forall R \in \mathbb{R}_+^n, |R| \le \beta,\ j \in \{1, \dots, n\})\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(R) \le \lambda_{2,j}(R) < \infty$, де
$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{B}^n} \inf \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\},$$
$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{B}^n} \sup \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\}.$$
$$\Lambda_1(R) = (\lambda_{1,1}(R), \dots, \lambda_{1,n}(R)),\ \Lambda_2(R) = (\lambda_{2,1}(R), \dots, \lambda_{2,n}(R)).$$

Для розділу 4

У ньому чинні позначення з розділу 3, якщо тут не переозначені.

- $\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$.
- Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, де $l_j(z)\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервні функції такі, що
$$(\forall z \in \mathbb{D}^n)\colon\ l_j(z) > \beta/(1 - |z_j|),\ j \in \{1, \dots, n\},$$
а $\beta > 1$ — деяка стала, $\boldsymbol{\beta} := (\beta, \dots, \beta)$.

  Через $Q^n(\mathbb{D}^n)$ позначимо клас додатних неперервних вектор-функцій $\mathbf{L} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_+$, які задовольняють умову $(\forall r_j \in [0, \beta],\ j \in \{1, \dots, n\})\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(R) \le \lambda_{2,j}(R) < \infty$, де
$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{D}^n} \inf \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\},$$
$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{D}^n} \sup \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\}.$$

Для розділу 5

У ньому чинні позначення з розділу 2, якщо тут не переозначені.

- $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{2} = (2, \dots, 2) \in \mathbb{R}_+^n$.
- $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — заданий напрямок.
- $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція.
- $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) = \inf_{z \in \mathbb{C}^n} \inf \{L(z + t\mathbf{b})/L(z) : |t| \le \eta/L(z)\}$.
- $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \sup \{L(z + t\mathbf{b})/L(z) : |t| \le \eta/L(z)\}$.
- $Q_{\mathbf{b}}^n$ — клас додатних неперервних функцій L, які задовольняють умову $(\forall \eta \ge 0)\ \ 0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$.

- $G_r = G_r^{\mathbf{b}}(F) := \bigcup_{z\colon F(z)=0}\{z + t\mathbf{b}\colon |t| < r/L(z)\}$,
- Нехай a_k^0 - нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ при фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Через $n_{z^0}(r) = n_{\mathbf{b}}\big(r, z^0, 1/F\big) := \sum_{|a_k^0|\le r} 1$ позначимо лічильну функцію кількості нулів a_k^0 функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ в крузі $\{t \in \mathbb{C}\colon |t| \le r\}$. Якщо $F(z^0 + t\mathbf{b}) \equiv 0$ при всіх $t \in \mathbb{C}$ та заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$, то покладемо $n_{z^0}(r) = -1$.
- Нехай $L^*(z)$ — додатна неперервна функція в $\mathbb{C}^n$. Писатимемо $L \asymp L^*$, якщо для деяких θ_1, θ_2, $0 < \theta_1 \le \theta_2 < +\infty$, та для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ виконуються нерівності $\theta_1 L(z) \le L^*(z) \le \theta_2 L(z)$.

Для розділу 6

У ньому чинні позначення з розділу 3, якщо тут не переозначені.

- Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, де $l_j(z)$ — додатні неперервні функції, $z \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, а $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (\widetilde{l}_1(z), \dots, \widetilde{l}_n(z))$. Запис $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ означає, що існують $\theta_1 \in \mathbb{R}_+$, $\theta_2 \in \mathbb{R}_+$ такі, що $\forall z \in \mathbb{C}^n \;\; \theta_1 \widetilde{l}_j(z) \le l_j(z) \le \theta_2 \widetilde{l}_j(z)$.
- Через Q^n (зокрема, $Q := Q^1$) позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$ таких, що $\exists R_0 \in \mathbb{R}_+^n, \exists C, c \in \mathbb{R}_+^n (\mathbf{0} < c \le C)$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall z \in \mathbb{D}^n[z_0, R_0/L(z_0)] \quad c \le \mathbf{L}(z)/\mathbf{L}(z_0) \le C$.
- Клас Q^n можна ввести рівносильно так: для $R \in \mathbb{R}_+^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$ та $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$ визначимо

$$\lambda_{1,j}(z_0, R) = \inf\left\{l_j(z)/l_j(z^0)\colon z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\},$$
$$\lambda_{2,j}(z_0, R) = \sup\left\{l_j(z)/l_j(z^0)\colon z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\},$$
$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{1,j}(z_0, R), \quad \lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{2,j}(z_0, R),$$
$$\Lambda_k(R) = (\lambda_{k,j}(R), \dots, \lambda_{k,n}(R)) \quad (k \in \{1, 2\}).$$

  Відповідно, через Q^n позначимо клас додатних неперервних вектор-функцій $\mathbf{L}(z)$, які для кожного $R \in \mathbb{R}_+^n$ задовольняють умову $0 < \Lambda_1(R) \le \Lambda_2(R) < +\infty$.

В окремих підрозділах вводяться також додаткові позначення, які дійсні лише в них.

ВСТУП

Актуальність теми. Аналітична теорія диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними виникла ще в дев'ятнадцятому столітті. Її теоретичним опертям стали результати О. Коші, С. Ковалевської, Ф. Фробеніуса, Е. Хольмґрена. Їхні здобутки такі, як теорема Коші - Ковалевської про існування та єдиність задачі Коші для рівняння з частинними похідними з аналітичними коефіцієнтами, чи теорема Фробеніуса про інтегровність системи рівнянь з частинними похідними (так званої системи Пфаффа) або теорема єдиності Хольмґрена стали основою, на якій наступні покоління математиків побудували струнку теорію. Ще тоді ж Ш. Бріо та Ж. Буке [75, с. 325] сформулювали таку задачу: „Випадки, коли можна проінтегрувати диференціальне рівняння, надзвичайно рідкісні і їх варто розглядати як виняток; але ми можемо розглядати диференціальне рівняння як визначення деякої функції і пропонувати вивчати властивості цієї функції на основі вигляду диференціального рівняння.“ Так була поставлена давня велика наукова проблема в аналітичній теорії диференціальних рівнянь — проблема опису властивостей їхніх розв'язків.

Зважаючи на її загальність, інші математики ставили конкретніші питання, пов'язані з аналітичними властивостями розв'язків диференціальних рівнянь. Зокрема, тривалий час лишається нерозв'язаною відома класична проблема 1.35 з коментарями О. Е. Єременка зі збірника проблем У. Хеймана [65] про визначення верхніх та нижніх оцінок зростання цілих та мероморфних розв'язків алгебраїчних диференціальних рівнянь. Як слушно він зауважує там, існують певні оцінки зростання усіх мероморфних та цілих розв'язків алгебраїчних диференціальних рівнянь першого порядку. Вони отримані як самим О. Е. Єременком [95], так і А. А. Гольдбергом [265] та А. Мальмквістом [164]. Натомість для рівнянь другого порядку відомо, що порядок їхніх цілих розв'язків є додатним [246] . Інші цікаві результати про вигляд та поводження мероморфних розв'язків рівнянь другого порядку за додаткових припущень отримав Н. Штайнмец [237, 238]. Тим не менш, У. Хейман [129] вказує приклади рівнянь другого порядку, що не задовольняють умови Штайнмеца і для яких водночас невідомо, чи вони мають розв'язки нескінченного порядку зростання.

Водночас О. Е. Єременко [96] зазначає, що немає верхньої оцінки, яка справедлива для усіх цілих чи мероморфних розв'язків рівнянь порядку більшого за одиницю, хоча для певних типів рівнянь вищих порядків такі оцінки існують [129]. Крім того, досі залишається неспростованою давня гіпотеза про те, що $\ln|f(z)| \leq \exp_n(|z|)$ для цілих розв'язків алгебраїчних диференціальних рівнянь n-го порядку.

Проте більшість результатів свідчить, що великі класи диференціальних рів-

нянь мають своїми розв'язками аналітичні функції, які в тому чи іншому сенсі мають певні "регулярні властивості". Тим паче, що кожен розв'язок лінійного диференційного рівняння з цілими коефіцієнтами і старшим коефіцієнтом рівним одиниці локально є аналітичною функцією і за теоремою про монодромію допускає ціле продовження (тобто, на всю комплексну площину), яка за звичайними теоремами єдиності з теорії аналітичних функцій задовольняє те ж саме рівняння. Тому, тривалий час виглядала досить вірогідною гіпотеза видатного аналітика Б.Я. Левіна у формулюванні В. П. Петренка [279] про те, що кожен цілий розв'язок скінченного порядку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку з цілими коефіцієнтами має також цілком регулярне зростання. У такій постановці ця гіпотеза була спростована А.А. Гольдбергом [119], який показав, що довільна ціла функція f з нулями порядку щонайбільше $n-1$ задовольняє деяке лінійне однорідне диференціальне рівняння $n-$го порядку. Це спонукало А. А. Гольдберга спільно з Й. В. Островським накласти додаткову умову цілком регулярного зростання коефіцієнтів рівняння і висунути гіпотезу, що його цілі розв'язки скінченного порядку матимуть цілком регулярне зростання. Ця уточнена постановка відома в літературі під назвою проблеми Гольдберга - Островського - Петренка (GOP-проблема). Незважаючи на 30 років досліджень та численні монографії про властивості різних класів функцій цілком регулярного зростання [3, 123, 158, 178, 266, 269], ця задача залишається відкритою. Про це прямо написано в недавній статті відомого фахівця з аналітичної теорії диференціальних рівнянь І. Лайне [134] у співавторстві з Я. Хейтокангасом, К. Тохґе та Ч.-Т. Вен, які отримали певні результати стосовно цієї проблеми, коли коефіцієнти або розв'язки рівняння є експоненційними многочленами.

Серед методів дослідження властивостей розв'язків диференціальних рівнянь найрізноманітнішого вигляду одне з центральних місць займає теорія Вімана-Валірона, методи якої віддавна продемонстрували свою ефективність. Зокрема, У. Хейман скористався цими методами для отримання оцінок зростання розв'язків в [129], виділивши підклас алгебраїчних диференціальних рівнянь n-го порядку, цілі розв'язки яких мають скінченний порядок, що не перевищує деякої сталої, залежної від степенів многочленів, які входять у рівняння.

У подальшому М.М. Шеремета [204, 205] і О.Б. Скасків [224, 280, 281] разом зі своїми учнями ефективно розвинули методи типу Вімана-Валірона в класах аналітичних функцій, зображуваних рядами Діріхле та деякими загальнішими об'єктами. І.Е. Чижиков зі своїми учнями [85, 86] зуміли закласти підвалини подібного підходу до дробових похідних, довівши аналог одного з основних співвідношень теорії в цьому випадку та застосувавши його до оцінки зростання розв'язків деяких рівнянь з дробовими похідними. Проте класична теорія

Вімана-Валірона стосується в основному властивостей цілих функцій, що задані своїми степеневими розвиненнями, та їхніх похідних. Вже навіть у випадку аналітичних функцій в одиничному крузі не все так прозоро, як у випадку цілих функцій, не говорячи вже про випадок аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області. Варто зазначити, що один з розробників методів типу Вімана-Валірона у багатовимірному комплексному просторі та його застосувань до рівнянь з частинними похідними Ш. Стреліц [239] скористався цим методом для того, щоб при дослідженні алгебраїчних диференціальних рівнянь першого порядку встановити обмеженість індексу їхніх цілих розв'язків.

З іншого боку в цілому ряді випадків тонкі дослідження властивостей аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь вдається проводити за допомогою методів теорії аналітичних функцій обмеженого l-індексу, започаткованої Б. Лепсоном [156] і Дж. Макдоннелом [162] та розробленої зусиллями С. Шаха, Г. Фріке, Р. Роя, М.М. Шеремети, О.Б. Скасківа, І. Е. Чижикова, А. Д. Кузика, В. О. Кушніра, М. Т. Бордуляк, Ю. С. Трухана, Ф. Нурая, Р. Патерсона та інших. Варто зазначити, що аналітичні функції обмеженого l- індексу мають цілий ряд "регулярних властивостей". Зокрема, в них у певному сенсі обмежений (рівномірний) розподіл значень. Відомий такий факт [128], що аналітична функція має обмежений l-розподіл значень тоді і тільки тоді, коли її похідна має обмежений l-індекс. Функції з таких класів допускають апріорні оцінки швидкості їхнього зростання, а також є розв'язками диференціальних рівнянь за прозорих умов на аналітичні коефіцієнти цих рівнянь.

Звідси, зокрема, щоразу для класу диференціальних рівнянь, обмеженість l-індексу розв'язків яких встановлюється, випливає доведення згаданої гіпотези У.Хеймана про максимально можливу швидкість зростання розв'язків у порівнянні зі швидкістю зростання коефіцієнтів диференціального рівняння. Варто зауважити, що поняття обмеженості індексу самодостатнє і теорія функцій обмеженого індексу має власні методи для дослідження властивостей аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь, тобто, в ній відсутня доконечна потреба в методі Вімана-Валірона для встановлення обмеженості індексу, як цим користувався Ш. Стреліц [239].

Водночас ще А. А. Гольдберг [267] непрямо поставив задачу встановлення взаємозв'язку між класом цілих функцій цілком регулярного зростання та класом цілих функцій обмеженого l_ρ-індексу, повне вирішення якої могло б наблизити розв'язання проблеми Гольдберга - Островського - Петренка (тут $l_\rho(r) = r^{\rho-1}$, ρ — порядок функції).

У зв'язку з викладеним вище є безсумнівним важливе значення досліджень різноманітних класів аналітичних функцій обмеженого l-індексу. Зрозуміло, що задачі, подібні до описаних вище, актуальні не лише для функцій з $\mathbb{C}$, а й для

функцій з $\mathbb{C}^n$. Зазначимо, що у теорії аналітичних функцій від декількох комплексних змінних є дві провідні групи методів. Перша з них ґрунтується на властивостях, які можна отримати з властивостей аналітичних функцій від однієї змінної, розглядаючи дану функцію F, як аналітичну функцію за кожною змінною окремо. Цей підхід породжує поняття обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, в означенні якого містяться усі можливі частинні похідні. Інша група методів обумовлена дослідженням так званих „зрізок“ функції, тобто, аналітичних функцій від однієї змінної $g(\tau) = F(a + b\tau), \tau \in \mathbb{C}$, які є звуженнями аналітичної функції F на довільні комплексні прямі $\{z = a + b\tau : \tau \in \mathbb{C}\}$, $a, b \in \mathbb{C}^n$. Відповідно, це призводить до поняття обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, яке використовує похідні за напрямком.

Крім самого n-вимірного комплексного простору, важливими геометричними об'єктами у ньому є куля та полікруг. Відкриті кулі та відкриті полікруги біголоморфно не еквівалентні між собою. Зате саме на таких об'єктах добре розробляти методи багатовимірного комплексного аналізу. Через це інтерес до аналітичних в кулі та полікрузі функцій досі залишається на високому рівні. Про це свідчать останні монографії [186, 245].

Зважаючи на вищезгадане, виникає необхідність розгляду таких класів функцій 1) цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком; 2) цілі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних; 3) аналітичні в кулі функції обмеженого L-індексу за напрямком; 4) аналітичні в кулі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних; 5) аналітичні в полікрузі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних; 6) мероморфні функції від однієї змінної. Для кожного з цих класів потрібно знайти не лише критерії приналежності до них, а й на основі знайдених критеріїв розробити або вдосконалити підходи до дослідження обмеженості індексу аналітичних розв'язків диференційних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Насправді перехід у $\mathbb{C}^n$ та введення в розгляд поняття функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних вимагає дослідження систем рівнянь з частинними похідними, а також знаходження оцінки їхніх аналітичних розв'язків через сталі, що залежать від коефіцієнтів.

Насамкінець варто визнати, що ідея О. Б. Скасківа, М. М. Шеремети та А. Д. Кузика [150] про заміну в означенні обмеженого індексу дробу $\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!}$ на $\frac{|f^{(p)}(z)|}{p! l^p(z)}$ ($l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція) виявилася досить вдалою та гнучкою, бо дозволяє досліджувати широкий клас цілих функцій через поняття обмеженого l-індексу. Про це свідчить такий результат [66]: для цілої функції $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ існує додатна неперервна функція l така, що f має обмежений l-індекс тоді і тільки тоді, коли нулі функції f мають обмежену кратність. Подібні твердження справджуються для аналітичних функцій від декількох комплексних змінних. Водночас така загальність не спостерігалася у випадку функцій від

однієї змінної обмеженого індексу ($l \equiv 1$). Такі функції, як відомо з результатів Ґ. Фріке та У. Хеймана [128], належать до функцій експоненційного типу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка.

Дисертаційна робота є складовою частиною досліджень за держбюджетними темами Мг–58Ф "Асимптотичні методи дослідження гармонійних та аналітичних функцій, зображених випадковими рядами, інтегралами Лапласа–Стільтьєса та їх узагальненнями" (номер держреєстрації 0110 U 001365), Мг–145Ф "Нові комплексно–ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами" (номер держреєстрації 0113 U 003051), Мг–159Ф "Методи комплексного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій в банахових просторах" (номер держреєстрації 0113 U 000184), що виконувались на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей.

Мета й завдання дослідження. *Мета дослідження* — розширення теорії цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком і обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, побудова теорії аналітичних у кулі чи полікрузі функцій обмеженого L-індексу за напрямком або обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, а також їхнє застосування в аналітичній теорії диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними та їхніх систем.

Завдання дослідження:

1) ввести гнучке поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій від декількох змінних, яке б дозволило досліджувати властивості будь-яких цілих функцій з обмеженою кратністю нульових точок, а також отримати критерії приналежності цілих функцій для цього класу;
2) ввести гнучке поняття обмеженості L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для аналітичних в одиничній кулі функцій, яке б дозволило досліджувати властивості будь-яких аналітичних в одиничній кулі функцій з особливостями на одиничній сфері, а також отримати критерії приналежності аналітичних функцій для цього класу;
3) знайти точні оцінки зростання логарифма максимуму модуля функцій з відповідних класів на колі чи кістяку полікруга;
4) виділити клас цілих функцій необмеженого індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ таких, що на кожній зрізці вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ вони мають обмежений індекс та знайти функцію L, для якої такі цілі

функції матимуть обмежений L-індекс за тим напрямком (задача А. А. Кондратюка);

5) довести гіпотезу про можливість послаблення достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком для цілих функцій (оцінка максимуму модуля, мінімуму модуля, логарифмічний критерій) шляхом заміни квантора загальності на квантор існування;
6) довести гіпотезу М. М. Шеремети [213] про обмеженість l-індексу деяких композицій аналітичних функцій від однієї змінної, встановити умови обмеженості L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних деяких композицій цілих функцій від декількох змінних;
7) дослідити обмеженість l-індексу цілих розв'язків рівняння $w^{(p)} = f(z, w)$, де $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ — ціла функція;
8) знайти достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних цілих чи аналітичних в кулі розв'язків систем рівнянь з частинними похідними загальнішого вигляду, ніж відомі досі, та отримати точні оцінки їхнього зростання через параметри, обумовлені коефіцієнтами систем;
9) застосувати вичерпування багатовимірного комплексного простору кулями для встановлення нових характеристичних властивостей цілих та аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних;
10) отримати аналог логарифмічного критерію та оцінки максимуму модуля через мінімум модуля для цілих та аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних;
11) з'ясувати, чи умову „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“ можна замінити на умову „F — голоморфна на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ у теорії цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком та отримати при цьому аналоги всіх тверджень (питання С. Ю. Фаворова);
12) для аналітичних в полікрузі та у кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних вивести аналог теореми Хеймана, з'ясувати поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд;

Об'єкт дослідження: цілі та аналітичні в кулі чи полікрузі функції від декількох змінних обмеженого L-індексу за напрямком та обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, цілі та аналітичні в крузі чи в площині з виколотою точкою функції від однієї змінної.

Предмет дослідження: асимптотичні та локальні властивості функцій з розглядуваних класів, аналітичних розв'язків рівнянь з частинними похідними та їхніх систем.

Методи дослідження: використовуються методи теорії функцій, багатовимірного комплексного аналізу, аналітичної теорії диференціальних рівнянь та

рівнянь з частинними похідними, а також певні прийоми з праць А. А. Гольдберга, М. М. Шеремети та їхніх учнів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У роботі вперше отримано такі результати:

1) узагальнено поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій від декількох змінних з використанням вектор-функцій $\mathbf{L}$ загальнішого вигляду, встановлено критерії приналежності цілих функцій до цього класу, теореми існування та інші властивості;
2) узагальнено поняття обмеженості L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для аналітичних в одиничній кулі функцій, досліджено характеристичні властивості функцій з цих класів;
3) знайдено точні оцінки зростання логарифма максимуму модуля функцій з цих класів функцій обмеженого індексу на колі чи кістяку полікруга;
4) виділено клас цілих функцій необмеженого індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ таких, що на кожній зрізці вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ вони мають обмежений індекс та знайдено функцію L, для якої деякі цілі функції з описаною властивістю матимуть обмежений L-індекс за тим самим напрямком;
5) повністю доведено гіпотезу про можливість послаблення достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком для цілих функцій (оцінка максимуму модуля, мінімуму модуля на колі, логарифмічний критерій) через заміну квантора загальності на квантор існування;
6) доведено достатність гіпотези М. М. Шеремети [213] про обмеженість l-індексу деяких композицій аналітичних функцій від однієї змінної, встановлено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних деяких композицій цілих функцій;
7) отримано достатні умови обмеженості l-індексу цілих розв'язків рівняння $w^{(p)} = f(z, w)$, де $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ — ціла функція;
8) знайдено достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних цілих та аналітичних в кулі розв'язків спеціальних систем лінійних рівнянь з частинними похідними вищих порядків та отримано точні оцінки їхнього зростання через параметри, залежні від коефіцієнтів систем;
9) виявлено нові характеристичні властивості цілих та аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних через оцінку максимуму модуля таких функцій на сфері замість кістяка полікруга;
10) вперше отримано аналоги логарифмічного критерію у вигляді достатніх умов та оцінки максимуму модуля через мінімум модуля для цілих та аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних;

11) доведено побудовою відповідного прикладу, що умову „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“ неможливо замінити на умову „F — голоморфна на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ у теорії цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком та отримати при цьому аналоги всіх тверджень;
12) встановлено аналог теореми Хеймана для аналітичних в кулі та у полікрузі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних та описано поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд;

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер та є вагомим внеском у теорію голоморфних функцій від декількох змінних. Зокрема, в теорію цілих функцій та функцій, аналітичних у кулі або у полікрузі. Вони можуть бути застосовані в аналітичній теорії звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, а також їхніх систем. Результати можуть бути використані для подальших досліджень в Інституті математики НАН України, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У спільних з науковим консультантом працях О.Б. Скасківу належать постановка задач, визначення загальної схеми дослідження та обговорення отриманих результатів. У спільній статті із М.М.Шереметою [62] співавтору належать постановка проблем та обговорення отриманих результатів. В опублікованій статті [47] М. Т. Бордуляк належать доведення теорем 3, 4, 5, 6 у випадку, коли $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$. Переробка їхніх доведень під загальніший клас функцій вигляду $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, $z \in \mathbb{C}^n$, а також доведення теорем 7, 8 належать здобувачу. У статті [36] П. В. Філевич — автор теорем 5 та 6, решта тверджень належать здобувачу. У статтях з Н. В. Петречко здобувач — автор теореми 2 з [54], теореми 5.1 з [26], теореми 2 з [252], теореми 2 з [52] і теорем 2-3 з [53]. Решта тверджень з вказаних чотирьох праць належать Н. В. Петречко. Твердження, отримані співавторами здобувача, включені у рукопис дисертації лишень у випадку, коли вони потрібні для подальших викладок. Для відмінності вони пронумеровані римськими цифрами та наводяться без доведень.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних та всеукраїнських конференціях, літніх школах та міжнародних семінарах:

1) International conference „Complex analysis and its applications“ (Kharkiv, August 16-18, 2011).
2) International conference “Theory of approximation of functions and its applications” dedicated to the 70th anniversary of corresponding member of NASU, professor A. I. Stepanets: (Kamianets-Podilsky, May 28 — June 3, 2012).
3) International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: abstracts of reports (Lviv, 17-21 September 2012).
4) International conference “Complex analysis and related topics”: abstracts (Lviv, September 23-28, 2013; Lviv, May 30-June 4, 2016).
5) IV International Hahn conference dedicated to the 135-th anniversary of Hans Hahn (Chernivtsi, June 30 - July 5, 2014).
6) IX-th Summer school Algebra, Topology and Analysis (Polianytsia, July 7 - July 18, 2014).
7) II Int. Seminar on Analytic functions (Ivano-Frankivsk, June 1-3, 2015).
8) Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаґе (Чернівці, 1-4 липня 2015 року).
9) International Conference «Contemporary Problems of Natural Sciences» «Tarapov Readings-2016» (Kharkiv, March 1–15, 2016).
10) International conference "Theory of appoximation of functions and its applications"in honor of 75th anniversary of corresponding member of NASU, professor A. I. Stepanets (Slovyansk, May 28 - June 3, 2017).
11) International conference "Computational methods and Function theory 2017"(July 10-15, 2017, UMCS, Lublin, Poland).
12) International conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (18-23 September 2017, Lviv, Ukraine).
13) International conference on Differential equations, Mathematical Physics and Applications (October 17-19, 2017, Cherkasy, Ukraine).
14) XIXth International conference on analytic functions and related topics (25-29 June 2018, University of Rzeszów, Poland).
15) Всеукраїнська наукова конференція „Сучасні проблем теорії ймовірностей та математичного аналізу“ (Ворохта, 23-28 лютого 2011, 25 лютого-3 березня 2013, 24 лютого - 2 березня 2014, 25 лютого - 1 березня 2015, 24-27 лютого 2016, 22-25 лютого 2017, 27 лютого - 2 березня 2018).
16) Всеукраїнська наукова конференція „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції (Яремче, 13-15 жовтня 2011; Івано-Франківськ 13-15 жовтня 2016).

Про результати дисертації неодноразово доповідалося на Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А. А. Кондратюк, проф. О. Б. Скасків у 2011-2016, тепер проф. М.В. Заболоцький, проф. О. Б. Скасків, проф. П.В. Філевич, проф. І.Е. Чижиков у 2017-2018) та на семінарі з теорії потенціалу та застосувань (керівники проф. О. Б. Скасків, проф. І. Е. Чижиков, 2012-2016), засіданнях математичної комісії Івано-Франківського осередку НТШ (2012-2018), семінарі з математичного моделювання в Івано-Франківському національному технічному університеті нафти і газу (керівник проф. В. М. Мойсишин, 2012-2017), а також на: семінарі „Analyse géometrique“ у лабораторії імені Поля Пенлеве, університет Лілль-1, Франція, 14 лютого 2014 року (керівники — проф. С. М. Івашкович, проф. Л. Бланш-Сенті); засіданнях математичної комісії Наукового Товариства ім. Шевченка (Львів, 27 березня 2015 року і 29 березня 2018 року); міському семінарі з теорії функцій в Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна, 5 квітня 2018 року (керівники — проф. С. Ю. Фаворов, проф. Л. Б. Голінський), семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник — проф. А.С.Романюк, 11 травня 2018 року), семінарі кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету ім. І. Франка (керівники — проф. Є. О. Севостьянов, проф. А. О. Погоруй, 18 травня 2018 року), семінарі відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник — проф. С.А. Плакса, 29 травня 2018 року), семінарі „Сучасний аналіз“ у Київському національному університеті ім. Т. Г. Шевченка (керівники — проф. І.О. Шевчук, проф. О.О. Курченко, проф. В.М. Радченко, 30 травня 2018 року).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 60 роботах [7–25, 27, 28, 30–49, 52–54, 56–64, 250–253, 256–258], 31 з них (в тому числі 13 статей) опубліковано без співавторів [7–23, 37–46, 63, 64, 250, 256], 29 статей [20,32–37,39–44,46,47,52–54,56–58,60,62–64,250–252,256] в українських та закордонних фахових виданнях із фізико-математичних наук, 11 статей надруковано в українських та закордонних виданнях [20,32–36,46,52,58,62,64], що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus), 2 — монографії [30,31], 29 тез конференцій [7–19,21–25,27,28,38,45,48,49,59,61,253,257,258].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 7 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 352 сторінки. Основний текст дисертації викладено на 339 сторінках. Список використаних джерел містить 297 найменувань та займає 13 сторінок. Дисертація містить чотири рисунки.

РОЗДІЛ 1. ВИХІДНІ ПОЛОЖЕННЯ, ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНІ НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Огляд відомих результатів, які відносяться до тематики дисертаційного дослідження

Прийнято вважати, що поняття обмеженого індексу для цілих функцій від однієї змінної запропоноване в 1968 р. Б. Лепсоном [156]. Хоча насправді воно вперше появилося у 1957 р. в дисертації (PhD) учня Б. Лепсона, Дж. Макдоннела [162]. Під функцією обмеженого індексу вони розуміли цілу функцію f, для якої існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}$ виконується

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!} \leq \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!} : 0 \leq k \leq N\right\}. \tag{1.1}$$

Найменше таке N, для якого справджується (1.1), називається індексом функції f і позначається $N(f)$. При цьому Б. Лепсон [156] сформулював задачу дослідження характеристичних властивостей функцій з цього класу. У 1968 р. С.М.Шах довів [191], що кожний цілий розв'язок рівняння $f^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)}(t) = 0$ зі сталими воефіцієнтами $a_j \in \mathbb{C}$ є функцією обмеженого індексу. Багато інших математиків (Г. Фріке, С. Шах, У. Хейман, В. Пудж, Ф. Ґрос, Р. Рой, В. Сисарчик, Б. Лі, Ґ. Крішна, М. Салмассі, Ґ. Франк, Е. Муес, А. Боуз, К. Екблау, Д. Сомасундарам, Р. Тхаміжарасі, М. Салмассі, С. Бажпаї, Б. Лі, О. Кнаб, В. Срінівасулу, С. Срідгар, В. Хеннекемпер, А. Кінґ, Р. Пауел, Х. Танґ, С. Датта, І. Лахірі, Н. Маюмдер [5, 74, 92, 94, 98–102, 106, 107, 109, 110, 112, 113, 125, 126, 135, 140, 143–145, 151, 154, 155, 157, 163, 165, 173, 185, 189, 193, 194, 197, 199, 202, 203, 223, 226–229, 231–236, 240]) присвятили свої статті дослідженню властивостей функцій обмеженого індексу, а також дослідженню обмеженості індексу цілих розв'язків різних типів диференціальних рівнянь скінченного порядку. У. Хейман [128] і Г.Фріке [105] довели, що кожна ціла функція має обмежений розподіл значень тоді і тільки тоді, коли її похідна має обмежений індекс, причому ціла функція $f(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ називається функцією обмеженого розподілу значень [128, 190], якщо існують сталі $p \geq 0$, $R > 0$ такі, що рівняння $f(z) = w$ має не більше, ніж p коренів у будь-якому крузі радіуса R.

Згодом результат С.М.Шаха [191] було узагальнено на випадок, коли коефіцієнти $a_j = a_j(z)$ рівняння $f^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)}(t) = 0$ є многочленами [192], а також на рівняння $f^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)}(t) = g(t)$, де $g(t)$ – ціла функція обмеженого індексу [114], або взагалі усі коефіцієнти $a_j(z)$ є цілими функціями обмеженого індексу, що задовольняють певні додаткові умови [115]. Врешті-решт С. Шах [198] та У. Хейман [128] довели, що кожна ціла функція обмеженого індексу є функцією експоненційного типу, тобто, має швидкість зростання не вищу

за нормальний тип при порядку зростання $\rho = 1$. Остання обставина істотно обмежує зону використання поняття функцій обмеженого індексу. Тому, природно, що з'являються різні менш чи більш вдалі спроби узагальнення цього поняття з метою виходу за межі класу функцій експоненційного типу:

- для цілих функцій від однієї змінної — обмежений M-індекс [116], узагальнений індекс [239], обмежений l-індекс [150], ν-обмежений індекс [184], обмежений індекс у сенсі Ґ. Франка [97], обмежений $l-M$-індекс [248], L-обмежений індекс [152], обмежений індекс над не-Архімедовим полем [230];
- для рядів Діріхле — обмежений індекс [4], лінійний обмежений l-індекс [219], M-обмежений індекс [229], обмежений $l-M$-індекс [166], обмежений $l-\mu$-індекс [215];
- для векторнозначних цілих функцій від однієї змінної — обмежений індекс зі sup-нормою [130], обмежений індекс з евклідовою нормою [182], ν-обмежений індекс [180], обмежений l-індекс [72];
- для векторнозначних цілих функцій від двох змінних — обмежений індекс зі sup-нормою [169];
- для аналітичних функцій від однієї змінної — обмежений l-індекс в крузі [283], обмежений l-індекс у довільній області $G \subset \mathbb{C}$ [149];
- для мероморфних функцій від однієї змінної — обмежений індекс [179];
- для цілих функцій від декількох змінних — обмежений індекс [188], L-обмежений індекс [80], обмежений $\mathbf{L}$-індекс [264], обмежений L-індекс за напрямком [254], обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних [47];
- для аналітичних функцій від декількох змінних — обмежений індекс у довільній області $G \subset \mathbb{C}^n$ [146], обмежений L-індекс за напрямком в кулі [29, 64], обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних у полікрузі [54], обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних у кулі [35].

Вище ми згадали лише перші статті, в яких вводилося відповідне поняття. Детальний аналіз усіх цих аналогів поняття цілої функції обмеженого індексу зайняв би надто багато місця, тому, зупинимося лише на найважливіших з них, які є близькими до наших досліджень. Перш за все зазначимо, що наразі найгнучкішим можна вважати означення поняття цілої функції обмеженого l-індексу, запропоноване А.Д. Кузиком та М.М. Шереметою [150] ($l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція). Їхня ідея полягала в заміні дробу $\frac{|f^{(p)}(t)|}{p!}$ на такий вираз $\frac{|f^{(p)}(t)|}{p! l^p(t)}$ в (1.1). При цьому вони встановили, що інші відомі на той час підходи до узагальнення поняття обмеженого індексу не дозволяють вийти за межі класу функцій експоненційного типу Зокрема, це стосувалося ідеї Т. Лакшмінарасімхана [152]. Натомість в [66] доведено, що для будь-якої цілої функції $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ з

обмеженими в сукупності кратностями нулів існує додатна неперервна функція l така, що f має обмежений l-індекс.

Поняття обмеженого M-індексу [116, 196] та обмеженого $l-M$-індексу [247, 248] дозволяють досліджувати цілі функції з необмеженоюв сукупністю кратністю нулів. Тут у відповідних означеннях просто замість $\frac{|f^{(p)}(t)|}{p!}$ у (1.1) беруть відповідно $\frac{M(f^{(p)},r)}{p!}$ та $\frac{M(f^{(p)},r)}{p!l^p(r)}$, де $M(f^{(p)},r)=\max\{|f^{(p)}(t)|\colon |t|=r\}$.

У працях А.А. Гольдберга, М.М. Шеремети, А.Д. Кузика, З.М. Шеремети, М.Т. Бордуляк, Ю.С. Трухана, І. Н. Пересьолкової та І.Е. Чижикова [66–71, 73, 87, 120–122, 147, 150, 207–212, 214, 218, 220, 221, 242, 262, 268, 270, 271, 273, 278, 284, 289–296] теорія цілих функцій від однієї змінної обмеженого l-індексу набула певного завершеного вигляду. Найважливішим її здобутком, поза всяким сумнівом, є логарифмічний критерій, бо, накладаючи обмеження на поводження логарифмічної похідної поза околами нулів певного радіуса та на розподіл нулів, він дає можливість досліджувати обмеженість l-індексу не лише цілих розв'язків диф.рівнянь, а й різного типу нескінченних добутків. Сформулюємо це твердження точно. Через Q позначимо клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій l таких, що $l(x+O(\frac{1}{l(x)}))=O(l(x))$ при $x\to+\infty$. Нехай a_k — нулі цілої функції $f(t)$, $t\in\mathbb{C}$. Для $r>0$ покладемо $n(r,t_0,1/f)=\sum_{|a_k-t_0|\le r}1$, $G_r(f)=\bigcup_k\{z:|z-a_k|\le r/l(|a^k|)\}$.

Теорема 1.1 ([220]). *Нехай $l\in Q$. Для того, щоб ціла функція f мала обмежений l-індекс необхідно і досить, щоб виконувались такі дві умови:*

1) *для будь-якого $r>0$ існувало $P=P(r)>0$, таке, що для всіх $t\in\mathbb{C}\setminus G_r(f)$ виконується нерівність $|f'(t)/f(t)|<Pl(|t|)$;*
2) *для довільного $r>0$ існувало $\widetilde{n}=\widetilde{n}(r)\in\mathbb{Z}_+$, що при всіх $t_0\in\mathbb{C}$ справджується $n(r/l(|t^0|),t_0,1/f)<\widetilde{n}$.*

Для цілих функцій обмеженого індексу ($l(z)\equiv 1$) логарифмічний критерій раніше встановив Г. Фріке [104].

Поняття обмеженого l-індексу природно поширюється на класи аналітичних в деякій області функцій. С. М. Строчик і М. М. Шеремета [283] узагальнили поняття обмеженого l-індексу для аналітичних в крузі функцій та отримали ряд аналогів відомих теорем про властивості цілих функцій обмеженого l-індексу. Згодом В. О. Кушнір та М. М. Шеремета [149] поширили це поняття на клас аналітичних у довільній області з $\mathbb{C}$ функцій. Власне, нехай G — довільна область з $\mathbb{C}$, а l — додатна неперервна функція в G така, що для всіх $z\in G$ виконується

$$l(z)>\frac{\beta}{dist\{z,\partial G\}}, \tag{1.2}$$

де $\beta\equiv const>1$, а $dist\{z,\partial G\}$ — відстань від точки z до межі області G. Аналітичну в області G функцію f називають функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $p\in\mathbb{Z}_+$ і $z\in G$ виконується нерівність (1.1) зз

$\frac{|f^{(p)}(t)|}{p!l^p(t)}$ замість $\frac{|f^{(p)}(t)|}{p!}$. Різноманітні властивості функцій з цього класу досліджувались в [6,148,149,263,274–276]. Отримані там критерії вдало використав Ю. С. Трухан, який досліджував обмеженість l-індексу добутків Бляшке, Нафталевича - Цудзі та різних спеціальних аналітичних функцій [216,217,241,243,285–289].

Оскільки дана дисертація в основному стосується багатовимірного комплексного простору, опишемо здобутки теорії функцій обмеженого індексу для нього. Зазначимо, що наразі тут виокремилися два напрямки досліджень — функції $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ або функції $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Замість $\mathbb{C}$ чи $\mathbb{C}^n$ відповідно може бути також деяка область в них. У першому випадку, по суті, маємо цілі чи аналітичні в деякій області з $\mathbb{C}^n$ криві обмеженого індексу чи обмеженого l-індексу. З різними видами норм вони розглядалися Л. Ф. Хітом, С. М. Шахом, Р. Роєм, М. М. Шереметою, М. Т. Бордуляк у статтях [72, 130, 180, 182, 297].

У другому випадку отримуємо аналітичні функції від декількох комплексних змінних, які є основним об'єктом наших досліджень. Розглянемо докладніше як підходи до введення поняття обмеженого індексу в $\mathbb{C}^n$, так і встановлені раніше відповідні результати. Структура простору $\mathbb{C}^n$ диктує різні підходи, серед яких виділимо два фундаментально різні. Перший базується на понятті частинної похідної і в означенні відповідно розглядаються усі частинні похідні певного порядку. Так отримуємо поняття функції обмеженого індексу за сукупністю змінних. А для другого, основою є поняття похідної за напрямком, що призводить до поняття функції обмеженого індексу за напрямком.

Спочатку, як і в [260, 261, 264], вважатимемо, що

$$\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|)) \in Q^n, \text{ де } l_j \in Q \ (j \in \{1, 2, \ldots, n\}).$$

Означення 1.1 ([264]). *Нехай $l_j : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — неперервні функції. Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називається функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу (за сукупністю змінних), якщо існує число $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ та $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$*

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \ K \in \mathbb{Z}_+^n, \ \|K\| \le m\right\},$$

де $\|J\| = j_1 + \ldots + j_n$, $F^{(J)}(z) = \dfrac{\partial^{\|J\|}F}{(\partial z_1)^{j_1}(\partial z_2)^{j_2}\cdots(\partial z_n)^{j_n}}$, $J! = j_1! \cdot \ldots \cdot j_n$, $\mathbf{L}^J(z) = l_1^{j_1}(|z_1|) \cdot \ldots \cdot l_n^{j_n}(|z_n|)$.

Якщо $l_j(x) \equiv 1, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то ціла функція називається функцією обмеженого індексу за сукупністю змінних. Найменше з таких чисел m називається $\mathbf{L}$-індексом функції F за сукупністю змінних і позначається $N(F, \mathbf{L})$.

Термін „за сукупністю змінних“ (in joint variables) введений порівняно недавно в [47] для того, щоб поняття обмеженого індексу, означені, відповідно, через частинні похідні і через похідні за напрямком, можна було легко розрізняти.

Наведене вище означення 1.1 (М.Т. Бордуляк, М.М. Шеремета [264]) при $n = 1$ збігається з означенням обмеженого l-індексу [150], а коли ще й $l \equiv 1$,

то з означенням обмеженого індексу [156]. Але при $\mathbf{L}(z) \equiv \left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ воно появилося значно раніше – у статті [146] Дж. Ґ. Крішна та С. М. Шах запропонували означення аналітичної в області $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ функції обмеженого індексу для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Якщо $\mathbf{L}(z) \equiv \left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ та $\Omega = C^n$, то означення 1.1 збігається з означенням Крішни - Шаха. Зазначимо, що насправді їхній підхід не дозволяє розглядати аналітичні в області функції обмеженого індексу. Усі функції, які задовольняють їхнє означення, необхідно є цілими навіть в інтерпретації для однієї змінної. Це випливає з необхідної умови обмеженості l-індексу для аналітичних в крузі радіуса R функцій [206, теорема 3.3, с.71]: $\int_0^r l(t)dt \to \infty$ при $r \to R$. Згодом М. Салмассі [187,188], ввів у розгляд цілі функції обмеженого індексу від двох змінних (в означенні Крішни-Шаха $\alpha = (1, 1)$ або, що те саме, в означенні 1.1 $\mathbf{L} \equiv (1, 1)$). Для них він встановив аналоги деяких теорем Фріке з [103, 108] про локальне поводження максимуму модуля цілої функції та її похідних на колі, а також теореми Хеймана з [128]. Зазначимо, що відповідні двовимірні твердження описували поводження максимуму модуля цілої функції та її частинних похідних на кістяку бікруга. Нещодавно одне з тих тверджень повторно довели Ф. Нурай та Р. Патерсон [170]. Крім цього, М. Салмассі [187] першим дослідив обмеженість індексу цілих розв'язків лінійних систем рівнянь з частинними похідними такого вигляду

$$\begin{cases} a_0 f^{(n_1,0)}(z) + a_1 f^{(n_1-1,0)}(z) + \ldots + a_{n_1} f(z) = g(z), \ a_0 \neq 0, \\ b_0 f^{(0,n_2)}(z) + b_2 f^{(0,n_2-1)}(z) + \ldots + b_{n_2} f(z) = h(z), \ b_0 \neq 0, \end{cases} \quad z = (z_1, z_2),$$

де $a_j \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$, $h(z)$ та $g(z)$ — довільні цілі функції в $\mathbb{C}^2$ обмеженого індексу за сукупністю змінних. Ним встановлено, що усі цілі розв'язки цієї системи мають обмежений індекс.

Паралельно Б. Чакраборти, Р. Чанда, Т. Куматра, [77–80], на основі згаданого вище підходу Т. Лакшмінарасімхана з [152], ввели поняття цілої функції від декількох змінних L-обмеженого індексу, де $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція. Також вони довели цілий ряд аналогів теорем Фріке для цілих функцій обмеженого індексу від багатьох змінних. Але, як встановили у випадку однієї змінної А.Д. Кузик та М. М. Шеремета [150], їхній підхід не дозволяє вийти за межі класу функцій експоненційного типу.

Ф. Нурай та Р. Патерсон [167] довели, що ціла функція від двох змінних обмеженого індексу матиме експоненційний тип. Крім того, ними ж [168] недавно встановлено зв'язок між поняттям обмеженого індексу та радіусом однолистості, відповідно p-листості, цілих функцій від двох змінних та їхніх частинних похідних у довільних точках з $\mathbb{C}^2$. Подібні твердження для $n = 1$ отримані в [195, 212].

Повертаючись до досліджень М. М. Шеремети, зазначимо, що йому зі своїми

учнями вдалося довести для цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних твердження, які описують 1) оцінку максимуму модуля частинних похідних цілої функції на кістяку полікруга через значення у центрі; 2) оцінку максимуму модуля на більшому кістяку через менший кістяк; 3) аналог теореми Хеймана з [128]; 4) оцінку зростання логарифма максимуму модуля функції на кістяку полікруга та 5) достатні умови обмеженості цілих розв'язків систем рівнянь з частинними похідними такого вигляду:

$$a_j(z)f^{(K_j^0)}(z) + \sum\nolimits_{\|K\|\le s-1} g_{K,j}(z)f^{(K)}(z) = h_j(z),\ j \in \{1,\dots,m\}$$

де для всіх $j \in \{1,\dots,m\}$ $\|K_j^0\| = s$, $\{f^{(K_j^0)}(z) : j = 1,\dots,m\}$ — множина усіх можливих частинних похідних порядку s функції f, цілі функції a_j, $g_{K,j}$, h_j є функціями з відокремленими змінними вигляду $g(z) = \prod\limits_{j=1}^{n} g_j(z_j)$.

Відзначимо, що на те, що в рамках поняття з означення 1.1 з $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|),\dots,l_n(|z_n|))$ його природно слід застосовувати до функцій з відокремленими змінними або до функцій вигляду $f(c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_nz_n)$, вказує необхідна умова обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних в сенсі означення 1.1, отримана у [264]:

$$\ln\max\{|f(z)| :\ |z_j| = r_j,\ j \in \{1,\dots,n\}\} = O\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}\int_0^{r_j} l_j(t)dt\right)$$

при $r_1 + \ldots + r_n \to +\infty$. Ця умова вказує на те, що такі функції асимптотично поводяться як функції з відокремленими змінними. Звідси отримуємо також, що функція $f(z_1,z_2) = \exp(z_1z_2)$ є необмеженого $\mathbf{L}$-індексу для будь-якої функції $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), l_2(|z_2|))$, адже $\ln\max\{|\exp(z_1z_2)| :\ |z_j| = r_j,\ j \in \{1,2\}\} = r_1r_2$. Хоча з іншого боку, $\exp(z_1z_2)$ взагалі не має нулів і, всупереч, цьому, природно було би очікувати (зважаючи на цитований вище одновимірний результат з [66]), що функція $\exp(z_1z_2)$ буде обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Цей недолік означення 1.1 ми усунемо в розділі 6 шляхом розгляду в означенні поняття ширшого класу вектор-функцій $\mathbf{L}$, а, отже й істотно ширшого класу функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Вище вже згадувалося про ще один підхід до введення поняття обмеженого індексу для цілих функцій від декількох змінних,який базується на використанні в означенні, замість частинних похідних, похідних за напрямком і основи якого розроблені у кандидатській дисертації здобувача. Наведемо означення відповідного поняття, введеного здобувачем спільно з О. Б. Скасківим в статті [254].

Нехай $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$, $\mathbf{0} = (0,\dots,0)$, $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — заданий напрямок, $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція.

Ціла функція $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого L-індексу за

напрямком $\mathbf{b}$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність:

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m! L^m(z)} \leq \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k! L^k(z)} : 0 \leq k \leq m_0\right\}, \tag{1.3}$$

де $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z), \partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}\Big(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z)\Big)$, $k \geq 2$.

Найменше таке ціле число m_0, для якого виконується (1.3), називається L-індексом за напрямком функції F та позначається через $N_{\mathbf{b}}(F, L)$. Якщо такого m_0 не існує, то покладемо $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \infty$, а F у цьому випадку називатимемо функцією необмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Якщо ж $L(z) \equiv 1$, то F називається функцією обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$ та $N_{\mathbf{b}}(F) = N_{\mathbf{b}}(F, 1)$ зветься індексом за напрямком $\mathbf{b}$. При $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$, $L(z) = l(z)$, $z \in \mathbb{C}$ нерівність (1.3) визначає функцію обмеженого l-індексу з l-індексом $N(F, l) \equiv N_1(F, l)$ [150, 273], а якщо додатково ще й $l(z) \equiv 1$, то отримуємо означення обмеженого індексу з індексом $N(F) \equiv N_1(F, 1)$ [156, 162].

Такий підхід у свій час появився через згадану вище певну обмеженість підходів на основі поняття з означення 1.1, а також через те, що ті підходи не дають змоги отримати аналог важливого в можливих застосуваннях логарифмічного критерію (аналог теореми 1.1).

Опишемо результати з кандидатської дисертації здобувача, які мають безпосереднє відношення до даної дисертації. Деякі з них сформульовано нижче у відповідних розділах даної дисертації (це переважно розділ 5), оскільки вони використовуються як допоміжні твердження у доведенні нових теоретичних положень.

Отже, нами [254, 259] було доведено кілька тверджень, які встановлюють зв'язок між функцією $F(z)$ обмеженого L-індексу за напрямом та функціями від однієї змінної вигляду $g_{z^0}(t) = F(z + t\mathbf{b})$, де $t \in \mathbb{C}$, і вказано вимоги на множину A, за яких виконується рівність $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A\}$, де $l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$, $N_{\mathbf{b}}(F, L)$ — L-індекс за напрямом $\mathbf{b}$ функції F. У свій час вони були повністю новими і обумовлені наявністю в означенні похідної за напрямом.

Теорема 1.2 ([254, 259]). *Ціла функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямом $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існує стала $M > 0$ така, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ функція $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$ є обмеженого l_{z^0}-індексу $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq M < +\infty$, як функція від $t \in \mathbb{C}$, де $l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$. При цьому $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{C}^n\}$.*

У зв'язку з теоремою 1.2 у 2006 р. проф. С.Ю. Фаворов сформулював таке *запитання*: за яких мінімальних вимог на множину A справджується рівність $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A\}$, де $l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$.

Через $\overline{A}$ позначимо замикання множини $A \subset \mathbb{C}^n$. Відповідно знайдені найменші вимоги на множину A набули такого вигляду.

Наслідок 1.1 ([55, 259]). *Нехай* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *— фіксований напрям,* A_0 *— довільна множина в* $\mathbb{C}^n$ *така, що* $\overline{A}_0 = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, c\rangle = 1\}$, *де* $\langle c, \mathbf{b}\rangle \neq 0$, $c \in \mathbb{C}^n$. *Ціла функція* $F(z)$ *є функцією обмеженого* L*-індексу за напрямом* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *тоді і тільки тоді, коли існує стала* $M > 0$ *така, що для всіх* $z^0 \in A_0$ *функція* $g^{\mathbf{b}}_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$ *є обмеженого* $l^{\mathbf{b}}_{z^0}$*-індексу* $N(g^{\mathbf{b}}_{z^0}, l^{\mathbf{b}}_{z^0}) \leq M < +\infty$, *як функція від* $t \in \mathbb{C}$, *де* $l^{\mathbf{b}}_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$. *При цьому* $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g^{\mathbf{b}}_{z^0}, l^{\mathbf{b}}_{z^0}) : z^0 \in A_0\}$.

Також у [259] було отримано кілька критеріїв, які описують обмеженість L-індексу за напрямом у термінах локального поводження похідних за напрямом, поводження максимуму та мінімуму модуля на колах, поводження логарифмічної похідної за напрямом, доведено аналог теореми Хеймана, а також встановлено зв'язок між функціями обмеженого L-індексу за напрямом та функціями обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за. Згадані критерії є багатовимірними аналогами тверджень для функцій обмеженого l-індексу. Зауважимо, що в багатьох доведеннях використовується методика, розроблена М.М. Шереметою, А.Д. Кузиком, Г.Фріке, У.Хейманом в одновимірному випадку [104, 108, 128, 150, 206, 219, 220], адаптована нами для похідних за напрямком. Специфіка наших досліджень полягає в тому, що накладаються умови на виконання певних нерівностей на колах будь-якого радіуса вздовж зрізок вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : \ t \in \mathbb{C}\}$. А з цього виводиться обмеженість L-індексу за напрямком.

Також було отримано твердження, яке вказує на обмеженість L-індексу за напрямом при зміні самого напряму.

Теорема 1.3 ([254, 259]). *Нехай* $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, $m \in \mathbb{C}, m \neq 0$. *Ціла функція* $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, *є функцією обмеженого* L*-індексу за напрямом* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *тоді і тільки тоді, коли* $F(z)$ *є обмеженого* L*-індексу за напрямом* $m\mathbf{b}$.

Частковий опис найменшої множини напрямів, достатньої для обмеженості L-індексу за усіма напрямами, дала така теорема.

Теорема 1.4 ([254, 259]). *Ціла функція* $F(z), z \in \mathbb{C}^n$, *буде функцією обмеженого* L*-індексу за кожним напрямом у* $\mathbb{C}^n$ *тоді і тільки тоді, коли вона буде функцією обмеженого* L*-індексу за кожним напрямом* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n, |\mathbf{b}| = 1$, *таким, що сума головних значень аргументів усіх компонент вектора* $\mathbf{b}$ *кратна* 2π, *тобто,* $\sum\limits_{j=1}^{n} \arg(b_j) = 2\pi m$, *де* $m \in \mathbb{Z}$.

Серед інших тверджень у [259] варто згадати теорему про обмеженість L-індексу за напрямком добутку цілих функцій від декількох змінних (одновимірні результати є в [80, 104, 111, 181, 183, 220]).

Також було встановлено зв'язок між цілими функціями обмеженого індексу за напрямком та обмеженого індексу в сенсі означення 1.1. Для $\eta > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ та додатної неперервної функції $L : \ \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ визначимо

$$\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) = \inf_{z\in\mathbb{C}^n} \inf\left\{L(z+t\mathbf{b})/L(z) : |t| \le \eta/L(z)\right\},$$
$$\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \sup\left\{L(z+t\mathbf{b})/L(z) : |t| \le \eta/L(z)\right\}.$$

Через $Q^n_{\mathbf{b}}$ позначимо клас функцій L, які задовольняють умову

$$(\forall \eta \ge 0):\ 0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty. \tag{1.4}$$

Припустимо, що для $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$ існують такі функції $l_j(z_j) \in Q$, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ справджується $L(z_1,\ldots,z_n) \le \min\{l_j(z_j) : j = 1,2,\ldots,n\}$. Тоді через $\widetilde{\mathbf{L}}(z)$ позначимо вектор-функцію $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (l_1(z_1), l_2(z_2), \ldots, l_n(z_n))$. За цих припущень правильна така теорема.

Теорема 1.5 ([254, 259]). *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{e}_j}$, ціла функція $F(z)$ — обмеженого L-індексу за кожним напрямом $\mathbf{e}_j$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Тоді $F(z)$ — обмеженого $\widetilde{\mathbf{L}}$-індексу за сукупністю змінних у сенсі означення 1.1.*

Крім того, в [259] отримано умови, за яких цілі розв'язки деяких рівнянь з частинними похідними є функціями обмеженого L-індексу за напрямом, і знайдено оцінки зростання тих розв'язків. Тому відповідні твердження мали одновимірні аналоги за винятком наведеного нижче наслідку 1.2. Розглянемо таку систему рівнянь з частинними похідними

$$a_{j,0}(z)F(z) + a_{j,1}(z)\frac{\partial F(z)}{\partial z_j} + \ldots + a_{j,p_j}(z)\frac{\partial^{p_j} F}{\partial z_j^{p_j}} = h_j(z), \quad 1 \le j \le n. \tag{1.5}$$

Для неї справджується наслідок, який дає достатні умови обмеженості $\widetilde{\mathbf{L}}$-індексу в сенсі означення 1.1.

Наслідок 1.2 ([254, 259]). *Нехай $a_{jk}(z)$, $h_j(z)$ — цілі функції обмеженого $l_j(z_j)$ -індексу за напрямом $\mathbf{1}_j = (0,\ldots,0,\underbrace{1}_{j-\text{те місце}},\ldots,0) \in \mathbb{C}^n$, $l_j \in Q^n_{\mathbf{1}_j}$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $k \in \{0,1,\ldots,p_j\}$, $p_j \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^n$. Нехай для кожного $r > 0$ та деякої сталої $M = M(r) > 0$ і всіх $z \in \mathbb{C}^n \backslash G_r^{\mathbf{1}_j}(a_{jp_j})$ (у нас $G_r^{\mathbf{1}_j}(a_{jp_j})$ визначається аналогічно, як і $G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ у (5.4)) виконуються нерівності $|a_{jk}(z)| \le M|a_{jp_j}(z)|l_j^{p_j-k}(z_j)$. Якщо $F(z)$ — цілий розв'язок системи (1.5), то $F(z)$ — обмеженого $\widetilde{\mathbf{L}}$-індексу за сукупністю змінних у сенсі означення 1.1, де $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (l_1(z_1),\ldots,l_n(z_n))$.*

У зв'язку з теоремою 1.2 виникло таке *питання:* чи існує ціла функція $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ і напрямок $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ такі, що $N(g_{z^0}, l_{z^0}) < +\infty$ для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$, але $N_{\mathbf{b}}(F,L) = +\infty$? У статті [255] розглянуто цілу функцію $F(z_1,z_2) = \cos\sqrt{z_1z_2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(z_1z_2)^n}{(2n)!}$ і доведено, що при $z_1 = z_1^0 + t, z_2 = z_2^0 + t$, де $z_1^0, z_2^0 \in \mathbb{C}$ — фіксовані, $t \in \mathbb{C}$, функція F — обмеженого індексу, як функція від t, але $F(z_1,z_2)$ є функцією необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b} = (1,1)$. З цього

прикладу випливає, що множину A_0 у наслідку 1.2 в загальному випадку не можна зменшити до скінченної множини.

Крім того, вивчалася обмеженість L-індексу композицій цілих функцій. Основним результатом такого типу є наступне твердження.

Теорема 1.6 ([255, 259]). *Якщо $f(t)$, $t \in \mathbb{C}$, — ціла функція обмеженого l-індексу і $N(f,l) = \widetilde{N}$, $l \in Q$, то $F(t,z) \equiv f(tz)$, $(t,z) \in \mathbb{C}^2$, — ціла функція обмеженого $L_1(t,z) \equiv (|z|+1)l(tz)$-індексу за напрямом $\mathbf{b}_1 = (1,0)$ і $N_{\mathbf{b}}(F,L_1) = \widetilde{N}$, обмеженого $L_2(t,z) \equiv (|t|+1)l(tz)$-індексу за напрямом $\mathbf{b}_2 = (0,1)$ і $N_{\mathbf{b}_2}(F,L_2) = \widetilde{N}$.*

Нагадаємо, що $f(z,t) = \exp(zt)$ має необмежений $\mathbf{L}$-індекс за означенням (1.1) для будь-якої вектор-функції $\mathbf{L}(z,t) = (l_1(|z|), l_2(|t|))$, але, зважаючи на теорему 1.6, вона має обмежений L-індекс за напрямком $(1,0)$ для $L(z,t) = |z|+1$ та за напрямком $(0;1)$ для $L(z,t) = |t|+1$.

Насамкінець, було доведено теорему, яка вказала шлях отримання достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямом для цілих функцій з "плоскими" нулями.

Теорема 1.7 ([249, 259]). *Якщо ціла функція $f(t)$, $t \in \mathbb{C}$, обмеженого l-індексу, $l(|t|) \in Q$, то функція $f(\langle z,m\rangle)$ обмеженого L-індексу за кожним напрямом $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, де $L(z) = l(|\langle z,m\rangle|)$, $z \in \mathbb{C}^n$, а m — довільний вектор з $\mathbb{C}^n$.*

З іншими проблемами у теорій функцій обмеженого індексу можна познайомитися у [57, 71, 207, 210, 225].

1.2 Основні напрямки та результати дослідження

У цьому підрозділі опишемо основні результати цього дисертаційного дослідження, а також їхній зв'язок з попередніми результатами, як попередників, так і результатами кандидатської дисертації здобувача.

1.2.1 Аналітичні в кулі функції обмеженого L-індексу за напрямком.

Нехай $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — заданий напрямок, $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $\overline{\mathbb{B}}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \le 1\}$, $L:\ \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n$

$$L(z) > \frac{\beta|\mathbf{b}|}{1-|z|},\ \beta = \mathrm{const} > 1, \mathbf{b} \neq 0.$$

Для заданого $z \in \mathbb{B}^n$ позначимо $S_z = \{t \in \mathbb{C} : z + t\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n\}$.

Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ називається функцією *обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{B}^n$ справджується така нерівність

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m! L^m(z)} \le \max_{0 \le k \le m_0} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k! L^k(z)},$$

де $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z), \partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}\Big(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z)\Big)$, $k \geq 2$.

Найменше таке ціле число $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ називається *L-індексом за напрямком* $\mathbf{b}$ *аналітичної функції* $F(z)$ *та позначається через* $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = m_0$.

Для $\eta \in [0, \beta]$, $z \in \mathbb{B}^n$, $t_0 \in S_z$ таких, що $z + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n$ визначимо $\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) = \inf\{L(z + t\mathbf{b})/L(z) : |t| \leq \eta/L(z)\}$, $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta, L) = \inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) : z \in \mathbb{B}^n\}$, та $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) = \sup\{L(z + t\mathbf{b})/L(z) : |t| \leq \eta/L(z)\}$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta, L) = \sup\{\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) : z \in \mathbb{B}^n\}$.

Через $Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ визначимо клас усіх функцій L таких, що для всіх $\eta \in [0, \beta]$ $0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta, L) \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta, L) < +\infty$. Нехай $\mathbb{D} \equiv \mathbb{B}^1$, $Q_\beta(\mathbb{D}) \equiv Q_{1,\beta}(\mathbb{D})$. Для спрощення запису покладемо $l_z(t) = L(z + t\mathbf{b})$, $g_z(t) = F(z + t\mathbf{b})$ для заданого $z \in \mathbb{B}^n$.

Наступна теорема 2.1 з якісної точки зору є новою в теорії функцій обмеженого індексу, бо замість скрізь щільної множини на гіперплощині, розглядається скрізь щільна множина на послідовності сфер, збіжній до межі.

Теорема 2.1. *Нехай* (r_p) *— додатна послідовність така, що* $r_p \to 1$ *при* $p \to \infty$, $D_p = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| = r_p\}$, A_p *— скрізь щільна множина в* D_p *(тобто.* $\overline{A}_p = D_p$*) та* $A = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} A_p$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* $F(z)$ *є обмеженого* L*-індексу за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *тоді і тільки тоді, коли існує число* $M > 0$ *таке, що для всіх* $z^0 \in A$ *функція* $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$ *є обмеженого* l_{z^0}*-індексу* $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq M < +\infty$, *як функція від змінної* $t \in S_{z^0}$, *де* $l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$, *причому* $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A\}$.

Теорема 2.2. *Нехай* $\beta > 1$ *та* $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* $F(z)$ *має обмежений* L*-індекс за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *тоді і тільки тоді, коли для кожного* η, $0 < \eta \leq \beta$, *існує* $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ *та* $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ *таке, що для кожного* $z \in \mathbb{B}^n$ *існує* $k_0 = k_0(z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, *для якого справджується така нерівність*

$$\max\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z + t\mathbf{b})| : |t| \leq \eta/L(z)\} \leq P_1 |\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z)|.$$

Використовуючи теорему 2.2, доводиться такий критерій обмеженості L-індексу за напрямком.

Теорема 2.3. *Нехай* $\beta > 1$, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* $F(z)$ *має обмежений* L*-індекс за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *тоді і тільки тоді, коли для будь-якого* r_1 *та будь-якого* r_2 *при* $0 < r_1 < r_2 \leq \beta$, *знайдеться* $P_1 = P_1(r_1, r_2) \geq 1$ *таке, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$

$$\max\Big\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r_2}{L(z^0)}\Big\} \leq P_1 \max\Big\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : \ |t| = \frac{r_1}{L(z_0)}\Big\}.$$

Нижче наводимо критерій, який є аналогом теореми Хеймана [128]. Він зручний для отримання достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком та оцінок зростання аналітичних розв'язків рівнянь з частинними похідними.

Теорема 2.4. *Нехай $\beta > 1$ та $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існують $p \in \mathbb{Z}_+$ та $C > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n$ справедлива така нерівність*

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L^{p+1}(z)} \le C \max\left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{(k)} F(z)|}{L^k(z)} : \ 0 \le k \le p \right\}.$$

Наступна теорема забезпечує оцінку максимуму модуля аналітичної функції на колі вздовж зрізки за напрямком через її мінімум модуля. Вона носить допоміжний характер, але досить важлива для доведення логарифмічного критерію.

Теорема 2.5. *Нехай $\beta > 1$ та $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного R, $0 < R \le \beta$, знайдуться числа $P_2(R) \ge 1$ та $\eta(R) \in (0, R)$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $r = r(z^0) \in [\eta(R), R]$ виконується нерівність*

$$\max\Big\{ |F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = r/L(z^0) \Big\} \le P_2 \min\Big\{ |F(z^0 + t\mathbf{b})| : \ |t| = r/L(z^0) \Big\}.$$

Наступний критерій обмеженості L-індексу за напрямком описує поводження логарифмічної похідної за напрямком та розподіл нулів аналітичної в кулі функції. Відповідне твердження для цього класу голоморфних функцій, а також для інших, часто називатимемо для стислості логарифмічним критерієм. Нам потрібні додаткові позначення.

Нехай $g_{z^0}(t) := F(z^0 + t\mathbf{b})$. Якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\quad g_{z^0}(t) \ne 0$ для всіх $t \in S_{z^0}$, то приймемо за означенням $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \emptyset$; якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $g_{z^0}(t) \equiv 0$, то позначаємо $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \{z^0 + t\mathbf{b} \colon t \in S_{z^0}\}$. А якщо при деякому $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\ g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ та a_k^0 — нулі $g_{z^0}(t)$, тобто, $F(z^0 + a_k^0 \mathbf{b}) = 0$, то вважаємо, що

$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \bigcup_k \left\{ z^0 + t\mathbf{b} \colon |t - a_k^0| \le r/L(z^0 + a_k^0 \mathbf{b}) \right\}, \quad r > 0.$$

Нехай $G_r^{\mathbf{b}}(F) = \bigcup_{z^0 \in \mathbb{B}^n} G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0)$. Через $n\big(r, z^0, 1/F\big) = \sum_{|a_k^0| \le r} 1$ позначимо лічильну функцію нулів a_k^0.

Теорема 2.6. *Нехай $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ та $\mathbb{B}^n \setminus G_\beta^{\mathbf{b}}(F) \ne \emptyset$. $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли:*

1) *для кожного $r \in (0, \beta]$ існує $P = P(r) > 0$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)$*

$$\left| \frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} \right| \le P L(z);$$

2) *для кожного $r \in (0, \beta]$ знайдеться $\widetilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$ при $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$*

$$n\left(\frac{r}{L(z^0)}, z^0, \frac{1}{F} \right) \le \widetilde{n}(r).$$

Розглянемо таке рівняння з частинними похідними

$$g_0(z)\partial_{\mathbf{b}}^p w + g_1(z)\partial_{\mathbf{b}}^{p-1} w + \ldots + g_p(z)w = h(z). \tag{1.6}$$

Для цього рівняння правильна така теорема, яка забезпечує достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком аналітичних у кулі його розв'язків та доводиться із використанням логарифмічного критерію.

Теорема 2.7. *Нехай $\beta > 1$, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$, $g_0(z), \ldots, g_p(z), h(z)$ — аналітичні в $\mathbb{B}^n$ функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, $\mathbb{B}^n \backslash G_\beta^{\mathbf{b}}(g_0) \neq \emptyset$ та для кожного $r \in (0;\beta]$ існує $T = T(r) > 0$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n \backslash G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ та $j = 1, \ldots, p$ виконується нерівність*

$$|g_j(z)| \leq TL^j(z)|g_0(z)|.$$

Тоді аналітична функція $F(z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, яка задовольняє рівняння (1.6), має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Позначимо $a^+ = \max\{a, 0\}$, $u(r) = u(z^0, \theta, r) = L(z^0 + re^{i\theta})$. Нижче наводимо оцінки зростання функцій з цього класу, які отримуються за допомогою аналога теореми Хеймана.

Теорема 2.8. *Нехай $L : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$, для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$, $\theta \in [0, 2\pi]$ функція $L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})$ — неперервно диференційовна від дійсної змінної $r \in [0, \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|})$. Якщо аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, то для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|})$ та кожного цілого числа $p \geq 0$*

$$\ln \max_{|t|=r} \left(\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0 + t\mathbf{b})|}{p! L^p(z^0 + t\mathbf{b})} \right) \leq \ln \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)|}{k! L^k(z^0)} : 0 \leq k \leq N \right\} +$$
$$+ \max_{\theta \in [0,2\pi]} \int_0^r \left\{ (N+1)L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) + N \frac{(-u_t'(z^0, \theta, t))^+}{L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b})} \right\} dt$$

Коли ж, крім того, для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $(-u'(r))^+ / (L^2(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})) \to 0$ при $r \to \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|}$ рівномірно по $\theta \in [0, 2\pi]$, тоді для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\varlimsup_{r \to (1-|z^0|)/|\mathbf{b}|} \frac{\ln |F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{\int_0^r L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) dt} \leq N_{\mathbf{b}}(F, L) + 1,$$

Наслідок 2.2. *Нехай $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ — аналітична функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, $N = N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n)$, z^0 — фіксована точка в $\mathbb{B}^n$ така, що $F(z^0) = 1$. За цих умов для кожного $r \in [0, \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|})$ справджується нерівність*

$$\int_0^r \frac{n(t, z^0, 0, 1/F)}{t} dt \leq \ln \max\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : \ |t| = r\} \leq$$
$$\leq \ln \max \left\{ \frac{1}{p! L^p(z^0)} \left| \frac{\partial^p F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| : 0 \leq k \leq N \right\} +$$
$$+ \max_{\theta \in [0,2\pi]} \int_0^r \left\{ (N+1)L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) + N \frac{(-L_t'(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}))^+}{L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b})} \right\} dt.$$

1.2.2 Аналітичні в кулі функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних. Нам потрібні деякі типові позначення. Позначимо $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{1}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $|z| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}$. Для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ використовуватимемо формальні позначення без порушення умов існування відповідних виразів $AB = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$, $A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{b_n}$, а запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; подібним чином визначається відношення $A \le B$. Для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ позначимо $K! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$, $\|K\| = k_1 + \cdots + k_n$. Додавання, скалярне множення та спряження визначені в $\mathbb{C}^n$ покомпонентно. Для $z \in \mathbb{C}^n$ та $w \in \mathbb{C}^n$ визначимо

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w}_1 + \cdots + z_n \overline{w}_n,$$

де $\overline{w}_k$ — комплексно спряжене число до w_k. Полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| < r_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ позначаємо через $\mathbb{D}^n(z^0, R)$, його кістяк $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| = r_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, замкнений полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| \le r_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{D}^n[z^0, R]$, $\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Відкрита куля $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z - z^0| < r\}$ позначається через $\mathbb{B}^n(z^0, r)$, її топологічна межа — це сфера $\mathbb{S}^n(z^0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z - z^0| = r\}$, замкнена куля $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z - z^0| \le r\}$ — через $\mathbb{B}^n[z^0, r]$, $\mathbb{B}^n = \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)$, $\mathbb{D} = \mathbb{B}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$.

Для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ та частинних похідних аналітичної в $\mathbb{B}^n$ функції $F(z) = F(z_1, \ldots, z_n)$ використовуємо запис

$$F^{(K)}(z) = \frac{\partial^{\|K\|} F}{\partial z^K} = \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}.$$

Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z) : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що

$$(\forall z \in \mathbb{B}^n): \ l_j(z) > \beta/(1 - |z|), \ j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.7}$$

де $\beta > \sqrt{n}$ — деяка стала. Позначимо $\boldsymbol{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{n}} \mathbf{1}$.

Аналітична функція $F \colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією *обмеженого* **L**-*індексу (за сукупністю змінних),* якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ та всіх $J \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J! \mathbf{L}^J(z)} \le \max \left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K! \mathbf{L}^K(z)} : \ K \in \mathbb{Z}^n_+, \ \|K\| \le n_0 \right\}.$$

Найменше таке ціле число n_0 називається **L**-*індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^n)$.

Через $Q(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас функцій **L**, які задовольняють (1.7) та таку умову $(\forall R \in \mathbb{R}^n_+, |R| \le \beta, \ j \in \{1, \ldots, n\}): \ 0 < \lambda_{1,j}(R) \le \lambda_{2,j}(R) < \infty$, де

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{B}^n} \inf \left\{ l_j(z)/l_j(z^0) : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0) \right] \right\},$$

$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{B}^n} \sup \left\{ l_j(z)/l_j(z^0) : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0) \right] \right\}.$$

Наступна теорема є базовою при встановленні ефективніших критеріїв обмеженості індексу, які формулюються в термінах поводження максимуму модуля на колі (кістяку полікруга) чи в термінах обмежень на логарифмічну похідну.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, *знайдеться* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ *таке, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *існує* $K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \le n_0$, *та*

$$\max \left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0) \right] \right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, аби для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\exists K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \le n_0$, *та*

$$\max \left\{ |F^{(K^0)}(z)| : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0) \right] \right\} \le p|F^{(K^0)}(z^0)|$$

і досить, щоб для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $\exists K^0_j = (0, \dots, 0, \underbrace{k^0_j}_{j-\text{те місце}}, 0, \dots, 0)$ *таких, що* $k^0_j \le n_0$ *та*

$$\max \left\{ |F^{(K^0_j)}(z)| : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0) \right] \right\} \le p|F^{(K^0_j)}(z^0)|.$$

Для аналітичної в кулі $\mathbb{B}^n$ функції F покладемо $M(r, z^0, F) = \max\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, r)\}$, де $z^0 \in \mathbb{B}^n$, $r \in \mathbb{R}^n_+$.

Теорема 3.3. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$, $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ — *аналітична функція. Якщо існують* R', $R'' \in \mathbb{R}^n_+$, $R' < R''$, $|R''| < \beta$ *та* $p_1 = p_1(R', R'') \ge 1$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$

$$M\left(R''/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\right) \le p_1 M\left(R'/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\right), \tag{1.8}$$

то F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Також справедливі такі необхідні умови.

Теорема 3.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то для будь-яких* R', $R'' \in \mathbb{R}^n_+$, $R' < R''$, $|R''| \le \beta$, *знайдеться номер* $p_1 = p_1(R', R'') \ge 1$ *такий, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *правильна нерівність* (1.8).

Наступна теорема є аналогом теореми Хеймана [128] для аналітичних в кулі функцій. Цей аналог нами застосовується до дослідження властивостей аналітичних розв'язків систем рівнянь з частинними похідними.

Теорема 3.5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична функція* F *в* $\mathbb{B}^n$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли знайдуться* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та*

$c \in \mathbb{R}_+$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n$

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)}:\ \|J\| = p+1\right\} \le c \cdot \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)}:\ \|K\| \le p\right\}.$$

Зв'язок між обмеженістю L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних встановлює така теорема.

Теорема 3.6. *Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. Якщо аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F має обмежений l_j-індекс за напрямком $\mathbf{1}_j$ для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$, то F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.*

Нехай $z^0 \in \mathbb{B}^n$. Розвинемо аналітичну функцію $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ у степеневий ряд, записаний у діагональній формі

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z - z^0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\|J\|=k} b_J (z - z^0)^J, \tag{1.9}$$

де p_k — однорідні многочлени k-го степеня, $b_J = \frac{F^{(J)}(z^0)}{J!}$. Многочлен p_{k_0}, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, називається головним у степеневому розвиненні (1.9) на $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, якщо для кожного $z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)$ виконується така нерівність

$$\left|\sum_{k \ne k^0} p_k(z - z^0)\right| \le \frac{1}{2} \max\{|b_J| R^J : \|J\| = k^0\}.$$

Теорема 3.8. *Нехай $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. Якщо аналітична функція F в $\mathbb{B}^n$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, то існує $p \in \mathbb{Z}_+$, що для всіх $d \in (0; \frac{\beta}{\sqrt{n}}]$ знайдеться $\eta(d) \in (0; d)$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $r = r(d, z^0) \in (\eta(d), d)$, $k^0 = k^0(d, z^0) \le p$ многочлен p_{k^0} є головним у ряді (1.9) на $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$.*

Теорема 3.9. *Нехай $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. Якщо існують $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \in (0; 1]$, $\eta \in (0; d)$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $R = (r_1, \dots, r_n)$ з $r_j = r_j(d, z^0) \in (\eta, d)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, та певного $k^0 = k^0(d, z^0) \le p$ многочлен p_{k^0} є головним у рядах (1.9) на $\mathbb{T}^2(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$, то аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.*

Позначимо $[0, 2\pi]^n = \underbrace{[0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi]}_{n \text{ раз}}$. Для $R = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in [0, 2\pi]^n$, $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ писатимемо

$$Re^{i\Theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}),\ arg\, A = (arg\, a_1, \dots, arg\, a_n).$$

Через $K(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_n)$, де $l_j : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ задовольняє (1.7) та існує $c \ge 1$ таке, що для будь-якого $R \in \mathbb{R}^n_+$ при $|R| < 1$ та $j \in \{1, \dots, n\}$ $\max_{\Theta_1, \Theta_2 \in [0, 2\pi]^n} \frac{l_j(Re^{i\Theta_2})}{l_j(Re^{i\Theta_1})} \le c$. У випадку $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|, \dots, |z_n|), \dots, l_n(|z_1|, \dots, |z_n|))$ маємо, що $\mathbf{L} \in K(\mathbb{B}^n)$. Легко довести, що

$\frac{|e^z|+1}{1-|z|} \in Q(\mathbb{D}) \setminus K(\mathbb{D})$, але $\frac{e^{e^{|z|}}}{1-|z|} \in K(\mathbb{D}) \setminus Q(\mathbb{D})$. Крім цього, при $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \in K(\mathbb{B}^n)$ також $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \in K(\mathbb{B}^n)$ та $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 \in K(\mathbb{B}^n)$. Для простоти запису позначимо $M(F,R) = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}$, де $|R| < 1$.

Теорема 3.10. *Нехай $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n) \cap K(\mathbb{B}^n)$, $\beta > c\sqrt{n}$. Якщо аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln M(F,R) = O\left(\min_{\sigma_n \in \mathcal{S}_n} \min_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_j} l_j(R(j,\sigma_n,t)e^{i\Theta})dt\right) \text{ при } |R| \to 1-0,$$

де σ_n — перестановка множини $\{1,\ldots,n\}$, $\mathcal{S}_n$ — множина усіх перестановок $\{1,\ldots,n\}$, $R(j,\sigma_n,t) = (r_1',\ldots,r_n')$, $r_k' = \begin{cases} r_k^0, & \text{якщо } \sigma_n(k) < j, \\ t, & \text{якщо } k = j, \\ r_k, & \text{якщо } \sigma_n(k) > j, \end{cases}$ $k \in \{1,\ldots,n\}$, $R^0 = (r_1^0,\ldots,r_n^0)$ фіксований радіус.

Наслідок 3.1. *Якщо $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n) \cap K(\mathbb{B}^n)$, $\min\limits_{\Theta \in [0,2\pi]^n} l_j(Re^{i\Theta})$ — неспадна за кожною змінною r_k, $k,j \in \{1,\ldots,n\}$, $k \neq j$, аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\} = O\left(\min_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_j} l_j(R^{(j)}e^{i\Theta})dt\right)$$

при $|R| \to 1-0$, де $R^{(j)} = (r_1,\ldots,r_{j-1},t,r_{j+1},\ldots,r_n)$.

Позначимо $a^+ = \max\{a,0\}$, $u_j(t) = u_j(t,R,\Theta) = l_j(\frac{tR}{r^*}e^{i\Theta})$, де $a \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $r^* = \max_{1\le j\le n} r_j \neq 0$ та $\frac{t}{r^*}|R| < 1$.

Теорема 3.11. *Нехай $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ — додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною r_k, $k \in \{1,\ldots,n\}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0,2\pi]^n$. Якщо функція $\mathbf{L}$ задовольняє (1.7) та аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс $N = N(F,\mathbf{L})$ за сукупністю змінних, то для кожного $\Theta \in [0,2\pi]^n$ та всіх $R \in \mathbb{R}_+^n$, $|R| < 1$, і $S \in \mathbb{Z}_+^n$*

$$\ln \max\left\{\frac{|F^{(S)}(Re^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Re^{i\Theta})} : \ \|S\| \le N\right\} \le \ln \max\left\{\frac{|F^{(S)}(\mathbf{0})|}{S!\mathbf{L}^S(\mathbf{0})} : \ \|S\| \le N\right\} +$$
$$+ \int_0^{r^*} \left(\max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{r^*}(k_j+1)l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right)\right\} + \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{k_j(-u_j'(\tau))^+}{l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right)}\right\}\right) d\tau.$$

Наслідок 3.2. *Нехай $\mathbf{L}(R)$ — додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною r_k, $k \in \{1,\ldots,n\}$, $|R| < 1$. Якщо функція $\mathbf{L}$ задовольняє (1.7) та аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс $N = N(F,\mathbf{L})$ за сукупністю змінних та для кожного $j \in \{1,\ldots,n\}$*

$$\frac{\langle R, \nabla l_j(R)\rangle}{r_j l_j^2(R)} \to 0 \text{ при } |R| \to 1-0,$$

то

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon \ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R)\rangle d\tau} \le N+1,$$

де $\nabla l_j(R) = (\frac{\partial l_j(R)}{\partial r_1}, \ldots, \frac{\partial l_j(R)}{r_n})$.

Наш основний результат про зростання аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних має такий вигляд.

Теорема 3.12. *Нехай* $\mathbf{L}(R) = (l_1(R), \ldots, l_n(R))$, $l_j(R)$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $|R| < 1$. *Якщо функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє* (1.7) *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F, \mathbf{L})$ *за сукупністю змінних, то*

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\int_0^1 \langle R, \mathbf{L}\,(\tau R)\rangle d\tau} \le N + 1.$$

Позначимо $\ell(z) = \min_{1\le j\le n} l_j(z)$, $\mathcal{L}(z) = \max_{1\le j\le n} l_j(z)$. Через $Q'(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}$, які задовольняють умову $(\forall r \in [0, \beta],\ j \in \{1, \ldots, n\})\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(r) \le \lambda_{2,j}(r) < \infty$, де

$$\lambda_{1,j}(r) = \inf_{z^0\in\mathbb{B}^n} \inf \left\{ l_j(z)/l_j(z^0) : z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\ell(z^0)\right] \right\},$$

$$\lambda_{2,j}(r) = \sup_{z^0\in\mathbb{B}^n} \sup \left\{ l_j(z)/l_j(z^0) : z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\ell(z^0)\right] \right\}.$$

$$\Lambda_1(r) = (\lambda_{1,1}(r), \ldots, \lambda_{1,n}(r)),\ \Lambda_2(r) = (\lambda_{2,1}(r), \ldots, \lambda_{2,n}(r)).$$

У цьому підрозділі такі позначення $\lambda_{1,j}(r)$, $\lambda_{2,j}(r)$, $\Lambda_1(r)$, $\Lambda_2(r)$ дійсні лише для теореми 3.13.

Основний результат про вичерпування кулями для аналітичних в одиничній кулі функцій має такий вигляд.

Теорема 3.13. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q'(\mathbb{B}^n)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, аби для кожного* $r \in (0, \beta]$ *існували* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ *такі, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *знайдеться* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, *для якого*

$$\max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right] \right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}$$

і досить, щоб для кожного $r \in (0, \beta]$ *знайшлися* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ *та* $p_0 > 0$ *такі, що для будь-якого* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *існує* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, *для якого*

$$\max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\ell(z^0)|\right] \right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

Позначимо $a^+ = \max\{a, 0\}$, $u_j(t) = u_j(t, R, \Theta) = l_j(\frac{tR}{r^*}e^{i\Theta})$, де $a \in \mathbb{R}$, $t \in [0, r^*]$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $r^* = \max_{1\le j\le n} r_j \ne 0$, тобто, $\frac{t}{r^*}|R| < 1$.

Нехай $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ — додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною r_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$. Через $W(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}$ таких, що

$$r^*(-(u_j(t, R, \Theta))'_{t=r^*})^+/(r_j l_j^2(Re^{i\Theta})) \to 0$$

рівномірно для всіх $\Theta \in [0, 2\pi]^n$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, при $|R| \to 1 - 0$.

Сформулюємо твердження, які дають оцінки зростання аналітичних розв'язків такої системи рівнянь з частинними похідними:

$$G_{p_j \mathbf{1}_j}(z) F^{(p_j \mathbf{1}_j)}(z) + \sum_{\|S_j\| \le p_j - 1} G_{S_j}(z) F^{(S_j)}(z) = H_j(z), \ j \in \{1, \ldots, n\} \qquad (1.10)$$

$p_j \in \mathbb{N}$, $S_j \in \mathbb{Z}_+^n$, H_j та G_{S_j} — аналітичні функції в $\mathbb{B}^n$. Позначимо $QW(\mathbb{B}^n) = Q(\mathbb{B}^n) \cap W(\mathbb{B}^n)$. Відповідно, $QW(\mathbb{D}) = Q(\mathbb{D}) \cap W(\mathbb{D})$.

Кажемо, що неоднорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду (1.10) належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{L})$, якщо $\mathbf{L} \in QW(\mathbb{B}^n)$, для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ та для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$ аналітичні в $\mathbb{B}^n$ функції H_j та G_{S_j} задовольняють такі умови:

1) для кожного $\|S_j\| \le p_j - 1$ та для будь-якого $M \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|M\| \le 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^n p_k$,
$\left| G_{S_j}^{(M)}(z) \right| \mathbf{L}^{S_j - M}(z) \le B_{S_j, M} l_j^{p_j}(z) |G_{p_j \mathbf{1}_j}(z)|$, $\left| G_{p_j \mathbf{1}_j}^{(M)}(z) \right| \le B_{p_j \mathbf{1}_j, M} \mathbf{L}^M(z) |G_{p_j \mathbf{1}_j}(z)|$,

2) для кожного $I \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|I\| = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^n p_k$, $\left| H_j^{(I)}(z) \right| \le D_{I,j} \mathbf{L}^I(z) |H_j(z)|$,

3) $G_{p_j \mathbf{1}_j}(z) \ne 0$,

де $B_{S_j, M}$, $D_{I,j}$, $B_{p_j \mathbf{1}_j, M}$ — додатні сталі, $\mathbf{H}(z) = (H_1(z), \ldots, H_n(z))$, $\mathbf{G}(z)$ — матриця, утворена з коефіцієнтів $G_{S_J}(z)$ системи (1.10).

Однорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду (1.10) належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{0}, \mathbf{L})$, якщо умова 1) виконується для $M \in \mathbb{Z}_+^n$ таких, що $\|M\| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^n p_k$ та $G_{p_j \mathbf{1}_j}(z) \ne 0$. Умова 2) не потрібна для однорідних систем.

Теорема 3.14. *Якщо неоднорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду* (1.10) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{L})$ *та аналітична функція* $F(z)$ *у* $\mathbb{B}^n$ *задовольняє* (1.10), *то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R| \to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta \in [0, 2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R e^{i\Theta}) \rangle d\tau} \le \max\{1, c\},$$

де c *визначене в* (3.101).

Якщо система (1.10) — однорідна ($H_j(z) \equiv 0$), то попередня теорема спроститься.

Теорема 3.15. *Якщо однорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду* (1.10) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{0}, \mathbf{L})$ *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *є розв'язком системи, то функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R| \to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta \in [0, 2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R e^{i\Theta}) \rangle d\tau} \le \max\{1, c\},$$

де c *визначена в* (3.101) *при* $D_{I,j} = 0$ *та* $\|I\| = -p_j + \sum_{k=1}^n p_k$ *замість* $\|I\| = 1 - p_j + \sum_{k=1}^n p_k$.

Нехай Z_F — нульова множина аналітичної в $\mathbb{B}^n$ функції F. Позначимо

$$G_R(F) = \bigcup_{z^0 \in Z_F} \mathbb{D}^n\left(z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right).$$

Теорема 3.16. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$, F *— аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція. Якщо* $\exists R \in \mathbb{R}^n_+$ *з* $r_j \in (0, \frac{\beta}{2\sqrt{n}})$, $\exists p_2 \geq 1$ $\exists \Theta \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{0} < \Theta < R$, $\exists R' > \mathbf{0}$ *(*$R' = \mathbf{0}$ *для* $Z_F = \emptyset$*) таке, що* $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\exists R^0 = R^0(z^0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta \leq R^0 \leq R$, *для якого*

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \cap G_{R'}(F)\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}) l_j(z^0)}$$

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\},$$

то функція F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (*meas *— лебегова міра на кістяку полікруга).*

Теорема 3.17. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Якщо аналітична функція* $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ *задовольняє такі умови:*

1) *для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, *існує* $p_1 = p_1(R) > 0$ *таке, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_R(F)$ *та для кожного* $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{1}{|F(z)|}\left|\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq p_1 l_j(z),$$

2) *для будь-яких* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, *та* $R' \geq \mathbf{0}$ *існує* $p_2 = p_2(R, R') \geq 1$ *таке, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$, *що* $T^n(z^0, \frac{R}{\mathbb{L}(z^0)}) \setminus G_{R'}(F) = \bigcup_i C_i \neq \emptyset$, *де* C_i *— зв'язні неперетинні множини, виконується принаймні одна з таких умов а)* $\max\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, *або б)* $\max\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, *або в)* $|F(z^*)| = \max_i \max_{z \in C_i} |F(z)|$, $|F(z^{**})| = \min_i \min_{z \in C_i} |F(z)|$, *і* z^*, z^{**} *належать до однієї і тієї самої множини* C_{i_0}

3) *для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, *існують* $\Theta, R' \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < \theta_j < \frac{2r_j}{2+3\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})}$, *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n$

$$meas\left\{G_{R'}(F) \cap \mathbb{D}^n\left[z, R/\mathbf{L}(z)\right]\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}) l_j^2(z)},$$

то F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (тут* $meas$ *— це* $2n$*-вимірна лебегова міра).*

Теорема 3.7. *Нехай* $F(z)$ *— аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція,* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$ *та для кожного* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\mathbb{B}^n \setminus G^{\mathbf{1}_j}_{\beta/\sqrt{n}}(F) \neq \emptyset$. *Якщо для кожного* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *справджуються такі умови:*

1) *для будь-якого* $r \in (0; \beta/\sqrt{n}]$ *існує* $P_j = P_j(r) > 0$ *таке, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n \setminus G^{\mathbf{1}_j}_r(F)$

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq P_j l_j(z);$$

2) *для будь-якого* $r > 0$ *існує* $\widetilde{n}_j(r) \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$, *для яких* $F(z^0 + t\mathbf{1}_j) \not\equiv 0$,

$$n_{\mathbf{1}_j}\left(\frac{r}{l_j(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) \le \widetilde{n}_j(r),$$

то $F(z)$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

1.2.3 Аналітичні в полікрузі функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних. У цьому підрозділі залишаються чинними позначення із попереднього підрозділу 1.2.2. Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервні функції такі, що

$$(\forall z \in \mathbb{D}^n)\colon\ l_j(z) > \beta/(1 - |z_j|),\ j \in \{1, \ldots, n\},$$

а $\beta > 1$ — деяка стала, $\boldsymbol{\beta} := (\beta, \ldots, \beta) \in \mathbb{R}^n$. С. Н. Строчик, М. М. Шеремета, В. О. Кушнір [206, 283] накладали подібну умову для функції $l\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}_+$ та $l\colon G \to \mathbb{R}_+$, де G — довільна область у $\mathbb{C}$.

Аналітична функція $F\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією *обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу (за сукупністю змінних),* якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ така, що для всіх $z \in \mathbb{D}^n$ та кожного $J \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon\ K \in \mathbb{Z}_+^n,\ \|K\| \le n_0\right\}.$$

Найменше таке ціле число n_0 називається $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{D}^n) = n_0$.

Через $Q(\mathbb{D}^n)$ позначимо клас неперервних вектор-функцій $\mathbf{L} = (l_1, \ldots, l_n) : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_+^n$, які задовольняють умову

$$(\forall R = (r_1, \ldots, r_n) \in [0, \beta]^n)(\forall j \in \{1, \ldots, n\})\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(R) \le \lambda_{2,j}(R) < \infty,$$

де $\lambda_{1,j}(R) = \inf\limits_{z^0 \in \mathbb{D}^n} \inf\left\{l_j(z)/l_j(z^0)\colon z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}$,

$\lambda_{2,j}(R) = \sup\limits_{z^0 \in \mathbb{D}^n} \sup\left\{l_j(z)/l_j(z^0)\colon z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}$.

Теорема 4.1. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^n)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{D}^n$ *функція* F *була обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних необхідно, щоб для кожного* $R \in \mathcal{B}^n$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{D}^n$ $\exists K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, *та*

$$\max\left\{|F^{(K^0)}(z)|\colon z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \le p|F^{(K^0)}(z^0)|$$

і досить, щоб для кожного $R \in \mathcal{B}^n$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{D}^n$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists K_j^0 = (0, \ldots, 0, \underbrace{k_j^0}_{j-\text{те місце}}, 0, \ldots, 0)$ *таке, що* $k_j^0 \le n_0$ *та*

$$\max\left\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \le p|F^{(K_j^0)}(z^0)|\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Далі наведемо наші результати для $n = 2$, тобто, для аналітичних в одиничному бікрузі функцій. Такий вибір обумовлений деяким спрощенням викладок

у відповідному розділі. Насправді нижче дві теореми справедливі для довільного $n \in \mathbb{N}$. Теорема 4.2 є аналогом відомої теореми Хеймана, встановленої ним для цілих функцій обмеженого індексу від однієї комплексної змінної [128].

Теорема 4.2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$. *Аналітична функція* F *в* $\mathbb{D}^2$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $c \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{D}^2$ *виконується нерівність*

$$\max\left\{\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z)l_2^{j_2}(z)} \colon j_1+j_2=p+1\right\} \le c\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z)l_2^{k_2}(z)} \colon k_1+k_2\le p\right\}.$$

Нехай $z^0 \in \mathbb{D}^2$. Розвинемо аналітичну в $\mathbb{D}^2$ функцію $F(z)$ у степеневий ряд, записаний у діагональній формі

$$F(z) = \sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} p_{k_1+k_2}((z_1-z_1^0),(z_2-z_2^0)) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j_1+j_2=k} b_{j_1,j_2}(z_1-z_1^0)^{j_1}(z_2-z_2^0)^{j_2}, \tag{1.11}$$

де p_k — однорідні многочлени степеня k, $b_{j_1,j_2} = \frac{F^{(j_1,j_2)}(z^0)}{j_1!j_2!}$. Многочлен $p_{k_0}, k_0 \in \mathbb{Z}_+$, називається головним у степеневому розвиненні (1.11) на $\mathbb{T}^2(z^0,R)$, якщо для кожного $z \in \mathbb{T}^2(z^0,R)$ правильна нерівність

$$|\sum_{k_1+k_2\ne k^0} p_{k_1+k_2}((z_1-z_1^0),(z_2-z_2^0))| \le \frac{1}{2}\max\{|b_{j_1,j_2}|r_1^{j_1}r_2^{j_2} \colon j_1+j_2=k^0\}.$$

Теорема 4.3. *Нехай* $\beta > 1$, $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$. *Якщо існують* $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \in (0;1]$, $\eta \in (0;d)$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{D}^2$ *та деякого* $R=(r_1,r_2)$ *при* $r_j = r_j(d,z^0) \in (\eta,d)$, $j \in \{1,2\}$, *і певного* $k^0 = k^0(d,z^0) \le p$ *многочлен* p_{k^0} *є головним у ряді* (4.15) *на* $\mathbb{T}^2(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$, *то аналітична в* $\mathbb{D}^2$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

1.2.4 Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком. Нагадаємо означення функцій з цього класу. Нехай $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$, $\mathbf{0} = (0,\dots,0)$, $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — заданий напрямок, $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція.

Ціла функція $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність (1.3).

Найменше таке ціле число m_0, для якого виконується (1.3), називається L-індексом за напрямком функції F та позначається через $N_{\mathbf{b}}(F,L)$. Якщо такого m_0 не існує, то покладемо $N_{\mathbf{b}}(F,L) = \infty$, а F у цьому випадку називатимемо функцією необмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$.

Нові результати, отримані у цьому підрозділі для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком істотно посилюють раніше встановлені нами твердження і їхньою основною принциповою відмінністю від результатів з кандидатської

дисертації здобувача [259], полягають у заміні у достатніх умовах з відповідних критеріїв квантора загальності на квантор існування. Тобто, з огляду на цю обставину, для того, щоб переконатися в обмеженості L-індексу за напрямком заданої функції, достатньо перевірити виконання певних нерівностей лише при деякому фіксованому значенні параметра (для кіл одного радіуса), а не для всіх можливих його значень. Цю ідею нам вдалося послідовно реалізувати для всіх основних критеріїв, а також при встановленні достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком цілих розв'язків рівнянь з частинними похідними.

Допоміжний клас $Q^n_{\mathbf{b}}$ означили на с. 35 нерівністю (1.4). Використовуючи ідею Фріке з [108], отримали модифікацію теореми XI на с.192 зі слабшими достатніми умовами обмеженості L-індексу за напрямком.

Теорема 5.4. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Якщо існують сталі $\eta > 0$, $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ існує $k_0 = k_0(z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого виконується нерівність*

$$\max\{|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z + t\mathbf{b})| : |t| \leq \eta/L(z)\} \leq P_1 |\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z)|,$$

то ціла функція $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Теорема 5.5. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, F — ціла функція в $\mathbb{C}^n$. Якщо існують $R > 0$, $P_2 \geq 1$ та $\eta \in (0, R)$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та деякого $r = r(z^0) \in [\eta, R]$ виконується нерівність*

$$\max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| \colon |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\} \leq P_2 \min\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| \colon |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\},$$

то функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Позначимо

$$G_r(F) := G^{\mathbf{b}}_r(F) \bigcup_{z\colon F(z)=0} \{z + t\mathbf{b} \colon |t| < r/L(z)\},$$

a^0_k - нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ при фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Через $n_{z^0}(r, F) = n_{\mathbf{b}}\big(r, z^0, 1/F\big) := \sum_{|a^0_k| \leq r} 1$ позначимо лічильну функцію нулів a^0_k функції зрізки $F(z^0 + t\mathbf{b})$ в крузі $\{t \in \mathbb{C} \colon |t| \leq r\}$. Якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та для всіх $t \in \mathbb{C}$ $F(z^0 + t\mathbf{b}) \equiv 0$, то ми покладемо $n_{z^0}(r) = -1$. Позначимо $n(r) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} n_z(r/L(z))$.

Теорема 5.6. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, $F(z)$ — ціла функція в $\mathbb{C}^n$. Якщо виконуються такі умови:*

1) *існують $r_1 > 0$, $P > 0$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}(F)$ правильна нерівність $\left|\frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq P$;*
2) *знайдеться $r_2 > 0$ таке, що $n(r_2) \in [-1; \infty)$ та $2r_1 \cdot n(r_2) < r_2/\lambda_{\mathbf{b}}(r_2)$, де r_1 — вибране з попередньої умови,*

то функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Зауважимо, що теореми 5.5 та 5.6 є новими навіть для цілих функцій від однієї змінної та $l \equiv 1$ (порівн. [104, 108, 220]).

Тепер розглянемо таке рівняння з частинними похідними

$$g_0(z)\partial_{\mathbf{b}}^p w + g_1(z)\partial_{\mathbf{b}}^{p-1} w + \ldots + g_p(z)w = h(z), \tag{1.12}$$

де g_j, h — цілі функції в $\mathbb{C}^n$, $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$. Відомо достатні умови [55,254,259] обмеженості L-індексу за напрямком для цілих розв'язків рівняння (1.12). У них, по суті, вимагається, щоб деякі нерівності повинні виконувалися зовні кругів будь-якого радіуса. Замінюючи квантор загальності на квантор існування, ми послабили ці умови.

Позначимо $g^*(z) = h(z) \cdot \prod_{j=0}^p g_j(z)$, $n(r, g^*) = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n} n_{\mathbf{b}}(r/L(z), z, 1/g^*)$, $r^* = \sup\limits_{s\geq 1} \frac{(s-1)\lambda_1(s)}{8(n(s,g^*)+1)}$. Справедлива така теорема.

Теорема 5.7. *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$, та $g_0(z), \ldots, g_p(z), h(z)$ — цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Припустимо, що існують $r \in (0; r^*)$ та $T > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r(g_0)$ та $j = 1, \ldots, p$ виконуються нерівності*

$$|g_j(z)| \leq TL^j(z)|g_0(z)|.$$

Тоді ціла функція F, яка задовольняє (1.12), має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Це твердження також є новим в одновимірному випадку (див. результати для обмеженого l-індексу в [273] та обмеженого індексу в [115]).

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$w^{(p)} = f(z, w). \tag{1.13}$$

С. М. Шах, Ґ. Фріке, М. М. Шеремета, А. Д. Кузик [114, 200, 273] та інші не вивчали обмеженість індексу цілого розв'язку рівняння (1.13), тому що права частина рівняння є функцією від двох змінних. Проте, зважаючи на теорію функцій обмеженого L-індексу за напрямком, цілком природно поставити це питання.

Проблема 1.1 ([57, Проблема 4]). *Нехай $p = 1$, $f(z, w)$ — ціла функція обмеженого L-індексу за напрямками $(1, 0)$ та $(0, 1)$. Якою є неперервна функція $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, що цілий розв'язок $w = w(z)$ рівняння (1.13) має обмежений l-індекс?*

Ми даємо відповідь на це питання для кожного $p \in \mathbb{N}$. Позначимо $\mathbf{1}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{1}_2 = (0, 1)$.

Теорема 5.8. *Нехай $l_j \in Q_{\mathbf{1}_j}^2$, $f(z, w)$ — ціла функція обмеженого l_j-індексу за напрямками $\mathbf{1}_j$ для кожного $j \in \{1, 2\}$. Якщо існує $C > 0$ та $l \in Q$ такі, що для всіх $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus (G_r^{\mathbf{1}_1}(f) \cup G_r^{\mathbf{1}_2}(f))$*

$$l_1(z, w) + l_2(z, w)|f(z, w)| \leq Cl(z),$$

то кожна ціла функція, що задовольняє (1.13), має обмежений l-індекс.

Як застосування теореми 5.8, ми розглянемо алгебраїчне диференціальне рівняння такого типу:

$$w^{(p)} = g(z) + \sum_{j=0}^{k} a_j w^j, \ a_j \in \mathbb{C}. \tag{1.14}$$

Наслідок 5.2. *Нехай $g(z)$ — ціла функція обмеженого l-індексу, $l^*(z) := l(z) + |g(z)|$, $l^* \in Q$. Тоді кожна ціла функція, яка задовольняє* (1.14)*, має обмежений l^*-індекс.*

Беручи до уваги теорему 1.2, виникло таке природне *питання* [255]: чи існує ціла функція $F(z)$ з $N(g_{z^0}, l_{z^0}) < +\infty$ для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$, але $N_{\mathbf{b}}(F, L) = +\infty$?

Нижче вітку квадратного кореня з комплексного числа вибираємо на основі умови $\sqrt{1} = 1$.

Ствердна відповідь на згадане питання отримана в [255, 259]. Там доведено, що $F(z_1, z_2) = \cos\sqrt{z_1 z_2}$ має необмежений індекс за напрямком $(1, 1)$. Згодом, цей результат узагальнено [42] для кожного напрямку $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Але традиційно розв'язування одних проблем призводить до виникнення інших. У нашому випадку цікавим є таке питання:

Проблема 1.2 ([57, Проблема 17])**.** *Які умови на нульову множину та зростання цілих функцій забезпечують обмеженість індексу функції $F(z_1^0 + b_1 t, z_2^0 + b_2 t)$ для кожної фіксованої точки $(z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C}^2$ та необмеженість індексу функції $F(z_1, z_2)$ за напрямком $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$?*

Відповідь дає така теорема.

Теорема 5.1. *Нехай $f(t)$, $t \in \mathbb{C}$, — парна ціла трансцендентна функція обмеженого індексу. Тоді: 1) для кожного напрямку $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ та кожної фіксованої пари z_1^0, $z_2^0 \in \mathbb{C}$ функція $g(t) = f(\sqrt{(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t)})$ є цілою функцією обмеженого індексу ($t \in \mathbb{C}$); 2) функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за кожним напрямком $\mathbf{b}$.*

Зазначимо, що в доведенні теореми 5.1 показується невиконання умов теореми VIII для деякого радіуса. Хоча насправді нам відоме її доведення для кожного радіуса, але воно громіздкіше. Це непрямо вказує можливості використання нових сформульованих вище теорем, отриманих нами для певного радіуса.

Зважаючи на описані властивості функції $F(z_1, z_2) = \cos\sqrt{z_1 z_2}$, на львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (2007) проф. А. А. Кондратюк поставив **питання**:

Проблема 1.3. *Якою є найменша неперервна функція $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$, що гарантуватиме обмеженість L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ функції $F(z_1, z_2) = \cos\sqrt{z_1 z_2}$?*

Використовуючи методи, якими вперше скористалися в [255], дано відповідь на питання Кондратюка в теоремі 5.10, згідно з якою ця функція має обмежений $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, де

$$L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2) := \begin{cases} \frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\sqrt{|z_1z_2|}}+1, & |z_1z_2|>\varepsilon^2, \\ \frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\varepsilon}+1, & |z_1z_2|\le\varepsilon^2. \end{cases}$$

Насправді на шляху пошуку відповіді на питання А. А. Кондратюка нами встановлено дещо більше. Опишемо ці результати. Розглянемо такі рівняння похідними за напрямком $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$

$$z_1z_2(b_1z_2+b_2z_1)\partial_{\mathbf{b}}^2F(z)+\frac{(b_1z_2-b_2z_1)^2}{2}\partial_{\mathbf{b}}F(z)+\frac{(b_1z_2+b_2z_1)^3}{4}F(z)=0 \quad (1.15)$$

для $b_1\neq 0,\ b_2\neq 0$ та

$$4z_1\partial_{\mathbf{b}}^2F(z)+2b_1\partial_{\mathbf{b}}F(z)+b_1^2z_2F(z)=0,\ \text{для } b_1\neq 0,\ b_2=0. \quad (1.16)$$

Для $b_1=0$, $b_2\neq 0$ можна розглянути рівняння з частинними похідними, яке збігається з (5.76) з точністю до перестановок змінних z_1 та z_2. По суті, нами доведено у теоремі 5.9, що кожний цілий розв'язок цих рівнянь є функцією обмеженого $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$-індексу за відповідним напрямком $\mathbf{b}$.

Нехай $\mathbb{L}_n$ $(n\ge 1)$ — клас додатних неперервних функцій $L\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{R}_+$. Відомо (у загальному випадку [150] та у випадку $l(r)\equiv 1$ [191]) для $n=1$, що якщо додатна неперервна функція $l(|z|)$ задовольняє умову

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{l(r)}\min\left\{l(t)\colon\ \frac{r}{1+\delta}\le t\le r\right\}=\lambda(\delta)\to 1 \quad (\delta\to+0), \quad (1.17)$$

та $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого l-індексу $N(f,l)=N_{\mathbf{1}}(f,l)$, то

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{l_0(r)}\le N(f,l)+1, \quad (1.18)$$

де $M_f(r)=\max\{|f(z)|\colon |z|=r\}$, $l_0(r)=\int_0^r l(t)dt$. У 2006 році на львівському семінарі з теорії аналітичних функцій проф. М. М. Шеремета поставив питання: *якою є оцінка зростання максимуму модуля цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком?* З (1.17)–(1.18) випливає, що якщо для фіксованого $z_0\in\mathbb{C}^n$, $\theta\in[0,2\pi]$ функція $l(r)=L(z_0+re^{i\theta}\mathbf{b})$ задовольняє (1.17), то для цілої функції F обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ маємо таку оцінку

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\max\{|F(z_0+\tau\mathbf{b})|\colon\ |\tau|=r\}}{\int_0^r L(z_0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\le N_{\mathbf{b}}(F,L)+1. \quad (1.19)$$

Для заданого $z^0\in\mathbb{C}^n$ розвинемо функцію $F(z^0+w\mathbf{b})$ у степеневий ряд по $w\in\mathbb{C}$

$$F(z^0+w\mathbf{b})=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z^0)w^m,\quad b_m(z^0)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m F(z^0)}{\partial\mathbf{b}^m}.$$

Позначимо

$$\mu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)=\max\{|b_m(z^0)|r^m : m\ge 0\},$$
$$\nu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)=\max\{m : |b_m(z^0)|r^m=\mu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)\},$$
$$\varphi(\delta,\theta,z^0)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}\min\left\{L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b}):\ \frac{r}{1+\delta}\le t\le r\right\}$$

та $a^+=\max\{a,0\}$. Легко бачити, що $\exists\ \lim_{\delta\to+0}\varphi(\delta,\theta,z^0):=\varphi_0(\theta,z^0)$, $\varphi(\delta,\theta,z^0)\le\varphi_0(\theta,z^0)\in[0,1]$.

Теорема 5.11. *Нехай $L\in\mathbb{L}_n$ буде така, що $rL(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})\to+\infty$ $(r\to+\infty)$ та $\varphi_0(\theta,z^0)\in(0,1]$ для деякого $z^0\in\mathbb{C}^n$ та $\theta\in[0,2\pi]$. Якщо ціла трансцендентна функція F є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ з $N_{\mathbf{b}}(F,L)<\infty$, то*

$$\tau(z^0,\theta):=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\nu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)}{rL(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}\le\frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)+1}{\varphi_0(\theta,z^0)},$$
$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\max\{|F(z^0+\tau\mathbf{b})|:|\tau|=r\}}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\le\frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)+1}{\varphi_0^2(\theta,z^0)}.$$

З теореми 5.11 випливає такий наслідок.

Наслідок 5.3. *Нехай $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, $L\in\mathbb{L}_n$ буде додатна неперервна функція така, що $(\forall z^0\in\mathbb{C}^n)$ $(\forall\theta\in[0,2\pi]):rL(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})\to+\infty$ $(r\to+\infty)$ та*

$$\inf_{z^0\in\mathbb{C}^n}\min_{\theta\in[0,2\pi]}\varphi_0(\theta,z^0)=\varphi_0\in(0,1]. \tag{1.20}$$

Якщо ціла трансцендентна функція F є обмеженого L-індексу з напрямком $\mathbf{b}$ з $N_{\mathbf{b}}(F,L)<\infty$, то

$$\sup_{z^0\in\mathbb{C}^n}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\nu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)}{rL(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}\le\frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)+1}{\varphi_0},$$
$$\sup_{z^0\in\mathbb{C}^n}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\max\{|F(z^0+\tau\mathbf{b})|:|\tau|=r\}}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\le\frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)+1}{\varphi_0^2}.$$

Зауважимо, що теорема 5.11 при $n=1$ є узагальненням відповідного результату Шеремети та Кузика [150] у двох напрямах: 1) відсутнє припущення, що функція l має вигляд $l(|z|)$; 2) відсутнє припущення, що $\varphi_0=1$ (наші результати справедливі для будь-якого $\varphi_0\in(0,1]$).

Теорема 5.12. *Нехай $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, f — ціла функція в $\mathbb{C}$, Φ — ціла функція в $\mathbb{C}^n$ така, що $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\ne0$ та $\left|\partial_{\mathbf{b}}^j\Phi(z)\right|\le K\left|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right|^j$, $K\equiv\mathrm{const}>0$, для всіх $z\in\mathbb{C}^n$ та кожного $j\le p$, де $p=N(f,l)$ або $p=N_{\mathbf{b}}(F,L)$ відповідно.*

Нехай $l\in Q$, $l(w)\ge1$, $w\in\mathbb{C}$ та $L\in Q_{\mathbf{b}}^n$, де $L(z)=\left|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right|l(\Phi(z))$. Ціла функція f має обмежений l-індекс тоді і тільки тоді, коли $F(z)=f(\Phi(z))$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Отримані умови є слабшими при $n = 1$, ніж в [277]. Зазначимо, що умова $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) \neq 0$ в теоремі 5.12 обумовлена суто методом доведення. Насправді її можна позбутися та довести загальніше твердження.

Теорема 5.13. *Нехай* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, f *— ціла функція в* $\mathbb{C}$, Φ *— ціла функція в* $\mathbb{C}^n$, $p = N(f, l)$ *або* $p = N_{\mathbf{b}}(F, L)$ *відповідно. Нехай* $l \in Q$, $l(w) \geq 1$, $w \in \mathbb{C}$ *та* $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, *де* $L(z) \asymp \max\limits_{1 \leq j \leq p} \left\{1, \left|\partial^j_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right|\right\} l(\Phi(z))$. *Ціла функція* f *має обмежений* l*-індекс тоді і тільки тоді, коли* $F(z) = f(\Phi(z))$ *має обмежений* L*-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$.

Теорема 5.13 є новою навіть при $n = 1$.

Також у дисертації встановлено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком для суми цілих функцій (це теореми 5.2, 5.3), причому теорема 5.2 є новою для $n = 1$, а теорема 5.3 є новою навіть у випадку $n = 1$ та $l \equiv 1$, тобто, для цілих функцій обмеженого індексу. Побудовано відповідний приклад двох цілих функцій обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$, сума яких є функцією необмеженого індексу за цим напрямком.

У наших дослідженнях обмеженості L-індексу за напрямком ми часто розглядали зрізки $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$. Потім фіксували $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та застосовували міркування з одновимірного випадку. Після цього будували рівномірні оцінки по усіх z^0. Це стислий опис методу.

Виходячи з цього, проф. С. Ю. Фаворов (2015) поставив таку **проблему**.

Проблема 1.4. *Нехай* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *— заданий напрямок,* $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна функція. Чи можна замінити умову „*F *голоморфна в* $\mathbb{C}^n$*“ на умову „*F *— голоморфна на усіх зрізках вигляду* $z^0 + t\mathbf{b}$*“ та з цього вивести усі відомі властивості цілих функцій обмеженого* L*-індексу за напрямком?*

Наша відповідь на питання Фаворова є заперечною. Таке послаблення обмежень на функцію F не дозволяє довести деякі теореми. А саме у твердженні 5.4 цієї дисертації побудовано приклад функції, яка голоморфна на зрізках $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$, але не голоморфна за сукупністю змінних і така, що вона має необмежений індекс за напрямком $\mathbf{b}$ в деякій обмеженій області. Хоча, як відомо, кожна ціла функція є обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$ в обмеженій області, в якій вона відмінна від тотожного нуля на зрізках $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ (див. лема 5.1).

1.2.5 Цілі функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних.

У цьому підрозділі залишаються дійсними позначення із підрозділу 1.2.2. Приклад функції $\exp(z_1 z_2)$ показує, що означення 1.1 введено для досить вузького класу цілих функцій. Для того, щоб мати змогу досліджувати будь-яку цілу функцію від декількох комплексних змінних з обмеженою кратністю нульових точок, потрібно вибирати вектор-функцію $\mathbf{L}$ загальнішого вигляду.

Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)$ — додатні неперервні функції, $z \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називається *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* якщо існує число $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ та $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \ K \in \mathbb{Z}_+^n, \ \|K\| \le m\right\}. \tag{1.21}$$

Найменше таке ціле число m, для якого (1.21) виконується, називається $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L})$.

Через Q^n (зокрема, $Q := Q^1$) позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ таких, що $\exists R_0 \in \mathbb{R}_+^n, \exists C, c \in \mathbb{R}_+^n (\mathbf{0} < c \le C)$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall z \in \mathbb{D}^n[z_0, R_0/L(z_0)]$

$$c \le \mathbf{L}(z)/\mathbf{L}(z_0) \le C.$$

Наступна теорема у вигляді необхідних умов обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних була встановлена в [264]. Власне, там доведено, що у випадку $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|, \ldots, l_n(|z_n|))$ необхідним є виконання умови (1.22) для однієї частинної похідної. Натомість достатність такої умови там довести не вдалося. Ми доводимо, що умова (1.22) є достатньою за припущення, що ця умова виконується для n частинних похідних за кожною змінною.

Теорема 6.1. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Якщо* $\forall R > \mathbf{0}$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists K_j^0 = (0, \ldots, 0, \underbrace{k_j^0}_{j\text{-те місце}}, 0, \ldots, 0)$ *таке, що* $k_j^0 \le n_0$ *та*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}\colon \ \max\left\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \le p \cdot |F^{(K_j^0)}(z^0)|, \tag{1.22}$$

то ціла функція F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Нехай $\mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(R)$, $R = (r_1, \ldots, r_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $r_k = |z_k|$ $(1 \le k \le n)$. Позначимо $r^* = \max_{1 \le k \le n} r_k$, $u_j(t) = u_j(t, R, \Theta) = l_j(\frac{tR}{r^*} e^{i\Theta})$. У цьому випадку наш основний результат про зростання функцій з цього класу має вигляд

Теорема 6.12. *Нехай* $\mathbf{L}(R) = (l_1(R), \ldots, l_n(R))$, $l_j(R)$ *— додатні неперервно диференційовні неспадні функції за кожною змінною* $r_k \in [0, +\infty)$, $k, j \in \{1, \ldots, n\}$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F, \mathbf{L})$ *за сукупністю змінних, то*

$$\varlimsup_{|R| \to +\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon \ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R)\rangle d\tau} \le N + 1.$$

Через K^n позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z)$, для яких існує $c > 0$ таке, що для всіх $R \in \mathbb{R}_+^n$ та $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\max_{\Theta_1, \Theta_2 \in [0, 2\pi]^n} \frac{l_j(Re^{i\Theta_2})}{l_j(Re^{i\Theta_1})} \le c.$$

Для спрощення будемо писати $K \equiv K^1$ та $M(F,R) = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}$.

Теорема 6.13. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n \cap K^n$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln M(F,R) = O\left(\min_{\sigma_n \in \mathcal{S}_n} \min_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_j} l_j(R(j,\sigma_n,t)e^{i\Theta})dt\right) \text{ при } |R| \to \infty,$$

де σ_n *— перестановка з* $\{1,\ldots,n\}$, $\mathcal{S}_n$ *— множина усіх перестановок з* $\{1,\ldots,n\}$, $R(j,\sigma_n,t) = (r_1',\ldots,r_n')$, $r_k' = \begin{cases} r_k^0, & \text{якщо } \sigma_n(k) < j, \\ t, & \text{якщо } k = j, \\ r_k, & \text{якщо } \sigma_n(k) > j, \end{cases}$ $k \in \{1,\ldots,n\}$, $R^0 = (r_1^0,\ldots,r_n^0)$ *— досить великий радіус.*

Зазначимо, що теорема 6.13 нова навіть для $n = 1$, бо ми замінили умову $l = l(|z|)$ на умову $l \in K$, тобто, існує $c > 0$ таке, що для кожного $r > 0$ $\max\limits_{\theta_1,\theta_2 \in [0,2\pi]} \frac{l(re^{i\theta_2})}{l(re^{i\theta_1})} \le c$.

Теорема 6.14. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* $r_k \in [0,+\infty)$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\Theta \in [0,2\pi]^n$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних та існує* $C > 0$ *таке, що функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє нерівності*

$$\sup_{R \in \mathbb{R}_+^n} \max_{t \in [0,r^*]} \max_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \max_{1 \le j \le n} \frac{(-(u_j(t,R,\Theta))_t')^+}{\frac{r_j}{r^*} l_j^2(\frac{t}{r^*}Re^{i\Theta})} \le C,$$

$$\max_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \int_0^1 \left\langle R, \mathbf{L}\left(\tau Re^{i\Theta}\right)\right\rangle d\tau \to +\infty \text{ при } |R| \to +\infty,$$

то

$$\varlimsup_{|R| \to +\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}\left(\tau Re^{i\Theta}\right)\rangle d\tau} \le (C+1)N + 1.$$

Оцінка в теоремі 6.14 для $n = 1$ *точніша*, ніж результат Шеремети, який отриманий для випадку $n = 1$, $C \ne 0$ та $l(|z|)$. Справді, відповідна теорема з [206, с. 83] стверджує, що

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln \max\{|f(z)\colon |z| = r\}}{\int_0^r l(\tau)d\tau} \le (C+1)(N+1).$$

Очевидно, що $NC + N + 1 < (C+1)(N+1)$ для $C \ne 0$ та $N \ne 0$.

У дисертації сформульовано та доведено твердження, які дають оцінки зростання цілих розв'язків таких систем рівнянь з частинними похідними:

$$G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z) + \sum_{\|S_j\| \le p_j - 1} G_{S_j}(z)F^{(S_j)}(z) = H_j(z),\ j \in \{1,\ldots,n\} \qquad (1.23)$$

$p_j \in \mathbb{N}$, $S_j \in \mathbb{Z}_+^n$, H_j та G_{S_j} — цілі функції.

Кажемо, що неоднорідна система рівнянь з частинними похідними (1.23) належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{L})$, якщо $\mathbf{L}\in QW^n$, для всіх $z\in\mathbb{C}^n$ та для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$ цілі функції H_j та G_{S_j} задовольняють такі умови:
1) для кожного $\|S_j\|\le p_j-1$ та $M\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|M\|\le 1+\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$, $\left|G_{S_j}^{(M)}(z)\right|\mathbf{L}^{S_j-M}(z)\le B_{S_j,M}l_j^{p_j}(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$ і $\left|G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z)\right|\le B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\mathbf{L}^M(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$,
2) для будь-якого $I\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|I\|=1+\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$, $\left|H_j^{(I)}(z)\right|\le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)|H_j(z)|$,
3) $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)\ne 0$,
де $B_{S_j,M}$, $D_{I,j}$, $B_{p_j\mathbf{1}_j,M}$ — додатні сталі, $\mathbf{H}(z)=(H_1(z),\dots,H_n(z))$, $\mathbf{G}(z)$ — матриця, складена з коефіцієнтів $G_{S_J}(z)$ системи (1.23).

Однорідна система рівнянь з частинними похідними (1.23) належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{0},\mathbf{L})$, якщо умова 1) виконується для $M\in\mathbb{Z}_+^n$ таких, що $\|M\|\le\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$ та $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)\ne 0$. Умова 2) не потрібна в цьому випадку.

Теорема 6.7. *Якщо неоднорідна система рівнянь з частинними похідними* (1.23) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{L})$ *і ціла функція* $F(z)$ *задовольняє* (1.23), *то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to\infty}\frac{\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau}\le\max\{1,c\},$$

де c *— визначено нижче у* (6.93).

Якщо система (1.23) — однорідна ($H_j(z)\equiv 0$), то попередню теорему можна спростити.

Теорема 6.8. *Якщо однорідна система рівнянь з частинними похідними* (1.23) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{0},\mathbf{L})$ *і ціла функція* F *є розв'язком цієї системи, то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to\infty}\frac{\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau}\le\max\{1,c\},$$

де c *визначено у* (6.93) *при* $D_{I,j}=0$ *та* $\|I\|=-p_j+\sum_{k=1}^n p_k$ *замість* $\|I\|=1-p_j+\sum_{k=1}^n p_k$.

Зазначимо, що отримані оцінки через сталу c є точними. Відповідні приклади наведено у підрозділі 6.4.3 дисертації. Теореми 6.7-6.8 і твердження 6.13-6.14 є узагальненнями результатів Салмассі [187] у двох напрямках:
— відсутнє припущення, що коефіцієнти в системі (1.23) є сталими;
— розглядається система, що також може містити мішані частинні похідні.

Теореми 6.7-6.8 і твердження 6.13-6.14 також є покращеними аналогами результатів з [261] для системи (1.23) у трьох напрямках:
— відсутнє припущення, що коефіцієнти у (1.23) є функціями з відокремленими змінними;

— функція $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ має загальніший вигляд, ніж $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$, де $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$;
— отримано точні, в загальному, не покращувані оцінки зростання цілих розв'язків системи. Зазначимо, що оцінки зростання взагалі не обговорювалися в [187, 261].

Також у дисертації отримано теореми 6.15 та 6.16, які забезпечують достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для суми цілих функцій F і G. Відповідні умови подано у вигляді обмежень на локальне поводження похідних цих функцій. Згадані твердження є новими для функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних.

Позначимо $Z_F = \bigcup_{z\in\mathbb{C}^n}\{z : F(z) = 0\}$ та

$$G_R(F) = \bigcup_{z^0\in Z_F} \mathbb{D}^n\left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right).$$

Теорема 6.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$, F *— ціла в* $\mathbb{C}^n$ *функція. Якщо* $\exists R > \mathbf{0}$ $\mathbf{0} < R < \mathbf{1}$, $\exists p_2 \geq 1$ $\exists \Theta \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{0} < \Theta < R$, $\exists R' > \mathbf{0}$ *(*$R' = \mathbf{0}$ *для* $Z_F = \emptyset$*) такі, що* $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\exists R^0 = R^0(z^0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta \leq R^0 \leq R$, *для якого*

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \cap G_{R'}(F)\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j(z^0)},$$

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\},$$

то функція F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (*meas *— міра Лебега на кістяку полікруга).*

Позначимо $c(z', r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z'| = \frac{r}{l(z')}\}$. Для $n = 1$ з теореми 6.4 випливає такий наслідок.

Наслідок 6.2. *Нехай* $l \in Q$, f *— ціла функція. Якщо* $\exists r > 0$, $\exists r' \geq 0$, $\exists p_2 \geq 1$ $\exists \theta \in (0, r)$, *такі, що* $\forall z^0 \in \mathbb{C}$ $\exists r^0 = r^0(z^0) \in [\theta; r]$, *та* $\operatorname{meas}\left\{c(z^0, r^0) \cap G_{R'}(F)\right\} < \frac{2\pi\theta}{3l(z^0)\lambda_2(2r+2)}$ *і*

$$\max\left\{|f(z)|\colon z \in c(z^0, r^0)\right\} \leq p_2 \min\left\{|f(z)|\colon z \in c(z^0, r^0) \setminus G_{r'}(f)\right\},$$

то функція f *має обмежений* l*-індекс (тут* meas *означає міру Лебега на колі).*

У деякому розумінні цей наслідок є новим для цілих функцій від однієї змінної, бо коло $c(z^0, r^0)$ може містити нулі функції f. В той же час у відповідних теоремах з [108, 220] коло $c(z^0, r^0)$ вибиралося так, щоб $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in c(z^0, r^0)$.

Наведемо отриманий нами аналог достатніх умов логарифмічного критерію для цього класу функцій.

Теорема 6.5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Якщо ціла функція* F *задовольняє такі умови:*

1) *для кожного* $R > \mathbf{0}$ *існує* $p_1 = p_1(R) > 0$ *таке, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_R(F)$ *та всіх* $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{1}{|F(z)|}\left|\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq p_1 l_j(z),$$

2) *для кожного* $R > \mathbf{0}$ *та* $R' \geq \mathbf{0}$ *існує* $p_2 = p_2(R, R') \geq 1$, *що для всіх* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *таких, що* $T^n(z^0, \frac{R}{\mathbb{L}(z^0)}) \setminus G_{R'}(F) = \bigcup_i C_i \neq \emptyset$, *де* C_i *— зв'язні неперетинні множини, і виконується одна з трьох умов a)* $\max\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, *або b)* $\max\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, *або c)* $|F(z^*)| = \max_i \max_{z \in C_i} |F(z)|$, $|F(z^{**})| = \min_i \min_{z \in C_i} |F(z)|$, *та точки* z^*, z^{**} *належать до однієї і тієї множини* C_{i_0}

3) *для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, *існують* $\Theta, R' \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < \theta_j < \frac{2r_j}{2+3\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))}$, *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n$

$$meas\left\{G_{R'}(F) \cap \mathbb{D}^n\left[z, R/\mathbf{L}(z)\right]\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j^2(z)},$$

то F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (тут* $meas$ *є* $2n$*-вимірна міра Лебега).*

Інші достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних можна отримати через логарифмічні похідні за напрямками $\mathbf{1}_j$ та розподіл нулів вздовж тих напрямків.

Теорема 6.3. *Нехай* $F(z)$ *— ціла в* $\mathbb{C}^n$ *функція та для кожного* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $l_j(z) \in Q^n_{\mathbf{1}_j}$ *і* $\mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{1}_j}_r(F) \neq \emptyset$. *Якщо для кожного* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *справджуються такі умови*

1) *для будь-якого* $r > 0$ *існує* $P_j = P_j(r) > 0$ *таке, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \setminus G^{\mathbf{1}_j}_r(F)$

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq P_j l_j(z);$$

2) *для будь-якого* $r > 0$ *існує* $\widetilde{n}_j(r) \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{C}^n$, *для яких* $F(z^0 + t\mathbf{1}_j) \not\equiv 0$,

$$n_{\mathbf{1}_j}\left(\frac{r}{l_j(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) \leq \widetilde{n}_j(r),$$

то $F(z)$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Усі дві наведені теореми є повністю новими в теорії функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних, причому теорема 6.5 заодно дає ствердну відповідь на питання проф. І. Е. Чижикова про можливість збільшити розмір виняткової множини, зовні якої оцінюються частинні логарифмічні похідні, якщо порівнювати з теоремою 6.3.

У дисертації також розглядається композиція цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Зокрема, постало таке **питання:** *Нехай* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— ціла функція обмеженого* l*-індексу,* $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *— ціла функція,* $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна функція. Якою має бути неперервна функція* $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ *для того, щоб складена функція* $f(\Phi(z))$ *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних?*

Проф. М.М. Шеремета сформулював загальніше **питання:** *Нехай* $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *— ціла функція обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* $\Phi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *та* $\Phi_2 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ *— цілі функції,* $\mathbf{L} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна функція. Якою має бути неперервна функція* $\widetilde{\mathbf{L}} : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{R}^n_+$*, щоб складена функція* $H(z, w) = G(\Phi_1(z), \Phi_2(w))$ *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних?*

Тут даємо відповіді на сформульовані питання.

Додатково введемо такі позначення $\nabla\Phi(z) = (\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n})$ та $|\nabla|\Phi(z) = (|\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}|, \dots, |\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n}|)$.

Наш основний результат формулюється у вигляді такої теореми.

Теорема 6.9. *Нехай* f *ціла функція в* $\mathbb{C}$*,* Φ *ціла функція в* $\mathbb{C}^n$ *така що для деякого* p *і для всіх* $z \in \mathbb{C}^n$*,* $k \in \{1, \dots, n\}$ *та* $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$*,* $\|J\| \le p$ *виконуються нерівності* $\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_k} \ne 0$ *та*

$$|\Phi^{(J)}(z)| \le C|\nabla|\Phi(z)^J, \quad C \equiv \mathrm{const} > 0.$$

Нехай функція $l \in Q$ *така, що* $l(w) \ge 1$ $(w \in \mathbb{C})$ *та* $\mathbf{L} \in Q^n$*, де* $\mathbf{L}(z) = l(\Phi(z))|\nabla|\Phi(z)$*. Ціла функція* f *має обмежений* l*-індекс тоді і тільки тоді, коли* $F(z) = f(\Phi(z))$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Теорема 6.10. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^2$*,* $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *— ціла функція обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* $\Phi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *та* $\Phi_2 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ *цілі функції такі, що* $\frac{\partial\Phi_1(z)}{\partial z_k} \ne 0$*,* $\frac{\partial\Phi_2(w)}{\partial w_l} \ne 0$*, та*

$$|\Phi_1^{(J)}(z)| \le C|\nabla|\Phi_1(z)^J, \ |\Phi_2^{(I)}(w)| \le C||\nabla|\Phi_2(w)^I, \quad C \equiv \mathrm{const} > 0,$$

для всіх $z \in \mathbb{C}^n$*,* $w \in \mathbb{C}^m$*,* $J \in \mathbb{Z}^n_+$*,* $I \in \mathbb{Z}^n_+$*,* $k \in \{1, \dots, n\}$*,* $l \in \{1, \dots, m\}$*,* $\|J\| \le p$*,* $\|I\| \le p$*, де* $p = N(G, \mathbf{L})$ *вибране з нерівності* (6.68)*.*

Тоді $H(z, w) = G(\Phi_1(z), \Phi_2(w))$ *має обмежений* $\widetilde{\mathbf{L}}$*-індекс за сукупністю змінних, де*

$$\widetilde{\mathbf{L}}(z, w) = \left(l_1(\Phi_1(z))\left|\frac{\partial\Phi_1(z)}{\partial z_1}\right|, \dots, l_1(\Phi_1(z))\left|\frac{\partial\Phi_1(z)}{\partial z_n}\right|, \right.$$
$$\left. l_2(\Phi_2(w))\left|\frac{\partial\Phi_2(w)}{\partial w_1}\right|, \dots, l_2(\Phi_2(w))\left|\frac{\partial\Phi_2(w)}{\partial w_m}\right| \right) \in Q^{n+m}.$$

Нехай F — ціла функція, Z_F — нульова множина функції F. Якщо $z^0 \in Z_F$, то через $p_F(z^0)$ позначимо "кратність" нульової точки z^0 функції F, тобто, таке ціле число, що для всіх J, $\|J\| < p_F(z^0)$, $F^{(J)}(z^0) = 0$, але, принаймні для одного J, $\|J\| = p_F(z^0)$, виконується $F^{(J)}(z^0) \ne 0$.

Теорема 6.11. *Для того, щоб для цілої функції* F *існувала додатна неперервна вектор-функція* $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$ *така, що* $F(z)$ *є функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних необхідно та досить, щоб існувало* $p \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що* $p_F(z^0) \le p$ *для всіх* $z^0 \in Z_F$*.*

Наведений результат показує широту досліджуваного класу цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Тепер перейдемо до викладу результатів, пов'язаних з вичерпуванням n-вимірного комплексного простору кулями замість полікругів. Позначимо $\ell(z) = \min_{1\le j\le n} l_j(z)$, $\mathcal{L}(z) = \max_{1\le j\le n} l_j(z)$. Через $Q^n_{\mathbb{B}}$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}$, які задовольняють умову: $(\forall r > 0,\ j \in \{1,\dots,n\})\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(r) \le \lambda_{2,j}(r) < \infty$, де

$$\lambda_{1,j}(r) = \inf_{z^0\in\mathbb{C}^n} \inf\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\},$$
$$\lambda_{2,j}(r) = \sup_{z^0\in\mathbb{C}^n} \sup\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\}.$$

Ось основний результат такого типу.

Теорема 6.2. *Нехай $\mathbf{L} \in Q^n_{\mathbb{B}}$. Для того, щоб ціла в $\mathbb{C}^n$ функція F мала обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних необхідно, щоб для кожного $r > 0$ знайшлися $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ існує $K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \le n_0$, для якого*

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}$$

і достатньо, щоб для кожного $r > 0$ існувало $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ знайдеться $K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \le n_0$, для якого

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

1.2.6 Обмежений l-індекс та M-індекс для функцій від однієї змінної.

Нехай G — довільна область в $\mathbb{C}$ та l — додатна неперервна функція в G. Для $r \in [0,\beta]$ покладемо $\lambda_1(r) = \inf\{\frac{l(z)}{l(z_0)} :\ |z - z_0| \le \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\}$ and $\lambda_2(r) = \sup\{\frac{l(z)}{l(z_0)} :\ |z - z_0| \le \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\}$. Через $Q_\beta(G)$ позначимо клас додатних неперервних функцій l, які задовольняють умову

$$(\forall z \in G)\colon\ l(z) > \frac{\beta}{dist\{z, \partial G\}},\quad \beta = const > 1$$

і для деякого $r_0 \in [0,\beta]$ $\ 0 < \lambda_1(r_0) \le \lambda_2(r_0) < +\infty$.

Аналітична функція f в G називається [149, 206] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in G$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)} :\ 0 \le k \le N\right\}. \tag{1.24}$$

Найменше таке ціле число N називається l-індексом функції f та позначається через $N(f; l, G)$.

Нехай $0 < R \le +\infty$, $\mathbb{D}_R = \{z :\ |z| < R\}$ та l — додатна неперервна функція на $[0,\ R)$, яка задовольняє $l(r) > \dfrac{\beta}{R-r}$, $\ \beta = \text{const} > 1$. Якщо $G = \mathbb{D}_R$,

то аналітична в $\mathbb{D}_R$ функція f [206, 283] називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ та $z \in \mathbb{D}_R$ виконується нерівність (7.2) з $l(|z|)$ замість $l(z)$.

Коли $R = +\infty$ (тобто, f — ціла функція), умова (7.3) стає зайвою. При $R = 1$ скорочено писатимемо $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$.

У дисертації доведено достатність умов наступної гіпотези М. М. Шеремети з [213], а за певних додаткових обмежень також обґрунтовано їхню необхідність.

Гіпотеза 7.2. *[213] Нехай f — ціла функція та*

$$g(z) = \frac{q_1}{(1-z)^p} + \frac{q_2}{(1-z)^{p-1}} + \ldots + \frac{q_p}{1-z} + q_{p+1},\ p \in \mathbb{N},\ q_j \in \mathbb{C},\ q_1 \neq 0.$$

Складена функція $F = f(g)$ у $\mathbb{D}$ має обмежений l-індекс у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ з $l(|z|) = \frac{\beta}{(1-|z|)^{p+1}}$ тоді і тільки тоді, коли f є обмеженого індексу.

Теорема 7.1. *Нехай f — ціла функція. Функція $f(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1})$ має обмежений l-індекс у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ з $l(|z|) = \frac{\beta}{|z|^{p+1}}$ тоді і тільки тоді, коли функція f має обмежений індекс, де $p \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{C}$, $q_1 \neq 0$.*

Теорема 7.2. *Для того, щоб функція F була обмеженого l-індексу з $l(r) = \frac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$, досить, а якщо f — ціла функція скінченного порядку та 0 — її пікарівське виняткове значення, то і необхідно, щоб f була обмеженого індексу.*

Подібна задача розглянута для аналітичних функцій обмеженого $l-M$-індексу. Аналітична функція f у $\mathbb{D}_R$ називається [206, с.74] функцією обмеженого $l-M$-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{M(r, f^{(n)})}{n! l^n(r)} \leq \max\left\{\frac{M(r, f^{(k)})}{k! l^k(r)} :\ 0 \leq k \leq N\right\}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in [0, R)$, де $M(f, r) = \max\{|f(z)| \colon |z| = r\}$.

Теорема 7.3. *Нехай f — ціла функція та $F(z) = f\left(\frac{q}{(1-z)^p}\right)$, де $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для того, щоб функція F була обмеженого $l-M$-індексу з $l(r) = \frac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$, $\beta > 1$, досить, а якщо коефіцієнти розвинення у степеневий ряд функції f невід'ємні та $q > 0$, то необхідно, щоб функція f була обмеженого M-індексу.*

Твердження 7.2. *Нехай f — ціла функція, $F(z) = f(\frac{1}{(1-z)^p})$, $p \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$M_F(r) \geq \max\{|f(z + (1-r^2)^{-p})| \colon |z| = pr(1-r^2)^{-p}/4\}.$$

для будь-якого $r \in (0; 1)$.

Теорема 7.4. *Нехай f та g — цілі функції. Якщо f має обмежений M-індекс та $M_g'(r)$ — неперервно диференційовна функція, то функція $F(z) = f(g(z))$ має обмежений $l-M$-індекс з $l(r) = M_g'(r)$. Якщо ж функція $F(z) = f(g(z))$ обмеженого $l-M$-індексу з $l(r) = M_g'(r/2)$ та $g(z)$ є многочленом, то f — обмеженого M-індексу.*

Визначимо таку функцію $l_\rho(z) = |z|^{\rho-1}$, $|z| \geq 1$. А. А. Гольдберг [267] неявно поставив таку **проблему**: *Яким є зв'язок між класом цілих функцій цілком*

регулярного зростання зі скінченним порядком ρ та класом цілих функцій обмеженого l_ρ-індексу?

Наразі ми не можемо дати повної відповіді на проблему Гольдберга. Але розглянемо деякі частинні проблеми, які мають безпосередній стосунок до проблеми 7.3. Зокрема, відомі умови Левіна (C) та (C′) не вичерпують усіх функцій цілком регулярного зростання. Існує великий клас функцій цілком регулярного зростання, нулі яких не задовольняють ні (C), ані (C′). Тому виникає питання про існування цілої функції f порядку ρ, цілком регулярного зростання та необмеженого l_ρ-індексу, чиї нулі не задовольняють жодну з умов (C) та (C')? Нами дано ствердну відповідь на це питання та побудовано функцію зі вказаними властивостями (твердження 7.3).

Насамкінець розглядаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння вигляду

$$f^{(p)}(z) + g_1(z)f^{(p-1)}(z) + \cdots + g_p(z)f(z) = 0. \tag{1.25}$$

Як і в [84], нехай φ — додатна необмежена функція, яка строго зростає на $[1, +\infty)$, φ^{-1} — обернена функція до φ, $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Визначимо порядок зростання цілої функції так

$$\widetilde{\sigma}^0_\varphi[f] = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(M(r, f))}{\ln r}, \quad \alpha_\varphi = \sup\{\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] |\ j = 1, 2, \ldots, p\},$$

а функцію $l_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ задамо так $l_1(z) = \max\limits_{1\le j\le p}(\varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] + \varepsilon)\ln|z|))^{1/j}$, $|z| > r_1$, де $\varepsilon > 0$ — задане, r_1 вибране так, щоб $c = \max\limits_{1\le j\le p}(\varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j]+\varepsilon)\ln r_1))^{1/j} \ge 1$. Також нам потрібна більша функція $l_0(z) = \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln|z|)$, $|z| > r_0$, де r_0 — вибране так, щоб $c_0 = \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln r_0) \ge 1$.

Нехай K — клас додатних неперервно диференційовних на $[0, +\infty)$ функцій l таких, що $l'(x) = o(l^2(x))$ при $x \to +\infty$.

Теорема 7.5. *Нехай φ — додатна необмежена функція, що строго зростає на $[1, +\infty)$. Якщо $\alpha_\varphi \in (0, +\infty)$, $l_1 \in Q$, кожна ціла функція g_j має обмежений l_1-індекс ($j \in \{1, \ldots, p\}$), то кожна ціла функція, що задовольняє* (1.25), *має обмежений l_1-індекс.*

Якщо, крім того, $l_0 \in Q$, φ — неперервно диференційовна функція від дійсної змінної $t \in [1, +\infty)$, то для кожної цілої трансцендентної функції f, що задовольняє (1.25), *справджується така оцінка*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, f)}{\int_{r_0}^r \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln r)dr} \le N(f, l_0) + 1.$$

Теорема 7.6. *Нехай φ — додатна необмежена та неперервно диференційовна функція, що строго зростає на $[1, +\infty)$. Якщо $\alpha_\varphi \in (0, +\infty)$, $l_1 \in Q$, $t^2\varphi'(t)e^{\frac{\varphi(t)}{\alpha_\varphi+\varepsilon}} \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то кожна ціла функція, що задовольняє* (1.25),

має обмежений l_1*-індекс та*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{\int_{r_0}^{r} \varphi^{-1}((\alpha_\varphi+\varepsilon)\ln r)dr} \le p.$$

РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНІ В КУЛІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ

У даному розділі поняття обмеженості L-індексу за напрямком адаптовано до класу аналітичних в одиничній кулі функцій. Встановлені критерії належності до класу аналітичних в одиничній кулі функцій обмеженого L-індексу за напрямком, отримано оцінки зростання та досліджено обмеженість L-індексу аналітичних в одиничній кулі розв'язків лінійних рівнянь з похідними за напрямком.

Дж. Ґ. Крішна та С. М. Шах [146] ввели поняття аналітичної в області (непорожній зв'язній відкритій множині) $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ функції обмеженого індексу для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Зокрема, нехай $\Omega_+ = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Omega\colon\ z_j > 0\ (j \in \{1, \ldots, n\})\}$, тобто, це підмножина всі точок Ω з додатними дійсними координатами. Кажемо, що аналітична в Ω функція F називається функцією обмеженого індексу (обмеженого індексу в розумінні Крішни - Шаха або $F \in \mathcal{B}(\Omega, \alpha)$) для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Omega_+$ в області Ω тоді і тільки тоді, коли існує $N = N(\alpha, F) = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ таке, що нерівність

$$\alpha^m T_m(z) \le \max\{\alpha^p T_p(z)\colon p \le N\},$$

справедлива для всіх $z \in \Omega$ та кожного $m \in \mathbb{Z}^n_+$, де $\alpha^m = \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_n^{m_n}$, $T_m(z) = |F^{(m)}(z)|/m!$, $F^{(m)}(z) = \frac{\partial^{\|m\|} F}{\partial z_1^{m_1} \cdots \partial z_n^{m_n}}$ — частинна похідна порядку $\|m\|$ від функції F, $F^{(0,\ldots,0)} = F$, $m! = m_1! \cdots m_n!$, $\|m\| = m_1 + \ldots m_n$, $m = (m_1, \ldots m_n) \in \mathbb{Z}^n_+$.

М. Салмассі [188] розглядав обмежений індекс для цілих функцій від двох змінних та довів три критерії обмеженості індексу. Крім того, він дослідив деякі системи рівнянь з частинними похідними та знайшов умови обмеженості індексу для їхніх цілих розв'язків.

Для того, щоб розглядати функції неекспоненційного типу, А. Д. Кузик та М. М. Шеремета [150] ввели обмежений l-індекс, замінивши $\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!}$ на $\frac{|f^{(p)}(z)|}{p! l^p(|z|)}$ в означенні, де $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція.

Згодом С. М. Строчик та М. М. Шеремета [283] розглянули обмежений l-індекс для функцій, що аналітичні в крузі. Пізніше Т. О. Банах, В. О. Кушнір та М. М. Шеремета узагальнили це поняття для аналітичної в довільній комплексній області $G \subset \mathbb{C}$ функції [6, 149]. Ю. С. Трухан та М. М. Шеремета отримали достатні умови обмеженості l-індексу для нескінченних добутків, які є аналітичними в одиничному крузі. Зокрема, вони вони досліджували добутки Бляшке та Нафталевича - Цудзі [216, 243, 288, 289]. Подібні умови відомі для деяких нескінченних добутків, що є аналітичними в комплексній площині [141].

М. Т. Бордуляк та М. М. Шеремета [260, 264] означили (див. означення 1.1) цілу функцію обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, де $\mathbf{L}(z) =$

$(l_1(z_1), \ldots, l_n(z_n))$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $l_j(z_j)$ — додатні неперервні функції, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Якщо $\mathbf{L}(z) \equiv \left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ та $\Omega = C^n$, то означення 1.1 збігається з означенням Крішни - Шаха. Якщо $n = 2$ та $\mathbf{L}(z) \equiv (1, 1)$, то означення 1.1 збігається з означенням Салмассі [188].

Методи дослідження аналітичних функцій у $\mathbb{C}^n$ діляться на декілька груп. Одна група базується на вивченні функції F, як аналітичної за кожною змінною окремо. Інші методи виникають під час вивчення функції зрізки, тобто, аналітичних функцій від однієї змінної $g(\tau) = F(a + b\tau)$, $\tau \in \mathbb{C}$. По суті, це є звуження аналітичної функції F на довільну комплексну пряму $\{z = a + b\tau : \tau \in \mathbb{C}\}$, a, $b \in \mathbb{C}^n$.

Використовуючи цей перший підхід, в [264] доведено багато властивостей та критеріїв обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій у $\mathbb{C}^n$. Вони отримали достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних деякої системи рівнянь з частинними похідними. Проте цей підхід не дозволив знайти еквівалент критерію обмеженості $\mathbf{L}$-індексу через оцінку логарифмічної похідної зовні нульової множини. Зокрема, спроби вивчати обмеженість $\mathbf{L}$-індексу деяких важливих класів цілих функцій (наприклад, нескінченних добутків з „плоскими“ нулями) були невдалими через технічні труднощі.

Через наведені вище причини виникла задача розглянути та вивчити цілі в $\mathbb{C}^n$ функції обмеженого L-індекс за допомогою другого підходу.

Застосовуючи цей метод, ми запропонували новий підхід до введення цілої у $\mathbb{C}^n$ функції обмеженого L-індексу за напрямком. На відміну від описаного вище підходу, наше означення базується на поняття похідної за напрямком. Це дозволило узагальнити більше результатів з $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}^n$ і знайти нові твердження, обумовлені тим, що означення містить похідну за напрямком і цей напрямок чинить вплив на L-індекс.

Такий успіх дає можливість узагальнення обмеженості L-індексу за напрямком для аналітичних в кулі функцій. Зазначимо, аналітична в області функція обмеженого індексу за Крішною та Шахом є цілою функцією. Це випливає з необхідної умови обмеженості l-індексу для аналітичних в одиничному крузі функцій ([206], теорема 3.3, с.71): $\int_0^r l(t)dt \to \infty$ при $r \to 1$.

Тут ми доведемо критерії обмеженості L-індексу за напрямком, які описують оцінку максимуму модуля на більшому колі через максимум модуля на меншому колі, аналог теореми Хеймана, оцінку максимуму модуля на колі через мінімум модуля на тому є колі, оцінку логарифмічної похідної за напрямком зовні нульової множини та оцінку лічильної функції нулів. Вони допоможуть отримати умови на рівняння з частинними похідними, які гарантуватимуть обмеженість L-індексу за напрямком для його аналітичних розв'язків у кулі. Насамкінець ми опишемо зростання аналітичних функцій у $\mathbb{B}^n$ обмеженого L-

індексу за напрямком.

Зауважимо, що дослідження аналітичних функцій в одиничній кулі замість кулі довільного радіуса не зменшує загальності.

2.1 Основне означення та властивості функцій обмеженого L-індексу за напрямком

Нехай $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ — заданий напрямок, $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $\overline{\mathbb{B}^n} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq 1\}$, $L: \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n$

$$L(z) > \frac{\beta|\mathbf{b}|}{1-|z|}, \ \beta = \text{const} > 1, \mathbf{b} \neq 0. \tag{2.1}$$

Для заданого $z \in \mathbb{B}^n$ позначимо $S_z = \{t \in \mathbb{C} : z + t\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n\}$.

Зауваження 2.1. *Варто зауважити, що при $\eta \in [0, \beta]$, $z \in \mathbb{B}^n$, та $|t| \leq \frac{\eta}{L(z)}$ точка $z+t\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n$. Справді, маємо $|z+t\mathbf{b}| \leq |z|+|t\mathbf{b}| \leq |z|+\frac{\eta|\mathbf{b}|}{L(z)} < |z|+\frac{\beta|\mathbf{b}|}{\frac{\beta|\mathbf{b}|}{1-|z|}} = 1$.*

Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ називається функцією *обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{B}^n$ справджується така нерівність

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m! L^m(z)} \leq \max_{0 \leq k \leq m_0} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k! L^k(z)}, \tag{2.2}$$

де $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z), \partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}\Big(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z)\Big)$, $k \geq 2$.

Найменше таке ціле число $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ називається *L-індексом за напрямком* $\mathbf{b}$ *аналітичної функції* $F(z)$ *та позначається через* $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = m_0$. Якщо $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$, $L = l$, $F = f$, то $N(f, l) \equiv N_1(f, l)$ називається l-індексом функції f. У випадку $n = 1$ та $\mathbf{b} = 1$ ми маємо означення аналітичної в одиничному крузі функції обмеженого l-індексу [283].

Тепер можна сформулювати декілька лем, що містять властивості аналітичної в одиничній кулі функції обмеженого L-індексу за напрямком. Нехай $l_z(t) = L(z + t\mathbf{b})$, $g_z(t) = F(z + t\mathbf{b})$ для заданого $z \in \mathbb{B}^n$.

Лема 2.1. *Якщо $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція обмеженого L-індексу $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n)$ за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, то для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ аналітична функція $g_{z^0}(t)$, $t \in S_{z^0}$, є обмеженого l_{z^0}-індексу, причому $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n)$.*

Доведення. Нехай $z^0 \in \mathbb{B}^n$ — фіксована точка та $g(t) \equiv g_{z^0}(t)$, $l(t) \equiv l_{z^0}(t)$. Оскільки для кожного $p \in \mathbb{N}$

$$g^{(p)}(t) = \partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0 + t\mathbf{b}), \tag{2.3}$$

за означенням обмеженості L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ для всіх $t \in S_{z^0}$ та для кожного $p \in \mathbb{Z}_+$ отримуємо

$$\frac{|g^{(p)}(t)|}{p!l^p(t)} = \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0+t\mathbf{b})|}{p!L^p(z^0+t\mathbf{b})} \le \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0+t\mathbf{b})|}{k!L^k(z^0+t\mathbf{b})} : 0 \le k \le N_{\mathbf{b}}(F,L)\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{|g^{(k)}(t)|}{k!l^k(t)} : 0 \le k \le N_{\mathbf{b}}(F,L)\right\}.$$

Звідси $g(t)$ є функцією обмеженого l-індексу та $N(g,l) \le N_{\mathbf{b}}(F,L,\mathbb{B}^n)$. Лема 2.1 доведена. □

З рівності (2.3) випливає таке твердження.

Лема 2.2. *Якщо $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, то $N_{\mathbf{b}}(F,L,\mathbb{B}^n) = \max\left\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{B}^n\right\}$.*

Проте цей максимум може бути знайдений на підмножині A таких точок z^0, які мають властивість $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in S_{z^0}, z^0 \in A\} = \mathbb{B}^n$. Тому правильне таке твердження.

Лема 2.3. *Якщо $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ та j_0 вибране так, щоб $b_{j_0} \ne 0$, то $N_{\mathbf{b}}(F,L,\mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{C}^n, z^0_{j_0} = 0\}$, а якщо $\sum_{j=1}^n b_j\| \ne 0$, то $N_{\mathbf{b}}(F,L,\mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{C}^n, \sum_{j=1}^n z^0_j = 0\}$.*

Доведення. Доведемо, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n$ знайдеться $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $t \in S_{z^0}$, для яких $z = z^0 + t\mathbf{b}$ і $z^0_{j_0} = 0$. Візьмемо $t = z_{j_0}/b_{j_0}$, $z^0_j = z_j - t\mathbf{b}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Зрозуміло, що $z^0_{j_0} = 0$ для такого вибору.

Проте точка z^0 може не потрапити в $\mathbb{B}^n$. Тим не менш, знайдеться точка $t \in \mathbb{C}$ така, що $z^0 + t\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n$. Нехай $z^0 \notin \mathbb{B}^n$ та $|z| = R_1 < 1$. Тоді $|z^0 + t\mathbf{b}| = |z - \frac{z_{j_0}}{b_{j_0}}\mathbf{b} + t\mathbf{b}| = |z + (t - \frac{z_{j_0}}{b_{j_0}})\mathbf{b}| \le |z| + |t - \frac{z_{j_0}}{b_{j_0}}| \cdot |\mathbf{b}| \le R_1 + |t - \frac{z_{j_0}}{b_{j_0}}| \cdot |\mathbf{b}| < 1$. Тому, $|t - \frac{z_{j_0}}{b_{j_0}}| < \frac{1-R_1}{|\mathbf{b}|}$.

У другій частині покажемо, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n$ знайдеться $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $t \in S_{z^0}$ такі, що $z = z^0 + t\mathbf{b}$ та $\sum_{j=1}^n z^0_j = 0$. Покладемо $t = \frac{\sum_{j=1}^n z_j}{\sum_{j=1}^n b_j}$ та $z^0_j = z_j - t\mathbf{b}_j$, $1 \le j \le n$. Отже, справджується така рівність $\sum_{j=1}^n z^0_j = \sum_{j=1}^n (z_j - tb_j) = \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^n b_j t = 0$. Лема 2.3 доведена. □

Зазначимо, що для заданого $z \in \mathbb{B}^n$ можна однозначно вибрати $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $t \in S_{z^0}$ такі, що $\sum_{j=1}^n z^0_j = 0$ і $z = z^0 + t\mathbf{b}$.

Леми 2.1–2.3 породжують таке твердження.

Твердження 2.1. *Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться число $M > 0$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ функція $g_{z^0}(t)$ є обмеженого l_{z^0}-індексу з $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \le M < +\infty$, як функція від однієї змінної $t \in S_{z^0}$, та $N_{\mathbf{b}}(F,L,\mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{B}^n\}$.*

Доведення. Необхідність випливає з леми 2.1.
Доведемо достатність.

Позаяк $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq M$ існує $\max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{B}^n\}$. Позначимо цей максимум через $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{B}^n\} < \infty$. Припустимо, що $N_{\mathbf{b}}(F)$ не є L-індексом за напрямком $\mathbf{b}$ функції $F(z)$. Тому існує $n^* > N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n)$ та $z^* \in \mathbb{B}^n$

$$\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^{n^*} F(z^*)\right|}{n^*! L^{n^*}(z^*)} > \max_{0 \leq k \leq N_{\mathbf{b}}(F,L)} \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^{k} F(z^*)\right|}{k! L^{k}(z^*)}. \tag{2.4}$$

Але ми маємо, що $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$, $g_{z^0}^{(p)}(t) = \frac{\partial^p F(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^p}$. Можна переписати (2.4) як

$$\frac{\left|g_{z^*}^{(n^*)}(0)\right|}{n^*! l_{z^*}^{n^*}(0)} > \max\left\{\frac{|g_{z^*}^{(k)}(0)|}{k! l_{z^*}^{k}(0)} : 0 \leq k \leq N_{\mathbf{b}}(F, L)\right\}.$$

Це суперечить тому, що всі l_{z^0}-індекси $N(g_{z_0}, l_{z^0})$ є обмежені числом $N_{\mathbf{b}}(F)$. Отже, $N_{\mathbf{b}}(F)$ є L-індексом за напрямком $\mathbf{b}$ функції $F(z)$. Твердження 2.1 доведено. □

За лемою 2.3 наступної умови досить у твердженні 2.1: *існує $M < +\infty$ таке, що нерівність виконується $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq M$ для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ при $\sum_{j=1}^n z_j^0 = 0$.*

З огляду на лему 2.3 та твердження 2.1 виникає таке природне *питання:* якою є найменша множина A, для якої справджується така рівність $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = \max\limits_{z^0 \in A} N(g_{z^0}, l_{z^0})$.

Нижче ми доводимо твердження, які дають часткову відповідь на це питання. Розв'язок — частковий, тому що невідомо, чи знайдені множини є дійсно найменшими серед усіх можливих, які задовольняють вказану рівність.

Твердження 2.2. *Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ — заданий напрямок, A_0 — довільна множина в $\mathbb{C}^n$, для якої $\{z + t\mathbf{b} : t \in S_z,\ z \in A_0\} = \mathbb{B}^n$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки, тоді якщо існує $M > 0$, що для всіх $z^0 \in A_0$ функція $g_{z^0}(t)$ є обмеженого l_{z^0}-індексу $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq M < +\infty$, як функція змінної $t \in S_{z^0}$, причому $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A_0\}$.*

Доведення. Згідно з твердженням 2.1 аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існує число $M > 0$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ функція $g_{z^0}(t)$ є обмеженого l_{z^0}-індексу $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq M < +\infty$, як функція змінної $t \in S_{z^0}$. Проте для кожної точки $z^0 + t\mathbf{b}$ на основі властивостей множини A_0 знайдеться $\widetilde{z}^0 \in A_0$ та $\widetilde{t} \in \mathbb{B}_{\widetilde{z}^0}$, що $z^0 + t\mathbf{b} = \widetilde{z}^0 + \widetilde{t}\mathbf{b}$. Для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ маємо $(g_{z_0}(t))^{(p)} = (g_{\widetilde{z}_0}(\widetilde{t}))^{(p)}$. Але $\widetilde{t}$ залежить від t. Тобто, умова „$g_{z^0}(t)$ — обмеженого l_{z^0}-індексу при кожному $z^0 \in \mathbb{B}^n$“ рівносильна до умови „$g_{\widetilde{z}^0}(t)$ — обмеженого $l_{\widetilde{z}^0}$-індексу для всіх $\widetilde{z}^0 \in A_0$.“ □

Зауваження 2.2. *Перетин довільної гіперплощини* $H = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, c\rangle = 1\}$ *та множини* $\mathbb{B}^n_{\mathbf{b}} = \{z + \frac{1-\langle z,\mathbf{c}\rangle}{\langle \mathbf{b},c\rangle}\mathbf{b} \colon z \in \mathbb{B}^n\}$, *де* $\langle \mathbf{b}, c\rangle \neq 0$, *задовольняє умови твердження 2.2.*

Покажемо, що для всіх $w \in \mathbb{B}^n$ знайдеться $z \in H \bigcap \mathbb{B}^n_{\mathbf{b}}$ та $t \in \mathbb{C}$ такі, що $w = z + t\mathbf{b}$. Вибираючи $z = w + \frac{1-\langle w,c\rangle}{\langle \mathbf{b},c\rangle}\mathbf{b} \in H \bigcap \mathbb{B}^n_{\mathbf{b}}$, $t = \dfrac{\langle w, c\rangle - 1}{\langle \mathbf{b}, c\rangle}$, дістанемо

$$z + t\mathbf{b} = w + \frac{1 - \langle w, c\rangle}{\langle \mathbf{b}, c\rangle}\mathbf{b} + \frac{\langle w, c\rangle - 1}{\langle \mathbf{b}, c\rangle}\mathbf{b} = w.$$

Твердження 2.3. *Нехай* A *— скрізь щільна множина в* $\mathbb{B}^n$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* $F(z)$ *має обмежений* L*-індекс за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *тоді і тільки тоді, якщо існує число* $M > 0$ *таке, що для кожного* $z^0 \in A$ *відповідна функція* $g_{z^0}(t)$ *є обмеженого* l_{z^0}*-індексу* $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq M < +\infty$, *як функція змінної* $t \in S_{z^0}$, *причому* $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A\}$.

Доведення. Необхідність випливає з твердження 2.1 (у цій теоремі та сама умова виконується для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$, а нам потрібно її виконання для кожного $z^0 \in A$, бо $\overline{A} \cap \mathbb{B}^n = \mathbb{B}^n$).

Доведемо достатність. Позаяк A — скрізь щільна у $\mathbb{B}^n$, для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ існує послідовність (z^m), що $z^{(m)} \to z^0$ при $m \to +\infty$ та $z^{(m)} \in A$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Але $F(z + t\mathbf{b})$ є обмеженого l_z-індексу для всіх $z \in \overline{A} \cap \mathbb{B}^n$ як функція від t. Тому з обмеженості l_z-індексу випливає, що існує $M > 0$ таке, що для всіх $z \in A$, $t \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{|g_z^{(p)}(t)|}{p! l^p(t)} \leq \max\left\{\frac{|g_z^{(k)}(t)|}{k! l_z^k(t)} : 0 \leq k \leq M\right\}.$$

Після підстановки замість z послідовності $z^{(m)} \in A$ такої, що $z^{(m)} \to z^0$, для кожного $m \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\frac{|g_{z^m}^{(p)}(t)|}{p! l_{z^m}^p(t)} \leq \max\left\{\frac{|g_{z^m}^{(k)}(t)|}{k! l_{z^m}^k(t)} : 0 \leq k \leq M\right\}.$$

Іншими словами, ми отримуємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^m + t\mathbf{b})|}{p! L^p(z^m + t\mathbf{b})} \leq \max_{0 \leq k \leq M} \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^m + t\mathbf{b})\right|}{k! L^k(z^m + t\mathbf{b})}. \tag{2.5}$$

Але F — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція та L — додатна неперервна. У (2.5) ми перейдемо до границі при $m \to +\infty$ ($z^m \to z^0$). Отримаємо, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$, $t \in S_{z^0}$, $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0 + t\mathbf{b})|}{p! L^p(z^0 + t\mathbf{b})} \leq \max_{0 \leq k \leq M} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + t\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0 + t\mathbf{b})}.$$

Згідно з цією нерівністю $F(z^0 + t\mathbf{b})$ є обмеженого $L(z^0 + t\mathbf{b})$-індексу також, як функція від t, для кожного фіксованого $z^0 \in \mathbb{B}^n$. Застосовуючи твердження 2.1, отримуємо бажаний висновок. Твердження 2.3 доведено. □

За зауваженням 2.2 та твердженням 2.3 є правильним такий наслідок.

Наслідок 2.1. *Нехай* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *— заданий напрямок,* A_0 *— множина в* $\mathbb{C}^n$ *така, що її замикання* $\overline{A}_0 = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, c\rangle = 1\} \bigcap \mathbb{B}^n_{\mathbf{b}}$, *де* $\langle c, \mathbf{b}\rangle \neq 0$, $\mathbb{B}^n_{\mathbf{b}} = \{z + \frac{1-\langle z,\mathbf{c}\rangle}{\langle \mathbf{b},c\rangle}\mathbf{b} \colon z \in \mathbb{B}^n\}$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* $F(z)$ *є обмеженого* L*-індексу за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *тоді і тільки тоді, коли існує число* $M > 0$ *таке, що для всіх* $z^0 \in A_0$ *функція* $g_{z^0}(t)$ *є обмеженого* l_{z^0}*-індексу* $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq M < +\infty$, *як функція від змінної* $t \in S_{z^0}$, *причому* $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A_0\}$.

Зауваження 2.3. *Нехай* $H = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, c\rangle = 1\}$. *Умова* $\langle c, \mathbf{b}\rangle \neq 0$ *— істотна. Якщо* $\langle c, \mathbf{b}\rangle = 0$, *то для всіх* $z^0 \in H$ *та для кожного* $t \in \mathbb{C}$ *точка* $z^0 + t\mathbf{b} \in H$, *тому що* $\langle z^0 + t\mathbf{b}, c\rangle = \langle z^0, c\rangle + t\langle \mathbf{b}, c\rangle = 1$. *Отже, ця пряма* $z^0 + t\mathbf{b}$ *не описує точки зовні гіперплощини* H.

Розглянемо $F(z_1, z_2) = \exp(-z_1^2 + z_2^2)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, $c = (-1, 1)$. На гіперплощині $-z_1 + z_2 = 1$ функція $F(z_1, z_2)$ набуває вигляду

$$F(z^0 + t\mathbf{b}) = F(z_1^0 + t, z_2^0 + t) = \exp(-(z_1^0 + t)^2 + (1 + z_1^0 + t)^2) = \\ = \exp(1 + 2z_1^0 + 2t).$$

Використовуючи означення обмеженості l-індексу та обчислюючи відповідні похідні, легко довести, що $\exp(1 + 2z_1^0 + 2t)$ є обмеженого індексу з $l(t) = 1$ та $N(g, l) = 4$.

В той же час F є необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Від супротивного, припустимо, що $N_{\mathbf{b}}(F) = m$ та знайдемо похідні за напрямком

$$\frac{\partial^p F}{\partial \mathbf{b}^p} = 2^p(-z_1 + z_2)^p \exp(-z_1 + z_2),\ p \in \mathbb{N}.$$

За означенням обмеженого індексу $\forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність

$$2^p|-z_1 + z_2|^p|\exp(-z_1 + z_2)| \leq \max_{0\leq k\leq m} 2^k|-z_1 + z_2|^k|\exp(-z_1 + z_2)|. \qquad (2.6)$$

Нехай $p > m$ та $|-z_1 + z_2| = 2$. Поділивши рівняння (2.6) на $2^p|\exp(-z_1 + z_2)|$, дістанемо $2^{2p} \leq 2^{2m}$. Це неможливо. Отже, $F(z)$ — необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$.

Використовуючи знайдені похідні, можна показати, що функція $F(z_1, z_2)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ з $L(z_1, z_2) = 2|-z_1 + z_2| + 1$ та $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = 0$.

Тепер розглянемо іншу функцію

$$F(z) = (1 + \langle z, d\rangle)\prod_{j=1}^{\infty}(1 + \langle z, c\rangle \cdot 2^{-j})^j,\ c \neq d.$$

Тоді кратність нулів функції $F(z)$ зростає до нескінченності. Нижче ми доведемо теорему 2.6. За вказаною теоремою необмежена кратність нулів означає, що $F(z)$ — необмеженого L-індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b}$ ($\langle \mathbf{b}, c\rangle \neq 0$) та для будь-якої додатної неперервної функції L.

Виберемо $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ так, що $\langle \mathbf{b}, d\rangle = 0$. Нехай $H = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, d\rangle = -1\}$. Для $z^0 \in H$ отримуємо

$$F(z^0 + t\mathbf{b}) = (1 + \langle z^0, d\rangle + t\langle \mathbf{b}, d\rangle) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \langle z^0, c\rangle 2^{-j} + t\langle \mathbf{b}, c\rangle 2^{-j})^j \equiv 0.$$

Тому $F(z^0 + t\mathbf{b})$ має обмежений індекс як функція від змінної t.

Теорема 2.1. *Нехай (r_p) — додатна послідовність така, що $r_p \to 1$ при $p \to \infty$, $D_p = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = r_p\}$, A_p — скрізь щільна множина в D_p (тобто. $\overline{A}_p = D_p$) та $A = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} A_p$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існує число $M > 0$ таке, що для всіх $z^0 \in A$ функція $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$ є обмеженого l_{z^0}-індексу $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \le M < +\infty$, як функція від змінної $t \in S_{z^0}$, де $l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$, причому $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A\}$.*

Доведення. З твердження 2.1 випливає необхідність цієї теореми.

Достатність. Легко показати, що $\{z + t\mathbf{b} : t \in S_z,\ z \in A\} = \mathbb{B}^n$. Далі лишається повторити міркування з доведення достатності у твердженні 2.3 та отримати бажаний висновок. □

2.2 Допоміжний клас $Q^n_{\mathbf{b}}$

Лише умов додатності та неперервності функції L та умови (2.1) не досить для успішності дослідження цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком. Нижче ми накладемо певну додаткову умову на "правильність" зміни функції L.

Для $\eta \in [0, \beta]$, $z \in \mathbb{B}^n$, визначимо $\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) = \inf\{L(z + t\mathbf{b})/L(z) : |t| \le \eta/L(z)\}$, $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta, L) = \inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) : z \in \mathbb{B}^n\}$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) = \sup\{L(z + t\mathbf{b})/L(z) : |t| \le \eta/L(z)\}$,та $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta, L) = \sup\{\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) : z \in \mathbb{B}^n\}$.

Якщо це спричинятиме неоднозначностей, то $\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta) \equiv \lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, L)$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) \equiv \lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta, L)$, $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \equiv \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta, L)$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) \equiv \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta, L)$.

Через $Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ визначимо клас усіх функцій L таких, що для всіх $\eta \in [0, \beta]$ $0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$. Нехай $\mathbb{D} \equiv \mathbb{B}^1$, $Q_\beta(\mathbb{D}) \equiv Q_{1,\beta}(\mathbb{D})$.

Наступні леми пропонують можливий спосіб побудови функцій з класу $Q^n_{\mathbf{b}}$.

Лема 2.4. *Нехай $L : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція, $m = \min\{L(z) : z \in \overline{\mathbb{B}^n}\}$. Тоді $\widetilde{L}(z) = \frac{\beta|\mathbf{b}|}{m} \cdot \frac{L(z)}{(1-|z|)^\alpha} \in Q^n_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ для кожного $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\alpha \ge 1$.*

Доведення. За означення $Q^n_{\mathbf{b}}$ маємо $\forall z \in \mathbb{B}^n$

$$\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, \widetilde{L}) = \inf\left\{\frac{L(z + t\mathbf{b})}{(1 - |z + t\mathbf{b}|)^\alpha} \frac{(1 - |z|)^\alpha}{L(z)} : |t| \le \frac{\eta m (1 - |z|)^\alpha}{\beta |b| L(z)}\right\} \ge$$

$$\geq \inf\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z)} : |t| \leq \frac{\eta m(1-|z|)^\alpha}{\beta|b|L(z)}\right\} \inf\left\{\left(\frac{1-|z|}{1-|z+t\mathbf{b}|}\right)^\alpha : |t| \leq \frac{\eta m(1-|z|)^\alpha}{\beta|b|L(z)}\right\}.$$

За зауваженням 2.1 перший інфімум не менший, ніж деяка стала $K > 0$, що не залежить від z та t_0. Крім того, маємо $\forall z \in \mathbb{B}^n$ $\frac{m}{L(z)} \leq 1$. Отже, для другого інфімуму такі оцінки справедливі

$$\inf\left\{\left(\frac{1-|z|}{1-|z+t\mathbf{b}|}\right)^\alpha : |t| \leq \frac{\eta m(1-|z|)^\alpha}{\beta|b|L(z)}\right\} \geq$$
$$\geq \inf\left\{\left(\frac{1-|z|}{1-|z+t\mathbf{b}|}\right)^\alpha : |t| \leq \frac{\eta(1-|z|)^\alpha}{\beta|b|}\right\} = \left(\frac{1-|z|}{1-|z+t^*\mathbf{b}|}\right)^\alpha.$$

де $|t^*| \leq \frac{\eta(1-|z|)}{\beta|b|}$. Знайдемо нижню оцінку для цього дробу

$$\frac{1-|z|}{1-|z+t^*\mathbf{b}|} \geq \frac{1-|z|}{1-||z|-|t^*\mathbf{b}||} \geq \frac{1-|z|}{1-||z|-\frac{\eta(1-|z|)}{\beta}|}$$

Позначаючи $u = |z| \in [0;1)$, $\gamma = \frac{\eta}{\beta} \in [0,1]$, розглянемо функцію від однієї дійсної змінної $s(u) = \frac{1-u}{1-|u-\alpha(1-u)|} = \frac{1-u}{1-|(1+\gamma)u-\gamma|}$. Для $u \in [0, \frac{\gamma}{\gamma+1}]$ функція $s(u)$ строго спадає і для $t \in [\frac{\gamma}{1+\gamma}; 1)$ маємо $s(u) \equiv \frac{1}{1+\gamma}$. По суті, показали, що $\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \eta, \widetilde{L}) \geq K \cdot \frac{1}{1+\frac{\eta}{\beta}} > 0$. Звідси випливає таке $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta, \widetilde{L}) > 0$. Подібним чином, можна довести іншу нерівність $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta, \widetilde{L}) < \infty$. □

Часто користуватимемося такими властивостями $Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$.

Лема 2.5. *1) Якщо $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$, то для кожного $\theta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ $L \in Q_{\theta\mathbf{b},\beta/|\theta|}(\mathbb{B}^n)$ та $|\theta|L \in Q_{\theta\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$*

2) Якщо $L \in Q_{\mathbf{b}_1,\beta}(\mathbb{B}^n) \bigcap Q_{\mathbf{b}_2,\beta}(\mathbb{B}^n)$ і для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ $L(z) > \frac{\beta\max\{|\mathbf{b}_1|,|\mathbf{b}_2|,|\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2|\}}{1-|z|}$, то $\min\{\lambda_2^{\mathbf{b}_1}(\beta, L), \lambda_2^{\mathbf{b}_2}(\beta, L)\}L \in Q_{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,\beta}(\mathbb{B}^n)$.

Доведення леми базується на означенні класу $Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ та є порівняно не складним.

2.3 Критерії обмеженості L-індексу за напрямком, пов'язані з поводженням функції F

Наступна теорема є аналогом теореми 2 з [254].

Теорема 2.2. *Нехай $\beta > 1$ та $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли для кожного η, $0 < \eta \leq \beta$, існує $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n$ існує $k_0 = k_0(z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого справджується така нерівність*

$$\max\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z+t\mathbf{b})| : |t| \leq \eta/L(z)\} \leq P_1|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z)|. \tag{2.7}$$

Доведення. **Необхідність.** Нехай F — обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ та $N_{\mathbf{b}}(F;L) \equiv N < +\infty$. Позначимо

$$q(\eta) = [2\eta(N+1)(\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta))^{N+1}(\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta))^{-N}] + 1,$$

де $[a]$ — ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$. Для $z \in \mathbb{B}^n$, $t_0 \in S_z$ та $p \in \{0, 1, \ldots, q(\eta)\}$ покладемо

$$R_p^{\mathbf{b}}(z,\eta) = \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})\right|}{k!L^k(z+t\mathbf{b})} : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\},$$

$$\widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta) = \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})|}{k!L^k(z)} : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\}.$$

Але $|t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)} \le \frac{\eta}{L(z)} \le \frac{\beta}{L(z)}$. Тому $\lambda_1^{\mathbf{b}}\big(z, \frac{p\eta}{q(\eta)}\big) \ge \lambda_1^{\mathbf{b}}(z,\eta) \ge \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta)$, $\lambda_2^{\mathbf{b}}\big(z, \frac{p\eta}{q(\eta)}\big) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(z,\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta)$. Зрозуміло, що ці величини $R_p^{\mathbf{b}}(z,\eta)$, $\widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta)$ є коректно визначеними. Крім цього,

$$\begin{aligned}
R_p^{\mathbf{b}}(z,\eta) &= \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})\right|}{k!L^k(z)}\frac{L^k(z)}{L^k(z+t\mathbf{b})} : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\} \le \\
&\le \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})\right|}{k!L^k(z)}\left(\lambda_1^{\mathbf{b}}(z, \frac{p\eta}{q(\eta)})\right)^{-k} : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\} \le \\
&\le \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})\right|}{k!L^k(z)}\left(\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta)\right)^{-k} : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\} \le \\
&\le \left(\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta)\right)^{-N} \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})\right|}{k!L^k(z)} : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\} = \\
&= \widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta)(\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta))^{-N},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta) &= \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})\right|}{k!L^k(z+t\mathbf{b})}\frac{L^k(z+t\mathbf{b})}{L^k(z)} : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\} \le \\
&\le \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})\right|}{k!L^k(z+t\mathbf{b})}\left(\lambda_2^{\mathbf{b}}\big(z, \frac{p\eta}{q(\eta)}\big)\right)^{k} : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\} \le \\
&\le \max\left\{\frac{\left(\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta)\right)^{k}}{k!L^k(z+t\mathbf{b})}\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})\right| : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\} \le \\
&\le \left(\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta)\right)^{N} \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+t\mathbf{b})\right|}{k!L^k(z+t\mathbf{b})} : |t| \le \frac{p\eta}{q(\eta)L(z)}, 0 \le k \le N\right\} = \\
&= R_p^{\mathbf{b}}(z,\eta)(\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta))^{N}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Нехай $k_p^z \in \mathbb{Z}$, $0 \le k_p^z \le N$, та $t_p^z \in \mathbb{C}$, $|t_p^z| \le \dfrac{p\eta}{q(\eta)L(z)}$, такі, що

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_p^z} F(z+t_p^z\mathbf{b})|}{k_p^z!L^{k_p^z}(z)} = \widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta). \tag{2.10}$$

Для кожного заданого $z \in \mathbb{B}^n$ функція $F(z+t\mathbf{b})$ та її похідні за напрямком є аналітичними в кулі. Тому за принципом максимуму модуля рівність (2.10) виконується для таких t_p^z, що $|t_p^z| = \dfrac{p\eta}{q(\eta)L(z)}$. Покладемо $\widetilde{t}_p^z = \frac{p-1}{p} t_p^z$. Тоді

$$|\widetilde{t}_p^z| = \frac{(p-1)\eta}{q(\eta)L(z)}, \quad |\widetilde{t}_p^z - t_p^z| = \frac{|t_p^z|}{p} = \frac{\eta}{q(\eta)L(z)}. \tag{2.11}$$

З огляду на (2.11) та визначення $\widetilde{R}_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,\eta)$, одержуємо $\widetilde{R}_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,\eta) \geq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_p^z} F(z+\widetilde{t}_p^z\mathbf{b})|}{k_p^z! L^{k_p^z}(z)}$. Тобто, справджується така нерівність

$$0 \leq \widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta) - \widetilde{R}_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,\eta) \leq \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^{k_p^z} F(z+t_p^z\mathbf{b})\right| - \left|\partial_{\mathbf{b}}^{k_p^z} F(z+\widetilde{t}_p^z\mathbf{b})\right|}{k_p^z! L^{k_p^z}(z)} =$$

$$= \frac{1}{k_p^z! L^{k_p^z}(z)} \int_0^1 \frac{d}{ds} \left|\partial_{\mathbf{b}}^{k_p^z} F(z+(\widetilde{t}_p^z + s(t_p^z - \widetilde{t}_p^z))\mathbf{b})\right| ds. \tag{2.12}$$

Для кожної аналітичної комплексно-значної функції від дійсного аргументу $\varphi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, нерівність $\frac{d}{ds}|\varphi(s)| \leq \left|\frac{d}{ds}\varphi(s)\right|$ виконується скрізь за винятком точок, в яких $\varphi(s) = 0$. Застосовуючи згадану нерівність до (2.12) та використовуючи теорему про середнє значення, матимемо

$$\widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta) - \widetilde{R}_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,\eta) \leq \frac{|t_p^z - \widetilde{t}_p^z|}{k_p^z! L^{k_p^z}(z)} \int_0^1 \left|\partial_{\mathbf{b}}^{k_p^z+1} F(z+(\widetilde{t}_p^z + s(t_p^z - \widetilde{t}_p^z))\mathbf{b})\right| ds =$$

$$= \frac{|t_p^z - \widetilde{t}_p^z|}{k_n^p! L^{k_p^z}(z)} \left|\partial_{\mathbf{b}}^{k_p^z+1} F(z+(\widetilde{t}_p^z + s^*(t_p^z - \widetilde{t}_p^z))\mathbf{b})\right| =$$

$$= \frac{1}{(k_p^z+1)! L^{k_p^z+1}(z)} \left|\partial_{\mathbf{b}}^{k_p^z+1} F(z+(\widetilde{t}_p^z + s^*(t_p^z - \widetilde{t}_p^z))\mathbf{b})\right| L(z)(k_p^z+1)|t_p^z - \widetilde{t}_p^z|,$$

де $s^* \in [0,1]$.

Точка $\widetilde{t}_p^z + s^*(t_p^z - \widetilde{t}_p^z)$ лежить у множині $\left\{ t \in \mathbb{C} : |t| \leq \dfrac{p\eta}{q(\eta)L(z)} \right\}$. Використовуючи обмеженість L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ функції F, визначення $q(\eta)$, нерівності (2.8) та (2.11), для $k_p^z \leq N$ маємо

$$\widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta) - \widetilde{R}_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,\eta) \leq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_p^z+1} F(z+(\widetilde{t}_p^z + s^*(t_p^z - \widetilde{t}_p^z))\mathbf{b})|}{(k_n^z+1)! L^{k_n^z+1}(z+(\widetilde{t}_p^z + s^*(t_p^z - \widetilde{t}_p^z))\mathbf{b})} \times$$

$$\times \left(\frac{L(z+(\widetilde{t}_p^z + s^*(t_p^z - \widetilde{t}_p^z))\mathbf{b})}{L(z)} \right)^{k_p^z+1} L(z)(k_n^z+1)|t_p^z - \widetilde{t}_p^z| \leq$$

$$\leq \eta \frac{N+1}{q(\eta)} (\lambda_2^{\mathbf{b}}(z,\eta))^{N+1} \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z+(\widetilde{t}_p^z + s^*(t_p^z - \widetilde{t}_p^z))\mathbf{b})|}{k! L^k(z+(\widetilde{t}_p^z + s^*(t_p^z - \widetilde{t}_p^z))\mathbf{b})} \right\} \leq$$

$$\leq \eta \frac{N+1}{q(\eta)} (\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta))^{N+1} R_p^{\mathbf{b}}(z,\eta) \leq \frac{\eta(N+1)(\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta))^{N+1}(\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta))^{-N} \widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta)}{[2\eta(N+1)\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta)(\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta))^{-N}] + 1} \leq \frac{\widetilde{R}_p^{\mathbf{b}}(z,\eta)}{2}.$$

Звідси випливає, що $\widetilde{R}^{\mathbf{b}}_p(z,\eta) \le 2\widetilde{R}^{\mathbf{b}}_{p-1}(z,\eta)$. Використовуючи (2.8) та (2.9), виводимо, що для $R^{\mathbf{b}}_p(z,\eta)$

$$R^{\mathbf{b}}_p(z,\eta) \le 2(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N}\widetilde{R}^{\mathbf{b}}_{p-1}(z,\eta) \le 2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N}R^{\mathbf{b}}_{p-1}(z,\eta).$$

Тому отримуємо

$$\max\left\{\frac{|\partial^k_{\mathbf{b}}F(z+t\mathbf{b})|}{k!L^k(z+t\mathbf{b})} : |t| \le \frac{\eta}{L(z)}, 0 \le k \le N\right\} = R^{\mathbf{b}}_{q(\eta)}(z,\eta) \le$$
$$\le 2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N}R^{\mathbf{b}}_{q(\eta)-1}(z,\eta) \le (2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N})^2R^{\mathbf{b}}_{q(\eta)-2}(z,\eta) \le \cdots \le$$
$$\le (2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N})^{q(\eta)}R^{\mathbf{b}}_0(z,\eta) = (2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N})^{q(\eta)}\times$$
$$\times \max\left\{\frac{\left|\partial^k_{\mathbf{b}}F(z)\right|}{k!L^k(z)} : 0 \le k \le N\right\}. \tag{2.13}$$

Нехай $k_z \in \mathbb{Z}$, $0 \le k_z \le N$, та $\widetilde{t_z} \in \mathbb{C}$, $|\widetilde{t_z}| = \dfrac{\eta}{L(z)}$, визначені так $\frac{|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z)|}{k_z!L^{k_z}(z)} = \max_{0\le k\le N}\frac{|\partial^k_{\mathbf{b}}F(z)|}{k!L^k(z)}$, та $|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z+\widetilde{t_z}\mathbf{b})| = \max\{|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z+t\mathbf{b})| : |t| \le \eta/L(z)\}$.

З нерівності (2.13) випливає

$$\frac{|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z+\widetilde{t_z}\mathbf{b})|}{k_z!L^{k_z}(z+\widetilde{t_z}\mathbf{b})} \le \max\left\{\frac{|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z+t\mathbf{b})|}{k_z!L^{k_z}(z+t\mathbf{b})} : |t| = \frac{\eta}{L(z)}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|\partial^{k}_{\mathbf{b}}F(z+t\mathbf{b})|}{k!L^{k}(z+t\mathbf{b})} : |t| = \frac{\eta}{L(z)}, 0 \le k \le N\right\} \le$$
$$\le (2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N})^{q(\eta)}\frac{\left|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z)\right|}{k_z!L^{k_z}(z)}.$$

Звідси одержуємо

$$\max\left\{|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z+t\mathbf{b})| : |t| \le \eta/L(z)\right\} \le$$
$$\le (2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N})^{q(\eta)}\frac{L^{k_z}(z+\widetilde{t_z}\mathbf{b})}{L^{k_z}(z)}|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z)| \le$$
$$\le (2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N})^{q(\eta)}(\lambda^{\mathbf{b}}_2(z,\eta))^{N}|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z)| \le$$
$$\le (2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N})^{q(\eta)}(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}|\partial^{k_z}_{\mathbf{b}}F(z)|.$$

Нами доведено (2.7) з $n_0 = N_{\mathbf{b}}(F,L)$ та

$$P_1(\eta) = (2(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N}(\lambda^{\mathbf{b}}_1(\eta))^{-N})^{q(\eta)}(\lambda^{\mathbf{b}}_2(\eta))^{N} > 1.$$

Достатність. Припустимо, що для кожного $\eta \in (0,\beta]$ знайдеться $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1 = P_1(\eta) \ge 1$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n$ знайдеться $k_0 = k_0(z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le k_0 \le n_0$, для якого нерівність (2.7) виконується. Але η — довільне з $(0,\beta]$, а $\beta > 1$, тому візьмемо $\eta > 1$. Виберемо $j_0 \in \mathbb{N}$ так, аби $P_1 \le \eta^{j_0}$. Для заданого $z \in \mathbb{B}^n$, відповідного $k_0 = k_0(z)$ та $j \ge j_0$ за формулою Коші для $F(z+t\mathbf{b})$ як функції від однієї змінної t

$$\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}}F(z) = \frac{j!}{2\pi i}\int_{|t|=\eta/L(z)}\frac{\partial^{k_0}_{\mathbf{b}}F(z+t\mathbf{b})}{t^{j+1}}dt.$$

Враховуючи (2.7), одержуємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0+j}F(z)|}{j!} \le \frac{L^j(z)}{\eta^j}\max\left\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{\eta}{L(z)}\right\} \le P_1\frac{L^j(z)}{\eta^j}|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z)|,$$

тобто, для всіх $j \ge j_0$

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0+j}F(z)|}{(k_0+j)!L^{k_0+j}(z)} \le \frac{j!k_0!}{(j+k_0)!}\frac{P_1}{\eta^j}\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z)|}{k_0!L^{k_0}(z)} \le \eta^{j_0-j}\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z)|}{k_0!L^{k_0}(z)} \le \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z)|}{k_0!L^{k_0}(z)}.$$

В отриманій вище нерівності маємо, що $k_0 \le n_0$, $n_0 = n_0(\eta)$ та $j_0 = j_0(\eta)$ — незалежні від z. Позаяк $z \in \mathbb{B}^n$ — довільна, ця нерівність означає, що функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ та $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) \le n_0 + j_0$. Теорема 2.2 доведена. □

Лема 2.6. *Нехай $\beta > 1$, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$, $\frac{1}{\beta} < \theta_1 \le \theta_2 < +\infty$, $\theta_1 L(z) \le L^*(z) \le \theta_2 L(z)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, має обмежений L^*-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.*

Доведення. Очевидно, при $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ та $\theta_1 L(z) \le L^*(z) \le \theta_2 L(z)$ маємо $L^* \in Q_{\mathbf{b},\beta^*}(\mathbb{B}^n)$, $\beta^* \in [\theta_1\beta; \theta_2\beta]$ і $\beta^* > 1$. Нехай $N_{\mathbf{b}}(F, L^*) < +\infty$. Тоді за теоремою 2.2 для кожного η^*, $0 < \eta^* < \beta\theta_2$, знайдуться $n_0(\eta^*) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1(\eta^*) \ge 1$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n$ та деякого k_0, $0 \le k_0 \le n_0$, нерівність (2.7) дійсна з L^* та η^* замість L та η. Поклавши $\eta* = \theta_2\eta$, дістанемо

$$P_1|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z)| \ge \max\left\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z+t\mathbf{b})| : |t| \le \eta^*/L^*(z)\right\} \ge$$
$$\ge \max\left\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z+t\mathbf{b})| : \ |t| \le \eta/L(z)\right\}.$$

Отже, за теоремою 2.2, функція $F(z)$ — обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Обернене твердження отримуємо заміною L на L^*. □

Лема 2.7. *Нехай $\beta > 1$, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$, $m \in \mathbb{C}, m \ne 0$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $m\mathbf{b}$.*

Доведення. Нехай $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Згідно з теоремою 2.2 $(\forall\eta > 0)$ $(\exists n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+)$ $(\exists P_1(\eta) \ge 1)$ $(\forall z \in \mathbb{B}^n)$ $(\exists k_0 = k_0(z) \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \le k_0 \le n_0)$, для якого справедлива така нерівність

$$\max\left\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z+t\mathbf{b})| : |t| \le \eta/L(z)\right\} \le P_1|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z)|. \tag{2.14}$$

Оскільки $\frac{\partial^k F}{\partial(m\mathbf{b})^k} = (m)^k\frac{\partial^k F}{\partial\mathbf{b}^k}$, нерівність (2.14) рівносильна такій

$$\max\left\{|m|^{k_0}|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z+t\mathbf{b})| : |t| \le \eta/L(z)\right\} \le P_1|m|^{k_0}|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z)| \text{ або}$$

$$\max\left\{\left|\partial^{k_0}_{m\mathbf{b}}F\big(z+\frac{t}{m}m\mathbf{b}\big)\right| : |t/m|\le \eta/(|m|L(z))\right\}\le P_1|\partial^{k_0}_{m\mathbf{b}}F(z)|.$$

Позначивши $t^*=\frac{t}{m}$, $\eta^*=\frac{\eta}{|m|}$, дістанемо

$$\max\left\{|\partial^{k_0}_{m\mathbf{b}}F(z+t^*m\mathbf{b})| : |t^*|\le \eta^*/L(z)\right\}\le P_1|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}}F(z)|.$$

За теоремою 2.2 функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Подібним способом можна довести обернене твердження. □

2.4 Оцінка максимуму модуля на більшому колі через максимум модуля на меншому колі та через мінімум модуля

Використовуючи теорему 2.2, доведемо такий критерій обмеженості L-індексу за напрямком.

Теорема 2.3. *Нехай $\beta>1$, $L\in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого r_1 та будь-якого r_2 при $0<r_1<r_2\le\beta$, знайдеться $P_1=P_1(r_1,r_2)\ge 1$ таке, що для кожного $z^0\in\mathbb{B}^n$*

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t|=\frac{r_2}{L(z^0)}\right\}\le P_1\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : \ |t|=\frac{r_1}{L(z_0)}\right\}. \tag{2.15}$$

Доведення. **Необхідність.** Нехай $N_{\mathbf{b}}(F,L,\mathbb{B}^n)<+\infty$. Від супротивного, припустимо, що знайдуться числа r_1 та r_2, $0<r_1<r_2\le\beta$, що для кожного $P_*\ge 1$ існують $z^*=z^*(P_*)\in\mathbb{B}^n$ для яких справджується нерівність

$$\max\left\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : |t|=\frac{r_2}{L(z^*)}\right\}>P_*\max\left\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : \ |t|=\frac{r_1}{L(z^*)}\right\}.$$

За теоремою 2.2 існує $n_0=n_0(r_2)\in\mathbb{Z}_+$ та $P_0=P_0(r_2)\ge 1$ такі, що для всіх $z^*\in\mathbb{B}^n$ та деякого $k_0=k_0(t^*,z^*)\in\mathbb{Z}_+$, $0\le k_0\le n_0$, виконується нерівність

$$\max\left\{\left|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}}F(z^*+t\mathbf{b})\right| : |t|=r_2/L(z^*)\right\}\le P_0|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}}F(z^*)|. \tag{2.16}$$

Зазначимо, що для $k_0=0$ доведення необхідності — очевидне, бо з (2.16) випливає $\max\left\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : \ |t|=r_2/L(z^*)\right\}\le P_0|F(z^*)|\le P_0\max\left\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : |t|=r_1/L(z^*)\right\}$.

Припустимо, що $k_0>0$, і нехай

$$P_*=n_0!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}\left(P_0+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)+1. \tag{2.17}$$

Візьмемо точку $t_0\in S_{z^*}$ таку, що $|t_0|=r_1/L(z^*)$ та

$$|F(z^*+t_0\mathbf{b})|=\max\left\{|F(z^*+t\mathbf{b})| : |t|=r_1/L(z^*)\right\}>0,$$

а $t_{0j}\in S_{z^*}$, $|t_{0j}|=r_2/L(z^*)$, буде таке, що

$$|\partial^j_{\mathbf{b}}F(z^*+t_{0j}\mathbf{b})|=\max\{|\partial^j_{\mathbf{b}}F(z^*+t\mathbf{b})| : |t|=r_2/L(z^*)\},$$

$j \in \mathbb{Z}_+$. Відмітимо, що у випадку $|F(z^* + t_0\mathbf{b})| = 0$ за теоремою єдиності для всіх $t \in S_{z^*}$ можна отримати рівність $F(z^* + t\mathbf{b}) = 0$. Проте це суперечить нерівності (2.4). За нерівністю Коші маємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^*)|}{j!} \leq \left(\frac{L(z^*)}{r_1}\right)^j |F(z^* + t_0\mathbf{b})|, j \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.18}$$

$$\left|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^*+t_{0j}\mathbf{b}) - \partial_{\mathbf{b}}^j F(z^*)\right| = \left|\int_0^{t_{0j}} \partial_{\mathbf{b}}^{j+1} F(z^*+t\mathbf{b})\, dt\right| \leq \left|\partial_{\mathbf{b}}^{j+1} F(z^*+t_{0(j+1)}\mathbf{b})\right| \frac{r_2}{L(z^*)}. \tag{2.19}$$

З нерівностей (2.18) та (2.19) випливає, що

$$|\partial_{\mathbf{b}}^{j+1} F(z^*+t_{0(j+1)}\mathbf{b})| \geq \frac{L(z^*)}{r_2}\left\{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^*+t_{0j}\mathbf{b})| - |\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^*)|\right\} \geq$$
$$\geq \frac{L(z^*+t^*\mathbf{b})}{r_2}\left|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^* + t_{0j}\mathbf{b})\right| - \frac{j! L^{j+1}(z^*)}{r_2 (r_1)^j}|F(z^* + t_0\mathbf{b})|,$$

$j \in \mathbb{Z}_+$. Звідси, для $k_0 \geq 1$ дістаємо

$$|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z^* + t_{0k_0}\mathbf{b})| \geq \frac{L(z^*)}{r_2}|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0-1} F(z^* + t_{0(k_0-1)}\mathbf{b})| -$$
$$-\frac{(k_0-1)! L^{k_0}(z^*)}{r_2 (r_1)^{k_0-1}}|F(z^*+t_0\mathbf{b})| \geq \ldots \geq \frac{L^{k_0}(z^*)}{(r_2)^{k_0}}|F(z^*+t_{00}\mathbf{b})| -$$
$$-\left(\frac{0!}{(r_2)^{k_0}} + \frac{1!}{(r_2)^{k_0-1} r_1} + \ldots + \frac{(k_0-1)!}{r_2 (r_1)^{k_0-1}}\right) L^{k_0}(z^*)|F(z^*+t_0\mathbf{b})| =$$
$$= \frac{L^{k_0}(z^*)}{(r_2)^{k_0}}|F(z^* + t_0\mathbf{b})|\left(\frac{|F(z^* + t_{00}\mathbf{b})|}{|F(z^* + t_0\mathbf{b})|} - \sum_{j=0}^{k_0-1} j!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^j\right). \tag{2.20}$$

З (2.4) маємо $|F(z^* + t_{00}\mathbf{b})|/|F(z^* + t_0\mathbf{b})| > P_*$. Крім того, справедлива така нерівність

$$\sum_{j=0}^{k_0-1} j!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^j \leq k_0!\left(\frac{(r_2/r_1)^{k_0} - 1}{r_2/r_1 - 1}\right) \leq n_0! \frac{r_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}.$$

Застосовуючи (2.17), одержуємо

$$\frac{|F(z^*+t_{00}\mathbf{b})|}{|F(z^*+t_0\mathbf{b})|} - \sum_{j=0}^{k_0-1} j! \frac{r_2^j}{r_1^j} > P_* - \frac{n_0! r_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0} = n_0!\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0} P_0 + 1.$$

З (2.20), зважаючи на (2.16) та (2.18), випливає

$$\left|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z^*+t_{0k_0}\mathbf{b})\right| > \frac{L^{k_0}(z^*)}{(r_2)^{k_0}}\left(P_* - n_0! \frac{r_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}\right)\left(\frac{r_1}{L(z^*)}\right)^{k_0} \times$$
$$\times \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z^*)|}{k_0!} \geq \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n_0}\left(P_* - n_0! \frac{r_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0}\right) \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z^*+t_{0k_0}\mathbf{b})|}{n_0! P_0}.$$

Звідси, $P_* < n_0! \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_0} \left(P_0 + \frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)$, а це суперечить (2.17).

Достатність. Виберемо довільно $r_1 \in (0,1)$ і $r_2 \in (1,\beta)$. Для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ розвинемо функцію $F(z^0 + t\mathbf{b})$ у степеневий ряд за степенями t

$$F(z^0 + t\mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z^0) t^m, \ b_m(z^0) = \frac{\partial_{\mathbf{b}}^m F(z^0)}{m!}$$

у крузі $\{t : |t| \le \beta/L(z^0)\} \subset S_{z^0}$. Для $r \le \beta/L(z^0)$ позначимо

$$M_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) = \max\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = r\}, \ \mu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) = \max\{|b_m(z^0)| r^m : m \ge 0\},$$

$$\nu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) = \max\{|b_m(z^0)| r^m : |b_m(z^0)| r^m = \mu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F)\}.$$

За нерівністю Коші $\mu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) \le M_{\mathbf{b}}(r, z^0, F)$. Але для $r = \dfrac{1}{L(z^0)}$ маємо

$$M_{\mathbf{b}}(r_1 r, z^0, F) \le \sum_{m=0}^{\infty} |b_m(z^0)| r^m r_1^m \le \mu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) \sum_{m=0}^{\infty} r_1^m = \frac{\mu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F)}{1 - r_1}$$

і, застосовуючи монотонність $\nu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F)$ по r, дістаємо

$$\ln \mu_{\mathbf{b}}(r_2 r, z^0, F) - \ln \mu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) = \int_r^{r_2 r} \frac{\nu_{\mathbf{b}}(t, z^0, F)}{t} dt \ge \nu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) \ln r_2.$$

Звідси виводимо

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) &\le \frac{1}{\ln r_2} (\ln \mu_{\mathbf{b}}(r_2 r, z^0, F) - \ln \mu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F)) \le \\ &\le \frac{1}{\ln r_2} \{\ln M_{\mathbf{b}}(r_2 r, z^0, F) - \ln((1 - r_1) M_{\mathbf{b}}(r_1 r, z^0, F))\} = \\ &= -\frac{\ln(1 - r_1)}{\ln r_2} + \frac{1}{\ln r_2} \{\ln M_{\mathbf{b}}(r_2 r, z^0, F) - \ln M_{\mathbf{b}}(r_1 r, z^0, F))\} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Нехай $N_{\mathbf{b}}(z^0, L, F)$ — L-індекс за напрямком функції F у точці z^0, тобто, $N_{\mathbf{b}}(z^0, L, F)$ — найменше число m_0, для якого виконується нерівність (2.2) з $z = z^0$. Очевидно, що $N_{\mathbf{b}}(z^0, L, F) \le \nu_{\mathbf{b}}(1/L(z^0, z^0, F) = \nu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F)$. Проте нерівність (2.15) можна записати в такому вигляді $M_{\mathbf{b}}\left(\frac{r_2}{L(z^0)}, z^0, F\right) \le P_1(r_1, r_2) M_{\mathbf{b}}\left(\frac{r_1}{L(z^0)}, z^0, F\right)$. Отже, з (2.21) маємо $N_{\mathbf{b}}(z^0, L, F) \le -\frac{\ln(1-r_1)}{\ln r_2} + \frac{\ln P_1(r_1, r_2)}{\ln r_2}$ для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$, тобто, $N_{\mathbf{b}}(F, L) \le -\frac{\ln(1-r_1)}{\ln r_2} + \frac{\ln P_1(r_1, r_2)}{\ln r_2}$. Теорему 2.3 доведено. □

З огляду на доведення теореми 2.3 така лема є правильною.

Лема 2.8. *Нехай $\beta > 1$ та $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існують числа r_1 та r_2, $0 < r_1 < 1 < r_2 \le \beta$, і $P_1 \ge 1$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ виконується нерівність (2.15).*

Нижче наводимо критерій, який є аналогом теореми Хеймана [128].

Теорема 2.4. *Нехай $\beta > 1$ та $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існують $p \in \mathbb{Z}_+$ та $C > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n$ справедлива така нерівність*

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L^{p+1}(z)} \le C \max\left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{(k)} F(z)|}{L^k(z)} : \ 0 \le k \le p \right\}. \tag{2.22}$$

Доведення. **Необхідність.** Якщо $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) < +\infty$, то за означенням обмеженості L-індексу за напрямком отримуємо (2.22) з $p = N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n)$ та $C = (N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) + 1)!$

Достатність. Нехай виконується нерівність (2.22), $z^0 \in \mathbb{B}^n$, та $K = \left\{ t \in \mathbb{C} : |t| \le 1/L(z^0) \right\}$. Позаяк $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$, для кожного $t \in K$ з врахуванням (2.22) маємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z^0 + t\mathbf{b})|}{L^{p+1}(z^0)} \le \left(\frac{L(z^0 + t\mathbf{b})}{L(z^0)} \right)^{p+1} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z^0 + t\mathbf{b})|}{L^{p+1}(z^0 + t\mathbf{b})} \le$$

$$\le (\lambda_2^{\mathbf{b}}(1))^{p+1} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z^0 + t\mathbf{b})|}{L^{p+1}(z^0 + t\mathbf{b})} \le C(\lambda_2^{\mathbf{b}}(1))^{p+1} \max\left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} F(z^0 + t\mathbf{b})|}{L^{k}(z^0 + t\mathbf{b})} : 0 \le k \le p \right\} \le$$

$$\le C(\lambda_2^{\mathbf{b}}(1))^{p+1} \max\left\{ \left(\frac{L(z^0)}{L(z^0 + t\mathbf{b})} \right)^k \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} F(z^0 + t\mathbf{b})|}{L^{k}(z^0)} : 0 \le k \le p \right\} \le$$

$$\le C(\lambda_2^{\mathbf{b}}(1))^{p+1} \max\left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} F(z^0 + t\mathbf{b})|}{L^{k}(z^0)} (\lambda_1^{\mathbf{b}}(1))^{-k} : 0 \le k \le p \right\} \le B g_{z^0}(t), \tag{2.23}$$

де $B = C(\lambda_2^{\mathbf{b}}(1))^{p+1}(\lambda_1^{\mathbf{b}}(1))^{-p}$ та $g_{z^0}(t) = \max\left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} F(z^0 + t\mathbf{b})|}{L^{k}(z^0)} : 0 \le k \le p \right\}$.

Введемо такі позначення $\gamma_1 = \left\{ t \in \mathbb{C} : |t| = \frac{1}{2\beta L(z^0)} \right\}$, $\gamma_2 = \left\{ t \in \mathbb{C} : |t| = \frac{\beta}{L(z^0)} \right\}$. Виберемо довільно дві точки $t_1 \in \gamma_1$, $t_2 \in \gamma_2$ та з'єднаємо їх кусково-аналітичною кривою $\gamma = (t = t(s), 0 \le s \le T)$ такою, що $g_{z^0}(t) \ne 0$ при $t \in \gamma$. Причому криву γ будуємо так, щоб її довжина $|\gamma|$ не перевищувала $\dfrac{2\beta^2 + 1}{\beta L(z^0)}$.

Функція $g_{z^0}(t(s))$ — неперервна на $[0, T]$. Без зменшення загальності, вважатимемо, що функція $t = t(s)$ аналітична на $[0, T]$. Інакше можна розглянути кожний інтервал аналітичності цієї функції окремо та повторити відповідні міркування, які нижче наводимо для $[0, T]$. Спершу покажемо, що функція $g_{z^0}(t(s))$ неперервно диференційовна на $[0, T]$ за винятком, можливо, скінченної множини точок. Для довільних $k_1, k_2, 0 \le k_1 \le k_2 \le p$, виконується щось одне: або $\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_1} F(z^0 + t(s)\mathbf{b})|}{L^{k_1}(z^0)} \equiv \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_2} F(z^0 + t(s)\mathbf{b})|}{L^{k_2}(z^0)}$ або рівність $\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_1} F(z^0 + t(s)\mathbf{b})|}{L^{k_1}(z^0)} = \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_2} F(z^0 + t(s)\mathbf{b})|}{L^{k_2}(z^0)}$ справедлива лише для скінченного числа точок $s_k \in [0, T]$. Тоді можна розділити відрізок $[0, T]$ на скінченне число відрізків, на кожному з яких $g_{z^0}(t(s)) \equiv \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} F(z^0 + t(z)\mathbf{b})|}{L^{k}(z^0)}$ для деякого k, $0 \le k \le p$. Це означає, що функція $g_{z^0}(t(s))$ — неперервно диференційовна за винятком, можливо, скінченного числа точок.

Зважаючи на (2.23), отримуємо

$$\frac{dg_{z^0}(t(s))}{ds} \le \max\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0+t(s)\mathbf{b})|}{L^k(z^0)}\right) : 0 \le k \le p\right\} \le$$
$$\le \max\left\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k+1} F(z^0+t(s)\mathbf{b})||t'(s)|/L^k(z^0) : 0 \le k \le p\right\} =$$
$$= L(z^0)|t'(s)| \max\left\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k+1} F(z^0+t(s)\mathbf{b})|/L^{k+1}(z^0) : \ 0 \le k \le p\right\} \le$$
$$\le Bg_{z^0}(t(s))|t'(s)|L(z^0).$$

Звідси маємо

$$\left|\ln\frac{g_{z^0}(t_2)}{g_{z^0}(t_1)}\right| = \left|\int_0^T \frac{dg_{z^0}(t(s))}{g_{z^0}(t(s))}\right| \le BL(z^0)\int_0^T |t'(s)|ds = BL(z^0)|\gamma| \le 2B\frac{\beta^2+1}{\beta}.$$

Якщо вибрати точку $t_2 \in \gamma_2$, для якої

$$|F(z^0+t_2\mathbf{b})| = \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \beta/L(z^0)\right\},$$

то отримаємо

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{\beta}{L(z^0)}\right\} \le g_{z^0}(t_2) \le g_{z^0}(t_1)\exp\{2B\frac{\beta^2+1}{\beta}\}. \tag{2.24}$$

Застосовуючи нерівність Коші та використовуючи, що $t_1 \in \gamma_1$, для всіх $j \in \{1,\dots,p\}$ отримаємо

$$|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^0+t_1\mathbf{b})| \le j!(2\beta L(z^0))^j \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b}) : |t-t_1| = \frac{1}{2\beta L(z^0)}\right\} \le$$
$$\le j!(2\beta L(z^0))^j \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b}) : |t-t_0| = \frac{1}{\beta L(z^0)}\right\},$$
$$\text{тобто } g_{z^0}(t_1) \le p!(2\beta)^p \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b}) : |t-t_0| = \frac{1}{\beta L(z^0)}\right\}.$$

Тому, з (2.24) випливає

$$|F(z^0+t_2\mathbf{b})| = \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \beta/L(z^0)\right\} \le$$
$$\le g_{z^0}(t_2) \le g_{z^0}(t_1)\exp\left\{2B\frac{\beta^2+1}{\beta}\right\} \le p!(2\beta)^p \exp\left\{2B\frac{\beta^2+1}{\beta}\right\} \times$$
$$\times \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = 1/(\beta L(z^0))\right\}.$$

За лемою 2.8 на основі цієї нерівності робимо висновок, що функція F обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. Теорему 2.4 доведено. □

Наступна теорема дає оцінку максимуму модуля через мінімум модуля.

Теорема 2.5. *Нехай $\beta > 1$ та $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного R, $0 < R \le \beta$, знайдуться числа $P_2(R) \ge 1$ та $\eta(R) \in (0,R)$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $r = r(z^0) \in [\eta(R), R]$ виконується нерівність*

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r/L(z^0)\right\} \le P_2 \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : \ |t| = r/L(z^0)\right\}. \tag{2.25}$$

Доведення. **Необхідність.** Нехай $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = N < +\infty$ та $R \geq 0$. Покладемо

$$R_0 = 1, r_0 = \frac{R}{8(R+1)},\ R_j = \frac{R_{j-1}}{4N} r_{j-1}^N,\ r_j = \frac{1}{8} R_j (j = 1, 2, \ldots, N).$$

Нехай $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та $N_0 = N_{\mathbf{b}}(z^0, L, F)$ — L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ функції F у точці z^0, тобто, $N_{\mathbf{b}}(z^0, L, F)$ — це найменше число m_0, для якого нерівність (2.2) виконується при $z = z^0$. Максимум у правій частині (2.2) досягається в m_0. Але $0 \leq N_0 \leq N$. Для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ функція $F(z^0 + t\mathbf{b})$ розвивається у степеневий ряд за степенями t

$$F(z^0 + t\mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z^0) t^m,\ b_m(z^0) = \frac{\partial_{\mathbf{b}}^m F(z^0)}{m!}.$$

Покладемо $a_m(z^0) = \frac{|b_m(z^0)|}{L^m(z^0)} = \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z^0)|}{m! L^m(z^0)}$. Для будь-якого $m \in \mathbb{Z}_+$ справджується нерівність $a_{N_0}(z^0) \geq a_m(z^0) = R_0 a_m(z^0)$. Тоді існує найменше число $n_0 \in \{0, 1, \ldots, N_0\}$ таке, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ $a_{n_0}(z^0) \geq a_m(z^0) R_{N_0 - n_0}$. Отже, $a_{n_0}(z^0) \geq a_{N_0}(z^0) R_{N_0 - n_0}$ та $a_j(z^0) < a_{N_0}(z^0) R_{N_0 - j}$ для $j < n_0$, бо при $a_{j_0}(z^0) \geq a_{N_0}(z^0) R_{N_0 - j_0}$ для деякого $j_0 < n_0$ маємо $a_{j_0}(z^0) \geq a_m(z^0) R_{N_0 - j_0}$ для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$, а це суперечить вибору n_0. З нерівностей $a_j(z^0) < a_{N_0}(z^0) R_{N_0 - j}$ $(j < n_0)$ та $a_m(z^0) \leq a_{N_0}(z^0)$ $(m > n_0)$ для $t \in S_{z^0}$ і $|t| = \frac{1}{L(z^0)} r_{N_0 - n_0}$ маємо

$$\begin{aligned}
|F(z^0 + t\mathbf{b})| &= |b_{n_0}(z^0) t^{n_0} + \sum_{m \neq n_0} b_m(z^0) t^m| \geq |b_{n_0}(z^0)||t|^{n_0} - \sum_{m \neq n_0} |b_m(z^0)||t|^m = \\
&= a_{n_0}(z^0) r_{N_0 - n_0}^{n_0} - \sum_{m \neq 0} a_m(z^0) r_{N_0 - n_0}^m = a_{n_0}(z^0) r_{N_0 - n_0}^{n_0} - \sum_{j < n_0} a_j(z^0) r_{N_0 - n_0}^j - \\
&- \sum_{m > n_0} a_m(z^0) r_{N_0 - n_0}^m \geq a_{N_0}(z^0) R_{N_0 - n_0} r_{N_0 - n_0}^{n_0} - \sum_{j < n_0} a_{N_0}(z^0) R_{N_0 - j} r_{N_0 - n_0}^j - \\
&- \sum_{m > n_0} a_{N_0}(z^0) r_{N_0 - n_0}^m \geq a_{N_0}(z^0) R_{N_0 - n_0} r_{N_0 - n_0}^{n_0} - n_0 a_{N_0}(z^0) R_{N_0 - n_0 + 1} - \\
&- a_{N_0}(z^0) r_{N_0 - n_0}^{n_0 + 1} \frac{1}{1 - r_{N_0 - n_0}} = a_{N_0}(z^0) \Big(R_{N_0 - n_0} r_{N_0 - n_0}^{n_0} - \frac{n_0}{4N} R_{N_0 - n_0} r_{N_0 - n_0}^N - \\
&- r_{N_0 - n_0}^{n_0} \frac{r_{N_0 - n_0}}{1 - r_{N_0 - n_0}} \Big) \geq a_{N_0}(z^0) \Big(R_{N_0 - n_0} r_{N_0 - n_0}^{n_0} - \frac{1}{4} R_{N_0 - n_0} r_{N_0 - n_0}^{n_0} - \\
&- \frac{1}{4} R_{N_0 - n_0} r_{N_0 - n_0}^{n_0} \Big) = \frac{1}{2} a_{N_0}(z^0) R_{N_0 - n_0} r_{N_0 - n_0}^{n_0}. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Крім цього, для $t \in S_{z^0}$ маємо

$$\begin{aligned}
|F(z^0 + t\mathbf{b})| &\leq \sum_{m=0}^{+\infty} |b_m(z^0)||t|^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z^0) r_{N_0 - n_0}^m \leq \\
&\leq a_{N_0}(z^0) \sum_{m=0}^{+\infty} r_{N_0 - n_0}^m = \frac{a_{N_0}(z^0)}{1 - r_{N_0 - n_0}} \leq \frac{a_{N_0}(z^0)}{1 - 1/8} = \frac{8}{7} a_{N_0}(z^0). \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

З (2.26) та (2.27) отримуємо

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r_{N_0-n_0}/L(z^0)\right\} \le \frac{8}{7}a_{N_0}(z^0) \le$$
$$\le \frac{16}{7}\frac{1}{R_{N_0-n_0}}r_{N_0-n_0}^{-n_0}\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r_{N_0-n_0}}{L(z^0)}\right\} \le$$
$$\le \frac{16}{7}\frac{1}{R_N}r_N^{-N}\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r_{N_0-n_0}/L(z^0)\right\},$$

тобто, (2.25) виконується з $P_2(R) = \dfrac{16}{7R_N r_N^N}$, $\eta(R) = r_N = \dfrac{1}{8R_N}$ та $r = r_{N_0-n_0}$.

Достатність. З огляду на лему 2.8 досить показати, що існує число P_1 таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{\beta+1}{2L(z^0)}\right\} \le P_1 \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{\beta-1}{4\beta L(z^0)}\right\}. \tag{2.28}$$

Нехай $\widetilde{R} = \frac{\beta-1}{4\beta}$. Тоді знайдуться $P_2^* = P_2\big(\widetilde{R}\big)$ та $\eta = \eta\big(\widetilde{R}\big) \in \big(0, \widetilde{R}\big)$ такі, що для кожного $z^* \in \mathbb{B}^n$ та деякого $r \in \big[\eta, \widetilde{R}\big]$ виконується нерівність

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\} \le P_2^* \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\}.$$

Нехай $L^* = \max\{L(z^0+t\mathbf{b}) : |t| \le \beta/L(z^0)\}$, $\rho_0 = (\beta-1)/(4\beta L(z^0))$, $\rho_k = \rho_0 + k\eta/L^*$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси, $\frac{\eta}{L^*} < \frac{\beta-1}{4\beta L(z^0)} < \frac{\beta}{L(z^0)} - \frac{\beta+1}{2L(z^0)}$. Тому, існує $n^* \in \mathbb{N}$, незалежне від z^0 таке, що $\rho_{p-1} < \frac{\beta+1}{2L(z^0)} \le \rho_p \le \frac{\beta}{L(z^0)}$ для деякого $p = p(z^0) \le n^*$.

Нехай $c_k = \{t \in \mathbb{C} : |t| = \rho_k\}$, $|F(z^0+t_k^{**}\mathbf{b})| = \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_k\}$ та t_k^* — точка перетину відрізка $[t_0, t_k^{**}]$ з колом c_{k-1}. Тоді для кожного $r > \eta$ виконується нерівність $|t_k^{**} - t_k^*| = \eta/L^* \le r/L(z^0+t_k^*\mathbf{b})$. Звідси для деякого $r \in [\eta, \widetilde{R}]$ правильне таке

$$|F(z^0+t_k^{**}\mathbf{b})| \le \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_k^*| = r/L(z^0+t_k^*\mathbf{b})\right\} \le$$
$$\le P_2^* \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_k^*| = r/L(z^0+t_k^*\mathbf{b})\right\} \le$$
$$\le P_2^* \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_{k-1}\}.$$

Отже, отримали (2.28) з $P_1^* = (P_2^*)^{n^*}$

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{\beta+1}{2L(z^0)}\right\} \le$$
$$\le \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_p\} \le P_2^* \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_{p-1}\} \le \ldots \le$$
$$\le (P_2^*)^p \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t \in c_0\} \le (P_2^*)^{n^*} \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{\beta-1}{4\beta L(z^0)}\right\}.$$

Теорему 2.5 доведено. □

2.5 Логарифмічна похідна та нулі.

Нижче доведемо інший критерій обмеженості L-індексу за напрямком, який описує поводження логарифмічної похідної за напрямком та розподіл нулів.

Нам потрібні додаткові позначення.

Нехай $g_{z^0}(t) := F(z^0 + t\mathbf{b})$. Якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\quad g_{z^0}(t) \neq 0$ для всіх $t \in S_{z^0}$, то $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \emptyset$; якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\quad g_{z^0}(t) \equiv 0$, то $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \{z^0 + t\mathbf{b} \colon t \in S_{z^0}\}$. А якщо при деякому $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\ g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ та a_k^0 — нулі $g_{z^0}(t)$, тобто, $F(z^0 + a_k^0\mathbf{b}) = 0$, то

$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \bigcup_k \left\{ z^0 + t\mathbf{b} \colon |t - a_k^0| \leq \frac{r}{L(z^0 + a_k^0\mathbf{b})} \right\}, \quad r > 0.$$

Нехай

$$G_r^{\mathbf{b}}(F) = \bigcup_{z^0 \in \mathbb{B}^n} G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0). \tag{2.29}$$

Через $n\big(r, z^0, 1/F\big) = \sum_{|a_k^0| \leq r} 1$ позначимо лічильну функцію нулів a_k^0.

Теорема 2.6. *Нехай $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ та $\mathbb{B}^n \setminus G_\beta^{\mathbf{b}}(F) \neq \emptyset$. $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли:*

1) *для кожного $r \in (0, \beta]$ існує $P = P(r) > 0$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)$*

$$\left| \frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} \right| \leq PL(z); \tag{2.30}$$

2) *для кожного $r \in (0, \beta]$ знайдеться $\widetilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$ при $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$*

$$n\left(\frac{r}{L(z^0)}, z^0, \frac{1}{F} \right) \leq \widetilde{n}(r). \tag{2.31}$$

Доведення. **Необхідність.** Насамперед покажемо, що з умови $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком випливає, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)$ ($r \in (0, \beta]$) та кожного $\widetilde{a}^k = z^0 + a_k^0\mathbf{b}$ справедлива така нерівність

$$|z^0 - \widetilde{a}_k| > \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\widetilde{z}^0)\lambda_2^{\mathbf{b}}\left(z^0, r\right)}. \tag{2.32}$$

Від супротивного, припустимо, що існують $z^0 \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)$ та $\widetilde{a}^k = z^0 + a_k^0\mathbf{b}$ такі, що $|z^0 - \widetilde{a}_k| \leq \dfrac{r|\mathbf{b}|}{2L(\widetilde{z}^0)\lambda_2^{\mathbf{b}}\left(z^0, r\right)} \leq \dfrac{r|\mathbf{b}|}{2L(z^0)} < \dfrac{r|\mathbf{b}|}{L(z^0)}$. Звідси, $|a_k^0| < \frac{r}{L(z^0)}$. Але для $\lambda_2^{\mathbf{b}}$ виконуються такі оцінки $L(\widetilde{a}^k) \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}\left(z^0, r\right) L(z^0)$, тому $|z^0 - \widetilde{a}^k| = |\mathbf{b}| \cdot |a_k^0| \leq \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(\widetilde{a}^k)}$, тобто, $|a_k^0| \leq \dfrac{r}{2L(\widetilde{a}^k)}$. Отримали суперечність з $\widetilde{z}^0 \in \mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)$. Насправді в (2.32) замість $\lambda_2^{\mathbf{b}}\left(z^0, r\right)$ можна взяти $\lambda_2^{\mathbf{b}}\left(r\right)$.

Виберемо в теоремі 2.5 $R = \dfrac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}\left(r\right)}$. Тоді знайдеться $P_2 \geq 1$ та $\eta \in (0, R)$ такі, що для кожного $\widetilde{z^0} = z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $r^* \in [\eta, R]$ виконується нерівність (2.25) з r^* замість r. Тому за нерівністю Коші

$$|\partial_{\mathbf{b}} F(z^0)| \leq \frac{L(z^0)}{r^*} \max\left\{ |F(z^0 + t\mathbf{b}) : |t| = r^*/L(z^0) \right\} \leq$$

$$\leq P_2 \frac{L(z^0)}{\eta} \min\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r^*/L(z^0)\}. \tag{2.33}$$

На основі (2.32) для кожного $z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n \backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$ множина $\left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| \leq \frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)L(z^0)}\right\}$ не містить нулів функції $F(z^0+t\mathbf{b})$. Тому, застосовуючи до $1/F$, як функції від змінної t, принцип максимуму модуля, маємо

$$|F(z^0)| \geq \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r^*/L(z^0)\right\} \tag{2.34}$$

З нерівностей (2.33) та (2.34) випливає (2.30) з $P = \dfrac{P_2}{\eta}$.

Тепер доведемо, що для функції F обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ знайдеться $P_3 > 0$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $(F(z^0+t\mathbf{b}) \not\equiv 0)$, $r \in (0,1]$

$$n(r/L(z^0), z^0, 1/F) \min\Big\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r/L(z^0)\Big\} \leq$$
$$\leq P_3 \max\Big\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = 1/L(z^0)\Big\}. \tag{2.35}$$

Застосовуючи нерівність Коші та теорему 2.3 для всіх $t \in S_{z^0}$ на колі $|t| = \dfrac{1}{L(z^0)}$, маємо

$$\Big|\partial_{\mathbf{b}} F(z^0+t\mathbf{b})\Big| \leq \frac{L(z^0)}{\beta-1} \max\Big\{|F(z^0)| : |\theta - t| = \frac{\beta-1}{L(z^0)}\Big\} \leq$$
$$\leq \frac{L(z^0)}{\beta-1} \max\Big\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{\beta}{L(z^0)}\Big\} \leq$$
$$\leq \frac{P_1(1,\beta)}{\beta-1} L(z^0) \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{1}{L(z^0)}\right\}. \tag{2.36}$$

Якщо ж $F(z^0+t\mathbf{b}) \neq 0$ на колі $\left\{t \in S_{z^0} : |t| = r/L(z^0)\right\}$, то

$$n\left(\frac{r}{L(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) = \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\frac{r}{L(z^0)}} \frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z^0+t\mathbf{b})}{F(z^0+t\mathbf{b})} dt\right| \leq$$
$$\leq \frac{\max\left\{\left|\partial_{\mathbf{b}} F(z^0+t\mathbf{b})\right| : |t| = r/L(z^0)\right\}}{\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r/L(z^0)\right\}} \frac{r}{L(z^0)}. \tag{2.37}$$

З (2.36) та (2.37) отримуємо

$$n\left(r/L(z^0), z^0, 1/F\right) \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r/L(z^0)\right\} \leq$$
$$\leq \frac{r}{L(z^0)} \max\left\{|\partial_{\mathbf{b}} F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r/L(z^0)\right\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{L(z^0)} \max\left\{|\partial_{\mathbf{b}} F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = 1/L(z^0)\right\} \leq$$
$$\leq P_1(1,\beta)/(\beta-1) \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = 1/L(z^0)\right\}.$$

Отже, вивели (2.35) з $P_3 = \dfrac{P_1(1,\beta)}{\beta-1}$. Якщо функція $F(z^0+t\mathbf{b})$ має нулі на колі $\{t \in D_R^{z^0} : |t| = r/L(z^0)\}$, то нерівність (2.35) очевидна.

Покладемо $R = 1$ у теоремі 2.5. Тоді існують $P_2 = P_2(1) \geq 1$ та $\eta \in (0,1)$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $r^* = r^*(z^0, t_0) \in [\eta, 1]$

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r^*}{L(z^0)}\right\} \leq P_2 \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r^*}{L(z^0)}\right\}.$$

Далі, за теоремою 2.3 знайдеться $P_1 \geq 1$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$

$$\begin{gathered}\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = 1/L(z^0)\right\} \leq \\ \leq P_1(1,\eta)\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : \ |t| = \eta/L(z^0)\right\} \leq \\ \leq P_1(1,\eta)\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r^*/L(z^0)\right\} \leq \\ \leq P_1(1,\eta)P_2\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r^*/L(z^0)\right\}.\end{gathered}$$

Беручи до уваги (2.35), отримуємо

$$\begin{gathered}n\left(r^*/L(z^0), z^0, 1/F\right)\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r^*/L(z^0)\right\} \leq \\ \leq P_3P_1(1,\eta)P_2\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r^*/L(z^0)\right\},\end{gathered}$$

тобто, $n\left(\frac{r^*}{L(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) \leq P_1(1,\eta)P_2P_3$. Звідси,

$$n\left(\frac{r^*}{L(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) \leq P_4 = P_1(1,\eta)P_2P_3 = \frac{P_1(1,\eta)P_2(1)P_1(1,r+1)}{r}.$$

Якщо $r \in (0,\eta]$, то властивість (2.31) доведена.

Нехай $r \in (\eta, \beta]$ та $L^* = \max\left\{L(z^0+t\mathbf{b}) : |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\}$. Використовуючи властивості $Q^n_{\mathbf{b}}$, маємо $L^* \leq \lambda^{\mathbf{b}}_2(r)L(z^0)$. Покладемо $\rho = \frac{\eta}{L(z^0)\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)}$, $R = \frac{r}{L(z^0)}$. Можна накрити кожну множину $\overline{K} = \{z^0 + t\mathbf{b} : |t| \leq R\}$ скінченним числом $m = m(r)$ замкнених множин $\overline{K}_j = \{z^0 + t\mathbf{b} : |t - t_j| \leq \rho\}$, де $t_j \in \overline{K}$. Оскільки $\frac{\eta}{\lambda^{\mathbf{b}}_2(r)L(z^0)} \leq \frac{\eta}{L^*} \leq \frac{\eta}{L(z^0+t_j\mathbf{b})}$ у кожному $\overline{K}_j$ міститься не більше, ніж $[P_4]$ нулів функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$. Тому $n\left(\frac{r}{L(z^0)}, z^0, 1/F\right) \leq \widetilde{n}(r) = [P_4]\,m(r)$ і властивість (2.31) доведено.

Достатність. Навпаки, вважатимемо, що умови (2.30) та (2.31) виконуються. Згідно з (2.31) для кожного $R \in (0,\beta]$ існує $\widetilde{n}(R) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що в кожній множині $\overline{K} = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| \leq \frac{R}{L(z^0)}\right\}$ число нулів функції $F(z^0+t\mathbf{b})$ не перевищує $\widetilde{n}(r)$.

Покладемо $a = a(R) = \frac{R\lambda^{\mathbf{b}}_1(R)}{2(\widetilde{n}(R)+1)}$. За умовою (2.30) знайдеться $P = P(a) = \widetilde{P}(R) \geq 1$ таке, що $\left|\frac{\partial_{\mathbf{b}}F(z)}{F(z)}\right| \leq PL(z)$ for all $z \in \mathbb{B}^n \backslash G^{\mathbf{b}}_a$ для всіх $z \in \mathbb{B}^n \backslash G^{\mathbf{b}}_a$, тобто, для всіх $z \in \overline{K}$, що лежать зовні множин

$$b^0_k = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : \ |t - a^0_k| < a(R)/L(z^0 + a^0_k\mathbf{b})\right\},$$

де $a^0_k \in \overline{K}$ нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$. З властивостей $\lambda^{\mathbf{b}}_1$ маємо $\lambda^{\mathbf{b}}_1(R)L(z^0) \leq \lambda^{\mathbf{b}}_1(R, z^0)L(z^0) \leq L(z^0 + a^0_k\mathbf{b})$. Тому $|\frac{\partial_{\mathbf{b}}F(z)}{F(z)}| \leq PL(z)$ для всіх $z \in \mathbb{B}^n$, що лежать зовні множин

$$c^0_k = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - a^0_k| \leq \frac{a(R)}{\lambda^{\mathbf{b}}_1(R)L(z^0+t_0\mathbf{b})} = \frac{R}{2(\widetilde{n}(R)+1)L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}.$$

Очевидно, що сума діаметрів множин c_k^0 не перевищує $\frac{R\widetilde{n}(R)}{(\widetilde{n}(R)+1)L(z^0)} < \frac{R}{L(z^0)}$. Тому знайдеться множина $\widetilde{c}^0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\}$, де $\frac{R}{2(\widetilde{n}(R)+1)} = \eta(R) < r < R$, така, що для всіх $z \in \widetilde{c}^0$ справджується така нерівність

$$\left|\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)}\right| \le PL(z) \le P\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)L(z^0) \le P\lambda_2^{\mathbf{b}}(R)\, L(z^0).$$

Для будь-яких точок $z_1 = z^0 + t_1\mathbf{b}$ та $z_2 = z^0 + t_2\mathbf{b}$ з $\widetilde{c}^0$ маємо

$$\ln\left|\frac{F(z^0+t_1\mathbf{b})}{F(z^0+t_2\mathbf{b})}\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z^0+t\mathbf{b})}{F(z^0+t\mathbf{b})}\right| |dt| \le P\lambda_2^{\mathbf{b}}(R)\, L(z^0)\frac{2r}{L(z^0)} \le 2R\, P(R)\lambda_2^{\mathbf{b}}(R)\,.$$

Звідси одержуємо

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\} \le P_2 \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\},$$

де $P_2 = \exp\left\{2R\, P(R)\lambda_2^{\mathbf{b}}(R)\right\}$. Отже, за теоремою 2.5 функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. Теорема 2.6 доведена. □

Нехай D — довільна обмежена область в $\mathbb{B}^n$ така, що $\operatorname{dist}(D, \mathbb{B}^n) > 0$. Якщо нерівність (2.2) виконується для всіх $z \in D$ замість $\mathbb{B}^n$, то аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F називається *функцією обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b}$ *в області* D. Найменше таке ціле число m_0 називається *L-індексом за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *в області* D та позначається $N_{\mathbf{b}}(F, L, D) = m_0$. Через $\overline{D}$ позначимо замикання області D.

Лема 2.9. *Нехай D — довільна обмежена область у $\mathbb{B}^n$ така, що $\operatorname{dist}(D, \mathbb{B}^n) > 0$. $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — довільний напрямок. Якщо $L\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ неперервна функція така, що $L(z) \ge \frac{\beta}{1-|z|}$, та $F(z)$ — аналітична в одиничній кулі функція така, що $(\forall z^0 \in \overline{D})\colon \quad F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$, то $N_{\mathbf{b}}(F, L, D) < \infty$.*

Доведення. Для будь-якого фіксованого $z^0 \in \overline{D}$ розвинемо аналітичну функцію $F(z^0 + t\mathbf{b})$ у степеневий ряд за степенями t у крузі $\left\{t \in \mathbb{C} : |t| \le \frac{1}{L(z^0)}\right\}$

$$F(z^0 + t\mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{\partial^p F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^m} t^m. \tag{2.38}$$

Величина $\frac{1}{m!L^m(z^0)}\left|\frac{\partial^m F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^m}\right|$ є модулем коефіцієнта степеневого ряду (2.38) у точці $t \in \mathbb{C}$ такої, що $|t| = \frac{1}{L(z^0)}$. Позаяк $F(z)$ — аналітична функція, для кожного $z_0 \in \overline{D}$

$$\frac{1}{m!L^m(z^0)}\left|\frac{\partial^m F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^m}\right| \to 0 \quad (m \to \infty),$$

тобто, існує $m_0 = m(z^0, \mathbf{b})$ таке, що нерівність (2.2) виконується у точці $z = z^0$ для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$.

Доведемо, що $\sup\{m_0\colon z^0 \in \overline{D}\} < +\infty$. Припустимо від супротивного, що множина усіх значень m_0 є необмеженою по z^0, тобто, $\sup\{m_0\colon z^0 \in \overline{D}\} = +\infty$. Звідси, для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ існує $z^{(m)} \in \overline{D}$ та $p_m > m$

$$\frac{1}{p_m! L^{p_m}(z^{(m)})}\left|\frac{\partial^{p_m} F(z^{(m)})}{\partial \mathbf{b}^{p_m}}\right| > \max\left\{\frac{1}{k! L^k(z^{(m)})}\left|\frac{\partial^k F(z^{(m)})}{\partial \mathbf{b}^k}\right| :\ 0 \le k \le m\right\}. \tag{2.39}$$

Оскільки $\{z^{(m)}\} \subset \overline{D}$, знайдеться підпослідовність $z'^{(m)} \to z' \in \overline{G}$ при $m \to +\infty$. За інтегральною формулою Коші

$$\frac{\partial^p_{\mathbf{b}} F(z)}{p!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} \frac{F(z+t\mathbf{b})}{t^{p+1}} dt$$

для будь-якого $p \in \mathbb{N}$, $z \in D$. Перепишемо (2.39) у вигляді

$$\max\left\{\frac{1}{k! L^k(z^{(m)})}\left|\frac{\partial^k F(z^{(m)})}{\partial \mathbf{b}^k}\right| :\ 0 \le k \le m\right\} <$$

$$< \frac{1}{L^{p_m}(z^{(m)})}\int_{|t|=r/L(z^{(m)})} \frac{|F(z^{(m)}+t\mathbf{b})|}{|t|^{p_m+1}}|dt| \le \frac{1}{r^{p_m}}\max\{|F(z)| : z \in D_r\}, \tag{2.40}$$

де $D_r = \bigcup_{z^* \in \overline{D}}\{z \in \mathbb{C}^n : |z - z^*| \le \frac{|b|r}{L(z^*)}\}$. Можна взяти $r \in (1, \beta)$, бо F — аналітична в одиничній кулі функція. Знаходячи границю для кожної похідної за напрямком фіксованого порядку у (2.40) при $m \to \infty$ отримаємо

$$(\forall k \in \mathbb{Z}_+)\colon \quad \frac{1}{k! L^k(z')}\left|\frac{\partial^k F(z')}{\partial \mathbf{b}^k}\right| \le \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{r^{p_m}}\max\{|F(z)| : z \in D_r\} \le 0$$

при $m \to +\infty$. Отже, усі похідні за напрямком $\mathbf{b}$ функції F у точці z' дорівнюють 0 і $F(z') = 0$. З огляду на (2.38) $F(z' + t\mathbf{b}) \equiv 0$. Отримали суперечність.

□

2.6 Обмеженість L-індексу за напрямком аналітичних розв'язків деяких рівнянь з частинними похідними

Розглянемо таке рівняння з частинними похідними

$$g_0(z)\partial^p_{\mathbf{b}} w + g_1(z)\partial^{p-1}_{\mathbf{b}} w + \ldots + g_p(z) w = h(z). \tag{2.41}$$

Спершу доведемо допоміжне твердження.

Лема 2.10. *Нехай $\beta > 1$, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$, $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{B}^n \backslash G^{\mathbf{b}}_\beta(F) \ne \emptyset$. Тоді для кожного $r \in (0, \beta]$ та всіх $m \in \mathbb{N}$ існує $P = P(r, m) > 0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n \backslash G^{\mathbf{b}}_r(F)$ виконується нерівність $|\partial^m_{\mathbf{b}} F(z)| \le P L^m(z)|F(z)|$.*

Доведення. У теоремі 2.6 нами доведено, що якщо ціла функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, то виконується (2.32), тобто, для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n \backslash G^{\mathbf{b}}_r(F)$ ($r \in (0, \beta]$) та $\widetilde{a}^k = z^0 + a^0_k \mathbf{b}$ виконується нерівність

$$|z^0 - \widetilde{a}_k| > \frac{r|\mathbf{b}|}{2L(z^0)\lambda^{\mathbf{b}}_2(z^0, r)}. \tag{2.42}$$

Покладемо у теоремі 2.5 $R = \frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}$. Тоді знайдуться $P_2 = P_2(\frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}) \geq 1$ та $\eta(\frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}) \in (0, \frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)})$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$, $t_0 \in S_{z^0}$ та деякого $r^* = r^*(z^0) \in [\eta(\frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}), \frac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)}]$ виконується (2.25) з r^* замість r. Застосовуючи нерівність Коші, отримуємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z^0)|}{m!} \leq \frac{L^m(z^0)}{(r^*)^m} \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r^*/L(z^0+t_0\mathbf{b})\} \leq$$
$$\leq P_2 \frac{L^m(z^0)}{\eta^m} \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = r^*/L(z^0)\right\}.$$

З (2.42) для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n \backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$ множина $\left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| \leq \dfrac{r}{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(r)L(z^0)}\right\}$ не містить нулів функції $F(z^0+t\mathbf{b})$. Застосовуючи до $\frac{1}{F(z^0+t\mathbf{b})}$ принцип максимуму модуля за змінною $t \in S_{z^0}$, отримаємо $|F(z^0)| \geq \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r^*}{L(z^0)}\right\}$.

Отже, $|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z^0)| \leq m! \frac{P_2}{\eta^m} L^m(z^0)|F(z^0)|$. Тобто, отримали потрібну нерівність з $P = P_2 m! \eta^{-m}$. □

Використовуючи лему 2.10, покажемо правильність такої теореми.

Теорема 2.7. *Нехай $\beta > 1$, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$, $g_0(z), \ldots, g_p(z), h(z)$ — аналітичні в $\mathbb{B}^n$ функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, $\mathbb{B}^n \backslash G_\beta^{\mathbf{b}}(g_0) \neq \emptyset$ та для кожного $r \in (0;\beta]$ існує $T = T(r) > 0$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n \backslash G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ та $j = 1, \ldots, p$ виконується нерівність*

$$|g_j(z)| \leq T L^j(z)|g_0(z)|. \tag{2.43}$$

Тоді аналітична функція $F(z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, яка задовольняє рівняння (2.41), має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Доведення. Для фіксованого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ нехай b_k^0 — нулі функції $g_0(z^0+t\mathbf{b})$ та $\{c_k^0\}$ — множина нулів усіх функцій $g_0(z^0+t\mathbf{b})$, $g_1(z^0+t\mathbf{b})$, $\ldots$, $g_p(z^0+t\mathbf{b})$ та $h(z^0+t\mathbf{b})$, як функцій від однієї змінної $t \in S_{z^0}$. Очевидно, що справедливим є таке включення $\{b_k^0\} \subset \{c_k^0\}$. Покладемо

$$G_r^{\mathbf{b}}(z^0) = \bigcup_k \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c_k^0| \leq \frac{r}{L(z^0 + c_k^0\mathbf{b})}\right\}, \ G_r^{\mathbf{b}} = \bigcup_{z^0} G_r^{\mathbf{b}}(z^0).$$

Легко бачити, що $G_r^{\mathbf{b}} = G_r^{\mathbf{b}}(h) \cup \bigcup_{j=1}^p G_r^{\mathbf{b}}(g_j)$. Припустимо, що $\mathbb{B}^n \backslash G_r^{\mathbf{b}}(g_0) \neq \emptyset$. З леми 2.10 та нерівності (2.43) випливає, що для кожного $r \in (0, \beta]$ знайдеться $T^* = T^*(r) > 0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}$ виконуються нерівності

$$|\partial_{\mathbf{b}} h(z)| \leq T^*|h(z)|L(z), |g_j(z)| \leq T^*|g_0(z)|L^j(z), \ j \in \{1, 2, \ldots, p, \},$$
$$|\partial_{\mathbf{b}} g_j(z)| \leq P(r)L(z)|g_j(z)| \leq T^*(r)|g_0(z)|L^{j+1}(z), \ j \in \{0, 1, 2, \ldots, p, \}.$$

Від рівняння (2.41) обчислимо похідну за напрямку $\mathbf{b}$:

$$g_0(z)\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z) + \sum_{j=1}^p g_j(z)\partial_{\mathbf{b}}^{p+1-j} F(z) + \sum_{j=0}^n \partial_{\mathbf{b}} g_j(z)\partial_{\mathbf{b}}^{p-j} F(z) = \partial_{\mathbf{b}} h(z).$$

З отриманої рівності випливає, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}$:

$$|g_0(z)||\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z)| \le |\partial_{\mathbf{b}}h(z)| + \sum_{j=1}^{p}|g_j(z)||\partial_{\mathbf{b}}^{p+1-j}F(z)|+$$

$$+\sum_{j=0}^{p}|\partial_{\mathbf{b}}g_j(z)||\partial_{\mathbf{b}}^{p-j}F(z)| \le T^*|h(z)|L(z) + \sum_{j=1}^{p}|g_j(z)||\partial_{\mathbf{b}}^{p+1-j}F(z)|+$$

$$+\sum_{j=0}^{p}|\partial_{\mathbf{b}}g_j(z)||\partial_{\mathbf{b}}^{p-j}F(z)| \le T^*L(z)\sum_{j=0}^{p}|g_j(z)||\partial_{\mathbf{b}}^{p-j}F(z)|+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}|g_j(z)||\partial_{\mathbf{b}}^{p+1-j}F(z)| + \sum_{j=0}^{p}|\partial_{\mathbf{b}}g_j(z)||\partial_{\mathbf{b}}^{p-j}F(z)| \le$$

$$\le T^*|g_0(z)|\left(T^*L(z)\sum_{j=0}^{p}L^j(z)|\partial_{\mathbf{b}}^{p-j}F(z)| + \sum_{j=1}^{p}L^j(z)|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1-j}F(z)|+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{p}L^{j+1}(z)|\partial_{\mathbf{b}}^{p-j}F(z)|\right) = T^*|g_0(z)|L^{p+1}(z)|\left((T^*+1)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{L^{p-j}(z)}|\partial_{\mathbf{b}}^{p-j}F(z)| + \sum_{j=1}^{p}\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1-j}F(z)|}{L^{p+1-j}(z)}\right) \le$$

$$\le T^*((T^*+1)(p+1)+p)|g_0(z)|L^{p+1}(z)\max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j}F(z)|}{L^j(z)} : 0 \le j \le p\right\}.$$

Отже, для кожного $r > 0$ існує $P_3 = P_3(r) > 0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}$ виконується нерівність

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z)|}{L^{p+1}(z)} \le P_3\max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j}F(z)|}{L^j(z)} : 0 \le j \le p\right\}. \tag{2.44}$$

Нехай $z^0 + t_0\mathbf{b}$ — довільна точка з $\mathbb{B}^n$ та$K^0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| \le \beta/L(z^0)\right\}$. Але $g_0, g_1, \ldots, g_p, h$ — аналітичні в $\mathbb{B}^n$ функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Звідси за теоремою 2.6 множина K^0 містить щонайбільше $N < +\infty$ елементів множини $\{c_k^0\}$ та N — незалежне від z^0.

Нехай $\widetilde{K}_k^0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c_k^0| \le \dfrac{\lambda_1^{\mathbf{b}}(\beta)(\beta-1)}{8(N+1)L(z^0 + c_k^0\mathbf{b})}\right\}$. З умови $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ випливає, що $L(z^0 + c_k^0\mathbf{b}) \ge \lambda_1^{\mathbf{b}}(1)L(z^0)$. За умови $c_k^0 \in K^0$ маємо, що $\widetilde{K}_k^0$ є підмножиною K_k^0

$$\widetilde{K}_k^0 \subset K_k^0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c_k^0| \le \frac{\beta-1}{8(N+1)L(z^0)}\right\}.$$

Підсумовуючи проведені міркування, робимо висновок, що для $z^0 + t\mathbf{b} \in K^0 \setminus \bigcup_{c_k^0 \in K^0} K_k^0$ нерівність (2.44) правильна з $P_3 = P_3\left(\dfrac{\lambda_1^{\mathbf{b}}(\beta)(\beta-1)}{8(N+1)}\right)$.

Знову для таких $z^0 + t\mathbf{b} \in K^0 \setminus \bigcup_{c_k^0 \in K^0} K_k^0$ справедлива оцінка $L(z^0) \geq \dfrac{L(z^0 + t\mathbf{b})}{\lambda_2^{\mathbf{b}}(\beta)}$. Використовуючи (2.44), маємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{p+1}(z^0)} \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}(\beta) \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{p+1}(z^0+t\mathbf{b})} \leq P_3(\lambda_2^{\mathbf{b}}(\beta))^{p+1} \max_{0\leq j\leq p} \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j} F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{j}(z^0+t\mathbf{b})} \right\} \leq$$

$$\leq P_3(\lambda_2^{\mathbf{b}}(\beta))^{p+1} \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j} F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{j}(z^0)} \left(\frac{1}{\lambda_1^{\mathbf{b}}(\beta)} \right)^j : 0 \leq j \leq p \right\} \leq$$

$$\leq P_3 \left(\frac{\lambda_2^{\mathbf{b}}(\beta)}{\lambda_1^{\mathbf{b}}(\beta)} \right)^p \lambda_1^{\mathbf{b}}(\beta) \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j} F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{j}(z^0+t_0\mathbf{b})} : 0 \leq j \leq p \right\} = P_4 g_{z^0}(t), \qquad (2.45)$$

де $P_4 = P_3 \lambda_2^{\mathbf{b}}(\beta) \left(\dfrac{\lambda_2^{\mathbf{b}}(\beta)}{\lambda_1^{\mathbf{b}}(\beta)} \right)^p$ та $g_{z^0}(t) = \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j} F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{j}(z^0)} : 0 \leq j \leq p \right\}$. Нехай D — сума діаметрів множин K_k^0. Тоді

$$D \leq \frac{2|\mathbf{b}|(\beta-1)N}{8(N+1)L(z^0)} \leq \frac{|\mathbf{b}|(\beta-1)}{4L(z^0)}.$$

Тому знайдуться радіуси $r_1 \in \left[\frac{\beta}{4}, \frac{\beta}{2}\right]$ та $r_2 \in \left[\dfrac{\beta+1}{2}, \beta\right]$ з такою властивістю: якщо $z^0 + t\mathbf{b} \in C_j = \left\{ z^0 + t\mathbf{b} : |t| = \dfrac{r_j}{L(z^0)} \right\}$, для одного $j \in \{1, 2\}$, то $z^0 + t\mathbf{b} \in K^0 \setminus \bigcup_{c_k^0 \in K^0} K_m^0$. Візьмемо дві довільні точки $z^0 + t_1\mathbf{b} \in C_1$ та $z^0 + t_2\mathbf{b} \in C_2$ і з'єднаємо їх гладкою кривою $\gamma = \{z^0 + t\mathbf{b} : t = t(s), 0 \leq s \leq T\}$ такою, що $F(z^0 + t(s)\mathbf{b}) \neq 0$ та $\gamma \subset K^0 \setminus \bigcup_{c_k^0 \in K^0} K_m^0$. Цю криву можна вибрати так, щоб її довжина задовольняла оцінку

$$|\gamma| \leq |\mathbf{b}| \left(\frac{\pi r_1}{L(z^0)} + \frac{r_2 - r_1}{L(z^0)} + \frac{\pi N(\beta-1)}{8(N+1)L(z^0)} \right) \leq |\mathbf{b}| \left(\frac{r_2 + (\pi-1)r_1}{L(z^0)} + \frac{\pi(\beta-1)}{8L(z^0)} \right) \leq$$

$$\leq |\mathbf{b}| \frac{1}{L(z^0)} \left(\frac{(\pi-1)\beta}{2} + \beta + \frac{\pi(\beta-1)}{8} \right) < \frac{3\pi\beta|\mathbf{b}|}{L(z^0)}. \qquad (2.46)$$

Тоді нерівність (2.45) справедлива на γ, тобто,

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z^0 + t(s)\mathbf{b})|}{L^{p+1}(z^0)} \leq P_4 g_{z^0}(t(s)), \ 0 \leq s \leq T.$$

У доведенні теореми 2.4 отримали, що функція $g_{z^0}(t_0, t(s))$ неперервна на $[0, T]$ та неперервно диференційовна за винятком, можливо, скінченного числа точок. Крім того, для комплексно-значної функції від дійсної змінної виконується $\dfrac{d}{ds}|\varphi(s)| \leq \left| \dfrac{d}{ds}\varphi(s) \right|$, крім точок, в яких $\varphi(s) = 0$.

З врахуванням (2.45) маємо

$$\frac{d}{ds} g_{z^0}(t(s)) \leq \max \left\{ \frac{d}{ds} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j} F(z^0+t(s)\mathbf{b})|}{L^{j}(z^0))} : 0 \leq j \leq p \right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j+1}F(z^0+t(s)\mathbf{b})|}{L^{j+1}(z^0)}|t'(s)|L(z^0) : 0\leq j\leq p\right\}\leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j+1}F(z^0+t(s)\mathbf{b})|}{L^{j+1}(z^0)} : 0\leq j\leq p; \left|\frac{\partial^{p+1}F(z^0+t(s)\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}^{p+1}}\right|\right\}\times$$

$$\times|t'(s)|L(z^0)\leq P_5 g_{z^0}(t(s))|t'(s)|L(z^0).$$

де $P_5=\max\{1,P_4\}$. Але (2.46) — істинна, тому

$$\left|\ln\frac{g_{z^0}(t_2)}{g_{z^0}(t_1)}\right| = \left|\int_0^T \frac{1}{g_{z^0}(t(s))}\frac{d}{ds}g_{z^0}(t(s))ds\right|\leq$$

$$\leq P_5 L(z^0)\int_0^T |t'(s)|ds\leq P_5 L(z^0)|\gamma|\leq 3\pi\beta|\mathbf{b}|P_5,$$

тобто $g_{z^0}(t_2)\leq g_{z^0}(t_1)\exp\{3\pi\beta|\mathbf{b}|P_5\}$. Виберемо t_2 так, аби $|F(z^0+t_2\mathbf{b})| = \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : z^0+t\mathbf{b}\in C_2\}$. Звідси,

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t|=\frac{\beta+1}{2L(z^0)}\right\}\leq |F(z^0+t_2\mathbf{b})|\leq g_{z^0}(t_2)\leq g_{z^0}(t_1)\exp\{3\pi\beta|\mathbf{b}|P_5\}.$$

Позаяк $z^0+t_1\mathbf{b}\in C_1$ застосуємо нерівність Коші за змінною t для всіх $j=1,2,\ldots,p$, та отримуємо

$$|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^0+t_1\mathbf{b})|\leq j!\left(10L(z^0)\right)^j\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t-t_1|=\frac{1}{2\beta L(z^0)}\right\}\leq$$

$$\leq p!\left(10L(z^0)\right)^j\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t|=\frac{1}{\beta L(z^0)}\right\}.$$

Звідси випливає, що

$$g_{z^0}(t_1)\leq p!10^p\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t|=\frac{1}{\beta L(z^0)}\right\} \tag{2.47}$$

З нерівностей (2.6) та (2.47) маємо

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t|=\frac{\beta+1}{2L(z^0)}\right\}\leq p!10^p\exp\{|\mathbf{b}|P_5\}\times$$

$$\times\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t|=\frac{1}{\beta L(z^0)}\right\}.$$

Тоді за лемою 2.8 аналітична функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. □

2.7 Зростання аналітичних в $\mathbb{B}^n$ функцій обмеженого L-індексу за напрямком

Позначимо $a^+=\max\{a,0\}$, $u(r)=u(z^0,\theta,r)=L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})$.

Теорема 2.8. *Нехай* $L : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$, *для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$, $\theta \in [0, 2\pi]$ *функція* $L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})$ *— неперервно диференційовна від дійсної змінної* $r \in [0, \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|})$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *є обмеженого* L*-індексу за напрямком* $\mathbf{b}$, *то для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|})$ *та кожного цілого числа* $p \geq 0$

$$\ln \max_{|t|=r} \left(\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0+t\mathbf{b})|}{p! L^p(z^0+t\mathbf{b})} \right) \leq \ln \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)|}{k! L^k(z^0)} : 0 \leq k \leq N \right\} +$$
$$+ \max_{\theta \in [0,2\pi]} \int_0^r \left\{ (N+1) L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) + N \frac{(-u_t'(z^0, \theta, t))^+}{L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b})} \right\} dt \tag{2.48}$$

Коли ж, крім того, для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $(-u'(r))^+ / (L^2(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})) \to 0$ *при* $r \to \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|}$ *рівномірно по* $\theta \in [0, 2\pi]$, *тоді для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *та* $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\varlimsup_{r \to (1-|z^0|)/|\mathbf{b}|} \frac{\ln |F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{\int_0^r L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) dt} \leq N_{\mathbf{b}}(F, L) + 1, \tag{2.49}$$

Доведення. Зазначимо, що при $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та $r \in [0, \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|})$ маємо $z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n$. Дійсно, $|z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b}| \leq |z^0| + |r| \cdot |\mathbf{b}| < |z^0| + \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|} \cdot |\mathbf{b}| = 1$.

Позначимо $N = N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n)$. Для фіксованого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та $\theta \in [0, 2\pi]$ розглянемо функцію

$$g(r) = \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} : 0 \leq k \leq N \right\}. \tag{2.50}$$

Позаяк функція $\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}$ є неперервно диференційовною від дійсної змінної $r \in [0, \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|})$, відповідно функція g також неперервно диференційовна на $[0, \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|})$, крім, можливо, зліченної множини точок та

$$g'(r) \leq \max \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})} \right) : 0 \leq k \leq N \right\} \leq$$
$$\leq \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k+1} F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} - \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} \frac{k u'(r)}{L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} \right\} \leq$$
$$\leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k+1} F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{(k+1)! L^{k+1}(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} (k+1) L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b}) + \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})} k \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(-u'(r))^+}{L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})} : 0 \leq k \leq N \right\} \leq g(r) \left((N+1) L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b}) + +N \frac{(-u'(r))^+}{L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})} \right).$$

Отже, маємо

$$\frac{d}{dr} \ln g(r) \leq (N+1) L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b}) + N \frac{(-u'(r))^+}{L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})}.$$

Функція F має обмежений L-індекс за напрямком, відповідно $g(0) \neq 0$ та

$$g(r) \leq g(0) \exp \left\{ \int_0^r \left((N+1) L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b}) + N \frac{(-u'(t))^+}{L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})} \right) dt \right\},$$

тоді

$$\ln g(r) \le \ln g(0) + \int_0^r \left((N+1) L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) + N \frac{(-u'(t))^+}{L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b})} \right) dt,$$

при $r \to \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|}$. Використовуючи (2.50), отримуємо (2.48). У випадку, якщо для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\left(-\frac{\partial L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right)^+ / (L^2(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})) \to 0$ при $r \to \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|}$ рівномірно стосовно $\theta \in [0, 2\pi]$, то

$$g(r) \le g(0) \exp\left\{ (N+1) \int_0^r \left(L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) + \frac{(-u_t'(z^0, \theta, t))^+}{L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b})} \right) dt \right\} =$$
$$= g(0) \exp\left\{ (N+1)(1+o(1)) \int_0^r L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) dt \right\}, \ r \to \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|},$$

Отже, $|F(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})| \le g(r) \le g(0) \exp\left\{ (N+1)(1+o(1)) \int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b}) dt \right\}$, $r \to \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|}$, для $\theta \in [0, 2\pi]$, $z^0 \in \mathbb{B}^n$, звідки

$$\ln |F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})| \le g(0) + (N+1)(1+o(1)) \int_0^r L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) dt, \ r \to \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|}. \tag{2.51}$$

Навіть більше, для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та $\theta \in [0, 2\pi]$ маємо

$$\varlimsup_{r \to \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|}} \frac{\ln |F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{\int_0^r L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) dt} \le N_{\mathbf{b}}(F, L) + 1.$$

□

Для $n = 1$ теорема 2.8 — це певне покращення результату Шеремети та Строчик [283], бо усунуто припущення $l = l(|z|)$.

Наслідок 2.2. *Нехай $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ — аналітична функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, $N = N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n)$, z^0 — фіксована точка в $\mathbb{B}^n$ така, що $F(z^0) = 1$. За цих умов для кожного $r \in [0, \frac{1-|z^0|}{|\mathbf{b}|})$ справджується нерівність*

$$\int_0^r \frac{n(t, z^0, 1/F)}{t} dt \le \ln \max\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : \ |t| = r\} \le$$
$$\le \ln \max\left\{ \frac{1}{p! L^p(z^0)} \left| \frac{\partial^p F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| : 0 \le k \le N \right\} +$$
$$+ \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \int_0^r \left\{ (N+1) L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) + N \frac{(-L_t'(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}))^+}{L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b})} \right\} dt.$$

Доведення. Розглянемо функцію $F(z^0 + t\mathbf{b})$ як функцію від однієї змінної t. Тоді першу нерівність отримуємо з класичної теореми Єнсена. Друга нерівність натомість випливає з (2.48) для $p = 0$. □

Висновки до розділу 2

Основні здобутки другого розділу:

1) отримано твердження, які встановлюють зв'язок між аналітичною в кулі функцією $F(z)$ обмеженого L-індексу за напрямом та функціями-зрізками від однієї змінної вигляду $F(z+t\mathbf{b})$, де $t \in S_z$, і вказано вимоги на множину A, за яких справджуватиметься рівність $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A\}$, де $l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$, $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$.
2) для аналітичних в одиничній кулі функцій обмеженого L-індексу за напрямком встановлено критерії, що описують локальне поводження частинних похідних, максимуму модуля, мінімуму модуля на колі, логарифмічної похідної за напрямком та розподілу нулів на зрізках вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$;
3) знайдено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком аналітичних в одиничній кулі розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь n-го порядку з похідними за напрямком;
4) встановлено оцінки зростання функцій з цього класу.

Результати другого розділу опубліковано в статті [64], а також доповідалися на конференціях [11–13, 27, 28, 258].

РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНІ В КУЛІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ

Розділ присвячений аналітичним в одиничній кулі функціям. Для них вводиться поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, де $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ — неперервна вектор-функція, та встановлюється цілий ряд критеріїв, що описують локальне поводження їхніх похідних. Крім того, вивчаються властивості розвинень у степеневий ряд функцій з цього класу та доводиться аналог теореми Хеймана, яка застосовується до дослідження властивостей аналітичних розв'язків систем рівнянь з частинними похідними. Розглядаються асимптотичне поводження аналітичних в одиничній кулі функцій, міра нульової множини цих функцій та оцінки частинних логарифмічних похідних функцій з цього класу.

Нещодавно здобувач разом з Н.В. Петречко та О. Б. Скасківим [54] запропонували підхід до розгляду обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для аналітичних в полікрузі функцій, де $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — додатні неперервні функції, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Хоча Дж. Ґ. Крішна та С. М. Шах [146] ввели раніше аналітичну в області (непорожній відкритій зв'язній множині) $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ функцію обмеженого індексу відносно $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Але аналітична в області функція обмеженого індексу за Крішною і Шахом насправді буде цілою функцією. Це випливає з необхідної умови обмеженості l-індексу для аналітичних в крузі функцій ([206, теорема 3.3,с.71]): $\int_0^r l(t)dt \to \infty$ при $r \to 1$ (візьмемо $l(t) \equiv \alpha_1$). Тому виникає необхідність ввести та дослідити обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних для аналітичних в полікруговій області функцій. Вище згадана праця [54] присвячена аналітичним у полікрузі функціям. Крім полікруга, іншим важливим прикладом полікругової області в $\mathbb{C}^n$ є куля. У зв'язку з цим варто згадати монографії [186, 245] про простори голоморфних функцій в одиничній кулі з $\mathbb{C}^n$: простори Бергмана, Гарді, Бєсова, Ліпшиця, Блоха, тощо. Це все свідчить про важливість дослідження властивостей голоморфних в одиничній кулі функцій.

У цьому розділі введемо у розгляд та вивчатимемо аналітичні в кулі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

3.1 Основні означення та позначення

Нам потрібні деякі типові позначення. Позначимо $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{1}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $|z| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}$. Для $A =$

$(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $B=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ використовуватимемо формальні позначення без порушення умов існування відповідних виразів $AB=(a_1b_1,\cdots,a_nb_n)$, $A/B=(a_1/b_1,\dots,a_n/b_n)$, $A^B=a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{b_n}$, а запис $A<B$ означає, що $a_j<b_j$, $j\in\{1,\dots,n\}$; подібним чином визначається відношення $A\le B$. Для $K=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ позначимо $K!=k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!$, $\|K\|=k_1+\cdots+k_n$. Додавання, скалярне множення та спряження визначені в $\mathbb{C}^n$ покомпонентно. Для $z\in\mathbb{C}^n$ та $w\in\mathbb{C}^n$ визначимо $\langle z,w\rangle=z_1\overline{w}_1+\cdots+z_n\overline{w}_n$, де $\overline{w}_k$ — комплексно спряжене число до w_k. Полікруг $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z_j-z_j^0|<r_j,\ j=1,\dots,n\}$ позначаємо через $\mathbb{D}^n(z^0,R)$, його кістяк $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z_j-z_j^0|=r_j,\ j=1,\dots,n\}$ — через $\mathbb{T}^n(z^0,R)$, замкнений полікруг $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z_j-z_j^0|\le r_j,\ j=1,\dots,n\}$ — через $\mathbb{D}^n[z^0,R]$, $\mathbb{D}^n=\mathbb{D}^n(\mathbf{0},\mathbf{1})$, $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$. Відкрита куля $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z-z^0|<r\}$ позначається через $\mathbb{B}^n(z^0,r)$, її топологічна межа — це сфера $\mathbb{S}^n(z^0,r)=\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z-z^0|=r\}$, замкнена куля $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z-z^0|\le r\}$ — через $\mathbb{B}^n[z^0,r]$, $\mathbb{B}^n=\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)$, $\mathbb{D}=\mathbb{B}^1=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$.

Для $K=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ та частинних похідних аналітичної в $\mathbb{B}^n$ функції $F(z)=F(z_1,\dots,z_n)$ використовуємо запис

$$F^{(K)}(z)=\frac{\partial^{\|K\|}F}{\partial z^K}=\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}F}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}.$$

Нехай $\mathbf{L}(z)=(l_1(z),\dots,l_n(z))$, де $l_j(z):\mathbb{B}^n\to\mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що

$$(\forall z\in\mathbb{B}^n):\ l_j(z)>\beta/(1-|z|),\ j\in\{1,\dots,n\},\tag{3.1}$$

де $\beta>\sqrt{n}$ — деяка стала.

С.Н. Строчик, М.М. Шеремета, В.О. Кушнір [206, 283] накладали подібну умову для функції $l:\mathbb{D}\to\mathbb{R}_+$ та $l:G\to\mathbb{R}_+$, де G — довільна область у $\mathbb{C}$.

Зауваження 3.1. *Зазначимо, що при $R\in\mathbb{R}_+^n$, $|R|\le\beta$, $z^0\in\mathbb{B}^n$ та $z\in\mathbb{D}^n[z^0,R/\mathbf{L}(z^0)]$ маємо, що $z\in\mathbb{B}^n$. Справді,* $|z|\le|z-z^0|+|z^0|\le\sqrt{\sum_{j=1}^n\frac{r_j^2}{l_j^2(z^0)}}+|z^0|<\sqrt{\sum_{j=1}^n\frac{r_j^2}{\beta^2}(1-|z^0|)^2}+|z^0|=\frac{(1-|z^0|)}{\beta}\sqrt{\sum_{j=1}^n r_j^2}+|z^0|\le\frac{(1-|z^0|)}{\beta}\beta+|z^0|=1.$

Аналітична функція $F\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{C}$ називається функцією *обмеженого* $\mathbf{L}$-*індексу (за сукупністю змінних),* якщо існує $n_0\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{B}^n$ та всіх $J\in\mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\le\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\ K\in\mathbb{Z}_+^n,\ \|K\|\le n_0\right\}.\tag{3.2}$$

Найменше таке ціле число n_0 називається $\mathbf{L}$-*індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^n)$.

Через $Q(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас функцій $\mathbf{L}$, які задовольняють (3.1) та для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$ та деякого $R=(r_1,\dots,r_n)$

$$\sup_{z,w\in\mathbb{B}^n}\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(w)}:\ |z_k-w_k|\le\frac{r_k}{\min\{l_k(z),l_k(w)\}},k\in\{1,\dots,n\}\right\}<\infty,\tag{3.3}$$

Не складно перевірити, що клас $Q(\mathbb{B}^n)$ можна визначити так:

$$(\forall R \in \mathbb{R}^n_+, |R| \le \beta,\ j \in \{1,\dots,n\}):\ 0 < \lambda_{1,j}(R) \le \lambda_{2,j}(R) < \infty, \tag{3.4}$$

де

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{B}^n} \inf \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\}, \tag{3.5}$$

$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{B}^n} \sup \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\}. \tag{3.6}$$

$$\Lambda_1(R) = (\lambda_{1,1}(R), \dots, \lambda_{1,n}(R)),\ \Lambda_2(R) = (\lambda_{2,1}(R), \dots, \lambda_{2,n}(R)), \tag{3.7}$$

і $\mathbf{L}$ задовольняє умову (3.1). Відтак, умови (3.4) й (3.3) рівносильні.

Приклад 3.1. Функція $F(z) = \exp\{\frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)}\}$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних з $\mathbf{L}(z) = \left(\frac{1}{(1-|z_1|)^2(1-|z|)}, \frac{1}{(1-|z|)(1-|z_2|)^2}\right)$ та $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^n) = 0$.

Позначимо $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (\widetilde{l}_1(z), \dots, \widetilde{l}_n(z))$. Запис $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ означає, що існують $\theta_1 \in \mathbb{R}_+$, $\theta_2 \in \mathbb{R}_+$ такі, що $\forall z \in \mathbb{B}^n$ $\theta_1 \widetilde{l}_j(z) \le l_j(z) \le \theta_2 \widetilde{l}_j(z)$ для кожного $j \in \{1,\dots,n\}$.

3.2 Властивості $Q(\mathbb{B}^n)$.

Тут розглянемо деякі потрібні нам властивостей допоміжного класу $Q(\mathbb{B}^n)$. Подібні твердження для $\mathbb{C}^n$ доведені в підрозділі 6.1.

Лема 3.1. *Нехай* $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, $l_j : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ *та* $\frac{\partial l_j}{\partial z_m}$ *— неперервні функції в* $\mathbb{B}^n$, *для всіх* j, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. *Якщо для кожного* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ *функція* $|l_j(z)|$ *задовольняє* (3.1) *та існує* $P > 0$ *та* $c > 0$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n$ *та кожного* $j, m \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{1}{c + |l_j(z)|} \left| \frac{\partial l_j(z)}{\partial z_m} \right| \le P, \tag{3.8}$$

то $\mathbf{L}^* \in Q(\mathbb{B}^n)$, *де* $\mathbf{L}^*(z) = (c + |l_1(z)|, \dots, c + |l_n(z)|)$.

Доведення. Зрозуміло, що функція $\mathbf{L}^*(z)$ є додатною та неперервною. Для заданих $z \in \mathbb{B}^n$, $z^0 \in \mathbb{B}^n$ визначимо аналітичну криву $\varphi : [0,1] \to \mathbb{B}^n$

$$\varphi_j(\tau) = z_j^0 + \tau(z_j - z_j^0),\ j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

де $\tau \in [0,1]$. Відомо, що для будь-якої неперервно диференційовної функції g від дійсної змінної τ справджується нерівність $\frac{d}{dt}|g(\tau)| \le |g'(\tau)|$ скрізь, крім точок, в яких $g(\tau) = 0$. Використовуючи обмеження цієї леми, встановимо верхню оцінку $\lambda_{2,j}(z_0, R)$:

$$\lambda_{2,j}(z_0, R) = \sup \left\{ \frac{c + |l_j(z)|}{c + |l_j(z^0)|} : z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}^*(z^0)}\right] \right\} =$$

$$= \sup_{z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}^*(z^0)}\right]} \left\{ \exp\left\{ \ln(c + |l_j(z)|) - \ln(c + |l_j(z^0)|) \right\} \right\} =$$

$$=\sup\left\{\exp\left\{\int_0^1 \frac{d(c+|l_j(\varphi(\tau))|)}{c+|l_j(\varphi(\tau))|}\right\} : z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}^*(z^0)}\right]\right\}\le$$

$$\le \sup_{z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}^*(z^0)}\right]}\left\{\exp\left\{\int_0^1\sum_{m=1}^n \frac{|\varphi'_m(\tau)|}{c+|l_j(\varphi(\tau))|}\left|\frac{\partial l_j(\varphi(\tau))}{\partial z_m}\right| d\tau\right\}\right\}\le$$

$$\le \sup_{z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}^*(z^0)}\right]}\left\{\exp\left\{\int_0^1\sum_{m=1}^n P|z_m-z_m^0|d\tau\right\}\right\}\le$$

$$\le \sup_{z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}^*(z^0)}\right]}\left\{\exp\left\{\sum_{m=1}^n \frac{Pr_j}{c+|l_m(z^0)|}\right\}\right\}\le \exp\left(\frac{P}{c}\sum_{m=1}^n r_j\right).$$

Звідси для всіх $R\ge\mathbf{0}$ $\lambda_{2,j}(R)=\sup\limits_{z^0\in\mathbb{B}^n}\lambda_{2,j}(z^0,\eta)\le\exp\left(\frac{P}{c}\sum\limits_{m=1}^n r_j\right)<\infty$. Використовуючи $\frac{d}{dt}|g(t)|\ge-|g'(t)|$, можна довести, що для кожного $\eta\ge 0$ $\lambda_{1,j}(R)\ge\exp\left(-\frac{P}{c}\sum\limits_{m=1}^n r_j\right)>0$. Тому $\mathbf{L}^*\in Q(\mathbb{B}^n)$. □

Зокрема, коли $\mathbf{L}(z)=(l_1(R),\dots,l_n(R))$, $R=(|z_1|,\dots,|z_n|)$, для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$ функція $l_j(R)$ — додатна неперервно диференційовна та $|\nabla\ln l_j(R)|\le P$ для всіх $|R|<1$, тоді $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^n)$, де $\nabla l_j(R)=(\frac{\partial l_j(R)}{\partial r_1},\dots,\frac{\partial l_j(R)}{r_n})$.

Доведемо таку лему.

Лема 3.2. *Якщо* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^n)$, *то для кожного* $j\in\{1,\dots,n\}$ *та будь-якого фіксованого* $z^*\in\mathbb{B}^n$ $|z_j|l_j(z^*+z_j\mathbf{1}_j)\to\infty$ *при* $|z^*+z_j\mathbf{1}_j|\to 1-0$.

Доведення. Зважаючи на (3.1), маємо $l_j(z^*+z_j\mathbf{1}_j)\ge\frac{\beta}{1-|z^*+z_j\mathbf{1}_j|}\to+\infty$ при $|z^*+z_j\mathbf{1}_j|\to 1-0$. □

3.3 Локальне поводження похідних функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

Наступна теорема є базовою в теорії функцій обмеженого індексу. Вона необхідна для встановлення ефективніших критеріїв обмеженості індексу, які описують поводження максимуму модуля на колі (кістяку полікруга) чи поводження логарифмічної похідної.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли для кожного* $R\in\mathbb{R}^n_+$, $|R|\le\beta$, *знайдеться* $n_0\in\mathbb{Z}_+$, $p_0>0$ *таке, що для всіх* $z^0\in\mathbb{B}^n$ *існує* $K^0\in\mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\|\le n_0$, *та*

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\ \|K\|\le n_0,\ z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}\le p_0\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}. \qquad (3.9)$$

Доведення. Нехай F — аналітична функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних $N = N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^n) < \infty$. Для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, покладемо

$$q = q(R) = [2(N+1)\|R\| \prod_{j=1}^{n} (\lambda_{1,j}(R))^{-N} (\lambda_{2,j}(R))^{N+1}] + 1$$

де $[x]$ — ціла частина дійсного числа x. Для $p \in \{0, \dots, q\}$ та $z^0 \in \mathbb{B}^n$ позначимо

$$S_p(z^0, R) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\},$$

$$S^*_p(z^0, R) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\}.$$

Використовуючи (3.5) та $\mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right] \subset \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]$, маємо

$$S_p(z^0, R) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\frac{\mathbf{L}^K(z^0)}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} \le$$

$$\le S^*_p(z^0, R) \max\left\{\prod_{j=1}^{n} \frac{l_j^N(z^0)}{l_j^N(z)} : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} \le S^*_p(z^0, R) \prod_{j=1}^{n} (\lambda_{1,j}(R))^{-N}. \tag{3.10}$$

а тоді з врахуванням (3.6) виводимо

$$S^*_p(z^0, R) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|\,\mathbf{L}^K(z)}{K!\mathbf{L}^K(z)\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}(\Lambda_2(R))^K : \|K\| \le N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} \le$$

$$\le S_p(z^0, R) \prod_{j=1}^{n} (\lambda_{2,j}(R))^N. \tag{3.11}$$

Нехай $K^{(p)} \in \mathbb{Z}^n_+$ при $\|K^{(p)}\| \le N$ та $z^{(p)} \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]$ вибрані так, аби

$$S^*_p(z^0, R) = \frac{|F^{(K^{(p)})}(z^{(p)})|}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} \tag{3.12}$$

За принципом максимуму модуля $z^{(p)} \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)})$, тому $z^{(p)} \ne z^0$. Візьмемо $\widetilde{z}^{(p)}_j = z^0_j + \frac{p-1}{p}(z^{(p)}_j - z^0_j)$. Тоді для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ маємо

$$|\widetilde{z}^{(p)}_j - z^0_j| = \frac{p-1}{p}|z^{(p)}_j - z^0_j| = \frac{p-1}{p}\frac{pr_j}{ql_j(z^0)}, \tag{3.13}$$

$$|\widetilde{z}^{(p)}_j - z^{(p)}_j| = |z^0_j + \frac{p-1}{p}(z^{(p)}_j - z^0_j) - z^{(p)}_j| = \frac{1}{p}|z^0_j - z^{(p)}_j| = \frac{r_j}{ql_j(z^0)}. \tag{3.14}$$

З (3.13) отримуємо, що $\widetilde{z}^{(p)} \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{(p-1)R}{q(R)\mathbf{L}(z^0)}\right]$ та $S^*_{p-1}(z^0, R) \ge \frac{|F^{(K^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)})|}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)}$. Натомість з (3.12) випливає

$$0 \le S^*_p(z^0, R) - S^*_{p-1}(z^0, R) \le \frac{|F^{(K^{(p)})}(z^{(p)})| - |F^{(K^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)})|}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} =$$

$$= \frac{1}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} \int_0^1 \frac{d}{dt} |F^{(K^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)} + t(z^{(p)} - \widetilde{z}^{(p)}))| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} \int_0^1 \sum_{j=1}^n |z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}| \left| F^{(K^{(p)}+\mathbf{1}_j)}(\widetilde{z}^{(p)} + t(z^{(p)} - \widetilde{z}^{(p)})) \right| dt =$$

$$= \frac{1}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} \sum_{j=1}^n |z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}| \left| F^{(K^{(p)}+\mathbf{1}_j)}(\widetilde{z}^{(p)} + t^*(z^{(p)} - \widetilde{z}^{(p)})) \right|, \qquad (3.15)$$

де $0 \leq t^* \leq 1, \widetilde{z}^{(p)} + t^*(z^{(p)} - \widetilde{z}^{(p)}) \in \mathbb{D}^n(z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)})$. Для $z \in \mathbb{D}^n(z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)})$ та $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|J\| \leq N+1$ маємо

$$\frac{|F^{(J)}(z)|\mathbf{L}^J(z)}{J!\mathbf{L}^J(z^0)\mathbf{L}^J(z)} \leq (\Lambda_2(R))^J \max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq N \right\} \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(R))^{N+1} (\lambda_{1,j}(R))^{-N} \max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \leq N \right\} \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(R))^{N+1} (\lambda_{1,j}(R))^{-N} S_p^*(z^0, R).$$

З (3.15) та (3.14) одержуємо

$$0 \leq S_p^*(z^0, R) - S_{p-1}^*(z^0, R) \leq \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(R))^{N+1} (\lambda_{1,j}(R))^{-N} \times$$

$$\times S_p^*(z^0, R) \sum_{j=1}^n (k_j^{(p)} + 1) l_j(z^0) |z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}| =$$

$$= \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(R))^{N+1} (\lambda_{1,j}(R))^{-N} \frac{S_p^*(z^0, R)}{q(R)} \sum_{j=1}^n (k_j^{(p)} + 1) r_j \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(R))^{N+1} (\lambda_{1,j}(R))^{-N} \frac{S_p^*(z^0, R)}{q(R)} (N+1)\|R\| \leq \frac{1}{2} S_p^*(z^0, R).$$

З цієї нерівності випливає $S_p^*(z^0, R) \leq 2S_{p-1}^*(z^0, R)$, а тоді з огляду на (3.10) та (3.11) маємо

$$S_p(z^0, R) \leq 2 \prod_{j=1}^n (\lambda_{1,j}(R))^{-N} S_{p-1}^*(z^0, R) \leq 2 \prod_{j=1}^n (\lambda_{1,j}(R))^{-N} (\lambda_{2,j}(R))^N S_{p-1}(z^0, R).$$

Отже,

$$\max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq N, z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, \frac{pR}{q\mathbf{L}(z^0)} \right] \right\} = S_q(z^0, R) \leq$$

$$\leq 2 \prod_{j=1}^n (\lambda_{1,j}(R))^{-N} (\lambda_{2,j}(R))^N S_{q-1}(z^0, R) \leq \ldots \leq$$

$$\leq (2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N})^{q}S_0(z^0,R) =$$

$$= (2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N})^{q}\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \leq N\right\}. \qquad (3.16)$$

З (3.16) одержуємо нерівність (3.9) при $p_0 = (2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N})^{q}$ та деякому K^0, що $\|K^0\| \leq N$. Необхідність умови (3.9) доведено.

Зараз доведемо достатність. Припустимо, що для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, існують $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 1$ такі, що для всіх $z_0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \leq n_0$, виконується нерівність (3.9).

Запишемо формулу Коші в такому вигляді $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\forall k \in \mathbb{Z}^n_+$ $\forall s \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{F^{(K+S)}(z^0)}{S!} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)}\frac{F^{(K)}(z)}{(z-z^0)^{S+\mathbf{1}}}dz.$$

Тому застосовуючи (3.9), маємо

$$\frac{|F^{(K+S)}(z^0)|}{S!} \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)}\frac{|F^{(K)}(z)|}{|z-z^0|^{S+\mathbf{1}}}|dz| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)}|F^{(K)}(z)|\frac{\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}}(z^0)}{(2\pi)^n R^{S+\mathbf{1}}}|dz| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)}|F^{(K^0)}(z^0)|\frac{K!p_0\prod_{j=1}^{n}\lambda_{2,j}^{n_0}(R)\mathbf{L}^{S+K+\mathbf{1}}(z^0)}{(2\pi)^n K^0! R^{S+\mathbf{1}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}|dz| =$$

$$= |F^{(K^0)}(z^0)|\frac{K!p_0\prod_{j=1}^{n}\lambda_{2,j}^{n_0}(R)\mathbf{L}^{S+K}(z^0)}{K^0! R^S\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{|F^{(K+S)}(z^0)|}{(K+S)!\mathbf{L}^{S+K}(z^0)} \leq \frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_{2,j}^{n_0}(R)p_0K!S!}{(K+S)!R^S}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}. \qquad (3.17)$$

Очевидно, що

$$\frac{K!S!}{(K+S)!} = \frac{s_1!}{(k_1+1)\cdot\ldots\cdot(k_1+s_1)}\cdots\frac{s_n!}{(k_n+1)\cdot\ldots\cdot(k_n+s_n)} \leq 1.$$

Виберемо $r_j \in (1,\beta/\sqrt{n}]$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Тоді $|R| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} r_j^2} \leq \beta$. Тому $\frac{p_0\prod_{j=1}^{n}\lambda_{2,j}^{n_0}(R)}{R^S} \to 0$ при $\|S\| \to +\infty$. Отже, знайдеться s_0 таке, що для всіх $S \in \mathbb{Z}^n_+$ при $\|S\| \geq s_0$ справджується нерівність $\frac{p_0K!S!\prod_{j=1}^{n}\lambda_{2,j}^{n_0}(R)}{(K+S)!R^S} \leq 1$. Нерівність (3.17) має наслідком таку $\frac{|F^{(K+S)}(z^0)|}{(K+S)!\mathbf{L}^{K+S}(z^0)} \leq \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}$. Остання нерівність означає, що для кожного $j \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)} \leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \leq s_0+n_0\right\}$$

де s_0 та n_0 — незалежні від z_0. Тоді аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^n) \le s_0 + n_0$. $\square$

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, аби для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\exists K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \le n_0$, *та*

$$\max\left\{|F^{(K^0)}(z)| : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \le p|F^{(K^0)}(z^0)| \tag{3.18}$$

і досить, щоб для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $\exists K^0_j = (0, \dots, 0, \underbrace{k^0_j}_{j-\text{те місце}}, 0, \dots, 0)$ *таких, що* $k^0_j \le n_0$ *та*

$$\max\left\{|F^{(K^0_j)}(z)| : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \le p|F^{(K^0_j)}(z^0)|. \tag{3.19}$$

Доведення. У доведенні теореми 3.1 показано, що (3.9) — правильна для деякого K^0. Тобто, маємо

$$\frac{p_0}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \ge \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z)} : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!}\frac{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\mathbf{L}^{K^0}(z)} : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \ge$$
$$\ge \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!}\frac{\prod_{j=1}^n\left(\lambda_{2,j}(R)\right)^{-n_0}}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}.$$

З цієї нерівності випливає

$$\frac{p_0\prod_{j=1}^n(\lambda_{2,j}(R))^{n_0}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \ge \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}. \tag{3.20}$$

Тоді з (3.20) отримуємо (3.18) при $p = p_0\prod_{j=1}^n\left(\lambda_{2,j}(R)\right)^{n_0}$. Необхідність умови (3.18) показано.

Доведемо достатність (3.19). Припустимо, що для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+, p > 1$ такого, що $\forall z_0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $K^0_J \in \mathbb{Z}^n_+$ при $k^0_j \le n_0$ виконується нерівність (3.19).

Запишемо формулу Коші в такому вигляді $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\forall S \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{F^{(K^0_J+S)}(z^0)}{S!} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))}\frac{F^{(K^0_J)}(z)}{(z-z^0)^{S+\mathbf{1}}}dz.$$

З цього отримуємо

$$\frac{|F^{(K^0_j+S)}(z^0)|}{S!} \le \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))}\frac{|F^{(K^0_j)}(z)|}{|z-z^0|^{S+\mathbf{1}}}|dz| \le$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n}\max\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z\in\mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\}\frac{\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}}(z^0)}{R^{S+\mathbf{1}}}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{T}^n(z^0,R/\mathbf{L}(z^0))}|dz| = \max\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z\in\mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\}\frac{\mathbf{L}^S(z^0)}{R^S}.$$

Покладемо $R=(\frac{\beta}{\sqrt{n}},\dots,\frac{\beta}{\sqrt{n}})$ та скористаємося (3.19)

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{S!}\leq\frac{\mathbf{L}^S(z^0)}{(\beta/\sqrt{n})^{\|S\|}}\max\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z\in\mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\}\leq$$
$$\leq\frac{p\mathbf{L}^S(z^0)}{(\beta/\sqrt{n})^{\|S\|}}|F^{(K_j^0)}(z^0)|. \tag{3.21}$$

Виберемо $S\in\mathbb{Z}_+^n$ таке, що $\|S\|\geq s_0$, де $\frac{p}{(\beta/\sqrt{n})^{s_0}}\leq 1$. Тоді з (3.21) випливає, що для всіх $j\in\{1,\dots,n\}$ та $k_j^0\leq n_0$

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0+S}(z^0)(K_j^0+S)!}\leq\frac{p}{(\beta/\sqrt{n})^{\|S\|}}\frac{S!K_j^0!}{(S+K_j^0)!}\frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!}\leq\frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!}.$$

Отже, $N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^n)\leq n_0+s_0$. □

Зауваження 3.2. Нерівність (3.18) — необхідна та достатня умова обмеженості l-індексу для функцій від однієї змінної [149, 206, 220]. Але це невідомо, чи ця умова є достатньою для обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Наші обмеження (3.19) є відповідними багатовимірними достатніми умовами для аналітичних в одиничній кулі функцій.

Лема 3.3. *Нехай* $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2\in Q(\mathbb{B}^n)$ *та для кожного* $z\in\mathbb{B}^n$ $\mathbf{L}_1(z)\leq\mathbf{L}_2(z)$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}_1$*-індекс за сукупністю змінних, то* F *є обмеженого* $\mathbf{L}_2$*-індексу за сукупністю змінних та* $N(F,\mathbf{L}_2,\mathbb{B}^n)\leq nN(F,\mathbf{L}_1,\mathbb{B}^n)$.

Доведення. Нехай $N(F,\mathbf{L}_1,\mathbb{B}^n)=n_0$. Використовуючи (3.2), встановимо

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}_2^J(z)}=\frac{\mathbf{L}_1^J(z)}{\mathbf{L}_2^J(z)}\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}_1^J(z)}\leq\frac{\mathbf{L}_1^J(z)}{\mathbf{L}_2^J(z)}\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}_1^K(z)}:\ K\in\mathbb{Z}_+^n,\ \|K\|\leq n_0\right\}\leq$$
$$\leq\frac{\mathbf{L}_1^J(z)}{\mathbf{L}_2^J(z)}\max\left\{\frac{\mathbf{L}_2^K(z)}{\mathbf{L}_1^K(z)}\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}_2^K(z)}:\ K\in\mathbb{Z}_+^n,\ \|K\|\leq n_0\right\}\leq$$
$$\leq\max_{\|K\|\leq n_0}\left(\frac{\mathbf{L}_1(z)}{\mathbf{L}_2(z)}\right)^{J-K}\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}_2^K(z)}:\ K\in\mathbb{Z}_+^n,\ \|K\|\leq n_0\right\}.$$

Позаяк $\mathbf{L}_1(z)\leq\mathbf{L}_2(z)$, для всіх $\|J\|\geq nn_0$ маємо

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}_2^J(z)}\leq\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}_2^K(z)}:\ K\in\mathbb{Z}_+^n,\ \|K\|\leq n_0\right\}.$$

Отже, F має обмежений $\mathbf{L}_2$-індекс за сукупністю змінних та $N(F,\mathbf{L}_2,\mathbb{B}^n)\leq nN(F,\mathbf{L}_1,\mathbb{B}^n)$. □

Лема 3.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$, $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$, $\beta|\Theta_1| > 1$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\widetilde{\mathbf{L}}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, якщо вона має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Легко довести, що при $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$ та $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ відповідна функція $\widetilde{\mathbf{L}} \in Q(\mathbb{B}^n)$.

Нехай $N(F, \widetilde{\mathbf{L}}, \mathbb{B}^n) = \widetilde{n}_0 < +\infty$. Тоді за теоремою 3.1 для кожного $\widetilde{R} = (\widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, знайдеться $\widetilde{p} \ge 1$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякому K^0 при $\|K^0\| \le \widetilde{n}_0$ справджується нерівність (3.9) з $\widetilde{\mathbf{L}}$ та $\widetilde{R}$ замість $\mathbf{L}$ та R відповідно. Звідси

$$\frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{\theta_2^{\|K^0\|}|F^{(K^0)}(z^0)|}{\theta_2^{\|K^0\|}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \ge \frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\theta_2^{\|K^0\|}\widetilde{\mathbf{L}}^{K^0}(z^0)} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\theta_2^{\|K^0\|}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{\mathbf{L}}^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \widetilde{R}/\widetilde{\mathbf{L}}(z)\right]\right\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\theta_2^{\|K^0\|}} \max\left\{\frac{\theta_1^{\|K\|}|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \theta_1\widetilde{R}/\mathbf{L}(z)\right]\right\} \ge$$

$$\ge \frac{\min\limits_{0\le\|K\|\le n_0}\{\theta_1^{\|K\|}\}}{\theta_2^{\|K^0\|}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \theta_1\widetilde{R}/\widetilde{\mathbf{L}}(z)\right]\right\}.$$

З огляду на теорему 3.1 висновуємо, що функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Лема 3.5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, *та* $p_0 > 1$ *такі, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *та деякого* $K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$ *при* $\|K^0\| \le n_0$ *виконується нерівність* (3.9).

Доведення. Необхідність цієї теореми випливає з необхідності теореми 3.1. Покажемо достатність. З доведення теореми 3.1 при $R = (\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\beta}{\sqrt{n}})$ маємо, що $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^n) < +\infty$.

Нехай $\mathbf{L}^*(z) = \frac{R_0\mathbf{L}(z)}{R}$, $R^0 = (\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\beta}{\sqrt{n}})$. У загальному випадку з правильності (3.9) для F, $\mathbf{L}$ та $R = (r_1, \ldots, r_n)$ такому, що $|R| \le \beta$, $R \ne R^0$ отримуємо

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!(\mathbf{L}^*(z^0))^K} : \|K\| \le n_0, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R_0/\mathbf{L}^*(z^0)\right]\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!(R_0\mathbf{L}(z)/R)^K} : \|K\| \le n_0, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R_0/(R_0\mathbf{L}(z)/R)\right]\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{n^{\|K\|/2}|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le n_0, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \le$$

$$\le \frac{p_0}{K^0!}\frac{n^{n_0/2}|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{n^{n_0/2}(\beta/\sqrt{n})^{\|K^0\|}p_0}{R^{K^0}K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{(R_0\mathbf{L}(z)/R)^{K^0}} <$$

$$< n^{n_0/2} p_0 \max\left\{ \frac{(\beta/\sqrt{n})^{\|K^0\|}}{R^{K^0}} : \|K^0\| \le n_0 \right\} \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!(\mathbf{L}^*(z))^{K^0}}.$$

тобто, (3.9) виконується для F, $\mathbf{L}^*$ та $R_0 = (\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\beta}{\sqrt{n}})$. Як і вище, застосуємо теорему 3.1 до функції $F(z)$ та $\mathbf{L}^*(z) = R_0\mathbf{L}(z)/R$. На основі цього, F — обмеженого $\mathbf{L}^*$-індексу за сукупністю змінних. Відповідно за лемою 3.4 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

3.4 Локальне поводження максимуму модуля аналітичної в кулі функції

У попередніх підрозділах нами введено поняття аналітичної в кулі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Також отримано критерій обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, який описує локальне поводження частинних похідних на кістяку полікруга і встановлено інші важливі властивості функцій з цього класу. Ці дослідження використовували ідею вичерпання кулі через полікруги.

Далі спробуємо довести нові аналоги критеріїв обмеженості $\mathbf{L}$- індексу за сукупністю змінних для аналітичних в кулі функцій. Зокрема, доведемо оцінку максимуму модуля на більшому полікрузі через максимум модуля на меншому полікрузі (теореми 3.3, 3.4) та отримаємо аналог теореми Хеймана для аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (теореми 3.5 та лема 3.6). Теорема Хеймана та її узагальнення для різних класів аналітичних функцій [128, 206, 219, 274] — досить важливі в теорії функцій обмеженого індексу. Згаданий критерій — корисний для дослідження обмеженості індексу цілих розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними.

Зазначимо, що відповідні теореми для цілих функцій обмеженого l-індексу та обмеженого L-індексу за напрямком також застосовні для дослідження нескінченних добутків (див. бібліографію в [30, 206]). Отже, ці узагальнення на клас аналітичних в кулі функцій необхідні для вивчення обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних аналітичних розв'язків рівнянь з частинними похідними, їхніх систем та багатовимірних аналогів добутків Бляшке. Також наведено схему застосування теореми Хеймана, адаптовану до вивчення властивостей аналітичних в одиничній кулі розв'язків.

Для аналітичної в кулі $\mathbb{B}^n$ функції F покладемо $M(r, z^0, F) = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, r)\}$, де $z^0 \in \mathbb{B}^n$, $r \in \mathbb{R}^n_+$. Тоді $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{D}^n[z^0, R]\}$, бо максимум модуля для аналітичної функції в замкненому полікрузі досягається на його кістяку.

Наступне твердження використовує ідею про можливість заміни квантора загальності на квантор існування в достатніх умовах обмеженості індексу. Для доведення аналога теореми Хеймана нам потрібна така теорема, зміст становить окремий інтерес.

Теорема 3.3. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$, $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ *— аналітична функція. Якщо існують* R', $R'' \in \mathbb{R}^n_+$, $R' < R''$, $|R''| < \beta$ *та* $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right) \leq p_1 M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right), \tag{3.22}$$

то F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Спершу припустимо, що $\mathbf{0} < R' < \mathbf{1} < R''$.

Нехай $z^0 \in \mathbb{B}^n$ — довільна точка. Розвинемо функцію F у степеневий ряд

$$F(z) = \sum_{K \geq \mathbf{0}} b_K (z - z^0)^K = \sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 0} b_{k_1, \ldots, k_n} (z_1 - z_1^0)^{k_1} \ldots (z_n - z_n^0)^{k_n}, \tag{3.23}$$

де $b_K = b_{k_1, \ldots, k_n} = \frac{F^{(K)}(z^0)}{K!}$.

Нехай $\mu(R, z^0, F) = \max\{|b_K| R^K \colon\ K \geq \mathbf{0}\}$ — максимальний член степеневого ряду (3.23) та $\nu(R) = \nu(R, z^0, F) = (\nu_1^0(R), \ldots, \nu_n^0(R))$ набір індексів таких, що $\mu(R, z^0, F) = |b_{\nu(R)}| R^{\nu(R)}$,

$$\|\nu(R)\| = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(R) = \max\{\|K\| \colon K \geq \mathbf{0},\ |b_K| R^K = \mu(R, z^0, F)\}.$$

Зважаючи на (3.29), отримуємо, що для будь-якого $|R| < 1 - |z^0|$ $\mu(R, z^0, F) \leq M(R, z^0, F)$. Тоді для заданого R' та R'' при $0 < |R'| < 1 < |R''| < \beta$ виводимо

$$M(R'R, z^0, F) \leq \sum_{k \geq \mathbf{0}} |b_k| (R'R)^k \leq \sum_{k \geq \mathbf{0}} \mu(R, z^0, F)(R')^k =$$

$$= \mu(R, z^0, F) \sum_{k \geq \mathbf{0}} (R')^k = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - r'_j} \mu(R, z^0, F).$$

А також,

$$\ln \mu(R, z^0, F) = \ln\{|b_{\nu(R)}| R^{\nu(R)}\} = \ln\left\{|b_{\nu(R)}| (RR'')^{\nu(R)} \frac{1}{(R'')^{\nu(R)}}\right\} =$$

$$= \ln\{|b_{\nu(R)}| (RR'')^{\nu(R)}\} + \ln\left\{\frac{1}{(R'')^{\nu(R)}}\right\} \leq$$

$$\leq \ln \mu(R''R, z^0, F) - \|\nu(R)\| \ln \min_{1 \leq j \leq n} r''_j.$$

Звідси випливає, що

$$\|\nu(R)\| \leq \frac{1}{\ln \min_{1 \leq j \leq n} r''_j} (\ln \mu(R''R, z^0, F) - \ln \mu(R, z^0, F)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\ln \min_{1\leq j\leq n} r''_j}\left(\ln M(R''R, z^0, F) - \ln(\prod_{j=1}^{n}(1-r'_j)M(R'R, z^0, F))\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\ln \min_{1\leq j\leq n} r''_j}\left(\ln M(R''R, z^0, F) - \ln M(R'R, z^0, F)\right) - \frac{\sum_{j=1}^{n}\ln(1-r'_j)}{\min_{1\leq j\leq n} r''_j} =$$

$$= \frac{1}{\min_{1\leq j\leq n} r''_j}\ln\frac{M(R''R, z^0, F)}{M(R'R, z^0, F)} - \frac{\sum_{j=1}^{n}\ln(1-r_j)}{\min_{1\leq j\leq n} r''_j}. \tag{3.24}$$

Покладемо $R = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)}$. Нехай зараз $N(F, z^0, \mathbf{L})$ — $\mathbf{L}$-індекс функції F за сукупністю змінних у точці z^0, тобто, найменше ціле число, для якого нерівність (3.2) виконується в точці z^0. Зрозуміло, що

$$N(F, z^0, \mathbf{L}) \leq \nu\left(\frac{1}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right) = \nu(R, z^0, F). \tag{3.25}$$

Але

$$M\left(R''/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\right) \leq p_1(R', R'')M\left(R'/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\right). \tag{3.26}$$

Отже, з (3.24), (3.25), (3.26) отримуємо, що $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$

$$N(F, z^0, \mathbf{L}) \leq \frac{-\sum_{j=1}^{2}\ln(1-r'_j)}{\ln\min\{r''_1, r''_2\}} + \frac{\ln p_1(R', R'')}{\ln\min\{r''_1, r''_2\}}.$$

Це означає, що F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних при $\mathbf{0} < R' < \mathbf{1} < R''$, $|R''| < \beta$.

Тепер доведемо теорему для будь-якого $\mathbf{0} < R' < R''$, $|R''| < \beta$. З (3.22) при $\mathbf{0} < R_1 < R_2$ випливає, що

$$\max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{2R''}{R'+R''}\frac{R'+R''}{2\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq$$

$$\leq P_1 \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{2R'}{R'+R''}\frac{R'+R''}{2\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}.$$

Позначивши $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = \frac{2\mathbf{L}(z)}{R'+R''}$, дістаємо

$$\max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{2R''}{(R'+R'')\widetilde{\mathbf{L}}(z^0)}\right)\right\} \leq$$

$$\leq P_1 \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{2R''}{(R'+R'')\widetilde{\mathbf{L}}(z^0)}\right)\right\},$$

де $\mathbf{0} < \frac{2R'}{R'+R''} < \mathbf{1} < \frac{2R''}{R'+R''}$. Беручи до уваги першу частину доведення, робимо висновок, що функція F має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних. Тоді за лемою 3.4 функція F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. □

Також справедливі такі необхідні умови.

Теорема 3.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то для будь-яких* R', $R'' \in \mathbb{R}^n_+$, $R' < R''$, $|R''| \le \beta$, *знайдеться номер* $p_1 = p_1(R', R'') \ge 1$ *такий, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *правильна нерівність* (3.22).

Доведення. Нехай $N(F, \mathbf{L}) = N < +\infty$. Припустимо, що нерівність (3.22) не виконується, тобто, існують R', R'', $0 < |R'| < |R''| < \beta$, такі, що для кожного $p_* \ge 1$ та деякого $z^0 = z^0(p_*)$

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right) > p_* M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right). \tag{3.27}$$

За теоремою 3.1 існує число $p_0 = p_0(R'') \ge 1$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \le N$, (тобто, $n_0 = N$, див. доведення теореми 3.1) маємо

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F^{(K^0)}\right) \le p_0 |F^{(K^0)}(z^0)|. \tag{3.28}$$

Покладемо

$$b_1 = p_0 \left(\prod_{j=2}^{n} \lambda^N_{2,j}(R'')\right) (N!)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{(N-j)!}{(r''_1)^j}\right) \left(\frac{r''_1 r''_2 \dots r''_n}{r'_1 r'_2 \dots r'_n}\right)^N,$$

$$b_2 = p_0 \left(\prod_{j=3}^{n} \lambda^N_{2,j}(R'')\right) (N!)^{n-2} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{(N-j)!}{(r''_2)^j}\right) \left(\frac{r''_2 \dots r''_n}{r'_2 \dots r'_n}\right)^N \left\{1, \frac{1}{(r'_1)^N}\right\},$$

$$\dots$$

$$b_{n-1} = p_0 \lambda^N_{2,n}(R') N! \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{(N-j)!}{(r''_{n-1})^j}\right) \left(\frac{r''_{n-1} r''_n}{r'_{n-1} r'_n}\right)^N \max\left\{1, \frac{1}{(r'_1 \dots r'_{n-2})^N}\right\},$$

$$b_n = p_0 \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{(N-j)!}{(r''_n)^j}\right) \left(\frac{r''_n}{r'_n}\right)^N \max\left\{1, \frac{1}{(r'_1 \dots r'_{n-1})^N}\right\}$$

та

$$p_* = (N!)^n p_0 \left(\frac{r''_1 r''_2 \dots r''_n}{r'_1 r'_2 \dots r'_n}\right)^N + \sum_{k=1}^{n} b_k + 1.$$

Нехай $z^0 = z^0(p_*)$ — точка, для якої виконується нерівність (3.27), а K^0 буде таким, що справедлива (3.28) та

$$M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right) = |F(z^*)|, \ M\left(\frac{r''}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F^{(J)}\right) = |F^{(J)}(z^*_J)|$$

для кожного $J \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|J\| \le N$. Застосуємо нерівність Коші

$$|F^{(J)}(z^0)| \le J! \left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R'}\right)^J |F(z^*)| \tag{3.29}$$

для оцінки різниці

$$|F^{(J)}(z^*_{J,1}, z^*_{J,2}, \dots, z^*_{J,n}) - F^{(J)}(z^0_1, z^*_{J,2}, \dots, z^*_{J,n})| =$$

$$= \left| \int_{z_1^0}^{z_{J,1}^*} \frac{\partial^{\|J\|+1} F}{\partial z_1^{j_1+1} \partial z_2^{j_2} \dots \partial z_n^{j_n}} (\xi, z_{J,2}^*, \dots, z_{J,n}^*) d\xi \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\partial^{\|J\|+1} F}{\partial z_1^{j_1+1} \partial z_2^{j_2} \dots \partial z_n^{j_n}} (z^*_{(j_1+1, j_2, \dots, j_n)}) \right| \frac{r_1''}{l_1(z^0)}. \tag{3.30}$$

Беручи до уваги $(z_1^0, z_{J,2}^*, \dots, z_{J,n}^*) \in \mathbb{D}^n[z^0, \frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}]$, а також, що для всіх $k \in \{1, \dots, n\}$ $|z_{J,k}^* - z_k^0| = \frac{r_k''}{l_k(z^0)}$, $l_k(z_1^0, z_{J,2}^*, \dots, z_{J,n}^*) \leq \lambda_{2,k}(R'') l_k(z^0)$ та те, що (3.29) правильна при $J = K^0$, за теоремою 3.1 маємо

$$|F^{(J)}(z_1^0, z_{J,2}^*, \dots, z_{J,n}^*)| \leq$$

$$\leq \frac{J! l_1^{j_1}(z_1^0, z_{J,2}^*, \dots, z_{J,n}^*) \prod_{k=2}^n l_k^{j_k}(z_1^0, z_{J,2}^*, \dots, z_{J,n}^*)}{K^0! \mathbf{L}^{K^0}(z^0)} p_0 |F^{(K^0)}(z^0)| \leq$$

$$\leq \frac{J! \mathbf{L}^J(z^0) \prod_{k=2}^n \lambda_{2,k}^{j_k}(R'')}{K^0! \mathbf{L}^{K^0}(z^0)} p_0 K^0! \frac{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}{(R')^{K^0}} |F(z^*)| = \frac{p_0 J! \mathbf{L}^J(z^0) \prod_{k=2}^n \lambda_{2,k}^{j_k}(R'')}{(R')^{K^0}} |F(z^*)|. \tag{3.31}$$

З нерівностей (3.30) та (3.31) випливає, що

$$\left| \frac{\partial^{\|J\|+1} F}{\partial z_1^{j_1+1} \partial z_2^{j_2} \dots \partial z_n^{j_n}} (z^*_{(j_1+1, j_2, \dots, j_n)}) \right| \geq$$

$$\geq \frac{l_1(z^0)}{r_1''} \left\{ |F^{(J)}(z_j^*)| - |F^{(J)}(z_1^0, z_{J,2}^*, \dots, z_{J,n}^*)| \right\} \geq$$

$$\geq \frac{l_1(z_1^0)}{r_1''} |F^{(J)}(z_j^*)| - \frac{p_0 J! \mathbf{L}^{(j_1+1, j_2, \dots, j_n)}(z^0) \prod_{k=2}^n \lambda_{2,k}^{j_k}(R'')}{r_1''(R')^{K^0}} |F(z^*)|.$$

Тоді

$$|F^{(K^0)}(z^*_{K^0})| \geq \frac{l_1(z^0)}{r_1''} \left| \frac{\partial^{\|K^0\|-1} f}{\partial z_1^{k_1^0-1} \partial z_2^{k_2^0} \dots \partial z_n^{k_n^0}} (z^*_{(k_1^0-1, k_2^0, \dots, k_n^0)}) \right| -$$

$$- \frac{p_0 (k_1^0 - 1)! k_2^0! \dots k_n^0! \mathbf{L}^{K^0}(z^0) \prod_{i=2}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')}{r_1''(R')^{K^0}} |F(z^*)| \geq$$

$$\geq \frac{l_1^2(z^0)}{(r_1'')^2} \left| \frac{\partial^{\|K^0\|-2} f}{\partial z_1^{k_1^0-2} \partial z_2^{k_2^0} \dots \partial z_n^{k_n^0}} (z^*_{(k_1^0-2, k_2^0, \dots, k_n^0)}) \right| -$$

$$- \frac{p_0 (k_1^0 - 2)! k_2^0! \dots k_n^0! \mathbf{L}^{K^0}(z^0) \prod_{i=2}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')}{(r_1'')^2 (R')^{K^0}} |F(z^*)| -$$

$$- \frac{p_0 (k_1^0 - 1)! k_2^0! \dots k_n^0! \mathbf{L}^{K^0}(z^0) \prod_{i=2}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(r_i'')}{r_1''(R')^{K^0}} |F(z^*)| \geq$$

$$\dots$$

$$\geq \frac{l_1^{k_1^0}(z^0)}{(r_1'')^{k_1^0}} \left| \frac{\partial^{\|K^0\|-k_1^0} f}{\partial z_2^{k_2^0} \dots \partial z_n^{k_n^0}} (z^*_{(0, k_2^0, \dots, k_n^0)}) \right| -$$

$$-\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\left(\prod_{i=2}^{n}\lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_2^0!\dots k_n^0!\sum_{j_1=1}^{k_1^0}\frac{(k_1^0-j_1)!}{(r_1'')^{j_1}}|F(z^*)|\geq$$

$$\dots$$

$$\geq\frac{l_1^{k_1^0}(z^0)}{(r_1'')^{k_1^0}}\frac{l_2^{k_2^0}(z^0)}{(r_2'')^{k_2^0}}\left|\frac{\partial^{\|K^0\|-k_1^0-k_2^0}f}{\partial z_3^{k_3^0}\dots\partial z_n^{k_n^0}}(z^*_{(0,0,k_3^0,\dots,k_n^0)})\right|-$$

$$-\frac{l_1^{k_1^0}(z^0)p_0L^{(0,k_2^0,\dots,k_n^0)}(z^0)}{(r_1'')^{k_1^0}(R')^{K^0}}\left(\prod_{i=3}^{n}\lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_3^0!\dots k_n^0!\sum_{i_2=1}^{k_2^0}\frac{(k_2^0-j_2)!}{(r_2'')^{j_2}}|F(z^*)|-$$

$$-\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\left(\prod_{i=2}^{n}\lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_2^0!\dots k_n^0!\sum_{j_1=1}^{k_1^0}\frac{(k_1^0-j_1)!}{(r_1'')^{j_1}}|F(z^*)|\geq$$

$$\dots$$

$$\geq\left(\frac{L(z^0)}{R''}\right)|F(z^*_{\mathbf{0}})|-|F(z^*)|\sum_{i=1}^{b}\tilde{b}_i, \tag{3.32}$$

де з огляду на нерівності $\lambda_{2,i}(R'')\geq 1$ та $R''\geq R'$ маємо

$$\tilde{b}_1=\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\left(\prod_{i=2}^{n}\lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_2^0!\dots k_n^0!\sum_{j_1=1}^{k_1^0}\frac{(k_1^0-j_1)!}{(r_1'')^{j_1}}=$$

$$=\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}\left(\frac{R''}{R'}\right)^{K^0}p_0\left(\prod_{i=2}^{n}\lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_2^0!\dots k_n^0!\sum_{j_1=1}^{k_1^0}\frac{(k_1^0-j_1)!}{(r_1'')^{j_1}}\leq$$

$$\leq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}b_1,$$

$$\tilde{b}_2=\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\left(\prod_{i=3}^{n}\lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)\frac{k_3^0!\dots k_n^0!}{(r_1'')^{k_1^0}}\sum_{j_2=1}^{k_2^0}\frac{(k_2^0-j_2)!}{(r_2'')^{j_2}}\leq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}b_2,$$

$$\dots$$

$$\tilde{b}_{n-1}=\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\lambda_{2,n}^{k_n^0}(R'')\frac{k_n^0!}{(r_1'')^{k_1^0}\dots(r_{n-2}'')^{k_{n-2}^0}}\times$$

$$\times\sum_{j_{n-1}=1}^{k_{n-1}^0}\frac{(k_{n-1}^0-j_{n-1})!}{(r_{n-1}'')^{j_{n-1}}}\leq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}b_{n-1},$$

$$\tilde{b}_n=\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\frac{1}{(r_1'')^{k_1^0}\dots(r_{n-1}'')^{k_{n-1}^0}}\sum_{j_n=1}^{k_n^0}\frac{(k_n^0-j_n)!}{(r_n'')^{j_n}}\leq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}b_n.$$

Отже, з (3.32) випливає

$$|F^{(K^0)}(z^*_{K^0})|\geq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}|F(z^*)|\left\{\frac{|F(z^*_{\mathbf{0}})|}{|F(z^*)|}-\sum_{j=1}^{n}b_j\right\}.$$

Зважаючи на (3.27) та вибір p_*, одержуємо $\frac{|F(z_{\mathbf{0}}^*)|}{|F(z^*)|} \geq p_* > \sum_{j=1}^n b_j$. Тому, (3.28) та (3.29) разом забезпечують правильність таких оцінок

$$|F^{(K^0)}(z^*_{K^0})| \geq \left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0} |F(z^*)| \left\{p_* - \sum_{j=1}^n b_j\right\} \geq$$

$$\geq \left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0} \left\{p_* - \sum_{j=1}^n b_j\right\} \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|(R')^{K^0}}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \geq$$

$$\geq \left(\frac{r_1' \dots r_n'}{r_1'' \dots r_n''}\right)^N \left\{p_* - \sum_{j=1}^n b_j\right\} \frac{|F^{(K^0)}(z^*_{K^0})|}{p_0(n!)^n}.$$

Звідси маємо $p_* \leq p_0\left(\frac{r_1' \dots r_n'}{r_1'' \dots r_n''}\right)^N (N!)^n + \sum_{j=1}^n b_j$, а це суперечить вибору p_*. □

3.5 Аналог теореми Хеймана для аналітичних в кулі функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

Теорема 3.5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична функція* F *у* $\mathbb{B}^n$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли знайдуться* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $c \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n$

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : \ \|J\| = p+1\right\} \leq c \cdot \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \ \|K\| \leq p\right\}. \tag{3.33}$$

Доведення. Нехай $N = N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^n) < +\infty$. Означення обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних автоматично гарантує справедливість необхідності при $p = N$ та $c = ((N+1)!)^n$.

Доведемо достатність. Для $F \equiv 0$ теорема — очевидна. Тому припустимо, що $F \not\equiv 0$. Позначимо $\boldsymbol{\beta} = (\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\beta}{\sqrt{n}})$.

Нехай (3.33) виконується, $z^0 \in \mathbb{B}^n$, $z \in \mathbb{D}^n[z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)}]$. Для всіх $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|J\| \leq p+1$, маємо

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z^0)} \leq \Lambda_2^J(\boldsymbol{\beta}) \frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} \leq c \cdot \Lambda_2^J(\boldsymbol{\beta}) \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \ \|K\| \leq p\right\} \leq$$

$$\leq c \cdot \Lambda_2^J(\boldsymbol{\beta}) \max\left\{\Lambda_1^{-K}(2) \frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \leq p\right\} \leq BG(z), \tag{3.34}$$

де $B = c \cdot \max\{\Lambda_2^K(\boldsymbol{\beta}) : \ \|K\| = p+1\} \max\{\Lambda_1^{-K}(\boldsymbol{\beta}) : \ \|K\| \leq p\}$, та $G(z) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \ \|K\| \leq p\right\}$.

Виберемо $z^{(1)} = (z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}) \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{1}}{2\beta\sqrt{n}\mathbf{L}(z^0)})$ і $z^{(2)} = (z_1^{(2)}, \dots, z_n^{(2)}) \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)})$ такі, що $F(z^{(1)}) \neq 0$ та

$$|F(z^{(2)})| = M\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right) \neq 0. \tag{3.35}$$

Ці точки існують, бо при $F(z) \equiv 0$ на одному з кістяків $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{1}}{2\beta\sqrt{n}\mathbf{L}(z^0)})$ або $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)})$ за теоремою єдиності $F \equiv 0$ у всій кулі $\mathbb{B}^n$. З'єднаємо точки $z^{(1)}$ та $z^{(2)}$ площиною

$$\alpha = \begin{cases} z_2 = k_2 z_1 + c_2, \\ z_3 = k_3 z_1 + c_3, \\ \qquad\qquad \dots \\ z_n = k_n z_1 + c_n, \end{cases}$$

де $k_i = \frac{z_i^{(2)} - z_i^{(1)}}{z_1^{(2)} - z_1^{(1)}}$, $c_i = \frac{z_i^{(1)} z_1^{(2)} - z_i^{(2)} z_1^{(1)}}{z_1^{(2)} - z_1^{(1)}}$, $i = 2, \dots, n$. Легко перевірити, що $z^{(1)} \in \alpha$ та $z^{(2)} \in \alpha$. Нехай $\widetilde{G}(z_1) = G(z)|_\alpha$ — звуження функції G на α.

Для кожного $K \in \mathbb{Z}_+^n$ функція $F^{(K)}(z)\big|_\alpha$ є аналітичною функцією від змінної z_1 та $\tilde{G}(z_1^{(1)}) = G(z^{(1)})\big|_\alpha \neq 0$, бо $F(z^{(1)}) \neq 0$. Тому всі нулі функції $F^{(K)}(z)\big|_\alpha$ є ізольованими, як нулі функції від однієї змінної. Отже, нулі функції $\tilde{G}(z_1)$ теж ізольовані. Відповідно, можна вибрати кусково-аналітичну криву γ на α таким способом

$$z = z(t) = (z_1(t), k_2 z_1(t) + c_2, \dots, k_n z_1(t) + c_n), \ t \in [0, 1],$$

яка з'єднує точки $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ і така, що $G(z(t)) \neq 0$ та $\int_0^1 |z_1'(t)| dt \leq \frac{2\beta}{\sqrt{n} l_1(z_1^0)}$. Для побудови цієї кривої з'єднаємо $z_1^{(1)}$ та $z_1^{(2)}$ прямою $z_1^*(t) = (z_1^{(2)} - z_1^{(1)})t + z_1^{(1)}$, $t \in [0, 1]$. Крива γ може перетинати точки z_1, в яких функція $\widetilde{G}(z_1) = 0$. Число таких точок $m = m(z^{(1)}, z^{(2)})$ є скінченним. Нехай $(z_{1,k}^*)$ — послідовність цих точок, впорядкованих за зростанням значення $|z_1^{(1)} - z_{1,k}^*|$, $k \in \{1, 2, ..., m\}$. Виберемо $r < \min\limits_{1 \leq k \leq m-1} \{|z_{1,k}^* - z_{1,k+1}^*|, |z_{1,1}^* - z_1^{(1)}|, |z_{1,m}^* - z_1^{(2)}|, \frac{2\beta^2 - 1}{2\pi\sqrt{n}\beta l_1(z^0)}\}$. Далі побудуємо кола з центрами в точках $z_{1,k}^*$ та відповідними радіусами $r_k' < \frac{r}{2^k}$ такі, що $\widetilde{G}(z_1) \neq 0$ для всіх z_1 на цих колах. Це здійсненно, бо $F \not\equiv 0$.

Кожна таке коло ділиться на два півкола прямою $z_1^*(t)$. Відповідна кусково-аналітична крива складається з дуг, побудованих півкіл та відрізків прямої $z_1^*(t)$, які з'єднують ці дуги послідовно між собою або з точками $z_1^{(1)}, z_1^{(2)}$. Довжина $z_1(t)$ в $\mathbb{C}$ (але не $z(t)$ в $\mathbb{C}^n$!) менша, ніж $\frac{\beta/\sqrt{n}}{l_1(z^0)} + \frac{1}{2\sqrt{n}\beta l_1(z^0)} + \pi r \leq \frac{2\beta}{\sqrt{n} l_1(z^0)}$. Тоді

$$\int_0^1 |z_s'(t)| dt = |k_s| \int_0^1 |z_1'(t)| dt \leq \frac{|z_s^{(2)} - z_s^{(1)}|}{|z_1^{(2)} - z_1^{(1)}|} \frac{2\beta}{\sqrt{n} l_1(z^0)} \leq$$

$$\leq \frac{2\beta^2 + 1}{2\sqrt{n}\beta l_s(z^0)} \frac{2\sqrt{n}\beta l_1(z^0)}{2\beta^2 - 1} \frac{2\beta}{\sqrt{n} l_1(z^0)} \leq \frac{2\beta(2\beta^2 + 1)}{(2\beta^2 - 1)\sqrt{n} l_s(z^0)}, \ s \in \{2, \dots, n\}.$$

Звідси,

$$\int_0^1 \sum_{s=1}^n l_s(z^0) |z_s'(t)| dt \leq \frac{2\beta(2\beta^2 + 1)\sqrt{n}}{2\beta^2 - 1} = S. \tag{3.36}$$

Оскільки функція $z = z(t)$ — кусково-аналітична на $[0, 1]$, для довільних $K \in$

$\mathbb{Z}_+^n$, $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K\| \le p$, справджується одна з двох рівностей: або

$$\frac{|F^{(K)}(z(t))|}{\mathbf{L}^K(z^0)} \equiv \frac{|F(J)(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}, \tag{3.37}$$

або

$$\frac{|F^{(K)}(z(t))|}{\mathbf{L}^K(z^0)} = \frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)} \tag{3.38}$$

правильна лише для скінченної множини точок $t_k \in [0;1]$.

Тоді для функції $G(z(t))$ як максимуму таких виразів $\frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}$ по всіх $\|J\| \le p$ можливі два випадки:

1) на деякому інтервалі аналітичності кривої γ функція $G(z(t))$тотожно дорівнює одночасно декільком частинним похідним, тобто, справджується (3.37) і, відповідно, $G(z(t)) \equiv \frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}$ для деякого J, $\|J\| \le p$. Зрозуміло, що $F^{(J)}(z(t))$ – аналітична функція, а $|F^{(J)}(z(t))|$ - неперервно диференційовна на згаданому проміжку аналітичності за винятком точок, у яких $F^{(J)}(z(t)) = 0$. Проте таких точок нема, бо у протилежному випадку й $G(z(t)) = 0$, а це суперечить вибору кривої γ.
2) на деякому інтервалі аналітичності кривої γ функція $G(z(t))$ одночасно дорівнює декільком частинним похідним у скінченному числі точок t_k, тобто, справджується (3.38). Тоді ці точки t_k розіб'ють інтервал аналітичності на скінченне число відрізків, на кожному з яких $G(z(t))$ дорівнює одній з похідних, тобто, $G(z(t)) \equiv \frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}$ для деякого J, $\|J\| \le p$. Також на кожному з таких проміжків на основі тих самих міркувань, що й у попередньому випадку, $|F^{(J)}(z(t))|$, а, отже, і $G(z(t))$ неперервно диференційовна функція за винятком точок t_k.

Нерівність $\frac{d}{dt}|f(t)| \le |\frac{df(t)}{dt}|$ — правильна для комплексно-значних функцій від дійсної змінної зовні зліченної множини точок. Беручи до уваги цей факт та (3.34), маємо

$$\frac{d}{dt}G(z(t)) \le \max\Big\{\frac{1}{\mathbf{L}^J(z^0)}\Big|\frac{d}{dt}F^{(J)}(z(t))\Big| : \ \|J\| \le p\Big\} \le$$

$$\le \max\Big\{\sum_{s=1}^{n}\Big|\frac{\partial^{\|J\|+1}F}{\partial z_1^{j_1}\dots\partial z_s^{j_s+1}\dots\partial z_n^{j_n}}(z(t))\Big|\frac{|z_s'(t)|}{\mathbf{L}^j(z^0)} : \ \|J\| \le p\Big\} \le$$

$$\le \max\Big\{\sum_{s=1}^{n}\Big|\frac{\partial^{\|J\|+1}F}{\partial z_1^{j_1}\dots\partial z_s^{j_s+1}\dots\partial z_n^{j_n}}(z(t))\Big|\frac{l_s(z^0)|z_s'(t)|}{l_1^{j_1}(z^0)\dots l_s^{j_1+1}(z^0)\dots l_n^{j_n}(z^0)} :$$

$$\|J\| \le p\Big\} \le \Big(\sum_{s=1}^{n} l_s(z^0)|z_s'(t)|\Big)\max\Big\{\frac{|F^{(j)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)} : \ \|J\| \le p+1\Big\} \le$$

$$\le \Big(\sum_{s=1}^{n} l_s(z^0)|z_s'(t)|\Big)BG(z(t)).$$

Тоді з (3.36) випливає

$$\Big|\ln\frac{G(z^{(2)})}{G(z^{(1)})}\Big| = \Big|\int_0^1 \frac{1}{G(z(t))}\frac{d}{dt}G(z(t))dt\Big| \le B\int_0^1 \sum_{s=1}^n l_s(z^0)|z_s'(t)|dt \le S\cdot B.$$

За допомогою (3.35) встановлюємо, що $M(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F) \le G(z^{(2)}) \le G(z^{(1)})e^{SB}$. Позаяк $z^{(1)} \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{1}}{2\beta\sqrt{n}\mathbf{L}(z^0)})$, нерівність Коші виконується

$$\frac{|F^{(J)}(z^{(1)})|}{\mathbf{L}^J(z^0)} \le J!(2\beta\sqrt{n})^{\|J\|}M\left(\frac{\mathbf{1}}{2\beta\sqrt{n}\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right).$$

для всіх $J \in \mathbb{Z}_+^n$. Тому, для $\|J\| \le p$ отримуємо $G(z^{(1)}) \le (p!)^n(2\beta\sqrt{n})^p M\left(\frac{\mathbf{1}}{2\beta\sqrt{n}\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right)$,

$$M\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right) \le e^{SB}(p!)^n(2\beta\sqrt{n})^p M\left(\frac{\mathbf{1}}{2\beta\sqrt{n}\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right).$$

Звідси за теоремою 3.3 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Лема 3.6. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична функція* F *у* $\mathbb{B}^n$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли існують* $c \in (0; +\infty)$ *та* $N \in \mathbb{N}$ *такі, що для кожного* $z \in \mathbb{B}^n$ *правильна нерівність*

$$\sum_{\|K\|=0}^{N} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \ge c\sum_{\|K\|=N+1}^{\infty} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}. \tag{3.39}$$

Доведення. Нехай $\frac{1}{\beta} < \theta_j < 1$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Якщо функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, то за лемою 3.4 F має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних, де $\widetilde{\mathbf{L}} = (\widetilde{l}_1(z), \dots, \widetilde{l}_n(z))$, $\widetilde{l}_j(z) = \theta_j l_j(z)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Нехай $\widetilde{N} = N(F, \widetilde{L}, \mathbb{B}^n)$. Тоді

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le \widetilde{N}\right\} = \max\left\{\frac{\Theta^K|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{\mathbf{L}}^K(z)} \colon \|K\| \le \widetilde{N}\right\} \ge$$

$$\ge \prod_{s=1}^n \theta_s^{\widetilde{N}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{\mathbf{L}}^K(z)} \colon \|K\| \le \widetilde{N}\right\} \ge \prod_{s=1}^n \theta_s^{\widetilde{N}} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\widetilde{\mathbf{L}}^J(z)} = \prod_{s=1}^n \theta_s^{\widetilde{N}-j_s} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}$$

для всіх $J \ge \mathbf{0}$ та

$$\sum_{\|J\|=\widetilde{N}+1}^{\infty} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^j(z)} \le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le \widetilde{N}\right\} \sum_{\|J\|=\widetilde{N}+1}^{\infty} \theta_s^{j_s-\widetilde{N}} =$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{\theta_s}{1-\theta_s} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le \widetilde{N}\right\} \le \prod_{i=1}^n \frac{\theta_s}{1-\theta_s} \sum_{\|K\|=0}^{\widetilde{N}} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}.$$

Звідси отримуємо (3.39) при $N = \widetilde{N}$ та $c = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_s}{1-\theta_s}$.

Навпаки, з нерівності (3.39) отримуємо

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\colon \|J\| = N+1\right\} \le \sum_{\|K\|=N+1}^{\infty} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \le \frac{1}{c}\sum_{\|K\|=0}^{N} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \le$$

$$\le \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{N} C_{n+i-1}^{i} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le N\right\}$$

і за теоремою 3.5 F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

3.6 Деяке застосування до рівнянь з частинними похідними: схема

У цьому підрозділі подано схему застосування теореми Хеймана до рівнянь з частинними похідними. Вона також застосовна у загальніших ситуаціях.

Розглянемо таку систему рівнянь з частинними похідними:

$$\begin{cases} F^{(2,0)}(z_1,z_2) = 2\pi z_2 \tan(\pi z_1 z_2) F^{(1,0)}(z_1,z_2), \\ F^{(0,2)}(z_1,z_2) = 2\pi z_1 \tan(\pi z_1 z_2) F^{(0,1)}(z_1,z_2). \end{cases}$$

Продиференціюємо за змінними z_1 та z_2. Отримаємо

$$\begin{cases} F^{(3,0)}(z_1,z_2) = \frac{2\pi^2 z_2^2}{\cos^2(\pi z_1 z_2)} F^{(1,0)}(z_1,z_2) + 2\pi z_2 \tan(\pi z_1 z_2) F^{(2,0)}(z_1,z_2), \\ F^{(2,1)}(z_1,z_2) = 2\pi \tan(\pi z_1 z_2) F^{(1,0)}(z_1,z_2) + \frac{2\pi^2 z_1 z_2}{\cos^2(\pi z_1 z_2)} F^{(1,0)}(z_1,z_2) + \\ +2\pi z_2 \tan(\pi z_1 z_2) F^{(1,1)}(z_1,z_2), \\ F^{(1,2)}(z_1,z_2) = 2\pi \tan(\pi z_1 z_2) F^{(0,1)}(z_1,z_2) + \frac{2\pi^2 z_1 z_2}{\cos^2(\pi z_1 z_2)} F^{(1,0)}(z_1,z_2) + \\ +2\pi z_1 \tan(\pi z_1 z_2) F^{(1,1)}(z_1,z_2), \\ F^{(0,3)}(z_1,z_2) = \frac{2\pi^2 z_1^2}{\cos^2(\pi z_1 z_2)} F^{(1,0)}(z_1,z_2) + 2\pi z_1 \tan(\pi z_1 z_2) F^{(2,0)}(z_1,z_2), \end{cases} \tag{3.40}$$

Нехай $\mathbf{L}(z_1,z_2) = (l_1(z_1,z_2), l_2(z_1,z_2)) = \left(\frac{|z_2|+1}{(1-|z|)|\frac{1}{2}-z_1z_2|}, \frac{|z_1|+1}{(1-|z|)|\frac{1}{2}-z_1z_2|}\right)$, де $z = (z_1,z_2)$, $|z| = \sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}$. Оцінимо модулі частинних похідних третього порядку функції $F(z_1,z_2)$ через модулі частинних похідних першого та другого порядків. З першого рівняння системи (3.40) маємо, що для всіх $z \in \mathbb{B}^2$:

$$\frac{|F^{(3,0)}(z_1,z_2)|}{l_1^3(z_1,z_2)} \le \frac{2\pi^2|z_2|^2|F^{(1,0)}(z_1,z_2)|}{|\cos^2(\pi z_1 z_2)|l_1^3(z_1,z_2)} + 2\pi|z_2\tan(\pi z_1 z_2)|\frac{|F^{(2,0)}(z_1,z_2)|}{l_1^3(z_1,z_2)} \le$$

$$\le \left(\frac{2\pi^2|z_2|^2}{|\cos^2(\pi z_1 z_2)|l_1^2(z_1,z_2)} + \frac{2\pi|z_2\tan(\pi z_1 z_2)|}{l_1(z_1,z_2)}\right) \max_{j\in\{1,2\}}\left\{\frac{|F^{(j,0)}(z_1,z_2)|}{l_1^j(z_1,z_2)}\right\} \le$$

$$\le \left(2\pi^2\frac{(1-|z|)^2|\frac{1}{2}-z_1z_2|^2}{|\cos^2(\pi z_1 z_2)|} + 2\pi|\tan(\pi z_1 z_2)|(1-|z|)\left|\frac{1}{2}-z_1z_2\right|\right) \times$$

$$\times \max\left\{\frac{|F^{(j,0)}(z_1,z_2)|}{l_1^j(z_1,z_2)} : j \in \{1,2\}\right\} =$$

$$= \left(\frac{(1-|z|)^2|\frac{\pi}{2}-\pi z_1 z_2|^2}{|\sin^2(\frac{\pi}{2}-\pi z_1 z_2)|} + 2|\sin(\pi z_1 z_2)|(1-|z|)\frac{|\frac{\pi}{2}-\pi z_1 z_2|}{|\sin(\frac{\pi}{2}-\pi z_1 z_2)|} \right) \times$$

$$\times \max\left\{ \frac{|F^{(j,0)}(z_1,z_2)|}{l_1^j(z_1,z_2)} : j \in \{1,2\} \right\} \leq C \max\left\{ \frac{|F^{(j,0)}(z_1,z_2)|}{l_1^j(z_1,z_2)} : j \in \{1,2\} \right\}.$$

Подібним чином, з другого рівняння системи (3.40) одержуємо

$$\frac{|F^{(2,1)}(z_1,z_2)|}{l_1^2(z_1,z_2)l_2(z_1,z_2)} \leq \left(\frac{2\pi|\tan(\pi z_1 z_2)|}{l_1(z_1,z_2)l_2(z_1,z_2)} + \frac{2\pi^2|z_1 z_2|}{|\cos^2(\pi z_1 z_2)|l_1(z_1,z_2)l_2(z_1,z_2)} \right) \times$$

$$\times \frac{|F^{(1,0)}(z_1,z_2)|}{l_1(z_1,z_2)} + \frac{2\pi|z_2\tan(\pi z_1 z_2)|}{l_1(z_1,z_2)} \frac{|F^{(1,1)}(z_1,z_2)|}{l_1(z_1,z_2)l_2(z_1,z_2)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2\pi|\sin(\pi z_1 z_2)|(1-|z|)^2|\frac{1}{2}-z_1 z_2|^2}{|\cos(\pi z_1 z_2)|} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi^2(1-|z|)^2|\frac{1}{2}-z_1 z_2|^2}{|\cos^2(\pi z_1 z_2)|} + \frac{2\pi|\sin(\pi z_1 z_2)|(1-|z|)|\frac{1}{2}-z_1 z_2|}{|\cos(\pi z_1 z_2)|} \right) \times$$

$$\times \max\left\{ \frac{|F^{(1,j)}(z_1,z_2)|}{l_1(z_1,z_2)l_2^j(z_1,z_2)} : j \in \{0,1\} \right\} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2\pi|\sin(\pi z_1 z_2)|(1-|z|)^2|\frac{1}{2}-z_1 z_2|^2}{|\sin(\frac{\pi}{2}-\pi z_1 z_2)|} + \frac{2(1-|z|)^2|\frac{\pi}{2}-\pi z_1 z_2|^2}{|\sin^2(\frac{\pi}{2}-\pi z_1 z_2)|} + \right.$$

$$\left. + \frac{2|\sin(\pi z_1 z_2)|(1-|z|)|\frac{\pi}{2}-\pi z_1 z_2|}{|\sin(\frac{\pi}{2}-\pi z_1 z_2)|} \right) \max\left\{ \frac{|F^{(1,j)}(z_1,z_2)|}{l_1(z_1,z_2)l_2^j(z_1,z_2)} : j \in \{0,1\} \right\} \leq$$

$$\leq C \max\left\{ \frac{|F^{(1,j)}(z_1,z_2)|}{l_1(z_1,z_2)l_2^j(z_1,z_2)} : j \in \{0,1\} \right\}.$$

За аналогією можна довести подібні оцінки для третього та четвертого рівняння системи (3.40). Об'єднуючи усі оцінки, маємо таке

$$\max\left\{ \frac{|F^{(k,3-k)}(z_1,z_2)|}{l_1^k(z_1,z_2)l_2^{3-k}(z_1,z_2)} : k \in \{0,1,2,3\} \right\} \leq$$

$$\leq C \max\left\{ \frac{|F^{(k,j)}(z_1,z_2)|}{l_1^k(z_1,z_2)l_2^j(z_1,z_2)} : 0 \leq k+j \leq 2 \right\}.$$

Звідси за теоремою 3.5 кожний аналітичний розв'язок $\mathbb{B}^2$ системи (3.40) має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних з $\mathbf{L}(z_1,z_2) = \left(\frac{|z_2|+1}{(1-|z|)|\frac{1}{2}-z_1 z_2|}, \frac{|z_1|+1}{(1-|z|)|\frac{1}{2}-z_1 z_2|} \right)$. Зокрема, функція $F(z_1,z_2) = \tan(\pi z_1 z_2)$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. Справді, легко помітити, що функція F є аналітичним розв'язком в $\mathbb{B}^2$ системи (3.40).

3.7 Обмеженість l_j-індексу за кожним напрямком $\mathbf{1}_j$

У цьому підрозділі покажемо інше застосування теореми 3.3. З обмеженості l_j-індексу функції F за кожною змінною z_j, взагалі кажучи, не випливає обме-

женість $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Але якщо F має обмежений l_j-індекс за кожним напрямком $\mathbf{1}_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, то функція F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Легко побачити, що при $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$ та $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$ маємо $l_j \in Q_{\mathbf{1}_j, \beta/\sqrt{n}}(\mathbb{B}^n)$, $j \in \{1, \dots, n\}$ (див. означення класу $Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ у розділі 2).

Теорема 3.6. *Нехай* $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* l_j*-індекс за напрямком* $\mathbf{1}_j$ *для кожного* $j \in \{1, \dots, n\}$, *то* F *є обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних.*

Доведення. Нехай F — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція обмеженого l_j-індексу за кожним напрямком $\mathbf{1}_j$. Тоді за теоремою 2.3 для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ та довільного $0 < r'_j < 1 < r''_j \le \frac{\beta}{\sqrt{n}}$ існує число $p_j = p_j(r', r'')$ таке, що для всіх $(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j^0, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{B}^n$

$$\max\left\{|F(z)|\colon |z_j - z_j^0| = \frac{r''_j}{l_j(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j^0, z_{j+1}, \dots, z_n)}\right\} \le p_j(r'_j, r''_j)\times$$
$$\times \max\left\{|F(z)|\colon |z_j - z_j^0| = \frac{r'_j}{l_j(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j^0, z_{j+1}, \dots, z_n)}\right\}. \tag{3.41}$$

Очевидно, що якщо для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ $l_j \in Q_{\mathbf{1}_j, \beta/\sqrt{n}}(\mathbb{B}^n)$, то $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. Нехай z^0 — довільна точка в $\mathbb{B}^n$, а точка $z^* \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)})$ є такою, що $M(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F) = |F(z^*)|$. Виберемо R'' та R' так, аби $\mathbf{1} < R'' \le (\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\beta}{\sqrt{n}})$ та $R' < \Lambda_1(R'')$. Тоді нерівність (3.41) означає, що

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right) \le \max\left\{|F(z_1, z_2^*, z_3^*, \dots, z_n^*)|\colon\ |z_1 - z_1^0| = \frac{r''_1}{l_1(z^0)}\right\} =$$
$$= \max\left\{|F(z_1, z_2^*, \dots, z_n^*)|\colon |z_1 - z_1^0| = \frac{r''_1}{l_1(z_1^0, z_2^*, \dots, z_n^*)}\frac{l_1(z_1^0, z_2^*, \dots, z_n^*)}{l_1(z^0)}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{|F(z_1, z_2^*, \dots, z_n^*)|\colon\ |z_1 - z_1^0| = \frac{r''_1\lambda_{2,1}(R'')}{l_1(z_1^0, z_2^*, \dots, z_n^*)}\right\} \le$$
$$\le p_1(r'_1, r''_1\lambda_{2,1}(R''))\max\left\{|F(z_1, z_2^*, \dots, z_n^*)|\colon |z_1 - z_1^0| = \frac{r'_1}{l_1(z_1^0, z_2^*, \dots, z_n^*)}\right\} =$$
$$= p_1(r'_1, r''_1\lambda_{2,1}(R''))\times$$
$$\times \max\left\{|F(z_1, z_2^*, \dots, z_n^*)|\colon |z_1 - z_1^0| = \frac{r'_1}{l_1(z^0)}\frac{l_1(z^0)}{l_1(z_1^0, z_2^*, \dots, z_n^*)}\right\} \le$$
$$\le p_1(r'_1, r''_1\lambda_{2,1}(R''))\max\left\{|F(z_1, z_2^*, \dots, z_n^*)|\colon\ |z_1 - z_1^0| = \frac{r'_1}{\lambda_{1,1}(R'')l_1(z^0)}\right\} =$$
$$= p_1(r'_1, r''_1\lambda_{2,1}(R''))|F(z_1^{**}, z_2^*, \dots, z_n^*)| \le p_1(r'_1, r''_1\lambda_{2,1}(R''))\times$$
$$\times \max\left\{|F(z_1^{**}, z_2, z_3^*, \dots, z_n^*)|\colon\ |z_2 - z_2^0| = \frac{r''_2}{l_2(z^0)}\right\} = p_1(r'_1, r''_1\lambda_{2,1}(R''))\times$$

$$\times\max\left\{|F(z_1^{**},z_2,\ldots,z_n^*)|\colon |z_2-z_2^0|=\frac{r_2''}{l_2(z_1^{**},z_2^0,\ldots,z_n^*)}\frac{l_2(z_1^{**},z_2^0,\ldots,z_n^*)}{l_2(z^0)}\right\}\le$$

$$\le p_1(r_1',r_1''\lambda_{2,1}(R''))\max\left\{|F(z_1^{**},z_2,\ldots,z_n^*)|\colon |z_2-z_2^0|=\frac{r_2''\lambda_{2,2}(R'')}{l_2(z_1^{**},z_2^0,\ldots,z_n^*)}\right\}\le$$

$$\le\prod_{j=1}^{2}p_j(r_j',r_j''\lambda_{2,j}(R''))\times$$

$$\times\max\left\{|F(z_1^{**},z_2,\ldots,z_n^*)|\colon |z_2-z_2^0|=\frac{r_2'}{l_2(z_1^{**},z_2^0,\ldots,z_n^*)}\right\}\le$$

$$\le\prod_{j=1}^{2}p_j(r_j',r_j''\lambda_{2,j}(R''))\max\left\{|F(z_1^{**},z_2,\ldots,z_n^*)|\colon |z_2-z_2^0|=\frac{r_2'}{\lambda_{1,2}(R'')l_2(z^0)}\right\}=$$

$$=\prod_{j=1}^{2}p_j(r_j',r_j''\lambda_{2,j}(R''))|F(z_1^{**},z_2^{**},z_3^*,\ldots,z_n^*)|\le\ldots\le\prod_{j=1}^{n}p_j(r_j',r_j''\lambda_{2,j}(R''))\times$$

$$\times\max\left\{|F(z_1,z_2,\ldots,z_n)|\colon\ |z_j-z_j^0|=\frac{r_j'}{\lambda_{1,j}(R'')l_j(z^0)},j\in\{1,\ldots,n\}\right\}=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}p_j(r_j',r_j''\lambda_{2,j}(R''))M\left(\frac{R'}{\Lambda_1(R'')\mathbf{L}(z^0)},z^0,F\right).$$

Звідси за теоремою 3.3 функція F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. □

Використовуючи теорему 3.6 та теорему 2.6, можна отримати достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Теорема 3.7. *Нехай $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція, $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^n)$ та для кожного $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ $\mathbb{B}^n\setminus G^{\mathbf{1}_j}_{\beta/\sqrt{n}}(F)\ne\emptyset$. Якщо для кожного $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ справджуються такі умови:*

1) *для будь-якого $r\in(0;\beta/\sqrt{n}]$ існує $P_j=P_j(r)>0$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{B}^n\setminus G^{\mathbf{1}_j}_r(F)$*
$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right|\le P_jl_j(z);$$
2) *для будь-якого $r>0$ існує $\widetilde{n}_j(r)\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z^0\in\mathbb{B}^n$, для яких $F(z^0+t\mathbf{1}_j)\not\equiv 0$,*
$$n_{\mathbf{1}_j}\left(\frac{r}{l_j(z^0)},z^0,\frac{1}{F}\right)\le\widetilde{n}_j(r),$$

то $F(z)$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.

Доведення. Зазначимо, що $|\mathbf{b}|=|\mathbf{1}_j|=1$, $L(z^0+t\mathbf{b})=L(z^0+t\mathbf{1}_j)=L(z_1^0,\ldots,z_{j-1}^0,z_j^0+t,z_{j+1}^0,\ldots,z_n^0)=l_j(z^0+t\mathbf{1}_j)$. Тому за припущеннями цієї теореми та теоремою 2.6 функція $F(z)$ має обмежений l_j-індекс за напрямком $\mathbf{1}_j$. Застосовуючи теорему 3.6, отримаємо, що $F(z)$ є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, де $\mathbf{L}(z)=(l_1(z_1),l_2(z_2),\ldots,l_n(z_n))$. □

3.8 Властивості степеневого розвинення аналітичних в одиничній кулі функцій

Нехай $z^0 \in \mathbb{B}^n$. Розвинемо аналітичну функцію $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ у степеневий ряд, записаний у діагональній формі

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k((z - z^0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\|J\|=k} b_J (z - z^0)^J, \tag{3.42}$$

де p_k — однорідні многочлени k-го степеня, $b_J = \frac{F^{(J)}(z^0)}{J!}$. Многочлен $p_{k_0}, k_0 \in \mathbb{Z}_+$, називається головним у степеневому розвиненні (3.42) на $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, якщо для кожного $z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)$ виконується така нерівність

$$\left| \sum_{k \neq k^0} p_k(z - z^0) \right| \leq \frac{1}{2} \max\{|b_J| R^J : \|J\| = k^0\}.$$

Теорема 3.8. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Якщо аналітична функція* F *в* $\mathbb{B}^n$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то існує* $p \in \mathbb{Z}_+$, *що для всіх* $d \in (0; \frac{\beta}{\sqrt{n}}]$ *знайдеться* $\eta(d) \in (0; d)$ *таке, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *та деякого* $r = r(d, z^0) \in (\eta(d), d)$, $k^0 = k^0(d, z^0) \leq p$ *многочлен* p_{k^0} *є головним у ряді* (3.42) *на* $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$.

Доведення. Нехай F — аналітична функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з $N = N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^n) < +\infty$ та n_0 — $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних у точці $z^0 \in \mathbb{D}^2$, тобто, n_0 — найменше число, для якого нерівність (3.2) виконується в точці z^0. Тоді для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $n_0 \leq N$.

Покладемо $a_J^* = \frac{|b_J|}{\mathbf{L}^J(z^0)} = \frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J! \mathbf{L}^J(z^0)}$, $a_k = \max\{a_J^* : \|J\| = k\}$, $c = 2\{(N + n + 1)!(n + 1)! + (N + 1)C_{n+N-1}^N\}$. Нехай $d \in (0; \frac{\beta}{\sqrt{n}}]$ довільне число. Також позначимо $r_m = \frac{d}{(d+1)c^m}$, $\mu_m = \max\{a_k r_m^k : k \in \mathbb{Z}_+\}$, $s_m = \min\{k : a_k r_m^k = \mu_m\}$ для $m \in \mathbb{Z}_+$.

Оскільки $z^0 \in \mathbb{B}^n$ — фіксована точка, нерівність $a_K^* \leq \max\{a_J^* : \|J\| \leq n_0\}$ дійсна для всіх $K \in \mathbb{Z}_+^n$. Тому $a_k \leq a_{n_0}$ при всіх $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси для всіх $k > n_0$, зважаючи на $r_0 < 1$, маємо $a_k r_0^k < a_{n_0} r_0^{n_0}$. Тому $s_0 \leq n_0$. З того, що $c r_m = r_{m-1}$, отримуємо, що для кожного $k > s_{m-1}$ ($r_{m-1} < 1$)

$$a_{s_{m-1}} r_m^{s_{m-1}} = a_{s_{m-1}} r_{m-1}^{s_{m-1}} c^{-s_{m-1}} \geq a_k r_{m-1}^k c^{-s_{m-1}} = a_k r_m^k c^{k - s_{m-1}} \geq c a_k r_m^k. \tag{3.43}$$

Отже, $s_m \leq s_{m-1}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Тому, можна переписати

$$\mu_0 = \max\{a_k r_0^k : k \leq n_0\}, \ \mu_m = \max\{a_k r_m^k : k \leq s_{m-1}\}, \ m \in \mathbb{N}$$

Введемо додаткові позначення для $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_0^* = \max\left\{a_k r_0^k : s_0 \neq k \leq n_0\right\}, \ s_0^* = \min\{k : k \neq s_0, a_k r_0^k = \mu_0^*\},$$
$$\mu_m^* = \max\{a_k r_m^k : s_m \neq k \leq s_{m-1}\}, \ s_m^* = \min\{k : k \neq s_m, a_k r_m^k = \mu_m^*\}.$$

Покажемо, що існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, для якого

$$\frac{\mu^*_{m_0}}{\mu_{m_0}} \leq \frac{1}{c}. \tag{3.44}$$

Від супротивного припустимо, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\frac{\mu^*_m}{\mu_m} > \frac{1}{c}. \tag{3.45}$$

Для $s^*_m < s_m$ ($s^*_m \neq s_m$ за визначенням) маємо

$$a_{s^*_m} r_{m+1}^{s^*_m} = \frac{a_{s^*_m} r_m^{s^*_m}}{c^{s^*_m}} = \frac{\mu^*_m}{c^{s^*_m}} > \frac{\mu_m}{c^{s^*_m+1}} = \frac{a_{s_m} r_m^{s_m}}{c^{s^*_m+1}} = \frac{a_{s_m} r_{m+1}^{s_m}}{c^{s^*_m+1-s_m}} \geq a_{s_m} r_{m+1}^{s_m}.$$

Для кожного $k > s^*_m$, $k \neq s_m$, (тобто, $k-1 \geq s^*_m$) можна вивести подібно

$$a_{s^*_m} r_{m+1}^{s^*_m} = \frac{a_{s^*_m} r_m^{s^*_m}}{c^{s^*_m}} \geq \frac{a_k r_m^k}{c^{s^*_m}} \geq \frac{a_k r_m^k}{c^{k-1}} = c a_k r_{m+1}^k.$$

Тому $a_{s^*_m} r_{m+1}^{s^*_m} > a_k r_{m+1}^k$ для всіх $k > s^*_m$. Тоді

$$s_{m+1} \leq s^*_m \leq s_m - 1. \tag{3.46}$$

Навпаки, якщо $s_m < s^*_m \leq s_{m-1}$, то може виконуватися рівність $s_{m+1} = s_m$. Справді за означенням $s_{m+1} \leq s_m$. Це означає, що вказана рівність можлива. Але при $s_{m+1} < s_m$ маємо $s_{m+1} \leq s_m - 1$ (це натуральні числа!). Звідси отримуємо (3.46).

Тому, з нерівностей $s^*_{m+1} \leq s_m$ та $s^*_m \neq s_{m+1}$ випливає, що $s^*_{m+1} < s_{m+1}$. Як і вище, замість (3.46) маємо

$$s_{m+2} \leq s^*_{m+1} \leq s_{m+1} - 1 = s_m - 1.$$

Отже, якщо для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ справджується (3.45), то для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ виконується одне з двох: або $s_{m+2} \leq s_{m+1} \leq s_m - 1$, або $s_{m+2} \leq s_m - 1$, тобто, $s_{m+2} \leq s_m - 1$, адже $s_{m+2} \leq s_{m+1}$. Звідси випливає, що

$$s_m \leq s_{m-2} - 1 \leq \ldots \leq s_{m-2[m/2]} - [m/2] \leq s_0 - [m/2] \leq n_0 - [m/2] \leq N - [m/2].$$

Іншими словами, $s_m < 0$ при $m > 2N+1$, що неможливо. Тому, знайдеться $m_0 \leq 2N+1$, для якого є правильною (3.44). Покладемо $r = r_{m_0}$, $\eta(d) = \frac{d}{(d+1)c^{2(N+1)}}$, $p = N$ та $k_0 = s_{m_0}$. Тоді, для всіх $\|J\| \neq k_0 = s_{m_0}$ у $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$ на основі (3.43) та (3.44) отримуємо

$$|b_J||(z-z^0)^J| = a^*_J r^{\|J\|} \leq a_{\|J\|} r^{\|J\|} \leq \frac{1}{c} a_{s_{m_0}} r_{m_0}^{s_{m_0}} = \frac{1}{c} a_{k_0} r^{k_0}.$$

Отже, для $z \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\not\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$

$$\left| \sum_{\|J\| \neq k_0} b_J (z-z^0)^J \right| \leq \sum_{\|J\| \neq k_0} a^*_j r^{\|J\|} \leq \sum_{\substack{k=0,\\ k \neq k_0}}^{\infty} a_k C^k_{n+k-1} r^k =$$

$$= \sum_{\substack{k=0,\\ k\neq s_{m_0}}}^{s_{m_0-1}} a_k C_{n+k-1}^k r^k + \sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} a_k C_{n+k-1}^k r^k. \tag{3.47}$$

Оцінимо дві суми в (3.47). З (3.44) випливає, що $\mu_{m_0}^* \leq \frac{1}{c}\mu_{m_0}$ або $\max\{a_k r_{m_0}^k : k \neq s_{m_0},\ k \leq s_{m_0-1}\} \leq \frac{1}{c}\max\{a_k r_{m_0}^k : k \neq s_{m_0}, k \leq s_{m_0-1}\}$, тобто, $a_k r^k \leq \frac{1}{c} a_{k_0} r^{k_0}$. Беручи до уваги (3.46), можна вивести, що

$$\sum_{\substack{k=0,\\ k\neq s_{m_0}}}^{s_{m_0-1}} a_k C_{n+k-1}^k r^k \leq \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} \sum_{k=0}^{N} C_{n+k-1}^k \leq \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c}(N+1) C_{n+N-1}^N. \tag{3.48}$$

Для всіх $k \geq s_{m_0-1}+1$ є справедливим таке $a_k r_{m_0-1}^k \leq \mu_{m_0-1}$. Тоді $a_k r_{m_0}^k = \frac{a_k r_{m_0-1}^k}{c^k} \leq \frac{\mu_{m_0-1}}{c^k}$. Зважаючи на (3.44), виводимо

$$\sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} a_k C_{n+k-1}^k r^k \leq \mu_{m_0-1} \sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} C_{n+k-1}^k \frac{1}{c^k} \leq$$

$$\leq a_{s_{m_0-1}} r_{m_0}^{s_{m_0-1}} c^{s_{m_0-1}} \sum_{k=s_{m_0-1}+1} (k+1)(k+2)\dots(k+n)\frac{1}{c^k} \leq$$

$$\leq \frac{a_{s_{m_0}} r^{s_{m_0}}}{c} c^{s_{m_0-1}} \left(\sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} x^{k+n} \right)^{(n)} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} = \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0-1}} \left\{ \frac{x^{s_{m_0-1}+n+1}}{1-x} \right\}^{(n)} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} =$$

$$= \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0-1}} \sum_{j=0}^{n} C_n^j (n-j)!(s_{m_0-1}+n+1)\dots(s_{m_0-1}+n-j+2)\times$$

$$\times \frac{x^{s_{m_0-1}+1+n-j}}{(1-x)^{n-j+1}} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} \leq \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0}-1} n!(N+n+1)! \sum_{j=0}^{n} \frac{(1/c)^{s_{m_0-1}+1+n-j}}{(1-1/c)^{n-j+1}} =$$

$$= n!(N+n+1)! \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(c-1)^{n-j+1}} \leq (n+1)!(N+n+1)! \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c}, \tag{3.49}$$

бо $c \geq 2$. Беручи до уваги (3.47)-(3.49), маємо таке

$$\left| \sum_{\|J\|\neq k_0} b_J (z-z^0)^J \right| \leq \frac{((N+1)C_{n+N-1}^N + (n+1)!(N+n+1)!) a_{k_0} r^{k_0}}{c} \leq \frac{1}{2} a_{k_0} r^{k_0}.$$

Це означає, що многочлен P_{k_0} є головним у рядах (3.42) на кістяку $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$. $\square$

Теорема 3.9. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Якщо існують* $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \in (0;1]$, $\eta \in (0;d)$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *та деякого* $R = (r_1, \dots, r_n)$ *з* $r_j = r_j(d, z^0) \in (\eta, d)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *та певного* $k^0 = k^0(d, z^0) \leq p$ *многочлен* p_{k^0} *є головним у рядах* (3.42) *на* $\mathbb{T}^2(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$, *то аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Припустимо, що існують $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \le 1$ та $\eta \in (0; d)$ такі, що для будь-якого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $R = (r_1, \dots, r_n)$ при $r_j = r_j(d, z^0) \in (\eta, d)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, і певного $k_0 = k_0(1, z^0) \le p$ многочлен P_{k_0} є головним у рядах (3.42) на $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)})$. Позначимо $r_0 = max_{1 \le j \le n} r_j$. Тоді

$$\left| \sum_{\|J\| \ne k_0} b_J (z - z^0)^J \right| = \left| F(z) - \sum_{\|J\| = k_0} b_J (z - z^0)^J \right| \le \frac{a_{k_0} r_0^{k_0}}{2}.$$

Використовуючи нерівність Коші, маємо $|b_J(z - z^0)^J| = a_j^* R^J \le \frac{a_{k_0} r_0^{k_0}}{2}$ для кожного $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|J\| \ne k_0$, тобто, для всіх $\|J\| = k \ne k_0$

$$a_k R^J \le \frac{a_{k_0} r_0^{k_0}}{2}. \tag{3.50}$$

Припустимо, що F необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. За теоремою 3.5 для всіх $p_1 \in \mathbb{Z}_+$ та $c \ge 1$ існує $z^0 \in \mathbb{B}^n$ таке, що виконується

$$\max \left\{ \frac{|F^{(J)}(z^0)|}{\mathbf{L}^J(z^0)} : \ \|J\| = p_1 + 1 \right\} > c \max \left\{ \frac{|F^{(K)}(z^0)|}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \ \|K\| \le p_1 \right\}.$$

Покладемо $p_1 = p$ та $c = \left(\frac{(p+1)!}{\eta^{p+1}} \right)^n$. Тоді для цього $z^0(p_1, c)$

$$\max \left\{ \frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J! \mathbf{L}^J(|z^0|)} : \ \|J\| = p + 1 \right\} > \frac{1}{\eta^{p+1}} \max \{ \frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K! \mathbf{L}^K(|z^0|)} : \ \|K\| \le p \},$$

тобто, $a_{p+1} > \frac{a_{k_0}}{\eta^{p+1}}$. Звідси, $a_{p+1} r_0^{p+1} > \frac{a_{k_0} r_0^{p+1}}{\eta^{p+1}} \ge a_{k_0} r^{k_0}$. Остання нерівність суперечить (3.50). Отже, функція F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. □

3.9 Оцінки зростання аналітичних в кулі функцій

Позначимо $[0, 2\pi]^n = \underbrace{[0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi]}_{n \text{ раз}}$. Для $R = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in [0, 2\pi]^n$, $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ писатимемо

$$Re^{i\Theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}), \ arg\, A = (arg\, a_1, \dots, arg\, a_n).$$

Через $K(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_n)$, де $l_j : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ задовольняє (3.1) та існує $c \ge 1$ таке, що для будь-якого $R \in \mathbb{R}_+^n$ при $|R| < 1$ та $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\max_{\Theta_1, \Theta_2 \in [0, 2\pi]^n} \frac{l_j(Re^{i\Theta_2})}{l_j(Re^{i\Theta_1})} \le c.$$

У випадку $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|, \dots, |z_n|), \dots, l_n(|z_1|, \dots, |z_n|))$ маємо, що $\mathbf{L} \in K(\mathbb{B}^n)$. Легко довести, що $\frac{|e^z| + 1}{1 - |z|} \in Q(\mathbb{D}) \setminus K(\mathbb{D})$, але $\frac{e^{e^{|z|}}}{1 - |z|} \in K(\mathbb{D}) \setminus Q(\mathbb{D})$. Крім цього, при $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \in K(\mathbb{B}^n)$ також $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \in K(\mathbb{B}^n)$ та $\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \in K(\mathbb{B}^n)$. Для простоти запису позначимо $M(F, R) = \max\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}$, де $|R| < 1$. Також використовуватимемо такий запис $\boldsymbol{\beta} = (\frac{\beta}{c\sqrt{n}}, \dots, \frac{\beta}{c\sqrt{n}})$.

Теорема 3.10. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n) \cap K(\mathbb{B}^n)$, $\beta > c\sqrt{n}$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln M(F,R) = O\left(\min_{\sigma_n \in \mathcal{S}_n} \min_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_j} l_j(R(j,\sigma_n,t)e^{i\Theta})dt\right) \text{ при } |R| \to 1-0, \tag{3.51}$$

де σ_n *— перестановка множини* $\{1,\dots,n\}$, $\mathcal{S}_n$ *— множина усіх перестановок* $\{1,\dots,n\}$, $R(j,\sigma_n,t) = (r_1',\dots,r_n')$, $r_k' = \begin{cases} r_k^0, & \text{якщо } \sigma_n(k) < j, \\ t, & \text{якщо } k = j, \\ r_k, & \text{якщо } \sigma_n(k) > j, \end{cases}$ $k \in \{1,\dots,n\}$, $R^0 = (r_1^0,\dots,r_n^0)$ *фіксований радіус.*

Доведення. Нехай $R > \mathbf{0}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0,2\pi]^n$, а точка $z^* \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})})$ така, що

$$|F(z^*)| = \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(\mathbf{0}, R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}.$$

Позначимо $z^0 = \frac{z^* R}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}$. Тоді

$$|z_j^0 - z_j^*| = \left|\frac{z_j^* r_j}{r_j + \frac{\beta}{c\sqrt{n} l_j(Re^{i\Theta})}} - z_j^*\right| = \left|\frac{z_j^* \beta/(c\sqrt{n} l_j(Re^{i\Theta}))}{r_j + \frac{\beta}{c\sqrt{n} l_j(Re^{i\Theta})}}\right| = \frac{\beta}{c\sqrt{n} l_j(Re^{i\Theta})}$$

та

$$\mathbf{L}(z^0) = \mathbf{L}\left(\frac{z^* R}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right) = \mathbf{L}\left(\frac{(R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta}))e^{i\arg z^*} R}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right) = \mathbf{L}(Re^{i\arg z^*}).$$

Позаяк $\mathbf{L} \in K(\mathbb{B}^n)$, маємо $c\mathbf{L}(z^0) = c\mathbf{L}(Re^{i\arg z^*}) \geq \mathbf{L}(Re^{i\Theta}) \geq \frac{1}{c}\mathbf{L}(z^0)$. Розглянемо два кістяки $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$ та $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)})$. За теоремою 3.3 існує $p_1 = p_1(\frac{\mathbf{1}}{c}, c\boldsymbol{\beta}) \geq 1$ таке, що (3.22) правильна для $R' = \frac{\mathbf{1}}{c}$, $R'' = c\boldsymbol{\beta}$, тобто,

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\mathbf{0}, R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\} \leq \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\} \leq$$
$$\leq \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{c\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_1 \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{\mathbf{1}}{c\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq$$
$$\leq p_1 \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(\mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}. \tag{3.52}$$

Функція $\ln^+ \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}$ є опуклою функцією відносно змінних $\ln r_1, \dots, \ln r_n$ (див. [177, с. 84]). Тому ця функція допускає представлення

$$\ln^+ \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\} - \ln^+ \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R + (r_j^0 - r_j)\mathbf{1}_j)\} =$$
$$= \int_{r_j^0}^{r_j} \frac{A_j(r_1,\dots,r_{j-1},t,r_{j+1},\dots,r_n)}{t} dt \tag{3.53}$$

для довільних $0 < r_j^0 \leq r_j$, де функції $A_j(r_1,\dots,r_{j-1},t,r_{j+1},\dots,r_n)$ — додатні неспадні за змінною t, $j \in \{1,\dots,n\}$.

Використовуючи (3.52), встановимо

$$\ln p_1 \geq \ln \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\mathbf{0}, R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\} -$$
$$- \ln \max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(\mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \ln \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{1} + \sum_{k=j}^{n}(\frac{\beta}{c\sqrt{n}} - 1)\mathbf{1}_k}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\} -$$
$$- \ln \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{1} + \sum_{k=j+1}^{n}(\frac{\beta}{c\sqrt{n}} - 1)\mathbf{1}_k}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{r_j + 1/l_j(Re^{i\Theta})}^{r_j + \beta/(c\sqrt{n} l_j(Re^{i\Theta}))} \frac{1}{t} A_j\left(r_1 + \frac{1}{l_1(Re^{i\Theta})}, \ldots, r_{j-1} + \frac{1}{l_{j-1}(Re^{i\Theta})}, t,\right.$$
$$\left. r_{j+1} + \frac{\beta}{c\sqrt{n} l_{j+1}(Re^{i\Theta})}, \ldots, r_n + \frac{\beta}{c\sqrt{n} l_n(Re^{i\Theta})}\right) dt \geq$$
$$\geq \sum_{j=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\frac{\beta}{c\sqrt{n}} - 1}{r_j l_j(Re^{i\Theta}) + 1}\right) A_j\left(r_1 + \frac{1}{l_1(Re^{i\Theta})}, \ldots, r_{j-1} + \frac{1}{l_{j-1}(Re^{i\Theta})}, r_j,\right.$$
$$\left. r_{j+1} + \frac{\beta}{c\sqrt{n} l_{j+1}(Re^{i\Theta})}, \ldots, r_n + \frac{\beta}{c\sqrt{n} l_n(Re^{i\Theta})}\right) \tag{3.54}$$

За лемою 3.2 маємо $r_j l_j(Re^{i\Theta}) \to +\infty$ при $|R| \to 1-0$. Звідси для $j \in \{1, \ldots, n\}$ та $r_i \geq r_i^0$

$$\ln\left(1 + \frac{\frac{\beta}{c\sqrt{n}} - 1}{r_j l_j(Re^{i\Theta}) + 1}\right) \sim \frac{\frac{\beta}{c\sqrt{n}} - 1}{r_j l_j(Re^{i\Theta}) + 1} \geq \frac{\frac{\beta}{c\sqrt{n}} - 1}{2 r_j l_j(Re^{i\Theta})}.$$

Отже, для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$ з нерівності (3.54) випливає, що

$$A_j\left(r_1 + \frac{1}{l_1(Re^{i\Theta})}, \ldots, r_{j-1} + \frac{1}{l_{j-1}(Re^{i\Theta})}, r_j, r_{j+1} + \frac{\beta}{c\sqrt{n} l_{i+1}(Re^{i\Theta})}, \ldots,\right.$$
$$\left. r_n + \frac{\beta}{c\sqrt{n} l_n(Re^{i\Theta})}\right) \leq \frac{2 \ln p_1}{\frac{\beta}{c\sqrt{n}} - 1}\, r_j l_j(Re^{i\Theta}).$$

Нехай $R^0 = (r_1^0, \ldots, r_n^0)$, де кожне r_j^0 вибране вище. Застосовуючи послідовно n раз рівність (3.53), отримаємо

$$\ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\} =$$
$$= \ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R + (r_1^0 - r_1)\mathbf{1}_1)\} + \int_{r_1^0}^{r_1} \frac{A_1(t, r_2, \ldots, r_n)}{t} dt =$$
$$= \ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R + (r_1^0 - r_1)\mathbf{1}_1 + (r_2^0 - r_2)\mathbf{1}_2)\} +$$
$$+ \int_{r_1^0}^{r_1} \frac{A_1(t, r_2, \ldots, r_n)}{t} dt + \int_{r_2^0}^{r_2} \frac{A_2(r_1^0, t, r_3 \ldots, r_n)}{t} dt =$$

$$=\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R^0)\}+\sum_{j=1}^{n}\int_{r_j^0}^{r_j}\frac{A_j(r_1^0,\ldots,r_{j-1}^0,t,r_{j+1},\ldots,r_n)}{t}dt\le$$

$$\le\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R^0)\}+$$

$$+\frac{2\ln p_1}{\frac{\beta}{c\sqrt{n}}-1}\sum_{j=1}^{n}\int_{r_j^0}^{r_j}l_j(r_1^0e^{i\theta_1},\ldots,r_{j-1}^0e^{i\theta_{j-1}},te^{i\theta_j},r_{j+1}e^{i\theta_{j+1}},\ldots,r_ne^{i\theta_n})dt\le$$

$$\le\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R^0)\}+$$

$$+\frac{2\ln p_1}{\frac{\beta}{c\sqrt{n}}-1}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{r_j}l_j(r_1^0e^{i\theta_1},\ldots,r_{j-1}^0e^{i\theta_{j-1}},te^{i\theta_j},r_{j+1}e^{i\theta_{j+1}},\ldots,r_ne^{i\theta_n})dt\le$$

$$\le(1+o(1))\frac{2\ln p_1}{\frac{\beta}{c\sqrt{n}}-1}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{r_j}l_j(r_1^0e^{i\theta_1},\ldots,r_{j-1}^0e^{i\theta_{j-1}},te^{i\theta_j},r_{j+1}e^{i\theta_{j+1}},\ldots,r_ne^{i\theta_n})dt.$$

Функція $\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}$ не залежить від Θ. Тому правильне таке співвідношення

$$\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}=$$

$$=O\left(\min_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{r_j}l_j(r_1^0e^{i\theta_1},\ldots,r_{j-1}^0e^{i\theta_{j-1}},te^{i\theta_j},r_{j+1}e^{i\theta_{j+1}},\ldots,r_ne^{i\theta_n})dt\right),$$

при $|R|\to1-0$. Очевидно, що подібна рівність може бути доведена для довільної перестановки σ_n множини $\{1,2,\ldots,n\}$. Тому є правильною формула (3.51). Теорема 3.10 доведена. □

Наслідок 3.1. *Якщо* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^n)\cap K(\mathbb{B}^n)$, $\min\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}l_j(Re^{i\Theta})$ *— неспадна за кожною змінною є* r_k, $k,j\in\{1,\ldots,n\}$, $k\ne j$, *аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}=O\left(\min_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{r_j}l_j(R^{(j)}e^{i\Theta})dt\right)$$

при $|R|\to1-0$, *де* $R^{(j)}=(r_1,\ldots,r_{j-1},t,r_{j+1},\ldots,r_n)$.

Відмітимо, що теорема 3.10 нова навіть для $n=1$ (див. теорему 3.3 в [206]), бо замінено умову $l=l(|z|)$ на слабшу умову $l\in K(\mathbb{D})$, тобто, існує $c>0$ таке, що для всіх $r\in(0,1)$ $\max\limits_{\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]}\frac{l(re^{i\theta_2})}{l(re^{i\theta_1})}\le c$.

Позначимо $a^+=\max\{a,0\}$, $u_j(t)=u_j(t,R,\Theta)=l_j(\frac{tR}{r^*}e^{i\Theta})$, де $a\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}_+$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, $r^*=\max_{1\le j\le n}r_j\ne0$ та $\frac{t}{r^*}|R|<1$.

Теорема 3.11. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k, $k\in\{1,\ldots,n\}$, $|R|<1$, $\Theta\in[0,2\pi]^n$. *Якщо функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє* (3.1) *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N=N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних, то для кожного* $\Theta\in[0,2\pi]^n$ *та всіх*

$R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| < 1$, *і* $S \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\ln \max\left\{\frac{|F^{(S)}(Re^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Re^{i\Theta})}:\ \|S\| \le N\right\} \le \ln \max\left\{\frac{|F^{(S)}(\mathbf{0})|}{S!\mathbf{L}^S(\mathbf{0})}:\ \|S\| \le N\right\} +$$
$$+\int_0^{r^*}\left(\max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{r_j}{r^*}(k_j+1)l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right)\right\} + \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{k_j(-u_j'(\tau))^+}{l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right)}\right\}\right)d\tau. \tag{3.55}$$

Доведення. Нехай $R \in \mathbb{R} \setminus \{\square\}$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$. Позначимо $\alpha_j = \frac{r_j}{r^*}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ та $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Розглянемо функцію

$$g(t) = \max\left\{\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}:\ \|S\| \le N\right\}, \tag{3.56}$$

де $At = (\alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)$, $Ate^{i\Theta} = (\alpha_1 te^{i\theta_1}, \dots, \alpha_n te^{i\theta_n})$.

Позаяк функція $\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{K!\mathbf{L}^K(Ate^{i\Theta})}$ — неперервно диференційовна за дійсною змінною $t \in [0, +\infty)$, зовні нульової множини функції $|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|$, відповідно функція $g(t)$ також неперервно диференційовна на $[0, \frac{r^*}{|R|})$ за винятком, можливо, зліченної множини точок.

Застосовуючи нерівність $\frac{d}{dr}|g(r)| \le |g'(r)|$, яка виконується скрізь за винятком точок $r = t$, в яких $g(t) = 0$, виводимо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\right) = \frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\frac{d}{dt}|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})| +$$
$$+|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|\frac{d}{dt}\frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \le \frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\left|\sum_{j=1}^n F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})\alpha_j e^{i\theta_j}\right| -$$
$$\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^n \frac{k_j u_j'(t)}{l_j(Ate^{i\Theta})} \le \sum_{j=1}^n \frac{|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{(S+\mathbf{1}_j)!\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})}\alpha_j(k_j+1)l_j(Ate^{i\Theta}) +$$
$$+\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^n \frac{k_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}. \tag{3.57}$$

Для абсолютно неперервних функцій h_1, h_2, …, h_k та $h(x) := \max\{h_j(z) : 1 \le j \le k\}$, $h'(x) \le \max\{h_j'(x) : 1 \le j \le k\}$, $x \in [a, b]$ (див. [206, Лема 4.1, с. 81]). Функція g — абсолютно неперервна, тому з (3.57) випливає, що

$$g'(t) \le \max\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\right) : \|S\| \le N\right\} \le$$
$$\le \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{(K+\mathbf{1}_j)!\mathbf{L}^{K+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})} + \frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\} \le$$
$$\le g(t)\left(\max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})\right\} + \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}\right) =$$

$$= g(t)(\beta(t) + \gamma(t)),$$

де

$$\beta(t) = \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})\right\}, \gamma(t) = \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}.$$

Отже, $\frac{d}{dt}\ln g(t) \le \beta(t) + \gamma(t)$ та

$$g(t) \le g(0)\exp\int_0^t(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau, \tag{3.58}$$

бо $g(0) \ne 0$. Але за нашими позначеннями $r^*A = R$. Підставляючи $t = r^*$ у (3.58) та беручи до уваги (3.56), виведемо

$$\ln\max\left\{\frac{|F^{(S)}(Re^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Re^{i\Theta})}:\ \|S\|\le N\right\} \le \ln\max\left\{\frac{|F^{(S)}(\mathbf{0})|}{S!\mathbf{L}^S(\mathbf{0})}:\ \|S\|\le N\right\} +$$
$$+\int_0^{r^*}\left(\max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(s_j+1)l_j(A\tau e^{i\Theta})\right\} + \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{s_j(-u_j'(\tau))^+}{l_j(A\tau e^{i\Theta})}\right\}\right)d\tau,$$

тобто, (3.55) — правильна. □

Твердження 3.1. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k, $k \in \{1,\dots,n\}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0,2\pi]^n$. *Якщо функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє* (3.1) *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних та існує* $C > 0$ *таке, що функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє нерівності*

$$\sup_{|R|<1}\max_{t\in[0,r^*]}\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\max_{1\le j\le n}\frac{(-(u_j(t,R,\Theta))_t')^+}{\frac{r_j}{r^*}l_j^2(\frac{t}{r^*}Re^{i\Theta})} \le C, \tag{3.59}$$

то

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0}\frac{\ln\max\{|F(z):\ z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}\left(\tau Re^{i\Theta}\right)\rangle d\tau} \le (C+1)N+1. \tag{3.60}$$

Доведення. За лемою 3.9, коли $\mathbf{L}$ задовольняє (3.1), буде правильним таке

$$\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\left\langle R,\mathbf{L}\left(\tau Re^{i\Theta}\right)\right\rangle d\tau \to +\infty \text{ при } |R|\to 1-0. \tag{3.61}$$

Позначимо $\widetilde{\beta}(t) = \sum_{j=1}^n\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})$. Якщо додатково виконується (3.59), то для деякого S^*, $\|S^*\|\le N$ та $\widetilde{S}$, $\|\widetilde{S}\|\le N$,

$$\frac{\gamma(t)}{\widetilde{\beta}(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n\frac{s_j^*(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}}{\sum_{j=1}^n\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})} \le \sum_{j=1}^n s_j^*\frac{(-u_j'(t))^+}{\alpha_j l_j^2(Ate^{i\Theta})} \le \sum_{j=1}^n s_j^*\cdot C \le NC \text{ та}$$
$$\frac{\beta(t)}{\widetilde{\beta}(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n\alpha_j(\tilde{s}_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})}{\sum_{j=1}^n\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})} = 1 + \frac{\sum_{j=1}^n\alpha_j\tilde{s}_j l_j(Ate^{i\Theta})}{\sum_{j=1}^n\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})} \le$$

$$\leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{s}_j \leq 1 + N.$$

Але $|F(Ate^{i\Theta})| \leq g(t) \leq g(0) \exp \int_0^t (\beta(\tau) + \gamma(\tau))d\tau$ та $r^* A = R$. Поклавши $t = r^*$ та взявши до уваги (3.61), отримаємо

$$\ln \max\{|F(z)\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\} = \ln \max_{\Theta \in [0,2\pi]^n} |F(Re^{i\Theta})| \leq \ln \max_{\Theta \in [0,2\pi]^n} g(r^*) \leq$$

$$\leq \ln g(0) + \max_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \int_0^{r^*} (\beta(\tau) + \gamma(\tau))d\tau \leq$$

$$\leq \ln g(0) + (NC + N + 1) \max_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \int_0^{r^*} \widetilde{\beta}(\tau)d\tau =$$

$$= \ln g(0) + (NC + N + 1) \max_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \int_0^{r^*} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j(A\tau e^{i\Theta})d\tau =$$

$$= \ln g(0) + (NC + N + 1) \max_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \int_0^{r^*} \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{r^*} l_j \left(\frac{\tau}{r^*} Re^{i\Theta}\right) d\tau =$$

$$= \ln g(0) + (NC + N + 1) \max_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \int_0^{1} \sum_{j=1}^{n} r_j l_j(\tau Re^{i\Theta})d\tau.$$

Отже, справджується (3.60). Твердження 3.1 доведено. □

Твердження 3.2. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$. *Якщо функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє* (3.1) *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F, \mathbf{L})$ *за сукупністю змінних та*

$$r^*(-(u_j(t, R, \Theta))'_{t=r^*})^+/(r_j l_j^2(Re^{i\Theta})) \to 0 \tag{3.62}$$

рівномірно для всіх $\Theta \in [0, 2\pi]^n$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *при* $|R| \to 1 - 0$, *то*

$$\varlimsup_{|R| \to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta \in [0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}\left(\tau Re^{i\Theta}\right)\rangle d\tau} \leq N + 1. \tag{3.63}$$

Оцінка (3.63) може бути встановлена за аналогією з доведенням твердження 3.1.

Якщо $\mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(R)$, то (3.62) може бути записана у простішій формі.

Наслідок 3.2. *Нехай* $\mathbf{L}(R)$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $|R| < 1$. *Якщо функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє* (3.1) *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F, \mathbf{L})$ *за сукупністю змінних та для кожного* $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\langle R, \nabla l_j(R)\rangle}{r_j l_j^2(R)} \to 0 \text{ при } |R| \to 1 - 0,$$

то

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln\max\{|F(z)|\colon\ z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\int_0^1\langle R,\mathbf{L}\,(\tau R)\rangle d\tau}\le N+1,$$

де $\nabla l_j(R)=(\frac{\partial l_j(R)}{\partial r_1},\dots,\frac{\partial l_j(R)}{r_n})$.

У цьому підрозділі наш основний результат має такий вигляд

Теорема 3.12. *Нехай* $\mathbf{L}(R)=(l_1(R),\dots,l_n(R))$, $l_j(R)$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k, $k\in\{1,\dots,n\}$, $|R|<1$. *Якщо функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє* (3.1) *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N=N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних, то*

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln\max\{|F(z)|\colon\ z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\int_0^1\langle R,\mathbf{L}\,(\tau R)\rangle d\tau}\le N+1.$$

Ця теорема є безпосереднім наслідком твердження 3.2, яке отримане для загальнішої функції $\mathbf{L}$.

Позначимо $u(r,\theta)=l(re^{i\theta})$. З теореми 3.11 випливає таке твердження для $n=1$.

Наслідок 3.3. *Нехай* $l(re^{i\theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за змінною* $r\in[0,1)$ *для кожного* $\theta\in[0,2\pi]$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{D}$ *функція* f *має обмежений* l*-індекс* $N=N(f,l)$ *та* $\varlimsup\limits_{r\to 1-0}\max\limits_{\theta\in[0,2\pi]}\frac{(-u'_r(r,\theta))^+}{l^2(re^{i\Theta})}=C\ge 0$, *то*

$$\varlimsup_{r\to 1-0}\frac{\ln\max\{|f(z)\colon |z|=r\}}{\max\limits_{\theta\in[0,2\pi]}\int_0^r l\,(\tau e^{i\theta})\,d\tau}\le (C+1)N+1. \tag{3.64}$$

Оцінка (3.63) точна. Це легко перевірити для таких функцій $F(z)=\exp\{\frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)}\}$, $l_1(z_1,z_2)=\frac{1}{(1-|z_1|)^2(1-|z|)}$, $l_2(z_1,z_2)=\frac{1}{(1-|z|)(1-|z_2|)^2}$. Звідси маємо $N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^n)=0$ та $\ln\max\{|F(z)|\colon z\in T^2(\mathbf{0},R)\}=\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}$.

3.10 Обмежений L-індекс за сукупністю змінних в обмеженій області

Через $\overline{G}$ позначимо замикання області G. Такий результат є узагальненням одновимірних тверджень з [156, 206], отриманих там для цілих та аналітичних функцій відповідно.

Лема 3.7. *Нехай* $F(z)$ *— аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція,* G *— обмежена область у* $\mathbb{B}^n$, $d=\inf_{z\in\overline{G}}(1-|z|)>0$ *та* $\beta>\sqrt{n}$. *Якщо для кожного* $j\in\{1,\dots,n\}$ $l_j\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{R}_+$ *— неперервна функція, яка задовольняє* $l_j(z)\ge\frac{\beta}{d}$ *для всіх* $z\in\mathbb{B}^n$, *то існує* $m\in\mathbb{Z}_+$ *таке, що для всіх* $z\in\overline{G}$ *та* $J=(j_1,j_2,\dots,j_n)\in\mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\le\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon\ K\in\mathbb{Z}_+^n,\ \|K\|\le m\right\}, \tag{3.65}$$

де $\mathbf{L}(z)=(l_1(z),\dots,l_n(z))$.

Доведення. Якщо $F(z) \equiv 0$, то (3.65) — очевидна. Нехай $F(z) \not\equiv 0$. Для кожного фіксованого $z^0 \in \overline{G}$ $\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)}$ — модуль коефіцієнта степеневого розвинення аналітичної функції $F(z)$, $z \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{R_0}{\mathbf{L}(z^0)})$, де $|R_0| = \sqrt{n}$. Оскільки $F(z)$ — аналітична, для кожного $z^0 \in \overline{G}$ маємо $\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)} \to 0$ при $\|J\| \to \infty$, тобто, знайдеться $m_0 = m(z^0)$, для якого справджується нерівність (3.65).

Від супротивного, припустимо, що множина значень m_0 рівномірно обмежена по всіх z^0 : $\sup\limits_{z^0 \in \overline{G}} m_0 = +\infty$. Звідси для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ існує $z_m \in \overline{G}$ та $J^m \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J^m)}(z^m)|}{J^m!\mathbf{L}^{J^m}(z_m)} > \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^m)|}{K!\mathbf{L}^K(z^m)} : \ K \in \mathbb{Z}_+^n, \ \|K\| \le m\right\}. \tag{3.66}$$

Позаяк $z^m \in \overline{G}$, то знайдеться підпослідовність $z'^m \to z' \in \overline{G}$ при $m \to +\infty$. Запишемо інтегральну формулу Коші для довільного $J \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{F^{(J)}(z^0)}{J!} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)} \frac{F(z)}{(z - z^0)^{J+\mathbf{1}}} dz.$$

Перепишемо (3.66) у вигляді

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^m)|}{K!\mathbf{L}^K(z^m)} : \ K \in \mathbb{Z}_+^n, \ \|K\| \le m\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{(2\pi)^n \mathbf{L}^{J^m}(z^m)} \int_{z \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^m)})} \frac{|F(z)|}{|z - z^m|^{J^m+\mathbf{1}}} |dz| \le \frac{\max\{|F(z)| : z \in G_R\}}{R^{J^m}}, \tag{3.67}$$

де $G_R = \bigcup_{z^* \in \overline{G}} D^n[z^*, \frac{R}{\mathbf{L}(z^*)}]$, $|R| \le \beta$. Виберемо R таке, що $r_j > 1$, тобто, $|R| > \sqrt{n}$. Переходячи до границі в (3.67) при $m \to \infty$, отримаємо

$$\forall K \in \mathbb{Z}_+^n \quad \frac{|F^{(K)}(z')|}{K!\mathbf{L}^K(z')} \le \lim_{m \to \infty} \frac{1}{R^{J^m}} \max\{|F(z)| : z \in G_R\} = 0.$$

при $m \to +\infty$. Тому, всі частинні похідні функції F у точці z' дорівнюють 0. За теоремою єдиності $F(z) \equiv 0$, що неможливо. □

3.11 Вичерпання одиничної кулі кулями меншого радіуса

Позначимо $\ell(z) = \min_{1 \le j \le n} l_j(z)$, $\mathcal{L}(z) = \max_{1 \le j \le n} l_j(z)$. Зрозуміло, що $\ell(z) \le \mathcal{L}(z)$. Через $Q'(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}$, які задовольняють умову

$$(\forall r \in [0, \beta], \ j \in \{1, \ldots, n\}): \ 0 < \lambda_{1,j}(r) \le \lambda_{2,j}(r) < \infty, \tag{3.68}$$

де

$$\lambda_{1,j}(r) = \inf_{z^0 \in \mathbb{B}^n} \inf\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\}, \tag{3.69}$$

$$\lambda_{2,j}(r) = \sup_{z^0\in\mathbb{B}^n} \sup \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\ell(z^0)\right] \right\}, \tag{3.70}$$
$$\Lambda_1(r) = (\lambda_{1,1}(r), \dots, \lambda_{1,n}(r)),\ \Lambda_2(r) = (\lambda_{2,1}(r), \dots, \lambda_{2,n}(r)).$$

Ці позначення $\lambda_{1,j}(r)$, $\lambda_{2,j}(r)$, $\Lambda_1(r)$, $\Lambda_2(r)$ дійсні лише у цьому підрозділі. У решти підрозділах їхні значення визначені в (3.5)-(3.6).

Наступна теорема є базовою в теорії функцій обмеженого індексу. Вона необхідна для встановлення зручніших та ефективніших критеріїв обмеженості індексу, які описують поводження максимуму модуля на колі чи поводження логарифмічної похідної (див. [30, 149, 170, 188, 206, 254]). Усі згадані праці використовують вичерпування полікругами в $\mathbb{C}^n$ або кругами в $\mathbb{C}$.

Теорема 3.13. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q'(\mathbb{B}^n)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, аби для кожного* $r \in (0, \beta]$ *існували* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ *такі, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *знайдеться* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, *для якого*

$$\max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right] \right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \tag{3.71}$$

і досить, щоб для кожного $r \in (0, \beta]$ *знайшлися* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ *та* $p_0 > 0$ *такі, що для будь-якого* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *існує* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, *для якого*

$$\max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\ell(z^0)|\right] \right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}. \tag{3.72}$$

Доведення. Нехай F — функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних при $N = N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^n) < \infty$. Для кожного $r \in (0, \beta]$ покладемо

$$q = q(r) = [2(N+1)r\sqrt{n}\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^{N+1}] + 1,$$

де $[x]$ — ціла частина дійсного числа x. Для $p \in \{0, \dots, q\}$ та $z^0 \in \mathbb{B}^n$ позначимо

$$S_p(z^0, r) = \max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right] \right\},$$
$$S_p^*(z^0, r) = \max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right] \right\}.$$

Використовуючи (3.5) та $\mathbb{B}^n \left[z^0, \frac{pr}{q\ell(z^0)}\right] \subset \mathbb{B}^n \left[z^0, \frac{r}{\mathcal{L}(z^0)}\right]$, маємо

$$S_p(z^0, r) = \max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \frac{\mathbf{L}^K(z^0)}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right] \right\} \le$$
$$\le S_p^*(z^0, r) \max\left\{ \prod_{j=1}^{n} \frac{l_j^N(z^0)}{l_j^N(z)} : z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right] \right\} \le S_p^*(z^0, r) \prod_{j=1}^{n} (\lambda_{1,j}(r))^{-N}.$$

Тепер скористаємося (3.6) і отримаємо

$$S_p^*(z^0,r)=\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|\,\mathbf{L}^K(z)}{K!\mathbf{L}^K(z)\mathbf{L}^K(z^0)}:\|K\|\le N, z\in\mathbb{B}^n\left[z^0,\frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]\right\}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}(\Lambda_2(r))^K:\|K\|\le N, z\in\mathbb{B}^n\big[z^0,\frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\big]\right\}\le S_p(z^0,r)\prod_{j=1}^n(\lambda_{2,j}(r))^N. \tag{3.73}$$

Нехай $K^{(p)}$ при $\|K^{(p)}\|\le N$ та $z^{(p)}\in\mathbb{B}^n\left[z^0,\frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]$ будуть такими, що

$$S_p^*(z^0,r)=\frac{|F^{(K^{(p)})}(z^{(p)})|}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} \tag{3.74}$$

За принципом максимуму модуля $z^{(p)}\in\mathbb{S}_n(z^0,\frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)})$, маємо $z^{(p)}\ne z^0$. Виберемо $\widetilde{z}_j^{(p)}=z_j^0+\frac{p-1}{p}(z_j^{(p)}-z_j^0)$, $j\in\{1,\dots,n\}$ Тоді

$$|\widetilde{z}^{(p)}-z^0|=\frac{p-1}{p}|z^{(p)}-z^0|=\frac{p-1}{p}\frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}, \tag{3.75}$$

$$|\widetilde{z}^{(p)}-z^{(p)}|=|z^0+\frac{p-1}{p}(z^{(p)}-z^0)-z^{(p)}|=\frac{1}{p}|z^0-z^{(p)}|==\frac{r}{q\mathcal{L}(z^0)}. \tag{3.76}$$

З (3.75) випливає, що $\widetilde{z}^{(p)}\in\mathbb{B}^n\left[z^0,\frac{(p-1)r}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]$ та $S_{p-1}^*(z^0,r)\ge\frac{|F^{(K^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)})|}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)}$. А з (3.74) випливає

$$0\le S_p^*(z^0,r)-S_{p-1}^*(z^0,r)\le\frac{|F^{(K^{(p)})}(z^{(p)})|-|F^{(K^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)})|}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)}=$$

$$=\frac{1}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)}\int_0^1\frac{d}{dt}|F^{(K^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)}+t(z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)}))|dt\le$$

$$\le\frac{1}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)}\int_0^1\sum_{j=1}^n|z_j^{(p)}-\widetilde{z}_j^{(p)}|\left|F^{(K^{(p)}+\mathbf{1}_j)}(\widetilde{z}^{(p)}+t(z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)}))\right|dt=$$

$$=\frac{1}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)}\sum_{j=1}^n|z_j^{(p)}-\widetilde{z}_j^{(p)}|\left|F^{(K^{(p)}+\mathbf{1}_j)}(\widetilde{z}^{(p)}+t^*(z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)}))\right|, \tag{3.77}$$

де $0\le t^*\le 1$, $\widetilde{z}^{(p)}+t^*(z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)})\in\mathbb{B}^n(z^0,\frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)})$. Для $z\in\mathbb{B}^n(z^0,\frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)})$ та $J\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|J\|\le N+1$ дістаємо таке

$$\frac{|F^{(J)}(z)|\mathbf{L}^J(z)}{J!\mathbf{L}^J(z^0)\mathbf{L}^J(z)}\le(\Lambda_2(r))^J\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\|K\|\le N\right\}\le$$

$$\le\prod_{j=1}^n(\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)}:\|K\|\le N\right\}\le$$

$$\le\prod_{j=1}^n(\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}S_p^*(z^0,r).$$

Зважаючи на (3.77) та (3.76), отримуємо

$$0 \le S_p^*(z^0,r) - S_{p-1}^*(z^0,r) \le$$
$$\le \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N} S_p^*(z^0,r) \sum_{j=1}^n (k_j^{(p)}+1) l_j(z^0)|z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}| =$$
$$= \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N} S_p^*(z^0,r)(N+1) \sum_{j=1}^n l_j(z^0)|z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}| \le$$
$$\le \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N} (N+1) S_p^*(z^0,R)\sqrt{n}\mathcal{L}(z^0)|z^{(p)} - \widetilde{z}^{(p)}| =$$
$$= \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N} \sqrt{n}\frac{(N+1)r}{q(r)} S_p^*(z^0,R) \le \frac{1}{2} S_p^*(z^0,R).$$

А це означає, що $S_p^*(z^0,r) \le 2S_{p-1}^*(z^0,r)$. Тоді з нерівностей (3.73) та (3.74) маємо таке

$$S_p(z^0,r) \le 2\prod_{j=1}^n (\lambda_{1,j}(r))^{-N} S_{p-1}^*(z^0,r) \le 2\prod_{j=1}^n (\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^N S_{p-1}(z^0,r)$$

Тому

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]\right\} = S_q(z^0,r) \le$$
$$\le 2\prod_{j=1}^n (\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^N S_{q-1}(z^0,r) \le \ldots \le$$
$$\le (2\prod_{j=1}^n (\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^N)^q S_0(z^0,r) =$$
$$= (2\prod_{j=1}^n (\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^N)^q \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le N\right\}. \tag{3.78}$$

З (3.78) отримуємо нерівність (3.71) при $p_0 = (2\prod\limits_{j=1}^n (\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^N)^q$ та деякого K^0 при $\|K^0\| \le N$. Необхідність умови (3.71) доведена.

Доведемо достатність. Припустимо, що для кожного $r \in (0,\beta]$ існують $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 1$ такі, що для всіх $z_0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, виконується нерівність (3.72).

Запишемо формулу Коші для кулі (див. [245, с. 109] або [186, с. 349]) у такому вигляді $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\forall K \in \mathbb{Z}_+^n$ $\forall S \in \mathbb{Z}_+^n$ $\forall z \in \mathbb{B}^n(z^0, r/\ell(z^0))$

$$F^{(K+S)}(z) = \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))} \frac{|\xi - z^0|(\overline{\xi - z^0})^S F^{(K)}(\xi)}{(|\xi - z^0|^2 - \langle z - z^0, \xi - z^0\rangle)^{n+\|S\|}} d\sigma(\xi),$$

де $d\sigma(\xi)$ — нормована поверхнева міра на $\mathbb{S}_n$, тобто, $\sigma(\mathbb{S}_n(\mathbf{0},1))=1$. Покладемо $z=z^0$:

$$F^{(K+S)}(z^0)=\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{(\overline{\xi-z^0})^S F^{(K)}(\xi)}{|\xi-z^0|^{2(n+\|S\|)-1}}d\sigma(\xi) \tag{3.79}$$

Тоді застосовуючи (3.72), маємо

$$\begin{gathered}
|F^{(K+S)}(z^0)|\le\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{|(\xi-z^0)^S||F^{(K)}(\xi)|}{|\xi-z^0|^{2(n+\|S\|)-1}}d\sigma(\xi)\le\\
\le\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{2(n+\|S\|)-1}\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{|(\xi-z^0)^S||F^{(K)}(\xi)|K!\mathbf{L}^K(\xi)}{K!\mathbf{L}^K(\xi)}d\sigma(\xi)\le\\
\le p_0\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{2(n+\|S\|)-1}\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\times\\
\times\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{|(\xi-z^0)^S||F^{(K^0)}(z^0)|K!\mathbf{L}^K(z)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}d\sigma(\xi)\le\\
\le p_0\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{2(n+\|S\|)-1}\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|K!\prod_{j=1}^n\lambda_{2,j}^{n_0}(r)\mathbf{L}^K(z^0)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\times\\
\times\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}|(\xi-z^0)^S|d\sigma(\xi)\le\\
\le p_0\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|K!\prod_{j=1}^n\lambda_{2,j}^{n_0}(r)\mathbf{L}^K(z^0)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\times\\
\times\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{|(\xi-z^0)^S|}{(r/\ell(z^0))^{\|S\|}}d\sigma\left(\frac{\xi-z^0}{r/\ell(z^0)}\right)\le\\
\le p_0\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|K!\prod_{j=1}^n\lambda_{2,j}^{n_0}(r)\mathbf{L}^K(z^0)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\times\\
\times\int_{\mathbb{S}^n(\mathbf{0},1)}|\xi^S|d\sigma(\xi)=p_0\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\times\\
\times\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|K!\prod_{j=1}^n\lambda_{2,j}^{n_0}(r)\mathbf{L}^K(z^0)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\frac{\Gamma(n)\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{\Gamma(n+\|S\|/2)}.
\end{gathered}\tag{3.80}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{gathered}
\frac{|F^{(K+S)}(z^0)|}{(K+S)!\mathbf{L}^{K+S}(z^0)}\le\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\times\\
\times p_0\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\frac{K!\prod_{j=1}^n\lambda_{2,j}^{n_0}(r)(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)\mathbf{L}^S(z^0)}\le\\
\le\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}p_0\frac{K!\prod_{j=1}^n\lambda_{2,j}^{n_0}(r)(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}}
\end{gathered}\tag{3.81}$$

Виберемо $r>1$. Позаяк $\|K\|\le n_0$, величина $p_0K!\prod_{j=1}^n\lambda_{2,j}^{n_0}(R)$ не залежить від

S. Тому існує n_1 таке, що

$$\frac{p_0 K! \prod_{j=1}^n \lambda_{2,j}^{n_0}(r)}{r^{\|S\|}} \le 1 \text{ для всіх } \|S\| \ge n_1. \tag{3.82}$$

Асимптотичне поводження виразу $\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}}$ набагато складніше при $\|S\| \to +\infty$. Використовуючи формулу Стірлінга $\Gamma(m+1) = \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m (1 + \frac{\theta}{12m})$, де $\theta = \theta(m) \in [0,1]$, маємо таке

$$\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}} \le \frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{S!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi(n+\|S\|-1)}(\frac{n+\|S\|-1}{e})^{n+\|S\|-1}\prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi s_j/2}(\frac{s_j}{2e})^{s_j/2}}{\prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi s_j}(\frac{s_j}{e})^{s_j}\sqrt{2\pi(n+\|S\|/2-1)}(\frac{n+\|S\|/2-1}{e})^{n+\|S\|/2-1}r^{\|S\|}} \times$$
$$\times \frac{(1+\frac{\theta(n+\|S\|-1)}{12(n+\|S\|-1)})\prod_{j=1}^n(1+\frac{\theta(s_j/2)}{12s_j/2})}{(1+\frac{\theta(n+\|S\|/2)}{12(n+\|S\|/2)})\prod_{j=1}^n(1+\frac{\theta(s_j)}{12s_j})}.$$

Позначивши

$$\Theta(S) = \frac{(1+\frac{\theta(n+\|S\|-1)}{12(n+\|S\|-1)})\prod_{j=1}^n(1+\frac{\theta(s_j/2)}{12s_j/2})}{(1+\frac{\theta(n+\|S\|/2)}{12(n+\|S\|/2)})\prod_{j=1}^n(1+\frac{\theta(s_j)}{12s_j})}$$

та спростивши попередню нерівність, виводимо

$$\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}} \le$$
$$\le \Theta(S)\frac{2^{(1-n)/2}e^{-\|S\|/2}}{r^{\|S\|}}\left(\frac{n-1+\|S\|}{n-1+\|S\|/2}\right)^{n-1+\|S\|/2} \cdot (n-1+\|S\|)^{\|S\|/2}\times$$
$$\times \prod_{j=1}^n (\frac{e}{2s_j})^{s_j/2} \le \Theta(S)\frac{2^{(n-1+\|S\|)/2}e^{-\|S\|/2}}{r^{\|S\|}}(n-1+\|S\|)^{\|S\|/2}\prod_{j=1}^n(\frac{e}{2s_j})^{s_j/2} =$$
$$= \Theta(S)\frac{2^{(n-1)/2}}{r^{\|S\|}}\left(1+\frac{n-1}{\|S\|}\right)^{\frac{\|S\|}{n-1}\cdot\frac{n-1}{2}} \cdot \|S\|^{\|S\|/2}\prod_{j=1}^n \frac{1}{s_j^{s_j/2}} \le$$
$$\le \Theta(S)(2e)^{(n-1)/2}\left(\frac{1}{r}\prod_{j=1}^n\left(\frac{\|S\|}{s_j}\right)^{\frac{s_j}{2\|S\|}}\right)^{\|S\|} \text{ при } s_j \to \infty. \tag{3.83}$$

Для зручності позначимо $x_j = \frac{\|S\|}{s_j} \in (1,+\infty)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$. Очевидно, що $\Theta(S) \to 1$ при $s_j \to \infty$, $j \in \{1,\dots,n\}$. Нескладне дослідження на умовний екстремум дає

$$\max\left\{H(x)\colon \text{ за умови } \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} = 1,\ x_j \in (1,+\infty)\right\} \le \sqrt{n},$$

де $H(x) := \prod_{j=1}^n x_j^{1/(2x_j)}$.

Виберемо $r \geq \sqrt{n}$. Для таких r маємо $\frac{1}{r}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\|S\|}{s_j}\right)^{\frac{s_j}{2\|S\|}} \leq 1$. Беручи до уваги (3.83), це означає, що існує n_2, для якого

$$\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^{n}\Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}} \leq 1 \tag{3.84}$$

для всіх $\|S\| \geq n_2$.

Асимптотичне поводження правої частини (3.81) в інших випадках S досліджується подібно. Зважаючи на (3.81), (3.82) та (3.84), отримуємо, що для всіх $\|S\| \geq n_1 + n_2$

$$\frac{|F^{(K+S)}(z^0)|}{(K+S)!\mathbf{L}^{S+K}(z^0)} \leq \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

Останнє означає, що для всіх $J \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^{J}(z^0)} \leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^{K}(z^0)} : \|K\| \leq n_0+n_1+n_2\right\}$$

де n_0, n_1, n_2 — незалежні від z_0. Тому функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних з $N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^n) \leq n_0+n_1+n_2$. □

Якщо ми накладемо додаткові обмеження на функцію $\mathbf{L}$, то з теореми 3.13 випливає таке твердження.

Твердження 3.3. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q'(\mathbb{B}^n)$ *буде така, що* $\sup_{z\in\mathbb{B}^n}\frac{\mathcal{L}(z)}{\ell(z)} = C < \infty$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли якщо для кожного* $r \in (0,\beta]$ *існують* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ *та* $p_0 > 0$ *такі, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *знайдеться* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \leq n_0$, *для якого виконується нерівність* (3.72).

Доведення. Достатність доведено в теоремі 3.13. А для необхідності вибираємо $q = q(R) = [2(N+1)Cr\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^{N+1}] + 1$ та замінюємо $\mathcal{L}(z^0)$ на $\ell(z^0)$ в доведенні теореми 3.13. Більше ніяких змін. □

Твердження 3.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q'(\mathbb{B}^n)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, аби для кожного* $r \in (0,\beta]$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \geq 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\exists K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \leq n_0$, *та*

$$\max\left\{|F^{(K^0)}(z)| : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\} \leq p|F^{(K^0)}(z^0)| \tag{3.85}$$

і досить, аби для кожного $r \in (0,\beta]$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \geq 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\forall j \in \{1,\ldots,n\}$ $\exists K_j^0 = (0,\ldots,0,\underbrace{k_j^0}_{j\text{-те місце}},0,\ldots,0)$ *таке, що* $k_j^0 \leq n_0$ *та*

$$\max\left\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\} \leq p|F^{(K_j^0)}(z^0)| \ \forall j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{3.86}$$

Доведення. З доведення теореми 3.13 випливає справедливість нерівності (3.71) для деякого K^0. Тому маємо

$$\frac{p_0}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \geq \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z)} : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!}\frac{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\mathbf{L}^{K^0}(z)} : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\} \geq$$

$$\geq \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!}\frac{\prod_{j=1}^n\left(\lambda_{2,j}(r)\right)^{-n_0}}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\}.$$

З цієї нерівності отримуємо

$$\frac{p_0\prod_{j=1}^n(\lambda_{2,j}(r))^{n_0}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \geq \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\}. \tag{3.87}$$

З (3.87) одержуємо нерівність (3.85) з $p = p_0\prod_{j=1}^n\left(\lambda_{2,j}(r)\right)^{n_0}$. Необхідність умови (3.85) доведена.

Доведемо достатність (3.86). Припустимо, що для деяких $r \in (0, \beta]$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ та $p > 1$ і всіх $\forall z_0 \in \mathbb{B}^n$ існує $K_j^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_j^0 \leq n_0$, для якого виконується (3.86). Зважаючи на (3.79), запишемо формулу Коші в такому вигляді $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\forall S \in \mathbb{Z}_+^n$

$$F^{(K_j^0+S)}(z^0) = \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\int_{\mathbb{S}^n(z^0, r/\ell(z^0))}\frac{(\overline{\xi - z^0})^S F^{(K_j^0)}(\xi)}{|\xi - z^0|^{2(n+\|S\|)-1}}d\sigma(\xi)$$

Як і в (3.80), отримуємо

$$|F^{(K_j^0+S)}(z^0)| \leq$$

$$\leq \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{2(n+\|S\|)-1}\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{S}_n(z^0, r/\ell(z^0))}|(\overline{\xi - z^0})^S|d\sigma(\xi) \leq \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\times$$

$$\times\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{S}^n(z^0, r/\ell(z^0))}\frac{|(\xi - z^0)^S|}{(r/\ell(z^0))^{\|S\|}}d\sigma\left(\frac{\xi - z^0}{r/\ell(z^0)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{S}^n(\mathbf{0},1)}|\xi^S|d\sigma(\xi) = \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\times$$

$$\times\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\}\frac{\Gamma(n)\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{\Gamma(n+\|S\|/2)}$$

Покладемо $r=\beta$ та скористаємося (3.86)

$$|F^{(K_j^0+S)}(z^0)| \le \left(\frac{\ell(z^0)}{\beta}\right)^{\|S\|} \frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{\Gamma(n+\|S\|/2)}\times$$
$$\times \max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{B}^n\left[z^0,\beta/\ell(z^0)\right]\} \le$$
$$\le p\left(\frac{\ell(z^0)}{\beta}\right)^{\|S\|} \frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{\Gamma(n+\|S\|/2)}|F^{(K_j^0)}(z^0)|. \tag{3.88}$$

З (3.88) випливає, що для всіх $j\in\{1,\dots,n\}$ та $k_j^0\le n_0$

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0+S}(z^0)(K_j^0+S)!} \le p\frac{K_j^0!(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{\beta^{\|S\|}(K_j^0+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)}\frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!} \le$$
$$\le pn_0!\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{\beta^{\|S\|}S!\Gamma(n+\|S\|/2)}\frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!}$$

З огляду на (3.84) знайдеться n_1 таке, що для всіх $\|S\|\ge n_1$

$$\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{\beta^{\|S\|}S!\Gamma(n+\|S\|/2)} \le 1.$$

Очевидно, що існує n_2 таке, що для всіх $\|S\|\ge n_2$ $\frac{pn_0!}{\beta^{\|S\|}}\le 1$. Відповідно, отримуємо

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0+S}(z^0)(K_j^0+S)!} \le \frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!} \text{ для всіх } \|S\|\ge n_1+n_2$$

тобто, $N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^n)\le n_0+n_1+n_2$. □

Позначимо $\widetilde{\mathbf{L}}(z)=(\widetilde{l}_1(z),\dots,\widetilde{l}_n(z))$. Запис $\mathbf{L}\asymp\widetilde{\mathbf{L}}$ означає, що знайдуться $\Theta_1=(\theta_{1,j},\dots,\theta_{1,n})\in\mathbb{R}_+^n$, $\Theta_2=(\theta_{2,j},\dots,\theta_{2,n})\in\mathbb{R}_+^n$ такі, що $\forall z\in\mathbb{B}^n$ $\theta_{1,j}\widetilde{l}_j(z)\le l_j(z)\le\theta_{2,j}\widetilde{l}_j(z)$ для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$.

Лема 3.8. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q'(\mathbb{B}^n)$, $\mathbf{L}\asymp\widetilde{\mathbf{L}}$, $\sup_{z\in\mathbb{B}^n}\frac{\mathcal{L}(z)}{\ell(z)}=C<\infty$, $\min_{1\le j\le n}\theta_{1,j}>\frac{\sqrt{n}}{\beta}$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\widetilde{\mathbf{L}}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Легко довести, що при $\mathbf{L}\in Q'(\mathbb{B}^n)$ та $\mathbf{L}\asymp\widetilde{\mathbf{L}}$ функція $\widetilde{\mathbf{L}}\in Q'(\mathbb{B}^n)$ з $\beta'=\beta\min_{1\le j\le n}\theta_{1,j}>\sqrt{n}$ замість β в (3.1).

Нехай $N(F,\widetilde{\mathbf{L}},\mathbb{B}^n)=\widetilde{n}_0<+\infty$. Тоді за теоремою 3.13 для кожного $\widetilde{r}\in(0,\beta)$ існує $\widetilde{p}\ge 1$ таке, що для всіх $z^0\in\mathbb{B}^n$ та деякого K^0 при $\|K^0\|\le\widetilde{n}_0$, виконується нерівність (3.71) з $\widetilde{\mathbf{L}}$ та $\widetilde{r}$ замість $\mathbf{L}$ та r. Звідси,

$$\frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{\Theta_2^{K^0}|F^{(K^0)}(z^0)|}{\Theta_2^{K^0}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \ge \frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\Theta_2^{K^0}\widetilde{\mathbf{L}}^{K^0}(z^0)} \ge$$
$$\ge \frac{1}{\Theta_2^{K^0}}\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{\mathbf{L}}^K(z)}:\|K\|\le\widetilde{n}_0, z\in\mathbb{B}^n\left[z^0,\widetilde{r}/\widetilde{\mathcal{L}}(z)\right]\right\} \ge$$

$$\geq \frac{1}{\Theta_2^{K^0}} \max\left\{\frac{\Theta_1^K|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, \min_{1\leq j\leq n} \Theta_{1,j}\widetilde{r}/\mathcal{L}(z)\right]\right\} \geq$$

$$\geq \frac{\min\limits_{0\leq\|K\|\leq n_0}\{\Theta_1^K\}}{\Theta_2^{K^0}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, \min_{1\leq j\leq n} \Theta_{1,j}\widetilde{r}/\mathcal{L}(z)\right]\right\} \geq$$

$$\geq \frac{\min\limits_{0\leq\|K\|\leq n_0}\{\Theta_1^K\}}{\Theta_2^{K^0}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, \frac{\widetilde{r}\min_{1\leq j\leq n}\Theta_{1,j}}{C\ell(z)}\right]\right\}.$$

З огляду на теорему 3.13 висновуємо, що функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Твердження 3.5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q'(\mathbb{B}^n)$, *функція* F *— аналітична в* $\mathbb{B}^n$. *Якщо існують* $r \in (0, \beta]$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 1$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *та деякого* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$ *при* $\|K^0\| \leq n_0$ *правильна нерівність* (3.72), *то функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. З доведення достатності в теоремі 3.13 при $r = \beta$ випливає, що $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^n) < +\infty$.

Нехай $\mathbf{L}^*(z) = \frac{r_0\mathbf{L}(z)}{r}$, $\ell^*(z) = \frac{r_0\ell(z)}{r}$, $r^0 = \beta$ та r — довільний радіус, для якого (3.72) — правильна. У загальному випадку зі справедливості (3.72) для F та $\mathbf{L}$ при $r < \beta$ отримуємо

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!(\mathbf{L}^*(z))^K} : \|K\| \leq n_0, z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r_0/\ell^*(z^0)\right]\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!(r_0\mathbf{L}(z)/r)^K} : \|K\| \leq n_0, z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r_0/(r_0\ell(z^0)/r)\right]\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq n_0, z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\} \leq$$

$$\leq \frac{p_0}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{\beta^{\|K^0\|}p_0}{r^{\|K^0\|}K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{(r_0\mathbf{L}(z)/r)^{K^0}} = \frac{p_0\beta^{n_0}}{r^{n_0}}\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!(\mathbf{L}^*(z))^{K^0}}.$$

тобто, (3.71) виконується для F, $\mathbf{L}^*$ та $r_0 = \beta$. Як і вище, зараз застосуємо теорему 3.13 до функції $F(z)$ та $\mathbf{L}^*(z) = r_0\mathbf{L}(z)/r$. Як висновок, отримуємо, що F — обмеженого $\mathbf{L}^*$-індексу за сукупністю змінних. Тоді за лемою 3.3 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

3.12 Обмеженість L-індексу за сукупністю змінних аналітичних розв'язків систем рівнянь з частинними похідними

Використовуючи лему 3.7 та теорему 3.5, отримаємо такий наслідок.

Наслідок 3.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$, $F(z)$ *— аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція,* G *— обмежена область в* $\mathbb{B}^n$ *така, що* $d = \inf_{z\in\overline{G}}(1 - |z|) > 0$. *Функція* $F(z)$ *— обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $C > 0$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n \setminus G$ *справджується* (3.33).

У одновимірному випадку цей наслідок отриманий в [219]. Його було запропоновано використовувати для дослідження обмеженості індексу цілих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків [67].

Позначимо $a^+ = \max\{a, 0\}$, $u_j(t) = u_j(t, R, \Theta) = l_j(\frac{tR}{r^*}e^{i\Theta})$, де $a \in \mathbb{R}$, $t \in [0, r^*]$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $r^* = \max_{1\le j\le n} r_j \neq 0$, тобто, $\frac{t}{r^*}|R| < 1$.

Нехай $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ — додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною r_k, $k \in \{1, \dots, n\}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$. Через $W(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}$ таких, що

$$r^*(-(u_j(t, R, \Theta))'_{t=r^*})^+/(r_j l_j^2(Re^{i\Theta})) \to 0 \tag{3.89}$$

рівномірно для всіх $\Theta \in [0, 2\pi]^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$, при $|R| \to 1 - 0$, $W := W^1$.

Легко перевірити, що умову (3.89) можна замінити сильнішою умовою $\frac{\langle z, \nabla l_j(z)\rangle}{|z_j| l_j^2(z)} \to 0$ при $|z| \to 1 - 0$.

Лема 3.9. *Якщо* $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, *де кожне* $l_j(z) : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ *неперервна функція, що задовольняє* (3.1), *то*

$$\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau \to +\infty \text{ при } |R| \to 1 - 0.$$

Доведення. Використовуючи (3.1), отримуємо

$$\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^{r^*} \sum_{j=1}^n \frac{r_j}{r^*} l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right) d\tau \ge \int_0^{r^*} \sum_{j=1}^n \frac{r_j}{r^*} \frac{\beta}{1 - \frac{\tau}{r^*}|R|} d\tau =$$

$$= -\sum_{j=1}^n \frac{r_j\beta}{R} \ln(1 - |R|) \to +\infty \text{ при } |R| \to 1 - 0.$$

□

Лема 3.10. *Нехай* $\mathbf{L} \in W(\mathbb{B}^n)$, F *— аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція. Якщо існують* $R' \in \mathbb{R}^n_+$, $|R'| < 1$, *та* $p \in \mathbb{Z}_+$, $c > 0$ *такі, що для будь-якого* $z \in \mathbb{B}^n \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R')$ *справджується* (3.33), *то*

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau} \le c. \tag{3.90}$$

Доведення. Нехай $R \in \mathbb{R}^n_+$ є таким, що $1 > |R| > |R'|$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$. Позначимо $\alpha_j = \frac{r_j}{r^*}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ та $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Розглянемо функцію

$$g(t) = \max\left\{\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} : \ \|S\| \le p\right\},$$

де $Ate^{i\Theta} = (\alpha_1 te^{i\theta_1}, \dots, \alpha_n te^{i\theta_n})$ та $|At| > |R'|$.

Позаяк функція $\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}$ — неперервно диференційовна за дійсним параметром $t \in [0, r^*]$ зовні нульової множини функції $|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|$, функція $g(t)$

також неперервно диференційовна на $[0, r^*]$ за винятком, можливо, зліченної множини точок.

Використовуючи нерівність $\frac{d}{dr}|g(r)| \le |g'(r)|$, яка виконується скрізь, крім точок $r = t$, в яких $g(t) = 0$, встановлюємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\right) = \frac{1}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\frac{d}{dt}|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|+$$
$$+|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|\frac{d}{dt}\frac{1}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \le \frac{1}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\left|\sum_{j=1}^n F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})\alpha_j e^{i\theta_j}\right| -$$
$$-\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^n \frac{s_j u_j'(t)}{l_j(Ate^{i\Theta})} \le \sum_{j=1}^n \frac{|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})}\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})+$$
$$+\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})} \tag{3.91}$$

Для абсолютно неперервних функцій h_1, h_2, …, h_k та $h(x) := \max\{h_j(z) : 1 \le j \le k\}$, $h'(x) \le \max\{h_j'(x) : 1 \le j \le k\}$, $x \in [a, b]$ (див. [206, лема 4.1, с. 81]). Функція g — абсолютно неперервна, тому з (3.33) та (3.91) випливає, що

$$g'(t) \le \max\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\right) : \|S\| \le p\right\} \le$$
$$\le \max_{\|S\|\le p}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})} + \frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\} \le$$
$$\le g(t)\left(\max\{1, c\}\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta}) + \max_{\|S\|\le p}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}\right) =$$
$$= g(t)(\beta(t) + \gamma(t)),$$

де $\beta(t) = \max\{1, c\}\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})$, $\gamma(t) = \max_{\|S\|\le p}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}$. Отже, $\frac{d}{dt}\ln g(t) \le \beta(t) + \gamma(t)$ і $g(t) \le g(t_0)\exp\int_{t_0}^t(\beta(\tau) + \gamma(\tau))d\tau$, де t_0 вибране так, аби $g(t_0) \ne 0$. Умова $\mathbf{L} \in W(\mathbb{B}^n)$ гарантує таке

$$\frac{\gamma(t)}{\beta(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}}{c\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})} \le p\sum_{j=1}^n \frac{(-u_j'(t))^+}{\alpha_j l_j^2(Ate^{i\Theta})} \le p\varepsilon,$$

де $\varepsilon = \varepsilon(R) \to 0$ рівномірно для всіх $\Theta \in [0, 2\pi]^n$, $t = r^*$ при $|R| \to 1 - 0$

Але $|F(Ate^{i\Theta})| \le g(t) \le g(t_0)\exp\int_{t_0}^t(\beta(\tau) + \gamma(\tau))d\tau$ та $r^*A = R$. Тоді покладемо $t = r^*$ та отримаємо

$$\ln\max\{|F(z)\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\} = \ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}|F(Re^{i\Theta})| \le \ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} g(r^*) \le$$
$$\le \ln g(t_0) + \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_{t_0}^{r^*}(\beta(\tau) + \gamma(\tau))d\tau \le$$

$$\leq \ln g(t_0) + \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_{t_0}^{r^*} c \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j(A\tau e^{i\Theta})\,(1+p\varepsilon)\,d\tau =$$

$$= \ln g(t_0) + \max\{1,c\} \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_{t_0}^{r^*} \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{r^*} l_j\left(\frac{\tau}{r^*} R e^{i\Theta}\right)(1+p\varepsilon)\,d\tau.$$

Звідси отримуємо (3.90). □

Лема 3.11. *Нехай* $\mathbf{L} \in W(\mathbb{B}^n)$, F *— аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція. Якщо існують* $R' \in \mathbb{R}^n_+$, $|R'| < 1$ *та* $p \in \mathbb{Z}_+$, $c > 0$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R')$ *виконується нерівність*

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} :\ \|J\| = p+1\right\} \leq c \cdot \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} :\ \|K\| \leq p\right\}, \tag{3.92}$$

то

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R e^{i\Theta})\rangle d\tau} \leq (p+1)\max\{1,c\}. \tag{3.93}$$

Доведення. Доведення леми 3.11 подібне до доведення леми 3.10.

Нехай $R \in \mathbb{R}^n_+$ таке, що $1 > |R| > |R'|$, $\Theta \in [0,2\pi]^n$. Позначимо $\alpha_j = \frac{r_j}{r^*}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ та $A = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Розглянемо функцію

$$g(t) = \max\left\{\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} :\ \|S\| \leq p\right\},$$

де $At = (\alpha_1 t,\ldots,\alpha_n t)$, $Ate^{i\Theta} = (\alpha_1 te^{i\theta_1},\ldots,\alpha_n te^{i\theta_n})$ та $|At| > |R'|$.

Як і вище, функція $\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}$ неперервно диференційовна за дійсним параметром $t \in [0,r^*]$ зовні нульової множини функції $|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|$, тому функція $g(t)$ неперервно диференційовна на $[0,r^*]$ за винятком, можливо, зліченнної множини точок.

Отже, використовуючи нерівність $\frac{d}{dr}|g(r)| \leq |g'(r)|$, яка справедлива скрізь за винятком точок $r = t$, в яких $g(t) = 0$, виводимо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\right) = \frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\frac{d}{dt}|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})| +$$

$$+|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|\frac{d}{dt}\frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \leq \frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\left|\sum_{j=1}^{n} F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})\alpha_j e^{i\theta_j}\right| -$$

$$-\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^{n}\frac{s_j u_j'(t)}{l_j(Ate^{i\Theta})} \leq \sum_{j=1}^{n}\frac{|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{(S+\mathbf{1}_j)!\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})}\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta}) +$$

$$+\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^{n}\frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})} \tag{3.94}$$

Для абсолютно неперервних функцій h_1, h_2, $\ldots$, h_k та $h(x) := \max\{h_j(z) : 1 \le j \le k\}$, $h'(x) \le \max\{h'_j(x) : 1 \le j \le k\}$, $x \in [a,b]$ (див. [206, лема 4.1, с. 81]). Функція g — абсолютно неперервна. Тому з (3.33) та (3.94) одержуємо

$$g'(t) \le \max\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\right) : \|S\| \le N\right\} \le$$

$$\le \max_{\|S\|\le p}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{(S+\mathbf{1}_j)!\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})} + \frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\frac{s_j(-u'_j(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\} \le$$

$$\le g(t)\left(\max\{1,c\}\max_{\|S\|\le p}\left\{\sum_{j=1}^n \alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})\right\} + \right.$$

$$\left. + \max_{\|S\|\le p}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u'_j(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}\right) = g(t)(\beta(t)+\gamma(t)),$$

де $\beta(t) = \max\{1,c\}\max_{\|S\|\le p}\left\{\sum_{j=1}^n \alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})\right\}$, $\gamma(t) = \max_{\|S\|\le p}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u'_j(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}$. Отже, $\frac{d}{dt}\ln g(t) \le \beta(t)+\gamma(t)$ і

$$g(t) \le g(t_0)\exp\int_{t_0}^t (\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau,$$

де t_0 вибрана так, що $g(t_0) \ne 0$. Позначимо $\widetilde{\beta}(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})$. Оскільки $\mathbf{L} \in W(\mathbb{B}^n)$, для деякого S^*, $\|S^*\| \le p$ та $\widetilde{S}$, $\|\widetilde{S}\| \le p$, маємо

$$\frac{\gamma(t)}{\widetilde{\beta}(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{s_j^*(-u'_j(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}}{\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})} \le \sum_{j=1}^n s_j^*\frac{(-u'_j(t))^+}{\alpha_j l_j^2(Ate^{i\Theta})} \le p\sum_{j=1}^n \frac{(-u'_j(t))^+}{\alpha_j l_j^2(Ate^{i\Theta})} \le p\varepsilon \text{ та}$$

$$\frac{\beta(t)}{\widetilde{\beta}(t)} = \frac{\max\{1,c\}\sum_{j=1}^n \alpha_j(\tilde{s}_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})}{\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})} =$$

$$= \max\{1,c\} + \max\{1,c\}\frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j\tilde{s}_j l_j(Ate^{i\Theta})}{\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})} \le$$

$$\le \max\{1,c\} + \max\{1,c\}\sum_{j=1}^n \tilde{s}_j \le \max\{1,c\}(1+p),$$

де $\varepsilon = \varepsilon(R) \to 0$ рівномірно для всіх $\Theta \in [0,2\pi]^n$, $t = r^*$ при $|R| \to 1-0$

Але $|F(Ate^{i\Theta})| \le g(t) \le g(t_0)\exp\int_{t_0}^t(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau$ та $r^*A = R$. Покладемо $t = r^*$ та отримаємо

$$\ln\max\{|F(z)\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\} = \ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}|F(Re^{i\Theta})| \le \ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} g(r^*) \le$$

$$\le \ln g(t_0) + \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_{t_0}^{r^*}(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau \le$$

$$\le \ln g(t_0) + \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_{t_0}^{r^*}\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(A\tau e^{i\Theta})\left(\max\{1,c\}(1+p)+p\varepsilon\right)d\tau =$$

$$= \ln g(t_0) + \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_{t_0}^{r^*} \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{r^*} l_j \left(\frac{\tau}{r^*} Re^{i\Theta}\right) (\max\{1,c\}(1+p)+p\varepsilon)\, d\tau.$$

Звідси випливає (3.93). □

Використовуючи доведені леми, сформулюємо та доведемо твердження, які дають оцінки зростання аналітичних розв'язків такої системи рівнянь з частинними похідними:

$$G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z) + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} G_{S_j}(z)F^{(S_j)}(z) = H_j(z),\ j\in\{1,\dots,n\} \qquad (3.95)$$

$p_j \in \mathbb{N}$, $S_j \in \mathbb{Z}_+^n$, H_j та G_{S_j} — аналітичні функції в $\mathbb{B}^n$. Позначимо $QW(\mathbb{B}^n) = Q(\mathbb{B}^n)\cap W(\mathbb{B}^n)$. Відповідно, $QW(\mathbb{D}) = Q(\mathbb{D})\cap W(\mathbb{D})$.

Кажемо, що неоднорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду (3.95) належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{L})$, якщо $\mathbf{L}\in QW(\mathbb{B}^n)$, для всіх $z\in\mathbb{B}^n$ та для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$ аналітичні в $\mathbb{B}^n$ функції H_j та G_{S_j} задовольняють такі умови:
1) для кожного $\|S_j\|\le p_j-1$ та для будь-якого $M\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|M\|\le 1+\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$, $\left|G_{S_j}^{(M)}(z)\right| \mathbf{L}^{S_j-M}(z) \le B_{S_j,M} l_j^{p_j}(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$, $\left|G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z)\right| \le B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\mathbf{L}^M(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$,
2) для кожного $I\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|I\| = 1+\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$, $\left|H_j^{(I)}(z)\right| \le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)|H_j(z)|$,
3) $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)\ne 0$,
де $B_{S_j,M}$, $D_{I,j}$, $B_{p_j\mathbf{1}_j,M}$ — додатні сталі, $\mathbf{H}(z) = (H_1(z),\dots,H_n(z))$, $\mathbf{G}(z)$ — матриця, утворена з коефіцієнтів $G_{S_J}(z)$ системи (3.95).

Однорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду (3.95) належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{0},\mathbf{L})$, якщо умова 1) виконується для $M\in\mathbb{Z}_+^n$ таких, що $\|M\|\le\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$ та $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)\ne 0$. Умова 2) не потрібна для однорідних систем.

Замість $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)\ne 0$ можна вимагати виконання умов 1) та 2) для всіх $z\in\mathbb{B}^n\setminus\mathbb{D}^n(\mathbf{0},R')$. Це здійсненно з огляду на лему 3.7. Якщо для деякого $M\in\mathbb{Z}_+^n$ $G_{S_j}^{(M)}(z)\equiv 0$ або $H_j^{(M)}(z)\equiv 0$, то вважаємо $B_{S_j,M}=0$ або $D_{M,j}=0$ відповідно.

Теорема 3.14. *Якщо неоднорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду* (3.95) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{L})$ *та аналітична функція* $F(z)$ *у* $\mathbb{B}^n$ *задовольняє* (3.95), *то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau} \le \max\{1,c\}, \qquad (3.96)$$

де c *визначене в* (3.101).

Доведення. Зважаючи на те, що функція $F(z)$ задовольняє систему (3.95), обчислимо частинні похідні $I \in \mathbb{Z}_+^n$ в кожному рівнянні системи

$$\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z) F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z) + \sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} G_{S_j}^{(M)}(z) F^{(S_j+I-M)}(z) = H_j^{(I)}(z), \tag{3.97}$$

де $C_I^M = \frac{i_1!\ldots i_n!}{m_1!(i_1-m_1)!\ldots m_n!(i_n-m_n)!}$ та $\|I\| = 1 - p_j + \sum_{k=1}^n p_k = 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$. Використовуючи другу умову цієї теореми, отримуємо

$$|H_j^{(I)}(z)| \le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)|H_j(z)| \le$$

$$\le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)\left(|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)||F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)| + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} |G_{S_j}(z)||F^{(S_j)}(z)|\right). \tag{3.98}$$

З рівняння (3.97) отримуємо

$$F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z) = \frac{1}{G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)}\left(H_j^{(I)}(z) - \sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z) F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} G_{S_j}^{(M)}(z) F^{(S_j+I-M)}(z)\right). \tag{3.99}$$

З (3.99) з врахування першої умови випливає

$$\left|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)\right| =$$

$$= \frac{1}{|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|}\Big(D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)\Big(|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)||F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)| + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} |G_{S_j}(z)||F^{(S_j)}(z)|\Big) +$$

$$+ \sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M |G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z)||F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)| + \sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} |G_{S_j}^{(M)}(z)||F^{(S_j+I-M)}(z)|\Big) \le$$

$$\le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)\left(|F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)| + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,\mathbf{0}} L^{p_j\mathbf{1}_j-S_j}(z)|F^{(S_j)}(z)|\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\mathbf{L}^M(z)|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)| +$$

$$+ \sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j-S_j+M}(z)|F^{(S_j+I-M)}(z)| \tag{3.100}$$

Поділивши цю нерівність на $L^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)$, дістанемо, що для кожного $\|I\| = 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$ та $j \in \{1,\ldots,n\}$

$$\frac{\left|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)\right|}{\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)} \le D_{I,j}\left(\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)|}{\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j}(z)} + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,\mathbf{0}}\frac{|F^{(S_j)}(z)|}{\mathbf{L}^{S_j}(z)}\right) +$$

$$+\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|}{\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I-M}(z)}+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\frac{|F^{(S_j+I-M)}(z)|}{\mathbf{L}^{S_j+I-M}(z)}\le$$

$$\le\left(D_{I,j}(1+\sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,\mathbf{0}})+\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\right)\times$$

$$\times\max\left\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)}:\|S\|\le\sum_{j=1}^n p_j\right\}.$$

Очевидно, що $\|p_j\mathbf{1}_j+I\|=1+\sum_{j=1}^n p_j$. А це означає

$$\max\left\{\frac{\left|F^{(K)}(z)\right|}{\mathbf{L}^K(z)}:\|K\|=1+\sum_{j=1}^n p_j\right\}\le\max\{1,c\}\max\left\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)}:\|S\|\le\sum_{j=1}^n p_j\right\},$$

де

$$c=\max_{\substack{\|I\|=1-p_j+\sum_{k=1}^n p_k,\\ j\in\{1,\dots,n\}}}\left(D_{I,j}(1+\sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,\mathbf{0}})+\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\right). \tag{3.101}$$

для всіх $z\in\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{D}^n(\mathbf{0},R')$.

Отже, за лемою 3.10 є справедливою оцінка (3.96), а за наслідком 3.4 аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Якщо система (3.95) — однорідна ($H_j(z)\equiv 0$), то попередня теорема спроститься.

Теорема 3.15. *Якщо однорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду* (3.95) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{0},\mathbf{L})$ *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *є розв'язком системи, то функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0}\frac{\ln\max\{|F(z)|:\,z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau}\le\max\{1,c\}, \tag{3.102}$$

де c *визначена в* (3.101) *при* $D_{I,j}=0$ *та* $\|I\|=-p_j+\sum_{k=1}^n p_k$ *замість* $\|I\|=1-p_j+\sum_{k=1}^n p_k$.

Доведення. Якщо $H_j(z)\equiv 0$, то з (3.99) випливає

$$F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)=\frac{1}{G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)}\left(-\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M G^{(M)}_{p_j\mathbf{1}_j}(z)F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)-\right.$$

$$-\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} G_{S_j}^{(M)}(z)F^{(S_j+I-M)}(z)\Bigg). \tag{3.103}$$

Звідси отримуємо

$$|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)| \le \frac{1}{|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M|G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z)||F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|+$$

$$+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} |G_{S_j}^{(M)}(z)||F^{(S_j+I-M)}(z)|\Bigg).$$

Поділивши отриману нерівність на $\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)$ та використовуючи припущення теореми стосовно функцій G_{S_j}, виводимо таке

$$\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)|}{\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)} \le$$

$$\le \frac{1}{|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\mathbf{L}^M(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)||F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|+$$

$$+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j-S_j+M}(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)||F^{(S_j+I-M)}(z)|\Bigg)=$$

$$=\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|}{\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I-M}(z)}+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\frac{|F^{(S_j+I-M)}(z)|}{\mathbf{L}^{S_j+I-M}(z)}\le$$

$$\le\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\Bigg)\times$$

$$\times\max\left\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)} : \|S\|\le -1+\sum_{j=1}^n p_j\right\}.$$

Зрозуміло, що $\|p_j\mathbf{1}_j+I\|=\sum_{j=1}^n p_j$. Тому

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \|K\|=\sum_{j=1}^n p_j\right\}\le\max\{1,c\}\max\left\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)} : \|S\|\le -1+\sum_{j=1}^n p_j\right\},$$

де

$$c=\max_{\substack{\|I\|=-p_j+\sum_{k=1}^n p_k,\\ j\in\{1,\dots,n\}}}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\Bigg)$$

для всіх $z \in \mathbb{B}^n \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R')$.

Отже, всі умови наслідку 3.4 виконуються. Звідси функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних та за лемою 3.10 справедлива оцінка (3.102). $\square$

Крім того, за допомогою наслідку 3.4 та леми 3.11 можна доповнити дві попередні теореми 3.14 та 3.15 твердженнями, що містять оцінки $\max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}$, які інколи можуть виявитися кращими, ніж (3.102) та (3.96). Два наступні твердження мають доведення подібні до теорем 3.14 та 3.15.

Твердження 3.6. *Якщо неоднорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду* (3.95) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{L})$ *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* $F(z)$ *задовольняє* (3.95), *то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R e^{i\Theta})\rangle d\tau} \le \max\{1, c\}, \tag{3.104}$$

де c' *визначене в* (3.105).

Доведення. Як і в доведенні теореми 3.14, поділивши (3.100) на $(p_j\mathbf{1}_j + I)!L^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)$, отримаємо, що для кожного $\|I\| = 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n p_k$ та $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)} \le$$

$$\le D_{I,j}\left(\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j}(z)} + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,\mathbf{0}} \frac{|F^{(S_j)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j-S_j}(z)}\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\neq\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M} \frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I-M}(z)} +$$

$$+ \sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M} \frac{|F^{(S_j+I-M)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!\mathbf{L}^{S_j+I-M}(z)} \le$$

$$\le D_{I,j}\left(\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j}(z)} + B\sum_{\|S_j\|\le p_j-1} \frac{|F^{(S_j)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j-S_j}(z)}\right) +$$

$$+B\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\neq\mathbf{0}}} C_I^M \frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I-M}(z)} + B\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} \frac{|F^{(S_j+I-M)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!\mathbf{L}^{S_j+I-M}(z)} \le$$

$$\le \left(D_{I,j}\left(\frac{p_j!}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!} + B\sum_{\|S_j\|\le p_j-1} \frac{(p_j\mathbf{1}_j - S_j)!}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!}\right) +\right.$$

$$\left. +B\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\neq\mathbf{0}}} C_I^M \frac{(p_j\mathbf{1}_j + I - M)!|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!} + B\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} \frac{(S_j + I - M)!}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!}\right) \times$$

$$\times \max\left\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)} : \|S\| \le \sum_{j=1}^n p_j\right\}.$$

де $B = \max\{B_{S_j,M}, B_{p_j\mathbf{1}_j,M} \colon j \in \{1,\dots,n\}, \mathbf{0} \le M \le I, \|I\| = 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k.\}$

Очевидно, $\|p_j\mathbf{1}_j + I\| = 1 + \sum_{j=1}^n p_j$. Для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R')$ отримуємо

$$\max\left\{\frac{\left|F^{(K)}(z)\right|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| = 1 + \sum_{j=1}^n p_j\right\} \le \max\{1, c'\} \max\left\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}^S(z)} : \|S\| \le \sum_{j=1}^n p_j\right\},$$

де

$$c' = \max_{\substack{\|I\|=1-p_j+\sum_{k=1}^n p_k,\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \left(D_{I,j}\left(\frac{p_j!}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!} + B\sum_{\|S_j\|\le p_j-1}\frac{(p_j\mathbf{1}_j - S_j)!}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!}\right) + \right.$$

$$\left. + B\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M \frac{(p_j\mathbf{1}_j + I - M)!|}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!} + B\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1}\frac{(S_j + I - M)!}{(p_j\mathbf{1}_j + I)!}\right). \quad (3.105)$$

З огляду на наслідок 3.4 аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. А за лемою 3.11 є правильною оцінка (3.104). □

За аналогією до доведень теорем 3.15 та 3.6 можна довести таке твердження.

Твердження 3.7. *Якщо однорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду* (3.95) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{0},\mathbf{L})$ *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *є розв'язком цієї системи, то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln\max\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R e^{i\Theta})\rangle d\tau} \le \max\{1, c'\},$$

де c' *визначене в* (3.105) *при* $D_{I,j} = 0$ *та* $\|I\| = -p_j + \sum_{k=1}^n p_k$ *замість* $\|I\| = 1 - p_j + \sum_{k=1}^n p_k$.

Зауваження 3.3. *Отримані твердження в цьому підрозділі також нові для аналітичних в крузі функцій. Клас таких функцій обмеженого* l*-індексу розглядався в [206, 283].*

3.13 Оцінка максимуму модуля на кістяку полікруга

Нехай Z_F — нульова множина аналітичної в $\mathbb{B}^n$ функції F. Позначимо

$$G_R(F) = \bigcup_{z^0\in Z_F} \mathbb{D}^n\left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right).$$

Теорема 3.16. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$, F *— аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція. Якщо* $\exists R \in \mathbb{R}^n_+$ *з* $r_j \in (0, \frac{\beta}{2\sqrt{n}})$, $\exists p_2 \geq 1$ $\exists \Theta \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{0} < \Theta < R$, $\exists R' > \mathbf{0}$ *(*$R' = \mathbf{0}$ *для* $Z_F = \emptyset$*) таке, що* $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\exists R^0 = R^0(z^0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta \leq R^0 \leq R$, *для якого*

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \cap G_{R'}(F)\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}) l_j(z^0)} \tag{3.106}$$

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\}, \tag{3.107}$$

то функція F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (*meas *— лебегова міра на кістяку полікруга).*

Доведення. Позначимо $\boldsymbol{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$. За теоремою 3.3 покажемо, що існує $\exists p_1 > 0$ $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta} - R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_1 \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}.$$

Позначимо $l_j^* = \max\left\{l_j(z) : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\}$, $\rho_{j,0} = \frac{r_j}{l_j(z^0)}$, $\rho_{j,k} = \rho_{j,0} + \frac{k \cdot \theta_j}{l_j^*}$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Будуть правильними такі оцінки

$$\frac{\theta_j}{l_j^*} < \frac{r_j}{l_j^*} \leq \frac{r_j}{l_j(z^0)} = \frac{\beta/\sqrt{n}}{l_j(z^0)} - \frac{\beta/\sqrt{n} - r_j}{l_j(z^0)}.$$

Тому знайдеться $S^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in \mathbb{N}^n$, незалежне від z^0, таке, що

$$\rho_{j,m_j-1} < \frac{\beta/\sqrt{n} - r_j}{l_j(z^0)} < \rho_{j,m_j} \leq \frac{\beta/\sqrt{n}}{l_j(z^0)}$$

для деякого $m_j = m_j(z^0) \leq s_j^*$, бо $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. Справді

$$\left(\frac{\beta/\sqrt{n}}{l_j(z^0)} - \rho_{j,0}\right) / \frac{\theta_j}{l_j^*} = \left(\beta/\sqrt{n} - r_j\right) \frac{l_j^*}{\theta_j l_j(z^0)} =$$
$$= \frac{\beta/\sqrt{n} - r_j}{\theta_j} \max\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} \leq \frac{\beta/\sqrt{n} - r_j}{\theta_j} \lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}).$$

Отже, $s_j^* = \left[\frac{\beta/\sqrt{n} - r_j}{\theta_j} \lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})\right]$, де $[x]$ — ціла частина $x \in \mathbb{R}$.

Нехай $M_0 = (m_1, \ldots, m_n)$ та τ_K^{**} — така точка в $\mathbb{B}^n$, що

$$|F(\tau_K^{**})| = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_K)\},$$

де $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $\mathcal{R}_K = (\rho_{1,k_1}, \ldots, \rho_{n,k_n})$ та $\tau_{j,K}^*$ — точка перетину в $\mathbb{C}$ відрізка $[z_j^0, \tau_{j,K}^{**}]$ з колом $|z_j - z_j^0| = \rho_{j,k_j-1}$. Побудуємо послідовність полікругів $\mathbb{D}^n(z^0, \mathcal{R}_K)$ з $K \leq M_0$, $\mathcal{R}_{\mathbf{0}} = R/\mathbf{L}(z^0) = (\rho_{1,0}, \ldots, \rho_{n,0})$ та $\Theta/\mathbf{L}(z^0) = (\theta_1/l_1^*, \ldots, \theta_n/l_n^*)$ (див. рисунки 1 та 2 на с. 263).

Позначимо $\alpha_K^{(j)} = (\tau_{1,K}^{**}, \ldots, \tau_{j-1,K}^{**}, \tau_{j,K}^{*}, \tau_{j+1,K}^{**}, \ldots, \tau_{n,K}^{**})$. Звідси для кожного $r_j > \theta_j$ та $K \le S^* : |\tau_{j,K}^{*} - \tau_{j,K}^{**}| = \frac{\theta_j}{l_j^*} \le \frac{r_j}{l_j(\alpha_K^{(j)})}$. Отже, для деякого $R^0 = R^0(\alpha_K^{(j)}) \in \mathbb{R}_+^n$, $\Theta \le R^0 \le R$, встановимо

$$|F(\tau_K^{**})| \le \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right)\right\} \le$$

$$\le p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\} \le$$

$$\le p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \setminus G_{R'}(F), z \in \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}]\right\} \le$$

$$\le p_2 \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j})\}. \tag{3.108}$$

Для того, щоб вивести (3.108), ми неявно скористаємося тим, що

$$\left(\mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \setminus G_{R'}(F)\right) \cap \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}] \ne \emptyset. \tag{3.109}$$

Умова (3.106) гарантує (3.109). Переконаємося в цьому, знайшовши нижню оцінку n-вимірної лебегової міри множини $\mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \cap \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}]$ та показавши, що ця міра не менша, ніж права частина нерівності (3.106).

Множина $\mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \cap \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}]$ є декартовим добутком таких дуг на колах: для кожного $m \in \{1, \ldots, n\}$, $m \ne j$ (див. рисунок 3 на с.264)

$$\left\{z_m \in \mathbb{C}\colon\ |z_m - \tau_{m,K}^{**}| = \frac{r_m^0}{l_m(\alpha_K^{(j)})}\right\} \bigcap \left\{z_m \in \mathbb{C}\colon |z_m - z_m^0| \le \rho_{m,k_m}\right\}$$

та для $m = j$ (див. рисунок 4 на с.264)

$$\left\{z_j \in \mathbb{C}\colon\ |z_j - \tau_{j,K}^{*}| = \frac{r_j^0}{l_j(\alpha_K^{(j)})}\right\} \bigcap \left\{z_j \in \mathbb{C}\colon |z_j - z_j^0| \le \rho_{j,k_j-1}\right\}.$$

Легко довести, що довжина дуги дорівнює

$$\frac{2r_m^0}{l_m(\alpha_K^{(j)})} \cdot \arccos \frac{r_m^0}{2l_m(\alpha_K^{(j)})\rho_{m,k_m}} \text{ для } m \ne j, \tag{3.110}$$

$$\frac{2r_j^0}{l_j(\alpha_K^{(j)})} \cdot \arccos \frac{r_j^0}{2l_j(\alpha_K^{(j)})\rho_{j,k_j-1}} \text{ для } m = j. \tag{3.111}$$

Але для $m \ne j$ $\frac{r_m^0}{l_m(\alpha_K^{(j)})} \le \rho_{m,k_m}$ та $\frac{r_j^0}{l_j(\alpha_K^{(j)})} \le \rho_{j,k_j-1}$, тому аргумент під арккосинусом у (3.110) та (3.111) не перевищує $\frac{1}{2}$. Це означає, що довжина дуги не менша, ніж

$$\frac{2r_m^0}{l_m(\alpha_K^{(j)})} \arccos \frac{1}{2} \ge \frac{2\theta_m \pi}{3l_m(z^0)\lambda_{2,m}(2(R+\mathbf{1}))} \text{ для кожного } m \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

бо $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. Відповідно, міра такої множини $\mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \cap \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}]$ на кістяку полікруга завжди не менша, ніж $\prod_{m=1}^n \frac{2\theta_m \pi}{3l_m(z^0)\lambda_{2,m}(2(R+\mathbf{1}))}$. Припускаючи строгу нерівність у (3.106), отримуємо, що (3.109) виконується.

Застосувавши m_j раз за відповідною змінною z_j нерівність (3.108), отримаємо

$$\max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta} - R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \le \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0})\} \le$$
$$\le p_2 \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0-\mathbf{1}_n})\} \le p_2^{m_n} \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0-m_n\mathbf{1}_n})\} \le$$
$$\le \ldots \le p_2^{m_n+1} \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0-m_n\mathbf{1}_n-\mathbf{1}_{n-1}})\} \le$$
$$\le p_2^{m_n+m_{n-1}} \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0-m_n\mathbf{1}_n-m_{n-1}\mathbf{1}_{n-1}})\} \le \ldots$$
$$\le p_2^{\|M_0\|} \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{\mathbf{0}})\} \le$$
$$\le p_2^{\|S^*\|} \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}.$$

За теоремою 3.3 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Позначимо $c(z', r) = \{z \in \mathbb{D}\colon |z - z'| = \frac{r}{l(z')}\}$. Для $n = 1$ з теореми 3.16 дістаємо такий наслідок.

Наслідок 3.5. *Нехай $l \in Q(\mathbb{D})$, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — аналітична функція. Якщо $\exists r \in (0, \beta/2)$, $\exists r' \ge 0$, $\exists p_2 \ge 1$ $\exists \theta \in (0, r)$ такі, що $\forall z^0 \in \mathbb{D}$ $\exists r^0 = r^0(z^0) \in [\theta; r]$, $\operatorname{meas}\left\{c(z^0, r^0) \cap G_{R'}(F)\right\} < \frac{2\pi\theta}{3l(z^0)\lambda_2(2r+2)}$ і*

$$\max\left\{|f(z)|\colon z \in c(z^0, r^0)\right\} \le p_2 \min\left\{|f(z)|\colon z \in c(z^0, r^0) \setminus G_{r'}(f)\right\}, \qquad (3.112)$$

то функція f має обмежений l-індекс (тут meas *означає міру Лебега на колі).*

У деякому розумінні цей наслідок є також новим для аналітичних функцій від однієї змінної, бо коло $c(z^0, r^0)$ може містити нулі функції f. Тим часом, у відповідних теоремах з [149, 206] коло $c(z^0, r^0)$ вибране так, що $f(z) \ne 0$ для всіх $z \in c(z^0, r^0)$.

3.14 Поводження частинних логарифмічних похідних

Теорема 3.17. *Нехай $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. Якщо аналітична функція $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ задовольняє такі умови:*

1) *для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, існує $p_1 = p_1(R) > 0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_R(F)$ та для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\frac{1}{|F(z)|}\left|\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \le p_1 l_j(z), \qquad (3.113)$$

2) *для будь-яких $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, та $R' \ge \mathbf{0}$ існує $p_2 = p_2(R, R') \ge 1$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$, що $T^n(z^0, \frac{R}{\mathbb{L}(z^0)}) \setminus G_{R'}(F) = \bigcup_i C_i \ne \emptyset$, де*

C_i — зв'язні неперетинні множини, виконується принаймні одна з таких умов а) $\max\limits_i \min\limits_{z\in C_i} |F(z)| \le p_2 \min\limits_i \min\limits_{z\in C_i} |F(z)|$, *або б)* $\max\limits_i \max\limits_{z\in C_i} |F(z)| \le p_2 \min\limits_i \max\limits_{z\in C_i} |F(z)|$, *або в)* $|F(z^*)| = \max_i \max_{z\in C_i} |F(z)|$, $|F(z^{**})| = \min_i \min_{z\in C_i} |F(z)|$, *і* z^*, z^{**} *належать до однієї і тієї самої множини* C_{i_0}

3) для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, *існують* $\Theta, R' \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < \theta_j < \frac{2r_j}{2+3\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})}$, *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n$

$$meas\,\{G_{R'}(F) \cap \mathbb{D}^n\,[z, R/\mathbf{L}(z)]\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j-\theta_j)}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}) l_j^2(z)}, \tag{3.114}$$

то F має обмежений $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (тут meas — це* $2n$*-вимірна лебегова міра).*

Доведення. Нехай $z^0 \in \mathbb{B}^n$. З огляду на теорему 3.16, нам потрібно довести, що

$$\text{meas}\left\{\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \cap G_{R'}(F)\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}) l_j(z^0)}$$

для деякого $R^0 = R^0(z^0)$.

Нехай $dS = ds_1 \cdot \ldots \cdot ds_n$, $S = (s_1, \ldots, s_n)$, ω_z — об'ємна міра в $\mathbb{R}^{2n}$. Зрозуміло, що (див. [177, с. 75-76])

$$\int_{\mathbb{D}^n[z^0,R]} u(z)d\omega_z = \int_0^{r_1} \ldots \int_0^{r_n} s_1 \ldots s_n \Big(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} u(z^0 + Se^{i\Theta}) d\theta_1 \ldots d\theta_n\Big) ds_1 \ldots ds_n =$$
$$= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} u(z^0 + Se^{i\Theta}) d(s_1\theta_1) \ldots d(s_n\theta_n)\right) dS,$$

де u — плюрісубгармонійна функція. Візьмемо $u(z) = \chi_F(z)$ — характеристична функція множини $G_{R'}(F)$ для функції F, а замість R беремо $R/\mathbf{L}(z^0)$. Звідси,

$$\text{meas}\left\{\mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right] \cap G_{R'}(F)\right\} = \int_{\mathbb{D}^n[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)]} \chi_F(z) d\omega_z =$$
$$= \int_{\mathbf{0}}^{R/\mathbf{L}(z^0)} \int_{\mathbb{T}^n(z^0, S/\mathbf{L}(z^0))} \chi_F(z) d\mu_z dS = \int_{\mathbf{0}}^{R/\mathbf{L}(z^0)} \text{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0, S) \cap G_{R'}(F)\right\} dS, \tag{3.115}$$

де μ_z — міра на кістяку полікруга в $\mathbb{C}^n$. Поєднуючи (3.114) та (3.115), отримуємо

$$\int_{\mathbf{0}}^{R/\mathbf{L}(z^0)} \text{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0, S) \cap G_{R'}(F)\right\} dS = \text{meas}\left\{\mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right] \cap G_{R'}(F)\right\} <$$
$$< \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j-\theta_j)}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}) l_j^2(z^0)}. \tag{3.116}$$

Крім того, маємо

$$\int_{\mathbf{0}}^{\Theta/\mathbf{L}(z^0)} \operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0,S)\cap G_{R'}(F)\right\} dS = \operatorname{meas}\left\{\mathbb{D}^n\left[z^0,\frac{\Theta}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\cap G_{R'}(F)\right\}\leq$$
$$\leq \pi^n\prod_{j=1}^n\frac{\theta_j^2}{l_j^2(z^0)}.$$

Відповідно, така різниця є додатною

$$\left(\frac{2\pi}{3}\right)^n\prod_{j=1}^n\frac{\theta_j(r_j-\theta_j)}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})l_j^2(z^0)}-\int_0^{\Theta/\mathbf{L}(z^0)}\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0,S)\cap G_{R'}(F)\right\} dS\geq$$
$$\geq\left(\frac{2\pi}{3}\right)^n\prod_{j=1}^n\frac{\theta_j(r_j-\theta_j)}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})l_j^2(z^0)}-\pi^n\prod_{j=1}^n\frac{\theta_j^2}{l_j^2(z^0)}=$$
$$=\pi^n\prod_{j=1}^n\frac{\theta_j}{l_j^2(z^0)}\frac{2r_j-\theta_j(2+3\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}))}{3\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})}>0$$

бо $\theta_j<\frac{2r_j}{2+3\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})}$. З (3.116) випливає, що

$$\int_{\Theta/\mathbf{L}(z^0)}^{R/\mathbf{L}(z^0)}\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0,S)\cap G_{R'}(F)\right\} dS<\left(\frac{2\pi}{3}\right)^n\prod_{j=1}^n\frac{\theta_j(r_j-\theta_j)}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})l_j^2(z^0)}-$$
$$-\int_0^{\Theta/\mathbf{L}(z^0)}\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0,S)\cap G_{R'}(F)\right\} dS\leq\left(\frac{2\pi}{3}\right)^n\prod_{j=1}^n\frac{\theta_j(r_j-\theta_j)}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})l_j^2(z^0)}. \qquad (3.117)$$

За теоремою про середнє значення існує $R^0=R^0(z^0)$ при $r_j^0\in[\theta_j,r_j]$ таке, що

$$\int_{\Theta/\mathbf{L}(z^0)}^{R/\mathbf{L}(z^0)}\operatorname{meas}\{\mathbb{T}^n(z^0,S)\cap G_{R'}(F)\}dS=\operatorname{meas}\{\mathbb{T}^n(z^0,R^0/\mathbf{L}(z^0))\cap G_{R'}(F)\}\prod_{j=1}^n\frac{r_j-\theta_j}{l_j(z^0)}.$$

З огляду на (3.117) отримуємо бажану нерівність

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0,R^0/\mathbf{L}(z^0))\cap G_{R'}(F)\right\}<\left(\frac{2\pi}{3}\right)^n\prod_{j=1}^n\frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})l_j(z^0)}.$$

Зрозуміло, що для кожної точки $z^0\in\mathbb{B}^n$ маємо $\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\setminus Z_F=\bigcup_i C_i'$, де C_i' — зв'язні неперетинні множини, $C_i'\supset C_i$ та C_i визначене в умові 2). Нехай $z^*\in\mathbb{T}^n(z^0,R/\mathbf{L}(z^0))$ буде такою, що $|F(z^*)|=\max\left\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}$. Тоді знайдеться i_0, що $z^*\in C_{i_0}'$. Нехай $z^{**}\in C_{i_0}\subset C_{i_0}'$ буде такою, що $|F(z^{**})|=\min_{z\in C_{i_0}}|F(z)|$. Точки z^* та z^{**} з'єднаємо кусково-аналітичною кривою $z=z(t)=(z_1(t),\ldots,z_n(t))$, $t\in[0;1]$. Криву обираємо так, щоби $\int_0^1|z_j'(t)|dt\leq\frac{2\pi r_j}{l_j(z^0)}$. Тоді, інтегруючи від z^* до z^{**}, отримуємо

$$\ln\left|\frac{F(z^*)}{F(z^{**})}\right|\leq\left|\ln\frac{F(z^*)}{F(z^{**})}\right|=\left|\int_{z^{**}}^{z^*}d\ln F(z)\right|=\left|\int_{z^{**}}^{z^*}\sum_{j=1}^n\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}dz_j\right|\leq$$

$$\leq \left| \int_{z^{**}}^{z^*} \sum_{j=1}^{n} p_1 l_j(z)|dz_j| \right| \leq \sum_{j=1}^{n} p_1 l_j(z^0)\lambda_{2,j}(R)\frac{2\pi r_j}{l_j(z_0)} = 2p_1\pi \sum_{j=1}^{n} r_j\lambda_{2,j}(R).$$

Звідси

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} = |F(z^*)| \leq \exp\{2p_1\pi \sum_{j=1}^{n} r_j\lambda_{2,j}(R)\}|F(z^{**})| =$$

$$= \exp\{2p_1\pi \sum_{j=1}^{n} r_j\lambda_{2,j}(R)\} \min_{z\in C_{i_0}} |F(z)| \leq \exp\{2p_1\pi \sum_{j=1}^{n} r_j\lambda_{2,j}(R)\}p_2 \min_{i} \min_{z\in C_i} |F(z)| =$$

$$= \exp\{2p_1\pi \sum_{j=1}^{n} r_j\lambda_{2,j}(R)\}p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\}.$$

За теоремою 3.16 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. $\square$

Висновки до розділу 3

Основні здобутки третього розділу:

1) встановлено аналог теореми Хеймана для аналітичних в одиничній кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних;
2) шляхом застосування встановленого аналога теореми Хеймана знайдено достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних аналітичних в одиничній кулі розв'язків систем лінійних рівнянь з частинними похідними, а також оцінки їхнього зростання;
3) отримано достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних у вигляді оцінок максимуму модуля частинних похідних аналітичної функцій за кожною змінною на кістяку полікруга через значення модуля відповідної похідної в центрі полікруга, максимуму модуля через мінімум модуля на кістяку полікруга зовні деякої виняткової множини;
4) встановлені достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних через обмеження на частинні логарифмічні похідні та розподіл точок нульової множини для аналітичної в одиничній кулі;
5) використано підхід до знаходження критеріїв обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних через вичерпання кулі в багатовимірному комплексному просторі кулями менших радіусів, що дозволило встановити повністю нові твердження, які описують поводження аналітичних в одиничній кулі функцій на сфері, а не на кістяку полікруга.

Позаяк ми використовуємо ідею заміни квантора загальності на квантор існування, деякі твердження мають одновимірні наслідки, що є новими для аналітичних в одиничному крузі функцій.

Результати третього розділу опубліковано в статтях [35, 58], у монографії [31], а також доповідалися на конференціях [19, 23].

РОЗДІЛ 4. АНАЛІТИЧНІ В ПОЛІКРУЗІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ

Розділ присвячений аналітичним у полікрузі функціям. Для них вводиться поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, де $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ — неперервна вектор-функція, та встановлюється цілий ряд критеріїв, що описують локальне поводження їхніх похідних. Крім того, вивчаються властивості розвинень у степеневий ряд функцій з цього класу та доводиться аналог теореми Хеймана.

Відомо статті С. Н. Строчик, М. М. Шеремети, В. О. Кушніра [149, 283], які присвячені l-індексу аналітичної функції в крузі та в довільній області $G \subset \mathbb{C}$. Їхні дослідження були підсумовані в монографії М. М. Шеремети [206], яка містить велику бібліографію на цю тематику. Проте вони розглядали аналітичні функції від однієї змінної. Також відома стаття про функції від декількох змінних обмеженого індексу [146], які аналітичні в деякій області $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$. У ній Дж. Ґ. Крішна та С. М. Шах ввели поняття аналітичної функції обмеженого індексу для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$ в області (непорожній зв'язній відкритій множині) $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Якщо $\mathbf{L}(z) \equiv (\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n})$ та $\Omega = \mathbb{C}^n$, то означення 1.1 (див. також [260, 264]) збігається з означенням Крішни - Шаха. Крім того, аналітична в області функція обмеженого індексу за Крішною - Шахом буде насправді цілою. Це випливає з необхідної умови обмеженості l-індексу для аналітичних в крузі радіуса R функцій ([206, теорема 3.3, с. 71]): $\int_0^r l(t)dt \to \infty$ при $r \to R$.

В іншому препринті [29] автори запропонували інше поняття аналітичної в області функції обмеженого індексу. Для дослідження властивостей аналітичних в одиничній кулі функцій обмеженого L-індексу за напрямком, вони скористалися функціями зрізки. Цей підхід добре пристосований для цілих функцій від декількох змінних.

Для аналітичних в одиничній кулі функцій знайшли необхідні та достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком, отримали достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком для аналітичних розв'язків рівнянь з частинними похідними та оцінили зростання таких функцій, тощо. Отже, цей метод зрізок добре пристосований як для цілих функцій у $\mathbb{C}^n$, так і для аналітичних у кулі функцій.

Крім кулі, важливим геометричним об'єктом в $\mathbb{C}^n$ є також полікруг. Вище зазначили, що аналітична функція обмеженого індексу за Крішною та Шахом є цілою. З іншої сторони, не існує гнучкого означення поняття обмеженого індексу для аналітичних функцій від багатьох змінних (зокрема, цю ваду відсутності певної гнучкості мають згадані підходи М. М. Шеремети, М. Т. Бордуляк, М.

Салмассі, Ф. Нурая, Р. Патерсона, Б. Ч. Чакраборти (див. [77–80, 167, 168, 170, 188, 260, 264]). Тому виникає необхідність *ввести та дослідити аналітичні в полікрузі функції обмеженого* **L**-*індексу за сукупністю змінних.*

4.1 Основні означення та позначення.

Нам потрібні деякі усталені позначення. Позначимо $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$, $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ використовуватимемо формально такі записи без порушення умов існування відповідних виразів $AB = (a_1b_1, \cdots, a_nb_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$, $A^B = a_1^{b_1}a_2^{b_2} \cdot \ldots a_n^{b_n}$. Запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; подібним чином визначається $A \leq B$. Для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ позначимо $\|K\| = k_1 + \cdots + k_n$, $K! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$.

Полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_j - z_j^0| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ позначимо через $\mathbb{D}^n(z^0, R)$, його кістяк $\{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_j - z_j^0| = r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, а замкнений полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_j - z_j^0| \leq r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{D}^n[z^0, R]$, $\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$. Для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ та частинних похідних функції $F(z) = F(z_1, \ldots, z_n)$ використовуємо позначення

$$F^{(K)}(z) = \frac{\partial^{\|K\|}F}{\partial z^K} = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}.$$

Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервні функції такі, що

$$(\forall z \in \mathbb{D}^n)\colon\ l_j(z) > \beta/(1 - |z_j|),\ j \in \{1, \ldots, n\},$$

а $\beta > 1$ — деяка стала, $\boldsymbol{\beta} := (\beta, \ldots, \beta) \in \mathbb{R}^n$. С. Н. Строчик, М. М. Шеремета, В. О. Кушнір [206, 283] накладали подібну умову для функції $l\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}_+$ та $l\colon G \to \mathbb{R}_+$, де G — довільна область у $\mathbb{C}$.

Аналітична функція $F\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією *обмеженого* **L**-*індексу (за сукупністю змінних),* якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ така, що для всіх $z \in \mathbb{D}^n$ та кожного $J \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon\ K \in \mathbb{Z}^n_+,\ \|K\| \leq n_0\right\}. \tag{4.1}$$

Найменше таке ціле число n_0 називається **L**-*індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{D}^n) = n_0$. Це аналог означення цілої функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних у $\mathbb{C}^n$.

Через $Q^n(\mathbb{D}^n)$ позначимо клас додатних неперервних вектор-функцій $\mathbf{L} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_+$, які задовольняють умову $(\forall r_j \in [0, \beta],\ j \in \{1, \ldots, n\})\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(R) \leq \lambda_{2,j}(R) < \infty$, де

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{D}^n} \inf\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)}\colon z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}, \tag{4.2}$$

$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0\in\mathbb{D}^n} \sup\left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} \colon z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\}. \tag{4.3}$$

Приклад 4.1. Функція $F(z) = \cos\{\frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)}\}$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних з $\mathbf{L}(z) = \left(\frac{1}{(1-|z_1|)^2(1-|z_2|)}, \frac{1}{(1-|z_1|)(1-|z_2|)^2}\right)$ та $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{D}^2) = 1$.

4.2 Поводження похідних аналітичних у полікрузі функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

Основна теорема цього підрозділу є базовою в теорії функцій обмеженого індексу. Вона необхідна для доведення інших критеріїв, які описують поводження максимуму модуля на крузі чи поводження логарифмічної похідної [30,206]. Позначимо $\mathcal{B} = (0, \beta]$ та $\mathcal{B}^n = (0, \beta] \times \ldots \times (0, \beta]$, де символ $\times$ означає декартів добуток. З люб'язного дозволу нашої співавторки Н. В. Петречко ми наводимо її теорему з [52], яка потрібна для наших подальших викладок.

Теорема I ([52], Петречко Н.В.). *Нехай $\mathbf{L} \in Q^n(\mathbb{D}^n)$. Аналітична в $\mathbb{D}^n$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли для кожного $R \in \mathcal{B}^n$ знайдуться $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{D}^n$ існує $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, та*

$$\max\left\{ \frac{1}{K!} \cdot \frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\} \le \frac{p_0}{K^0!} \cdot \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Нехай $\mathbf{L} \in Q^n(\mathbb{D}^n)$. Для того, щоб аналітична в $\mathbb{D}^n$ функція F була обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних необхідно, щоб для кожного $R \in \mathcal{B}^n$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{D}^n$ $\exists K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, та*

$$\max\left\{ |F^{(K^0)}(z)| \colon z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\} \le p|F^{(K^0)}(z^0)| \tag{4.5}$$

і досить, щоб для кожного $R \in \mathcal{B}^n$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{D}^n$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists K_j^0 = (0, \ldots, 0, \underbrace{k_j^0}_{j-\text{те місце}}, 0, \ldots, 0)$ таке, що $k_j^0 \le n_0$ та

$$\max\left\{ |F^{(K_j^0)}(z)| \colon z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\} \le p|F^{(K_j^0)}(z^0)|\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.6}$$

Доведення. Згідно з теоремою I нерівність (4.4) правильна для деякого K^0. Отже, маємо

$$\frac{p_0}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \ge \max\left\{ \frac{1}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z)} \colon z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\} =$$

$$= \max\left\{ \frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!}\frac{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\mathbf{L}^{K^0}(z)} \colon z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\} \ge$$

$$\geq \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!}\frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{2,j}(R))^{-n_0}}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\colon z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}.$$

Ця нерівність означає, що

$$\frac{p_0\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{2,j}(R))^{n_0}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\geq \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\colon z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}. \tag{4.7}$$

З (4.7) отримуємо нерівність (4.5) з $p=p_0\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{2,j}(R))^{n_0}$. Необхідність умови (4.5) доведено.

Доведемо достатність (4.6). Припустимо, що для кожного $R\in\mathcal{B}^n$ $\exists n_0\in\mathbb{Z}_+, p>1$ такі, що $\forall z_0\in\mathbb{D}^n$ та деякого $K_J^0\in\mathbb{Z}_+^n$ з $k_j^0\leq n_0$ виконується нерівність (4.6). Запишемо формулу Коші в такому вигляді $\forall z^0\in\mathbb{D}^n$ $\forall s\in\mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{F^{(K_J^0+S)}(z^0)}{S!}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^n(z^0,R/\mathbf{L}(z^0))}\frac{F^{(K_J^0)}(z)}{(z-z^0)^{S+\mathbf{1}}}dz.$$

Це означає, що

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{S!}\leq\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^n(z^0,R/\mathbf{L}(z^0))}\frac{|F^{(K_j^0)}(z)|}{|z-z^0|^{S+\mathbf{1}}}|dz|\leq$$

$$\leq\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n(z^0,R/\mathbf{L}(z^0))}\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{D}^n\}\frac{\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}}(z^0)}{R^{S+\mathbf{1}}}|dz|=$$

$$=\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{D}^n\}\frac{\mathbf{L}^S(z^0)}{R^S}.$$

Покладемо $R=\boldsymbol{\beta}$ та скористаємося (4.6). Тоді

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{S!}\leq\frac{\mathbf{L}^S(z^0)}{\beta^{\|S\|}}\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{D}^n\}\leq\frac{p\mathbf{L}^S(z^0)}{\beta^{\|S\|}}|F^{(K_j^0)}(z^0)|. \tag{4.8}$$

Підберемо $S\in\mathbb{Z}_+^n$ таке, аби $\|S\|\geq s_0$, де $\frac{p}{\beta^{s_0}}\leq 1$. З (4.8) випливає, що для всіх $j\in\{1,\ldots,n\}$ та $k_j^0\leq n_0$

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0+S}(z^0)(K_j^0+S)!}\leq\frac{p}{\beta^{\|S\|}}\frac{S!K_j^0!}{(S+K_j^0)!}\frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!}\leq\frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!}.$$

Отже, $N(F,\mathbf{L},\mathbb{D}^n)\leq n_0+s_0$. □

4.3 Аналог теореми Хеймана для аналітичних у бікрузі функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

Надалі для простоти розглянемо двовимірний комплексний простір $\mathbb{C}^2$. Це допоможе чітко виокремити основні методи дослідження. Нашою ціллю є довести нові аналоги критеріїв обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для аналітичних в одиничному бікрузі функцій.

Відмітимо, що відповідні теореми для цілих функцій обмеженого l-індексу та обмеженого L-індексу за напрямком використовуються для дослідження обмеженості індексу цілих розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, а також нескінченних добутків (див. бібліографію в [30, 206]). Тому, ці узагальнення для аналітичних у полікрузі функцій необхідні для вивчення обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних аналітичних розв'язків рівнянь з частинними похідними, їхніх систем та, наприклад, багатовимірних узагальнень добутків Бляшке.

Зокрема, доведемо аналог теореми Хеймана для аналітичних у бікрузі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (теорема 4.2).

Для аналітичної функції $F(z)$ покладемо $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^2(z^0, R)\}$. Тоді $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{D}^2[z^0, R]\}$, бо максимум модуля для аналітичної функції в замкненому бікрузі досягається на його кістяку.

З люб'язного дозволу нашої співавторки Петречко Н. В. наводимо її теорему з [26], яка потрібна нам для подальших викладок.

Теорема II ([26], Петречко Н. В.). *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$, F *— аналітична в* $\mathbb{D}^2$ *функція. Якщо існують* R', $R'' \in \mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{0} < R' < \mathbf{1} < R'' \le (\beta, \beta)$ *та* $p_1 \ge 1$ *такі, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{D}^2$ *справджується нерівність*

$$M\left(R''/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\right) \le p_1 M\left(R'/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\right). \tag{4.9}$$

то функція F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Теорема 4.2 є аналогом відомої теореми Хеймана, яка була ним встановлена для цілих функцій від однієї комплексної змінної [128].

Теорема 4.2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$. *Аналітична функція* F *в* $\mathbb{D}^2$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $c \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{D}^2$ *виконується нерівність*

$$\max\left\{\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z) l_2^{j_2}(z)}\colon j_1 + j_2 = p+1\right\} \le c \max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z) l_2^{k_2}(z)}\colon k_1 + k_2 \le p\right\}. \tag{4.10}$$

Доведення. Нехай $N = N(F, \mathbf{L}, \mathbb{D}^2) < +\infty$. Необхідність отримується відразу з означення обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних при $p = N$ та $c = ((N+1)!)^2$.

Доведемо достатність. Якщо $F \equiv 0$, то теорема — очевидна. Тепер припустимо, що $F \not\equiv 0$. Нехай виконується (4.10), $z^0 \in \mathbb{D}^2$, $z \in \mathbb{T}^2\left(z^0, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z^0)}\right)$. Для всіх $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2_+$, $j_1 + j_2 \le p+1$ маємо

$$\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z^0) l_2^{j_2}(z^0)} \le \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)| l_1^{j_1}(z) l_2^{j_2}(z)}{l_1^{j_1}(z^0) l_2^{j_2}(z^0) l_1^{j_1}(z) l_2^{j_2}(z)} \le \lambda_{1,1}^{j_1}(\beta)\lambda_{1,2}^{j_2}(\beta) \times$$

$$\times \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z) l_2^{j_2}(z)} \le \lambda_{1,1}^{j_1}(\beta)\lambda_{1,2}^{j_2}(\beta) c \max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z) l_2^{k_2}(z)}\colon k_1 + k_2 \le p\right\} =$$

$$= \lambda_{2,1}^{j_1}(\beta)\lambda_{2,2}^{j_2}(\beta)c\max\left\{\frac{l_1^{k_1}(z^0)l_2^{k_2}(z^0)|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z^0)l_2^{k_2}(z^0)l_1^{k_1}(z)l_2^{k_2}(z)}\colon k_1+k_2\le p\right\}\le$$

$$\le \lambda_{2,1}^{j_1}(\beta)\lambda_{2,2}^{j_2}(\beta)c\max\left\{\frac{1}{\lambda_{1,1}^{k_1}(\beta)\lambda_{1,2}^{k_2}(\beta)}\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z^0)l_2^{k_2}(z^0)}\colon k_1+k_2\le p\right\}\le$$

$$\le c\max\{\lambda_{2,1}^{j_1}(\beta)\lambda_{2,2}^{j_2}(\beta)\colon j_1+j_2\le p+1\}\max\left\{\frac{1}{\lambda_{1,1}^{k_1}(\beta)\lambda_{1,2}^{k_2}(\beta)}\colon k_1+k_2\le p\right\}\times$$

$$\times\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z^0)l_2^{k_2}(z^0)}\colon k_1+k_2\le p\right\}=B\cdot G(z),$$

де

$$B=c\max\{\lambda_{2,1}^{j_1}(\beta)\lambda_{2,2}^{j_2}(\beta)\colon j_1+j_2\le p+1\}\max\left\{\lambda_{1,1}^{-k_1}(\beta)\lambda_{1,2}^{-k_2}(\beta)\colon k_1+k_2\le p\right\},$$

$$G(z)=\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z^0)l_2^{k_2}(z^0)}\colon k_1+k_2\le p\right\}.$$

Виберемо $z^{(1)}=(z_1^{(1)},z_2^{(1)})\in\mathbb{T}^2\left(z^0,\mathbf{1}/(2\beta\mathbf{L}(z^0))\right)$ та $z^{(2)}=(z_1^{(2)},z_2^{(2)})\in\mathbb{T}^2\left(z^0,\boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(z^0)\right)$ так, що $F(z^{(1)})\ne 0$ та

$$|F(z^{(2)})|=\max\left\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^2\left(z^0,\boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(z^0)\right)\right\}\ne 0. \tag{4.11}$$

Ці точки існують, бо якби $F(z)\equiv 0$ на кістяку $\mathbb{T}^2\left(z^0,\mathbf{1}/(2\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}(z^0))\right)$ чи $\mathbb{T}^2\left(z^0,\boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(z^0)\right)$, то за теоремою єдиності $F\equiv 0$ в $\mathbb{D}^2$. З'єднаємо точки $z^{(1)}$ та $z^{(2)}$ площиною

$$\alpha\colon\quad z_2=k_2z_1+c_2,$$

$$\frac{z_2-z_2^{(1)}}{z_2^{(2)}-z_2^{(1)}}=\frac{z_1-z_1^{(1)}}{z_1^{(2)}-z_1^{(1)}},\quad k_2=\frac{z_2^{(2)}-z_2^{(1)}}{z_1^{(2)}-z_1^{(1)}},\quad c_2=\frac{z_2^{(1)}z_1^{(2)}-z_1^{(1)}z_2^{(2)}}{z_1^{(2)}-z_1^{(1)}}.$$

Нехай $\widetilde{G}(z_1)=G(z)|_\alpha$ — звуження функції G на α. Усі функції $F^{(k_1,k_2)}|_\alpha$ є аналітичними функціями змінної z_1 та $\widetilde{G}(z_1^{(1)})=G(z^{(1)})|_\alpha\ne 0$, бо $F(z^{(1)})\ne 0$. Ось чому нулі функції $\widetilde{G}(z_1)$ є ізольованими, як нулі функції від однієї змінної. Тому можна вибрати кусково-аналітичну криву γ на α :

$$z=z(t)=(z_1(t),k_2z_1(t)+c_2),t\in[0,1],$$

яка з'єднує точки $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ і таку, що $G(z(t))\ne 0$ та $\int_0^1|z_1'(t)|dt\le\frac{2\beta}{l_1(z^0)}$. Для побудови такої кривої з'єднаємо $z^{(1)}$ та $z^{(2)}$ прямою $z_1^*(t)=(z_1^{(2)}-z_1^{(1)})t+z_1^{(1)},t\in[0,1]$. Крива γ може проходити через точки z_1, в яких $\widetilde{G}(z_1)=0$. Число таких точок $m=m(z^{(1)},z^{(2)})$ є скінченним. Нехай $(z_{1,k}^*)$ — послідовність цих точок, упорядкована за зростанням значення $|z_1^{(1)}-z_{1,k}^*|$, $k\in\{1,2,...,m\}$. Виберемо $r<\min\limits_{1\le k\le m-1}\{|z_{1,k}^*-z_{1,k+1}^*|,|z_{1,1}^*-z_1^{(1)}|,|z_{1,m}^*-z_1^{(2)}|,\frac{2\beta^2-1}{2\pi\beta l_1(z^0)}\}$. Тепер побудуємо кола

з центром у точках $z^*_{1,k}$ та відповідними радіусами $r'_k < \frac{r}{2^k}$ такими, що $\widetilde{G}(z_1) \neq 0$ для всіх z_1 на колах. Це можливо, адже $F \not\equiv 0$. Кожне таке коло ділиться на два півкола прямою $z^*_1(t)$. Потрібна кусково-аналітична крива складається з дуг побудованих півкіл та відрізків прямої $z^*_1(t)$, яка з'єднує ці дуги послідовно між собою та з точками $z_1^{(1)}, z_1^{(2)}$. Довжина $z_1(t)$ в $\mathbb{C}$ менша, ніж $\frac{\beta}{l_1(z^0)} + \frac{1}{2\beta l_1(z^0)} + \pi r \leq \frac{2\beta}{l_1(z^0)}$. Тому

$$\int_0^1 |z_2'(t)|dt = |k_2| \int_0^1 |z_1'(t)|dt \leq \frac{\left|z_2^{(2)} - z_2^{(1)}\right|}{\left|z_1^{(2)} - z_1^{(1)}\right|} \cdot \frac{2\beta}{l_1(z^0)} \leq$$
$$\leq \frac{2\beta^2+1}{2\beta l_2(z^0)} \cdot \frac{2\beta l_1(z^0)}{2\beta^2-1} \cdot \frac{2\beta}{l_1(z^0)} = \frac{2\beta(2\beta^2+1)}{(2\beta^2-1)l_2(z^0)}.$$

Звідси,

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{2} l_i(z^0)|z_i'(t)|dt = \int_0^1 l_1(z^0)|z_1'(t)|dt + \int_0^1 l_2(z^0)|z_2'(t)|dt \leq$$
$$\leq l_1(z^0) \cdot \frac{2\beta}{l_1(z^0)} + l_2(z^0) \cdot \frac{2\beta(2\beta^2+1)}{(2\beta^2-1)l_2(z^0)} = \frac{8\beta^3}{2\beta^2-1} = S. \tag{4.12}$$

Позаяк функція $z = z(t)$ — кусково-аналітична на $[0,1]$, то для довільних $k \in \mathbb{Z}^2_+, j \in \mathbb{Z}^2_+, \|k\| \leq p, \|j\| \leq p, k \neq j$ або

$$\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1(t), z_2(t))|}{l_1^{k_1}(z^0) l_2^{k_2}(z^0)} \equiv \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1(t), z_2(t))|}{l_1^{j_1}(z^0) l_2^{j_2}(z^0)} \tag{4.13}$$

або рівність

$$\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1(t), z_2(t))|}{l_1^{k_1}(z^0) l_2^{k_2}(z^0)} = \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1(t), z_2(t))|}{l_1^{j_1}(z^0) l_2^{j_2}(z^0)} \tag{4.14}$$

виконується лише для скінченної множини точок $t_k \in [0;1]$. Тоді для функції $G(z(t))$ як максимуму таких виразів $\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1(t),z_2(t))|}{l_1^{j_1}(z^0) l_2^{j_2}(z^0)}$ по всіх $\|j\| \leq p$ можливі два випадки:

1. На деякому інтервалі аналітичності кривої γ функція $G(z(t))$ тотожно дорівнює одночасно декільком похідним, тобто, справджується (4.13). Це означає, що $G(z(t)) \equiv \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1(t),z_2(t))|}{l_1^{j_1}(z^0) l_2^{j_2}(z^0)}$ для деякого $\|j\| \leq p$. Звісно, функція $F^{(j_1,j_2)}(z_1(t), z_2(t))$ — аналітична. Тому $|F^{(j_1,j_2)}(z_1(t),z_2(t))|$ — неперервно диференційовна функція на інтервалі аналітичності, крім точок, в яких ця частинна похідна дорівнює нулю $|F^{(j_1,j_2)}(z_1(t), z_2(t))| = 0$. Проте таких точок не має, бо інакше $G(z(t)) = 0$. А це суперечить побудові кривої γ.

2. На деякому інтервалі аналітичності кривої γ функція $G(z(t))$ дорівнює одночасно декільком похідним у скінченному числі точок t_k, тобто, справджується (4.14). Тоді ці точки t_k ділять інтервал аналітичності на скінченне число проміжків, на кожному з яких $G(z(t))$ дорівнює одній з частинних похідних, тобто,

$G(z(t)) \equiv \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1(t),z_2(t))|}{l_1^{j_1}(z^0)l_2^{j_2}(z^0)}$ для деякого j, $\|j\| \le p$. Як і вище, в кожному з таких проміжків функції $|F^{(j_1,j_2)}(z_1(t),z_2(t))|$ та $G(z(t))$ неперервно диференційовна, крім точок t_k.

Зважаючи на (3.9) та використовуючи нерівність $\frac{d}{dx}|\varphi(x)| \le \left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|$, яка правильна для комплекснозначної функції від дійсного аргументу зовні зліченної множини точок, маємо

$$\frac{d}{dt}G(z(t)) \le \max\left\{\frac{1}{l_1^{j_1}(z^0)l_2^{j_2}(z^0)}\left|\frac{d}{dt}F^{(j_1,j_2)}(z_1(t),z_2(t))\right| : j_1+j_2 \le p\right\} \le$$

$$\le \max_{j_1+j_2\le p}\left\{\frac{|F^{(j_1+1,j_2)}(z_1(t),z_2(t))|\cdot|z_1'(t)|}{l_1^{j_1}(z^0)l_2^{j_2}(z^0)} + \frac{|F^{(j_1,j_2+1)}(z_1(t),z_2(t))|\cdot|z_2'(t)|}{l_1^{j_1}(z^0)l_2^{j_2}(z^0)}\right\} =$$

$$= \max_{j_1+j_2\le p}\left\{|F^{(j_1+1,j_2)}(z(t))|\frac{|z_1'(t)|l_1(z^0)}{l_1^{j_1+1}(z^0)l_2^{j_2}(z^0)} + |F^{(j_1,j_2+1)}(z(t))|\frac{|z_2'(t)|l_2(z^0)}{l_1^{j_1}(z^0)l_2^{j_2+1}(z^0)}\right\} \le$$

$$\le (|z_1'(t)|l_1(z^0) + |z_2'(t)|l_2(z^0))\max\left\{\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1(t),z_2(t))|}{l_1^{j_1}(z^0)l_2^{j_2}(z^0)} : j_1+j_2 \le p+1\right\} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{2} l_i(z^0)|z_i'(t)|\right) BG(z(t)).$$

Тому з (4.12) маємо

$$\left|\ln\frac{G(z^{(2)})}{G(z^{(1)})}\right| = \left|\int_0^1 \frac{1}{G(z(t))}\frac{d}{dt}G(z(t))\right| \le B\int_0^1 \sum_{i=1}^{2} l_i(z^0)|z_i'(t)|dt \le B\cdot S.$$

Використовуючи (4.11), виводимо

$$\max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2\left(z^0, \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(z^0)\right)\right\} = |F(z^{(2)})| \le G(z^{(2)}) \le G(z^{(1)})\exp(BS).$$

Позаяк $z^{(1)} \in \mathbb{T}^2(z^0, \mathbf{1}/(2\beta\mathbf{L}(z^0)))$ та нерівність Коші виконується

$$\frac{|F^{(j)}(z^{(1)})|}{l_1^{j_1}(z^0)l_2^{j_2}(z^0)} \le j_1!j_2!(2\beta)^{j_1+j_2}M\left(\mathbf{1}/(2\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}(z^0)), z^0, F\right)$$

для всіх $j \in \mathbb{Z}_+^2$. Отже, для $j_1+j_2 \le p$ маємо $G(z^{(1)}) \le (p!)^2(2\beta)^{2p}M(\mathbf{1}/(2\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}(z^0)), z^0, F)$ та

$$\max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2\left(z^0, \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(z^0)\right)\right\} \le$$
$$\le e^{BS}(p!)^2(2\beta)^{2p}\max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^2\left(z^0, \mathbf{1}/(2\boldsymbol{\beta}\mathbf{L}(z^0))\right)\right\}.$$

Звідси за теоремою II функція F — обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. □

Застосування доведеного аналога теореми Хеймана до дослідження аналітичних у бікрузі розв'язків систем рівнянь з частинними похідними можна знайти в [171].

4.4 Деяка властивість степеневого розвинення аналітичної в бікрузі функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних.

Вище були отримані критерії, що описують локальне поводження частинних похідних, дають оцінку максимуму модуля на кістяку бікруга та доведено аналог теореми Хеймана.

Насправді, нерівність (4.1) в означенні функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних містить коефіцієнти розвинення у степеневий ряд у точці $z = (z_1, z_2)$. В [264] розглядалися цілі функції та отримано твердження, яке описує поводження однорідних многочленів з коефіцієнтів степеневих розвинень для функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних у випадку $\mathbf{L}(z) = (l_1(z_1), \ldots, l_n(z_n))$. У розділі 6 узагальнено (твердження 6.6) цей результат для цілих функцій та $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $z \in \mathbb{C}^n$.

Це призводить до такого питання: *Чи існує аналог згаданого вище критерію для функцій, аналітичних у довільній полікруговій області?* Наша відповідь на це питання є ствердною. Зокрема, доведено теорему 4.3 для бікруга. Як достатні умови для цього класу функцій виведено аналог слабших достатніх умов обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (див. підрозділ 6.2.4).

Легко показати, що функція $L_1(z_1, z_2) = (\beta'/(1-|z_1|), \beta'/(1-|z_2|))$ належить до класу $Q(\mathbb{D}^2)$, де $\beta' > \beta$. Інші можливі способи побудови таких функцій розглянуті в [43]. Нехай $z^0 \in \mathbb{D}^2$. Розвинемо аналітичну в $\mathbb{D}^2$ функцію $F(z)$ у степеневий ряд, записаний у діагональній формі

$$F(z) = \sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} p_{k_1+k_2}((z_1 - z_1^0), (z_2 - z_2^0)) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1+j_2=k} b_{j_1,j_2}(z_1 - z_1^0)^{j_1}(z_2 - z_2^0)^{j_2}, \tag{4.15}$$

де p_k — однорідні многочлени степеня k, $b_{j_1,j_2} = \frac{F^{(j_1,j_2)}(z^0)}{j_1!j_2!}$. Многочлен $p_{k_0}, k_0 \in \mathbb{Z}_+$, називається головним у степеневому розвиненні (4.15) на $\mathbb{T}^2(z^0, R)$, якщо для кожного $z \in \mathbb{T}^2(z^0, R)$ правильна нерівність

$$|\sum_{k_1+k_2\neq k^0} p_{k_1+k_2}((z_1 - z_1^0), (z_2 - z_2^0))| \leq \frac{1}{2}\max\{|b_{j_1,j_2}|r_1^{j_1}r_2^{j_2} \colon j_1 + j_2 = k^0\}.$$

Теорема 4.3. *Нехай $\beta > 1$, $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$. Якщо існують $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \in (0; 1]$, $\eta \in (0; d)$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{D}^2$ та деякого $R = (r_1, r_2)$ при $r_j = r_j(d, z^0) \in (\eta, d)$, $j \in \{1, 2\}$, і певного $k^0 = k^0(d, z^0) \leq p$ многочлен p_{k^0} є головним у ряді (4.15) на $\mathbb{T}^2(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$, то аналітична в $\mathbb{D}^2$ функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Припустимо, що існують $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \leq 1$ та $\eta \in (0, d)$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{D}^2$ та деякого $R = (r_1, r_2)$ з $r_j = r_j(d, z^0) \in (\eta, d)$, $j \in \{1, 2\}$, і

$k_0 = k_0(d, z^0) \le p$ многочлен p_{k^0} є головним у ряді (4.15) на $\mathbb{T}^2(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$. Позначимо $r_0 = max\{r_1, r_2\}$. Тоді

$$\left| \sum_{j_1+j_2 \ne k_0} b_{j_1,j_2}(z_1 - z_1^0)^{j_1}(z_2 - z_2^0)^{j_2} \right| \le \frac{a_{k_0} r_0^{k_0}}{2}. \tag{4.16}$$

Використовуючи (4.16) та нерівність Коші, маємо: $|b_{j_1,j_2}(z_1 - z_1^0)^{j_1}(z_2 - z_2^0)^{j_2}| = a^*_{j_1,j_2} r_1^{j_1} r_2^{j_2} \le \frac{a_{k_0} r_0^{k_0}}{2}$ для всіх $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_+$, тобто, для всіх $k_1 + k_2 = k \ne k_0$

$$a_k r_1^{k_1} r_2^{k_2} \le \frac{a_{k_0} r_0^{k_0}}{2}. \tag{4.17}$$

Припустимо, що F функція необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Нехай $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$. Відомо (див. теорему 4.2), що аналітична функція F у $\mathbb{D}^2$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують $p \in \mathbb{Z}_+$ та $c \in \mathbb{R}_+$ такі, що для кожного $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$ виконується нерівність

$$\max\left\{ \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z) l_2^{j_2}(z)} \colon j_1 + j_2 = p + 1 \right\} \le c \max\left\{ \frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z) l_2^{k_2}(z)} \colon k_1 + k_2 \le p \right\}.$$

Це твердження та його узагальнення [219, 264, 274] є аналогами відомої теореми Хеймана [128] у теорії функцій обмеженого індексу.

Тоді за теоремою Хеймана для всіх $p_1 \in \mathbb{Z}_+$ та $c \ge 1$ існує $z^0 \in \mathbb{D}^2$ таке, що справджується нерівність:

$$\max\left\{ \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z^0)|}{l_1^{j_1}(z^0) l_2^{j_2}(z^0)} \colon j_1 + j_2 = p_1 + 1 \right\} > c \max\left\{ \frac{|F^{(k_1,k_2)}(z^0)|}{l_1^{k_1}(z^0) l_2^{k_2}(z^0)} \colon k_1 + k_2 \le p_1 \right\}.$$

Покладемо $p_1 = p$ і $c = \left(\frac{(p+1)!}{\eta^{p+1}}\right)^2$. Тоді для цього $z^0(p_1, c)$ отримаємо:

$$\max\left\{ \frac{|F^{(j_1,j_2)}(z^0)|}{j_1! j_2! l_1^{j_1}(z^0) l_2^{j_2}(z^0)} \colon j_1 + j_2 = p + 1 \right\} >$$
$$> \frac{1}{\eta^{p+1}} \max\left\{ \frac{|F^{(k_1,k_2)}(z^0)|}{k_1! k_2! l_1^{k_1}(z^0) l_2^{k_2}(z^0)} \colon k_1 + k_2 \le p \right\},$$

тобто, $a_{p+1} > \frac{a_{k_0}}{\eta^{p+1}}$ і звідси $a_{p+1} r_0^{p+1} > \frac{a_{k_0} r_0^{p+1}}{\eta^{p+1}} \ge a_{k_0} r_0^{k_0}$. А це суперечить (4.17). Отже, F — обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. □

Висновки до розділу 4

Основні здобутки шостого розділу:

1) встановлено аналог теореми Хеймана для аналітичних в бікрузі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних;

2) доведено критерій обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних, який описує поводження однорідних поліномів степеневого розвинення аналітичних функцій на кістяках бікруга;
3) отримано достатні умови обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних у вигляді оцінок максимуму модуля частинних похідних аналітичної функцій за кожною змінною на кістяку бікруга через значення в центрі бікруга.

Результати шостого розділу опубліковано в статтях [52, 54], а також доповідалися на конференціях [24, 25, 253, 257].

РОЗДІЛ 5. ЦІЛІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ

У цьому розділі розглядаються цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком. Досліджується їхнє зростання, умови приналежності до цього класу, композиція цілих функцій, замкненість операції додавання функцій з цього класу, необмеженість індексу за напрямком цілих функцій певного вигляду при одночасній обмеженості індексу на кожній фіксованій зрізці за тим напрямком, послаблюються достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком тощо.

Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_+^* = [0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — заданий напрямок, $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція, $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — ціла функція. Використовуватимемо такі позначення для зрізок відповідних функцій на промінь $\{z^0 + t\mathbf{b} \colon t \in \mathbb{C}\}$ при фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}$: $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$, $l_{z^0}(t) = L(z^0 + t\mathbf{b})$.

Означення 5.1. *(див. [254]). Ціла функція $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність:*

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m! L^m(z)} \le \max_{0 \le k \le m_0} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k! L^k(z)}, \tag{5.1}$$

де $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z), \partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}\Big(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z)\Big)$, $k \ge 2$.

Найменше таке ціле число m_0, для якого виконується (5.1), називається L-індексом за напрямком функції F та позначається через $N_{\mathbf{b}}(F, L)$. Якщо такого m_0 не існує, то покладемо $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \infty$, а F у цьому випадку називатимемо функцією необмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Якщо ж $L(z) \equiv 1$, то F називається функцією обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$ та $N_{\mathbf{b}}(F) = N_{\mathbf{b}}(F, 1)$ зветься індексом за напрямком $\mathbf{b}$. При $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$, $L(z) = l(z)$, $z \in \mathbb{C}$ нерівність (5.1) визначає функцію обмеженого l-індексу з l-індексом $N(F, l) \equiv N_1(F, l)$ [150, 273], а якщо додатково ще й $l(z) \equiv 1$, то отримуємо означення обмеженого індексу з індексом $N(F) \equiv N_1(F, 1)$ [156, 162]. Також варто згадати працю [239], в якій введено поняття узагальненого індексу, що досить близький до l-індексу.

Також через $N_{\mathbf{b}}(F, L, z^0)$ позначимо L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ функції F у точці z^0, тобто, це найменше ціле число m_0, для якого нерівність (5.1) виконується у вказаній точці $z = z^0$. Подібним чином визначається $N(f, l, z^0)$ для $n = 1$, тобто, у випадку функції від однієї змінної.

Крім того, позначатимемо через $\langle a, c \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \overline{c_j}$ ермітовий скалярний добуток у $\mathbb{C}^n$, a, $c \in \mathbb{C}^n$.

Зазначимо, що додатність та неперервність функції L є дещо заслабкими обмеженнями для отримання конструктивних результатів. Тому накладемо додаткові умови на функцію L.

Позначимо

$$\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \sup_{t_1,t_2\in\mathbb{C}} \left\{ \frac{L(z+t_1\mathbf{b})}{L(z+t_2\mathbf{b})} \colon |t_1-t_2| \le \frac{\eta}{\min\{L(z+t_1\mathbf{b}), L(z+t_2\mathbf{b})\}} \right\}.$$

Через $Q^n_{\mathbf{b}}$ позначимо клас додатних неперервних функцій $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$, які задовольняють умову

$$(\forall \eta \ge 0) : \ \lambda_{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty, \tag{5.2}$$

Не складно переконатися, що клас $Q^n_{\mathbf{b}}$ можна визначити дещо інакше. Для $\eta > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ та додатної неперервної функції $L : \ \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ визначимо

$$\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) = \inf_{z\in\mathbb{C}^n} \inf \left\{ L(z+t\mathbf{b})/L(z) : |t| \le \eta/L(z) \right\},$$

$$\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \sup \left\{ L(z+t\mathbf{b})/L(z) : |t| \le \eta/L(z) \right\}.$$

Тоді до класу $Q^n_{\mathbf{b}}$ потраплять усі функції L, які задовольняють умову

$$(\forall \eta \ge 0) : \ 0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty. \tag{5.3}$$

тобто, умови (5.3) та (5.2) рівносильні. Насправді досить вимагати виконання будь-якої з цих умов для одного значення $\eta > 0$.

Для додатної неперервної функції $l(t)$, $t \in \mathbb{C}$, $t_0 \in \mathbb{C}$ та $\eta > 0$ задамо $\lambda_1(\eta) \equiv \lambda_1^{\mathbf{b}}(,\eta)$ та $\lambda_2(\eta) \equiv \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta)$ у випадку, коли $\mathbf{b} = 1$, $n = 1$, $L \equiv l$. Як в [206], нехай $Q \equiv Q^1_1$ буде класом додатних неперервних функцій $l(t)$, $t \in \mathbb{C}$, що задовольняють умову $0 < \lambda_1(\eta) \le \lambda_2(\eta) < +\infty$ для всіх $\eta > 0$.

Якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ маємо $g_{z^0}(t) \ne 0$ при всіх $t \in \mathbb{C}$, то покладемо $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \emptyset$; якщо ж для заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ $g_{z^0}(t) \equiv 0$, то візьмемо $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \{z^0 + t\mathbf{b} \colon t \in \mathbb{C}\}$. А якщо для певного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ справджується $g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ та a_k^0 є нулями функції $g_{z^0}(t)$, то

$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \bigcup_k \left\{ z^0 + t\mathbf{b} \colon |t - a_k^0| \le \frac{r}{L(z^0 + a_k^0\mathbf{b})} \right\}, \quad r > 0.$$

Покладемо

$$G_r = G_r^{\mathbf{b}}(F) = \bigcup_{z^0\in\mathbb{C}^n} G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0). \tag{5.4}$$

Рівносильно $G_r^{\mathbf{b}}(F)$ можна визначити так:

$$G_r = G_r^{\mathbf{b}}(F) := \bigcup_{z\colon F(z)=0} \{z + t\mathbf{b} \colon |t| < r/L(z)\}, \tag{5.5}$$

Нехай a_k^0 - нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ при фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Через $n_{z^0}(r) = n_{\mathbf{b}}\big(r, z^0, 1/F\big) := \sum_{|a_k^0|\le r} 1$ позначимо лічильну функцію кількості нулів a_k^0 функції $F(z^0+t\mathbf{b})$ в крузі $\{t \in \mathbb{C}\colon |t| \le r\}$. Якщо $F(z^0+t\mathbf{b}) \equiv 0$ при всіх $t \in \mathbb{C}$ та заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$, то покладемо $n_{z^0}(r) = -1$.

Нехай $L^*(z)$ — додатна неперервна функція в $\mathbb{C}^n$. Писатимемо $L \asymp L^*$, якщо для деяких θ_1, θ_2, $0 < \theta_1 \le \theta_2 < +\infty$, та для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ виконуються нерівності $\theta_1 L(z) \le L^*(z) \le \theta_2 L(z)$.

5.1 Цілі функції обмеженого L-розподілу значень за напрямком

Ціла функція $f(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ називається функцією обмеженого розподілу значень [128, 190], якщо існують сталі $p \ge 0$, $R > 0$ такі, що рівняння $f(z) = w$ має не більше, ніж p коренів у будь-якому крузі радіуса R.

Однією зі знакових властивостей, які обумовили значний інтерес до функцій обмеженого індексу, є факт, встановлений У. Хейманом [128]: ціла функція має обмежений розподіл значень тоді і тільки тоді, коли її похідна є функцією обмеженого індексу. Згодом було введено поняття цілої функцій обмеженого l-розподілу значень [150], а згаданий факт було узагальнено для цілих функцій обмеженого l-індексу [218].

Означення 5.2. *Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називається функцією обмеженого L-розподілу значень за напрямком $\mathbf{b}$ якщо існує $p \in \mathbb{N}$ $\forall w \in \mathbb{C}$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}^n$ таких, що $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv w$, виконується нерівність $n\big(\frac{1}{L(z^0)}, z^0, \frac{1}{F-w}\big) \le p$, тобто, рівняння $F(z^0 + t\mathbf{b}) = w$ має у крузі $\{t : \ |t| \le \frac{1}{L(z^0)}\}$ щонайбільше p розв'язків. Інакше кажучи, функція $F(z^0 + t\mathbf{b})$ є p-листою у $\{t : \ |t| \le \frac{1}{L(z^0)}\}$.*

Відповідний результат Шеремети з [218] ми узагальнюємо для цілих функцій обмеженого L-розподілу значень за напрямком.

Твердження 5.1. *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, є функцією обмеженого L-розподілу значень за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли похідна за напрямком $\partial_{\mathbf{b}} F$ має обмежений L-індекс за тим самим напрямком $\mathbf{b}$.*

Доведення. Припустимо, що F має обмежений L-розподіл значень за напрямком $\mathbf{b}$, тобто, для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ таких, що $F(z^0+t\mathbf{b}) \not\equiv const$, функція $F(z^0+t\mathbf{b})$ є p-листою в кожному крузі $\{t : \ |t| \le \frac{1}{L(z^0)}\}$.

Для доведення цього твердження нам потрібне таке твердження з [206, с. 48, теорема 2.8].

Теорема III. *[206] Нехай $D_0 = \{t : \ |t - t_0| < R\}$, $0 < R < \infty$. Якщо аналітична в D_0 функція є p-листою в D_0, то для $j > p$*

$$\frac{|f^{(j)}(t_0)|}{j!} R^j \le (Aj)^{2p} \max\left\{\frac{|f^{(k)}(t_0)|}{k!} R^k : \ 1 \le k \le p\right\}, \tag{5.6}$$

де $A = \sqrt[2p]{\frac{p+2}{2}}\sqrt{8e^{\pi^2}}$.

За теоремою III нерівність (5.6) виконується з $R = \frac{1}{L(z^0)}$ для функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$, як функції від однієї змінної $t \in \mathbb{C}$ при кожному фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Нагадаємо, що для простоти запису використовуємо $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$. Тоді можна легко довести, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ справедлива така рівність $g_{z^0}^{(p)}(t) = \partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0 + t\mathbf{b})$. Візьмемо $j = p+1$ та $t_0 = 0$ в теоремі III. З (5.6) отримуємо

$$\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z^0)\right|}{(p+1)!L^{p+1}(z_0)} \leq (A(p+1))^{2p} \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)\right|}{k!L^k(z_0)} : \ 1 \leq k \leq p\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z^0)\right|}{L^{p+1}(z_0)} \leq (p+1)!(A(p+1))^{2p} \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)\right|}{L^k(z_0)} : \ 1 \leq k \leq p\right\} \times$$

$$\times \max\left\{\frac{1}{k!} : 1 \leq k \leq p\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^p \partial_{\mathbf{b}} F(z^0)\right|}{L^p(z_0)} \leq L(z^0) \cdot (p+1)!A^{2p}(p+1)^{2p} \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} \partial_{\mathbf{b}} F(z^0)\right|}{L^k(z_0)} :\right.$$

$$\left. 0 \leq k-1 \leq p-1\right\} \Rightarrow \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^p \partial_{\mathbf{b}} F(z^0)\right|}{L^p(z_0)} \leq$$

$$\leq (p+1)!A^{2p}(p+1)^{2p} \max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} \partial_{\mathbf{b}} F(z^0)\right|}{L^{k-1}(z_0)} : 0 \leq k-1 \leq p-1\right\}.$$

Тепер нам потрібний аналог теореми Хеймана для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком.

Теорема IV ([254], [259, теорема 3.6]). *Нехай* $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. *Ціла функція* $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, *має обмежений* L*-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$ *тоді і тільки тоді, коли існують числа* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $C > 0$ *такі, що для кожного* $z \in \mathbb{C}^n$

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L^{p+1}(z)} \leq C \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : \ 0 \leq k \leq p\right\} \tag{5.7}$$

Отже, для $\partial_{\mathbf{b}} F$ нерівність (5.7) виконується з $p-1$ замість p та з $C = (p+1)!A^{2p}(p+1)^{2p}$. У теоремі III стала $A \geq \max\limits_{j>p} \frac{p+2}{2}(8e^{\pi^2})^p(1-\frac{1}{j})^j$ не залежить від z^0, тому що параметр p є незалежним від z^0. Звідси, вираз $C = (p+1)!A^{2p}(p+1)^{2p}$ також не залежить від z^0. Тому за теоремою IV функція $\partial_{\mathbf{b}} F$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Тепер навпаки, нехай $\partial_{\mathbf{b}} F$ буде функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Згідно з теоремою IV існують $p \in \mathbb{Z}_+$ та $C \geq 1$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L^{p+1}(z)} \leq C \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : \ 1 \leq k \leq p\right\} \tag{5.8}$$

Розглянемо круг $K_0 = \left\{t \in \mathbb{C} : |t| \le \frac{1}{L(z^0)}\right\}$, $z^0 \in \mathbb{C}^n$.

Зауважимо, що при $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, $z^0 \in \mathbb{C}^n$ для всіх $r > 0$ з нерівності $|t| \le \frac{r}{L(z^0)}$ та з означення класу $Q^n_{\mathbf{b}}$ випливає

$$\lambda_1^{\mathbf{b}}(r)L(z^0) \le L(z^0 + t\mathbf{b}) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(r)L(z^0). \tag{5.9}$$

Тепер з (5.8) та (5.9) при $z = z^0 + t\mathbf{b}$, $t \in K$ маємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z^0+t\mathbf{b})|}{(p+1)!}\frac{1}{(C\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)L(z^0))^{p+1}} \le \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k}F(z^0+t\mathbf{b})|}{k!}\frac{1}{(C\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)L(z^0))^{k}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{L(z^0+t\mathbf{b})}{C\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)L(z^0)}\right)^{p+1-k} : \ 1 \le k \le p\right\} \le \frac{C}{p+1}\times$$
$$\times \max_{1\le k\le p}\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k}F(z^0+t\mathbf{b})|}{k!}\frac{1}{(C\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)L(z^0))^{k}}\frac{1}{C^{p+1-k}}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k}F(z^0+t\mathbf{b})|}{k!}\frac{1}{(C\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)L(z^0))^{k}} : \ 1 \le k \le p\right\}. \tag{5.10}$$

Для доведення цього твердження потрібне таке твердження з [206, с.44, теорема 2.7].

Теорема V ([206, с.44, теорема 2.7]). *Нехай $D_0 = \{t \in \mathbb{C} : \ |t - t_0| < R\}$, $0 < R < +\infty$, та $f(t)$ аналітична функція в D_0. Якщо для всіх $z \in D_0$*

$$\left(\frac{R}{2}\right)^{p+1}\frac{|f^{(p+1)}(t)|}{(p+1)!} \le \max\left\{\left(\frac{R}{2}\right)^{k}\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!} : \ 1 \le k \le p\right\}, \tag{5.11}$$

то $f(t)$ є p-листою в $\{t \in \mathbb{C} : \ |t - t_0| \le \frac{R}{25\sqrt{p+1}}\}$, тобто, $f(t)$ приймає кожне значення щонайбільше p раз.

З нерівності (5.10) випливає нерівність (5.11) з $R = \frac{2}{C\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)L(z^0)}$ при $t_0 = 0$. За теоремою V функція $F(z^0 + t\mathbf{b})$ є p-листою в крузі $\{t \in \mathbb{C} : \ |t| \le \frac{\rho}{L(z^0)}\}$, $\rho = \frac{2}{25C\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)\sqrt{p+1}}$.

Нехай t_j — довільна точка в K_0 та $K_j^* = \{t \in \mathbb{C} : |t - t_i| \le \frac{\rho}{L(z^0+t_j\mathbf{b})}\}$. Оскільки згідно з означенням класу $Q^n_{\mathbf{b}}$ $\ L(z^0 + t_j\mathbf{b}) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(1)L(z^0)$, маємо, що $K_j = \left\{t \in \mathbb{C} : |t - t_j| \le \frac{\rho}{\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)L(z^0)}\right\} \subset K_j^*$. Застосуємо наведені вище міркування до множини $\left\{t \in \mathbb{C} : |t - t_j| \le \frac{1}{L(z^0+t_j\mathbf{b})}\right\}$. Відповідно отримаємо, що $F(z^0 + t\mathbf{b})$ є p-листою в K_j^*. Але $K_j \subset K_j^*$, тому $F(z^0 + t\mathbf{b})$ є p-листою в K_j.

Нарешті зазначимо, що кожний замкнений круг радіуса R_* можна покрити скінченним числом m_* замкнених кругів радіуса $\rho_* < R_*$ з центрами в цьому крузі. Навіть більше, $m_* < B_*(R_*/\rho_*)^2$, де $B_* > 0$ — абсолютна стала. Звідси, K_0 може бути покритим скінченним числом m кругів K_j, де $m \le 625B^*(p + 1)C^2(\lambda_2^{\mathbf{b}}(1))^2/4$. Позаяк функція $F(z^0+t\mathbf{b})$ у K_j є p-листою, то вона є mp-листою в K_0.

Зважаючи на довільність z^0, твердження доведено. $\square$

5.2 Цілі функції необмеженого індексу за напрямком

5.2.1 Цілі функції необмеженого індексу за будь-яким напрямком з обмеженнями на послідовність нулів Вивчаючи властивості цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком, отримали такий критерій.

Теорема VI ([254], [259, теорема 2.3]). *Ціла функція F є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли існує число $M > 0$, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ функція $g_{z^0}(t)$ є обмеженого l_{z^0}-індексу з $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \le M < +\infty$ як функція змінної $t \in \mathbb{C}$, причому $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in \mathbb{C}^n\}$.*

Беручи до уваги теорему VI, виникає таке природне *питання* [255]: чи існує ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, з $N(g_{z^0}, l_{z^0}) < +\infty$ для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$, але $N_{\mathbf{b}}(F, L) = +\infty$?

Нижче в цьому підрозділі ми скрізь вважаємо, що $L(z) \equiv 1$, а вітку квадратного кореня з комплексного числа вибираємо на основі умови $\sqrt{1} = 1$.

Ствердна відповідь на згадане питання отримана в [255]. Там доведено, що $F(z_1, z_2) = \cos\sqrt{z_1 z_2}$ має необмежений індекс за напрямком $(1, 1)$. Згодом, цей результат узагальнено для кожного напрямку $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Але традиційно розв'язування одних проблем призводить до виникнення інших. У нашому випадку цікавим є таке питання:

Проблема 5.1 ([57, Проблема 17]). *Які умови на нульову множину та зростання цілих функцій забезпечують обмеженість індексу функції $F(z_1^0 + b_1 t, z_2^0 + b_2 t)$ для кожної фіксованої точки $(z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C}^2$ та необмеженість індексу функції $F(z_1, z_2)$ за напрямком $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$?*

Для доведення основного результату нам потрібні здобутки інших математиків. Наступна теорема доведена М. М. Шереметою [219] для цілих функцій обмеженого l-індексу. Вона є узагальненням та уточненням подібного результату В. К. Хеймана [128]. Ми перефразуємо твердження Шеремети для обмеженого індексу.

Теорема VII ([219]). *Ціла функція $f(t)$ є функцією обмеженого індексу тоді і тільки тоді, коли існують $p \in \mathbb{Z}_+$, $C > 0$ та $R > 0$ такі, що для всіх $t \in \mathbb{C}$, $|t| \ge R$, маємо*

$$|f^{(p+1)}(t)| \le C \max\{|f^{(k)}(t)| : \ 0 \le k \le p\}. \tag{5.12}$$

Наступний критерій зручний для встановлення обмеженості індексу за напрямком.

Теорема VIII ([254], [259, теорема 3.8]). *Нехай $F(z)$ — ціла функція в $\mathbb{C}^n$. Функція $F(z)$ є обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли:*

1) *для кожного $r > 0$ існує $P = P(r) > 0$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)$*

$$\left|\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)}\right| \le P; \tag{5.13}$$

2) для кожного $r > 0$ існує $\widetilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$, яке задовольняє $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$,

$$n\left(r, z^0, \frac{1}{F}\right) \le \widetilde{n}(r). \tag{5.14}$$

Наведемо основний результат у цьому підрозділі.

Твердження 5.2. *Нехай $f(t)$, $t \in \mathbb{C}$, — парна ціла трансцендентна функція обмеженого індексу. Тоді 1) для кожного напрямку $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ та кожної фіксованої пари z_1^0, $z_2^0 \in \mathbb{C}$ функція зрізки $g(t) = f(\sqrt{(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t)})$ є цілою функцією обмеженого індексу ($t \in \mathbb{C}$); 2) якщо $f(t)$ не має нулів або має скінченне число нулів, то $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за кожним напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$; 3) якщо $\{c_k\}$ є нескінченною послідовністю нулів $f(t)$, $|c_1| < |c_2| < \ldots < |c_k| < \ldots$ та для кожного $k \in \mathbb{N}$ $c_k^2 \in \mathbb{R}$, то функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за кожним напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.*

Доведення. 1) Нехай $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ — задані. Позаяк $f(t)$ — парна ціла функція, така композиція $f(\sqrt{(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t)})$ також є цілою. Доведемо, що $g(t)$ є обмеженого індексу, як функція від змінної t.

Нехай $g(t) = f(\sqrt{(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t)}) = f(\sqrt{at^2 + dt + c})$, де $a = b_1 b_2$, $d = z_1^0 b_2 + z_2^0 b_1$, $c = z_1^0 z_2^0$.

Обчислимо похідні цієї функції:

$$g'(t) = \frac{(2at + d) f'(\sqrt{at^2 + dt + c})}{2\sqrt{dt^2 + at + b}},$$

$$g''(t) = f''(\sqrt{at^2 + dt + c}) \left(\frac{2at + d}{2\sqrt{at^2 + dt + c}}\right)^2 + f'(\sqrt{at^2 + dt + c}) \frac{4ac - d^2}{4(at^2 + dt + c)^{3/2}}.$$

Легко перевірити, що для $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$g^{(s)}(t) = f^{(s)}(\sqrt{at^2 + dt + c}) \left(\frac{2at + d}{2\sqrt{at^2 + dt + c}}\right)^s +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s-1} f^{(k)}(\sqrt{at^2 + dt + c}) \frac{Q_{s,k}(t)}{(\sqrt{at^2 + dt + c})^{2s-k}}, \tag{5.15}$$

де $Q_{s,k}$ — многочлени з $deg\, Q_{s,k} \le s$ для всіх $k = 1, \ldots, s - 1$.

За теоремою Хеймана (теорема VII), застосовною до функції $f(\sqrt{at^2 + dt + c})$, знайдуться $p \in \mathbb{Z}_+$, $C > 0$ та $R > 0$, що для всіх $t \in \mathbb{C}$, $|\sqrt{at^2 + dt + c}| \ge R$, виконується нерівність (5.12). Множина $\{t \in \mathbb{C} : |\sqrt{at^2 + dt + c}| < R\}$ — обмежена. Тоді існує $R_1 > 0$ таке, що для всіх $t \in \mathbb{C}$, $|t| \ge R_1$, нерівність (5.12) виконується. Але для таких t дроби $\left|\frac{2at+d}{2\sqrt{at^2+dt+c}}\right|$ та $\left|\frac{Q_{p,k}(t)}{(\sqrt{at^2+dt+c})^{2p-k}}\right|$ ($k = 1, \ldots, p - 1$) обмежені деякою сталою $M_1 > 0$, тому що їхні границі при $t \to \infty$ рівні скінченним числам. Отже, з (5.15) випливає, що для $t \in \mathbb{C}$, $|t| \ge R_1$,

$$|g^{(p+1)}(t)| \le \left|f^{(p+1)}(\sqrt{at^2 + dt + c})\right| \cdot \left|\frac{2at + d}{2\sqrt{at^2 + dt + c}}\right|^{p+1} +$$

$$+\sum_{k=1}^{p}|f^{(k)}(\sqrt{at^2+dt+c})|\frac{|Q_{p+1,k}(t)|}{|\sqrt{at^2+dt+c}|^{2p+2-k}}\leq$$

$$\leq (CM_1^{p+1}+pM_1)\max\{|f^{(k)}(\sqrt{at^2+dt+c})|:\ 0\leq k\leq p\}. \qquad (5.16)$$

Використовуючи (5.15), виведемо таку формулу для s-ої похідної функції $f(\sqrt{at^2+dt+c})$:

$$f^{(s)}(\sqrt{at^2+dt+c})=g^{(s)}(t)\left(\frac{2\sqrt{at^2+dt+c}}{2at+d}\right)^s-\sum_{k=1}^{s-1}f^{(k)}(\sqrt{at^2+dt+c})\times$$

$$\times\frac{Q_{s,k}(t)}{(\sqrt{at^2+dt+c})^{2s-k}}\cdot\left(\frac{2\sqrt{at^2+dt+c}}{2at+d}\right)^s. \qquad (5.17)$$

Зрозуміло, що знайдеться $R_2\geq R_1$ таке, що для $|t|\geq R_2$ дроби $\left|\frac{2\sqrt{at^2+dt+c}}{2at+d}\right|$, $\frac{|Q_{s,k}(t)|}{|\sqrt{at^2+dt+c}|^{2s-k}}$ обмежені деякою сталою $M_2>0$. Знову ж таки застосовуючи (5.17), оцінимо вираз $|f^{(k)}(\sqrt{at^2+dt+c})|$ через $g^{(k)}(t)$ та $|f^{(j)}(\sqrt{at^2+dt+c})|$ $(j=1,\ldots,k-1)$ в (5.16):

$$|g^{(p+1)}(t)|\leq (CM_1^{p+1}+pM_1)\max\left\{|g(t)|,\ |g'(t)|M_2,\right.$$

$$\left.|g^{(k)}(t)|M_2^k+\sum_{j=1}^{k-1}|f^{(j)}(\sqrt{at^2+dt+c})|M_2^{k+1}:\ 2\leq k\leq p\right\}.$$

Замість $|f^{(j)}(\sqrt{at^2+dt+c})|$ знову підставимо (5.17) та оцінимо $|f^{(j)}(\sqrt{at^2+dt+c})|$ через $g^{(j)}(t)$ та похідні $|f'(\sqrt{at^2+dt+c})|$, $\ldots$, $|f^{(j-1)}(\sqrt{at^2+dt+c})|$. Продовжуючи цей процес, скорочуватимемо щоразу порядок найвищої похідної функції $|f(\sqrt{at^2+dt+c})|$ на одиницю. Насамкінець знайдеться $M^*>0$ така, що $|t|\geq R_2$

$$|g^{(p+1)}(t)|\leq M^*\max\left\{|g^{(k)}(t)|:\ 0\leq k\leq p\right\}.$$

Отже, за теоремою VII функція $g(t)$ має обмежений індекс.

2) Нехай $f(t)$ не має нулів та є обмеженого індексу.

За теоремою VIII існує $P>0$, що для всіх $t\in\mathbb{C}$ $\left|\frac{f'(t)}{f(t)}\right|\leq P$. Покладемо $P=\sup_{t\in\mathbb{C}}\left|\frac{f'(t)}{f(t)}\right|$. Тоді існує послідовність $t_p\to\infty$, для якої $\left|\frac{f'(t_p)}{f(t_p)}\right|\to P$ при $p\to\infty$.

Обчислимо модуль логарифмічної похідної за напрямком від функції $f(\sqrt{z_1z_2})$:

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}f(\sqrt{z_1z_2})|}{|f(\sqrt{z_1z_2})|}=\left|\frac{f'(\sqrt{z_1z_2})}{\sqrt{z_1z_2}f(\sqrt{z_1z_2})}\right|\cdot\frac{1}{2}\left|b_1z_2+b_2z_1\right|. \qquad (5.18)$$

Нехай $b_1\neq 0$. Візьмемо $z_1=1$, $z_2=t_p^2$ та знайдемо границю в (5.18):

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{|f(\sqrt{t_p^2\cdot 1})|}|\partial_{\mathbf{b}}f(\sqrt{t_p^2\cdot 1})|=\frac{P}{2}\lim_{n\to\infty}\left(b_1t_p+\frac{b_2}{t_p}\right)=\infty.$$

Якщо $b_1 = 0$, то $b_2 \neq 0$. Тепер візьмемо $z_2 = 1$, $z_1 = t_p^2$ і знову доводимо, що логарифмічна похідна за напрямком — необмежена. За теоремою VIII функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$.

Якщо $f(t)$ не має скінченного числа нулів, то існує $R > 0$ таке, що $\forall |t| \geq R$ $f(t) \neq 0$. Лишилося в попередніх міркуваннях замінити $t \in \mathbb{C}$ на $|t| \geq R$ та повторити їх без інших змін.

3) Нехай $(c_l)_{l=1}^{\infty}$ — нескінченна послідовність нулів функції $f(t)$, $|c_1| < |c_2| < \ldots < |c_k| < \ldots$ та для кожного $k \in \mathbb{N}$ $c_k^2 \in \mathbb{R}$. Потрібно довести, що функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Покажемо, що умова (5.14) теореми VIII не виконується.

Випадок 1. Нехай $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ та $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \to \infty$. Пізніше ми накладемо більше умов на послідовність $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Візьмемо $\varphi = arg(b_1 b_2)$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, де z_1^0 — довільне комплексне число

$$z_2^0 = \frac{b_2 z_1^0 + (1 - a_k^2) e^{i\varphi/2}}{b_1}, \; t_0 = \frac{a_k^2 e^{i\varphi/2} - b_2 z_1^0}{b_1 b_2}. \tag{5.19}$$

Нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ можна знайти з рівняння

$$(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t) = b_1 b_2 t^2 + (z_1^0 b_2 + z_2^0 b_1) t + z_1^0 z_2^0 = c_l^2, l \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо його корені

$$t_l = \frac{-(b_2 z_1^0 + b_1 z_2^0) + \sqrt{(b_2 z_1^0 - b_1 z_2^0)^2 + 4 c_l^2 b_1 b_2}}{2 b_1 b_2}.$$

Умова $|t_l - t_0| < r$ рівносильна такій

$$r|b_1 b_2| >$$
$$> \left| a_k^2 e^{i\varphi/2} - b_2 z_1^0 - \frac{-(2 b_2 z_1^0 + (1 - a_k^2) e^{i\varphi/2}) + \sqrt{(a_k^2 - 1)^2 e^{i\varphi} + 4 |b_1 b_2| e^{i\varphi} c_l^2}}{2} \right|$$
$$\iff 2r|b_1| \cdot |b_2| > \left| a_k^2 + 1 \pm \sqrt{(a_k^2 - 1)^2 + 4 c_l^2 |b_1 b_2|} \right| \Longrightarrow$$
$$a_k^2 + 1 - 2r|b_1| \cdot |b_2| < \sqrt{(a_k^2 - 1)^2 + 4 c_l^2 |b_1 b_2|} < a_k^2 + 1 + 2r|b_1| \cdot |b_2|.$$

Для додатності лівої частини припустимо, що $r < \frac{1}{2|b_1 b_2|}$. Звідси маємо

$$a_k^4 + 1 + 4r^2 |b_1 b_2|^2 + 2a_k^2 - 4r|b_1 b_2| - 4r|b_1 b_2| a_k^2 < a_k^4 - 2a_k^2 + 1 + 4|b_1 b_2| c_l^2 <$$
$$< a_k^4 + 1 + 4r^2 |b_1 b_2|^2 + 2a_k^2 + 4r|b_1 b_2| + 4r|b_1 b_2| a_k^2 \iff$$
$$r^2 |b_1 b_2|^2 + a_k^2 - r|b_1 b_2| - r a_k^2 |b_1 b_2| < |b_1 b_2| c_l^2 <$$
$$< r^2 |b_1 b_2|^2 + a_k^2 + r|b_1 b_2| + r a_k^2 |b_1 b_2|.$$

Тоді

$$c_l^2 \in \left(r^2 |b_1 b_2| + \frac{a_k^2}{|b_1 b_2|} - r - r a_k^2; r^2 |b_1 b_2| + \frac{a_k^2}{|b_1 b_2|} + r + r a_k^2 \right) \equiv (A_k; B_k).$$

для $r \in \left(0; \frac{1}{2|b_1 b_2|}\right)$. Але $B_k - A_k = 2r + 2ra_k^2$. Тобто, для заданого $n^* \in \mathbb{N}$ вимагаємо $c_{l+n^*+1}^2 - c_l^2 < 2r + 2ra_k^2$. Тому виберемо $a_k^2 > \frac{c_{l+n^*+1}^2 - c_l^2 - 2r}{2r}$. Це означає, що $\exists r > 0$ (у нас $r \in \left(0; \frac{1}{2|b_1 b_2|}\right)$) $\forall n^* \in \mathbb{N}$ $\exists z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$ (див. (5.19)), для якого $n(r, z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{1}{f}) \geq n^* + 1 > n^*$.

Отже, $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$.

Випадок 2. Нехай $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$ та $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Нижче під час доведення виникнуть додаткові умови на послідовність $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Візьмемо $\varphi = arg(b_1)$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, де

$$z_1^0 = e^{i\varphi},\ z_2^0 = a_k^2 \cdot e^{-i\varphi},\ t_0 = 1. \tag{5.20}$$

Нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ можна знайти з рівняння

$$(z_1^0 + b_1 t)z_2^0 = z_2^0 b_1 t + z_1^0 z_2^0 = c_l^2, l \in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо корінь цього рівняння $t_l = \dfrac{c_l^2 - z_1^0 z_2^0}{b_1 z_2^0}$. Умова, що нуль t_l належить до r–околу точки t_0, має вигляд

$$|t_l - t_0| < r \Longleftrightarrow t_0 - r < \frac{c_l^2 - z_1^0 z_2^0}{b_1 z_2^0} < t_0 + r \text{ для } r \in (0, t_0).$$

Зазначимо, що t_0, r, $b_1 z_2^0$, $z_1^0 z_2^0 \in \mathbb{R}$. Звідси для $r \in (0,1)$ такі нерівності

$$(1-r)|b_1|a_k^2 + a_k^2 < c_l^2 < (1+r)|b_1|a_k^2 + a_k^2$$

виконуються. Тоді $c_l^2 \in ((1-r)|b_1|a_k^2 + a_k^2; (1+r)|b_1|a_k^2 + a_k^2) \equiv (A_k; B_k)$. Але $B_k - A_k = 2r|b_1|a_k^2$. Отже, для заданого $n^* \in \mathbb{N}$ вимагаємо $c_{l+n^*+1}^2 - c_l^2 < 2r|b_1|a_k^2$. Тоді виберемо $a_k^2 > \frac{c_{l+n^*+1}^2 - c_l^2}{2r|b_1|}$. Це означає, що $\exists r > 0$ (у нас $r \in (0;1)$) $\forall n^* \in \mathbb{N}$ $\exists z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$ (див. (5.20)), для якого $n(r, z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{1}{f}) \geq n^* + 1 > n^*$.

Як наслідок, функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ має необмежений індекс за напрямком $\mathbf{b}$. □

Зауваження 5.1. *Умова $c_k^2 \in \mathbb{R}$ може бути замінена існуванням нескінченної підпослідовності нулів вигляду $c_k' = |c_k'| \cdot e^{i\theta}$, тобто, усі c_k' лежать на деякому промені. Тоді у випадку $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ виберемо $\varphi = 2\theta + arg(b_1 b_2)$, а у випадку $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$ візьмемо $z_2^0 = a_k^2 \cdot e^{-i\varphi + 2i\theta}$. Інші міркування з доведення залишаються без змін.*

Прикладом такої функції може слугувати ціла функція $F(z_1, z_2) = \cos\sqrt{z_1 z_2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z_1 z_2)^n}{(2n)!}$, яка згідно з твердженням 5.2 є функцією необмеженого індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

5.2.2 Цілі функції необмеженого індексу за кожним напрямком з довільною послідовністю нулів

У попередньому підрозділі ми розв'язали проблему 5.1, припускаючи $c_k^2 \in \mathbb{R}$, де c_k ($k \in \mathbb{N}$) — нулі цілої функції $f(t)$. У 2015 році на львівському семінарі з теорії аналітичних функцій проф. О. Скасків припустив, що умова "для кожного $k \in \mathbb{N}$ $c_k^2 \in \mathbb{R}$" є зайвою і обумовлена суто методом доведення. Це призводить до такої проблеми

Проблема 5.2. *Якщо $f(t)$ $(t \in \mathbb{C})$ — парна ціла трансцендентна функція обмеженого індексу, яка має нескінченне число нулів, то функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за кожним напрямком* $\mathbf{b}$. *Чи правильне це твердження?*

Доведемо істинність наведеного твердження.

Крім того, нам потрібна така властивість функцій обмеженого індексу за напрямком.

Теорема IX ([254], [259, теорема 3.2]). *Нехай $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ціла функція $F(z)$ $(z \in \mathbb{C}^n)$ має обмежений індекс за напрямком* $\mathbf{b}$ *тоді і тільки тоді, коли $F(z)$ має обмежений індекс за напрямком $m\mathbf{b}$.*

Твердження 5.3. *Якщо $f(t)$ $(t \in \mathbb{C})$ є парною цілою трансцендентною функцією обмеженого індексу, яка має нескінченне число нулів, то функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за кожним напрямком* $\mathbf{b}$.

Доведення. Нехай $(c_l)_{l=1}^{\infty}$ — нескінченна послідовність нулів функції $f(t)$, $|c_1| < |c_2| < \ldots < |c_k| < \ldots$ Зважаючи на теорему 5.2 та зауваження 5.1, припустимо, що на кожному промені, проведеному з початку координат, розміщене скінченне число нулів c_k. Нам лишається показати, що функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Доведемо невиконання умови (5.14) теореми VIII.

Очевидно, для кожного $\varepsilon > 0$ існує сектор з вершиною в початку координат та центральним кутом 2ε, в середині якого розміщене нескінченне число нулів c_k. Нехай $arg\, z = \theta$ — бісектриса цього сектора. Згідно зі зауваженням 5.1 вважатимемо $\theta = 0$ без зменшення загальності. Нижче в доведенні скрізь припускаємо, що нулі c_l розміщені лише у вказаному секторі. Насправді буде доведено, що умова (5.14) не виконується для нулів функції $f(\sqrt{(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t)})$, які породжені послідовністю c_l з цього сектора.

Випадок 1. Нехай $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$ та $a_k \in \mathbb{R}_+$, $a_k \to \infty$. Згодом накладемо додаткові обмеження на послідовність $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Візьмемо $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, де

$$z_1^0 = 1,\ z_2^0 = a_k^2,\ t_0 = 0. \tag{5.21}$$

Нулі функції $f(\sqrt{(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t)})$ можна знайти з рівняння

$$(z_1^0 + b_1 t) z_2^0 = z_2^0 b_1 t + z_1^0 z_2^0 = c_l^2, l \in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо його розв'язок $t_l = \frac{c_l^2 - z_1^0 z_2^0}{b_1 z_2^0}$. Умова потрапляння нуля t_l в r–окіл точки t_0 має вигляд $|t_l - t_0| < r$. Нехай $\varphi_l = arg\, c_l$. Тоді маємо $\left| \frac{|c_l|^2 e^{2i\varphi_l} - a_k^2}{|b_1| \cdot a_k^2} \right| < r$ або

$$r|b_1| \cdot a_k^2 > ||c_l|^2 e^{2i\varphi_l} - a_k^2| = ||c_l|^2 \cos 2\varphi_l - a_k^2 + i|c_l|^2 \sin 2\varphi_l| =$$
$$= \sqrt{(|c_l|^2 \cos 2\varphi_l - a_k^2)^2 + |c_l|^4 \sin^2 2\varphi_l} = \sqrt{|c_l|^4 - 2|c_l|^2 \cos 2\varphi_l \cdot a_k^2 + a_k^4}.$$

Звідси, отримуємо таку біквадратну нерівність

$$|c_l|^4 - 2|c_l|^2 \cos 2\varphi_l \cdot a_k^2 + a_k^4 - r^2 |b_1|^2 \cdot a_k^4 < 0. \tag{5.22}$$

Розв'язуючи (5.22), дістаємо оцінку для $|c_l|$:

$$a_k^2(\cos 2\varphi_l - \sqrt{r^2|b_1|^2 - \sin^2 2\varphi_l}) < c_l^2 < a_k^2(\cos 2\varphi_l + \sqrt{r^2|b_1|^2 - \sin^2 2\varphi_l}). \quad (5.23)$$

Виберемо $r \geq \frac{1}{|b_1|}$. Такий вибір означає, що $r^2|b_1|^2 \geq 1$ або $r^2|b_1|^2 - \sin^2 2\varphi_l \geq \cos^2 2\varphi_l$. Тому ліва частина в (5.23) недодатна. Крім того, підберемо $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{4})$, тобто, $\varphi_l \in (-\varepsilon; \varepsilon) \subset (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$. З правої частини в (5.23) випливає

$$a_k^2 > \frac{|c_l|^2}{\cos 2\varphi_l + \sqrt{r^2|b_1|^2 - \sin^2 2\varphi_l}}.$$

Для $k+1$ нуля функції $f(t)$ виберемо

$$a_k^2 > \max_{1 \leq l \leq k+1} \frac{|c_l|^2}{\cos 2\varphi_l + \sqrt{r^2|b_1|^2 - \sin^2 2\varphi_l}}.$$

Отже, $\exists r > 0$ (у нас $r \in \left[\frac{1}{|b_1|}; \infty\right)$) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$ (див. (5.21)), для якого $n(r, z^0 + t^0\mathbf{b}, \frac{1}{f}) \geq k+1 > k$.

Звідси, функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$.

Випадок 2. Нехай $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ та $a_k \in \mathbb{R}_+$, $a_k \to \infty$. Нижче введемо додаткові умови на вибір послідовності $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. За теоремою IX ціла функція $F(z)$ ($z \in \mathbb{C}^2$) є обмеженого індексу за напрямком (b_1, b_2) тоді і тільки тоді, коли функція $F(z)$ має обмежений індекс за напрямком $\left(\frac{b_1}{\sqrt{|b_1 b_2|}}, \frac{b_2}{\sqrt{|b_2 b_2|}}\right)$. Тому, без зменшення загальності можемо вважати, що $|b_1 b_2| = 1$.

Покладемо $\varphi = arg(b_1 b_2)$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, де z_1^0 — довільне комплексне число,

$$z_2^0 = \frac{b_2 z_1^0 + (1 - a_k^2)e^{i\varphi/2}}{b_1}, \; t_0 = \frac{a_k^2 e^{i\varphi/2} - b_2 z_1^0}{b_1 b_2}. \quad (5.24)$$

Нулі функції $f(\sqrt{(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t)})$ можна знайти з рівняння

$$(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t) = b_1 b_2 t^2 + (z_1^0 b_2 + z_2^0 b_1)t + z_1^0 z_2^0 = c_l^2, l \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо його корені

$$t_l = \frac{-(b_2 z_1^0 + b_1 z_2^0) + \sqrt{(b_2 z_1^0 - b_1 z_2^0)^2 + 4c_l^2 b_1 b_2}}{2b_1 b_2}.$$

Нехай $\varphi_l = arg\, c_l$. Умова потрапляння нуля t_l до r–околу точки t_0 має вигляд $|t_l - t_0| < r$ або

$$r > \left| a_k^2 e^{i\varphi/2} - b_2 z_1^0 - \frac{-(2b_2 z_1^0 + (1 - a_k^2)e^{i\varphi/2}) + \sqrt{(a_k^2 - 1)^2 e^{i\varphi} + 4e^{i\varphi}|c_l|^2}}{2} \right|$$

$$\iff 2r > \left| a_k^2 + 1 + \sqrt{(a_k^2 - 1)^2 + 4|c_l|^2(\cos 2\varphi_l + i \sin 2\varphi_l)} \right| =$$

$$= \left| a_k^2 + 1 + \sqrt{(a_k^4 - 2a_k^2 + 1 + 4|c_l|^2 \cos 2\varphi_l) + 4i \cdot |c_l^2| \sin 2\varphi_l} \right|. \quad (5.25)$$

Для знаходження квадратного кореня комплексного числа припустимо, що $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ та скористаємося такою рівністю

$$\sqrt{x+iy} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right). \tag{5.26}$$

Застосовуючи (5.26) до (5.25), отримуємо

$$2r > \Big|a_k^2 + 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{((a_k^2-1)^2+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2+16|c_l|^4\sin^2 2\varphi_l} +$$
$$+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + (a_k^2-1)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{((a_k^2-1)^2+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2+16|c_l|^4\sin^2 2\varphi_l} -$$
$$-4|c_l|^2\cos 2\varphi_l - (a_k^2-1)^2\Big)^{1/2}\Big|. \tag{5.27}$$

Беремо мінус перед квадратними коренями в (5.27). Для дійсних x та y справедлива така нерівність $|x+iy| \le |x|+|y|$. Припустимо, що дійсні та уявні частини виразу під модулем у (5.27) не перевищують r, тобто,

$$\sqrt{2}r > \Big|\sqrt{2}(a_k^2+1) - \Big(4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + (a_k^2-1)^2 +$$
$$+\sqrt{((a_k^2-1)^2+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2+16|c_l|^4\sin^2 2\varphi_l}\,\Big)^{\frac{1}{2}}\Big| \tag{5.28}$$

та

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + (a_k^2-1)^2 - \sqrt{((a_k^2-1)^2+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2+16|c_l|^4\sin^2 2\varphi_l}\right|^{\frac{1}{2}} < r \tag{5.29}$$

Спершу доведемо, що для деяких r та ε і для всіх a_k нерівність (5.29) виконується. З (5.29) випливає, що

$$(4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + a_k^4 - 2a_k^2 + 1 - 2r^2)^2 < (a_k^4 - 2a_k^2 + 1 + 4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2 +$$
$$+16|c_l|^2\sin^2 2\varphi_l < (4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + a_k^4 - 2a_k^2 + 1 + 2r^2)^2$$

чи

$$(4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + a_k^4 - 2a_k^2 + 1)^2 + 4r^4 - 4r^2(4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + a_k^4 - 2a_k^2 + 1) <$$
$$< (a_k^4 - 2a_k^2 + 1 + 4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2 + 16|c_l|^2\sin^2 2\varphi_l <$$
$$< (4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + a_k^4 - 2a_k^2 + 1)^2 + 4r^4 + 4r^2(4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + a_k^4 - 2a_k^2 + 1)$$

Спрощуючи та скорочуючи на 4, отримуємо

$$r^4 - r^2(4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + a_k^4 - 2a_k^2 + 1) < 4|c_l|^2\sin^2 2\varphi_l <$$
$$r^4 + r^2(4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + a_k^4 - 2a_k^2 + 1). \tag{5.30}$$

Тепер виберемо $\varepsilon \le \frac{\pi}{4}$, $r < 3$. Оскільки $a_k \to \infty$ вважатимемо $(a_k^2-1)^2 > 9$, тобто, $|a_k|^2 > 4$. Звідси випливає, що

$$r^4 - r^2(4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + a_k^4 - 2a_k^2 + 1) = r^2(r^2 - 4|c_l|^2\cos 2\varphi_l - (a_k^2-1)^2) < 0$$

для $|\varphi_l| < \frac{\pi}{4}$. Отже, ліва частина в (5.30) від'ємна.

Натомість права частина в (5.30) рівносильна до

$$4|c_l|^2(\sin^2 2\varphi_l - r^2\cos 2\varphi_l) < r^4 + r^2(a_k^2-1)^2. \tag{5.31}$$

Для справедливості (5.31) виберемо $r \in (2;3)$. Тоді $\sin^2 2\varphi_l - r^2\cos 2\varphi_l < \sin^2 2\varphi_l - 4\cos 2\varphi_l$. Зараз вимагатимемо $\sin^2 2\varphi_l - 4\cos 2\varphi_l < 0$. Це означає, що

$$\cos^2 2\varphi_l + 4\cos 2\varphi_l - 1 > 0.$$

Її розв'язок шукається з такої сукупності

$$\cos 2\varphi_l < -2-\sqrt{5} \text{ або } \cos 2\varphi_l > -2+\sqrt{5}.$$

Звідси маємо, що для $\varepsilon < \frac{1}{2}\arccos(-2+\sqrt{5}) < \frac{\pi}{4}$ та $r \in (2;3)$ нерівність (5.29) істинна при $|a_k|^2 > 4$.

Тепер виберемо r та ε і побудуємо послідовність (a_k) таку, що задовольняє нерівність (5.28). Ця нерівність рівносильна такому

$$\begin{gathered}
\sqrt{2}(a_k^2+1-r) < \\
< \left(4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + (a_k^2-1)^2 + \sqrt{((a_k^2-1)^2+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2 + 16|c_l|^4\sin^2 2\varphi_l}\right)^{\frac{1}{2}} < \\
< \sqrt{2}(a_k^2+1+r) \iff \\
2(a_k^2+1-r)^2 < \\
< 4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + (a_k^2-1)^2 + \sqrt{((a_k^2-1)^2+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2 + 16|c_l|^4\sin^2 2\varphi_l} < \\
< 2(a_k^2+1+r)^2
\end{gathered} \tag{5.32}$$

Взявши $r = 2$ в (5.32), ми посилимо відповідну нерівність:

$$\begin{gathered}
2(a_k^2-1)^2 < \\
< 4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + (a_k^2-1)^2 + \sqrt{((a_k^2-1)^2+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2 + 16|c_l|^4\sin^2 2\varphi_l} < \\
< 2(a_k^2+3)^2 \iff \\
(a_k^2-1)^2 < 4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + \sqrt{((a_k^2-1)^2+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2 + 16|c_l|^4\sin^2 2\varphi_l} < \\
< a_k^4 + 14a_k^2 + 17
\end{gathered} \tag{5.33}$$

Але

$$\begin{gathered}
4|c_l|^2\cos 2\varphi_l + \sqrt{((a_k^2-1)^2+4|c_l|^2\cos 2\varphi_l)^2 + 16|c_l|^4\sin^2 2\varphi_l} > \\
> (a_k^2-1)^2 + 4|c_l|^2\cos 2\varphi_l > (a_k^2-1)^2.
\end{gathered}$$

Тому, ліва нерівність у (5.33) — очевидна. Середній вираз у (5.33) не перевищує $(a_k^2-1)^2 + 8|c_l|^2\cos 2\varphi_l + 4|c_l|^2|\sin 2\varphi_l|$. Отримуємо нерівність

$$\begin{gathered}
a_k^4 - 2a_k^2 + 1 + 4|c_l|^2(2\cos 2\varphi_l + |\sin 2\varphi_l|) < a_k^4 + 14a_k^2 + 17 \iff \\
4|c_l|^2(2\cos 2\varphi_l + |\sin 2\varphi_l|) - 16 < 16a_k^2.
\end{gathered}$$

| Потрібно вибрати a_k таке, що $a_k^2 > \frac{1}{4}|c_l|^2(2\cos 2\varphi_l + |\sin 2\varphi_l|) - 1$.

Для $k+1$ нуля функції $f(t)$ підберемо a_k так, щоб справджувалася оцінка

$$a_k^2 > \max_{1\le l\le k+1} \frac{|c_l|^2}{4}(2\cos 2\varphi_l + |\sin 2\varphi_l|) - 1.$$

Отже, $\exists r > 0$ (у нас $r \in (2;3)$) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists z^0 + t_0\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$ (див. (5.24)), для якого $n(r, z^0 + t^0\mathbf{b}, \frac{1}{f}) \ge k+1 > k$.

Робимо висновок, що функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$. □

Поєднуючи твердження 5.2 та 5.3 в одне твердження, отримуємо

Теорема 5.1. *Нехай $f(t)$, $t \in \mathbb{C}$, — парна ціла трансцендентна функція обмеженого індексу. Тоді: 1) для кожного напрямку $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ та кожної фіксованої пари z_1^0, $z_2^0 \in \mathbb{C}$ функція $g(t) = f(\sqrt{(z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t)})$ є цілою функцією обмеженого індексу ($t \in \mathbb{C}$); 2) функція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є необмеженого індексу за кожним напрямком $\mathbf{b}$.*

Ця теорема повністю вирішує проблему 5.1.

5.2.3 Приклад функції необмеженого індексу за напрямком в обмеженій області

У наших дослідженнях обмеженості L-індексу за напрямком ми часто розглядали зрізки $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$. Потім фіксували $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та застосовували міркування з одновимірного випадку. Після цього будували рівномірні оцінки по усіх z^0. Це стислий опис методу.

Виходячи з цього, проф. С. Ю. Фаворов (2015) поставив таку **проблему** в розмові з проф. О. Б. Скасківим.

Проблема 5.3. *Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — заданий напрямок, $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція. Чи можна замінити умову „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“ на умову „F — голоморфна на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ та з цього вивести усі відомі властивості цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком?*

Наша відповідь на питання Фаворова є заперечною. Таке послаблення обмежень на функцію F не дозволяє довести деякі теореми. Тут через $\overline{D}$ позначимо замикання області D.

Твердження 5.4. *Для кожного напрямку $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ існує функція $F(z)$ та обмежена область $D \subset \mathbb{C}^n$ з такими властивостями:*

1) *F є голоморфною на кожній зрізці $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$;*
2) *F не є цілою функцією в $\mathbb{C}^n$;*
3) *F не задовольняє (5.1) в $\overline{D}$, тобто для будь-якого $p \in \mathbb{Z}_+$ існує $m \in \mathbb{Z}_+$ та $z_p \in \overline{D}$*

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z_p)|}{m!} > \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z_p)|}{k!} : 0 \le k \le p\right\}.$$

Доведення. Без зменшення загальності, вважаємо, що $n = 2$ та $\mathbf{b} = (0, 1)$. Нехай

$$F(z_1, z_2) = \begin{cases} -1 + z_1 \sin \frac{z_2}{z_1}, & z_1 \neq 0, \\ -1, & z_1 = 0. \end{cases}.$$

Для кожного фіксованого $z_1^0 \in \mathbb{C}$ функція $F(z_1, z_2)$ голоморфна за змінною z_2, тобто, F — голоморфна на кожній зрізці $z = z^0 + t\mathbf{b}$, де $z^0 = (z_1^0, 0)$, $t \in \mathbb{C}$. З іншої сторони, F не є цілою в $\mathbb{C}^2$.

Якщо $z_1 = 0$, то $\partial_{\mathbf{b}}^k F = 0$ а якщо $z_1 \neq 0$, то

$$\partial_{\mathbf{b}}^k F(z_1, z_2) = z_1^{1-k} \sin(\frac{z_2}{z_1} + \frac{\pi k}{2}) \ (k \in \mathbb{N}). \tag{5.34}$$

Звідси для кожного фіксованого $z_1^0 \in \mathbb{C}$ функція $F(z_1^0, z_2)$ має обмежений індекс за змінною z_2, бо $\frac{(z_1^0)^{1-k}}{k!} \to 0$ при $k \to \infty$.

Тим не менш, функція $F(z_1, z_2)$ є необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Навіть більше, F має необмежений індекс у будь-якій замкненій обмеженій області G, що містить частину площини $z_1 = 0$ з деяким околом: $D \supset \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq R, |z_2| \leq R\}$.

Позначимо $g_0(z_2) = F(z_1^0, z_2)$. Дійсно функція $\sin t$ $(t \in \mathbb{C})$ має індекс 2. Тоді з врахуванням (5.34) індекс функції $g_0(z_2)$ можна встановити з таких обмежень:

$$\frac{|z_1^0|^{1-k}}{k!} \geq \frac{|z_1^0|^{1-(k+2)}}{(k+2)!} \Longleftrightarrow |z_1^0|^2 \geq \frac{1}{(k+1)(k+2)} \Longleftrightarrow$$
$$(k+1)(k+2) \geq \frac{1}{|z_1^0|^2} \Longrightarrow (k+2)^2 > \frac{1}{|z_1^0|^2} \Longrightarrow k > \frac{1}{|z_1^0|} - 2.$$

Тому, індекс функції g_0 більший за $\frac{1}{|z_1^0|} - 2$, тобто, $N(g_0) > \frac{1}{|z_1^0|} - 2$. За умови $z_1^0 \to 0$ маємо, що $N(g_0) \to +\infty$. Тому функція F має необмежений індекс за напрямком $\mathbf{b}$: $N_{\mathbf{b}}(F) = \sup\limits_{z_1^0 \in \mathbb{C}} N(g_0) = +\infty$, тобто, F не задовольняє (5.1) у $\mathbb{C}^2$.

Подібно міркуючи, можна довести, що (5.1) не виконується для функції F в області D. Легко бачити, що функція F не є неперервною за сукупністю змінних. Вона має розрив при $z_1 = 0$. □

Якщо ми замінимо умову голоморфності в $\mathbb{C}^n$ на голоморфність за зрізками $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$, то висновок леми 5.1 не чинний. Отже, твердження 5.4 показує неможливість заміни голоморфності за сукупністю змінних на голоморфність на зрізках без будь-яких додаткових обмежень.

Нехай тепер D — довільна обмежена область в $\mathbb{C}^n$. Якщо нерівність (2.2) виконується для всіх $z \in D$ замість $\mathbb{C}^n$, то F називається *функцією обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b}$ *в області* D. Найменше таке ціле число m_0 називається *L-індексом за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *в області* D та позначається $N_{\mathbf{b}}(F, L, D) = m_0$. Через $\overline{D}$ позначимо замикання області D.

Лема 5.1. *Нехай D — довільна обмежена область у $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — довільний напрямок. Якщо $L\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ неперервна функція та $F(z)$ — ціла функція така, що $(\forall z^0 \in \overline{D})\colon \quad F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$, то $N_{\mathbf{b}}(F, L, D) < \infty$.*

Доведення цієї леми подібне до доведення леми 2.9, яка стосується аналітичних в кулі функцій, тому пропускається. Також його можна знайти в [30, 44].

5.3 Сума цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком

Відомо, що добуток двох цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком є функцією з того самого класу (див. [30, 259]). Але клас цілих функцій обмеженого індексу не є замкненим відносно операції додавання. Відповідний приклад побудований В. Пуджем (див. [174] і також [206]). Приклад з наступного підрозділу 5.3.1 є узагальненням прикладу Пуджа для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком [250].

5.3.1 Приклад функцій обмеженого індексу за напрямком, сума яких є необмеженого індексу за напрямком Нижче наведено приклад функцій обмеженого індексу за напрямком, сума яких є функцією необмеженого індексу за тим самим напрямком. Наша побудова базується на ідеях зі статті Пуджа [174] (також див. [206, с.36]).

Приклад 5.1. Нехай $F(z) = \cos\langle z, c\rangle + \cosh\langle z, c\rangle$, де $c \in \mathbb{C}^n$ вибране так, що $\langle c, \overline{\mathbf{b}}\rangle = 1$. Позаяк $\partial_{\mathbf{b}}^4 F(z) \equiv F(z)$, для $p \geq 4$ маємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z)|}{p!} \leq \frac{G(z)}{4}, \tag{5.35}$$

де $G(z) = \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k!} : 0 \leq k \leq 3\right\}$. Отже, $F(z)$ — обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$ і $N_{\mathbf{b}}(F) = 3$.

Повторюючи міркування з [174], отримаємо, що

$$(\forall z \in \mathbb{C}^n)\colon \ G(z) \geq A \exp\{0,5|\langle z, c\rangle|\}, \ A = const > 0.$$

Розглянемо функцію $\Phi(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + \langle z, c\rangle 2^{-j})^j$. Як відомо, вона є функцією необмеженого індексу за кожним напрямком $\mathbf{b}$ таким, що $\langle \mathbf{b}, c\rangle \neq 0$, бо кратність її нулів необмежена (див. також приклад 1.4 [30, с.19]). Позначивши $t = \langle z, c\rangle$, отримаємо функцію $\varphi(t) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + t2^{-j})^j$, яка є функцією від однієї комплексної змінної. Для неї у статті [174] отримані такі співвідношення

$$\frac{|\varphi^{(p)}(t)|}{p!} \leq BM(2r, \varphi), \ M(2r, \varphi) \leq C \exp\{0,5|\langle z, c\rangle|\} \leq C'G(z), \tag{5.36}$$

де $|t| = r$, $B = M(2, \varphi) \geq 1$, $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(t)| : \ |t| = r\}$, $|\langle z, c\rangle| = 2r$, C, C' — додатні сталі.

Нехай $\varepsilon > 0$ досить мала стала, $H(z) = F(z) + \varepsilon\Phi(z)$. Тоді, з врахуванням (5.35) та (5.36) для $n \geq 4$

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p H(z)|}{p!} \leq \frac{G(z)}{4} + \varepsilon BM(2r, \varphi) \leq \left(\frac{1}{4} + \varepsilon BC'\right) G(z). \tag{5.37}$$

А для $n \leq 3$ з (5.36) випливає

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p H(z)|}{p!} \geq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z)|}{p!} - \varepsilon BM(2r, \varphi) \geq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z)|}{p!} - \varepsilon BC'G(z),$$

тобто,

$$\max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p H(z)|}{p!} : \ 0 \leq p \leq 3\right\} \geq G(z) - \varepsilon BCG(z) = (1 - \varepsilon BC')G(z). \tag{5.38}$$

З (5.37) та (5.38) при $\varepsilon = \dfrac{3}{8BC'}$ тепер отримуємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p H(z)|}{p!} \leq \frac{1/4 + \varepsilon BC'}{1 - \varepsilon BC'} \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k H(z)|}{k!} : 0 \leq k \leq 3\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k H(z)|}{k!} : 0 \leq k \leq 3\right\}.$$

Отже, H — функція обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$ і $N_{\mathbf{b}}(H) = 3$. Водночас, F — функція обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$, але $\Phi(z) = \frac{H(z)-F(z)}{\varepsilon}$ — необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$.

5.3.2 Обмеженість L-індексу за напрямком суми цілих функцій. Відомі достатні умови обмеженості індексу для суми двох цілих функцій від однієї змінної [174]. Але подібні умови наразі ніхто не отримав для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком чи навіть обмеженого l-індексу у випадку цілих функцій від однієї змінної. Тому, в цьому підрозділі розглянемо таке природне **питання**: *які достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком для суми двох цілих функцій?*

Нам потрібна така теорема.

Теорема X ([254], [259, теорема 3.4])**.** *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. Ціла функція $F(z)$ в $\mathbb{C}^n$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли для будь-яких r_1 та r_2, $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, існує число $P_1 = P_1(r_1, r_2) \geq 1$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $t_0 \in \mathbb{C}$*

$$\max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t - t_0| = \frac{r_2}{L(z^0 + t_0\mathbf{b})}\right\} \leq$$
$$\leq P_1 \max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t - t_0| = \frac{r_1}{L(z_0 + t_0\mathbf{b})}\right\}. \tag{5.39}$$

Розглянемо довільну гіперплощину $A = \{z \in \mathbb{C}^n : \ \langle z, c\rangle = 1\}$, де $\langle c, \mathbf{b}\rangle \neq 0$, та зафіксуємо її. Очевидно, що $\bigcup_{z^0 \in A}\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^n$.

Нехай $z^0 \in A$ — задана точка. Якщо $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$ як функція змінної $t \in \mathbb{C}$, то існує точка $t_0 \in \mathbb{C}$ така, що $F(z^0 + t_0\mathbf{b}) \neq 0$. Отже, для кожної прямої $\{z^0 + t\mathbf{b} : F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0\}$ фіксуємо одну точку t_0 з вказаною властивістю. Лише в даному підрозділі через B позначимо об'єднання цих точок $z^0 + t_0\mathbf{b}$, тобто,

$$B = \bigcup_{\substack{z^0 \in A \\ F(z^0+t\mathbf{b}) \not\equiv 0}} \{z^0 + t_0\mathbf{b}\}.$$

Зрозуміло, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ знайдеться $z^0 \in A$ та $t \in \mathbb{C}$ з властивістю $z = z^0 + t\mathbf{b}$. Справді, $z^0 = z + \frac{1-\langle z,c\rangle}{\langle \mathbf{b},c\rangle}\mathbf{b}$, $t = \dfrac{\langle z, c\rangle - 1}{\langle \mathbf{b}, c\rangle}$.

Теорема 5.2. *Нехай L — додатна неперервна функція, а F, G — цілі функції в $\mathbb{C}^n$, які задовольняють такі умови:*

1) *$G(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ з $N_b(G, L) = N < +\infty$;*
2) *існує $\alpha \in (0, 1)$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ та $p \geq N + 1$ ($p \in \mathbb{N}$)*
$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p G(z)|}{p! L^p(z)} \leq \alpha \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k G(z)|}{k! L^k(z)} : 0 \leq k \leq N\right\}; \tag{5.40}$$
3) *для кожного $z = z^0 + t\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, де $z^0 \in A$, $z^0 + t_0\mathbf{b} \in B$ та $r = |t - t_0|L(z^0 + t\mathbf{b})$, виконується нерівність*
$$\max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\} \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k G(z^0 + t\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0 + t\mathbf{b})} : \ 0 \leq k \leq N\right\}; \tag{5.41}$$
4) *$(\exists c > 0)(\forall z^0 + t_0\mathbf{b} \in B)(\forall t \in \mathbb{C}, \ |t - t_0|L(z^0 + t\mathbf{b}) \leq 1)$:*
$$\max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\} \Big/ |F(z^0 + t_0\mathbf{b})| \leq c < +\infty,$$
або для $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$ $(\exists c > 0)(\forall z^0 + t_0\mathbf{b} \in B)$:
$$\max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)}{L(z^0 + t_0\mathbf{b})}\right\} \Big/ |F(z^0 + t_0\mathbf{b})| \leq c < +\infty. \tag{5.42}$$

Тоді для кожного $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| \leq \frac{1-\alpha}{2c}$, функція
$$H(z) = G(z) + \varepsilon F(z) \tag{5.43}$$
має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ та $N_{\mathbf{b}}(H, L) \leq N$.

Доведення. Запишемо формулу Коші для цілої функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ як функції однієї комплексної змінної t
$$\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z^0 + t\mathbf{b})}{p!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t'-t| = \frac{r}{L(z^0+t\mathbf{b})}} \frac{F(z^0 + t'\mathbf{b})}{(t' - t)^{p+1}} dt'. \tag{5.44}$$

Для вибраного $r = |t - t_0|L(z^0 + t\mathbf{b})$ справджується така нерівність

$$\frac{r}{L(z^0 + t\mathbf{b})} = |t' - t| \geq |t' - t_0| - |t - t_0| = |t' - t_0| - \frac{r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}.$$

Звідси,

$$|t' - t_0| \leq \frac{2r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}. \tag{5.45}$$

Рівність (5.44) дає таке

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0 + t\mathbf{b})|}{p! L^p(z^0 + t\mathbf{b})} \leq \frac{1}{2\pi L^p(z^0 + t\mathbf{b})} \cdot \frac{L^{p+1}(z^0 + t\mathbf{b})}{r^{p+1}} \times$$
$$\times \frac{2\pi r}{L(z^0 + t\mathbf{b})} \cdot \max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t| = \frac{r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{r^p} \max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\}. \tag{5.46}$$

Якщо $r = |t - t_0|L(z^0 + t\mathbf{b}) > 1$, то (5.46) має наслідком

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0 + t\mathbf{b})|}{p! L^p(z^0 + t\mathbf{b})} \leq \max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\}. \tag{5.47}$$

Нехай $r = |t - t_0|L(z^0 + t\mathbf{b}) \in (0; 1]$. Взявши $r = 1$ в (5.44) та (5.45), подібно можна вивести

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0 + t\mathbf{b})|}{p! L^p(z^0 + t\mathbf{b})} \leq \max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\} =$$
$$= \frac{\max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\}}{\max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : |t' - t_0| = \frac{2r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\}} \times$$
$$\times \max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\} \leq$$
$$\leq \frac{\max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : |t' - t_0| = \frac{2}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\}}{|F(z^0 + t_0\mathbf{b})|} \times$$
$$\times \max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\} \leq$$
$$\leq c \max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2r}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\}, \tag{5.48}$$

де

$$c = \sup_{z^0 + t_0\mathbf{b} \in B} \ \sup_{\substack{t \in \mathbb{C}, \\ |t - t_0|L(z^0 + t\mathbf{b}) \leq 1}} \frac{\max\left\{|F(z^0 + t'\mathbf{b})| : \ |t' - t_0| = \frac{2}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\}}{|F(z^0 + t_0\mathbf{b})|} \geq 1.$$

Якщо $L \in Q$, то $\sup\left\{\frac{L(z^0 + t_0\mathbf{b})}{L(z^0 + t\mathbf{b})} : \ |t - t_0| \leq \frac{1}{L(z^0 + t\mathbf{b})}\right\} \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}(1)$. Це означає, що

$L(z^0+t\mathbf{b}) \geq \frac{L(z^0+t_0\mathbf{b})}{\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)}$. Використовуючи отриману нерівність, вибираємо

$$c := \sup_{z^0+t_0\mathbf{b}\in B} \frac{\max\left\{|F(z^0+t'\mathbf{b})| : \ |t'-t_0| = \frac{2\lambda_2^{\mathbf{b}}(1)}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}}{|F(z^0+t_0\mathbf{b})|} \geq 1$$

у (5.48). Беручи до уваги (5.47) та (5.48), маємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0+t\mathbf{b})|}{p!L^p(z^0+t\mathbf{b})} \leq c\max\left\{|F(z^0+t'\mathbf{b})| : \ |t'-t_0| = \frac{2r}{L(z^0+t\mathbf{b})}\right\} \tag{5.49}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}\cup\{\mathbf{0}\}$, $r \geq 0$, $z^0 \in A$, $t \in \mathbb{C}$.

Продиференціюємо (5.43) p раз, $p \geq N+1$, та застосуємо (5.40), (5.49) і (5.41) до отриманої рівності

$$\begin{aligned}\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p H(z^0+t\mathbf{b})|}{p!L^p(z^0+t\mathbf{b})} &\leq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p G(z^0+t\mathbf{b})|}{p!L^p(z^0+t\mathbf{b})} + \frac{|\varepsilon||\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0+t\mathbf{b})|}{p!L^p(z^0+t\mathbf{b})} \leq \\ &\leq \alpha\max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k G(z^0+t\mathbf{b})|}{k!L^k(z^0+t\mathbf{b})} : 0 \leq k \leq N\right\} + \\ &+c|\varepsilon|\max\left\{|F(z^0+t'\mathbf{b})| : \ |t'-t_0| = \frac{2r}{L(z^0+t\mathbf{b})}\right\} \leq \\ &\leq (\alpha+c|\varepsilon|)\max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k G(z^0+t\mathbf{b})|}{k!L^k(z^0+t\mathbf{b})} : 0 \leq k \leq N\right\}.\end{aligned} \tag{5.50}$$

Якщо $s \leq N$, то (5.49) правильна при $p = s$, але (5.40) — хибна. Тому диференціювання рівності (5.43) приводить до такої оцінки

$$\begin{aligned}\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^s H(z^0+t\mathbf{b})|}{s!L^s(z^0+t\mathbf{b})} &\geq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^S G(z^0+t\mathbf{b})|}{s!L^s(z^0+t\mathbf{b})} - \frac{|\varepsilon||\partial_{\mathbf{b}}^s F(z^0+t\mathbf{b})|}{s!L^s(z^0+t\mathbf{b})} \geq \\ \geq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^s G(z^0+t\mathbf{b})|}{s!L^s(z^0+t\mathbf{b})} &- c|\varepsilon|\max\left\{|F(z^0+t'\mathbf{b})| : |t'-t_0| = \frac{2r}{L(z^0+t\mathbf{b})}\right\},\end{aligned} \tag{5.51}$$

де $0 \leq s \leq N$. З (5.41) та (5.51) одержуємо

$$\max_{0\leq s\leq N}\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^s H(z^0+t\mathbf{b})|}{s!L^s(z^0+t\mathbf{b})}\right\} \geq (1-c|\varepsilon|)\max_{0\leq s\leq N}\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^s G(z^0+t\mathbf{b})|}{s!L^s(z^0+t\mathbf{b})}\right\}. \tag{5.52}$$

Якщо $c|\varepsilon| < 1$, то з (5.50) та (5.52) випливає

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p H(z^0+t\mathbf{b})|}{p!L^p(z^0+t\mathbf{b})} \leq \frac{\alpha+c|\varepsilon|}{1-c|\varepsilon|}\max_{0\leq s\leq N}\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^s H(z^0+t\mathbf{b})|}{s!L^s(z^0+t\mathbf{b})}\right\} \tag{5.53}$$

для $p \geq N+1$. Припустимо, що $\frac{\alpha+c|\varepsilon|}{1-c|\varepsilon|} \leq 1$. Звідси, $|\varepsilon| \leq \frac{1-\alpha}{2c}$.

Нехай $N_{\mathbf{b}}(z^0+t\mathbf{b}, L, F)$ буде L-індексом за напрямком функції F у точці $z^0+t\mathbf{b}$, тобто, $N_{\mathbf{b}}(z^0+t\mathbf{b}, L, F)$ — найменше число m_0, для якого нерівність (2.2) виконується з $z = z^0+t\mathbf{b}$.

Для $|\varepsilon| \leq \frac{1-\alpha}{2c}$ справедливість нерівності (5.53) означає, що для будь-яких $z^0 \in A$ та всіх $t \in \mathbb{C}$ таких, що $F(z^0+t\mathbf{b}) \neq 0$, L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ в точці $z^0+t\mathbf{b}$ не перевищує N, тобто, $N_{\mathbf{b}}(z^0+t\mathbf{b}, F, L) \leq N$.

Коли для деякого $z^0 \in A \quad F(z^0+t\mathbf{b}) \equiv 0$, ми маємо $H(z^0+t\mathbf{b}) \equiv G(z^0+t\mathbf{b})$ та $N_{\mathbf{b}}(z^0+t\mathbf{b}, F, L) = N_{\mathbf{b}}(z^0+t\mathbf{b}, G, L) \le N$. Отже, $H(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ з $N_{\mathbf{b}}(H, L) \le N$. Це завершує доведення теореми 5.2. □

Зауваження 5.2. Кожна ціла функція F з $N_{\mathbf{b}}(F, L) = 0$ задовольняє нерівність (5.42) (див. доведення необхідності відповідного критерію в [30, теорема 2.1] або [259, теорема 3.1]).

Якщо $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, то умова 2) в теоремі 5.2 завжди виконується. Справедлива така теорема.

Теорема 5.3. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, $\alpha \in (0,1)$ та F, G — цілі функції в $\mathbb{C}^n$, які задовольняють умови:*

1) *$G(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.*
2) *для кожного $z = z^0+t\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, де $z^0 \in A$, $z^0+t_0\mathbf{b} \in B$, та $r = |t-t_0|L(z^0+t\mathbf{b})$ виконується така нерівність*

$$\max\left\{|F(z^0+t'\mathbf{b})| : \ |t'-t_0| = \frac{2r}{L(z^0+t\mathbf{b})}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|\partial^k_{\mathbf{b}} G(z^0+t\mathbf{b})|}{k!L^k(z^0+t\mathbf{b})} : 0 \le k \le N_{\mathbf{b}}(G_\alpha, L_\alpha)\right\}.$$

3) $$c := \sup_{z^0+t_0\mathbf{b}\in B} \frac{\max\left\{|F(z^0+t'\mathbf{b})| : \ |t'-t_0| = \frac{2\lambda^{\mathbf{b}}_2(1)}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}}{|F(z^0+t_0\mathbf{b})|} < \infty.$$

Якщо $|\varepsilon| \le \frac{1-\alpha}{2c}$, то така функція $H(z) = G(z) + \varepsilon F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ з $N_{\mathbf{b}}(H, L) \le N_{\mathbf{b}}(G_\alpha, L_\alpha)$, де $G_\alpha(z) = G(z/\alpha)$, $L_\alpha(z) = L(z/\alpha)$.

Доведення. Умова 2) в теоремі 5.2 завжди справджується для $N = N_b(G_\alpha, L_\alpha)$ замість $N = N_{\mathbf{b}}(G, L)$. Дійсно за теоремою X нерівність (5.39) виконується для функції G. Підставляючи $\frac{z^0}{\alpha}$, $\frac{t}{\alpha}$ та $\frac{t_0}{\alpha}$ замість z^0, t та t_0 в (5.39) отримаємо

$$\max\left\{|G((z^0+t\mathbf{b})/\alpha)| : |t-t_0| = \frac{r_2\alpha}{L((z^0+t_0\mathbf{b})/\alpha)}\right\} \le$$
$$\le P_1 \max\left\{|G((z^0+t\mathbf{b})/\alpha)| : |t-t_0| = \frac{r_1\alpha}{L((z_0+t_0\mathbf{b})/\alpha)}\right\}. \tag{5.54}$$

За теоремою X нерівність (5.54) означає, що $G_\alpha = G(z/\alpha)$ має обмежений L_α-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ і навпаки. Звідси для $p \ge N_{\mathbf{b}}(G_\alpha, L_\alpha) + 1$ та $\alpha \in (0,1)$

$$\frac{|\partial^p_{\mathbf{b}} G_\alpha(z)|}{p!L^p_\alpha(z)} = \frac{|\partial^p_{\mathbf{b}} G(z/\alpha)|}{p!\alpha^p L^p(z/\alpha)} \le \max\left\{\frac{|\partial^s_{\mathbf{b}} G_\alpha(z)|}{s!L^s_\alpha(z)} : \ 0 \le s \le N_{\mathbf{b}}(G_\alpha, L_\alpha)\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{|\partial^s_{\mathbf{b}} G(z/\alpha)|}{s!\alpha^s L^s(z/\alpha)} : \ 0 \le s \le N_{\mathbf{b}}(G_\alpha, L_\alpha)\right\}.$$

Домножуючи на α^p, ми виводимо

$$\frac{|\partial^p_{\mathbf{b}} G(z/\alpha)|}{p!L^p(z/\alpha)} \le \max\left\{\frac{\alpha^{p-s}|\partial^s_{\mathbf{b}} G(z/\alpha)|}{s!L^s(z/\alpha)} : \ 0 \le s \le N_{\mathbf{b}}(G_\alpha, L_\alpha)\right\} \le$$

$$\leq \alpha \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^s G(z/\alpha)|}{s! L^s(z/\alpha)} : \ 0 \leq s \leq N_{\mathbf{b}}(G_\alpha, L_\alpha)\right\}. \tag{5.55}$$

З огляду на довільність z, з нерівності (5.55) випливає (5.40). □

Зауваження 5.3. Легко довести, що $N_{\mathbf{b}}(G_\alpha, L_\alpha) \leq N_{\mathbf{b}}(G, L)$ для $\alpha \in (0, 1)$. Тоді $N_{\mathbf{b}}(G_\alpha, L_\alpha)$ у теоремі 5.3 можна замінити на $N_{\mathbf{b}}(G, L)$.

На жаль, теорема 5.3 не дозволяє позбутися обмеження $(\forall z \in \overline{D})$: $F(z + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$ у лемі 5.1.

Теорема 5.2 є новою для $n = 1$, а теорема 5.3 є новою навіть у випадку $n = 1$ та $l \equiv 1$, тобто, для цілих функцій обмеженого індексу.

5.4 Модифіковані твердження про обмеженість L-індексу за напрямком

У даному підрозділі послабимо достатні умови в ряді тверджень про обмеженість L-індексу за напрямком.

5.4.1 Локальне поводження похідних за напрямком. Нам буде потрібний такий критерій обмеженості L-індексу за напрямком.

Теорема XI ([254], [259, теорема 3.1]). *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $\eta > 0$ існують числа $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ знайдеться $k_0 = k_0(t_0, z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого виконується нерівність*

$$\max\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z + t\mathbf{b})| : |t| \leq \frac{\eta}{L(z)}\} \leq P_1 |\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z)|.$$

Запис $L \asymp L^*$ означає, що для деякого θ_1, θ_2, $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < +\infty$ та всіх $z \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність $\theta_1 L(z) \leq L^*(z) \leq \theta_2 L(z)$.

Нам також потрібне таке твердження.

Теорема XII ([254], [259, твердження 3.1]). *Нехай $L, L^* \in Q_{\mathbf{b}}^n$, $L \asymp L^*$. Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, є функцією обмеженого L^*-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли F має обмежений L-індекс за тим самим напрямком $\mathbf{b}$.*

У підрозділі 5.3 сформулювали теорему X, яка є критерієм обмеженості L-індексу за напрямком у вигляді оцінки максимуму модуля на більшому колі через максимум модуля на меншому колі. Водночас було отримано дещо слабше в одну сторону твердження, а саме:

Теорема XIII ([254], [259, теорема 3.5]). *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. Ціла функція $F(z)$ в $\mathbb{C}^n$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існують числа r_1 та r_2, $0 < r_1 < 1 < r_2 < +\infty$, та $P_1 \geq 1$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $t_0 \in \mathbb{C}$ виконується нерівність* (5.39).

Ці теореми відрізняють кванторами загальності та існування для r_1 та r_2 таких, що $0 < r_1 < 1 < r_2 < +\infty$.

Звідси, виникає таке природне питання: *чи можливо змінити квантори в інших критеріях обмеженості L-індексу за напрямком?*.

Використовуючи ідею Фріке з [108], отримаємо модифікацію теореми XI.

Теорема 5.4. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Якщо існують сталі $\eta > 0$, $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ існує $k_0 = k_0(z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого виконується нерівність*

$$\max\{|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z + t\mathbf{b})| : |t| \leq \eta/L(z)\} \leq P_1 |\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z)|,$$

то ціла функція $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Доведення. Припустимо, що існують $\eta > 0$, $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ знайдеться $k_0 = k_0(z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого

$$\max\{|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z + t\mathbf{b})| : |t| \leq \frac{\eta}{L(z)}\} \leq P_1 |\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z)|. \tag{5.56}$$

Якщо $\eta > 1$, то виберемо $j_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $P_1 \leq \eta^{j_0}$. А для $\eta \in (0; 1]$ вибираємо $j_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\frac{j_0! k_0!}{(j_0+k_0)!} P_1 < 1$. Це j_0 знайдеться тому, що

$$\frac{j_0! k_0!}{(j_0 + k_0)!} P_1 = \frac{k_0!}{(j_0 + 1)(j_0 + 2) \cdot \ldots \cdot (j_0 + k_0)} P_1 \to 0, \ j_0 \to \infty.$$

Застосовуючи формулу Коші до функції $F(z + t\mathbf{b})$ як функції від однієї комплексної змінної t при $j \geq j_0$ отримаємо, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ знайдеться ціле число $k_0 = k_0(z)$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, і

$$\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}} F(z) = \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{|t| = \frac{\eta}{L(z)}} \frac{\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z + t\mathbf{b})}{t^{j+1}} dt.$$

Беручи до уваги (5.56), отримуємо

$$\frac{|\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}} F(z)|}{j!} \leq \frac{L^j(z)}{\eta^j} \max\left\{|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z + t\mathbf{b})| : \ |t| = \frac{\eta}{L(z)}\right\} \leq P_1 \frac{L^j(z)}{\eta^j} |\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z)|. \tag{5.57}$$

Зважаючи на вибір j_0 для $\eta > 1$ і для всіх $j \geq j_0$ маємо

$$\frac{|\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}} F(z)|}{(k_0 + j)! L^{k_0+j}(z)} \leq \frac{j! k_0!}{(j + k_0)!} \frac{P_1}{\eta^j} \frac{|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z)|}{k_0! L^{k_0}(z + t_0\mathbf{b})} \leq \eta^{j_0 - j} \frac{|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z)|}{k_0! L^{k_0}(z)} \leq \frac{|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z)|}{k_0! L^{k_0}(z)}.$$

Оскільки $k_0 \leq n_0$, числа $n_0 = n_0(\eta)$ та $j_0 = j_0(\eta)$ незалежні від z та t_0, а $z \in \mathbb{C}^n$ і $t_0 \in \mathbb{C}$ — довільні, остання нерівність рівносильна твердженню, що F є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ та $N_{\mathbf{b}}(F, L) \leq n_0 + j_0$.

Якщо $\eta \in (0, 1)$, то з (5.57) дістаємо для всіх $j \geq j_0$

$$\frac{|\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}} F(z)|}{(k_0 + j)! L^{k_0+j}(z)} \leq \frac{j! k_0! P_1}{(j + k_0)!} \frac{|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z)|}{\eta^j k_0! L^{k_0}(z)} \leq \frac{|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}} F(z)|}{\eta^j k_0! L^{k_0}(z)}$$

або через вибір j_0

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0+j}F(z)|}{(k_0+j)!}\frac{\eta^{k_0+j}}{L^{k_0+j}(z)}\leq\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0}F(z)|}{k_0!}\frac{\eta^{k_0}}{L^{k_0}(z)}.$$

Отже, функція F має обмежений $\tilde{L}$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, де $\tilde{L}(z)=\frac{L(z)}{\eta}$. Тоді за теоремою XII функція F обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Теорему доведено. □

Наступне твердження нескладно отримується безпосередньо з означення обмеженого L-індексу за напрямком.

Твердження 5.5. *Нехай $L(z)$ — додатна неперервна функція. Ціла функція $F(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$, має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли функція $G(z)=F(\mathbf{a}z+\mathbf{c})$ має обмежений L_*-індекс за напрямком $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ для будь-яких $\mathbf{c}\in\mathbb{C}^n$ та $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^n$ таких, що $a_j\neq 0$ $(\forall j)$, де $\mathbf{a}z+\mathbf{c}=(a_1z_1+c_1,\ldots,a_nz_n+c_n)$, $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}=(\frac{b_1}{a_1},\ldots,\frac{b_n}{a_n})$, $L_*(z)=L(\mathbf{a}z+\mathbf{c})$.*

Доведення. Нехай ціла функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n$. Можна помітити, що

$$\partial_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}G(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial G(z)}{\partial z_j}\frac{b_j}{a_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{a}z+\mathbf{c})}{\partial z_j}a_j\frac{b_j}{a_j}=\partial_{\mathbf{b}}F(\mathbf{a}z+\mathbf{c}).$$

За індукцією легко довести таке $\partial_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}^kG(z)=\partial_{\mathbf{b}}^kF(\mathbf{a}z+\mathbf{c})$ для всіх $k\in\mathbb{N}$. З нерівності (2.2) при $\mathbf{a}z+\mathbf{c}$ замість z отримуємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}^mG(z)|}{m!L_*^m(z)}\leq\max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^kF(\mathbf{a}z+\mathbf{c})|}{k!L^k(\mathbf{a}z+\mathbf{c})}:0\leq k\leq m_0\right\}=\max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}^kG(z)|}{k!L_*^k(z)}:0\leq k\leq m_0\right\}.$$

Остання нерівність означає, що функція $G(z)$ є обмеженого L_*-індексу за напрямком $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ і навпаки. □

5.4.2 Оцінка максимуму модуля через мінімум модуля. У цьому і наступному підрозділі розглянемо два відкриті питання в класі цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком. Власне, доводимо дві гіпотези про характеристичні властивості функцій з цього класу [57]. Встановлені нами результати є новими навіть в одновимірному випадку. В достатніх частинах наслідків з них про обмеженість індексу та l-індексу вони покращують відповідні твердження Ґ. Х. Фріке (див. теорему 5 у [108] та теорему 2 в [104]), а також М. М. Шеремети, А. Д. Кузика (див. теореми 1 та 6 в [220]). На відміну від останніх тверджень, виявилось, що у відповідних умовах на цілу функцію досить вимагати, щоб вони виконувались лише для кола з деяким одним значенням радіуса замість вимоги їхнього виконання для усіх додатних значень радіуса. Перейдемо тепер до детального викладу.

Раніше нами отримано (див. [259], а також [30, 254]) цілий ряд критеріїв обмеженості L-індексу за напрямком, що є аналогами одновимірних критеріїв

обмеженості l-індексу. Крім того, виявлено, що деякі твердження (теореми XI та X) мають видозмінені сильніші версії, власне, їхнє посилення полягає в заміні кванторів загальності на квантори існування (див. теореми 5.4 та XIII).

Можемо послабити достатні умови теореми XIII, замінивши умову $0 < r_1 < 1 < r_2 < +\infty$ на $0 < r_1 < r_2 < +\infty$.

Твердження 5.6. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, F — ціла функція в $\mathbb{C}^n$. Якщо існують числа r_1 та r_2, $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, і $P_1 \geq 1$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність* (5.39)*, то функція F є обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b}$.

Доведення. Наше доведення базується на ідеї А. Д. Кузика та М. М. Шеремета з [273]. Вони запропонували цей метод для дослідження обмеженості l-індексу цілих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

З (5.39) при $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ випливає, що

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{2r_2}{r_1+r_2}\frac{r_1+r_2}{2L(z^0)}\right\} \leq$$
$$\leq P_1 \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{2r_1}{r_1+r_2}\frac{r_1+r_2}{2L(z_0)}\right\}.$$

Позначивши $L^*(z) = \frac{2L(z)}{r_1+r_2}$, отримаємо

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{2r_2}{(r_1+r_2)L^*(z^0)}\right\} \leq$$
$$\leq P_1 \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{2r_1}{(r_1+r_2)L^*(z^0)}\right\},$$

де $0 < \frac{2r_1}{r_1+r_2} < 1 < \frac{2r_2}{r_1+r_2} < +\infty$. Це означає, що F має обмежений L^*-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. А за теоремою XII функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. □

Наведемо ще таку теорему (див. [30, 254], [259, теорема 3.7]).

Теорема XIV ([30, 254], [259, теорема 3.7])**.** *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Ціла в $\mathbb{C}^n$ функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $R > 0$ існують $P_2(R) \geq 1$ та $\eta(R) \in (0, R)$ такі, що для усіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ і деякого $r = r(z^0) \in [\eta(R), R]$ справджується нерівність*

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\} \leq P_2 \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\}. \quad (5.58)$$

З врахуванням теореми 5.4 та твердження 5.6 в [57] було поставлено таке питання.

Проблема 5.4 ([57, Проблема 6])**.** *Чи правильна гіпотеза 5.1?*

Гіпотеза 5.1 ([57, Гіпотеза 1])**.** *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Ціла в $\mathbb{C}^n$ функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ тоді і тільки тоді, коли існують $R > 0$, $P_2(R) \geq 1$ та $\eta(R) \in (0, R)$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ і деякого $r = r(z^0) \in [\eta(R), R]$ виконується нерівність* (5.58).

З огляду на твердження 5.6 можемо повністю довести згадану гіпотезу. По суті, нам потрібно довести лише достатню частину цієї гіпотези, бо необхідність випливає з теореми XIV.

Теорема 5.5. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, F — ціла функція в $\mathbb{C}^n$. Якщо існують $R > 0$, $P_2 \geq 1$ та $\eta \in (0, R)$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та деякого $r = r(z^0) \in [\eta, R]$ виконується нерівність* (5.58)*, то функція F має обмежений L-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$.

Доведення. З огляду на твердження 5.6 досить показати, що існує число P_1 таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$

$$\max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = (R+1)/L(z^0)\right\} \leq \\ \leq P_1 \max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = R/L(z^0)\right\}. \tag{5.59}$$

Нехай знайдуться $R > 0$, $P_2 \geq 1$ та $\eta \in \big(0, R\big)$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та деякого $r = r(z^0) \in \big[\eta, R\big]$ маємо

$$\max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = r/L(z^0)\right\} \leq P_2 \min\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = r/L(z^0)\right\}.$$

Позначимо $L^* = \max\left\{L(z^0 + t\mathbf{b}) : |t| \leq (2R+2)/L(z^0)\right\}$, $\rho_0 = R/L(z^0)$, $\rho_k = \rho_0 + k\eta/L^*$, $k \in \mathbb{Z}_+$. У нас

$$\frac{\eta}{L^*} < \frac{R}{L^*} \leq \frac{R}{L(z^0)} < \frac{2R+2}{L(z^0)} - \frac{R+1}{L(z^0)}.$$

Тоді знайдеться $n^* \in \mathbb{N}$, незалежне від z^0 таке, що

$$\rho_{p-1} < \frac{R+1}{L(z^0)} \leq \rho_p \leq \frac{2R+2}{L(z^0)},$$

для деякого $p = p(z^0) \leq n^*$, бо $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Спершу

$$\left(\frac{2R+2}{L(z^0)} - \rho_0\right) \Big/ \left(\frac{\eta}{L^*}\right) = \frac{(R+2)L^*}{\eta L(z^0)} = \\ = \frac{R+2}{\eta} \max\left\{\frac{L(z^0 + t\mathbf{b})}{L(z^0)} : |t| \leq \frac{2R+2}{L(z^0)}\right\} \leq \frac{R+2}{\eta}\lambda_{\mathbf{b}}(2R+2).$$

Тому, $n^* = \left[\frac{R+2}{\eta}\lambda_{\mathbf{b}}(2R+2)\right]$, де $[a]$ — ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$. Нехай $|F(z^0 + t_k^{**}\mathbf{b})| = \max\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : t \in c_k\}$, $c_k = \{t \in \mathbb{C} : |t| = \rho_k\}$, та t_k^* — точка перетину відрізка $[0, t_k^{**}]$ з колом c_{k-1}. Тоді для кожного $r > \eta$ та кожного $k \leq n^*$ виконується нерівність $|t_k^{**} - t_k^*| = \frac{\eta}{L^*} \leq \frac{r}{L(z^0 + t_k^*\mathbf{b})}$. Отже, для деякого $r = r(z^0 + t_k^*\mathbf{b}) \in [\eta, R]$ виводимо

$$|F(z^0 + t_k^{**}\mathbf{b})| \leq \max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t - t_k^*| = r/L(z^0 + t_k^*\mathbf{b})\right\} \leq \\ \leq P_2 \min\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t - t_k^*| = r/L(z^0 + t_k^*\mathbf{b})\right\} \leq \\ \leq P_2 \min\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t - t_k^*| = r/L(z^0 + t_k^*\mathbf{b}), |t - t_0| \leq \rho_{k-1}\right\} \leq \\ \leq P_2 \max\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : t \in c_{k-1}\}.$$

Звідси,

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = (R+1)/L(z^0)\right\} \le$$
$$\le \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t\in c_p\} \le P_2 \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t\in c_{p-1}\} \le$$
$$\le \ldots \le (P_2)^p \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : t\in c_0\} \le$$
$$\le (P_2)^{n^*} \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = R/L(z^0)\right\}.$$

Отримали (5.59) з $P_1 = (P_2)^{n^*}$. Теорему 5.5 доведено. □

5.4.3 Оцінка логарифмічної похідної за напрямком У цьому підрозділі послабимо достатні умови в теоремі VIII. Одновимірний аналог теореми VIII продемонстрував свою ефективність при дослідженні обмеженості l-індексу нескінченних добутків в одновимірному випадку [70, 208, 214]. У підрозділі 6.3.1 також використано цей критерій при встановленні достатніх умов обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних у термінах поводження частинних логарифмічних похідних та розподілу нулів.

З огляду на теорему 5.4 та твердження 5.6 виглядає природною така проблема.

Проблема 5.5 ([57, Проблема 7]). *Чи правильна гіпотеза 5.2?*

Гіпотеза 5.2 ([57, Гіпотеза 2]). *Нехай $F(z)$ — ціла в $\mathbb{C}^n$ функція, $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:*

1) *існують $r > 0$, $P > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r$ виконується нерівність* (5.13)*;*
2) *існують $r > 0$, $\widetilde{n} \in \mathbb{Z}_+$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність* (5.14).

Накладаючи додаткове обмеження, ми доводимо цю гіпотезу. Позначимо

$$G_r(F) := G_r^{\mathbf{b}}(F) \bigcup_{z\colon F(z)=0} \{z + t\mathbf{b} \colon |t| < r/L(z)\}, \tag{5.60}$$

a_k^0 - нулі функції $F(z^0+t\mathbf{b})$ при фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Через $n_{z^0}(r,F) = n_{\mathbf{b}}\big(r, z^0, 1/F\big) := \sum_{|a_k^0|\le r} 1$ позначимо лічильну функцію нулів a_k^0 функції зрізки $F(z^0+t\mathbf{b})$в крузі $\{t \in \mathbb{C} \colon |t| \le r\}$. Якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та для всіх $t \in \mathbb{C}$ $F(z^0+t\mathbf{b}) \equiv 0$, то ми покладемо $n_{z^0}(r) = -1$. Позначимо $n(r) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} n_z(r/L(z))$. Якщо F є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, то безпосередньо з теореми 2.6 випливає, що виконуються умови 1) і 2) гіпотези 5.2. Тому займемося лише достатністю цих умов.

Теорема 5.6. *Нехай $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, $F(z)$ — ціла функція в $\mathbb{C}^n$. Якщо виконуються такі умови:*

1) *існують $r_1 > 0$, $P > 0$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}(F)$ правильна нерівність* (5.13)*;*

2) знайдеться $r_2 > 0$ таке, що $n(r_2) \in [-1;\infty)$ та $2r_1 \cdot n(r_2) < r_2/\lambda_{\mathbf{b}}(r_2)$, де r_1 — вибране з попередньої умови,

то функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Доведення. Вважаємо, що умови 1) та 2) виконуються.

Спершу розглянемо випадок, коли $n(r_2) \in [-1;0]$. Тоді функція F може лише тотожно дорівнювати нулю на промені $z^* + t\mathbf{b}$ для деяких $z^* \in \mathbb{C}^n$, тобто, $F(z^* + t\mathbf{b}) \equiv 0$. Для усіх точок з таких променів нерівність (5.58) є очевидною. Звідси за умовою 1) для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}$ $|\partial_{\mathbf{b}} F(z)| \le PL(z)|F(z)|$.

Нехай $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}$. Для будь-яких точок t_1 та t_2 таких, що $|t_j| = \frac{r_1}{L(z_0)}$, $j \in \{1,2\}$, виконується

$$\ln\left|\frac{F(z^0+t_2\mathbf{b})}{F(z^0+t_1\mathbf{b})}\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z^0+t\mathbf{b})}{F(z^0+t\mathbf{b})}\right||dt| \le$$

$$\le P\int_{t_1}^{t_2} L(z^0+t\mathbf{b})|dt| \le P\lambda_2(r_1)\,L(z^0)\frac{\pi r_1}{L(z^0)} \le \pi r_1 P\lambda_2(r_1)\,.$$

Звідси,

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r_1}{L(z^0)}\right\} \le P_2 \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : \ |t| = \frac{r_2}{L(z^0)}\right\},$$

де $P_2 = \exp\{\pi r_1 P\lambda_2(r_1)\}$. Тому за теоремою 5.5 функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Нехай тепер $r_2 > 0$ є таким, що $n(r_2) \in (0;\infty)$ та $2n(r_2)r_1 < r_2\lambda_1(r_2)$. Покладемо $c = \frac{r_2\lambda_1(r_2)}{2r_1} - n(r_2) > 0$. Зрозуміло, що тоді $r_1 = r_2\lambda_1(r_2)/(2(n(r_2)+c))$. За умовою 2) у кожній множині $\overline{K} = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| \le \frac{r_2}{L(z^0)}\right\}$ число нулів функції F, де $F(z^0+t\mathbf{b}) \not\equiv 0$, не перевищує $n(r_2)$.

За умовою 1) існує $P > 0$ таке, що $|\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)}| \le PL(z)$ для кожного $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}$, тобто, для всіх $z \in \overline{K}$, які лежать зовні таких множин $\left\{z^0 + t\mathbf{b} : \ |t - a_k^0| < \frac{r_1}{L(z^0+a_k^0\mathbf{b})}\right\}$, де $a_k^0 \in \overline{K}$ є нулями функції $F(z^0+t\mathbf{b}) \not\equiv 0$. За означенням λ_1 ми отримуємо

$$\lambda_1(r_2)L(z^0) \le L(z^0 + a_k^0\mathbf{b}).$$

Тоді $|\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)}| \le PL(z)$ для кожної точки $z \in \mathbb{C}^n$, що лежить зовні множин

$$c_k^0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - a_k^0| \le \frac{r_1}{\lambda_1(r_2)L(z^0)} = \frac{r_2}{2(n(r_2)+c)L(z^0)}\right\}.$$

Сума діаметрів множин c_k^0 не перевищує значення $\frac{r_2 n(r_2)}{(n(r_2)+c)L(z^0)} < \frac{r_2}{L(z^0)}$. Отже, існує множина $\widetilde{c}^0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\}$, де $\frac{r_2 \min\{1,c\}}{2(n(r_2)+c)} = \eta < r < r_2$, така, що для всіх $z \in \widetilde{c}^0$

$$|\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)}| \le PL(z) \le P\lambda_2(r)L(z^0) \le P\lambda_2(r_2)\,L(z^0).$$

Для довільних точок $z_1 = z^0 + t_1\mathbf{b}$ та $z_2 = z^0 + t_2\mathbf{b}$ з $\widetilde{c}^0$ маємо

$$\ln\left|\frac{F(z^0+t_2\mathbf{b})}{F(z^0+t_1\mathbf{b})}\right| \le \int_{t_1}^{t_2} |\frac{\partial_{\mathbf{b}}F(z^0+t\mathbf{b})}{F(z^0+t\mathbf{b})}||dt| \le$$
$$\le P\lambda_2(r_2)\,L(z^0)\frac{\pi r}{L(z^0)} \le \pi r_2\,P(r_1)\lambda_2(r_2)\,.$$

Звідси,

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\} \le P_2\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| :\ |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\}, \quad (5.61)$$

де $P_2 = \exp\{\pi r_2\,P(r_1)\lambda_2(r_2)\}$. Якщо $F(z^0+t\mathbf{b}) \equiv 0$, то нерівність (5.61) очевидна. За теоремою 5.5 функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. Теорему 5.6 доведено. □

Зауваження 5.4. Якщо $\inf\limits_{r>0} n(r) \ge 1$ (тобто, F має деякі нулі) та $\sup\limits_{r>0} \frac{r\lambda_1(r)}{2n(r)} > r_1$, то існує $r_2 > 0$, причому $r_1 < \frac{r_2\lambda_1(r_2)}{2n(r_2)}$. Водночас, при $n(r) \ge 1$ та $\sup\limits_{r>0} \frac{r}{2n(r)\lambda(r)} = +\infty$ для будь-якого $r_1 > 0$ знайдеться $r_2 > 0$ таке, що $r_1 < \frac{r_2}{2n(r_2)\lambda(r_2)}$.

Зауваження 5.5. Ми довели гіпотезу 5.2 за додаткового обмеження $2r_1n(r_2) < r_2\lambda_1(r_2)$. Наразі невідомо, чи ця умова є істотною. Тому виникає така проблема.

Проблема 5.6. Позначимо $r_0 = \sup\limits_{r>0} \frac{r\lambda_1(r)}{2n(r)}$. Чи існують ціла в $\mathbb{C}^n$ функція F та неперервна функція $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ з властивостями:

1) для деяких $r_1 > r_0$, $P > 0$ та всіх $z \in \mathbb{C}^n \backslash G_{r_1}$: $\quad |\partial_{\mathbf{b}}F(z)| \le PL(z)|F(z)|$;
2) для будь-якого $r_2 \in (0; r_0)$: $\quad \sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n\backslash G_{r_2}} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}F(z)|}{|F(z)|L(z)} = +\infty$ та $n(r_2) \in (0; +\infty)$?

Зауважимо, що теореми 5.5 та 5.6 є новими навіть для цілих в $\mathbb{C}$ функцій та $l = 1$ (порівн. [108], [104], [220]).

Нагадаємо деякі означення з теорії цілих функцій (подробиці див. в [159]). Порядок ρ та тип σ цілої функції $f(t)$ $(t \in \mathbb{C})$ визначаються так

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r},\ \sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}.$$

Наслідок 5.1. *Нехай $l \in Q$, f — ціла функція порядку $\rho \in (0, 1]$ та скінченного типу $\sigma > 0$, $t \in \mathbb{C}$, $r_0 := \varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^{\rho-1}\lambda_{\mathbf{b}}(r)}$. Якщо $r_0 > 0$ та існує $r_1 \in (0, \frac{r_0}{2e\rho\sigma})$, $P > 0$ таке. що для всіх $t \in \mathbb{C}\backslash G_{r_1}(f)$ виконується нерівність $\frac{|f'(t)|}{|f(t)|} \le Pl(t)$ та $n(r_1) \in [-1; \infty)$, функція f має обмежений l-індекс.*

Доведення. Якщо $f(t)$ — ціла функція скінченного типу σ та додатного порядку ρ, то ми маємо [159, с. 19, теорема 3] $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^\rho} \le e\rho\sigma$. Звідси, виводимо

$$0 < \frac{r_0}{2e\rho\sigma} \le \varliminf_{r\to\infty} \frac{r^\rho}{2n(r)} \cdot \frac{1}{r^{\rho-1}\lambda_{\mathbf{b}}(r)} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{r}{2n(r)\lambda_{\mathbf{b}}(r)}.$$

Тому, $r_1 < \frac{r}{2n(r)\lambda_{\mathbf{b}}(r)}$ для всіх $r \geq r^*$. Лишилося довести $n(r) \in (0, \infty)$ для всіх $r \geq r^*$.

Нехай $t_0 \in \mathbb{C}$ — довільне. Розглянемо коло $|t - t_0| \leq \frac{r}{l(t_0)}$. Позаяк $l \in Q$, кожний замкнений круг радіуса $\frac{r}{l(t_0)}$ може бути покритий скінченним числом $m = m(r)$ замкнених кругів радіуса $\frac{r_1}{\lambda_{\mathbf{b}}(r)l(t_0)} \leq \frac{r_1}{l(t_j)}$ з центрами t_j у крузі радіуса $\frac{r}{l(t_0)}$. Тоді $n(r) \leq m(r)n(r_1) < \infty$. За теоремою 5.6 функція f обмеженого l-індексу. □

Зазначимо, що подібні критерії (оцінки максимуму модуля, мінімуму модуля, логарифмічної похідної та розподілу нулів для довільних радіусів) також відомі для аналітичних в крузі та довільній області функцій однієї змінної [149,206,283], цілих функцій від декількох змінних й аналітичних в кулі та в полікрузі функцій від декількох змінних (див. розділи 6,3,4). Щоправда варто визнати, що як критерій отримано лише оцінки максимуму модуля для цілих та аналітичних функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних, а також як достатні умови з певними додатковими обмеженнями твердження, подібні до теорем XIV, VIII. Про них буде мова в розділах, присвячених цим класам функцій Наразі не відомо повних прямих аналогів теорем XIV, VIII для них.

5.5 Обмеженість індексу цілих розв'язків деяких диф.рівнянь

У даному підрозділу розглянемо ряд тверджень про обмеженість того чи іншого індексу цілих розв'язків деяких диф.рівнянь як в частинних, так і звичайних похідних.

5.5.1 Обмеженість L-індексу за напрямком цілих розв'язків деяких лінійних рівнянь з частинними похідними Спершу розглянемо таке рівняння з частинними похідними

$$g_0(z)\partial_{\mathbf{b}}^p w + g_1(z)\partial_{\mathbf{b}}^{p-1} w + \ldots + g_p(z)w = h(z), \tag{5.62}$$

де g_j, h — цілі функції в $\mathbb{C}^n$, $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$. Відомо достатні умови [55, 254] обмеженості L-індексу за напрямком для цілих розв'язків рівняння (5.62). У них, по суті, вимагається виконання деяких нерівностей зовні деяких кругів у певному сенсі довільного радіуса. Замінюючи в таких умовах квантор загальності ("довільного радіуса") на квантор існування ("деякого радіуса"), ми послабимо ці умови.

Нам потрібне таке твердження.

Теорема XV ([254], [259, лема 4.1]). *Нехай F — ціла функція обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. Тоді для кожного $r > 0$ та для кожного $m \in \mathbb{N}$ існують $P = P(r, m) > 1$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \backslash G_r(F)$ виконується нерівність $|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)| \leq PL^m(z)|F(z)|$.*

Позначимо $g^*(z) = h(z) \cdot \prod_{j=0}^{p} g_j(z)$, $n(r, g^*) = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n} n_{\mathbf{b}}(r/L(z), z, 1/g^*)$, $r^* = \sup\limits_{s\geq 1} \frac{(s-1)\lambda_1(s)}{8(n(s,g^*)+1)}$,

$$H(F) := \bigcup_{\substack{z\in Z_F \\ \forall t\in\mathbb{C}\ F(z+t\mathbf{b})\equiv 0}} \{z + t\mathbf{b} \colon t \in \mathbb{C}\},$$

де Z_F — нульова множина функції F. Використовуючи теорему XV, отримаємо таку теорему.

Теорема 5.7. *Нехай $L\in Q^n_{\mathbf{b}}$, та $g_0(z), \ldots, g_p(z), h(z)$ — цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Припустимо, що існують $r \in (0; r^*)$ та $T > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r(g_0)$ та $j = 1, \ldots, p$*

$$|g_j(z)| \leq T L^j(z) |g_0(z)|. \tag{5.63}$$

Тоді ціла функція F, яка задовольняє (5.62), має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Доведення. Теорема VIII та обмеження теореми 5.7 забезпечують виконання нерівностей $n(r, g^*) < +\infty$ та $r^* > 0$.

Позначимо $G_r = (G_r(h) \setminus H(h)) \cup G_r(g_0) \cup \bigcup_{j=1}^{p} (G_r(g_j) \setminus H(g_j))$. Вважаємо, що $\mathbb{C}^n \setminus G_r \neq \emptyset$. З теореми XV та нерівності (5.63) випливає, що існують $r \in (0; r^*]$ та $T^* > 0$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r$

$$|\partial_{\mathbf{b}} h(z)| \leq T^* |h(z)| L(z), \quad |g_j(z)| \leq T^* |g_0(z)| L^j(z), \quad j \in \{1, 2, \ldots, p, \},$$
$$|\partial_{\mathbf{b}} g_j(z)| \leq P(r) L(z) |g_j(z)| \leq T^*(r) |g_0(z)| L^{j+1}(z), \ j \in \{0, 1, 2, \ldots, p, \}.$$

Знайдемо від рівняння (5.62) похідну за напрямком $\mathbf{b}$:

$$g_0(z) \partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z) + \sum_{j=1}^{p} g_j(z) \partial_{\mathbf{b}}^{p+1-i} F(z) + \sum_{j=0}^{p} \partial_{\mathbf{b}} g_j(z) \partial_{\mathbf{b}}^{p-i} F(z) = \partial_{\mathbf{b}} h(z).$$

Отримана рівність означає, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r$:

$$|g_0(z)| \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z) \right| \leq |\partial_{\mathbf{b}} h(z)| + \sum_{j=1}^{p} |g_j(z)| \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p+1-j} F(z) \right| +$$
$$+ \sum_{j=0}^{p} |\partial_{\mathbf{b}} g_j(z)| \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p-j} F(z) \right| \leq T^* |h(z)| L(z) + \sum_{j=1}^{p} |g_j(z)| \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p+1-j} F(z) \right| +$$
$$+ \sum_{j=0}^{p} |\partial_{\mathbf{b}} g_j(z)| \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p-j} F(z) \right| \leq T^* L(z) \sum_{j=0}^{p} |g_j(z)| \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p-j} F(z) \right| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} |g_j(z)| \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p+1-j} F(z) \right| + \sum_{j=0}^{p} |\partial_{\mathbf{b}} g_j(z)| \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p-j} F(z) \right| \leq$$
$$\leq T^* |g_0(z)| \left(T^* L(z) \sum_{j=0}^{p} L^j(z) \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p-j} F(z) \right| + \sum_{j=1}^{p} L^j(z) \left| \partial_{\mathbf{b}}^{p+1-i} F(z) \right| + \right.$$

$$+\sum_{j=0}^{p} L^{j+1}(z)\left|\partial_{\mathbf{b}}^{p-j}F(z)\right|\Bigg) = T^*|g_0(z)|L^{p+1}(z)|\left((T^*+1)\times\right.$$

$$\times\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{L^{p-j}(z)}\left|\partial_{\mathbf{b}}^{p-j}F(z)\right| + \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{L^{p+1-j}(z)}\left|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1-i}F(z)\right|\Bigg) \le$$

$$\le T^*((T^*+1)(p+1)+p)|g_0(z)|L^{p+1}(z)\max_{0\le j\le p}\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j}F(z)|}{L^{j}(z)}.$$

Отже, існує $P_3 > 0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r$

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z)|}{L^{p+1}(z)} \le P_3 \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j}F(z)|}{L^{j}(z)} : 0 \le j \le p\right\}. \tag{5.64}$$

Якщо $z' \in A := H(g_0) \setminus \bigcup_{j=1}^{p}(G_r(g_j) \setminus H(g_j))$, то існує послідовність точок $z^m \in C^n \setminus G_r$, що задовольняють (5.64), і такі, що $z^m \to z'$ при $m \to \infty$. Підставляючи $z = z^m$ в (5.64) та переходячи до границі при $m \to \infty$, дістанемо, що нерівність справедлива для всіх $z \in A \cup (C^n \setminus G_r)$ Якщо $\mathbb{C}^n = A \cup (C^n \setminus G_r)$ (тобто, всі нулі функції g^* належать до $H(g^*)$), то за теоремою IV ціла функція, яка задовольняє (5.62), має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. Інакше, $n(s, g^*) \ge 1$.

Позаяк $r \in (0, r^*)$ та $r^* = \sup_{s\ge1}\frac{(s-1)\lambda_1(s)}{8(n(s,g^*)+1)}$, то знайдеться $r' \ge 1$ таке, що $r \le \frac{(r'-1)\lambda_1(r')}{8(n(r',g^*)+1)}$. Нехай z^0 — довільна точка з $\mathbb{C}^n$ та $K^0 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| \le r'/L(z^0)\right\}$. Оскільки цілі функції $g_0, g_1, \ldots, g_p, h$ мають обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, за теоремою VIII множина K^0 містить щонайбільше $n(r', g^*)$ нулів тих функцій або $K^0 \subset Z_{g^*}$. Нехай c_m^0 — нулі функції зрізки g^* (тобто, $g^*(z^0 + c_m^0\mathbf{b}) = 0$) такі, що $z^0 + c_m^0\mathbf{b} \in K^0 \cap ((Z_h \setminus H(h)) \cup \bigcup_{j=0}^{p}(Z_{g_j} \setminus H(g_j))$, де $m \in \mathbb{N}$, $m \le n(r', g^*)$. З того, що $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$, маємо $L(z^0 + c_m^0\mathbf{b}) \ge \lambda_1(r')L(z^0)$. Очевидно,

$$\widetilde{K}_m^0 := \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c_m^0| \le \frac{r}{L(z^0 + c_m^0\mathbf{b})}\right\} \subset$$

$$\subset \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c_m^0| \le \frac{(r'-1)\lambda_1(r')}{8(n(r',g^*)+1)L(z^0 + c_m^0\mathbf{b})}\right\} \subset$$

$$\subset K_m^0 := \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t - c_m^0| \le \frac{r'-1}{8(n(r',g^*)+1)L(z^0)}\right\}.$$

Тому при $z^0 + t\mathbf{b} \in K^0 \setminus \bigcup_{z^0 + c_m^0\mathbf{b} \in K^0} K_m^0$ виконується (5.64). Звідси для цих точок $z^0 + t\mathbf{b}$ нерівність $L(z^0) \ge \frac{L(z^0+t\mathbf{b})}{\lambda_2(r')}$ та (5.64) гарантують

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{p+1}(z^0)} \le (\lambda_2(r'))^{p+1}\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{p+1}(z^0+t\mathbf{b})} \le P_3(\lambda_2(r'))^{p+1}\times$$

$$\times\max_{0\le j\le p}\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j}F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{j}(z^0+t\mathbf{b})}\right\} \le P_3(\lambda_2(r'))^{p+1}\max_{0\le j\le p}\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j}F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{j}(z^0)}\left(\frac{1}{\lambda_1(r')}\right)^{j}\right\} \le$$

$$\le P_3\left(\frac{\lambda_2(r')}{\lambda_1(r')}\right)^{p}\lambda_2(r')\max_{0\le j\le p}\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j}F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^{j}(z^0)}\right\} = P_4 g_{z^0}(t), \tag{5.65}$$

де $P_4 = P_3\lambda_2(r')\left(\frac{\lambda_2(r')}{\lambda_1(r')}\right)^p$ та

$$g_{z^0}(t) = \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^0+t\mathbf{b})|}{L^j(z^0)} : 0 \le j \le p\right\}.$$

Нехай D — сума діаметрів K_m^0. Тоді $D \le \frac{2(r'-1)n(r',g^*)}{8(n(r',g^*)+1)L(z^0)} < \frac{r'-1}{4L(z^0)}$. Тому, знайдуться числа $r_1 \in \left[\frac{r'}{4}, \frac{r'}{2}\right]$ та $r_2 \in \left[\frac{3r'+1}{4}; r'\right]$ такі, що при $z^0 + t\mathbf{b} \in C_j = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| = \frac{r_j}{L(z^0)}\right\}$, $j \in \{1,2\}$, маємо $z^0 + t\mathbf{b} \in K^0 \setminus \bigcup_{c_m^0 \in K^0} K_m^0$. Виберемо довільні точки $z^0 + t_1\mathbf{b} \in C_1$ та $z^0 + t_2\mathbf{b} \in C_2$ і з'єднаємо їх гладкою кривою $\gamma = \{z^0 + t\mathbf{b} : t = t(s), 0 \le s \le 1\}$ такою, що $F(z^0 + t(s)\mathbf{b}) \ne 0$ та $\gamma \subset K^0 \setminus \bigcup_{c_m^0 \in K^0} K_m^0$. Докладніший опис побудови такої кривої можна знайти в доведенні теореми 6.6. Цю криву можна вибрати так, що її довжина не перевищує такої величини

$$|\gamma| \le |\mathbf{b}|\left(\frac{\pi r_1}{L(z^0)} + \frac{r_2 - r_1}{L(z^0)} + \frac{\pi n(r',g^*)(r'-1)}{8(n(r',g^*)+1)L(z^0)}\right) < \tag{5.66}$$

$$< \frac{|\mathbf{b}|}{L(z^0)}\left(\frac{\pi r'}{2} + \frac{3r'}{4} + \frac{\pi r'}{8}\right) < \frac{3|\mathbf{b}|r'}{L(z^0)}. \tag{5.67}$$

Тоді на γ виконується нерівність (5.65), тобто,

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z^0 + t(s)\mathbf{b})|}{L^{p+1}(z^0)} \le P_4 g_{z^0}(t(s)),\ 0 \le s \le 1.$$

Легко довести (див. доведення теореми 6.6), що функція $g_{z^0}(t(s))$ неперервна на $[0,1]$ та неперервно диференційовна крім, можливо, скінченного числа точок. Крім того, для комплексно-значної функції від дійсної змінної така нерівність $\frac{d}{ds}|\varphi(s)| \le \left|\frac{d}{ds}\varphi(s)\right|$ виконується за винятком точок, де $\varphi(s) = 0$. Тоді з врахуванням (5.65) отримуємо

$$\frac{d}{ds}g_{z^0}(t(s)) \le \max_{0\le j\le p}\left\{\frac{d}{ds}\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^0+t(s)\mathbf{b})|}{L^j(z^0))}\right\} \le \max_{0\le j\le p}\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{j+1} F(z^0+t(s)\mathbf{b})|}{L^{j+1}(z^0)}|t'(s)|L(z^0)\right\} \le$$

$$\le \max_{0\le j\le p+1}\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^0+t(s)\mathbf{b})|}{L^j(z^0)}\right\}|t'(s)|L(z^0) \le P_5 g_{z^0}(t(s))|t'(s)|L(z^0),$$

де $P_5 = \max\{1, P_4\}$. Інтегруючи за змінною s та використовуючи (5.67), встановимо

$$\left|\ln\frac{g_{z^0}(t_2)}{g_{z^0}(t_1)}\right| = \left|\int_0^1 \frac{1}{g_{z^0}(t(s))}\frac{d}{ds}g_{z^0}(t(s))ds\right| \le$$

$$\le P_5 L(z^0)\int_0^1 |t'(s)|ds \le P_5 L(z^0)|\gamma| \le 3|\mathbf{b}|r'P_5,$$

тобто, $g_{z^0}(t_2) \le g_{z^0}(t_1)\exp\{3|\mathbf{b}|r'P_5\}$. Можна вибрати t_2 таку, що $|F(z^0+t_2\mathbf{b})| = \max\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : z^0 + t\mathbf{b} \in C_2\}$. Звідси,

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{3r'+1}{4L(z^0)}\right\} \le |F(z^0+t_2\mathbf{b})| \le$$

$$\leq g_{z^0}(t_2) \leq g_{z^0}(t_1)\exp\{3|\mathbf{b}|r'P_5\}. \tag{5.68}$$

Оскільки $z^0 + t_1\mathbf{b} \in C_1 = \left\{z^0 + t\mathbf{b} : |t| = \frac{r_1}{L(z^0+t_0\mathbf{b})}\right\}$ та $r_1 \in [\frac{r'}{4}, \frac{r'}{2}]$, для всіхl $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, за нерівністю Коші по змінній t отримаємо

$$\frac{r'^j}{(4L(z^0))^j}|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^0+t_1\mathbf{b})| \leq j!\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t-t_1| = \frac{r'}{4L(z^0)}\right\} \leq$$

$$\leq p!\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{3r'}{4L(z^0)}\right\}, \text{ тобто,}$$

$$g_{z^0}(t_1) \leq p!\max\{1, (4/r')^p\}\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = \frac{3r'}{4L(z^0)}\right\} \tag{5.69}$$

З нерівностей (5.68) та (5.69) випливає

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{3r'+1}{4L(z^0)}\right\} \leq P_6\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = \frac{3r'}{4L(z^0)}\right\},$$

де $P_6 = p!\max\{1, (4/r')^p\}\exp\{3|\mathbf{b}|r'P_5\}$. Отже,

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{6r'+2}{6r'+1}\frac{6r'+1}{8L(z^0)}\right\} \leq$$

$$\leq P_6\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = \frac{6r'}{6r'+1}\frac{6r'+1}{8L(z^0)}\right\}.$$

Позначаючи $L^*(z) = \frac{8L(z)}{6r'+1}$, отримуємо

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})| : |t| = \frac{6r'+2}{(6r'+1)L^*(z^0)}\right\} \leq$$

$$\leq P_6\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = \frac{6r'}{(6r'+1)L^*(z^0)}\right\}.$$

Зрозуміло, що $0 < \frac{6r'}{6r'+1} < 1 < \frac{6r'+2}{6r'+1}$ для $r' \geq 1$. Тому за твердженням 5.6 функція F має обмежений L^*-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. А згідно з теоремою XII функція F є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ і поготів. □

Зауваження 5.6. *Ми вимагали виконання* (5.63) *для деякого* r, *але не для всіх додатних* r. *Тому, теорема 5.7 посилює твердження відповідної теореми з [254]. Це твердження є новим навіть в одновимірному випадку (див. результати для обмеженого* l*-індексу в [273] та обмеженого індексу в [115]).*

5.5.2 Обмеженість l-індексу цілих розв'язків рівняння $w' = f(z, w)$. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$w^{(p)} = f(z, w). \tag{5.70}$$

С. М. Шах, Ґ. Фріке, М. М. Шеремета, А. Д. Кузик [114, 200, 273] та інші не вивчали обмеженість індексу цілого розв'язку рівняння (5.70), тому що права частина рівняння є функцією від двох змінних. Проте, зважаючи на теорію функцій обмеженого L-індексу за напрямком, природно поставити це питання.

Проблема 5.7 ([57, Проблема 4]). *Нехай $p = 1$, $f(z, w)$ — ціла функція обмеженого L-індексу за напрямками $(1, 0)$ та $(0, 1)$. Якою є неперервна функція $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, що цілий розв'язок $w = w(z)$ рівняння (5.70) має обмежений l-індекс?*

Ми даємо відповідь на це питання (див. теорему 5.8) для кожного $p \in \mathbb{N}$.

Позначимо $\mathbf{1}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{1}_2 = (0, 1)$.

Теорема 5.8. *Нехай $l_j \in Q^2_{\mathbf{1}_j}$, $f(z, w)$ — ціла функція обмеженого l_j-індексу за напрямками $\mathbf{1}_j$ для кожного $j \in \{1, 2\}$. Якщо існує $C > 0$ та $l \in Q$ такі, що для всіх $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus (G^{\mathbf{1}_1}_r(f) \cup G^{\mathbf{1}_2}_r(f))$*

$$l_1(z, w) + l_2(z, w)|f(z, w)| \le Cl(z), \tag{5.71}$$

то кожна ціла функція, що задовольняє (5.70), має обмежений l-індекс.

Доведення. Диференціюючи (5.70) за змінною z та використовуючи теорему XV, отримуємо, що для всіх $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus (G^{\mathbf{1}_1}_r(f) \cup G^{\mathbf{1}_2}_r(f))$

$$|w^{(p+1)}| = \left|\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} w'\right| \le P(l_1(z, w)|f(z, w)| + l_2(z, w)|f(z, w)|^2) \le$$
$$\le PCl(z)|f(z, w)| = PCl(z)|w^{(p)}|.$$

Звідси,

$$\frac{|w^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}(z)} \le PC\frac{|w^{(p)}(z)|}{l^p(z)} \le PC \max\left\{\frac{|w^{(k)}(z)|}{l^k(z)} : 0 \le k \le p\right\}.$$

Ця нерівність подібна до (5.64) у теоремі 5.7. Повторюючи далі міркування з цієї теореми, встановлюємо, що $w = w(z)$ має обмежений l-індекс. □

Як застосування теореми 5.8, ми розглянемо алгебраїчне диференціальне рівняння такого типу:

$$w^{(p)} = g(z) + \sum_{j=0}^{k} a_j w^j. \tag{5.72}$$

де $a_j \in \mathbb{C}$.

Наслідок 5.2. *Нехай $g(z)$ — ціла функція обмеженого l-індексу, $l^*(z) := l(z) + |g(z)|$, $l^* \in Q$. Тоді кожна ціла функція, яка задовольняє (5.72), має обмежений l^*-індекс.*

Доведення. Позаяк $g(z)$ має обмежений l-індекс, ціла функція $f(z, w) = g(z) + \sum_{j=0}^{k} a_j w^j$ має обмежений l-індекс за напрямком $\mathbf{1}_1$. Крім того, $f(z, w)$ є многочленом степеня k за змінною w. За означенням обмеженості L-індексу за напрямком многочлен має обмежений L-індекс за будь-яким напрямком для довільної додатної неперервної функції L. Зокрема, $f(z, w)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{1}_2$ з $L(z, w) = \frac{1}{|w|^k+1}$. Перевіримо умову (5.71):

$$l(z) + L(z, w)|f(z, w)| = l(z) + \frac{1}{|w|^k + 1}\left|g(z) + \sum_{j=0}^{k} a_j w^j\right| \le$$

$$\leq l(z) + \frac{1}{|w|^k + 1}|g(z)| + \sum_{j=0}^{k} |a_j| \leq C(l(z) + |g(z)|),$$

де $C > 0$ — достатньо велике число. Звідси, за теоремою 5.8 кожний цілий розв'язок рівняння (5.72) має обмежений l_1-індекс. □

5.5.3 Обмеженість L-індексу цілих розв'язків деяких рівнянь з частинними похідними другого порядку Цілі функції обмеженого індексу знайшли певне використання в теорії розподілу значень та диференціальних рівняннях [168, 239, 242, 254, 284]. Зокрема, відомий фахівець з аналітичної теорії диференціальних рівнянь Ш. Стреліц [282] розробив метод Вімана-Валірона для опису асимптотичної поведінки аналітичних розв'язків рівнянь з частинних похідними. Також він [239] застосував цей метод для дослідження обмеженості індексу цілих розв'язків алгебраїчних диференціальних рівнянь. З іншого боку, тут ми спробуємо скористатися рівнянням з частинними похідними для встановлення обмеженості L-індексу за напрямком функції F. Зокрема, цей підрозділ присвячений побудові функції L такої, що $F(z_1, z_2) = \cos\sqrt{z_1 z_2} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (z_1 z_2)^p}{(2p)!}$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, а вітку квадратного кореня з комплексного числа вибираємо на основі умови $\sqrt{1} = 1$. Ця проблема виникає через властивості функції $F(z_1, z_2)$, про які вже згадувалося в підрозділах 5.2.1 та 5.2.2: для заданого $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C}^2$ функція $g_{z^0}(t) = F(z_1^0 + tb_1, z_2^0 + tb_2)$ має обмежений індекс як функція однієї змінної t, але $F(z_1, z_2)$ є необмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, тобто, індекси функції $F(z_1^0 + tb_1, z_2^0 + tb_2)$ не є рівномірно обмеженими по z^0. Водночас, відомо ([56] або [259, теорема 4.10]), що для цілої функції $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ існує неперервна функція $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ така, що $F(z)$ є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли кратності нулів функції $g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ рівномірно обмежені по z^0.

На львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (2007) проф. А. А. Кондратюк поставив **питання**:

Проблема 5.8. *Якою є неперервна функція $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$, що гарантуватиме обмеженість L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ функції $F(z_1, z_2) = \cos\sqrt{z_1 z_2}$?*

Використовуючи методи, якими вперше скористалися в [255], дамо відповідь на питання Кондратюка в теоремі 5.10.

Розглянемо рівняння з частинними похідними

$$g_0(z)\partial_{\mathbf{b}}^p w + g_1(z)\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} w + \ldots + g_p(z) w = h(z), \tag{5.73}$$

Нам потрібне таке твердження.

Теорема XVI ([254], [259, теорема 4.1]). *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$, цілі функції $g_0(z)$, ..., $g_p(z)$, $h(z)$ — обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, та для кожного $r > 0$*

існує $T = T(r) > 0$ *таке, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \backslash G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ *та* $j = 1, \ldots, p$

$$|g_j(z)| \le TL^j(z)|g_0(z)|.$$

Тоді кожний цілий розв'язок $F(z)$ *рівняння* (5.73) *має обмежений* L*-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$.

Через $\overline{G}$ позначимо замикання області G. Наступне твердження дає достатні умови приналежності додатної неперервної функції до класу $Q_{\mathbf{b}}^n$ (інші подібні твердження можна знайти в [43]). У розмові зі здобувачем (2015) проф. С. Ю. Фаворов підняв проблему *опису функцій з* $Q_{\mathbf{b}}^n$ *через їхні диференціальні характеристики.* Наступна лема є першим твердженням такого типу.

Лема 5.2. *Нехай* $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *та* $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}}$ *— неперервні функції в області* G. *Якщо існують числа* $P > 0$ *та* $c > 0$ *такі, що для всіх* $z \in \overline{G}$

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}} L(z)|}{c + |L(z)|} \le P, \tag{5.74}$$

то для кожного $\eta \ge 0$ *справджуються нерівності*

$$0 < \inf_{z \in \overline{G}} \inf_{|t| \le \frac{\eta}{L_1(z)}} \frac{L_1(z + t\mathbf{b})}{L_1(z)} \le \sup_{z \in \overline{G}} \sup_{|t| \le \frac{\eta}{L_1(z)}} \frac{L_1(z + t\mathbf{b})}{L_1(z)} < \infty,$$

де $L_1(z) = c + |L(z)|$. *Якщо додатково* $G = \mathbb{C}^n$, *то* $L_1 \in Q_{\mathbf{b}}^n$.

Доведення. Зрозуміло, що функція $L_1(z)$ — додатна та неперервна. Для заданого $z \in \mathbb{C}^n$ визначимо аналітичну криву $\varphi(\tau) = z + \tau e^{i\arg t}\mathbf{b}$, $\tau \in [0, |t|]$. Для кожної неперервно диференційовної функції g від дійсної змінної τ нерівність $\frac{d}{dt}|g(\tau)| \le |g'(\tau)|$ виконується скрізь за винятком точок, де $g'(\tau) = 0$. Використовуючи умови цієї леми, ми встановимо верхню оцінку $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta)$ для функції L_1 :

$$\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) = \sup \left\{ \frac{c + |L(z + t\mathbf{b})|}{c + |L(z)|} : |t| \le \frac{\eta}{c + |L(z)|} \right\} =$$

$$= \sup_{|t| \le \eta/(c + |L(z)|)} \{\exp\{\ln(c + |L(z + t\mathbf{b})|) - \ln(c + |L(z)|)\}\} =$$

$$= \sup \left\{ \exp \left\{ \int_0^{|t|} \frac{d(c + |L(z + \varphi(\tau)\mathbf{b})|)}{c + |L(z + \varphi(\tau)\mathbf{b})|} \right\} : |t| \le \frac{\eta}{c + |L(z)|} \right\} \le$$

$$\le \sup_{|t| \le \frac{\eta}{c + |L(z)|}} \left\{ \exp \left\{ \int_0^{|t|} \frac{|\varphi'(\tau)|}{c + |L(z + \varphi(\tau)\mathbf{b})|} \left| \frac{\partial L(z + \varphi(\tau)\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \right| |d\tau| \right\} \right\} \le$$

$$\le \sup_{|t| \le \frac{\eta}{c + |L(z)|}} \left\{ \exp \left\{ \frac{P|\mathbf{b}|\eta}{c + |L(z)|} \right\} \right\} \le \exp \left(\frac{P|\mathbf{b}|\eta}{c} \right).$$

Звідси, для всіх $\eta \ge 0$ $\lambda_2(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta) \le \exp\left(\frac{P|\mathbf{b}|\eta}{c}\right) < \infty$. Використовуючи $\frac{d}{dt}|g(t)| \ge -|g'(t)|$, можна довести, що для кожного $\eta \ge 0$ $\lambda_1(\eta) \ge \exp\left(-\frac{P|\mathbf{b}|\eta}{c}\right) > 0$. Отже, $L_1 \in Q_{\mathbf{b}}^n$. □

Зазначимо, що твердження 5.2 також є новим у випадку $n = 1$.

Нам потрібна така лема.

Лема 5.3. *Нехай* $\varepsilon > 0$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ *та*

$$L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\sqrt{|z_1z_2|}} + 1, & |z_1z_2| > \varepsilon^2, \\ \frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\varepsilon} + 1, & |z_1z_2| \le \varepsilon^2. \end{cases}$$

Тоді $L_{\varepsilon,\mathbf{b}} \in Q^2_{\mathbf{b}}$.

Доведення. Спершу доведемо, що $L_{\varepsilon,\mathbf{b}} \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Нехай $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $|z_1z_2| > \varepsilon^2$. Тоді

$$\lambda^{\mathbf{b}}_2(z,\eta) = \sup\left\{\left(\frac{|b_1(z_2+tb_2)+b_2(z_1+tb_1)|}{\sqrt{|(z_1+tb_1)(z_2+tb_2)|}}+1\right)\Big/\left(\frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\sqrt{|z_1z_2|}}+1\right):\right.$$
$$\left.|t| \le \frac{\eta}{\frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\sqrt{|z_1z_2|}}+1}\right\} \le \sup_{|t|\le\eta}\left\{\left(\frac{|b_1(z_2+tb_2)+b_2(z_1+tb_1)|}{\sqrt{|(z_1+tb_1)(z_2+tb_2)|}}+1\right)\Big/\left(\frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\sqrt{|z_1z_2|}}+1\right)\right\}$$

Позаяк $||z_j + b_jt| - |z_j|| \le |z_j + b_jt - z_j| = |b_j| \cdot |t| \le |b_j|\eta$, отримуємо, що $|z_j| - |b_j|\eta \le |z_j + b_jt| \le |z_j| + |b_j|\eta$. Звідси,

$$\lambda^{\mathbf{b}}_2(z,\eta) \le \sup_{|t|\le\eta}\left\{\frac{|b_1(z_2+tb_2)+b_2(z_1+tb_1)|+\sqrt{|(z_2+tb_2)(z_1+tb_1)|}}{|b_1z_2+b_2z_1|+\sqrt{|z_1z_2|}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\sqrt{|z_1z_2|}}{\sqrt{|(z_2+tb_2)(z_1+tb_1)|}}\right\} \le \Big(|b_1z_2| + |b_2z_1| + 2|b_1b_2|\eta +$$
$$+\sqrt{(|z_1| + |b_1|\eta)(|z_2| + |b_2|\eta)}\Big)\Big/\Big(|b_1z_2 + b_2z_1| + \sqrt{|z_1z_2|}\Big)\times$$
$$\times\frac{\sqrt{|z_1z_2|}}{\sqrt{(|z_2| - |b_2|\eta)(|z_1| - |b_1|\eta)|}} \le C_2(\eta, b_1, b_2) < +\infty.$$

при $|z_1| > R$, $|z_2| > R$, де R - досить велике. Подібним чином, $\lambda^{\mathbf{b}}_1(z,\eta) \ge C_1(\eta, b_1, b_2) > 0$.

Нехай $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $|z_1z_2| \le \varepsilon^2$ та $L_1(z_1, z_2) = \frac{b_1z_2+b_2z_1}{\varepsilon}$. Тоді

$$\frac{1}{1 + |L_1(z_1, z_2)|}\left|\frac{\partial L_1(z_1, z_2)}{\partial \mathbf{b}}\right| = \frac{2|b_1b_2|}{\frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\varepsilon}+1} \le 2|b_1b_2|$$

Звідси за лемою 5.2 $L_{\varepsilon,\mathbf{b}} \in Q^n_{\mathbf{b}}$. Випадки $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$ або $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$ розглядаються так само. □

Розглянемо такі рівняння з похідними за напрямком $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$z_1z_2(b_1z_2 + b_2z_1)\partial^2_{\mathbf{b}}F(z) + \frac{(b_1z_2 - b_2z_1)^2}{2}\partial_{\mathbf{b}}F(z) + \frac{(b_1z_2 + b_2z_1)^3}{4}F(z) = 0, \quad (5.75)$$

для $b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0$ та

$$4z_1\partial^2_{\mathbf{b}}F(z) + 2b_1\partial_{\mathbf{b}}F(z) + b_1^2z_2F(z) = 0, \text{ для } b_1 \neq 0,\ b_2 = 0. \quad (5.76)$$

Для $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$ можна розглянути рівняння з частинними похідними, яке збігається з (5.76) з точністю до перестановок змінних z_1 та z_2.

Теорема 5.9. *Нехай* $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. *Якщо ціла функція* $F(z_1, z_2)$ *задовольняє або рівняння* (5.75), *або рівняння* (5.76), *то для кожного* $\varepsilon > 0$ *функція* F *має обмежений* $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$*-індекс за відповідним напрямком* $\mathbf{b}$, *де* $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$ *— функція з леми 5.3.*

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми XVI для рівняння з частинними похідними (5.75). Функції $g_0(z_1, z_2) = z_1 z_2 (b_1 z_2 + b_2 z_1)$, $g_1(z_1, z_2) = (b_1 z_2 - b_2 z_1)^2/2$ та $g_2(z_1, z_2) = (b_1 z_2 + b_2 z_1)^3/4$ є многочленами. Тому вони мають обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ для кожної додатної неперервної функції $L(z_1, z_2)$.

Припустимо, що $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Для $z_1 = z_1^0 + b_1 t$, $z_2 = z_2^0 + b_2 t$ функція $g_0(z^0 + t\mathbf{b}) = (z_1^0 + b_1 t)(z_2^0 + b_2 t)(b_1 z_2^0 + b_2 z_1^0 + 2b_1 b_2 t)$ має три нулі $t_1 = -\frac{z_1^0}{b_1}$, $t_2 = -\frac{z_2^0}{b_2}$, $t_3 = -\frac{b_1 z_2^0 + b_2 z_1^0}{2b_1 b_2}$. Умова $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ означає, що $|t - t_j| > \frac{r}{L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z^0 + t_j \mathbf{b})}$ для будь-якого t_j, $j \in \{1, 2, 3\}$. Звідси, $|z_k^0 + b_k t - (z_k^0 + b_k t_j)| > r|b_k|/L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z^0 + t_j \mathbf{b})$ при $k \in \{1, 2\}$. Зокрема,

$$|z_1| = |z_1^0 + b_1 t| = |z_1^0 + b_1 t - (z_1^0 + b_1 t_1)| > \frac{r|b_1|}{L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(0, z_2^0 - \frac{b_2}{b_1} z_1^0)} =$$
$$= \frac{\varepsilon r |b_1|}{\varepsilon + |b_1(z_2^0 - \frac{b_2}{b_1} z_1^0)|} = \frac{\varepsilon r |b_1|}{\varepsilon + |b_1 z_2^0 + b_1 b_2 t - b_2 z_1^0 - b_1 b_2 t|} = \frac{r|b_1|}{1 + |b_1 z_2 - b_2 z_1|/\varepsilon}, \tag{5.77}$$

$$|z_2| = |z_2^0 + b_2 t| = |z_2^0 + b_2 t - (z_2^0 + b_2 t_2)| > \frac{r|b_2|}{L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1^0 - \frac{b_1}{b_2} z_2^0, 0)} =$$
$$= \frac{\varepsilon r |b_2|}{\varepsilon + |b_2(z_1^0 - \frac{b_1}{b_2} z_2^0)|} = \frac{\varepsilon r |b_2|}{\varepsilon + |b_2 z_1^0 + b_2 b_1 t - b_1 z_2^0 - b_1 b_2 t|} = \frac{\varepsilon r |b_2|}{\varepsilon + |b_1 z_2 - b_2 z_1|/\varepsilon}, \tag{5.78}$$

$$|t - t_3| = |t + \frac{b_1 z_2^0 + b_2 z_1^0}{2b_1 b_2}| < \frac{r}{L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z^0 + t_3 \mathbf{b})} = r \Leftrightarrow$$
$$|2b_1 b_2 t + b_1 z_2^0 + b_2 z_1^0| > 2|b_1 b_2| r \Leftrightarrow$$
$$|b_1(z_2^0 + b_2 t) + b_2(z_1^0 + b_1 t)| > 2|b_1 b_2| r \Leftrightarrow |b_1 z_2 + b_2 z_1| > 2|b_1 b_2| r. \tag{5.79}$$

З (5.79) для $|z_1 z_2| > \varepsilon^2$ та $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ отримуємо

$$|g_2(z_1, z_2)| = \frac{1}{4}|b_1 z_2 + b_2 z_1|^3 = \frac{1}{4}\frac{|b_1 z_2 + b_2 z_1|^2}{|z_1 z_2|}|z_1 z_2 (b_1 z_2 + b_2 z_1)| =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{|b_1 z_2 + b_2 z_1|}{\sqrt{|z_1 z_2|}}\right)^2 \cdot |g_0(z)| \leq \frac{1}{4} L_{\varepsilon,\mathbf{b}}^2(z_1, z_2)|g_0(z_1, z_2)|,$$

$$\frac{|g_1(z_1, z_2)|}{|g_0(z_1, z_2)| L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1, z_2)} = \frac{|b_1 z_2 - b_2 z_1|^2}{\sqrt{|z_1 z_2|}|b_1 z_2 + b_2 z_1|(|b_1 z_2 + b_2 z_1| + \sqrt{|z_1 z_2|})} =$$

$$= \frac{|b_1\frac{z_2}{z_1} - b_2|^2}{\sqrt{|z_1z_2|}|b_1\frac{z_2}{z_1} + b_2|(|b_1\frac{z_2}{z_1} + b_2| + \sqrt{|\frac{z_2}{z_1}|})} \le C_1(r,\varepsilon),$$

де $C_1(r,\varepsilon)$ — деяка додатна стала, незалежна від z_1 та z_2. Остання нерівність справедлива, бо $|z_1z_2| > \varepsilon^2$, а степінь чисельника стосовно виразу $\frac{z_2}{z_1}$ не більший за степінь знаменника і з врахуванням (5.79) модуль знаменника більший, ніж деяка додатна стала.

Для $|z_1z_2| \le \varepsilon^2$ та $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ розглянемо три випадки:

а) $|z_1| \le \varepsilon, |z_2| \le \varepsilon$. З огляду на (5.77)-(5.78) виконуються такі нерівності

$$|g_2(z_1,z_2)| = \frac{1}{4}|b_1z_2 + b_2z_1|^3 = \frac{1}{4}\frac{|b_1z_2 + b_2z_1|^2}{\varepsilon^2}\varepsilon^2|b_1z_2 + b_2z_1| \le$$
$$\le \frac{1}{4}L^2_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2)|g_0(z_1,z_2)|\frac{\varepsilon^2}{|z_1z_2|} < \frac{1}{4}L^2_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2)|g_0(z_1,z_2)|\frac{(\varepsilon+|b_1z_2 - b_2z_1|)^2}{r^2|b_1b_2|} \le$$
$$\le \frac{\varepsilon^2(1+|b_1|+|b_2|)^2}{4r^2|b_1b_2|}L^2_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2)|g_0(z_1,z_2)|,$$

$$\frac{|g_1(z_1,z_2)|}{|g_0(z_1,z_2)|L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2)} = \frac{|b_1z_2 - b_2z_1|^2}{2|z_1z_2(b_1z_2 + b_2z_1)|\left(\frac{|b_1z_2-b_2z_1|}{\varepsilon} + 1\right)} \le$$
$$\le \frac{|b_1z_2 - b_2z_1|^2\left(\frac{|b_1z_2-b_2z_1|}{\varepsilon}+1\right)}{2r^2|b_1b_2(b_1z_2 + b_2z_1)|} \le \frac{\varepsilon^2(|b_1|+|b_2|)^2(|b_1|+|b_2|+1)}{4r^3|b_1b_2|}.$$

б) $|z_1| > \varepsilon$, $|z_2| \le \varepsilon$. Беручи до уваги (5.78) та (5.79), маємо

$$|g_2(z_1,z_2)| = \frac{1}{4}|b_1z_2 + b_2z_1|^3 = \frac{1}{4}\frac{|b_1z_2 + b_2z_1|^2}{\varepsilon^2}\varepsilon^2|b_1z_2 + b_2z_1| \le$$
$$\le \frac{1}{4}L^2_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2)|g_0(z_1,z_2)|\frac{\varepsilon^2}{|z_1z_2|} < \frac{1}{4}L^2_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2)|g_0(z_1,z_2)|\frac{\varepsilon(\varepsilon+|b_1z_2-b_2z_1|)}{|z_1b_2|r} \le$$
$$\le \frac{\varepsilon(1+|b_1|+|b_2|)}{4r|b_2|}L^2_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2)|g_0(z_1,z_2)|,$$

$$\frac{|g_1(z_1,z_2)|}{|g_0(z_1,z_2)|L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2)} = \frac{|b_1z_2 - b_2z_1|^2}{2|z_1z_2(b_1z_2 + b_2z_1)|\left(\frac{|b_1z_2-b_2z_1|}{\varepsilon} + 1\right)} \le$$
$$\le \frac{|b_1z_2 - b_2z_1|^2}{2r|z_1b_2(b_1z_2 + b_2z_1)|} \le \frac{|z_1|(|b_1|+|b_2|)^2}{2r|b_2|\cdot|b_1z_2 + b_2z_1|} \le C_2(r,\varepsilon)$$

де $C_2(r,\varepsilon)$ — деяка додатна стала, незалежна від z_1 та z_2.

в) $|z_1| \le \varepsilon$, $|z_2| > \varepsilon$. За допомогою (5.77) та (5.79) цей випадок розглядається подібно до попереднього.

За теоремою XVI функція $F(z_1,z_2)$ має обмежений $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$-індекс за напрямком $\mathbf{b} = (b_1,b_2)$, де $b_1 \ne 0$, $b_2 \ne 0$.

Нехай $\mathbf{b} = (b_1,0)$, де $b_1 \ne 0$. Тепер перевіримо умови теореми XVI для рівняння з частинними похідними (5.76). Функції $g_0(z_1,z_2) = z_1$, $g_1(z_1,z_2) = \frac{b_1}{2}$,

$g_2(z_1,z_2)=\frac{b_1^2z_2}{4}$ є многочленами або сталими. Тому вони мають обмежений L-індекс за будь-яким напрямком та для будь-якої додатної неперервної функції L.

Нехай $r>0$. Для $z_1=z_1^0+tb_1$ функція $g_0(z_1^0+tb_1,z_2)=z_1^0+tb_1$ має один нуль $t_0=-\frac{z_1^0}{b_1}$. Умова $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\setminus G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ означає, що

$$|t-t_0|>\frac{r}{L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1^0+t_0b_1,z_2)}=\frac{r}{L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(0,z_2)}=\frac{r}{\frac{|b_1z_2|}{\varepsilon,\mathbf{b}}+1}.$$

Звідси,

$$|z_1|=|z_1^0+b_1t-(z_1^0+b_1t_0)|=|b_1(r-t_0)|>\frac{|b_1|r}{\frac{|b_1z_2|}{\varepsilon}+1}. \tag{5.80}$$

Для $|z_1z_2|>\varepsilon^2$ та $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\setminus G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ маємо

$$\frac{|g_1(z)|}{|g_0(z)|L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z)}=\frac{|b_1|}{2(|b_1\sqrt{z_1z_2}|+|z_1|)}<\frac{|b_1|}{2(|b_1\varepsilon|+|z_1|)}<\frac{1}{2\varepsilon},$$

$$\frac{|g_2(z)|}{|g_0(z)|L^2_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z)}=\frac{|b_1^2z_2|}{4|z_1|(|b_1|\sqrt{\frac{|z_2|}{|z_1|}}+1)^2}=\frac{|b_1^2z_2|}{4(|b_1^2z_2|+2|b_1\sqrt{z_2z_1}|+|z_1|)}<\frac{1}{4},$$

Зважаючи на (5.80), для $|z_1z_2|\le\varepsilon^2$ та $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\setminus G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ є справедливими такі оцінки

$$\frac{|g_1(z)|}{|g_0(z)|L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z)}=\frac{|b_1|}{2|z_1|(\frac{|b_1z_2|}{\varepsilon}+1)}<\frac{1}{2r},$$

$$\frac{|g_2(z)|}{|g_0(z)|L^2_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z)}=\frac{|b_1^2z_2|}{4|z_1|(\frac{|b_1z_2|}{\varepsilon}+1)^2}<\frac{|b_1z_2|}{4r(\frac{|b_1z_2|}{\varepsilon}+1)}<\frac{\varepsilon}{4r}.$$

За теоремою XVI функція $F(z_1,z_2)$ має обмежений $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$-індекс за напрямком $\mathbf{b}=(b_1,0)$. □

Теорема 5.10. *Ціла функція $F(z_1,z_2)=\cos\sqrt{z_1z_2}$ від двох змінних має обмежений $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.*

Доведення. Доведемо, що рівняння (5.73) має цілий розв'язок $F(z_1,z_2)$. Нехай $b_1\ne0$, $b_2\ne0$. Формально, похідні за напрямком першого та другого порядку від функції F мають вигляд

$$\partial_{\mathbf{b}}F=-(b_1z_2+b_2z_1)\frac{\sin\sqrt{z_1z_2}}{2\sqrt{z_1z_2}},$$

$$\partial^2_{\mathbf{b}}F=-\frac{1}{2^2}\left(b_1\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}+b_2\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}\right)^2\cos\sqrt{z_1z_2}-\frac{1}{2}\Bigg(\Big(-\frac{b_1}{2}\frac{\sqrt{z_2}}{z_1^{3/2}}+\frac{b_2}{2}\frac{1}{\sqrt{z_1z_2}}\Big)b_1+$$

$$+\Big(\frac{b_1}{2}\frac{1}{\sqrt{z_1z_2}}-\frac{b_2}{2}\frac{\sqrt{z_1}}{z_2^{3/2}}\Big)b_2\Bigg)\sin\sqrt{z_1z_2}=-\frac{(b_1z_2+b_2z_1)^2}{4z_1z_2}F(z_1,z_2)+$$

$$+\frac{(b_1z_2-b_2z_1)^2}{4(z_1z_2)^{3/2}}\sin\sqrt{z_1z_2}=-\frac{(b_1z_2+b_2z_1)^2}{4z_1z_2}F(z_1,z_2)-\frac{(b_1z_2-b_2z_1)^2}{4(z_1z_2)^{3/2}}\times$$

$$\times\frac{2\sqrt{z_1z_2}}{b_1z_2+b_2z_1}\cdot\partial_{\mathbf{b}}F=-\frac{(b_1z_2+b_2z_1)^2}{4z_1z_2}F(z_1,z_2)-\frac{(b_1z_2-b_2z_1)^2}{2z_1z_2(b_1z_2+b_2z_1)}\partial_{\mathbf{b}}F.$$

Звідси, ми отримуємо

$$z_1z_2(b_1z_2+b_2z_1)\partial_{\mathbf{b}}^2F+\frac{(b_1z_2-b_2z_1)^2}{2}\partial_{\mathbf{b}}F+\frac{(b_1z_2+b_2z_1)^3}{4}F(z_1,z_2)=0,$$

тобто, F задовольняє рівняння (5.75).

Якщо ж $b_1\neq 0$, $b_2=0$, то обчислюємо знову похідні за напрямком від функції F та подібно показуємо, що ця функція задовольняє (5.76). За теоремою 5.9 функція F має обмежений $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. □

З теореми 5.10 випливає таке твердження

Твердження 5.7. *Нехай* $L_\varepsilon(z_1,z_2)=\begin{cases}\sqrt{\frac{|z_2|}{|z_1|}}+\sqrt{\frac{|z_1|}{|z_2|}}+1, & |z_1z_2|>\varepsilon^2,\\ \frac{|z_2|+|z_1|}{\varepsilon}+1, & |z_1z_2|\le\varepsilon^2.\end{cases}$. *Тоді для кожного* $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ $L_\varepsilon\in Q^n_{\mathbf{b}}$ *ціла функція* $F(z_1,z_2)=\cos\sqrt{z_1z_2}$ *від двох змінних має обмежений* L_ε*-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$.

Доведення. Функція $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2)$ не перевищує $c_3\cdot L_\varepsilon(z_1,z_2)$. Справді,

$$\begin{cases}\frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\sqrt{|z_1z_2|}}+1, & |z_1z_2|>\varepsilon^2,\\ \frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\varepsilon}+1, & |z_1z_2|\le\varepsilon^2,\end{cases}\le c_3\cdot\begin{cases}\sqrt{\frac{|z_2|}{|z_1|}}+\sqrt{\frac{|z_1|}{|z_2|}}+1, & |z_1z_2|>\varepsilon^2,\\ \frac{|z_2|+|z_1|}{\varepsilon}+1, & |z_1z_2|\le\varepsilon^2.\end{cases}\tag{5.81}$$

де $c_3=\max\{|b_1|,|b_2|,1\}$.

У дійсності в доведенні теореми XII (див. доведення в [254, теорема 3] та [259, твердження 3.1]) доводиться, що якщо $G(z)$ має обмежений L_1-індекс за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ та для всіх $z\in\mathbb{C}^n$ $L_1(z)\le\theta\cdot L_2(z)$, L_1, $L_2\in Q^n_{\mathbf{b}}$, то $G(z)$ має обмежений L_2-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. З (5.81) отримуємо, що $F(z_1,z_2)$ є функцією обмеженого L_ε-індексу за кожним напрямком $\mathbf{b}$. □

5.6 Зростання цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком

Нехай $\mathbb{L}_n$ $(n\ge 1)$ — клас додатних неперервних функцій $L\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}_+$. Відомо (у загальному випадку [150] та у випадку $l(r)\equiv 1$ [191]) для $n=1$, що якщо додатна неперервна функція $l(|z|)$ задовольняє умову

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{l(r)}\min\left\{l(t)\colon\ \frac{r}{1+\delta}\le t\le r\right\}=\lambda(\delta)\to 1\quad(\delta\to+0),\tag{5.82}$$

та $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого l-індексу $N(f,l)=N_{\mathbf{1}}(f,l)$, то

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{l_0(r)}\le N(f,l)+1,\tag{5.83}$$

де $M_f(r)=\max\{|f(z)|\colon |z|=r\}$, $l_0(r)=\int_0^r l(t)dt$. У 2006 році на львівському семінарі з теорії аналітичних функцій проф. М. М. Шеремета поставив питання: *якою є оцінка зростання максимуму модуля цілої функції обмеженого*

L-індексу за напрямком? З (5.82)–(5.83) випливає, що якщо для фіксованого $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $\theta \in [0, 2\pi]$ функція $l(r) = L(z_0 + re^{i\theta}\mathbf{b})$ задовольняє (5.82), то для цілої функції F обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ маємо таку оцінку

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \max\{|F(z_0+\tau\mathbf{b})|:\ |\tau|=r\}}{\int_0^r L(z_0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt} \le N_{\mathbf{b}}(F,L)+1. \tag{5.84}$$

Для заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ розвинемо функцію $F(z^0 + w\mathbf{b})$ у степеневий ряд по $w \in \mathbb{C}$

$$F(z^0+w\mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z^0)w^m, \quad b_m(z^0) = \frac{\partial_{\mathbf{b}}^m F(z^0)}{m!}.$$

Позначимо

$$M_{\mathbf{b}}(r,z^0,F) = \max\{|F(z^0+w\mathbf{b})| : |w|=r\},$$
$$M_{\mathbf{b},j}(r,z^0,F) = \max\left\{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z^0+w\mathbf{b})| : |w|=r\right\},\ j\in\mathbb{N},$$
$$\mu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F) = \max\{|b_m(z^0)|r^m : m\ge 0\},$$
$$\nu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F) = \max\{m : |b_m(z^0)|r^m = \mu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)\},$$
$$\varphi(\delta,\theta,z^0) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})} \min\left\{L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b}):\ \frac{r}{1+\delta}\le t\le r\right\}$$

та $a^+ = \max\{a,0\}$. Легко бачити, що $\exists\ \lim_{\delta\to+0}\varphi(\delta,\theta,z^0) := \varphi_0(\theta,z^0)$, $\varphi(\delta,\theta,z^0) \le \varphi_0(\theta,z^0) \in [0,1]$.

Теорема 5.11. *Нехай $L \in \mathbb{L}_n$ — така, що $rL(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b}) \to +\infty$ $(r\to+\infty)$ та*

$$\varphi_0(\theta,z^0) \in (0,1], \tag{5.85}$$

для деякого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $\theta \in [0,2\pi]$. Якщо ціла трансцендентна функція F є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ з $N_{\mathbf{b}}(F,L) < \infty$, то

$$\tau(z^0,\theta) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\nu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)}{rL(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})} \le \frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)+1}{\varphi_0(\theta,z^0)}, \tag{5.86}$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt} \le \frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)+1}{\varphi_0^2(\theta,z^0)}. \tag{5.87}$$

Доведення (5.86). Для спрощення позначимо $\tau = \tau(z^0,\delta)$. Якщо $\tau(z^0,\theta) = 0$, то (5.86) очевидне. Якщо $f(w) := F(z^0+w\mathbf{b})$ є многочленом, то $\nu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F) = \nu_0 = \deg f \ge 1$ $(r\ge r_0)$ та $\tau = 0$ знову. Тому при $\tau(z^0,\theta) > 0$ маємо $f(w) := F(z^0+w\mathbf{b})$ є цілою трансцендентною функцією. За означенням верхньої границі для кожного $\delta \in (0,\tau)$ (для будь-якого $\tau \in (0,+\infty)$) існує послідовність (r_n), що зростає до $+\infty$ та $(1+\delta)r_n < r_{n+1}$ та $\nu(r_n,z^0,F) > (\tau-\delta)r_nL(z^0+r_ne^{i\theta}\mathbf{b})$. Для $r \in [r_n,(1+\delta)r_n]$ та $n \ge n_0(\delta)$ з врахуванням (5.85) отримуємо

$$\nu(r,z^0,F) \ge \nu(r_n,z^0,F) > (\tau-\delta)r_nL(z^0+r_ne^{i\theta}\mathbf{b}) \ge$$
$$\ge \frac{\tau-\delta}{1+\delta} r \min\left\{L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b}):\ \frac{r}{1+\delta}\le t\le r\right\} \ge$$

$$\geq \frac{(\tau-\delta)}{1+\delta}(\varphi(\delta,\theta,z^0)-\delta)rL(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b}). \tag{5.88}$$

Покладемо $U_\delta = \bigcup\limits_{n\geq n_0(\delta)}[r_n,(1+\delta)r_n]$. Зрозуміло, що логарифмічна міра U_δ дорівнює нескінченності та для всіх $r\in U_\delta$ є правильною нерівність (5.88). Відомо [244, с.10], що якщо $f(w)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}a_pw^p$ — ціла трансцендентна функція від однієї змінної, то для кожного фіксованого $j\in\mathbb{N}$ виконується

$$\left(\frac{\nu(r,f)}{r}\right)^j M(r,f)(1-\varepsilon_j(r))\leq M_j(r,f)\leq\left(\frac{\nu(r,f)}{r}\right)^j M(r,f)(1+\varepsilon_j(r)), \tag{5.89}$$

$\varepsilon_j(r)\to 0$ при $r\to+\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри, залежної від j, де $\mu(r,f)=\max\{|a_p|r^p:\ p\geq 0\}$, $\nu(r,f)=\max\{p:\ |a_p|r^p=\mu(r,f)\}$, $M_j(r,f)=\max\{|f^{(j)}(w)|:\ |w|=r\}$, $\varepsilon_j(r)\geq 0$.

Застосовуючи (5.89) до функції $f(w)=F(z^0+w\mathbf{b})$, як функції змінної $w\in\mathbb{C}$, встановимо існування послідовності (r_k^*), яка зростає до $+\infty$ і така, що $\frac{M_{\mathbf{b},j}(r_k^*,z^0,F)}{M(r_k^*,z^0,f)}\sim\left(\frac{\nu(r_k^*,z^0,f)}{r_k^*}\right)^j$, $k\to\infty$, та (5.88) виконується для $r=r_k^*$.

Тому для всіх $j\in\{0,1,2,\ldots,N_{\mathbf{b}}(F,L)\}$ та кожного $k\geq k_0(\delta)$

$$\frac{M_{\mathbf{b},j+1}(r_k^*,z^0,F)}{M_{\mathbf{b},j}(r_k^*,z^0,F)}>(1-\delta)\frac{\nu_{\mathbf{b}}(r_k^*,z^0,F)}{r_k^*}>\frac{\tau-\delta}{1+\delta}(1-\delta)(\varphi(\delta,\theta,z^0)-\delta)L(z^0+r_k^*e^{i\theta}\mathbf{b}) \tag{5.90}$$

Покладемо $\tau_0(\delta,\theta,z^0)=\frac{1-\delta}{1+\delta}(\tau-\delta)(\varphi(\delta,\theta,z^0)-\delta)$.

Припустимо, що $\tau_0(\delta,\theta,z^0)>N_{\mathbf{b}}(F,L)+1$. Тоді з (5.90) випливає

$$\frac{M_{\mathbf{b},j+1}(r_k^*,z^0,F)}{(j+1)!L^{j+1}(z^0+r_k^*e^{i\theta}\mathbf{b})}>\frac{\tau_0(\delta,\theta,z^0)}{j+1}\frac{M_{\mathbf{b},j}(r_k^*,z^0,F)}{j!L^j(z^0+r_k^*e^{i\theta}\mathbf{b})}>\frac{M_{\mathbf{b},j}(r_k^*,z^0,F)}{j!L^j(z^0+r_k^*e^{i\theta}\mathbf{b})}$$

для всіх $j\in\{0,1,2,\ldots,N_{\mathbf{b}}(F,L)\}$ та всіх $k\geq k_0(\delta)$. Тому,

$$\frac{M_{\mathbf{b},N+1}(r_k^*,z^0,f)}{(N+1)!L^{n+1}(z^0+r_k^*e^{i\theta}\mathbf{b})}>\max\left\{\frac{M_{\mathbf{b},q+1}(r_k^*,z^0,f)}{q!L^q(z^0+r_k^*e^{i\theta}\mathbf{b})}\right\},\ N=N_{\mathbf{b}}(F,L).$$

Це суперечить (2.2). Отже, $\tau_0(\delta,\theta,z^0)\leq N_{\mathbf{b}}(f,l)+1$ і з огляду на (5.85) та довільність δ отримуємо $\tau\cdot\varphi_0(\theta,z^0)\leq N_{\mathbf{b}}(f,l)+1$ або $\tau\leq\frac{N_{\mathbf{b}}(f,l)+1}{\varphi_0(\theta,z^0)}$.

Доведення (5.87). Нехай $F(z^0+w\mathbf{b})=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z^0)w^m$. Тоді для будь-якого $\delta>0$ маємо

$$M_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)\leq\sum_{m=0}^{\infty}|b_m(z^0)|r^m=\sum_{m=0}^{\infty}|b_m(z^0)|((1+\delta)r)^m(1+\delta)^{-m}\leq$$
$$\leq\frac{1+\delta}{\delta}\mu_{\mathbf{b}}((1+\delta)r,z^0,F).$$

Але за нерівністю (5.86)

$$\ln\mu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)=\ln\mu_{\mathbf{b}}(0,z^0,F)+\int_0^r\frac{\nu_{\mathbf{b}}(t,z^0,f)}{t}dt\leq$$

$$\leq (1+o(1))\frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)}{\varphi_0(\theta,z^0)}\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt$$

при $r\to+\infty$. Позаяк $\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt=+\infty$, одержуємо

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\leq\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\mu_{\mathbf{b}}((1+\delta)r,z^0,F)}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\leq$$

$$\leq\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\mu_{\mathbf{b}}((1+\delta)r,z^0,F)}{\int_0^{(1+\delta)r} L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\cdot\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\int_0^{(1+\delta)r} L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\leq$$

$$\leq\frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)}{\varphi_0(\theta,z^0)}\cdot\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\int_0^{(1+\delta)r} L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}.$$

Застосовуючи знову правило Лопіталя та (5.85), виводимо

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\int_0^{(1+\delta)r} L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\leq\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{(1+\delta)L(z^0+r(1+\delta)e^{i\theta}\mathbf{b})}{L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}=$$

$$=(1+\delta)\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}{L(z^0+\frac{r}{1+\delta}e^{i\theta}\mathbf{b})}\leq\frac{1+\delta}{\varphi(\delta,\theta,z^0)}.$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\leq\frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)+1}{\varphi_0(\theta,z^0)}\cdot\frac{1+\delta}{\varphi(\delta,\theta,z^0)}$$

і при $\delta\to+0$ отримуємо (5.87). Теорему 5.11 доведено. □

У випадку, якщо $L=L(|z|)$ — неспадна функція від змінної $|z|$, то ця функція L задовольняє (5.85).

З теореми 5.11 випливає такий наслідок.

Наслідок 5.3. *Нехай* $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, $L\in\mathbb{L}_n$ *буде додатна неперервна функція така, що* $(\forall z^0\in\mathbb{C}^n)$ $(\forall\theta\in[0,2\pi])$: $rL(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})\to+\infty$ $(r\to+\infty)$ *та* $\inf_{z^0\in\mathbb{C}^n}\min_{\theta\in[0,2\pi]}\varphi_0(\theta,z^0)=\varphi_0\in(0,1]$. *Якщо ціла трансцендентна функція* F *є обмеженого* L*-індексу з напрямком* $\mathbf{b}$ *з* $N_{\mathbf{b}}(F,L)<\infty$, *то*

$$\sup_{z^0\in\mathbb{C}^n}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\nu_{\mathbf{b}}(r,z^0,F)}{rL(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}\leq\frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)+1}{\varphi_0},\tag{5.91}$$

$$\sup_{z^0\in\mathbb{C}^n}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\max\{|F(z^0+\tau\mathbf{b})|:|\tau|=r\}}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\leq\frac{N_{\mathbf{b}}(F,L)+1}{\varphi_0^2}.\tag{5.92}$$

Зауваження 5.7. *Зауважимо, що теорема 5.11 при* $n=1$ *є узагальненням відповідного результату Шеремети та Кузика [150] у двох напрямах: 1) відсутнє припущення, що функція* l *має вигляд* $l(|z|)$; *2) відсутнє припущення, що* $\varphi_0=1$ *(наші результати справедливі для будь-якого* $\varphi_0\in(0,1]$*).*

Приклад 5.2. *Для* $n=1$ *функція* $l(z)=(|z|^p+1)(\sin|z|+2)$ *задовольняє умову* (5.85) *з* $\varphi_0=\frac{1}{3}$.

Взагалі кажучи, при $\varphi\in(0,1)$ нам невідомо, чи оцінки (5.91) або (5.92) є точними. Але для $\varphi_0=1$ М. М. Шеремета та А. Д. Кузик довели, точність оцінки (5.92) в [150] при $n=1$.

Покладемо $u(r)=u(z^0,\theta,r)=L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})$.

Твердження 5.8. *Нехай $L \in \mathbb{L}_n$ і для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $\theta \in [0, 2\pi]$ функція $u(r)$ неперервно диференційовна від дійсної змінної $r \geq 0$. Якщо ціла функція F є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ з $N_{\mathbf{b}}(F, L) < \infty$, то для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, +\infty)$ та кожного цілого $p \geq 0$ маємо*

$$\ln \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^p F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{p! L^p(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} \leq \ln \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)|}{k! L^k(z^0)} \right\} + \\ + \int_0^r \left\{ (N+1) L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) + N \frac{(-u_t'(z^0, \theta, t))^+}{L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b})} \right\} dt. \tag{5.93}$$

Якщо, на додачу, $(-u'(r))^+ / (L^2(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})) \to 0$ при $r \to \infty$ рівномірно по усіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $\theta \in [0, 2\pi]$, то справджується така оцінка

$$\sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \varlimsup_{r \to +\infty} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{\ln F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})}{\int_0^r L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) dt} \leq N_{\mathbf{b}}(F, L) + 1.$$

Доведення. Позначимо $N = N_{\mathbf{b}}(F, L)$. Для фіксованого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $\theta \in [0, 2\pi]$ розглянемо функцію

$$g(r) = \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} : 0 \leq k \leq N \right\}. \tag{5.94}$$

Позаяк функція $\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})}$ є неперервно диференційовна від дійсної змінної $r \in [0, +\infty)$, зовні нульової множини функції $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})$, функція g — неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ за винятком, можливо, зліченної множини точок. Тому, використовуючи нерівність $\frac{d}{dr}|g(r)| \leq |g'(r)|$, яка виконується скрізь, крім точок $r = t$, де $g(t) = 0$, отримуємо

$$\frac{d}{dr} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! u^k(r)} = \frac{1}{k! u^k(r)} \frac{d}{dr} |\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})| + |\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})| \frac{d}{dr} \frac{1}{k! u^k(r)} \leq \\ \leq \frac{1}{k! u^k(r)} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b}) e^{i\theta} b_j \right| - \left| \partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b}) \right| \frac{k u'(r)}{k! u^{k+1}(r)} \leq \\ \leq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k+1} F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! u^k(r)} + \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! u^k(r)} \frac{k(-u'(r))^+}{u(r)}. \tag{5.95}$$

Для абсолютно неперервної функцій $h_1, h_2, \ldots, h_k$ та $h(x) := \max\{h_j(z) : 1 \leq j \leq k\}$, $h'(x) \leq \max\{h_j'(x) : 1 \leq j \leq k\}$, $x \in [a, b]$ (див. [206], лема 4.1, с. 81). Т Функція g — абсолютно неперервна, тому з (5.95) випливає

$$g'(r) \leq \max \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} \right) : 0 \leq k \leq N \right\} \leq \\ \leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k+1} F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{(k+1)! L^{k+1}(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} (k+1) L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b}) + \right. \\ \left. + \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{k! L^k(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} k \frac{(-u_r'(z^0, \theta, r))^+}{L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} : \ 0 \leq k \leq N \right\} \leq$$

$$\leq g(r)\left((N+1)L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})+N\frac{(-u'_r(z^0,\theta,r))^+}{L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}\right).$$

Тому, $\frac{d}{dr}\ln g(r) \leq (N+1)L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})+N\frac{(-u'(r))^+}{L(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})}$ для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$, $\theta\in[0,2\pi]$ та $r>0$ крім, можливо, зліченної множини точок. Оскільки F є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, $g(0)\neq 0$ та для кожного $r>0$

$$g(r)\leq \ln g(0)+\int_0^r\left((N+1)L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})+N\frac{(-u'(t))^+}{L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})}\right)dt.$$

Використовуючи (5.94), отримаємо (5.93). Але якщо ще й $(-u'_t(z^0,\theta,t))^+/(L^2(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b}))\to 0$ при $r\to\infty$ рівномірно для $z^0\in\mathbb{C}^n$ та $\theta\in[0,2\pi]$, то

$$\ln g(r)\leq \ln g(0)+\left\{(N+1)\int_0^r\left(L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})+\frac{(-u'_t(z^0,\theta,t))^+}{L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})}\right)dt\right\}=$$
$$=\ln g(0)+(N+1)(1+o(1))\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt,\ r\to\infty,$$

тому для всіх $\theta\in[0,2\pi]$, $z^0\in\mathbb{C}^n$

$$|F(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})|\leq g(r)\leq g(0)\exp\left\{(N+1)(1+o(1))\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt\right\},$$

при $r\to\infty$. Насамкінець, отримаємо, що для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\frac{\ln|F(z^0+re^{i\theta}\mathbf{b})|\}}{\int_0^r L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})dt}\leq N_{\mathbf{b}}(F,L)+1.$$

□

Наслідок 5.4. *Нехай ціла функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, $N=N_{\mathbf{b}}(F,L)$, z^0 — фіксована точка з $\mathbb{C}^n$ така, що $F(z^0)=1$. Тоді для кожного $r\in[0,\infty)$ справедлива така нерівність*

$$\int_0^r\frac{n(t,z^0,1/F)}{t}dt\leq \ln\max\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:\ |t|=r\}\leq$$
$$\leq\ln\max\left\{\frac{|\partial^p_{\mathbf{b}}F(z^0)|}{p!L^p(z^0)}:0\leq k\leq N\right\}+$$
$$+\max_{\theta\in[0,2\pi]}\int_0^r\left\{(N+1)L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})+N\frac{(-u'_t(z^0,\theta,t))^+}{L(z^0+te^{i\theta}\mathbf{b})}\right\}dt.$$

5.7 Композиція цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком

Незважаючи на численні статті про функції обмеженого індексу, обмеженість індексу композиції цілих та аналітичних функції розглянута лише в чотирьох з них [206, 219, 276, 277]. У праці [219] досліджено обмеженість l-індексу

композиції $f(P(z))$, де f — ціла функція та P — многочлен. Натомість в [276] знайдено умови, які забезпечують обмеженість l-індексу функції $f(w(z))$, де f — аналітична функція в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, $w(z) = \frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}e^{i\alpha}$, $z_0 \in \mathbb{D}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Найзагальніший результат такого типу встановлений в [277] для композиції аналітичних функцій у довільних областях з $\mathbb{C}$. Також М. М. Шеремета [206, с. 99] довели, що ціла функція $f(z)$ має обмежений індекс тоді і тільки тоді, коли аналітична функція $f(\frac{1}{z})$ у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ має обмежений l-індекс з $l(z) = \frac{1}{|z|^2}$.

Проте багатовимірний випадок [56] розглядався лише для такої складеної функції $f\big(\sum\limits_{j=1}^{n} z_j m_j\big)$, де $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{C}^n$ фіксоване. Тому виникає наступне питання: *Нехай $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого l-індексу, $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — ціла функція, $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ неперервна функція. Якими є додатна неперервна функція L та напрямок $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, щоб складена функція $f(\Phi(z))$ мала обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$?*

Тут ми дамо відповідь на це питання. Наш основний результат — такий.

Теорема 5.12. *Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, f — ціла функція в $\mathbb{C}$, Φ — ціла функція в $\mathbb{C}^n$ така, що $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) \neq 0$ та*

$$|\partial_{\mathbf{b}}^{j}\Phi(z)| \leq K|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{j}, \quad K \equiv \mathrm{const} > 0, \tag{5.96}$$

для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ та кожного $j \leq p$, де $p = N(f, l)$ або $p = N_{\mathbf{b}}(F, L)$ відповідно.

Нехай $l \in Q$, $l(w) \geq 1$, $w \in \mathbb{C}$ та $L \in Q_{\mathbf{b}}^{n}$, де $L(z) = \big|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\big| l(\Phi(z))$. Ціла функція f має обмежений l-індекс тоді і тільки тоді, коли $F(z) = f(\Phi(z))$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

У [277] отримано подібне твердження для аналітичних в довільній області комплексної площини функцій від однієї змінної.

Для доведення основної теореми нам потрібні допоміжні твердження.

Теорема XVII ([254], [259, лема 4.3]). *Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ та $L \in Q_{\mathbf{b}}^{n}$. Ціла функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли існують числа $p \in \mathbb{Z}_+$, $R > 0$ та $C > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$, $|z| \geq R$,*

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z)|}{L^{p+1}(z)} \leq C \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k}F(z)|}{L^{k}(z)} : \ 0 \leq k \leq p\right\}. \tag{5.97}$$

Доведення теореми 5.12. Спершу покажемо, що

$$\partial_{\mathbf{b}}^{k}F(z) = f^{(k)}(\Phi(z))\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{k} + \sum_{j=1}^{k-1} f^{(j)}(\Phi(z))Q_{j,k}(z), \tag{5.98}$$

$$\text{де}\, Q_{j,k}(z) = \sum_{\substack{n_1+2n_2+\ldots+kn_k=k \\ 0\leq n_1\leq j-1}} c_{j,k,n_1,\ldots,n_k}\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{n_1}\left(\partial_{\mathbf{b}}^{2}\Phi(z)\right)^{n_2}\ldots\left(\partial_{\mathbf{b}}^{k}\Phi(z)\right)^{n_k},$$

а $c_{j,k,n_1,\ldots,n_k}$ — деякі невід'ємні цілі числа. Також виведемо, що

$$f^{(k)}(\Phi(z)) = \frac{\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)}{\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^k} + \frac{1}{\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{2k}} \sum_{j=1}^{k-1} \partial_{\mathbf{b}}^j F(z) \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^j Q_{j,k}^*(z), \qquad (5.99)$$

де

$$Q_{j,k}^*(z) = \sum_{m_1+2m_2+\ldots+km_k=2(k-j)} b_{j,k,m_1,\ldots,m_k} (\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z))^{m_1} \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{m_2} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^k\Phi(z)\right)^{m_k},$$

та $b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}$ — деякі цілі коефіцієнти.

Справедливість формул (5.98) та (5.99) можна перевірити методом математичної індукції. Зрозуміло, що для $k = 1$ рівності (5.98) та (5.99) виконуються. Припустимо, що вони справедливі для $k = s$. Доведемо їх для $k = s + 1$. Знайдемо похідну за напрямком у (5.98)

$$\begin{gathered}
\partial_{\mathbf{b}}^{s+1} F(z) = f^{(s+1)}(\Phi(z)) \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{s+1} + s f^{(s)}(\Phi(z)) \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{s-1} \partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z) + \\
+ \sum_{j=1}^{s-1} \left(f^{(j+1)}(\Phi(z)) \partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) Q_{j,s}(z) + f^{(j)}(\Phi(z)) \partial_{\mathbf{b}} Q_{j,s}(z) \right) = \\
= f^{(s+1)}(\Phi(z)) \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{s+1} + \\
+ f^{(s)}(\Phi(z)) \left(s \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{s-1} \partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z) + \partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) Q_{s-1,s}(z) \right) + \\
+ \sum_{j=2}^{s-1} f^{(j)}(\Phi(z)) \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) Q_{j-1,s}(z) + \partial_{\mathbf{b}} Q_{j,s}(z)\right) + f'(\Phi(z)) \partial_{\mathbf{b}} Q_{1,s}(z).
\end{gathered}$$

Позаяк

$$\begin{gathered}
s \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{s-1} \partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z) + \\
+ \sum_{\substack{n_1+2n_2+\ldots+sn_s=s \\ 0\le n_1\le s-2}} c_{s-1,s,n_1,\ldots,n_s} \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{n_1+1} \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right) \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^s\Phi(z)\right)^{n_s} = \\
= \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=s+1 \\ 0\le m_1\le s-1}} \tilde{c}_{s,s+1,m_1,\ldots,m_s} \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1} \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{m_2} \ldots \\
\times \left(\partial_{\mathbf{b}}^s\Phi(z)\right)^{m_s} = Q_{s,s+1}(z), \\
\partial_{\mathbf{b}} Q_{1,s}(z) = \\
= \sum_{2n_2+\ldots+sn_s=s} c_{1,s,0,n_2,\ldots,n_s} \Big(n_2 \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{n_2-1} \left(\partial_{\mathbf{b}}^3\Phi(z)\right)^{n_3+1} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^s\Phi(z)\right)^{n_s} + \\
+ \ldots + n_s \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{n_2} \left(\partial_{\mathbf{b}}^3\Phi(z)\right)^{n_3} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^s\Phi(z)\right)^{n_s-1} \partial_{\mathbf{b}}^{s+1}\Phi(z) \Big) = \\
= \sum_{2m_2+\ldots+(s+1)m_{s+1}=s+1} \tilde{c}_{1,s+1,0,m_2,\ldots,m_{s+1}} \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{m_2} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^s\Phi(z)\right)^{m_s} \times \\
\times \left(\partial_{\mathbf{b}}^{s+1}\Phi(z)\right)^{m_{s+1}} = Q_{1,s+1}(z), \text{ та} \\
\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) Q_{j-1,s}(z) + \partial_{\mathbf{b}} Q_{j,s}(z) =
\end{gathered}$$

$$= \sum_{\substack{n_1+2n_2+\ldots+sn_s=s \\ 0\le n_1\le j-2}} c_{j-1,s,n_1,\ldots,n_s} \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{n_1+1} \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{n_2} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^s\Phi(z)\right)^{n_s} +$$

$$+ \sum_{\substack{n_1+2n_2+\ldots+kn_s=s \\ 0\le n_1\le j-1}} c_{j,s,n_1,n_2,\ldots,n_s} \Big(n_1 \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{n_1-1} \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{n_2+1} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^s\Phi(z)\right)^{n_s} +$$

$$+ \ldots + n_s \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{n_1} \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{n_2} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^s\Phi(z)\right)^{n_s-1} \partial_{\mathbf{b}}^{s+1}\Phi(z)\Big)$$

$$= \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+(s+1)m_{s+1}=s+1 \\ 0\le m_1\le j-1}} \tilde{c}_{j,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}} \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{n_1} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^s\Phi(z)\right)^{n_s} \left(\partial_{\mathbf{b}}^{s+1}\Phi(z)\right)^{n_{s+1}} =$$

$$= Q_{j,s+1}(z),$$

отримуємо (5.98) з $s+1$ замість k.

Також за допомогою математичної індукції, як і (5.98), можна показати рівність (5.99). Після диференціювання за напрямком $\mathbf{b}$ рівність (5.99) дає

$$f^{(s+1)}(\Phi(z)) = \frac{\partial_{\mathbf{b}}^{s+1}F(z)}{\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{s+1}} - s\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{-s-2} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s-1} \Big\{ \partial_{\mathbf{b}}^{j+1}F(z)\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{j-2s-1} Q_{j,s}^*(z) +$$

$$+ \partial_{\mathbf{b}}^jF(z)\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{j-2s-2} \left((j-2s)\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)Q_{j,s}^*(z) + \partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\partial_{\mathbf{b}}Q_{j,s}^*(z)\right)\Big\} =$$

$$= \frac{\partial_{\mathbf{b}}^{s+1}F(z)}{\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{s+1}} + \partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{-s-2}\Big(- s\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z) + Q_{s-1,s}^*(z)\Big) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{s-1} \Big\{ \partial_{\mathbf{b}}^jF(z)\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{j-2s-2} \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\partial_{\mathbf{b}}Q_{j,s}^*(z) +\right.$$

$$\left. + (j-2s)\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)Q_{j,s}^*(z) + Q_{j-1,s}^*(z)\right)\Big\} +$$

$$+ \partial_{\mathbf{b}}F(z)\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{-2s-1} \left((1-2s)\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)Q_{1,s}^*(z) + \partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\partial_{\mathbf{b}}Q_{1,s}^*(z)\right).$$

Оскільки

$$-s\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z) + Q_{s-1,s}^*(z) = (-s + b_{s-1,s,m_1,\ldots,m_s})\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z) =$$

$$= \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s+ \\ +(s+1)m_{s+1}=2}} \tilde{b}_{s,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}} \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s} \times$$

$$\times \left(\partial_{\mathbf{b}}^{m_s+1}F(z)\right)^{m_s+1} = Q_{s,s+1}^*(z),$$

$$(1-2s)\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)Q_{1,s}^*(z) + \partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\partial_{\mathbf{b}}Q_{1,s}^*(z) = (1-2s)\times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s= \\ =2s-2}} b_{1,s,m_1,\ldots,m_s} \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1} \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{m_2+1} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s} +$$

$$+ \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s= \\ =2s-2}} b_{1,s,m_1,\ldots,m_s} \Big\{ m_1 \left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1} \left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{m_2+1} \ldots \left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s} +$$

$$+m_2\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1+1}\left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{m_2-1}\left(\partial_{\mathbf{b}}^3\Phi(z)\right)^{m_3+1}\ldots\left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s}+\ldots+$$
$$+m_s\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1+1}\ldots\left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s-1}\partial_{\mathbf{b}}^{s+1}\Phi(z)\Big\}=$$
$$=\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s+\\+(s+1)m_{s+1}=2s}}\tilde{b}_{1,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}}\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1}\ldots\left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s}\times$$
$$\times\left(\partial_{\mathbf{b}}^{s+1}\Phi(z)\right)^{m_{s+1}}=Q_{1,s+1}^*(z),$$

та

$$\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\partial_{\mathbf{b}}Q_{j,s}^*(z)+(j-2s)\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)Q_{j,s}^*(z)+Q_{j-1,s}^*(z)=$$
$$=\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2(s-j)}}b_{j,s,m_1,\ldots,m_s}\Big\{m_1\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1}\left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{m_2+1}\ldots\left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s}+$$
$$+\ldots+m_s\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1+1}\left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{m_2}\ldots\left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s-1}\partial_{\mathbf{b}}^{s+1}\Phi(z)\Big\}+$$
$$+(j-2s)\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2(s-j)}}b_{j,s,m_1,\ldots,m_s}\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1}\left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{n_2+1}\ldots\left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s}+$$
$$+\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2(s-j)+2}}b_{j-1,s,m_1,\ldots,m_s}\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1}\ldots\left(\partial_{\mathbf{b}}^sF(z)\right)^{m_s}=$$
$$=\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s+\\+(s+1)m_{s+1}=2(s+1-j)}}\tilde{b}_{j,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}}\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1}\ldots\left(\partial_{\mathbf{b}}^{s+1}\Phi(z)\right)^{m_{s+1}}=$$
$$=Q_{j,s+1}^*(z),$$

встановлюємо справедливість (5.98) з $s+1$ замість k.

Нехай f — ціла функція обмеженого l-індексу. За теоремою XVII нерівність (5.97) — правильна для $n=1$, $F=f$, $L=l$, $\mathbf{b}=1$. Зважаючи на (5.96) та (5.98), для $k=p+1$ маємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z)|}{L^{p+1}(z)}\le\frac{|f^{(p+1)}(\Phi(z))|}{L^{p+1}(z)}\left|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right|^{p+1}+\sum_{j=1}^{p}\frac{|f^{(j)}(\Phi(z))||Q_{j,p+1}(z)|}{L^{p+1}(z)}\le$$
$$\le\max\left\{\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))}:\ 0\le k\le p\right\}\left(C+\sum_{j=1}^{p}\frac{|Q_{j,p+1}(z)|}{l^{p+1-j}(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{p+1}}\right)\le$$
$$\le\max\left\{\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))}:\ 0\le k\le p\right\}\left(C+\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{n_1+2n_2+\ldots+(p+1)n_{p+1}=p+1\\0\le n_1\le j-1}}c_{j,p+1,n_1,\ldots,n_{p+1}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{|\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{n_1}\left(\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z)\right)^{n_2}\ldots\left(\frac{\partial^{p+1}\Phi(z)}{\partial\mathbf{b}^{p+1}}\right)^{n_{p+1}}|}{l^{p+1-j}(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{p+1}}\right)\le\max\left\{\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))}:0\le k\le p\right\}\times$$

$$\times\left(C+\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{n_1+2n_2+\ldots+(p+1)n_{p+1}=p+1\\0\le n_1\le j-1}}\frac{c_{j,p+1,n_1,\ldots,n_{p+1}}K^{p+1}}{l^{p+1-j}(\Phi(z))}\right)\le C_1\max_{0\le k\le p}\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))}.$$

Використовуючи (5.99), можна оцінити зверху дріб $\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))}$:

$$\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))}\le\frac{|\frac{\partial^k F(z)}{\partial\mathbf{b}^k}|}{l^k(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^k}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{|\frac{\partial^j F(z)}{\partial\mathbf{b}^j}||Q^*_{j,k}(z)|}{l^k(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{2k-j}}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{1}{L^j(z)}\left|\partial^j_{\mathbf{b}}F(z)\right|:1\le j\le k\right\}\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{|Q^*_{j,k}(z)|}{l^{k-j}(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{2(k-j)}}\right)\le$$

$$\le\max\left\{\frac{1}{L^j(z)}\left|\partial^j_{\mathbf{b}}F(z)\right|:1\le j\le k\right\}\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{m_1+2m_2+\ldots+km_k=2(k-j)}|b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}|\times\right.$$

$$\left.\times\frac{|\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1}\left(\partial^2_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_2}\ldots\left(\partial^k_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_k}|}{l^{k-j}(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{2(k-j)}}\right)\le\max\left\{\frac{|\partial^j_{\mathbf{b}}F(z)|}{L^j(z)}:1\le j\le k\right\}\times$$

$$\times\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{m_1+2m_2+\ldots+km_k=2(k-j)}\frac{|b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}|K^k}{l^{k-j}(\Phi(z))}\right)\le C_2\max_{1\le j\le k}\frac{|\partial^j_{\mathbf{b}}F(z)|}{L^j(z)}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{|\partial^{p+1}_{\mathbf{b}}F(z)|}{L^{p+1}(z)}\le C_1C_2\max\left\{\frac{|\partial^k_{\mathbf{b}}F(z)|}{L^k(z)}:\ 0\le k\le p\right\}.$$

Тому за теоремою XVII остання нерівність означає, що функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Навпаки припустимо, що F є функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Тоді вона задовольняє (5.97). З огляду на (5.96) та (5.99), отримуємо

$$\frac{|f^{(p+1)}(\Phi(z))|}{l^{p+1}(\Phi(z))}\le\frac{|\frac{\partial^{p+1}F(z)}{\partial\mathbf{b}^{p+1}}|}{l^{p+1}(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{p+1}}+\sum_{j=1}^{p}\frac{|\partial^j_{\mathbf{b}}F(z)||Q^*_{j,p+1}(z)|}{l^{p+1}(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{2p+2-j}}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{|\partial^k_{\mathbf{b}}F(z)|}{L^k(z)}:0\le k\le p\right\}\left(C+\sum_{j=1}^{p}\frac{|Q^*_{j,p+1}(z)|}{l^{p+1-j}(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{2(p+1-j)}}\right)\le$$

$$\le\max\left\{\frac{|\partial^k_{\mathbf{b}}F(z)|}{L^k(z)}:0\le k\le p\right\}\left(C+\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{m_1+\ldots+(p+1)m_{p+1}=\\=2(p+1-j)}}|b_{j,p+1,m_1,\ldots,m_{p+1}}|\times\right.$$

$$\left.\times\frac{|\left(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_1}\left(\partial^2_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right)^{m_2}\ldots\left(\frac{\partial^{p+1}\Phi(z)}{\partial\mathbf{b}^{p+1}}\right)^{m_{p+1}}|}{l^{p+1-j}(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{2(p+1-j)}}\right)\le\max\left\{\frac{|\partial^k_{\mathbf{b}}F(z)|}{L^k(z)}:0\le k\le p\right\}\times$$

$$\times\left(C+\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{m_1+\ldots+(p+1)m_{p+1}=\\=2(p+1-j)}}\frac{|b_{j,p+1,m_1,\ldots,m_{p+1}}|K^{2p+2-2j}}{l^{p+1-j}(\Phi(z))}\right)\leq C_3\max_{0\leq k\leq p}\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)}.$$

Враховуючи (5.98), оцінюємо так:

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)}\leq\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))||\varphi'(z)|^k}{L^k(z)}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{|f^{(j)}(\Phi(z))||Q_{j,k}(z)|}{L^k(z)}\leq$$

$$\leq\max\left\{\frac{|f^{(j)}(\Phi(z))|}{l^j(\Phi(z))}:1\leq j\leq k\right\}\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{|Q_{j,k}(z)|}{l^{k-j}(\Phi(z))|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^k}\right)\leq$$

$$\leq C_4\max\left\{\frac{|f^{(j)}(\Phi(z))|}{l^j(\Phi(z))}:1\leq j\leq k\right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{|f^{(p+1)}(\Phi(z))|}{l^{p+1}(\Phi(z))}\leq C_3C_4\max\left\{\frac{|f^{(j)}(\Phi(z))|}{l^j(\Phi(z))}:0\leq j\leq p\right\}.$$

Отже, за теоремою XVII ($n=1$, $F=f$, $L=l$, $\mathbf{b}=1$) функція f має обмежений l-індекс. □

Зазначимо, що умова $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\neq 0$ в теоремі 5.12 обумовлена суто методом доведення. Насправді її можна позбутися та довести загальніше твердження:

Теорема 5.13. *Нехай* $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, f *— ціла функція в* $\mathbb{C}$, Φ *— ціла функція в* $\mathbb{C}^n$, $p=N(f,l)$ *або* $p=N_{\mathbf{b}}(F,L)$ *відповідно.*

Нехай $l\in Q$, $l(w)\geq 1$, $w\in\mathbb{C}$ *та* $L\in Q_{\mathbf{b}}^n$, *де* $L(z)\asymp\max\limits_{1\leq j\leq p}\left\{1,\left|\partial_{\mathbf{b}}^j\Phi(z)\right|\right\}l(\Phi(z))$. *Ціла функція* f *має обмежений* l*-індекс тоді і тільки тоді, коли* $F(z)=f(\Phi(z))$ *має обмежений* L*-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$.

Доведення цієї теореми подібне до доведення теореми 5.12 і також використовує аналог теореми Хеймана для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком, а саме теорему IV.

Зазначимо, що для $n=1$ отримані умови в теоремі 5.12 є слабшими, ніж в [277], бо там вимагається виконання (5.96) для всіх значень $j\in\mathbb{N}$, а в нас лише для $j\leq p$. А теорема 5.13 є новою навіть для $n=1$.

5.8 Метричні властивості простору цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком

К. Екблау [93] дослідив властивості простору цілих функцій обмеженого індексу для однієї змінної. Ним доведено, що в топології, породженій метрикою Ієра [137] $d(f,g)=\sup\{|a_0-b_0|,|a_p-b_p|^{1/p}:p\in\mathbb{N}\}$, простір цілих функцій

обмеженого індексу є простором першої категорії. Згодом у [260] цей результат узагальнено для цілих функцій від декількох комплексних змінних обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за умови, що j-та компонента неперервної вектор-функції $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ залежить лише від змінної z_j (див. також підрозділ 6.5, де наведено наші результати для ширшого класу функцій $\mathbf{L}$).

Тут розглянемо можливість перенесення результатів Екблау на випадок цілих функцій у $\mathbb{C}^n$ обмеженого L-індексу за напрямком.

Для цілих у $\mathbb{C}^n$ функцій $F(z) = f(\langle z, \mathbf{b}\rangle)$, $G(z) = g(\langle z, \mathbf{b}\rangle)$, де f і g цілі функції в $\mathbb{C}$, покладемо

$$d(F,G) = \sup\left\{|F(0)-G(0)|, \left|\frac{\partial^p_{\mathbf{b}}F(0)}{p!|\mathbf{b}|^{2p}} - \frac{\partial^p_{\mathbf{b}}G(0)}{p!|\mathbf{b}|^{2p}}\right|^{1/p} : p\in\mathbb{N}\right\},$$

а простір усіх цілих функцій вигляду $F(z) = f(\langle z, \mathbf{b}\rangle)$ з такою метрикою позначимо через $E^n_{\mathbf{b}}$.

Нехай $B^n_{\mathbf{b}}(L)$ буде множиною цілих функцій вигляду $F(z) = f(\langle z, \mathbf{b}\rangle)$ обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, а $B^n_{\mathbf{b},\nu}(L)$ — множина функцій з $B^n_{\mathbf{b}}(L)$ таких, що $N_{\mathbf{b}}(F,L) \le \nu$. Звісно, $B^n_{\mathbf{b}}(L) = \bigcup\limits_{\nu} B^n_{\mathbf{b},\nu}(L)$.

Лема 5.4. *Для будь-яких $F \in E^n_{\mathbf{b}}$, $\nu_0 \in \mathbb{N}$ та $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що при $G \in E^n_{\mathbf{b}}$ та $d(F,G) < \delta$ виконується нерівність $d\left(\partial^k_{\mathbf{b}}F, \partial^k_{\mathbf{b}}G\right) < \varepsilon$ для $k = 0$, 1, 2, …, ν_0.*

Доведення. Нехай $F \in E^n_{\mathbf{b}}$, $\nu_0 \in \mathbb{N}$ та $\varepsilon > 0$ — задані. Візьмемо

$$T > \sup\left\{\max\{1, |\mathbf{b}|^{2k}\}\left(\frac{(p+k)!}{p!}\right)^{1/p} : p\in\mathbb{N}, k = 0,1,2,\dots,\nu_0\right\}.$$

Безпосередньо перевіряється, що якщо $G(z) \in E^n_{\mathbf{b}}$ та $d(F,G) < \frac{\varepsilon}{\varepsilon+T} < 1$, то

$$d\left(\partial^k_{\mathbf{b}}F, \partial^k_{\mathbf{b}}G\right) = \sup_{p\in\mathbb{N}}\left\{k!|\mathbf{b}|^{2k}\left|\frac{\partial^k_{\mathbf{b}}F(0)}{k!|\mathbf{b}|^{2k}} - \frac{\partial^k_{\mathbf{b}}G(0)}{k!|\mathbf{b}|^{2k}}\right|,\right.$$

$$\left.\left(\frac{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k}}{p!}\left|\frac{\partial^{p+k}_{\mathbf{b}}F(0)}{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k+2p}} - \frac{\partial^{p+k}_{\mathbf{b}}G(0)}{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k+2p}}\right|\right)^{1/p}\right\} <$$

$$< \sup_{p\in\mathbb{N}}\left\{k!|\mathbf{b}|^{2k}, \left(\frac{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k}}{p!}\right)^{1/p}\right\}\sup\left\{\left|\frac{1}{k!|\mathbf{b}|^{2k}}\partial^k_{\mathbf{b}}F(0) - \frac{1}{k!|\mathbf{b}|^{2k}}\partial^k_{\mathbf{b}}G(0)\right|^{\frac{1}{k}\cdot k},\right.$$

$$\left.\left|\frac{\partial^{p+k}_{\mathbf{b}}F(0)}{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k+2p}} - \frac{\partial^{p+k}_{\mathbf{b}}G(0)}{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k+2p}}\right|^{\frac{1}{p+k}\frac{p+k}{p}} : \ p\in\mathbb{N}\right\} <$$

$$< \sup\left\{\max\{1, |\mathbf{b}|^{2k}\}\cdot\left(\frac{(p+k)!}{p!}\right)^{1/p} : \ p\in\mathbb{N}\right\}\times$$

$$\times \sup_{p\in\mathbb{N}} \left\{ \left| \frac{\partial_{\mathbf{b}}^k F(0)}{k!|\mathbf{b}|^{2k}} - \frac{\partial_{\mathbf{b}}^k G(0)}{k!|\mathbf{b}|^{2k}} \right|^{\frac{1}{k}}, \left| \frac{\partial_{\mathbf{b}}^{p+k} F(0)}{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k+2p}} - \frac{\partial_{\mathbf{b}}^{p+k} G(0)}{(p+k)!|\mathbf{b}|^{2k+2p}} \right|^{\frac{1}{p+k}} \right\} <$$

$$< T \sup \left\{ |F(0) - G(0)|, \left| \frac{1}{p!|\mathbf{b}|^{2p}} \frac{\partial^p F(0)}{\partial \mathbf{b}^p} - \frac{1}{p!|\mathbf{b}|^{2p}} \frac{\partial^p G(0)}{\partial \mathbf{b}^p} \right|^{1/p} : p \in \mathbb{N} \right\} <$$

$$< T \cdot \frac{\varepsilon}{T+\varepsilon} < \varepsilon$$

для $k = 1, 2, \ldots, \nu_0$. □

Твердження 5.9. *Нехай $F \in E_{\mathbf{b}}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$, $N_{\mathbf{b}}(F, L) > \nu$. Тоді існує $\delta > 0$ що як тільки $G \in E_{\mathbf{b}}^n$ та $d(F, G) < \delta$, то $N_{\mathbf{b}}(G, L) > \nu$.*

Доведення. Позаяк $N_{\mathbf{b}}(F, L) > \nu$, знайдуться $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $\nu_0 > \nu$, для яких $N_{\mathbf{b}}(F, L, z^0) = \nu_0 > \nu$. Водночас для кожного $k \le \nu_0 - 1$

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)|}{k! L^k(z^0)} < \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{\nu_0} F(z^0)|}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)}.$$

Ця нерівність — строга, бо ν_0 — найменше ціле число, для якого виконується нестрога нерівність у точці z^0. Тому знайдеться $\delta^* > 0$ таке, що

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)|}{k! L^k(z^0)} + \delta^* < \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{\nu_0} F(z^0)|}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)}. \tag{5.100}$$

Очевидно, що

$$|a - c| + |b - d| \ge -(a - c) + (b - d).$$

Тоді $a - b \ge c - d - |a - c| - |b - d|$. Скористаємося цією нерівністю для цілих функцій F і G, щоб отримати таке:

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{\nu_0} G(z^0)|}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)} - \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)|}{k! L^k(z^0)} \ge \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{\nu_0} F(z^0)|}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)} - \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)|}{k! L^k(z^0)} -$$

$$- \frac{1}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)} \left| |\partial_{\mathbf{b}}^{\nu_0} G(z^0)| - |\partial_{\mathbf{b}}^{\nu_0} F(z^0)| \right| - \frac{1}{k! L^k(z^0)} \left| |\partial_{\mathbf{b}}^k G(z^0)| - |\partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0)| \right|. \tag{5.101}$$

Використовуючи ідею доведення формули Тейлора, можна показати, що для функцій вигляду $F(z) = f(\langle z, \mathbf{b} \rangle)$, $G(z) = g(\langle z, \mathbf{b} \rangle)$ виконується таке

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial_{\mathbf{b}}^p F(0)}{p!|\mathbf{b}|^{2p}} \langle z, \mathbf{b} \rangle^p, \quad G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\partial_{\mathbf{b}}^p G(0)}{p!|\mathbf{b}|^{2p}} \langle z, \mathbf{b} \rangle^p.$$

Зрозуміло, що

$$\left| \left| \partial_{\mathbf{b}}^k G(z^0) \right| - \left| \partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0) \right| \right| \le d\left(\partial_{\mathbf{b}}^k F, \partial_{\mathbf{b}}^k G\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(d\left(\partial_{\mathbf{b}}^k F, \partial_{\mathbf{b}}^k G\right) \right)^j |\langle z^0, \mathbf{b} \rangle|^j$$

За лемою 5.4 можна вибрати число δ, для якого $d(F, G) < \delta$. Тоді $d\left(\partial_{\mathbf{b}}^k F, \partial_{\mathbf{b}}^k G\right) < \varepsilon < 1$ та $d\left(\partial_{\mathbf{b}}^k F, \partial_{\mathbf{b}}^k G\right) |\langle z^0, \mathbf{b} \rangle| < \varepsilon < 1$ для всіх $k \le \nu_0$. Тобто, для кожного $k \le \nu_0$

$$\left| \left| \partial_{\mathbf{b}}^k G(z^0) \right| - \left| \partial_{\mathbf{b}}^k F(z^0) \right| \right| \le \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{\varepsilon(2 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon}$$

та з (5.100), (5.101) для всіх $k \le \nu_0 - 1$ отримуємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{\nu_0} G(z^0)|}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)} - \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} G(z^0)|}{k! L^{k}(z^0)} \ge \delta^* - \frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)} + \frac{1}{k! L^{k}(z^0)}\right).$$

З останнього, зважаючи на довільність ε, випливає

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{\nu_0} G(z^0)|}{\nu_0! L^{\nu_0}(z^0)} - \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} G(z^0)|}{k! L^{k}(z^0)} > \frac{\delta^*}{2}$$

для всіх $k \le \nu_0 - 1$, тобто, $\infty \ge N_{\mathbf{b}}(L, G) \ge N_{\mathbf{b}}(L, G, z^0) \ge \nu_0 > \nu$. Твердження5.9 доведене. □

Умова $N_{\mathbf{b}}(F, L) > \nu$ у твердженні 5.9 рівносильна $F \in E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b},\nu}^n(L)$. Тому це твердження можна перефразувати.

Твердження 5.10. *Нехай $F \in E_{\mathbf{b}}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$, $F \in E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b},\nu}^n(L)$. Існує $\delta > 0$, що якщо $G \in E_{\mathbf{b}}^n$ та $d(F, G) < \delta$, то $G \in E_{\mathbf{b}}^n \setminus B_{\mathbf{b},\nu}^n(L)$.*

Наслідок 5.5. *Множина $B_{\mathbf{b},\nu}^n(L)$ замкнена в $E_{\mathbf{b}}^n$.*

Лема 5.5. *Якщо $P(z)$ — многочлен степеня p, то $F(z) = \exp\langle z, a\rangle + P(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, що не перевищує $p+1$, де $a \in \mathbb{C}^n$, $L(z) = \max\{1, |\langle \mathbf{b}, a\rangle|\}$ та $\langle \mathbf{b}, a\rangle \ne 0$. А якщо $\langle \mathbf{b}, a\rangle = 0$, то $F(z)$ має індекс за напрямком $\mathbf{b}$ рівним 0.*

Доведення. Нехай $k > p+1$ і $|\langle \mathbf{b}, a\rangle| \ge 1$. Тоді

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} F(z)|}{k! L^{k}(z)} = \frac{|\exp\langle z, a\rangle|}{k! L^{k}(z)} |\langle \mathbf{b}, a\rangle|^k = \frac{|\exp\langle z, a\rangle|}{k!} <$$
$$< \frac{|\exp\langle z, a\rangle|}{(p+1)! L^{p+1}(z)} |\langle \mathbf{b}, a\rangle|^{p+1} = \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{(p+1)! L^{p+1}(z)}.$$

Аналогічну нерівність можна вивести для $|\langle \mathbf{b}, a\rangle| < 1$. Тому $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, який не більший, ніж $p+1$. У випадку $\langle \mathbf{b}, a\rangle = 0$ отримуємо для всіх $k > 1$

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} F(z)|}{k! L^{k}(z)} = \frac{|\exp\langle z, a\rangle|}{k! L^{k}(z)} |\langle \mathbf{b}, a\rangle|^k \le \frac{|\exp\langle z, a\rangle|}{k!} = 0.$$

Отже, $F(z)$ має індекс за напрямком $\mathbf{b}$ рівним 0. □

Нам потрібна така лема

Лема 5.6. *Якщо $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$ та ціла трансцендентна функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, то для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$*

$$\ln M(r, F, z^0) = O\left(\int_0^r L(z^0 + t\mathbf{b}) dt\right), \ r \to +\infty,$$

де $M(r, F, z^0) = \max\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : \ |t| = r\}$.

Доведення. Доведення цього факту випливає з доведення відповідної леми для випадку функцій однієї змінної (див. [206, теорема 3.3, с.71]) та з того, що $F(z^0 + t\mathbf{b})$ при фіксованому z^0 є функцією від однієї змінної $t \in \mathbb{C}$. □

Твердження 5.11. *Якщо $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, то для кожного $\nu \in \mathbb{Z}_+$ множина $B^n_{\mathbf{b},\nu}(L)$ ніде не щільна в $B^n_{\mathbf{b}}(L)$ та $B^n_{\mathbf{b}}(L)$ є простором першої категорії. Множини $E^n_{\mathbf{b}} \setminus B^n_{\mathbf{b},\nu}(L)$ та $E^n_{\mathbf{b}} \setminus B^n_{\mathbf{b}}(L)$ є щільними в $E^n_{\mathbf{b}}$*

Доведення. Нехай $F(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} F_p\langle z, \mathbf{b}\rangle^p$ — ціла функція така, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$

$$\frac{\ln M(r, F, z^0)}{\int_0^r L(z^0 + t\mathbf{b})dt} \to +\infty,\ r \to +\infty,$$

де $M(r, F, z^0) = \max\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| :\ |t| = r\}$. Тоді за лемою 5.6 функція F має необмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. Нехай $f(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} f_p\langle z, \mathbf{b}\rangle^p$ — ціла функція обмеженого L-індексу $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \nu$ за напрямком $\mathbf{b}$. Позначимо $f^*_j(z) = \sum_{p=0}^{j} f_p\langle z, \mathbf{b}\rangle^p + \sum_{p=j+1}^{\infty} F_p\langle z, \mathbf{b}\rangle^p$ та $f^*_{j,m}(z) = \sum_{p=0}^{j} f_p\langle z, \mathbf{b}\rangle^p + \sum_{p=j+1}^{m} F_p\langle z, \mathbf{b}\rangle^p$, де $m > j$.

Тоді f^*_j є необмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ для кожного j, тобто, $N_{\mathbf{b}}(L, f^*_j) > \nu$, $j > 0$. Легко бачити, що $d(f, f^*_j) \to 0$, $d(f^*_j, f^*_{j,m}) \to 0$ та $d(f, f^*_{j,m}) \to 0$ при $j \to \infty$. За теоремою 5.9 $N_{\mathbf{b}}(f^*_{j,m}, l) > \nu$ для досить великих m. З іншого боку, $N(f^*_{j,m}, l) \le m$. Отже, $f^*_{j,m} \in B^n_{\mathbf{b}}(L) \setminus B^n_{\mathbf{b},\nu}(L)$, тобто, множина $B^n_{\mathbf{b},\nu}(L)$ ніде не щільна в $B^n_{\mathbf{b}}(L)$.

Якщо f — довільна функція з $B^n_{\mathbf{b}}(L)$, то можна вибрати f^*_j за вище наведеною схемою. Зрозуміло, що $f^*_j \in E^n_{\mathbf{b}} \setminus B^n_{\mathbf{b}}(L)$ і $d(f, f^*_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Тому множини $E^n_{\mathbf{b}} \setminus B^n_{\mathbf{b}}(L)$ щільні в E.

Нарешті, нехай $f \in E^n_{\mathbf{b}} \setminus (B^n_{\mathbf{b}}(L) \setminus B^n_{\mathbf{b},\nu}(L))$. Це означає, що або f є необмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ або $N_{\mathbf{b}}(f, L) \le \nu$. Покажемо, що в обох випадках f є границею для деяких функцій f^*_j з $\nu < N_{\mathbf{b}}(f_j; L) < +\infty$. У першому випадку маємо $f^*_j(z) = \sum_{p=0}^{j} f_n\langle z, \mathbf{b}\rangle^p$. Тоді $d(f, f^*_j) \to 0$ при $j \to +\infty$ і за теоремою5.9 $N_{\mathbf{b}}(L, f^*_j) \le \nu$ для досить великих j. У другому випадку для $f \in B^n_{\mathbf{b},\nu}(L)$ вибираємо як і вище $f^*_{j,m} \in B^n_{\mathbf{b}}(L) \setminus B^n_{\mathbf{b},\nu}(L)$. Теорему 5.11 доведено. □

Висновки до розділу 5

Для відповідного класу функцій

1) отримано оцінки зростання логарифма максимуму модуля, які в одновимірному випадку вимагають слабших умов на додатну неперервну функцію l, ніж в одновимірних результатах М. М. Шеремети - А. Д. Кузика. Отримані оцінки розв'язують відповідну проблему Шеремети для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком;
2) використовуючи ідею заміни квантора загальності на квантор існування послаблено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком, які описують оцінку максимуму модуля на колі, поводження логарифмічної по-

хідної та розподіл нулів цілої функції. Встановлені достатні умови також є повністю новими твердженнями в одновимірному випадку;

3) також послаблено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком цілих розв'язків деяких лінійних рівнянь з похідними за напрямком, що також є новими в одновимірному випадку;
4) виділено клас цілих функцій необмеженого індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ таких, що на кожній зрізці вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ вони мають обмежений індекс. Для деяких функцій з цього класу повністю розв'язано проблему проф. А. А. Кондратюка про існування додатної неперервної функції $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$, для якої належна ціла функція матиме обмежений L-індекс за напрямком;
5) встановлено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком композиції цілих функцій від декількох змінних. Отримані умови є слабшими в одновимірному випадку, ніж відомі досі;
6) знайдено вперше достатні умови обмеженості l-індексу цілих розв'язків рівняння $w' = f(z, w)$;
7) дано заперечну відповідь на питання проф. С. Ю. Фаворова про можливість заміни умови „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“ на умову „F — голоморфна на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ та встановлення на основі цього припущення усіх відомих властивостей цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком. А саме наведено приклад функції, яка голоморфна на кожній зрізці вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“, не голоморфна в $\mathbb{C}^n$ та необмеженого індексу в деяких обмежених областях.
8) отримано достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком для суми цілих функцій. Їхні одновимірні наслідки також є новими твердженнями.

Зазначимо, що пункти 2, 4, 6 також повністю або частково розв'язують чотири проблеми зі списку вісімнадцяти проблем в [57].

Результати четвертого розділу опубліковано в статтях [20, 33, 36, 37, 39–44, 46, 56, 57, 60, 250], у монографії [30], а також доповідалися на конференціях [7–10, 14–18, 22, 38, 48, 49, 61].

РОЗДІЛ 6. ЦІЛІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ

Розділ присвячений цілим функціям обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Розглядається ширший клас додатних неперервних вектор-функцій $\mathbf{L}$, які визначені в $\mathbb{C}^n$ і кожна компонента яких залежить від усіх змінних. Для відповідного класу цілих функцій встановлені характеристичні властивості, теореми існування, оцінки зростання тощо.

Праці [260, 264] присвячені дослідженню цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ (надалі, цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних). Це багатовимірне узагальнення поняття цілої функції обмеженого l-індексу [150, 206] в $\mathbb{C}$. Для $\mathbf{L} \equiv (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ раз}})$ цілі функції обмеженого індексу за сукупністю змінних вивчалися у статтях М. Салмассі, Ф. Нурая, Р. Ф. Патерсона [167,168,170,188]. Вони знайшли застосування функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних у теорії розподілу значень. Зокрема, Ф. Нурай та Р. Патерсон дослідили зв'язок між поняття обмеженості індексу та радіусом p-листості (однолистості при $p = 1$) цілих функцій від двох змінних та їхніх частинних похідних у довільних точках з $\mathbb{C}^2$. Дж. Ґ. Крішна та С. М. Шах [146] ввели поняття аналітичної в області (непорожній відкритій зв'язній множині) $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ функції обмеженого індексу та дослідили обмеженість індексу аналітичних розв'язків рівнянь з частинними похідними.

У загальному випадку складно довести багатовимірні аналоги різноманітних критеріїв обмеженості l-індексу для цілих функцій, які отримані для $n = 1$ в [206]. З іншої сторони, в [264] сформульовані відповідники добре відомих теорем з [206], що описують властивості цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу в $\mathbb{C}^n$ (обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних) без доведень, які натомість містяться в [261]. Водночас, наразі невідомо повного аналога важливого логарифмічного критерію обмеженості l-індексу, який встановлений у випадку функцій однієї змінної. Це твердження міститься необхідні та достатні умови того, що ціла функція має обмежений l-індекс у термінах обмеженості її логарифмічної похідної та лічильної функції нулів. Тому тут ми розглянемо таке питання: *чи існує відповідник згаданого критерію для цілих функцій обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних?*

Зазначимо, що поняття цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком, розглянете в розділі 5, є гнучкішим. Зокрема, теорема VIII є аналогом згаданого критерію для цього випадку.

Тут ми узагальнимо поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних на ширший клас додатних неперервних вектор-функцій з $\mathbb{C}^n$. Замість

$\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), l_2(|z_2|), \ldots, l_n(|z_n|))$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ як в [260, 261, 264] розглянемо $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)$ — додатні неперервні функції з $z \in \mathbb{C}^n$. Для цього поняття подамо повні доведення узагальнень деяких теорем з [264]. Це твердження 6.1, твердження 6.2 та наслідок 6.1 у даному підрозділі. Використовуючи ці твердження, встановимо, що якщо ціла в $\mathbb{C}^n$ функція F є обмеженого l_j-індексу за кожним напрямком $\mathbf{1}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–те місце}}, 0, \ldots, 0)$, то F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (теорема 3.6).

Застосовуючи теореми VIII та 3.6, виведемо достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, що містять обмеження на логарифмічні похідні за кожною змінною та розподіл нулів (теорема 6.3).

Нам знадобляться деякі стандартні позначення. Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_+^* = [0, +\infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Позначимо $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, $\mathbf{2} = (2, \ldots, 2) \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{1}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $[0, 2\pi]^n = \underbrace{[0, 2\pi] \times \cdots \times [0, 2\pi]}_{n \text{ раз}}$. Для $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in [0, 2\pi]^n$ та $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ позначимо $\|K\| = k_1 + \cdots + k_n$, $Re^{i\Theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_n e^{i\theta_n})$, $K! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$.

Для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ використовуватимемо такі формальні позначення:

$$|A| = \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\Big)^{1/2}, arg\, A = (arg\, a_1, \ldots, arg\, a_n), A \pm B = (a_1 \pm b_1, \ldots, a_n \pm b_n),$$
$$AB = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n), A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n), A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdot \ldots a_n^{b_n}.$$

однак не порушуючи при цьому умов існування вказаних виразів. Для $z, w \in \mathbb{C}^n$ визначимо $\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w}_1 + \cdots + z_n \overline{w}_n$, де $\overline{w}_k$ — комплексно спряжене число до w_k.

Для A, $B \in \mathbb{R}^n$ позначимо $\max\{A, B\} = (\max\{a_1, b_1\}, \ldots, \max\{a_n, b_n\})$, а запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$ для всіх $j \in \{1, \ldots, n\}$; подібно визначається відношення $A \leq B$.

Полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| < r_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ позначаємо через $\mathbb{D}^n(z^0, R)$, а його кістяк $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| = r_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, замкнений полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| \leq r_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{D}^n[z^0, R]$. Для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ та частинних похідних цілої функції $F(z) = F(z_1, \ldots, z_n)$ використовуємо запис

$$F^{(K)}(z) = \frac{\partial^{\|K\|} F}{\partial z^K} = \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}.$$

Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)$ — додатні неперервні функції, $z \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називається *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* якщо існує число $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ та $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \ K \in \mathbb{Z}_+^n, \ \|K\| \le m\right\}. \tag{6.1}$$

Найменше таке ціле число m, для якого (6.1) виконується, називається $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L})$.

Якщо $l_j = l_j(|z_j|)$, то отримаємо означення цілої функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу в сенсі означення, запропонованого у статтях [260, 264]. Якщо $l_j(z_j) \equiv 1$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то ціла функція називається *функцією обмеженого індексу за сукупністю змінних* [79, 146, 167, 168, 170, 188]. Якщо нерівність (6.1) не виконується для жодного m, то ми покладемо $N(F, \mathbf{L}) = \infty$ і саму функцію F називатимемо *функцією необмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних.*

При $n = 1$ та $\mathbf{L} = l$ дістаємо означення цілої функції обмеженого l-індексу [150], а при $n = 1$ та $\mathbf{L} = 1$ — цілої функції обмеженого індексу [156]. Також варто зауважити, що для $\mathbf{L}(z) \equiv \left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ та $\Omega = \mathbb{C}^n$ наше означення збігається з означенням з [146] аналітичної в області $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ функції обмеженого індексу для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

Крім того, через $N(F, \mathbf{L}, z^0)$ позначимо $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних функції F у точці z^0, тобто, це найменше ціле число m, для якого виконується нерівність (6.1) з z^0 замість z. Зрозуміло, що $N(F, \mathbf{L}) = \sup\{N(F, \mathbf{L}, z^0) \colon z^0 \in \mathbb{C}^n\}$.

Зауваження 6.1. За умови, що F — многочлен за кожною змінною, для будь-якої додатної неперервної вектор-функції $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+^n$ $\mathbf{L}$-індекс многочлен — скінченний, тобто, $N(F, \mathbf{L}) < \infty$. Функція $F(z_1, z_2) = e^{z_1 z_2}$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних з $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (|z_2| + 1, |z_1| + 1)$ та $N(F, \mathbf{L}) = 0$. Але неможливо знайти $\mathbf{L}$-індекс для цієї функції у випадку $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(|z_1|), l_2(|z_2|))$, тобто, в сенсі означення з [264]. Точніше, за тим означенням ця функція має необмежений $\mathbf{L}$-індекс (див. [264]).

Крім того, для цілої функції $F(z)$ покладемо $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)\}$. Нехай $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (\widetilde{l}_1(z), \ldots, \widetilde{l}_n(z))$. Запис $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ означає, що існують $\theta_1 \in \mathbb{R}_+$, $\theta_2 \in \mathbb{R}_+$ такі, що $\forall z \in \mathbb{C}^n$ $\theta_1 \widetilde{l}_j(z) \le l_j(z) \le \theta_2 \widetilde{l}_j(z)$.

Через Q^n (зокрема, $Q := Q^1$) позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ таких, що $\exists R_0 \in \mathbb{R}_+^n, \exists C, c \in \mathbb{R}_+^n (\mathbf{0} < c \le C)$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall z \in \mathbb{D}^n[z_0, R_0/L(z_0)]$

$$c \le \mathbf{L}(z)/\mathbf{L}(z_0) \le C. \tag{6.2}$$

Зауважимо, що якщо (6.2) виконується для деякого R_0, то (6.2) справджується для всіх $R \in \mathbb{R}_+^n$. Крім того, якщо для будь-яких $z \in \mathbb{C}^n$, j, $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\left|\frac{\partial l_j(z)}{\partial z_m}\right| \le P(c + |l_j(z)|), \quad P > 0,$$

то $\mathbf{L}^* \in Q^n$, де $\mathbf{L}^*(z) = (c + |l_1(z)|, \dots, c + |l_n(z)|)$, $c > 0$. Це буде нижче доведено у вигляді леми 6.2. Зокрема, за умов $\mathbf{L}(z) = (l_1(R), \dots, l_n(R))$, $R = (|z_1|, \dots, |z_n|)$, для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ функція $l_j(R)$ — додатна неперервно диференційовна та $|\nabla \ln l_j(R)| \le P$ для всіх $R \in \mathbb{R}^n_+$, маємо, що $\mathbf{L} \in Q^n$, де $\nabla l_j(R) = (\frac{\partial l_j(R)}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial l_j(R)}{r_n})$.

Клас Q^n можна ввести рівносильно так. Для $R \in \mathbb{R}^n_+$, $j \in \{1, \dots, n\}$ та $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$ визначимо

$$\lambda_{1,j}(z_0, R) = \inf \left\{ l_j(z)/l_j(z^0) \colon z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\},$$
$$\lambda_{2,j}(z_0, R) = \sup \left\{ l_j(z)/l_j(z^0) \colon z \in \mathbb{D}^n \left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right] \right\},$$
$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{1,j}(z_0, R), \quad \lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{2,j}(z_0, R),$$
$$\Lambda_k(R) = (\lambda_{k,j}(R), \dots, \lambda_{k,n}(R)) \quad (k \in \{1, 2\}).$$

Відповідно, через Q^n позначимо клас функцій $\mathbf{L}(z)$, які для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$ задовольняють умову

$$0 < \Lambda_1(R) \le \Lambda_2(R) < +\infty. \tag{6.3}$$

6.1 Властивості функцій з класу Q^n

Лема 6.1. *Якщо $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що $(\forall R \in \mathbb{R}^n_+)$ $\Lambda_2(R) < \infty$, то $(\forall R \in \mathbb{R}^n_+)$ $\Lambda_1(R) \ge \frac{1}{\Lambda_2(R\Lambda_2(R))} > 0$.*

Доведення. Нехай $(\forall R \in \mathbb{R}^n_+)$ $\Lambda_2(R) < \infty$, тобто, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $\lambda_{2,j}(R) < +\infty$. Звідси маємо $l_j(z) \le \lambda_{2,j}(R) l_j(z^0)$ для $z \in D^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$. Це означає, що $|z_j - z_j^0| \le \frac{r_j}{l_j(z^0)} \le \frac{r_j \lambda_{2,j}(R)}{l_j(z)}$. Використовуючи визначення $\lambda_{1,j}(R)$, можна вивести

$$\inf \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} \colon z \in \mathbb{D}^n \left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)} \right) \right\} = \frac{1}{\sup \left\{ \frac{l_j(z^0)}{l_j(z)} \colon z \in \mathbb{D}^n(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}) \right\}} \ge$$
$$\ge \frac{1}{\sup \left\{ \frac{l_j(z^0)}{l_j(z)} \colon |z_j^0 - z_j| \le \frac{r_j \lambda_{2,j}(R)}{l_j(z)},\ j \in \{1, \dots, n\} \right\}} \ge \frac{1}{\lambda_{2,j}(R\Lambda_2(R))}.$$

Отже, $\lambda_{1,j}(R) \ge \frac{1}{\lambda_{2,j}(R\Lambda_2(R))}$. □

Зауваження 6.2. *За лемою 6.1 ліва нерівність у (6.3) є зайвою, бо умова $\lambda_{2,j}(R) < +\infty$ означає, що й $\lambda_{1,j}(R) > 0$. Але в наших міркуваннях ми використовуємо, як $\Lambda_1(R)$, так і $\Lambda_2(R)$. Це набагато зручніше.*

Лема 6.2. *Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ та $\frac{\partial l_j}{\partial z_m}$ — неперервні функції в $\mathbb{C}^n$ для всіх $j, m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Якщо існують числа $P > 0$ та $c > 0$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ та кожного $j, m \in \{1, 2, \dots, n\}$*

$$\frac{1}{c + |l_j(z)|} \left| \frac{\partial l_j(z)}{\partial z_m} \right| \le P,$$

то $\mathbf{L}^* \in Q^n$, де $\mathbf{L}^*(z) = (c + |l_1(z)|, \dots, c + |l_n(z)|)$.

Доведення. Зрозуміло, що функція $\mathbf{L}^*(z)$ — додатна та неперервна. Для заданого $z \in \mathbb{C}^n$, $z^0 \in \mathbb{C}^n$ визначимо аналітичну криву $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}^n$

$$\varphi_j(\tau) = z_j^0 + \tau(z_j - z_j^0),\ j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

де $\tau \in [0,1]$. Відомо, що для кожної неперервно диференційовної функції g від дійсної змінної τ нерівність $\frac{d}{dt}|g(\tau)| \le |g'(\tau)|$ виконується скрізь за винятком точок, де $g'(\tau) = 0$. Використовуючи обмеження цієї леми, встановимо верхню оцінку $\lambda_{2,j}(z_0, R)$:

$$\lambda_{2,j}(z_0, R) = \sup\left\{\frac{c + |l_j(z)|}{c + |l_j(z^0)|} : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}_1(z^0)}\right]\right\} =$$

$$= \sup_{z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}_1(z^0)}\right]} \left\{\exp\left\{\ln(c + |l_j(z)|) - \ln(c + |l_j(z^0)|)\right\}\right\} =$$

$$= \sup\left\{\exp\left\{\int_0^1 \frac{d(c + |l_j(\varphi(\tau))|)}{c + |l_j(\varphi(\tau))|}\right\} : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}_1(z^0)}\right]\right\} \le$$

$$\le \sup_{z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}_1(z^0)}\right]} \left\{\exp\left\{\int_0^1 \sum_{m=1}^n \frac{|\varphi_m'(\tau)|}{c + |l_j(\varphi(\tau))|}\left|\frac{\partial l_j(\varphi(\tau))}{\partial z_m}\right| d\tau\right\}\right\} \le$$

$$\le \sup_{z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}_1(z^0)}\right]} \left\{\exp\left\{\int_0^1 \sum_{m=1}^n P|z_m - z_m^0| d\tau\right\}\right\} \le$$

$$\le \sup_{z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}_1(z^0)}\right]} \left\{\exp\left\{\sum_{m=1}^n \frac{P r_j}{c + |l_m(z^0)|}\right\}\right\} \le \exp\left(\frac{P}{c}\sum_{m=1}^n r_j\right).$$

Звідси, для всіх $R \ge \mathbf{0}$ $\lambda_{2,j}(R) = \sup\limits_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{2,j}(z^0, \eta) \le \exp\left(\frac{P}{c}\sum\limits_{m=1}^n r_j\right) < \infty$. Застосовуючи нерівність $\frac{d}{dt}|g(t)| \ge -|g'(t)|$, можна довести, що для кожного $\eta \ge 0$ $\lambda_{1,j}(R) \ge \exp\left(-\frac{P}{c}\sum\limits_{m=1}^n r_j\right) > 0$. Тому $\mathbf{L}^* \in Q^n$. □

Спершу доведемо таку лему.

Лема 6.3. *Якщо* $\mathbf{L} \in Q^n$, *то для кожного* $j \in \{1, \dots, n\}$ *та кожної фіксованої точки* $z^* \in \mathbb{C}^n$ *маємо* $|z_j| l_j(z^* + z_j \mathbf{1}_j) \to \infty$ *при* $|z_j| \to \infty$.

Доведення. Припустимо від супротивного, що існують число $C > 0$ та послідовність $z_j^{(m)} \to \infty$, для яких $|z_j^{(m)}| l_j(z^* + z_j^{(m)}\mathbf{1}_j) = k_m \le C$, тобто, $|z_j^{(m)}| = \frac{k_m}{l_j(z^* + z_j^{(m)}\mathbf{1}_j)}$. Тоді

$$\frac{1}{l_j(z^* + z_j^{(m)}\mathbf{1}_j)} l_j\left(z^* + z_j^{(m)}\mathbf{1}_j - \frac{k_m e^{i\,arg\, z_j^{(m)}}\mathbf{1}_j}{l_j(z^* + z_j^{(m)}\mathbf{1}_j)}\right) = \frac{|z_j^{(m)}|}{k_m} l_j(z^*) \to +\infty,$$

при $z_j^{(m)} \to \infty$, $m \to +\infty$, тобто, $\lambda_{2,j}(C\mathbf{1}_j) = +\infty$ та $\mathbf{L} \notin Q^n$. □

6.2 Локальні властивості функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних та їхніх частинних похідних

6.2.1 Поводження частинних похідних функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

Твердження 6.1. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Для того, щоб ціла функція* F *була функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних необхідно та досить, щоб для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$ *знайшлися числа* $n_0 = n_0(R) \in \mathbb{Z}_+$ *та* $p_0 = p_0(R) \geq 1$ *таку, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *та для деякого* $K^0 = K^0(z^0) \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \leq n_0$,

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon\ \|K\| \leq n_0, z \in E\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} \leq p_0\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}. \tag{6.4}$$

Доведення. Нехай F — обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з $N = N(F, \mathbf{L}) < \infty$. Для будь-якого $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ покладемо $p_1 = p_1(R) = \min\{\lambda_{1,j}(R)\colon\ j \in \{1, \ldots, n\}\}$, $p_2 = p_2(R) = \max\{\lambda_{2,j}(R)\colon\ j \in \{1, \ldots, n\}\}$, $q = q(R) = [2(N+1)p_1^{-N}p_2^{N+1}\|R\|] + 1$, та для $m = 0, \ldots, q$ і $z^0 \in \mathbb{C}^n$ позначимо

$$S_m(z^0, R) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\},$$

$$S^*_m(z^0, R) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)}\colon \|K\| \leq N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\}.$$

Позаяк $D^n[z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)}] \subset D^n[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}]$, ми отримуємо

$$S_m(z^0, R) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z_0)}\frac{\mathbf{L}^K(z^0)}{\mathbf{L}^K(z)}\colon\ \|K\| \leq N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{\mathbf{L}^K(z^0)}{\mathbf{L}^K(z)}\colon\ \|K\| \leq N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} S^*_m(z^0, R) \leq$$
$$\leq S^*_m(z^0, R)(\min\{\Lambda^K_1(R)\colon\ \|K\| \leq N\})^{-1} \leq p_1^{-N}S^*_m(z^0, R) \tag{6.5}$$

і подібно

$$S_m(z^0, R) \geq \min\left\{\frac{\mathbf{L}^K(z^0)}{\mathbf{L}^K(z)}\colon\ \|K\| \leq N, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} S^*_m(z^0, R) \geq$$
$$\geq S^*_m(z^0, R)(\max\{\Lambda^K_2(R)\colon\ \|K\| \leq N\})^{-1} \geq p_2^{-N}S^*_m(z^0, R) \tag{6.6}$$

Нехай $K^{(m)}$, $\|K^{(m)}\| \leq N$, та $z^{(m)} \in D^n[z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)}]$ будуть такими, що

$$S^*_m(z^0, R) = \frac{|F^{(K^{(m)})}(z^{(m)})|}{K^{(m)}!\mathbf{L}^{K^{(m)}}(z^0)}. \tag{6.7}$$

Згідно з принципом максимуму модуля $z^{(m)} \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)})$. Тому $z^{(m)} \neq z^0$. Виберемо $z^{(m)}_* = z^0 + \frac{m-1}{m}(z^{(m)} - z^0)$. Тоді для всіх $j = 1, \ldots, n$ отримуємо

$$|z^{(m)}_{*j} - z^0_j| = \frac{m-1}{m}|z^{(m)}_j - z^0_j| = \frac{(m-1)r_j}{ql_j(z^0)}, \tag{6.8}$$

$$|z_{*j}^{(m)} - z_j^{(m)}| = \frac{1}{m}|z_j^{(m)} - z_j^0| = \frac{r_j}{ql_j(z^0)}.$$

Згідно з (6.8) $z_*^{(m)} \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{(m-1)R}{q\mathbf{L}(z^0)})$, а тому $S_{m-1}^*(z^0, R) \geq \frac{|F^{(K^{(m)})}(z_*^{(m)})|}{K^{(m)}!\mathbf{L}^{K^{(m)}}(z^0)}$. З (6.7) за визначенням $S_m^*(z^0, R)$ дістаємо

$$0 \leq S_m^*(z^0, R) - S_{m-1}^*(z^0, R) \leq \frac{|F^{K^{(m)}}(z^{(m)})| - |F^{K^{(m)}}(z_*^{(m)})|}{K^{(m)}!L^{K^{(m)}}(z^0)} =$$

$$= \frac{1}{K^{(m)}!\mathbf{L}^{K^{(m)}}(z^0)} \int_0^1 \frac{d}{dt}|F^{(K^{(m)})}(z_*^{(m)} + t(z^{(m)} - z_*^{(m)}))|dt.$$

Але для кожної комплексно-значної диференційовної функції $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, виконується нерівність $\frac{d}{dt}|\varphi(t)| \leq |\frac{d}{dt}\varphi(t)|$. Тоді

$$S_m^*(z^0, R) - S_{m-1}^*(z^0, R) \leq \frac{1}{K^{(m)}!\mathbf{L}^{K^{(m)}}(z^0)} \int_0^1 \sum_{j=1}^n |z_j^{(m)} - z_{*j}^{(m)}| \times$$

$$\times \left| \frac{\partial^{\|K^{(m)}\|+1} F}{\partial z_1^{k_1^{(m)}} \dots \partial z_j^{k_j^{(m)}+1} \dots \partial z_n^{k_n^{(m)}}} (z_*^{(m)} + t(z^{(m)} - z_*^{(m)})) \right| dt = \frac{1}{K^{(m)}!\mathbf{L}^{K^{(m)}}(z^0)} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^n |z_j^{(m)} - z_{*j}^{(m)}| \left| \frac{\partial^{\|K^{(m)}\|+1} F}{\partial z_1^{k_1^{(m)}} \dots \partial z_j^{k_j^{(m)}+1} \dots \partial z_n^{k_n^{(m)}}} (z_*^{(m)} + t^*(z^{(m)} - z_*^{(m)})) \right|, \quad (6.9)$$

де $0 \leq t^* \leq 1$. Звідси, $z_*^{(m)} + t^*(z^m - z_*^{(m)}) \in D^n[z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)}]$. Як і в доведенні нерівностей (6.5) та (6.6), з огляду на (6.1) для $z \in D^n[z^0, \frac{mR}{q\mathbf{L}(z^0)}]$ та $\|J\| \leq N+1$ маємо

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)} \leq p_2^{N+1} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \leq p_2^{N+1} \max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \leq N \right\} \leq$$

$$\leq p_2^{N+1} p_1^{-N} \max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} \colon \|K\| \leq N \right\} \leq p_1^{-N} p_2^{N+1} S_m^*(z^0, R).$$

Тоді

$$\frac{\left| F^{(K^{(m)}+\mathbf{1}_j)}(z_*^{(m)} + t^*(z^{(m)} - z_*^{(m)})) \right|}{(K^{(m)} + \mathbf{1}_j)!\mathbf{L}^(K^{(m)} + \mathbf{1}_j)(z^0)} \leq p_1^{-N} p_2^{N+1} S_m^*(z^0, R),$$

і з (6.9) випливає

$$S_m^*(z^0, R) - S_{m-1}^*(z^0, R) \leq p_1^N p_2^{N+1} S_m^*(z^0, R) \sum_{j=1}^n (k_j^{(m)} + 1) l_j(z^0) |z_j^{(m)} - z_{*j}^{(m)}| \leq$$

$$\leq \frac{p_1^{-N} p_2^{N+1} S_m^*(z^0, R)}{q} \sum_{j=1}^n (k_j^{(m)} + 1) r_j \leq \frac{p_1^{-N} p_2^{N+1} (N+1)\|R\|}{q} S_m^*(z^0, R) \leq$$

$$\leq \frac{S_m^*(z^0,R)}{2}.$$

Отже, $S_m^*(z^0,R) \leq 2S_{m-1}^*(z^0,R)$. Зважаючи на (6.5) та (6.6), виводимо $S_m(z^0,R) \leq 2p_1^{-N}S_{m-1}^*(z^0,R) \leq 2p_1^{-N}p_2^N S_{m-1}(z^0,R)$. Тоді

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon\ \|K\|\leq N, z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} = S_q(z^0,R)\leq$$
$$\leq 2p_1^{-N}p_2^N S_{q-1}(z^0,R)\leq\cdots\leq(2p_1^{-N}p_2^N)^q S_0(z^0,R)=$$
$$=(2p_1^{-N}p_2^N)^q\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!L^K(z^0)}\colon \|K\|\leq N\right\}.$$

Ця нерівність має наслідком (6.4) з $p_0=(2p_1^{-N}p_2^N)^q$ та деяким K^0, $\|K^0\|\leq N = n_0$.

Необхідність умови (6.4) доведено.

Тепер доведемо достатність. Виберемо $R=\mathbf{2}=(2,\ldots,2)$. Тоді знайдеться $n_0\in\mathbb{Z}_+$ та $p_0>1$ такі, що для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$ та деякого $K^0\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|K\|\leq n_0$ виконується нерівність (6.4). Покладемо $s_0=\left[\frac{n_0\ln\max\{\lambda_{2,j}(\mathbf{2})\colon\ j\in\{1,\ldots,n\}\}+\ln p_0}{\ln 2}\right]+1$ і для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$ та деякого $K^0=K^0(z^0)\in\mathbb{Z}_+^n$ запишемо формулу Коші

$$\frac{F^{(K+S)}(z^0)}{S!}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n\left(z^0,\frac{2}{\mathbf{L}(z^0)}\right)}\frac{F^{(K)}(z)}{(z-z^0)^{S+\mathbf{1}}}dz.$$

Звідси та з (6.4) отримуємо

$$\frac{|F^{(K+S)}(z^0)|}{S!}\leq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{2}\right)^S\frac{p_0|F^{(K^0)}(z^0)|}{(K^0)!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}K!\mathbf{L}^K(z^0)(p_2(\mathbf{2}))^{n_0}$$

для кожного $K\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|K\|\leq n_0$, $S\in\mathbb{Z}_+^n$. З цієї нерівності випливає

$$\frac{|F^{(K+S)}(z^0)|}{(K+S)!\mathbf{L}^{K+S}(z^0)}\leq\frac{p_0(p_2(\mathbf{2}))^{n_0}K!S!}{(K+S)!\mathbf{2}^S K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}|f^{(K^0)}(z^0)|\leq$$
$$\leq\frac{p_0(p_2(\mathbf{2}))^{n_0}}{2^{\|S\|}K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}|F^{(K^0)}(z^0)|\leq\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}$$

для всіх S, $\|S\|\geq s_0$, та кожного K, $\|K\|\leq n_0$.

Позаяк $\|K^0\|\leq n_0$, з попередньої нерівності для всіх $J\in\mathbb{Z}_+^n$ встановлюємо

$$\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)}\leq\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)}\colon\ \|K\|\leq s_0+n_0\right\},$$

де s_0 та n_0 не залежать від z^0, тобто, функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних і він дорівнює $N(F,\mathbf{L})\leq s_0+n_0$. □

Наслідок 6.1. *Нехай $\mathbf{L}\in Q^n$ та ціла функція f має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних з $N(F,\mathbf{L})=N<\infty$. Тоді для кожного $R\in\mathbb{R}_+^n$ знайдеться $p=p(R)\geq 1$ таке, що для будь-якого $z^0\in\mathbb{C}^n$ та деякого $K^0\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\|\leq N$,*

$$\max\left\{|F^{(K^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\}\leq p|F^{(K^0)}(z^0)|. \tag{6.10}$$

Доведення. Міркування з доведення твердження 6.1 означають, що нерівність (6.4) справедлива для деякого K^0, $\|K^0\| \le N = n_0$. Як і у встановленні істинності нерівності (6.6), маємо

$$\frac{p_0|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \ge \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z)}\colon\ z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\}\ge$$

$$\ge\max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\colon z\in D^n\left[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\}\min\left\{\frac{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}{\mathbf{L}^{K^0}(z)}\colon z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\}\ge$$

$$\ge\frac{\max\left\{|F^{(K^0)}(z)|\colon z\in D^n[z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}]\right\}}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)(p_2(R))^N},$$

де $p_2(R) = \max\{\lambda_{2,j}(R)\colon\ j\in\{1,\dots,n\}\}$. З отриманої нерівності випливає (6.10) з $p = p_0(p_2(R))^N$. □

6.2.2 Оцінки максимуму модуля функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних на кістяках полікруга. Для цілої функції $F(z)$ покладемо $M(R,z^0,F) = \max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(z^0,R)\}$. Тоді $M(R,z^0,F) = \max\{|F(z)|\colon z\in D^n[z^0,R]\}$, тому що максимум модуля для цілої функції в замкненому полікрузі досягається на його кістяку.

Твердження 6.2. *Нехай $\mathbf{L}\in Q^n$. Ціла функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли для будь-яких R', R'', $\mathbf{0}<R'<R''$, знайдеться номер $p_1 = p_1(R',R'')\ge 1$ такий, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$*

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)},z^0,F\right)\le p_1 M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z^0)},z^0,F\right). \tag{6.11}$$

Доведення. Нехай $N(F,\mathbf{L}) = N < +\infty$. Припустимо, що нерівність (6.11) не виконується, тобто, знайдуться R', R'', $\mathbf{0}<R'<R''$, такі, що для будь-якого $p_*\ge 1$ та деякого $z^0 = z^0(p_*)$

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)},z^0,F\right)> p_* M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z^0)},z^0,F\right). \tag{6.12}$$

За наслідком 6.1 існує число $p_0 = p_0(R'')\ge 1$ таке, що для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$ та деякого $K^0\in\mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\|\le N$, маємо

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)},z^0,F^{(K^0)}\right)\le p_0|F^{(K^0)}(z^0)|. \tag{6.13}$$

Покладемо

$$b_1 = p_0\left(\prod_{j=2}^n\lambda_{2,j}^N(R'')\right)(N!)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^N\frac{(N-j)!}{(r_1'')^j}\right)\left(\frac{r_1''r_2''\dots r_n''}{r_1'r_2'\dots r_n'}\right)^N,$$

$$b_2 = p_0\left(\prod_{j=3}^n\lambda_{2,j}^N(R'')\right)(N!)^{n-2}\left(\sum_{j=1}^N\frac{(N-j)!}{(r_2'')^j}\right)\left(\frac{r_2''\dots r_n''}{r_2'\dots r_n'}\right)^N\max\left\{1,\frac{1}{(r_1')^N}\right\},$$

$$\dots$$

$$b_{n-1} = p_0 \lambda_{2,n}^N(R') N! \left(\sum_{j=1}^N \frac{(N-j)!}{(r''_{n-1})^j} \right) \left(\frac{r''_{n-1} r''_n}{r'_{n-1} r'_n} \right)^N \max\left\{1, \frac{1}{(r'_1 \dots r'_{n-2})^N}\right\},$$

$$b_n = p_0 \left(\sum_{j=1}^N \frac{(N-j)!}{(r''_n)^j} \right) \left(\frac{r''_n}{r'_n} \right)^N \max\left\{1, \frac{1}{(r'_1 \dots r'_{n-1})^N}\right\},$$

$$p_* = (N!)^n p_0 \left(\frac{r''_1 r''_2 \dots r''_n}{r'_1 r'_2 \dots r'_n} \right)^N + \sum_{k=1}^n b_k + 1.$$

Нехай $z^0 = z^0(p_*)$ — точка, для якої нерівність (6.12) виконується та K^0 вибране так, що (6.13) правильна і

$$M\left(\frac{R'}{L(z^0)}, z^0, F\right) = |F(z^*)|, \ M\left(\frac{R''}{L(z^0)}, z^0, F^{(J)}\right) = |F^{(J)}(z^*_J)|$$

для кожного $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|J\| \le N$. Застосуємо нерівність Коші

$$|F^{(J)}(z^0)| \le J! \left(\frac{L(z^0)}{R'}\right)^J |F(z^*)| \tag{6.14}$$

для оцінки різниці

$$\begin{aligned} &|F^{(J)}(z^*_{J,1}, z^*_{J,2}, \dots, z^*_{J,n}) - F^{(J)}(z^0_1, z^*_{J,2}, \dots, z^*_{J,n})| = \\ &= \left| \int_{z^0_1}^{z^*_{J,1}} \frac{\partial^{\|J\|+1} F}{\partial z_1^{j_1+1} \partial z_2^{j_2} \dots \partial z_n^{j_n}} (\xi, z^*_{J,2}, \dots, z^*_{J,n}) d\xi \right| \le \\ &\le \left| \frac{\partial^{\|J\|+1} F}{\partial z_1^{j_1+1} \partial z_2^{j_2} \dots \partial z_n^{j_n}} (z^*_{(j_1+1, j_2, \dots, j_n)}) \right| \frac{r''_1}{l_1(z^0)}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Позаяк $(z^0_1, z^*_{J,2}, \dots, z^*_{J,n}) \in D^n[z^0, \frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}]$, для всіх $k \in \{1, \dots, n\}$ $|z^*_{J,k} - z^0_k| = \frac{r''_k}{l_k(z^0)}$ та $l_k(z^*_J) \le \lambda_{2,k}(R'') l_k(z^0)$ за твердженням 6.1 та з огляду на (6.14) при $J = K^0$ отримуємо

$$\begin{aligned} |F^{(J)}(z^0_1, z^*_{J,2}, \dots, z^*_{J,n})| &\le \frac{J! l_1^{j_1}(z^0) \prod_{k=2}^n l_k^{j_k}(z^*_J)}{K^0! \mathbf{L}^{K^0}(z^0)} p_0 |F^{(K^0)}(z^0)| \le \\ &\le \frac{J! \mathbf{L}^J(z^0) \prod_{k=2}^n \lambda_{2,k}^{j_k}(R'')}{K^0! \mathbf{L}^{K^0}(z^0)} p_0 K^0! \left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R'}\right)^{K^0} |F(z^*)| = \\ &= \frac{p_0 J! \mathbf{L}^J(z^0) \prod_{k=2}^n \lambda_{2,k}^{j_k}(R'')}{(R')^{K^0}} |F(z^*)|. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Застосовуючи нерівності (6.15) та (6.16), виводимо

$$\left| \frac{\partial^{\|J\|+1} F}{\partial z_1^{j_1+1} \partial z_2^{j_2} \dots \partial z_n^{j_n}} (z^*_{(j_1+1, j_2, \dots, j_n)}) \right| \ge \frac{l_1(z^0)}{r''_1} \left\{ |F^{(J)}(z^*_j)| - |F^{(J)}(z^0_1, z^*_{J,2}, \dots, z^*_{J,n})| \right\} \ge$$

$$\geq \frac{l_1(z_1^0)}{r_1''}|F^{(J)}(z_j^*)| - \frac{p_0 J! \mathbf{L}^{(j_1+1,j_2,\ldots,j_n)}(z^0)\prod_{k=2}^n \lambda_{2,k}^{j_k}(R'')}{r_1''(R')^{K^0}}|F(z^*)|.$$

Тоді

$$|F^{(K^0)}(z_{K^0}^*)| \geq \frac{l_1(z^0)}{r_1''}\left|\frac{\partial^{\|K^0\|-1}F}{\partial z_1^{k_1^0-1}\partial z_2^{k_2^0}\ldots\partial z_n^{k_n^0}}(z^*_{(k_1^0-1,k_2^0,\ldots,k_n^0)})\right| -$$

$$-\frac{p_0(k_1^0-1)!k_2^0!\ldots k_n^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\prod_{i=2}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')}{r_1''(R')^{K^0}}|F(z^*)| \geq$$

$$\geq \frac{l_1^2(z^0)}{(r_1'')^2}\left|\frac{\partial^{\|K^0\|-2}f}{\partial z_1^{k_1^0-2}\partial z_2^{k_2^0}\ldots\partial z_n^{k_n^0}}(z^*_{(k_1^0-2,k_2^0,\ldots,k_n^0)})\right| -$$

$$-\frac{p_0(k_1^0-2)!k_2^0!\ldots k_n^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\prod_{i=2}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')}{(r_1'')^2(R')^{K^0}}|F(z^*)| -$$

$$-\frac{p_0(k_1^0-1)!k_2^0!\ldots k_n^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\prod_{i=2}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(r_i'')}{r_1''(R')^{K^0}}|F(z^*)| \geq$$

$$\ldots$$

$$\geq \frac{l_1^{k_1^0}(z^0)}{(r_1'')^{k_1^0}}\left|\frac{\partial^{\|K^0\|-k_1^0}f}{\partial z_2^{k_2^0}\ldots\partial z_n^{k_n^0}}(z^*_{(0,k_2^0,\ldots,k_n^0)})\right| -$$

$$-\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\left(\prod_{i=2}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_2^0!\ldots k_n^0!\sum_{j_1=1}^{k_1^0}\frac{(k_1^0-j_1)!}{(r_1'')^{j_1}}|F(z^*)| \geq$$

$$\ldots$$

$$\geq \frac{l_1^{k_1^0}(z^0)}{(r_1'')^{k_1^0}}\frac{l_2^{k_2^0}(z^0)}{(r_2'')^{k_2^0}}\left|\frac{\partial^{\|K^0\|-k_1^0-k_2^0}f}{\partial z_3^{k_3^0}\ldots\partial z_n^{k_n^0}}(z^*_{(0,0,k_3^0,\ldots,k_n^0)})\right| -$$

$$-\frac{l_1^{k_1^0}(z^0)p_0 L^{(0,k_2^0,\ldots,k_n^0)}(z^0)}{(r_1'')^{k_1^0}(R')^{K^0}}\left(\prod_{i=3}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_3^0!\ldots k_n^0!\sum_{i_2=1}^{k_2^0}\frac{(k_2^0-j_2)!}{(r_2'')^{j_2}}|F(z^*)| -$$

$$-\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\left(\prod_{i=2}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_2^0!\ldots k_n^0!\sum_{j_1=1}^{k_1^0}\frac{(k_1^0-j_1)!}{(r_1'')^{j_1}}|F(z^*)| \geq$$

$$\ldots$$

$$\geq \left(\frac{L(z^0)}{R''}\right)|F(z_{\mathbf{0}}^*)| - |F(z^*)|\sum_{i=1}^b \tilde{b}_i, \tag{6.17}$$

де з огляду на нерівності $\lambda_{2,i}(R'') \geq 1$ та $R'' \geq R'$ маємо

$$\tilde{b}_1 = \frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\left(\prod_{i=2}^n \lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_2^0!\ldots k_n^0!\sum_{j_1=1}^{k_1^0}\frac{(k_1^0-j_1)!}{(r_1'')^{j_1}} =$$

$$=\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}\left(\frac{R''}{R'}\right)^{K^0}p_0\left(\prod_{i=2}^{n}\lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)k_2^0!\dots k_n^0!\sum_{j_1=1}^{k_1^0}\frac{(k_1^0-j_1)!}{(r_1'')^{j_1}}\leq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}b_1,$$

$$\tilde{b}_2=\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\left(\prod_{i=3}^{n}\lambda_{2,i}^{k_i^0}(R'')\right)\frac{k_3^0!\dots k_n^0!}{(r_1'')^{k_1^0}}\sum_{j_2=1}^{k_2^0}\frac{(k_2^0-j_2)!}{(r_2'')^{j_2}}\leq\left(\frac{L(z^0)}{R''}\right)^{K^0}b_2,$$

$$\dots$$

$$\tilde{b}_{n-1}=\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\frac{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\lambda_{2,n}^{k_n^0}(R'')k_n^0!}{(r_1'')^{k_1^0}\dots(r_{n-2}'')^{k_{n-2}^0}}\sum_{j_{n-1}=1}^{k_{n-1}^0}\frac{(k_{n-1}^0-j_{n-1})!}{(r_{n-1}'')^{j_{n-1}}}\leq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}b_{n-1},$$

$$\tilde{b}_n=\frac{p_0}{(R')^{K^0}}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\frac{1}{(r_1'')^{k_1^0}\dots(r_{n-1}'')^{k_{n-1}^0}}\sum_{j_n=1}^{k_n^0}\frac{(k_n^0-j_n)!}{(r_n'')^{j_n}}\leq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}b_n.$$

Отже, з (6.17) випливає

$$|F^{(K^0)}(z_{K^0}^*)|\geq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}|F(z^*)|\left\{\frac{|F(z_{\mathbf{0}}^*)|}{|F(z^*)|}-\sum_{j=1}^{n}b_j\right\}.$$

Але через (6.12) та наш вибір p_* дістаємо $\frac{|F(z_{\mathbf{0}}^*)|}{|F(z^*)|}\geq p_*>\sum_{j=1}^{n}b_j$. Беручи до уваги (6.13) та (6.14), отримуємо

$$|F^{(K^0)}(z_{K^0}^*)|\geq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}|F(z^*)|\left\{p_*-\sum_{j=1}^{n}b_j\right\}\geq\left(\frac{\mathbf{L}(z^0)}{R''}\right)^{K^0}\left\{p_*-\sum_{j=1}^{n}b_j\right\}\times$$
$$\times\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|(R')^{K^0}}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\geq\left(\frac{r_1'\dots r_n'}{r_1''\dots r_n''}\right)^{N}\left\{p_*-\sum_{j=1}^{n}b_j\right\}\frac{|F^{(K^0)}(z_{K^0}^*)|}{p_0(n!)^n}.$$

Звідси висновуємо $p_*\leq p_0\left(\frac{r_1'\dots r_n'}{r_1''\dots r_n''}\right)^N(N!)^n+\sum_{j=1}^{n}b_j$, але це суперечить вибору p_*. Необхідність (6.17) доведено.

Зараз доведемо достатність. Нехай $z^0\in\mathbb{C}^n$ — довільна точка. Розвинемо функцію F у степеневий ряд

$$F(z)=\sum_{K\geq\mathbf{0}}b_K(z-z^0)^K=\sum_{k_1,\dots,k_n\geq 0}b_{k_1,\dots,k_n}(z_1-z_1^0)^{k_1}\dots(z_n-z_n^0)^{k_n},\qquad(6.18)$$

де $b_K=b_{k_1,\dots,k_n}=\frac{F^{(K)}(z^0)}{K!}$.

Нехай $\mu(R,z^0,F)=\max\{|b_K|R^K\colon\ K\geq\mathbf{0}\}$ — максимальний член ряду (6.18) та $\mathcal{N}(R)=(\nu_1^0(R),\dots,\nu_n^0(R))$ множина індексів таких, що

$$\mu(R,z^0,F)=|b_{\mathcal{N}(R)}|R^{\mathcal{N}(R)},\ \|\mathcal{N}(R)\|=\max\{\|K\|\colon K\geq\mathbf{0},|b_K|R^K=\mu(R,z^0,F)\}.$$

Тоді з огляду на нерівність (6.14) отримуємо

$$\mu(R,z^0,F)\leq M(R,z^0,F)\leq\sum_{K\geq\mathbf{0}}|b_K|(2R)^{K_{\mathbf{2}}-K}\leq 2^n\mu(2R,z^0,F),$$

$$\ln\mu(R,z^0,F)=\ln\{|b_{\mathcal{N}(R)}|(2R)^{\mathcal{N}(R)}\mathbf{2}^{-\mathcal{N}(R)}\}\le\ln\mu(2R,z^0,F)-\|\mathcal{N}(R)\|\ln 2,$$

$$\|\mathcal{N}(R)\|\le\frac{1}{\ln 2}\{\ln\mu(2r,z^0,F)-\ln(R,z^0,F)\}\le$$

$$\le\frac{1}{\ln 2}\left\{\ln M(2R,z^0,F)-\ln M\left(\frac{R}{2},z^0,F\right)\right\}+n. \tag{6.19}$$

Нехай $N(F,\mathbf{L},z^0)$ — $\mathbf{L}$-індекс функції F за сукупністю змінних у точці z^0. Легко показати, що

$$N(F,\mathbf{L},z^0)\le\left\|\mathcal{N}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)},z^0,F\right)\right\|. \tag{6.20}$$

Підставимо у (6.11) $R''=\mathbf{2}$ та $R'=\frac{\mathbf{1}}{2}$. Тоді $M(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)},z^0,F)\le p_1M(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2L}(z^0)},z^0,F)$. Використовуючи (6.19), (6.20), отримуємо $N(F,\mathbf{L},z^0)\le n+\frac{\ln p_1(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{2})}{\ln 2}$ для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$. А це й означає, що F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Використовуючи міркування з доведення твердження 6.2, можна показати справедливість такого твердження.

Твердження 6.3. *Нехай $\mathbf{L}\in Q^n$. Ціла функція F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують числа R', R'', $\mathbf{0}<R'<\mathbf{1}<R''$, та $p_1=p_1(R',R'')\ge 1$ такі, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$ виконується нерівність* (6.11).

Зараз послабимо обмеження $R'<\mathbf{1}<R''$ у достатніх умовах.

Твердження 6.4. *Нехай $\mathbf{L}\in Q^n$, $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$ ціла функція. Якщо існують R', R'', $\mathbf{0}<R'<R''$, та $p_1=p_1(R',R'')\ge 1$ такі, що для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$ виконується нерівність* (6.11), *то функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. З (6.11) при $\mathbf{0}<R'<R''$ отримуємо, що

$$\max\left\{|F(z)|:z\in\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{2R''}{R'+R''}\frac{R'+R''}{2\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}\le$$

$$\le P_1\max\left\{|F(z)|:z\in\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{2R'}{R'+R''}\frac{R'+R''}{2\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}.$$

Позначивши $\widetilde{\mathbf{L}}(z)=\frac{2\mathbf{L}(z)}{R'+R''}$, дістанемо

$$\max\left\{|F(z)|:z\in\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{2R''}{(R'+R'')\widetilde{\mathbf{L}}(z^0)}\right)\right\}\le$$

$$\le P_1\max\left\{|F(z)|:z\in\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{2R'}{(R'+R'')\widetilde{\mathbf{L}}(z^0)}\right)\right\},$$

де $\mathbf{0}<\frac{2R'}{R'+R''}<\mathbf{1}<\frac{2R''}{R'+R''}$. З огляду на твердження 6.3 функція F має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних. За лемою 6.4 функція F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. □

Зазначимо, що твердження 6.4 є новою навіть у випадку $\mathbf{L}(z)\equiv\mathbf{1}$.

6.2.3 Локальне поводження частинних похідних цілої функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних. Як уже згадувалося у вступі до цього розділу, у [260, 264] досліджено цілі функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних тільки для вектор-функцій **L**, в яких кожна компонента залежить лише від модуля однієї змінної, а саме $\mathbf{L}(z) = L_0(z) := (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$ і, тому, $\mathbf{L}(z)$ є тотожно сталою на кістяку кожного полікруга з центром у початку координат. Крім цього відзначимо, що, наприклад, ціла функція $F(z) = \exp\{z_1 \cdots z_n\}$ не є цілою функцією обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних для жодної функції $\mathbf{L} = L_0$, вказаного щойно вигляду. Хоча є функцією обмеженого індексу за кожною своєю змінною при фіксованих інших, як функція від однієї змінної, а також є функцією обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних для деякої функції $\mathbf{L}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$.

Вище узагальнено деякі відомі критерії обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних, а також встановлено умови на логарифмічні частинні похідні за усіма змінними та розподіл нулів цілої функції, які забезпечують обмеженість **L**-індексу за сукупністю змінних. Відповідне твердження є досить зручним для досліджень нескінченних добутків та цілих розв'язків рівнянь з частинними похідними або їхніх систем.

Поряд з розширенням кола аналогів критеріїв обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних у цьому підрозділі нами отримані нові твердження, які містяться в теоремі 6.1 та твердженні 6.12 і є новими навіть у випадку $\mathbf{L} \equiv (1, \ldots, 1)$ (див. [77, 79, 146, 167, 168, 188]). Натомість лема 6.4, твердження 6.5, теорема 6.6 є узагальненнями тверджень, отриманих в [264] для випадку $\mathbf{L}(z) = L_0(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$.

У підрозділі 6.2.1 отримано наслідок 6.1, який є узагальненням відповідного твердження, отриманого в [264]. Ні в [264] для $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$, ні вище для $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, $z \in \mathbb{C}^n$, не встановлено достатність умови (6.10). Водночас наразі не відомо прикладу, який би показував, що цієї умови не досить для обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних. Натомість нам вдалося довести твердження з умовами, подібними до (6.10), що накладаються на частинні похідні по кожній змінній та є достатніми для обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних.

Теорема 6.1. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Якщо* $\forall R > \mathbf{0}\ \exists n_0 \in \mathbb{Z}_+\ \exists p \geq 1\ \forall z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}\ \exists K_j^0 = (0, \ldots, 0, \underbrace{k_j^0}_{j\text{-те місце}}, 0, \ldots, 0)$ *таке, що* $k_j^0 \leq n_0$ *та*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}\colon\ \max\left\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \leq p \cdot |F^{(K_j^0)}(z^0)|, \tag{6.21}$$

то ціла функція F *має обмежений* **L**-*індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Для довільних $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $K_j^0 \in \mathbb{Z}_+^n$ і $S \in \mathbb{Z}_+^n$ запишемо інтегральну формулу Коші у такому вигляді

$$\frac{F^{(K_j^0+S)}(z^0)}{S!} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))} \frac{F^{(K_j)}(z)}{(z-z^0)^{S+\mathbf{1}}} dz.$$

Звідси, використовуючи (6.21), для $k_j^0 \le n_0$ виводимо

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{S!} \le \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))} \frac{|F^{(K_j^0)}(z)|}{|(z-z^0)^{S+\mathbf{1}}|} |dz| \le$$

$$\le \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))} \max\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right)\} \frac{\mathbf{L}^S(z^0)}{R^{S+\mathbf{1}}} |dz| =$$

$$= \max\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right)\} \frac{\mathbf{L}^S(z^0)}{R^S} \le \frac{p\mathbf{L}^S(z^0)}{R^S} |F^{(K_j^0)}(z^0)|. \quad (6.22)$$

Візьмемо $R > \mathbf{1}$. Позначимо $\hat{r} = \min\{r_j : j \in \{1, \dots, n\}\}$. Виберемо S таке, що $\|S\| \ge s_0$, де $\frac{p}{\hat{r}^{s_0}} \le 1$. Тоді з (6.22) випливає, що для всіх $j \in \{1, \dots, n\}$ та $k_j^0 \le n_0$

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{\mathbf{L}^S(z^0)(K_j^0+S)!} \le \frac{p}{\hat{r}^{s_1+s_2}} \frac{S!K_j^0!}{(K_j^0+S)!} \frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!} \le \frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!}.$$

Отже, $N(F, \mathbf{L}) \le n_0 + s_0$. □

Зауваження 6.3. Зазначимо, що умова (6.21) гарантує обмеженість l_j-індексу за напрямком $\mathbf{1}_j$ (див. теорему XI у підрозділі 5.4).

Позначимо $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (\widetilde{l}_1(z), \dots, \widetilde{l}_n(z))$. Запис $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ означає, що існують $\theta_1 \in \mathbb{R}_+$, $\theta_2 \in \mathbb{R}_+$ такі, що $\forall z \in \mathbb{C}^n$ $\theta_1 \widetilde{l}_j(z) \le l_j(z) \le \theta_2 \widetilde{l}_j(z)$.

Лема 6.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$ *та* $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$. *Ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *має обмежений* $\widetilde{\mathbf{L}}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли вона має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Легко довести, що при $\mathbf{L} \in Q^n$ та $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ $\quad \widetilde{\mathbf{L}} \in Q^n$.

Нехай $N(F, \widetilde{\mathbf{L}}) < +\infty$. Тоді за твердженням 6.1 для кожного $\widetilde{R} > \mathbf{0}$ знайдуться $\widetilde{p} \ge 1$ та $\widetilde{n}_0 \in \mathbb{Z}_+$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та деякого K^0, $\|K^0\| \le \widetilde{n}_0$, нерівність (6.4) виконується з $\widetilde{\mathbf{L}}$ та $\widetilde{R}$ замість $\mathbf{L}$ та R. Звідси

$$\frac{\widetilde{p}}{K^0!} \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{\widetilde{p}}{K^0!} \frac{\theta_2^{\|K^0\|} |F^{(K^0)}(z^0)|}{\theta_2^{\|K^0\|} \mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \ge \frac{\widetilde{p}}{K^0!} \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\theta_2^{\|K^0\|} \widetilde{\mathbf{L}}^{K^0}(z^0)} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\theta_2^{\|K^0\|}} \max\left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K! \widetilde{L}^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \widetilde{R}/\widetilde{\mathbf{L}}(z)\right] \right\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\theta_2^{\|K^0\|}} \max\left\{ \frac{\theta_1^{\|K\|} |F^{(K)}(z)|}{K! L^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \widetilde{R}/\widetilde{\mathbf{L}}(z)\right] \right\} \ge$$

$$\geq \frac{\min\limits_{0\leq\|K\|\leq n_0}\{\theta_1^{\|K\|}\}}{\theta_2^{\|K^0\|}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!L^K(z)} : \|K\| \leq \widetilde{n}_0, z\in\mathbb{D}^n\left[z^0, \widetilde{R}/\widetilde{\mathbf{L}}(z)\right]\right\}.$$

З огляду на твердження 6.1 робимо висновок, що функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Твердження 6.5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують* $R > \mathbf{0}$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 1$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{D}^2(z^0, R)$ *та деякого* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \leq n_0$ *виконується* (6.4).

Доведення. Необхідність випливає з необхідності у твердженні6.1. Займемося доведенням достатності. З доведення достатності у твердженні 6.1 при $R = (2,\ldots,2)$ (а, отже, й для $R > (2,\ldots,2)$) випливає, що $N(F,\mathbf{L}) < +\infty$. Нехай $\mathbf{L}^* = \frac{R^0}{R}\mathbf{L}(z)$, $R^0 = (2,\ldots,2)$. У загальному випадку з виконання (6.4) для F та $\mathbf{L}$ з $R < (2,\ldots,2)$ маємо

$$\min_{\|K\|\leq n_0}\left(\frac{R^0}{R}\right)^K \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!(\mathbf{L}^*(z))^K} : \|K\| \leq n_0, z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R_0/\mathbf{L}^*(z^0)\right]\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq n_0, z\in\mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \leq$$

$$\leq \frac{p_0}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{2^{\|K^0\|}p_0}{R^{K^0}K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{(\mathbf{L}^*(z^0))^{K^0}} < \frac{p_0|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!(\mathbf{L}^*(z^0))^{K^0}}\max_{\|K\|\leq n_0}\frac{2^{n_0}}{R^K}.$$

тобто, (6.4) виконується для F, $\mathbf{L}^*$ та $R < R^0$. За твердженням 6.1 функція $F(z)$ є обмеженого $\mathbf{L}^*$-індексу за сукупністю змінних. Тому за лемою 6.4 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

6.2.4 Деяка властивість степеневого розвинення цілої функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних. В [264] наведено без доведення критерій обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, в якому накладаються умови на поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд цілої функції на кістяку полікруга. Його доведення можна знайти в [261]. Відповідне твердження було новим навіть для $n = 1$. Тут перенесемо цю теорему на випадок $\mathbf{L}(z) = (l_1(z),\ldots,l_n(z))$, де $z \in \mathbb{C}^n$.

Нехай $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Розвинемо цілу в $\mathbb{C}^n$ функцію F у степеневий ряд, записаний у діагональній формі

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k((z-z^0)) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\|J\|=k} b_J(z-z^0)^J, \tag{6.23}$$

де p_k — однорідні многочлени k-го степеня, $b_J = \frac{F^{(J)}(z^0)}{J!}$. Многочлен p_{k_0}, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, називається головним у степеневому розвиненні (6.23) на $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, якщо для

кожного $z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)$ виконується така нерівність

$$|\sum_{k \neq k^0} p_k(z - z^0)| \leq \frac{1}{2} \max\{|b_J| R^J : \|J\| = k^0\}.$$

Твердження 6.6. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існує* $p \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що для усіх* $d > 0$ *знайдеться* $\eta(d) \in (0; d)$, *що для будь-якого* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *та деяких* $r = r(d, z^0) \in (\eta(d), d)$, $k^0 = k^0(d, z^0) \leq p$ *многочлен* p_{k^0} *є головним у ряді* (6.23) *на* $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$.

Доведення. Нехай F є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних та $N = N(F, \mathbf{L}) < +\infty$, а n_0 — це $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних у точці $z^0 \in \mathbb{C}^n$, тобто, це найменше число, для якого нерівність (6.1) виконується у точці z^0.

Тоді для кожної точки $z^0 \in \mathbb{C}^n$ $n_0 \leq N$. Покладемо $a_J^* = \frac{|b_J|}{\mathbf{L}^J(z^0)} = \frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)}$, $a_k = \max\{a_J^* : \|J\| = k\}$, $c = 2\{(N+n+1)!(n+1)! + (N+1)C_{n+N-1}^N\}$. Нехай d — довільне число. Покладемо $r_m = \frac{d}{(d+1)c^m}$ для $m \in \mathbb{Z}_+$ та позначимо $\mu_m = \max\{a_k r_m^k : k \in \mathbb{Z}_+\}$, $s_m = \min\{k : a_k r_m^k = \mu_m\}$.

Оскільки при фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}^n$ $a_K^* \leq \max\{a_J^* : \|J\| \leq n_0\}$ для усіх $K \in \mathbb{Z}_+^n$, то $a_k \leq a_{n_0}$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси для усіх $k > n_0$, беручи до уваги нерівність $r_0 < 1$, маємо $a_k r_0^k < a_{n_0} r_0^{n_0}$, тому $s_0 \leq n_0$. Водночас $cr_m = r_{m-1}$, а, отже, для усіх $k > s_{m-1}$ (у нас $r_{m-1} < 1$) отримуємо

$$a_{s_{m-1}} r_m^{s_{m-1}} = a_{s_{m-1}} r_{m-1}^{s_{m-1}} c^{-s_{m-1}} \geq a_k r_{m-1}^k c^{-s_{m-1}} = a_k r_m^k c^{k - s_{m-1}} \geq c a_k r_m^k. \tag{6.24}$$

З цієї нерівності випливає, що $s_m \leq s_{m-1}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Тому, можна записати

$$\mu_0 = \max\{a_k r_0^k : k \leq n_0\}, \ \mu_m = \max\{a_k r_m^k : k \leq s_{m-1}\}, \ m \in \mathbb{N}$$

Введемо додаткові позначення при $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_0^* = \max\left\{a_k r_0^k : s_0 \neq k \leq n_0\right\}, \ s_0^* = \min\{k : k \neq s_0, a_k r_0^k = \mu_0^*\},$$
$$\mu_m^* = \max\{a_k r_m^k : s_m \neq k \leq s_{m-1}\}, \ s_m^* = \min\{k : k \neq s_m, a_k r_m^k = \mu_m^*\},$$

і покажемо, що існує число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{\mu_{m_0}^*}{\mu_{m_0}} \leq \frac{1}{c}. \tag{6.25}$$

Від супротивного, припустимо, що для усіх $m \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\frac{\mu_m^*}{\mu_m} > \frac{1}{c}. \tag{6.26}$$

Якщо $s_m^* < s_m$, то спершу

$$a_{s_m^*} r_{m+1}^{s_m^*} = \frac{a_{s_m^*} r_m^{s_m^*}}{c^{s_m^*}} = \frac{\mu_m^*}{c^{s_m^*}} > \frac{\mu_m}{c^{s_m^*+1}} = \frac{a_{s_m} r_m^{s_m}}{c^{s_m^*+1}} = \frac{a_{s_m} r_{m+1}^{s_m}}{c^{s_m^*+1-s_m}} \geq a_{s_m} r_{m+1}^{s_m}.$$

Крім того, для усіх $k > s_m^*$, $k \neq s_m$, (інакше кажучи, $k-1 \geq s_m^*$) подібним чином виводимо, що

$$a_{s_m^*} r_{m+1}^{s_m^*} = \frac{a_{s_m^*} r_m^{s_m^*}}{c^{s_m^*}} \geq \frac{a_k r_m^k}{c^{s_m^*}} \geq \frac{a_k r_m^k}{c^{k-1}} = c a_k r_{m+1}^k,$$

тобто, $a_{s_m^*} r_{m+1}^{s_m^*} > a_k r_{m+1}^k$ для усіх $k > s_m^*$, а тому

$$s_{m+1} \leq s_m^* \leq s_m - 1. \tag{6.27}$$

Якщо $s_m < s_m^* \leq s_{m-1}$, то можливою є рівність $s_{m+1} = s_m$. Справді за визначенням $s_{m+1} \leq s_m$, тому вказана рівність вірогідна. Але якщо рівності нема, то $s_{m+1} < s_m$, тоді, $s_{m+1} \leq s_m - 1$ (це натуральні числа!). Відтак отримали (6.27).

Отже, з нерівностей $s_{m+1}^* \leq s_m$ та $s_m^* \neq s_{m+1}$ випливає, що $s_{m+1}^* < s_{m+1}$. Тому, як доведено вище, замість (6.27) маємо нерівність $s_{m+2} \leq s_{m+1}^* \leq s_{m+1} - 1 = s_m - 1$.

Отже, якщо для усіх $m \in \mathbb{Z}_+$ виконується (6.26), то для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ справджується одна з нерівностей $s_{m+2} \leq s_{m+1} \leq s_m - 1$ або $s_{m+2} \leq s_m - 1$, тобто, $s_{m+2} \leq s_m - 1$. З останнього випливає, що

$$s_m \leq s_{m-2} - 1 \leq \ldots \leq s_{m-2[m/2]} - [m/2] \leq s_0 - [m/2] \leq n_0 - [m/2] \leq N - [m/2].$$

Інакше кажучи, $s_m < 0$, при $m > 2N+1$, що неможливо. Звідси, існує m_0, для якого виконується (6.25), причому як видно з наведених вище міркувань $m_0 \leq 2N+1$.

Візьмемо $r = r_{m_0}$, $\eta(d) = \frac{d}{(d+1)c^{2(N+1)}}$, $p = N$ та $k_0 = s_{m_0}$. Тоді для $\|J\| \neq k_0 = s_{m_0}$ на $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)})$, з врахуванням (6.24) та (6.25), отримуємо

$$|b_J||z - z^0|^J = a_J^* r^{\|J\|} \leq a_{\|J\|} r^{\|J\|} \leq \frac{1}{c} a_{s_{m_0}} r_{m_0}^{s_{m_0}} = \frac{1}{c} a_{k_0} r^{k_0},$$

тому на $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)})$ отримуємо

$$\left| \sum_{\|J\| \neq k_0} b_J (z - z^0)^J \right| \leq \sum_{\|J\| \neq k_0} a_j^* r^{\|J\|} \leq \sum_{\substack{k=0,\\ k \neq k_0}}^{\infty} a_k C_{n+k-1}^k r^k =$$

$$= \sum_{\substack{k=0,\\ k \neq s_{m_0}}}^{s_{m_0-1}} a_k C_{n+k-1}^k r^k + \sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} a_k C_{n+k-1}^k r^k. \tag{6.28}$$

Беручи до уваги (6.27), встановлюємо таку оцінку для першої суми

$$\sum_{\substack{k=0,\\ k \neq s_{m_0}}}^{s_{m_0-1}} a_k C_{n+k-1}^k r^k \leq \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} \sum_{k=0}^{N} C_{n+k-1}^k \leq \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} (N+1) C_{n+N-1}^N. \tag{6.29}$$

Для усіх $k \geq s_{m_0-1} + 1$ виконується $a_k r_{m_0-1}^k \leq \mu_{m_0-1}$, а тому $a_k r_{m_0}^k = \frac{a_k r_{m_0-1}^k}{c^k} \leq \frac{\mu_{m_0-1}}{c^k}$. З огляду на (6.25), отримуємо

$$\sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} a_k C_{n+k-1}^k r^k \leq \mu_{m_0-1} \sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} C_{n+k-1}^k \frac{1}{c^k} \leq$$

$$\leq a_{s_{m_0-1}} r_{m_0}^{s_{m_0-1}} c^{s_{m_0-1}} \sum_{k=s_{m_0-1}+1} (k+1)(k+2)\dots(k+n)\frac{1}{c^k} \leq$$

$$\leq \frac{a_{s_{m_0}} r^{s_{m_0}}}{c} c^{s_{m_0-1}} \left(\sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} x^{k+n} \right)^{(n)} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} = \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0-1}} \left\{ \frac{x^{s_{m_0-1}+n+1}}{1-x} \right\}^{(n)} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} =$$

$$= \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0-1}} \sum_{j=0}^{n} C_n^j (n-j)!(s_{m_0-1}+n+1)\dots(s_{m_0-1}+n-j+2)\times$$

$$\times \frac{x^{s_{m_0-1}+1+n-j}}{(1-x)^{n-j+1}} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} \leq \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0}-1} n!(N+n+1)! \sum_{j=0}^{n} \frac{(1/c)^{s_{m_0-1}+1+n-j}}{(1-1/c)^{n-j+1}} =$$

$$= n!(N+n+1)! \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(c-1)^{n-j+1}} \leq (n+1)!(N+n+1)! \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c},$$

бо $c \geq 2$. З нерівностей (6.28), (6.29), (3.49) випливає, що

$$\left| \sum_{\|J\| \neq k_0} b_J (z-z^0)^J \right| \leq \frac{((N+1)C_{n+N-1}^N + (n+1)!(N+n+1)!) a_{k_0} r^{k_0}}{c} \leq \frac{1}{2} a_{k_0} r^{k_0},$$

тобто, многочлен P_{k_0} є головним у ряді (6.23) на кістяку $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{1}}{\mathbf{L}(|z^0|)})$. Необхідність доведена.

Перейдемо до доведення достатності. Нехай існують числа $p \in \mathbb{Z}_+$ та $\eta \in (0; d)$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $d = 1$ і деяких $r = r(1, z^0) \in (\eta; 1)$, $k_0 = k_0(1, z^0) \leq p$ многочлен P_{k_0} є головним у ряді (6.23) на кістяку $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{1}}{\mathbf{L}(|z^0|)})$. Тоді на цьому кістяку

$$\left| \sum_{\|J\| \neq k_0} b_J (z-z^0)^J \right| = \left| f(z) - \sum_{\|J\| = k_0} b_J (z-z^0)^J \right| \leq \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{2}.$$

Звідси за нерівністю Коші маємо $|b_J(z-z^0)^J| = a_j^* r^{\|J\|} \leq \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{2}$ для усіх $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|J\| \neq k_0$, тобто, для усіх $k \neq k_0$

$$a_k r^k \leq \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{2}. \tag{6.30}$$

Припустимо, що F не є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Тоді за теоремою 6.6 для усіх $p_1 \in \mathbb{Z}_+$ та $c \geq 1$ при деякому $z^0 \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність

$$\max \left\{ \frac{|F^{(J)}(z^0)|}{\mathbf{L}^J(z^0)} : \ \|J\| = p_1 + 1 \right\} > c \max \left\{ \frac{|F^{(K)}(z^0)|}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \ \|K\| \leq p_1 \right\}.$$

Візьмемо тут $p_1 = p$ та $c = \left(\frac{(p+1)!}{\eta^{p+1}} \right)^n$. Відтак для відповідного $z^0(p_1, c)$ дістаємо

$$\max \left\{ \frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(|z^0|)} : \ \|J\| = p + 1 \right\} > \frac{1}{\eta^{p+1}} \max \{ \frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(|z^0|)} : \ \|K\| \leq p \}.$$

Іншими словами, $a_{p+1} > \frac{a_{k_0}}{\eta^{p+1}}$, і звідсіля $a_{p+1}r^{p+1} > \frac{a_{k_0}r^{p+1}}{\eta^{p+1}} \geq a_{k_0}r^{k_0}$. Остання нерівність суперечить (6.30). Остаточно, F є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. $\square$

6.2.5 Вичерпування кулями. Основний метод дослідження цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних полягає у використанні інтегральної формули Коші та вичерпання $\mathbb{C}^n$ через полікруги та їхні кістяки. Це досить гнучко та зручно. Такий метод допоміг встановити критерії обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, які описують локальне поводження в полікрузі частинних похідних та максимуму модуля цілої функції в попередніх підрозділах.

Крім полікруга, важливим геометричним об'єктом в $\mathbb{C}^n$ є куля. Зрозуміло, що $\mathbb{C}^n$ також можна вичерпувати кулями. У зв'язку з цим варто згадати монографії [186, 245] про простори голоморфних функцій в одиничній кулі з $\mathbb{C}^n$: простори Бергмана, Гарді, Бєсова, Ліпшиця, Блоха, тощо. Автори цих книг вибрали кулю як об'єкт дослідження, тому що більшість результатів можна вивести, використовуючи безпосередні формули без вельми складних та заплутаних розрахунків. З огляду на це виникає таке питання: *Якими є властивості цілих функцій обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних у кулі та на її топологічній межі — сфері?* Саме цією проблемою займемося нижче.

Відкриту кулю $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z-z^0| < r\}$ позначаємо через $\mathbb{B}^n(z^0, r)$, її межею є сфера $\mathbb{S}^n(z^0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z-z^0| = r\}$, замкнену кулю $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z-z^0| \leq r\}$ — через $\mathbb{B}^n[z^0, r]$, $\mathbb{B}^n = \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)$, $\mathbb{D} = \mathbb{B}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$.

Позначимо $\ell(z) = \min_{1\leq j\leq n} l_j(z)$, $\mathcal{L}(z) = \max_{1\leq j\leq n} l_j(z)$. Очевидно, що $\ell(z) \leq \mathcal{L}(z)$.

Через $Q^n_{\mathbb{B}}$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}$, які задовольняють умову:

$$(\forall r > 0, \ j \in \{1, \dots, n\}): \ 0 < \lambda_{1,j}(r) \leq \lambda_{2,j}(r) < \infty, \tag{6.31}$$

де

$$\lambda_{1,j}(r) = \inf_{z^0\in\mathbb{C}^n} \inf \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\ell(z^0)\right] \right\}, \tag{6.32}$$

$$\lambda_{2,j}(r) = \sup_{z^0\in\mathbb{C}^n} \sup \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{B}^n \left[z^0, r/\ell(z^0)\right] \right\},$$

$$\Lambda_1(r) = (\lambda_{1,1}(r), \dots, \lambda_{1,n}(r)), \ \Lambda_2(r) = (\lambda_{2,1}(r), \dots, \lambda_{2,n}(r)).$$

Не складно перевірити, що клас $Q^n_{\mathbb{B}}$ можна визначити так:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \ \sup_{z,w\in\mathbb{C}^n} \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(w)} : |z-w| \leq \frac{\eta}{\min\{\ell(z), \ell(w)\}} \right\} < \infty, \tag{6.33}$$

тобто, умови (6.31) та (6.33) рівносильні. До того ж, $Q^n_{\mathbb{B}} \subset Q^n$.

Також пригодиться така формула.

Лема 6.5 ([245, лема 1.11]). *Припустимо, що $m = (m_1, \ldots, m_n)$ — мультиіндекс невід'ємних цілих чисел. Тоді*

$$\int_{\mathbb{S}_n} |\xi^m|^2 d\sigma(\xi) = \frac{(n-1)!m!}{(n-1+\|m\|)!} = \frac{\Gamma(n)\prod_{j=1}^n \Gamma(m_j+1)}{\Gamma(n+\|m\|)}.$$

Використовуючи ідею доведення леми 6.5 та означення гамма-функції, можна переконатися у правильності загальнішої формули

$$\text{для будь-якого } m \in \mathbb{Z}^n_+ \quad \int_{\mathbb{S}_n} |\xi^m| d\sigma(\xi) = \frac{\Gamma(n)\prod_{j=1}^n \Gamma(m_j/2+1)}{\Gamma(n+\|m\|/2)}. \tag{6.34}$$

Справді, ми можемо ототожнити $\mathbb{C}^n$ з $\mathbb{R}^{2n}$ через дійсну та уявну частини комплексних чисел. Нехай dV — звичайна лебегова міра на $\mathbb{C}^n$, dv — нормована об'ємна міра на $\mathbb{B}^n$, для якої $v(\mathbb{B}^n) = 1$, а c_n — об'єм кулі $\mathbb{B}^n$ через евклідову норму, тобто, $c_n dv = dV$.

Для обчислення інтеграла $I = \int_{\mathbb{C}^n} |z^m| e^{-|z|^2} dV(z)$ скористаємося двома методами. Спершу теорема Фубіні та підстановка

$$\begin{cases} x = \sqrt{r}\cos\varphi, \\ y = \sqrt{r}\sin\varphi, \end{cases} \quad r \in [0,\infty), \varphi \in [0, 2\pi]$$

дають

$$I = \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)^{m_k/2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi^n \prod_{k=1}^n \int_0^\infty r^{m_k/2} e^{-r} dr =$$
$$= \pi^n \prod_{j=1}^n \Gamma(m_j/2+1).$$

З іншої сторони, інтегрування в сферичних координатах приводить до такого

$$I = 2nc_n \int_0^\infty r^{2n-1+\|m\|} e^{-r^2} dr \int_{\mathbb{S}^n} |\xi^m| d\sigma(\xi) =$$
$$= nc_n \int_0^\infty t^{n-1+\|m\|/2} e^{-t} dt \int_{\mathbb{S}^n} |\xi^m| d\sigma(\xi) = nc_n \Gamma(n+\|m\|/2) \int_{\mathbb{S}^n} |\xi^m| d\sigma(\xi).$$

Прирівнюючи обидва вирази, отримуємо

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\xi^m| d\sigma(\xi) = \frac{\pi^n \prod_{j=1}^n \Gamma(m_j/2+1)}{nc_n \Gamma(n+\|m\|/2)}. \tag{6.35}$$

Покладемо $m = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Тоді $1 = \frac{\pi^n}{nc_n(n-1)!}$, тобто, $c_n = \frac{\pi^n}{n!}$. Підставляючи c_n у (6.35), пересвідчуємося у правильності формули (6.34).

Теорема 6.2. *Нехай $\mathbf{L} \in Q^n_{\mathbb{B}}$. Для того, щоб ціла в $\mathbb{C}^n$ функція F мала обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних необхідно, щоб для кожного $r > 0$*

знайшлися $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *існує* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, *для якого*

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\} \le p_0\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \tag{6.36}$$

і достатньо, щоб для кожного $r > 0$ *існувало* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ *таке, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *знайдеться* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, *для якого*

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\} \le p_0\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}. \tag{6.37}$$

Доведення. Нехай F — функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з $N = N(F, \mathbf{L}) < \infty$. Для кожного $r > 0$ покладемо

$$q = q(r) = [2(N+1)r\sqrt{n}\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^{N+1}] + 1$$

де $[x]$ — ціла частина дійсного числа x. Для $p \in \{0, \dots, q\}$ та $z^0 \in \mathbb{C}^n$ позначимо

$$S_p(z^0, r) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]\right\},$$

$$S_p^*(z^0, r) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]\right\}.$$

Використовуючи (6.32) та $\mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\ell(z^0)}\right] \subset \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{r}{\mathcal{L}(z^0)}\right]$, маємо

$$\begin{aligned} S_p(z^0, r) =& \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\frac{\mathbf{L}^K(z^0)}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]\right\} \le \\ \le& S_p^*(z^0, r)\max\left\{\prod_{j=1}^{n}\frac{l_j^N(z^0)}{l_j^N(z)} : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]\right\} \le \\ \le& S_p^*(z^0, r)\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}. \end{aligned}$$

а, застосовуючи (3.6), отримуємо

$$\begin{aligned} S_p^*(z^0, r) =& \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|\,\mathbf{L}^K(z)}{K!\mathbf{L}^K(z)\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le N, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]\right\} \le \\ \le& \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}(\Lambda_2(r))^K : \|K\| \le N, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]\right\} \le \\ \le& S_p(z^0, r)\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{2,j}(r))^N. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Нехай $K^{(p)}$ з $\|K^{(p)}\| \le N$ та $z^{(p)} \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]$ будуть такими, що

$$S_p^*(z^0, r) = \frac{|F^{(K^{(p)})}(z^{(p)})|}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} \tag{6.39}$$

За принципом максимуму модуля $z^{(p)} \in \mathbb{S}^n(z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)})$, тому $z^{(p)} \neq z^0$. Виберемо $\widetilde{z}_j^{(p)} = z_j^0 + \frac{p-1}{p}(z_j^{(p)} - z_j^0)$, $j \in \{1, \dots, n\}$ Тоді дістаємо

$$|\widetilde{z}^{(p)} - z^0| = \frac{p-1}{p}|z^{(p)} - z^0| = \frac{p-1}{p}\frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}, \tag{6.40}$$

$$|\widetilde{z}^{(p)} - z^{(p)}| = |z^0 + \frac{p-1}{p}(z^{(p)} - z^0) - z^{(p)}| = \frac{1}{p}|z^0 - z^{(p)}| = \frac{r}{q\mathcal{L}(z^0)}. \tag{6.41}$$

З рівності (6.40) випливає $\widetilde{z}^{(p)} \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{(p-1)r}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]$ та

$$S_{p-1}^*(z^0, r) \geq \frac{|F^{(K^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)})|}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)},$$

а з (6.39) випливає

$$0 \leq S_p^*(z^0, r) - S_{p-1}^*(z^0, r) \leq \frac{|F^{(K^{(p)})}(z^{(p)})| - |F^{(K^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)})|}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} =$$

$$= \frac{1}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} \int_0^1 \frac{d}{dt}|F^{(K^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)} + t(z^{(p)} - \widetilde{z}^{(p)}))|dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} \int_0^1 \sum_{j=1}^n |z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}||F^{K^{(p)}+\mathbf{1}_j}(\widetilde{z}^{(p)} + t(z^{(p)} - \widetilde{z}^{(p)}))|dt =$$

$$= \frac{1}{K^{(p)}!\mathbf{L}^{K^{(p)}}(z^0)} \sum_{j=1}^n |z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}||F^{K^{(p)}+\mathbf{1}_j}(\widetilde{z}^{(p)} + t^*(z^{(p)} - \widetilde{z}^{(p)}))|, \tag{6.42}$$

де $0 \leq t^* \leq 1, \widetilde{z}^{(p)} + t^*(z^{(p)} - \widetilde{z}^{(p)}) \in \mathbb{B}^n(z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)})$. Для $z \in \mathbb{B}^n(z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)})$ та $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|J\| \leq N+1$ маємо

$$\frac{|F^{(J)}(z)|\mathbf{L}^J(z)}{J!\mathbf{L}^J(z^0)\mathbf{L}^J(z)} \leq (\Lambda_2(r))^J \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq N\right\} \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \leq N\right\} \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N} S_p^*(z^0, r).$$

Водночас з (6.42) та (6.41) виводимо

$$0 \leq S_p^*(z^0, r) - S_{p-1}^*(z^0, r) \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N} S_p^*(z^0, r) \sum_{j=1}^n (k_j^{(p)} + 1) l_j(z^0)|z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}| =$$

$$= \prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N} S_p^*(z^0, r)(N+1) \sum_{j=1}^n l_j(z^0)|z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}| \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^{n}(\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(N+1)S_p^*(z^0,R)\sqrt{n}\mathcal{L}(z^0)|z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)}| =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(\lambda_{2,j}(r))^{N+1}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}\sqrt{n}\frac{(N+1)r}{q(r)}S_p^*(z^0,R) \leq \frac{1}{2}S_p^*(z^0,R).$$

Ця нерівність означає, що $S_p^*(z^0,r) \leq 2S_{p-1}^*(z^0,r)$, а тоді з врахуванням нерівностей (6.38) та (6.39) маємо

$$S_p(z^0,r) \leq 2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}S_{p-1}^*(z^0,r) \leq 2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^{N}S_{p-1}(z^0,r).$$

Тому

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq N, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{pr}{q\mathcal{L}(z^0)}\right]\right\} = S_q(z^0,r) \leq$$

$$\leq 2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^{N}S_{q-1}(z^0,r) \leq \ldots \leq$$

$$\leq (2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^{N})^q S_0(z^0,r) =$$

$$= (2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^{N})^q \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \leq N\right\}. \tag{6.43}$$

З нерівності (6.43) одержуємо нерівність (6.36) при $p_0 = (2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^{N})^q$ та деякому K^0, $\|K^0\| \leq N$. Необхідність умови (6.36) доведено.

Доведемо достатність. Припустимо, що для кожного $r > 0$ існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 1$ таке, що для всіх $z_0 \in \mathbb{C}^n$ та деякого $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \leq n_0$, виконується нерівність (6.37).

Запишемо інтегральну формулу Коші для кулі (див. [245, с. 109] або [186, с. 349]) в такому вигляді $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall K \in \mathbb{Z}_+^n$ $\forall S \in \mathbb{Z}_+^n$ $\forall z \in \mathbb{B}^n(z^0, r/\ell(z^0))$

$$F^{(K+S)}(z) = \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\int\limits_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{|\xi-z^0|(\overline{\xi-z^0})^S F^{(K)}(\xi)}{(|\xi-z^0|^2-\langle z-z^0,\xi-z^0\rangle)^{n+\|S\|}}d\sigma(\xi),$$

де $d\sigma(\xi)$ — нормована поверхнева міра на $\mathbb{S}_n$, тобто, $\sigma(\mathbb{S}_n(\mathbf{0},1)) = 1$. Покладемо $z = z^0$:

$$F^{(K+S)}(z^0) = \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{(\overline{\xi-z^0})^S F^{(K)}(\xi)}{|\xi-z^0|^{2(n+\|S\|)-1}}d\sigma(\xi) \tag{6.44}$$

Застосовуючи (6.37) та (6.34), маємо

$$|F^{(K+S)}(z^0)| \leq \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{|(\xi-z^0)^S||F^{(K)}(\xi)|}{|\xi-z^0|^{2(n+\|S\|)-1}}d\sigma(\xi) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{2(n+\|S\|)-1} \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\times$$
$$\times \int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))} \frac{|(\xi-z^0)^S||F^{(K)}(\xi)|K!\mathbf{L}^K(\xi)}{K!\mathbf{L}^K(\xi)} d\sigma(\xi) \leq$$
$$\leq p_0 \left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{2(n+\|S\|)-1} \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\times$$
$$\times \int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))} \frac{|(\xi-z^0)^S||F^{(K^0)}(z^0)|K!\mathbf{L}^K(z)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} d\sigma(\xi) \leq$$
$$\leq p_0 \left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{2(n+\|S\|)-1} \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!} \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|K!\prod_{j=1}^n \lambda_{2,j}^{n_0}(r)\mathbf{L}^K(z^0)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\times$$
$$\times \int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))} |(\xi-z^0)^S| d\sigma(\xi) \leq$$
$$\leq p_0 \left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|} \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!} \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|K!\prod_{j=1}^n \lambda_{2,j}^{n_0}(r)\mathbf{L}^K(z^0)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\times$$
$$\times \int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))} \frac{|(\xi-z^0)^S|}{(r/\ell(z^0))^{\|S\|}} d\sigma\left(\frac{\xi-z^0}{r/\ell(z^0)}\right) \leq p_0 \left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|} \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\times$$
$$\times \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|K!\prod_{j=1}^n \lambda_{2,j}^{n_0}(r)\mathbf{L}^K(z^0)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \int_{\mathbb{S}^n(\mathbf{0},1)} |\xi^S| d\sigma(\xi) =$$
$$= p_0 \left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|} \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!} \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|K!\prod_{j=1}^n \lambda_{2,j}^{n_0}(r)\mathbf{L}^K(z^0)}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\times$$
$$\times \frac{\Gamma(n)\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{\Gamma(n+\|S\|/2)} \tag{6.45}$$

Звідси випливає

$$\frac{|F^{(K+S)}(z^0)|}{(K+S)!\mathbf{L}^{K+S}(z^0)} \leq \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}\times$$
$$\times p_0 \left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|} \frac{K!\prod_{j=1}^n \lambda_{2,j}^{n_0}(r)(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)\mathbf{L}^S(z^0)} \leq$$
$$\leq \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} p_0 \frac{K!\prod_{j=1}^n \lambda_{2,j}^{n_0}(r)(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}}. \tag{6.46}$$

Візьмемо $r>1$. Позаяк $\|K\| \leq n_0$, величина $p_0 K!\prod_{j=1}^n \lambda_{2,j}^{n_0}(R)$ не залежить від S. Тоді існує n_1 таке, що

$$\frac{p_0 K!\prod_{j=1}^n \lambda_{2,j}^{n_0}(r)}{r^{\|S\|}} \leq 1 \text{ для всіх } \|S\| \geq n_1. \tag{6.47}$$

Асимптотичне поводження виразу $\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}}$ є значно складнішим при $\|S\| \to +\infty$. Використовуючи формулу Стірлінга $\Gamma(m+1) =$

$\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m(1+\frac{\theta}{12m})$, де $\theta=\theta(m)\in[0,1]$, отримуємо

$$\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}}\le\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{S!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}}$$
$$=\frac{\sqrt{2\pi(n+\|S\|-1)}(\frac{n+\|S\|-1}{e})^{n+\|S\|-1}\prod_{j=1}^n\sqrt{2\pi s_j/2}(\frac{s_j}{2e})^{s_j/2}}{\prod_{j=1}^n\sqrt{2\pi s_j}(\frac{s_j}{e})^{s_j}\sqrt{2\pi(n+\|S\|/2-1)}(\frac{n+\|S\|/2-1}{e})^{n+\|S\|/2-1}r^{\|S\|}}\times$$
$$\times\frac{(1+\frac{\theta(n+\|S\|-1)}{12(n+\|S\|-1)})\prod_{j=1}^n(1+\frac{\theta(s_j/2)}{12s_j/2})}{(1+\frac{\theta(n+\|S\|/2)}{12(n+\|S\|/2)})\prod_{j=1}^n(1+\frac{\theta(s_j)}{12s_j})}.$$

Позначивши

$$\Theta(S)=\frac{(1+\frac{\theta(n+\|S\|-1)}{12(n+\|S\|-1)})\prod_{j=1}^n(1+\frac{\theta(s_j/2)}{12s_j/2})}{(1+\frac{\theta(n+\|S\|/2)}{12(n+\|S\|/2)})\prod_{j=1}^n(1+\frac{\theta(s_j)}{12s_j})}$$

та спростивши попередню нерівність, встановимо

$$\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}}\le\Theta(S)\frac{2^{(1-n)/2}e^{-\|S\|/2}}{r^{\|S\|}}\times$$
$$\times\left(\frac{n-1+\|S\|}{n-1+\|S\|/2}\right)^{n-1+\|S\|/2}\cdot(n-1+\|S\|)^{\|S\|/2}\prod_{j=1}^n(\frac{e}{2s_j})^{s_j/2}\le$$
$$\le\Theta(S)\frac{2^{(n-1+\|S\|)/2}e^{-\|S\|/2}}{r^{\|S\|}}(n-1+\|S\|)^{\|S\|/2}\prod_{j=1}^n(\frac{e}{2s_j})^{s_j/2}=$$
$$=\Theta(S)\frac{2^{(n-1)/2}}{r^{\|S\|}}\left(1+\frac{n-1}{\|S\|}\right)^{\frac{\|S\|}{n-1}\cdot\frac{n-1}{2}}\cdot\|S\|^{\|S\|/2}\prod_{j=1}^n\frac{1}{s_j^{s_j/2}}\le$$
$$\le\Theta(S)(2e)^{(n-1)/2}\left(\frac{1}{r}\prod_{j=1}^n\left(\frac{\|S\|}{s_j}\right)^{\frac{s_j}{2\|S\|}}\right)^{\|S\|}\quad\text{при } s_j\to\infty. \tag{6.48}$$

Позначимо $x_j=\frac{\|S\|}{s_j}\in(1,+\infty)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$. Очевидно, що $\Theta(S)\to1$ при $s_j\to\infty$, $j\in\{1,\dots,n\}$. Нескладне дослідження на умовний екстремум дає

$$\max\left\{H(x)\colon\ \text{за умови}\ \sum_{j=1}^n\frac{1}{x_j}=1,\ x_j\in(1,+\infty)\right\}\le\sqrt{n},$$

де $H(x):=\prod_{j=1}^n x_j^{1/(2x_j)}$.

Виберемо $r\ge\sqrt{n}$. Для цього r маємо $\frac{1}{r}\prod_{j=1}^n\left(\frac{\|S\|}{s_j}\right)^{\frac{s_j}{2\|S\|}}\le1$. З огляду на (6.48) робимо висновок, що існує n_2, для якого

$$\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{(K+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)r^{\|S\|}}\le1 \tag{6.49}$$

для всіх $\|S\|\ge n_2$.

Асимптотичне поводження правої частини (6.46) в решти випадках S може бути досліджено подібним способом. Беручи до уваги (6.46), (6.47) та (6.49) маємо, що для всіх $\|S\| \geq n_1 + n_2$

$$\frac{|F^{(K+S)}(z^0)|}{(K+S)!\mathbf{L}^{S+K}(z^0)} \leq \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

Це означає, що для кожного $J \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)} \leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \leq n_0 + n_1 + n_2\right\}$$

де n_0, n_1, n_2 — незалежні від z_0. Тому функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних з $N(F, \mathbf{L}) \leq n_0 + n_1 + n_2$. □

Якщо ми накладемо додаткове обмеження на функцію $\mathbf{L}$, то з теореми 6.2 випливає такий критерій.

Твердження 6.7. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q_{\mathbb{B}}^n$ *буде така, що* $\sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{\mathcal{L}(z)}{\ell(z)} = C < \infty$, $\ell(z) = \min_{1\leq j\leq n} l_j(z)$, $\mathcal{L}(z) = \max_{1\leq j\leq n} l_j(z)$. *Ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли для кожного* $r > 0$ *існує* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *знайдеться* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \leq n_0$, *для якого виконується нерівність* (6.37).

Доведення. Достатність доведено в теоремі 6.2. Для необхідності виберемо $q = q(R) = [2(N+1)Cr\sqrt{n}\prod_{j=1}^n(\lambda_{1,j}(r))^{-N}(\lambda_{2,j}(r))^{N+1}]+1$ та замінимо $\mathcal{L}(z^0)$ на $\ell(z^0)$ в доведенні теореми 6.2. Інших змін не потрібно робити. □

Твердження 6.8. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q_{\mathbb{B}}^n$. *Для того, щоб ціла функція* F *була обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних необхідно, щоб* $(\forall r > 0)$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \geq 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\exists K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \leq n_0$, *та*

$$\max\left\{|F^{(K^0)}(z)| : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\} \leq p|F^{(K^0)}(z^0)| \tag{6.50}$$

і досить, щоб $(\forall r > 0)$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \geq 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists K_j^0 = (0, \ldots, 0, \underbrace{k_j^0}_{j-\text{те місце}}, 0, \ldots, 0)$ *для якого* $k_j^0 \leq n_0$ *та*

$$\max\left\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\} \leq p|F^{(K_j^0)}(z^0)| \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{6.51}$$

Доведення. З доведення теореми 6.2 видно, що нерівність (6.36) правильна для деякого K^0. Тоді ми маємо

$$\frac{p_0}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \geq \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z)} : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!}\frac{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)\mathbf{L}^{K^0}(z)} : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\} \geq$$

$$\geq \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!}\frac{\prod_{j=1}^n(\lambda_{2,j}(r))^{-n_0}}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} : z\in\mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\}.$$

Остання нерівність означає, що

$$\frac{p_0\prod_{j=1}^n(\lambda_{2,j}(r))^{n_0}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \geq \max\left\{\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} : z\in\mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\}. \tag{6.52}$$

З нерівності (6.52) одержуємо нерівність (6.50) при $p = p_0\prod_{j=1}^n(\lambda_{2,j}(r))^{n_0}$. Необхідність умови (6.50) доведено.

Доведемо тепер достатність (6.51). Припустимо, що для кожного $r>0$ $\exists n_0\in\mathbb{Z}_+$, $p>1$ такі, що $\forall z_0\in\mathbb{C}^n$ та деякого $K_j^0\in\mathbb{Z}_+^n$ при $k_j^0\leq n_0$ виконується нерівність (6.51).

Зважаючи на (6.44), запишемо формулу Коші в такому вигляді: $\forall z^0\in\mathbb{C}^n$ $\forall S\in\mathbb{Z}_+^n$

$$F^{(K_j^0+S)}(z^0) = \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{(\overline{\xi-z^0})^S F^{(K_j^0)}(\xi)}{|\xi-z^0|^{2(n+\|S\|)-1}}d\sigma(\xi).$$

Як і в (6.45), отримуємо

$$|F^{(K_j^0+S)}(z^0)| \leq \frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{2(n+\|S\|)-1}\times$$
$$\times\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\}\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}|(\overline{\xi-z^0})^S|d\sigma(\xi)\leq$$
$$\leq\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{S}^n(z^0,r/\ell(z^0))}\frac{|(\xi-z^0)^S|}{(r/\ell(z^0))^{\|S\|}}d\sigma\left(\frac{\xi-z^0}{r/\ell(z^0)}\right)\leq\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\times$$
$$\times\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\}\int_{\mathbb{S}^n(\mathbf{0},1)}|\xi^S|d\sigma(\xi)=$$
$$=\frac{(n+\|S\|-1)!}{(n-1)!}\left(\frac{\ell(z^0)}{r}\right)^{\|S\|}\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(n)\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{\Gamma(n+\|S\|/2)}$$

Покладемо $r=\beta>\sqrt{n}$ та використаємо (6.51)

$$|F^{(K_j^0+S)}(z^0)| \leq \left(\frac{\ell(z^0)}{\beta}\right)^{\|S\|}\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{\Gamma(n+\|S\|/2)}\times$$
$$\times\max\{|F^{(K_j^0)}(z)|\colon z\in\mathbb{B}^n\left[z^0, \beta/\ell(z^0)\right]\}\leq$$
$$\leq p\left(\frac{\ell(z^0)}{\beta}\right)^{\|S\|}\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n\Gamma(s_j/2+1)}{\Gamma(n+\|S\|/2)}|F^{(K_j^0)}(z^0)|. \tag{6.53}$$

Тоді з (6.53) випливає, що для всіх $j \in \{1, \dots, n\}$ та $k_j^0 \le n_0$

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0+S}(z^0)(K_j^0+S)!} \le p\frac{K_j^0!(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{\beta^{\|S\|}(K_j^0+S)!\Gamma(n+\|S\|/2)}\frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!} \le$$
$$\le pn_0!\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{\beta^{\|S\|}S!\Gamma(n+\|S\|/2)}\frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!}$$

Беручи до уваги (6.49), можна стверджувати, що знайдеться n_1 таке, що для всіх $\|S\| \ge n_1$

$$\frac{(n+\|S\|-1)!\prod_{j=1}^n \Gamma(s_j/2+1)}{\beta^{\|S\|}S!\Gamma(n+\|S\|/2)} \le 1.$$

Водночас існує n_2 таке, що для всіх $\|S\| \ge n_2$ $\frac{pn_0!}{\beta^{\|S\|}} \le 1$. Відповідно, маємо

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0+S}(z^0)(K_j^0+S)!} \le \frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!} \text{ для всіх } \|S\| \ge n_1+n_2,$$

тобто, $N(F, \mathbf{L}) \le n_0 + n_1 + n_2$. □

Зауваження 6.4. Нерівність (6.50) є необхідною та достатньою умовою обмеженості l-індексу для функцій від однієї змінної [206, 220]. Але невідомо, чи ця умова достатня для обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Наші обмеження (6.51) є відповідними багатовимірними достатніми умовами.

Позначимо $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (\widetilde{l}_1(z), \dots, \widetilde{l}_n(z))$. Запис $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ означає, що існують $\Theta_1 = (\theta_{1,j}, \dots, \theta_{1,n}) \in \mathbb{R}_+^n$, $\Theta_2 = (\theta_{2,j}, \dots, \theta_{2,n}) \in \mathbb{R}_+^n$ такі, що $\forall z \in \mathbb{C}^n$ $\theta_{1,j}\widetilde{l}_j(z) \le l_j(z) \le \theta_{2,j}\widetilde{l}_j(z)$ для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$.

Твердження 6.9. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q_{\mathbb{B}}^n$, $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$, $\sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{\mathcal{L}(z)}{\ell(z)} = C < \infty$. *Ціла функція F має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли вона має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Легко показати, що при $\mathbf{L} \in Q_{\mathbb{B}}^n$ та $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ маємо $\widetilde{\mathbf{L}} \in Q_{\mathbb{B}}^n$.

Нехай $N(F, \widetilde{\mathbf{L}}) = \widetilde{n}_0 < +\infty$. Тоді за теоремою 6.2 для кожного $\widetilde{r} > 0$ існує $\widetilde{p} \ge 1$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та деякого K^0 з $\|K^0\| \le \widetilde{n}_0$, нерівність (6.36) виконується з $\widetilde{\mathbf{L}}$ та $\widetilde{r}$ замість $\mathbf{L}$ та r відповідно. Звідси,

$$\frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{\Theta_2^{K^0}|F^{(K^0)}(z^0)|}{\Theta_2^{K^0}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \ge \frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\Theta_2^{K^0}\widetilde{\mathbf{L}}^{K^0}(z^0)} \ge$$
$$\ge \frac{1}{\Theta_2^{K^0}}\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{\mathbf{L}}^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \widetilde{r}/\widetilde{\mathcal{L}}(z)\right]\right\} \ge$$
$$\ge \frac{1}{\Theta_2^{K^0}}\max\left\{\frac{\Theta_1^K|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \min_{1\le j\le n}\Theta_{1,j}\widetilde{r}/\mathcal{L}(z)\right]\right\} \ge$$
$$\ge \frac{\min\limits_{0\le\|K\|\le n_0}\{\Theta_1^K\}}{\Theta_2^{K^0}}\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \min_{1\le j\le n}\Theta_{1,j}\widetilde{r}/\mathcal{L}(z)\right]\right\} \ge$$

$$\geq \frac{\min\limits_{0\leq\|K\|\leq n_0}\{\Theta_1^K\}}{\Theta_2^{K^0}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq \widetilde{n}_0, z\in\mathbb{B}^n\left[z^0, \frac{\widetilde{r}\min_{1\leq j\leq n}\Theta_{1,j}}{C\ell(z)}\right]\right\}$$

Зважаючи на теорему 6.2, отримуємо, що функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Твердження 6.10. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n_{\mathbb{B}}$, F *— ціла функція. Якщо існують* $r > 0$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 1$ *такі, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *та деякого* $K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$ *при* $\|K^0\| \leq n_0$ *виконується нерівність* (6.37)*, то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Доведення достатності теореми 6.2 при $r \geq \sqrt{n}$ приводить до висновку, що $N(F, \mathbf{L}) < +\infty$.

Нехай $\mathbf{L}^*(z) = \frac{\sqrt{n}\mathbf{L}(z)}{r}$, $\ell^*(z) = \frac{\sqrt{n}\ell(z)}{r}$, та r — радіус, для якого (6.37) — правильна. У загальному випадку з виконання (6.37) для F та $\mathbf{L}$ при $r < \beta$ отримуємо

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!(\mathbf{L}^*(z))^K} : \|K\| \leq n_0, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \sqrt{n}/\ell^*(z^0)\right]\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!(\sqrt{n}\mathbf{L}(z)/r)^K} : \|K\| \leq n_0, z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, \sqrt{n}/(\sqrt{n}\ell(z^0)/r)\right]\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq n_0, z\in\mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\} \leq$$

$$\leq \frac{p_0}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{\beta^{\|K^0\|}p_0}{r^{\|K^0\|}K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{(\sqrt{n}\mathbf{L}(z)/r)^{K^0}} = \frac{p_0\beta^{n_0}}{r^{n_0}}\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!(\mathbf{L}^*(z))^{K^0}}.$$

тобто, (6.37) виконується для F, $\mathbf{L}^*$ та $r = \sqrt{n}$. Як і вище, застосуємо теорему 6.2 до функції $F(z)$ та $\mathbf{L}^*(z) = \sqrt{n}\mathbf{L}(z)/r$. Звідси випливає, що F — обмеженого $\mathbf{L}^*$-індексу за сукупністю змінних. Тому, за лемою 6.4 функція F також обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. □

Зауваження 6.5. *Відповідники теореми 6.2 та тверджень6.7-6.10 спершу були отримані в цьому розділі для полікругів. Але для куль ці теореми є новими навіть при* $\mathbf{L}(z) \equiv 1$*, тобто, у випадку цілих функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних (див. результати в [77, 79, 80, 146, 170, 188]).*

6.3 Аналоги достатніх умов логарифмічних критеріїв обмеженості L-індексу за сукупністю змінних

6.3.1 Обмеженість L-індексу за кожним напрямком $\mathbf{1}_j$. З обмеженості l_j-індексу функції $F(z)$ за кожною змінною z_j, взагалі кажучи, не випливає обмеженість $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (див. приклад в [264]). Але якщо функція F має обмежений l_j-індекс за кожним напрямком $\mathbf{1}_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то F є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Якщо

$\mathbf{b} = \mathbf{1}_j$, то означення функції обмеженого L-індексу за напрямком, по суті, визначає функцію F *рівномірно обмеженого L-індексу* за змінною z_j.

Твердження 6.11. *Нехай* $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, *де* $l_j \in Q^n_{\mathbf{1}_j}$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$. *Якщо ціла в* $\mathbb{C}^n$ *функція* F *має обмежений* l_j*-індекс за напрямком* $\mathbf{1}_j$ *для кожного* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *то* F *є обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних.*

Доведення. Нехай ціла в $\mathbb{C}^n$ функція F має обмежений l_j-індекс за кожним напрямком $\mathbf{1}_j$. Тоді за теоремою X для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$ та довільних $0 < r' < r'' < \infty$ знайдеться число $p_j = p_j(r', r'')$ таке, що для всіх $z_j^0 \in \mathbb{C}$ та кожного $(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ виконується нерівність

$$\max\left\{|F(z)|\colon |z_i - z_i^0| = \frac{r_i''}{l_i(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i^0, z_{i+1}, \ldots, z_n)}\right\} \le p_i(r_i', r_i'')\times$$
$$\times \max\left\{|F(z)|\colon |z_i - z_i^0| = \frac{r_i'}{l_i(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i^0, z_{i+1}, \ldots, z_n)}\right\}. \tag{6.54}$$

Зрозуміло, що якщо для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$ $l_j \in Q^n_{\mathbf{1}_j}$, то $\mathbf{L} \in Q^n$. Нехай z^0 — довільна точка з $\mathbb{C}^n$, а точка $z^* \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)})$ така, що $M(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F) = |F(z^*)|$. Виберемо $R'' > \mathbf{1}$ та $R' < \Lambda_1(R'')$. Тоді з нерівності (6.54) випливає, що

$$M\Big(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\Big) \le \max\left\{|F(z_1, z_2^*, z_3^*, \ldots, z_n^*)|\colon |z_1 - z_1^0| = \frac{r_1''}{l_1(z_1^0, z_2^*, z_3^*, \ldots, z_n^*)}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{|F(z_1, z_2^*, \ldots, z_n^*)|\colon |z_1 - z_1^0| = \frac{r_1''}{l_1(z_1^0, z_2^*, \ldots, z_n^*)}\frac{l_1(z_1^0, z_2^*, \ldots, z_n^*)}{l_1(z^0)}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{|F(z_1, z_2^*, \ldots, z_n^*)|\colon\ |z_1 - z_1^0| = \frac{r_1''\lambda_{2,1}(R'')}{l_1(z_1^0, z_2^*, \ldots, z_n^*)}\right\} \le$$
$$\le p_1(r_1', r_1''\lambda_{2,1}(R'')) \max\left\{|F(z_1, z_2^*, \ldots, z_n^*)|\colon\ |z_1 - z_1^0| = \frac{r_1'}{l_1(z_1^0, z_2^*, \ldots, z_n^*)}\right\} \le$$
$$\le p_1(r_1', r_1''\lambda_{2,1}(R'')) \max\left\{|F(z_1, z_2^*, \ldots, z_n^*)|\colon\ |z_1 - z_1^0| = \frac{r_1'}{\lambda_{1,1}(R'')l_1(z^0)}\right\} =$$
$$= p_1(r_1', r_1''\lambda_{2,1}(R''))|F(z_1^{**}, z_2^*, \ldots, z_n^*)| \le p_1(r_1', r_1''\lambda_{2,1}(R''))\times$$
$$\times \max\left\{|F(z_1^{**}, z_2, \ldots, z_n^*)|\colon\ |z_2 - z_2^0| = \frac{r_2''}{l_2(z^0)}\right\} = p_1(r_1', r_1''\lambda_{2,1}(R''))\times$$
$$\times \max\left\{|F(z_1^{**}, z_2, \ldots, z_n^*)|\colon |z_2 - z_2^0| = \frac{r_2''}{l_2(z_1^{**}, z_2^0, \ldots, z_n^*)}\frac{l_2(z_1^{**}, z_2^0, \ldots, z_n^*)}{l_2(z^0)}\right\} \le$$
$$\le p_1(r_1', r_1''\lambda_{2,1}(R'')) \max\left\{|F(z_1^{**}, z_2, \ldots, z_n^*)|\colon |z_2 - z_2^0| = \frac{r_2''\lambda_{2,2}(R'')}{l_2(z_1^{**}, z_2^0, \ldots, z_n^*)}\right\} \le$$
$$\le \prod_{j=1}^{2} p_j(r_j', r_j''\lambda_{2,j}(R'')) \max\left\{|F(z_1^{**}, z_2, \ldots, z_n^*)|\colon |z_2 - z_2^0| = \frac{r_2'}{l_2(z_1^{**}, z_2^0, \ldots, z_n^*)}\right\} \le$$
$$\le \prod_{j=1}^{2} p_j(r_j', r_j''\lambda_{2,j}(R'')) \max\left\{|F(z_1^{**}, z_2, \ldots, z_n^*)|\colon |z_2 - z_2^0| = \frac{r_2'}{\lambda_{1,2}(R'')l_2(z^0)}\right\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{2} p_j(r'_j, r''_j\lambda_{2,j}(R''))|F(z_1^{**}, z_2^{**}, z_3^*, \ldots, z_n^*)| \le \ldots \le \prod_{j=1}^{n} p_j(r'_j, r''_j\lambda_{2,j}(R''))\times$$

$$\times \max\left\{|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|\colon\ |z_j - z_j^0| = \frac{r'_j}{\lambda_{1,j}(R'')l_j(z^0)}, j \in \{1, \ldots, n\}\right\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} p_j(r'_j, r''_j\lambda_{2,j}(R''))M\left(\frac{R'}{\Lambda_1(R'')\mathbf{L}(z^0)}, z^0, f\right).$$

Звідси, за твердженням 6.3 функція f має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Звісно ж, якщо ціла функція F у $\mathbb{C}^n$ має обмежений індекс за напрямком $\mathbf{1}_j$ для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$, то F є обмеженого індексу за сукупністю змінних.

Використовуючи твердження 6.11 та теорему VIII, можна отримати достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Теорема 6.3. *Нехай $F(z)$ — ціла в $\mathbb{C}^n$ функція та для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $l_j(z) \in Q^n_{\mathbf{1}_j}$ і $\mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{1}_j}(F) \ne \emptyset$. Якщо для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджуються такі умови:*

1) *для будь-якого $r > 0$ існує $P_j = P_j(r) > 0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{1}_j}(F)$*

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \le P_j l_j(z); \tag{6.55}$$

2) *для будь-якого $r > 0$ існує $\widetilde{n}_j(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$, для яких $F(z^0 + t\mathbf{1}_j) \not\equiv 0$,*

$$n_{\mathbf{1}_j}\left(\frac{r}{l_j(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) \le \widetilde{n}_j(r), \tag{6.56}$$

то $F(z)$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.

Доведення. Зазначимо, що $|\mathbf{b}| = |\mathbf{1}_j| = 1$, $L(z^0 + t\mathbf{b}) = L(z^0 + t\mathbf{1}_j) = L(z_1^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_j^0 + t, z_{j+1}^0, \ldots, z_n^0) = l_j(z^0 + t\mathbf{1}_j)$. Тому за припущеннями цієї теореми та теореми VIII функція $F(z)$ має обмежений l_j-індекс за напрямком $\mathbf{1}_j$. Застосовуючи твердження 6.3, отримаємо, що $F(z)$ є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, де $\mathbf{L}(z) = (l_1(z_1), l_2(z_2), \ldots, l_n(z_n))$. □

Зауваження 6.6. Нам невідомо, чи правильне обернене твердження, тобто, чи з обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних випливають (6.55) та (6.56). Ця проблема зводиться до питання про те, чи обмеженість $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних має наслідком обмеженість l_j-індексу за кожним напрямком $\mathbf{1}_j$, тобто, рівномірну обмеженість l_j- індексу за кожною змінною z_j. Вона **залишається відкритою** від появи на початку 90-их років статей [260, 264].

6.3.2 Оцінка максимуму модуля на кістяку полікруга. Тут шукаємо багатовимірні достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, які описують розподіл нулів та поводження частинних логарифмічних похідних. Вище встановлено деякі подібні обмеження — це теорема 6.3.В їхніх доведеннях використано підхід через функцію зрізки $F(z^0 + t\mathbf{b})$, де $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}$, $\mathbf{b}$ — заданий напрямок у $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — ціла функція. Підґрунтям такого підходу є поняття функції обмеженого L-індексу за напрямком. Вище доведено (твердження 6.11), що якщо ціла в $\mathbb{C}^n$ функція F є обмеженого l_j-індексу за кожним напрямком $\mathbf{1}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–те місце}}, 0, \ldots, 0)$, то F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для вектор-функції $\mathbf{L} = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$. Це допомогло нам знайти обмеження через логарифмічні похідні за напрямком та розподіл нулів за кожним напрямком $\mathbf{1}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–те місце}})$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ми припускали, що модуль логарифмічної похідної за напрямком $\mathbf{1}_j$ є обмеженим зверху функцією l_j зовні деякої виняткової множини, що містить всі нулі цілої функції F (див. визначення $G_r^{\mathbf{b}}(F)$ на початку розділу 5).

Проф. І. Е. Чижиков звернув увагу в розмові на те, що ця виняткова множина є надто малою, бо вона не містить околів деяких нулів функції в $\mathbb{C}^n$. Це веде до такого питання: *чи існують достатні умови обмеженості* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних з більшою винятковою множиною?* Ми даємо ствердну відповідь на це питання (теорема 6.5), причому отримано достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних через оцінку максимуму модуля цілої функції на кістяку полікруга через мінімум модуля (теорема 6.4). Натомість теорема 6.5 забезпечує умови на міру нульової множини цілої функції F, за яких F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. Тим не менш, ми не знаємо, чи отримані умови в теоремі 6.4 є також необхідними в $\mathbb{C}^n$, $(n \geq 2)$. Зазначимо, що ці твердження є новими навіть для цілих функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних, тобто, для $\mathbf{L} = (1, \ldots, 1)$.

Цей підрозділ присвячений двом старим проблемам у теорії цілих та мероморфних функцій. Перша проблема — це встановлення точних оцінок логарифмічних похідних таких функцій в одиничному крузі зовні деякої виняткової множини. І. Чижиков, Ґ. Ґандерсен, Я. Хейтоканґас, Р. Корхонен, Я. Раття [82, 83, 131, 133] розглядали різноманітні формулюванні цієї проблеми. Отримані ними оцінки використовувалися для вивчення властивостей голоморфних розв'язків диференціальних рівнянь. Натомість ми припускаємо, що частинні логарифмічні похідні за кожною змінною задовольняють деякі нерівності (3.113).

Інша цікава проблема стосується нульових множин голоморфних функцій у

$\mathbb{C}^n$. Різноманітні оцінки міри нульових множин та їхні геометричні властивості досліджені в [1, 2, 91, 138, 139, 161]. Тут ми вважаємо, що нульові точки цілих функцій допускають рівномірний розподіл у деякому сенсі, тобто, є справедливим (6.64).

Позначимо $Z_F = \bigcup_{z\in\mathbb{C}^n}\{z : F(z) = 0\}$ та

$$G_R(F) = \bigcup_{z^0\in Z_F}\left\{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_j - z_j^0| < \frac{r_j}{l_j(z^0)}\ \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}\right\} =$$
$$= \bigcup_{z^0\in Z_F} \mathbb{D}^n\left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right).$$

Теорема 6.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$, F *— ціла в* $\mathbb{C}^n$ *функція. Якщо* $\exists R > \mathbf{0}$, $\mathbf{0} < R < \mathbf{1}$, $\exists p_2 \geq 1$ $\exists\Theta \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{0} < \Theta < R$, $\exists R' > \mathbf{0}$ *(*$R' = \mathbf{0}$ *для* $Z_F = \emptyset$*) такі, що* $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\exists R^0 = R^0(z^0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta \leq R^0 \leq R$, *для якого*

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \cap G_{R'}(F)\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j(z^0)}, \tag{6.57}$$

$$\max\left\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\}, \tag{6.58}$$

то функція F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (*meas *— міра Лебега на кістяку полікруга).*

Доведення. За твердженням 6.4 покажемо, що $\exists p_1 > 0$ $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n$

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R+\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_1 \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}.$$

Позначимо $l_j^* = \max\left\{l_j(z) : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{2(R+\mathbf{1})}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\}$, $\rho_{j,0} = \frac{r_j}{l_j(z^0)}$, $\rho_{j,k} = \rho_{j,0} + \frac{k\cdot\theta_j}{l_j^*}$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Справедлива така оцінка

$$\frac{\theta_j}{l_j^*} < \frac{r_j}{l_j^*} \leq \frac{r_j}{l_j(z^0)} < \frac{2r_j+2}{l_j(z^0)} - \frac{r_j+1}{l_j(z^0)}.$$

Тому, існує $S^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) \in \mathbb{N}^p$, незалежне від z^0 таке, що

$$\rho_{j,m_j-1} < \frac{r_j+1}{l_j(z^0)} < \rho_{j,m_j} \leq \frac{2r_j+2}{l_j(z^0)}$$

для деякого $m_j = m_j(z^0) \leq s_j^*$, бо $\mathbf{L} \in Q^n$. Справді,

$$\left(\frac{2r_j+2}{l_j(z^0)} - \rho_{j,0}\right) \Big/ \frac{\theta_j}{l_j^*} = (2r_j + 2 - r_j)\,\frac{l_j^*}{\theta_j l_j(z^0)} =$$
$$= \frac{r_j+2}{\theta_j} \max\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{2(R+\mathbf{1})}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\} \leq \frac{r_j+2}{\theta_j}\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1})).$$

Отже, $s_j^* = \left[\frac{r_j+2}{\theta_j}\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))\right]$, де $[x]$ — ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$.

Нехай $M_0 = (m_1, \ldots, m_n)$ та τ_K^{**} буде такою точкою в $\mathbb{C}^n$, що

$$|F(\tau_K^{**})| = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_K)\},$$

де $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $\mathcal{R}_K = (\rho_{1,k_1}, \ldots, \rho_{n,k_n})$ та $\tau_{j,K}^*$ — точка перетину в $\mathbb{C}$ відрізка $[z_j^0, \tau_{j,K}^{**}]$ з $|z_j - z_j^0| = \rho_{j,k_j-1}$. Побудуємо послідовність полікругів $\mathbb{D}^n(z^0, \mathcal{R}_K)$ з $K \le M_0$, $\mathcal{R}_{\mathbf{0}} = R/\mathbf{L}(z^0) = (\rho_{1,0}, \ldots, \rho_{n,0})$ та $\Theta/\mathbf{L}(z^0) = (\theta_1/l_1^*, \ldots, \theta_n/l_n^*)$ (див. рисунки 1 та 2).

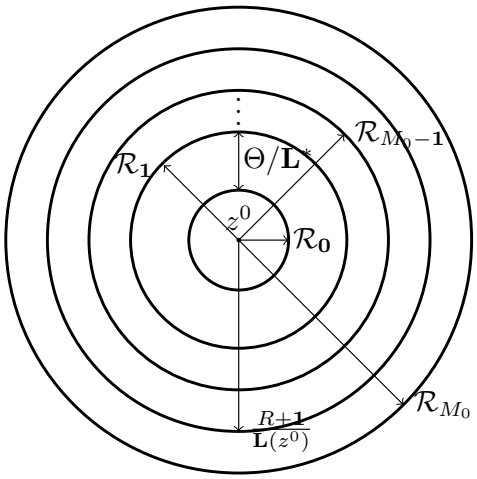

Рисунок 1

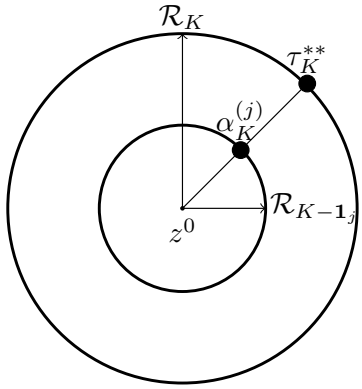

Рисунок 2

Позначимо $\alpha_K^{(j)} = (\tau_{1,K}^{**}, \ldots, \tau_{j-1,K}^{**}, \tau_{j,K}^*, \tau_{j+1,K}^{**}, \ldots, \tau_{n,K}^{**})$. Звідси, для кожного $r_j > \theta_j$ та $K \le S^*$: $|\tau_{j,K}^* - \tau_{j,K}^{**}| = \frac{\theta_j}{l_j^*} \le \frac{r_j}{l_j(\alpha_K^{(j)})}$. Тоді для деякого $R^0 = R^0(\alpha_K^{(j)}) \in \mathbb{R}_+^n$, $\Theta \le R^0 \le R$, справджується

$$|F(\tau_K^{**})| \le \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right)\right\} \le$$

$$\le p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\} \le$$

$$\le p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \setminus G_{R'}(F), z \in \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}]\right\} \le$$

$$\le p_2 \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j})\}. \tag{6.59}$$

Для того, щоб вивести (6.59), ми неявно скористалися тим, що

$$\left(\mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \setminus G_{R'}(F)\right) \cap \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}] \ne \emptyset. \tag{6.60}$$

Умова (6.57) забезпечує справедливість (6.60). Дійсно, знайдемо нижню оцінку міри множини $\mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \cap \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}]$ та доведемо, що ця міра не менша ніж ліва частина нерівності (6.57).

Множина $\mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \cap \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}]$ є декартовим добутком таких дуг на колах: для кожного $m \in \{1, \ldots, n\}$, $m \neq j$ (див. рисунок 3)

$$\left\{z_m \in \mathbb{C}\colon\ |z_m - \tau_{m,K}^{**}| = \frac{r_m^0}{l_m(\alpha_K^{(j)})}\right\} \bigcap \left\{z_m \in \mathbb{C}\colon |z_m - z_m^0| \leq \rho_{m,k_m}\right\}$$

та для $m = j$ (див. рисунок 4)

$$\left\{z_j \in \mathbb{C}\colon\ |z_j - \tau_{j,K}^{*}| = \frac{r_j^0}{l_j(\alpha_K^{(j)})}\right\} \bigcap \left\{z_j \in \mathbb{C}\colon |z_j - z_j^0| \leq \rho_{j,k_j-1}\right\}.$$

Легко довести, що довжина дуги дорівнює

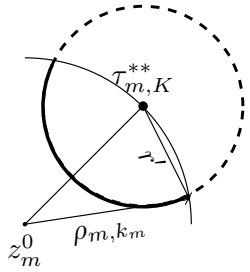

Рисунок 3 із $r' = \frac{r_m^0}{l_m(\alpha_K^{(j)})}$

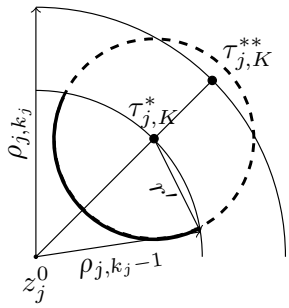

Рисунок 4 із $r' = \frac{r_j^0}{l_j(\alpha_K^{(j)})}$

$$\frac{2r_m^0}{l_m(\alpha_K^{(j)})} \cdot \arccos \frac{r_m^0}{2l_m(\alpha_K^{(j)})\rho_{m,k_m}} \text{ для } m \neq j, \tag{6.61}$$

$$\frac{2r_j^0}{l_j(\alpha_K^{(j)})} \cdot \arccos \frac{r_j^0}{2l_j(\alpha_K^{(j)})\rho_{j,k_j-1}} \text{ для } m = j. \tag{6.62}$$

Але при $m \neq j$ $\frac{r_m^0}{l_m(\alpha_K^{(j)})} \leq \rho_{m,k_m}$ та $\frac{r_j^0}{l_j(\alpha_K^{(j)})} \leq \rho_{j,k_j-1}$. Тоді аргумент в арккосинусі з (6.62) та (6.61) не перевищує $\frac{1}{2}$. Це означає, що довжина дуги не менша, ніж

$$\frac{2r_m^0}{l_m(\alpha_K^{(j)})} \arccos \frac{1}{2} \geq \frac{2\theta_m \pi}{3l_m(z^0)\lambda_{2,m}(2(R+\mathbf{1}))} \text{ для кожного } m \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

бо $\mathbf{L} \in Q^n$. Відповідно міра множини $\mathbb{T}^n\left(\alpha_K^{(j)}, \frac{R^0}{\mathbf{L}(\alpha_K^{(j)})}\right) \cap \mathbb{D}^n[z^0, \mathcal{R}_{K-\mathbf{1}_j}]$ на кістяку полікруга завжди не менша, ніж $\prod_{m=1}^n \frac{2\theta_m \pi}{3l_m(z^0)\lambda_{2,m}(2(R+\mathbf{1}))}$. Припускаючи строгу нерівність у (6.57), ми переконуємося, що нерівність (6.60) — правильна.

Застосовуючи нерівність (6.59) m_j раз за відповідною змінною z_j, отримуємо

$$\max\left\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R+\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0})\} \leq$$
$$\leq p_2 \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0-\mathbf{1}_n})\} \leq p_2^{m_n} \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0-m_n\mathbf{1}_n})\} \leq$$

$$\leq \ldots \leq p_2^{m_n+1} \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0-m_n\mathbf{1}_n-\mathbf{1}_{n-1}})\} \leq$$
$$\leq p_2^{m_n+m_{n-1}} \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{M_0-m_n\mathbf{1}_n-m_{n-1}\mathbf{1}_{n-1}})\} \leq \ldots$$
$$\leq p_2^{\|M_0\|} \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(z^0, \mathcal{R}_{\mathbf{0}})\} \leq p_2^{\|S^*\|} \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}.$$

За твердженням 6.3 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. $\square$

Позначимо $c(z', r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z'| = \frac{r}{l(z')}\}$. Для $n = 1$ з теореми 6.4 випливає такий наслідок.

Наслідок 6.2. *Нехай $l \in Q$, f — ціла функція. Якщо $\exists r > 0$, $\exists r' \geq 0$, $\exists p_2 \geq 1$ $\exists \theta \in (0, r)$, таке, що $\forall z^0 \in \mathbb{C}$ $\exists r^0 = r^0(z^0) \in [\theta; r]$, та* $\operatorname{meas}\left\{c(z^0, r^0) \cap G_{R'}(F)\right\} < \frac{2\pi\theta}{3l(z^0)\lambda_2(2r+2)}$ *і*

$$\max\left\{|f(z)|\colon z \in c(z^0, r^0)\right\} \leq p_2 \min\left\{|f(z)|\colon z \in c(z^0, r^0) \setminus G_{r'}(f)\right\},$$

то функція f має обмежений l-індекс (тут meas *означає міру Лебега на колі).*

У деякому розумінні цей наслідок є новим для цілих функцій від однієї змінної, бо коло $c(z^0, r^0)$ може містити нулі функції f. Разом з тим у відповідній теоремі з [108, 220] коло $c(z^0, r^0)$ вибиралося так, що $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in c(z^0, r^0)$.

6.3.3 Поводження частинних логарифмічних похідних.

Теорема 6.5. *Нехай $\mathbf{L} \in Q^n$. Якщо ціла функція F задовольняє такі умови:*

1) *для кожного $R > \mathbf{0}$ існує $p_1 = p_1(R) > 0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_R(F)$ та всіх $j \in \{1, \ldots, n\}$*
$$\frac{1}{|F(z)|}\left|\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq p_1 l_j(z), \tag{6.63}$$
2) *для кожного $R > \mathbf{0}$ та $R' \geq \mathbf{0}$ існує $p_2 = p_2(R, R') \geq 1$, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ таких, що $T^n(z^0, \frac{R}{\mathbb{L}(z^0)}) \setminus G_{R'}(F) = \bigcup_i C_i \neq \emptyset$, де C_i — зв'язні неперетинні множини, і виконується одна з трьох умов a)* $\max\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, *або b)* $\max\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, *або c)* $|F(z^*)| = \max_i \max_{z \in C_i} |F(z)|$, $|F(z^{**})| = \min_i \min_{z \in C_i} |F(z)|$, *та точки z^*, z^{**} належать до однієї і тієї множини C_{i_0}*
3) *для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, існують $\Theta, R' \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < \theta_j < \frac{2r_j}{2+3\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))}$, такі, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n$*
$$meas\left\{G_{R'}(F) \cap \mathbb{D}^n\left[z, R/\mathbf{L}(z)\right]\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j^2(z)}, \tag{6.64}$$

то F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних (тут meas є $2n$-вимірна міра Лебега).

Доведення. Нехай $z^0 \in \mathbb{C}^n$ — довільно вибрана точка. З огляду на теорему 6.4 нам потрібно довести, що

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \cap G_{R'}(F)\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j(z^0)}$$

для деякого $R^0 = R^0(z^0)$. Нехай $dS = ds_1 \cdot \ldots \cdot ds_n$, $S = (s_1, \ldots, s_n)$, ω_z — об'ємна міра в $\mathbb{R}^{2n}$. Зрозуміло, що (див. [177, с. 75-76])

$$\int_{\mathbb{D}^n[z^0,R]} u(z)d\omega_z = \int_0^{r_1} \ldots \int_0^{r_n} s_1 \ldots s_n \Big(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} u(z^0 + Se^{i\Theta})d\theta_1 \ldots d\theta_n\Big) ds_1 \ldots ds_n =$$
$$= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} u(z^0 + Se^{i\Theta})d(s_1\theta_1) \ldots d(s_n\theta_n)\right) dS,$$

де u — плюрісубгармонійна функція. Візьмемо $u(z) = \chi_F(z)$ — характеристична функція множини $G_{R'}(F)$ для функції F, а замість R беремо $R/\mathbf{L}(z^0)$. Звідси,

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right] \cap G_{R'}(F)\right\} = \int_{\mathbb{D}^n[z^0,R/\mathbf{L}(z^0)]} \chi_F(z)d\omega_z =$$
$$= \int_{\mathbf{0}}^{R/\mathbf{L}(z^0)} \int_{\mathbb{T}^n(z^0,S/\mathbf{L}(z^0))} \chi_F(z)d\mu_z dS = \int_{\mathbf{0}}^{R/\mathbf{L}(z^0)} \operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0,S) \cap G_{R'}(F)\right\} dS, \tag{6.65}$$

де μ_z — міра на кістяку полікруга в $\mathbb{C}^n$.

Поєднуючи (6.64) та (6.65), отримуємо

$$\int_{\mathbf{0}}^{R/\mathbf{L}(z^0)} \operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0,S) \cap G_{R'}(F)\right\} dS = \operatorname{meas}\left\{\mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right] \cap G_{R'}(F)\right\} <$$
$$< \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j^2(z^0)}. \tag{6.66}$$

Крім того, маємо, що

$$\int_{\mathbf{0}}^{\Theta/\mathbf{L}(z^0)} \operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0,S) \cap G_{R'}(F)\right\} dS = \operatorname{meas}\left\{\mathbb{D}^n\left[z^0, \frac{\Theta}{\mathbf{L}(z^0)}\right] \cap G_{R'}(F)\right\} \leq$$
$$\leq \pi^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j^2}{l_j^2(z^0)}.$$

Звідси, така різниця є додатною

$$\left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j^2(z^0)} - \int_0^{\Theta/\mathbf{L}(z^0)} \operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0,S) \cap G_{R'}(F)\right\} dS \geq$$
$$\geq \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j^2(z^0)} - \pi^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j^2}{l_j^2(z^0)} =$$

$$= \pi^n \prod_{j=1}^{n} \frac{\theta_j}{l_j^2(z^0)} \frac{2r_j - \theta_j(2 + 3\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1})))}{3\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))} > 0$$

бо $\theta_j < \frac{2r_j}{2+3\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))}$. З (6.66) випливає, що

$$\int_{\Theta/\mathbf{L}(z^0)}^{R/\mathbf{L}(z^0)} \operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0, S) \cap G_{R'}(F)\right\} dS <$$

$$< \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j^2(z^0)} - \int_0^{\Theta/\mathbf{L}(z^0)} \operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0, S) \cap G_{R'}(F)\right\} dS \leq$$

$$\leq \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j^2(z^0)}. \tag{6.67}$$

За теоремою про середнє значення існує $R^0 = R^0(z^0)$ з $r_j \in [\theta_j, r_j]$ таке, що

$$\int_{\Theta/\mathbf{L}(z^0)}^{R/\mathbf{L}(z^0)} \operatorname{meas}\{\mathbb{T}^n(z^0, S) \cap G_{R'}(F)\} dS = \operatorname{meas}\{\mathbb{T}^n(z^0, R^0/\mathbf{L}(z^0)) \cap G_{R'}(F)\} \prod_{j=1}^{n} \frac{r_j - \theta_j}{l_j(z^0)}.$$

Тому з (6.67) отримуємо бажану нерівність

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n(z^0, R^0/\mathbf{L}(z^0)) \cap G_{R'}(F)\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j(z^0)}.$$

Зрозуміло, що для кожної точки $z^0 \in \mathbb{C}^n$ маємо $\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \setminus Z_F = \bigcup_i C_i'$, де C_i' — зв'язні неперетинні множини, $C_i' \supset C_i$ та C_i визначені в умові 2). Нехай $z^* \in \mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$ — така, що $|F(z^*)| = \max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}$. Тоді знайдеться i_0, що $z^* \in C_{i_0}'$. Нехай $z^{**} \in C_{i_0} \subset C_{i_0}'$ така, що $|F(z^{**})| = \min_{z \in C_{i_0}} |F(z)|$. Точки z^* та z^{**} з'єднаємо кусково-аналітичною кривою $z = z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t))$, $t \in [0;1]$. Криву оберемо так, щоби $\int_0^1 |z_j'(t)| dt \leq \frac{2\pi r_j}{l_j(z^0)}$. Тоді, інтегруючи від z^* до z^{**}, отримуємо

$$\ln\left|\frac{F(z^*)}{F(z^{**})}\right| \leq \left|\ln\frac{F(z^*)}{F(z^{**})}\right| = \left|\int_{z^{**}}^{z^*} d\ln F(z)\right| = \left|\int_{z^{**}}^{z^*} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} dz_j\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{z^{**}}^{z^*} \sum_{j=1}^{n} p_1 l_j(z) |dz_j|\right| \leq \sum_{j=1}^{n} p_1 l_j(z^0) \lambda_{2,j}(R) \frac{2\pi r_j}{l_j(z_0)} = 2p_1\pi \sum_{j=1}^{n} r_j \lambda_{2,j}(R).$$

Звідси,

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} = |F(z^*)| \leq \exp\{\pi^n p_1 R^J \Lambda_2^J(R)\} |F(z^{**})| =$$

$$= \exp\{\pi^n p_1 R^J \Lambda_2^J(R)\} \min_{z \in C_{i_0}} |F(z)| \leq \exp\{\pi^n p_1 R^J \Lambda_2^J(R)\} p_2 \min_i \min_{z \in C_i} |F(z)| =$$

$$= \exp\{\pi^n p_1 R^J \Lambda_2^J(R)\} p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\}.$$

За теоремою 6.4 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. $\square$

Для $n = 1$ з теореми 6.5 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 6.3. *Нехай $l \in Q$, f — ціла в $\mathbb{C}$ функція, $n(r, z^0, f)$ — число нулів функції f у крузі $|z - z_0| \le \frac{r}{l(z^0)}$. Якщо функція f задовольняє такі умови:*

1) *для кожного $r > 0$ існує $p_1 = p_1(r) > 0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus G_r(f)$*
$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le p_1 l(z),$$
2) *для кожного $r > 0$ та $r' \ge 0$ існує $p_2 = p_2(r, r') \ge 1$, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}$ таких, що $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - z^0| = \frac{r}{l(z^0)}\} \setminus G_{r'}(f) = \bigcup_i C_i \ne \emptyset$, де C_i — зв'язні неперетинні множини, та виконується одна з трьох умов a) $\max\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |f(z)| \le p_2 \min\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |f(z)|$, або b) $\max\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |f(z)| \le p_2 \min\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |f(z)|$, або c) $|f(z^*)| = \max_i \max_{z \in C_i} |f(z)|$, $|f(z^{**})| = \min_i \min_{z \in C_i} |f(z)|$, та точки z^*, z^{**} належать до однієї і тієї множини C_{i_0}*
3) *для кожного $r > 0$ існує $n^*(r) > 0$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}$ $n(r, z^0, f) \le n^*(r)$,*

то функція f має обмежений l-індекс.

Відомо (див. [104, 206, 220]), що в одновимірному випадку умови 1) та 3) наслідку 6.3 є необхідними та достатніми для обмеженості l-індексу та індексу. Тобто, умова 2) є зайвою в цьому випадку. Але для $\mathbb{C}^n$ $(n \ge 2)$ вона необхідна тому, що $\mathbb{D}^n[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}] \setminus G_{R'}(F)$ є многозв'язною областю у випадку, коли $\mathbb{D}^n[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}]$ містить нулі функції F.

Нам потрібні деякі позначення з розділу 5. Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ заданий напрямок. Для заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ позначимо $g_{z^0}(t) := F(z^0 + t\mathbf{b})$. Якщо $g_{z^0}(t) \ne 0$ для всіх $t \in \mathbb{C}$, то $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \emptyset$; якщо $g_{z^0}(t) \equiv 0$, то $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \{z^0 + t\mathbf{b}\colon t \in \mathbb{C}\}$. А коли $g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ та a_k^0 — нулі функції $g_{z^0}(t)$, тоді $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \cup_k\{z^0 + t\mathbf{b}\colon |t - a_k^0| \le \frac{r}{L(z^0 + a_k^0\mathbf{b})}\}$, $r > 0$. Нехай $G_r^{\mathbf{b}}(F) = \bigcup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0)$.

Зауваження 6.7. *У теоремі 6.3 отримано достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, які подібні до теореми 6.5. Зокрема, припускали справедливість нерівності* (6.63) *для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_j}^{\mathbf{1}_j}(F)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Проте $G_{r_j}^{\mathbf{1}_j}(F) \subset G_R(F)$, де $R = (r_1, \ldots, r_n)$. Отже, умова 1) в теоремі 6.5 слабша, ніж відповідне припущення в теоремі 6.3.*

6.4 Аналог теореми Хеймана та її застосування до систем рівнянь з частинними похідними та композицій цілих функцій

6.4.1 Аналог теореми Хеймана для цілих функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

Теорема 6.6. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують числа* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $c \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n$ *справджується нерівність*

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : \ \|J\| = p+1\right\} \le c \cdot \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \ \|K\| \le p\right\}. \qquad (6.68)$$

Доведення. Необхідність випливає з означення обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних цілої функції при $p = N(F, \mathbf{L})$ та $c = ((N(F, \mathbf{L}) + 1)!)^n$.

Доведемо достатність. Для $F \equiv 0$ твердження теореми очевидне, тому вважаємо надалі, що $F \not\equiv 0$. Нехай (6.68) виконується, $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{D}^n[z^0, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)}]$. Для всіх $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|J\| \le p+1$, маємо

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z^0)} \le \Lambda_2^J(\mathbf{2})\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} \le c \cdot \Lambda_2^J(\mathbf{2}) \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \ \|K\| \le p\right\} \le$$

$$\le c \cdot \Lambda_2^J(\mathbf{2}) \max\left\{\Lambda_1^{-K}(2)\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le p\right\} \le BG(z), \qquad (6.69)$$

де $B = c \cdot \max\{\Lambda_2^K(\mathbf{2}) : \ \|K\| = p+1\} \max\{\Lambda_1^{-K}(\mathbf{2}) : \ \|K\| \le p\}$, та $G(z) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \ \|K\| \le p\right\}$. Виберемо точки $z^{(1)} = (z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)}) \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{1}}{2\mathbf{L}(z^0)})$ та $z^{(2)} = (z_1^{(2)}, \ldots, z_n^{(2)}) \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)})$ так, щоб $F(z^{(1)}) \ne 0$ та $|F(z^{(2)})| = M\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, f\right) \ne 0$. Такі точки можна вибрати, бо в протилежному випадку рівність нулю функції на кістяку полікруга $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{1}}{2\mathbf{L}(z^0)})$ чи $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)})$ за теоремою єдиності означає рівність нулю цієї ж функції у всіх точках з $\mathbb{C}^n$. Побудуємо площину

$$\alpha = \begin{cases} z_2 = k_2 z_1 + c_2, \\ z_3 = k_3 z_1 + c_3, \\ \qquad\qquad \ldots \\ z_n = k_n z_1 + c_n, \end{cases}$$

де $k_i = \frac{z_i^{(2)} - z_i^{(1)}}{z_1^{(2)} - z_1^{(1)}}$, $c_i = \frac{z_i^{(1)} z_1^{(2)} - z_i^{(2)} z_1^{(1)}}{z_1^{(2)} - z_1^{(1)}}$, $i = 2, \ldots, n$. Елементарно перевіряємо, що точки $z^{(1)} \in \alpha$ та $z^{(2)} \in \alpha$.

Нехай $\tilde{G}(z_1) = G(z)\big|_\alpha$ — звуження функції G на площину α. Позаяк для кожного $K \in \mathbb{Z}_+^n$ функція $F^{(K)}(z)\big|_\alpha$ є цілою функцією та $\tilde{G}(z_1^{(1)}) = G(z^{(1)})\big|_\alpha \ne 0$ через вибір точки $z^{(1)}$, то всі нулі функції $F^{(K)}(z)\big|_\alpha$ як функції однієї змінної $z^{(1)}$ ізольовані. Тому ізольованими є всі нулі функції $\tilde{G}(z_1)$. Отже, на площині α можна вибрати кусково-аналітичну криву γ, задану так:

$$z = z(t) = (z_1(t), k_2 z_1(t) + c_2, \ldots, k_n z_1(t) + c_n), \ t \in [0, 1],$$

яка з'єднує точки $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ та на якій $G(z(t)) \neq 0$ і $\int_0^1 |z_1'(t)|dt \leq \frac{4}{l_1(z_1^0)}$. Для побудови такої кривої через $z_1^{(1)}$ та $z_1^{(2)}$ проведемо пряму $z_1^*(t) = (z_1^{(2)} - z_1^{(1)})t + z_1^{(1)}$, $t \in [0,1]$. Вона може пройти через точки z_1, в яких $G(z_1) = 0$. Їхнє число $m = m(z_1^{(1)}, z_1^{(2)})$ буде скінченним. Нехай $(z_{1,k}^*)$ — послідовність цих точок, упорядкована за зростанням значення $|z_1^{(1)} - z_{1,k}^*|$, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Виберемо досить мале $r < \min\limits_{1 \leq k \leq m-1} \{|z_{1,k}^* - z_{1,k+1}^*|, |z_{1,1}^* - z_1^{(1)}|, |z_{1,m}^* - z_1^{(2)}|, \frac{3}{2\pi l_1(z^0)}\}$. Навколо кожної точки $z_{1,k}^*$ будуємо коло з центром у ній з деяким радіусом $r_k' < \frac{r}{2^k}$ таким, що $\tilde{G}(z_1) \neq 0$ для всіх z_1, які розміщені на дузі цього кола. Це здійсненно, бо $F \not\equiv 0$. Кожне таке коло прямою $z_1^*(t)$ розбивається на два півкола. Шукана кусково-аналітична крива $z_1(t)$ складається з дуг побудованих півкіл та відрізків прямої $z_1^*(t)$, які послідовно з'єднують їх між собою чи з точками $z_1^{(1)}$, $z_1^{(2)}$. Довжина кривої $z_1(t)$ у $\mathbb{C}$ (а не $z(t)$ у $\mathbb{C}^n$!) менша за $\frac{2}{l1(z^0)} + \frac{1}{2l(z^0)} + \pi r < \frac{4}{l_1(z_1^0)}$. Тоді,

$$\int_0^1 |z_s'(t)|dt = |k_s| \int_0^1 |z_1'(t)|dt \leq \frac{|z_s^{(2)} - z_s^{(1)}|}{|z_1^{(2)} - z_1^{(1)}|} \frac{4}{l_1(z^0)} \leq$$
$$\leq \frac{2.5}{l_s(z^0)} \frac{l_1(z^0)}{1.5} \frac{4}{l_1(z^0)} \leq \frac{8}{l_s(z^0)}, \ s \in \{2, \ldots, n\}.$$

Помножимо останню нерівність на $l_s(z^0)$ та підсумуємо по s

$$\int_0^1 \sum_{s=1}^n l_s(z^0)|z_s'(t)|dt \leq 8n. \tag{6.70}$$

Оскільки функція $z = z(t)$ кусково-аналітична на $[0,1]$, то на кожному її інтервалі аналітичності для будь-яких $K \in \mathbb{Z}_+^n$, $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K\| \leq p$, $\|J\| \leq p$, $K \neq J$, або

$$\frac{|F^{(K)}(z(t))|}{\mathbf{L}^K(z^0)} \equiv \frac{|F(J)(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}, \tag{6.71}$$

або рівність

$$\frac{|F^{(K)}(z(t))|}{\mathbf{L}^K(z^0)} = \frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)} \tag{6.72}$$

виконується лише для скінченної множини точок $t = t_k \in [0,1]$.

Тоді для функції $G(z(t))$ як максимуму таких виразів $\frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}$ по всіх $\|J\| \leq p$ можливі два випадки:

1) $G(z(t))$ на деякому проміжку аналітичності кривої γ тотожно дорівнює одночасно декільком частинним похідним, тобто, справджується (6.71) і, відповідно, $G(z(t)) \equiv \frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}$ для деякого J, $\|J\| \leq p$. Зрозуміло, що $F^{(J)}(z(t))$ – аналітична функція, а $|F^{(J)}(z(t))|$ - неперервно диференційовна на згаданому проміжку аналітичності за винятком точок, у яких $F^{(J)}(z(t)) = 0$. Проте таких точок нема, бо в протилежному випадку й $G(z(t)) = 0$, а це суперечить вибору кривої γ.

2) $G(z(t))$ на деякому проміжку аналітичності кривої у скінченному числі точок одночасно дорівнює декільком частинним похідним, тобто, справджується (6.72). У цьому випадку вказані точки t_k розіб'ють інтервал аналітичності на скінченне число відрізків, на кожному з яких $G(z(t))$ дорівнює одній з похідних, тобто, $G(z(t)) \equiv \frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}$ для деякого J, $\|J\| \le p$. Також на кожному з таких проміжків на основі тих самих міркувань, що й у попередньому випадку, $|F^{(J)}(z(t))|$, а, отже, і $G(z(t))$ неперервно диференційовна функція за винятком точок t_k.

Беручи до уваги (6.69) та нерівність $\frac{d}{dt}|f(t)| \le |\frac{df(t)}{dt}|$, ми маємо

$$\frac{d}{dt}G(z(t)) \le \max\Big\{\frac{1}{\mathbf{L}^J(z^0)}\Big|\frac{d}{dt}F^{(J)}(z(t))\Big| : \ \|J\| \le p\Big\} \le$$

$$\le \max\Big\{\sum_{s=1}^{n}\Big|\frac{\partial^{\|J\|+1}F}{\partial z_1^{j_1}\dots\partial z_s^{j_s+1}\dots\partial z_n^{j_n}}(z(t))\Big|\frac{|z_s'(t)|}{\mathbf{L}^j(z^0)} : \ \|J\| \le p\Big\} \le$$

$$\le \max\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{\partial^{\|J\|+1}F}{\partial z_1^{j_1}\dots\partial z_s^{j_s+1}\dots\partial z_n^{j_n}}(z(t))\Big|\frac{l_s(z^0)|z_s'(t)|}{l_1^{j_1}(z^0)\dots l_s^{j_1+1}(z^0)\dots l_n^{j_n}(z^0)} :$$

$$\|J\| \le p\Big\} \le \Big(\sum_{i=1}^{n} l_s(z^0)|z_s'(t)|\Big)\max\Big\{\frac{|F^{(j)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)} : \ \|J\| \le p+1\Big\} \le$$

$$\le \Big(\sum_{i=1}^{n} l_s(z^0)|z_s'(t)|\Big)BG(z(t)).$$

Враховуючи (6.70), одержуємо

$$\Big|\ln\frac{G(z^{(2)})}{G(z^{(1)})}\Big| = \Big|\int_0^1 \frac{1}{G(z(t))}\frac{d}{dt}G(z(t))dt\Big| \le B\int_0^1 \sum_{s=1}^{n} l_s(z^0)|z_s'(t)|dt \le 8nB.$$

З огляду на вибір точки $z^{(2)}$ маємо $M(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F) \le G(z^{(2)}) \le G(z^{(1)})e^{8nB}$. Але $z^{(1)} \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2L}(z^0)})$, тому для всіх $J \in \mathbb{Z}_+^n$ справджується нерівність Коші

$$\frac{|F^{(J)}(z^{(1)})|}{\mathbf{L}^J(z^0)} \le J!(\mathbf{2})^J M\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2L}(z^0)}, z^0, F\right).$$

Тому при $\|J\| \le p$ отримуємо $G(z^{(1)}) \le (p!2^p)^n M\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2L}(z^0)}, z^0, F\right)$,

$$M\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right) \le (p!2^p e^{8nB})^n M\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2L}(z^0)}, z^0, F\right)$$

і за теоремою 3.3 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Наступна теорема є новою навіть для цілих функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних, хоча при $n = 1$ цей результат відомий (див. [206]), а коли до того ще й $l \equiv 1$, то відомий з праці [108].

Твердження 6.12. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *є функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують* $c \in (0; +\infty)$ *та* $N \in \mathbb{N}$ *такі, що для кожного* $z \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{\|K\|=0}^{N} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \geq c \sum_{\|K\|=N+1}^{\infty} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}. \tag{6.73}$$

Доведення. Нехай $0 < \theta_j < 1$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Якщо F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, то за лемою 6.4 функція F має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних $N(F, \widetilde{\mathbf{L}}) = \widetilde{N} < +\infty$, де $\widetilde{\mathbf{L}} = (\widetilde{l}_1(z), \ldots, \widetilde{l}_2(z))$, $\widetilde{l}_j(z) = \theta_j l_j(z)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тому

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} = \max\left\{\frac{\Theta^K|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{\mathbf{L}}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} \geq$$

$$\geq \prod_{i=s}^{n} \theta_s^{\widetilde{N}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{\mathbf{L}}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} \geq \prod_{i=1}^{n} \theta_s^{\widetilde{N}} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\widetilde{L}^J(z)} = \prod_{i=1}^{n} \theta_s^{\widetilde{N}-j_s} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}$$

для всіх $J \geq \mathbf{0}$ та

$$\sum_{\|J\|=\widetilde{N}+1}^{\infty} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^j(z)} \leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} \sum_{\|J\|=\widetilde{N}+1}^{\infty} \theta_s^{j_s-\widetilde{N}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_s}{1-\theta_s} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_s}{1-\theta_s} \sum_{\|K\|=0}^{\widetilde{N}} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}.$$

Звідси, ми отримуємо (6.73) з $N = \widetilde{N}$ та $c = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_s}{1-\theta_s}$. Навпаки, з нерівності (6.73) випливає

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\colon \|J\| = N+1\right\} \leq \sum_{\|K\|=N+1}^{\infty} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \leq \frac{1}{c} \sum_{\|K\|=0}^{N} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c} \sum_{i=0}^{N} C_{n+i-1}^{i} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq N\right\}$$

і за теоремою 6.6 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

6.4.2 Допоміжні твердження для оцінки зростання розв'язків систем РЧП.

В. К. Хейман [128] довів, що якщо $f(z)$ — аналітична в $|z| < 2p$, де вона задовольняє нерівність

$$|f^{(p)}(z)| \leq \max_{0 \leq \nu \leq p-1} |f^{(\nu)}(z)|, \tag{6.74}$$

то $f(z)$ не може мати більше, ніж $(p-1)$ нуль в in $|z| < \frac{\sqrt{p}}{e\sqrt{20}}$. К. І. Рахман, Я. Станкєвіч, В. Сінґ та Р. М. Ґоел [176,222] покращили цей результат та збільшили значення $\frac{\sqrt{p}}{e\sqrt{20}}$.

З іншої сторони, ціла функція f називається функцією обмеженого індексу [156], якщо існує невід'ємне ціле число p_0 таке, що $\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!} \le \max\limits_{0\le j\le p_0} \frac{|f^{(j)}(z)|}{j!}$ для всіх $z \in \mathbb{C}$ та для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$. Для того, щоб ціла функція f була обмеженого [128] необхідно і досить, щоб нерівність (6.74) виконувалася для всіх $z \in \mathbb{C}$.

Ця необхідна та достатня умова та її узагальнення для різних класів аналітичних функцій [219, 264, 274] відомі як теорема Хеймана в теорії функцій обмеженого індексу. Цей критерій дуже зручний [55, 67] для дослідження обмеженості індексу цілих розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Функції з цього класу мають добрі властивості: свої точні оцінки зростання, рівномірний у деякому сенсі розподіл нулів, певне регулярне поводження розв'язків, тощо.

Існує два підходи до введення та вивчення обмеженості індексу в $\mathbb{C}^n$. Перший підхід використовує *функцію зрізки* $g_{z_0}(t) := F(z^0 + t\mathbf{b})$, $t \in \mathbb{C}$, де $z^0 \in \mathbb{C}^n$ — довільна фіксована точка, $n \ge 2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — заданий напрямок у $\mathbb{C}^n$, $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — ціла функція. Застосовуючи функцію зрізки та похідну за напрямком, можна розглядати функції обмеженого L-індексу за напрямком. Для такого підходу отримано достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком цілих розв'язків деяких лінійних рівнянь з частинними похідними [55,254]. Другий підхід базується на частинних похідних. Вони є основою для поняття цілої функції обмеженого індексу за сукупністю змінних.

Вийшло багато праць [77, 79, 80, 167, 168, 188, 260, 264], присвячених цьому класу цілих функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних. Але лінійні системи рівнянь з частинними похідними вищих порядків розглянуті лише у двох дисертаціях [187, 261]. Зокрема, вивчалася така система в [261]

$$a_j(z)f^{(K_j^0)}(z) + \sum\nolimits_{\|K\|\le s-1} g_{K,j}(z)f^{(K)}(z) = h_j(z),\ j \in \{1,\dots,m\} \tag{6.75}$$

де для всіх $j \in \{1,\dots,m\}$ $\|K_j^0\| = s$, $\{f^{(K_j^0)}(z) : j = 1,\dots,m\}$ — множина усіх можливих частинних похідних порядку s функції f, цілі функції a_j, $g_{K,j}$, h_j є функціями з відокремленими змінними вигляду

$$g(z) = \prod_{j=1}^{n} g_j(z_j). \tag{6.76}$$

Там отримано умови, які забезпечують обмеженість $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для кожного цілого розв'язку, де $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|),\dots,l_n(|z_n|))$ та кожна ціла функція $l_j : \mathbb{R}_+ \to R_+$ є неперервними. Обмеження (6.76) — дуже сильне. Раніше М. Салмассі [187] довів, що кожний цілий розв'язок системи

$$\begin{cases} a_0 f^{(n_1,0)}(z) + a_1 f^{(n_1-1,0)}(z) + \ldots + a_{n_1} f(z) = g(z),\ a_0 \ne 0, \\ b_0 f^{(0,n_2)}(z) + b_2 f^{(0,n_2-1)}(z) + \ldots + b_{n_2} f(z) = h(z),\ b_0 \ne 0, \end{cases} \quad z = (z_1, z_2), \tag{6.77}$$

є функцією обмеженого індексу за сукупністю змінних, де $a_j \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$, $h(z)$ та $g(z)$ — довільні цілі функції в $\mathbb{C}^2$ обмеженого індексу за сукупністю змінних. На відміну від [261], він не припускав, що $h(z)$ та $g(z)$ є функціями з відокремленими змінними. Отже, виникає таке природне **питання**: *чи можна вивести достатні умови обмеженості* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних для цілих розв'язків систем лінійних рівнянь з частинними похідними вищих порядків без припущення* (6.76)*?*

Тут дається ствердна відповідь на поставлене питання для системи (6.88), яка загальніша, ніж (6.77). Теореми 6.7–6.14 є узагальненнями результатів Салмассі у двох напрямках:
— відсутнє припущення, що коефіцієнти в системі (6.88) є сталими;
— розглядається система, що також може містити мішані частинні похідні.

Теореми 6.7 - 6.14 також є покращеними аналогами результатів з [261] для системи (6.88) у трьох напрямках:
— відсутнє припущення, що коефіцієнти у (6.88) є функціями з відокремленими змінними;
— функція $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ має загальніший вигляд, ніж $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$, де $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$;
— отримано точні, в загальному, не покращувані оцінки зростання цілих розв'язків системи. Зазначимо, що оцінки зростання взагалі не обговорювалися в [187, 261].

У підрозділі 6.7 доведено, що якщо F є цілою функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних $N(F, L)$ та функція $\mathbf{L}$ задовольняє деяким додатковим припущенням, то

$$\varlimsup_{|R|\to+\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}\left(\tau R e^{i\Theta}\right)\rangle d\tau} \le N(F, L) + 1.$$

Отже, тут оцінюється зростання подібного дробу через деякі сталі. Причому використовуються методи з попередніх підрозділів для дослідження цілих розв'язків системи (6.88).

Через $\overline{G}$ позначимо замикання області $G \subset \mathbb{C}^n$. Кожна ціла функція $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з довільною неперервною функцією $\mathbf{L}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ в будь-якій обмеженій області $G \subset \mathbb{C}^n$. Це становить суть такого твердження.

Лема 6.6. *Нехай $F(z)$ — ціла функція, G — обмежена область в $\mathbb{C}^n$. Якщо $L\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція та $F(z)$ — ціла функція, то існує $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z \in \overline{G}$ та $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$*

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon\ K \in \mathbb{Z}_+^n,\ \|K\| \le m\right\}. \tag{6.78}$$

Доведення. Якщо $F(z) \equiv 0$, то (6.78) — очевидна. Нехай $F(z) \not\equiv 0$. Для кожного фіксованого $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!}$ — модуль коефіцієнта степеневого розвинення функції $F(z)$, $z \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{1}}{L(z^0)})$ в околі точки z^0. Позаяк $F(z)$ — ціла, $\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)} \to 0$ при $\|J\| \to \infty$ для кожного $z^0 \in G$, тобто, існує $m_0 = m(z^0)$, для якого справджується нерівність (6.78).

Припустимо від супротивного, що множина значень m_0 не є рівномірно обмеженою по z^0, тобто, $\sup\limits_{z^0 \in G} m_0 = +\infty$. Звідси, для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ існують $z^m \in \overline{G}$ та $J^m \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J^m)}(z^m)|}{J^m!\mathbf{L}^{J^m}(z^m)} > \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^m)|}{K!\mathbf{L}^K(z^m)} : \ K \in \mathbb{Z}_+^n, \ \|K\| \le m\right\}. \tag{6.79}$$

Оскільки $z^m \in \overline{G}$, то знайдеться підпослідовність $z'^m \to z' \in \overline{G}$ при $m \to +\infty$. За інтегральною формулою Коші для будь-якого $J \in \mathbb{Z}_+^n$ маємо $\frac{F^{(J)}(z^0)}{J!} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n(z^0,R)} \frac{F(z)}{(z-z^0)^{J+\mathbf{1}}} dz$. Запишемо (6.79) у вигляді

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^m)|}{K!\mathbf{L}^K(z^m)} : \ K \in \mathbb{Z}_+^n, \ \|K\| \le m\right\} \le$$
$$\le \frac{1}{(2\pi)^n \mathbf{L}^{J^m}(z^m)} \int_{\mathbb{T}^n(z^0, R/L(z^m))} \frac{|F(z)|}{|z-z^m|^{J^m+\mathbf{1}}} |dz| \le \frac{1}{R^{J^m}} \max\{|F(z)| : z \in G_R\}, \tag{6.80}$$

де $G_R = \bigcup_{z^* \in \overline{G}} \mathbb{D}^n[z^*, R/\mathbf{L}(z^*)]$, $R = (r_1, \ldots, r_n) > \mathbf{0}$. Виберемо $R > \mathbf{1}$. Перейшовши до границі в (6.80) при $m \to \infty$, встановимо

$$(\forall K \in \mathbb{Z}_+^n): \quad \frac{|F^{(K)}(z')|}{K!\mathbf{L}^K(z')} \le \lim_{m \to \infty} \frac{1}{R^{J^m}} \max\{|F(z)| : z \in G_R\} = 0.$$

при $m \to +\infty$. Отже, усі частинні похідні функції F в точці z' дорівнюють 0. За теоремою єдиності, $F(z) \equiv 0$. А це неможливо. □

Зауваження 6.8. Твердження, подібне до леми 6.6, також виконується для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{0}$. Щоправда, нагадаємо, що воно справедливе за додаткового припущення $(\forall z \in \overline{G}) : g_z(t) := F(z + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$, $t \in \mathbb{C}$ (див. лему 5.1).

Використовуючи теорему 6.6 та лему 6.6, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 6.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$, F *— ціла функція,* G *— обмежена область у* $\mathbb{C}^n$. *Функція* F *є обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існує* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $c > 0$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \setminus G$ *виконується нерівність* (6.68).

Позначимо $a^+ = \max\{a, 0\}$, $A^+ = (a_1^+, \ldots, a_n^+)$, де $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^n$.

Нехай $\mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ — додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною r_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$, $R = (r_1, \ldots, r_n) > \mathbf{0}$.

Через QW^n позначимо клас функцій $\mathbf{L} \in Q^n$ таких, що

$$\left\langle \frac{\mathbf{1}}{R}, \left(\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(tRe^{i\Theta})} \bigg|_{t=1} \right)^+ \right\rangle \to 0 \quad (|R| \to +\infty, R \geq R_0 > \mathbf{0}),$$

рівномірно по $\Theta \in [0, 2\pi]^n$. Для спрощення запишемо $QW := QW^1$.

Нехай $\mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(R)$ при $r_k = |z_k|$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $R = (r_1, \ldots, r_n) > \mathbf{0}$. Будь-яка неперервна додатна вектор-функція $\mathbf{L}(R)$, яка неспадна за кожною змінною r_k, належить до класу QW^n. Зокрема, многочлен $\mathbf{L}(R) = \sum_{\|J\| \leq p} a_J R^J$ та експонента $\mathbf{L}(R) = \exp\left(\sum_{\|J\| \leq p} a_J R^J \right)$ належать до того класу при $a_J \in \mathbb{R}^n_+$. Функція $\mathbf{L}(R) = (\frac{1}{\ln r_1}, \ldots, \frac{1}{\ln r_n})$ $(r_j > 1)$ не зростає за кожною змінною і також належить до цього класу QW^n.

Лема 6.7. *Нехай* $\mathbf{L} \in QW^n$, F *— ціла функція. Якщо існують* $R' \in \mathbb{R}^n_+$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $c > 0$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R')$ *виконується нерівність* (6.68), *то*

$$\varlimsup_{|R| \to \infty} \frac{\ln \max\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta \in [0, 2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R e^{i\Theta}) \rangle d\tau} \leq \max\{1, c\}. \tag{6.81}$$

Доведення. Нехай $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $R > R'$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$. Позначимо $r^* = \max_{1 \leq j \leq n} r_j$, $\alpha_j = \frac{r_j}{r^*}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ та $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Розглянемо функцію

$$g(t) = \max\left\{ \frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \colon \ \|S\| \leq p \right\}, \tag{6.82}$$

де $Ate^{i\Theta} = (\alpha_1 te^{i\theta_1}, \ldots, \alpha_n te^{i\theta_n})$ та $|At| > |R'|$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Оскільки функція $\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}$ неперервно диференційовна за дійсною змінною $t \in [0, +\infty)$, зовні нульової множини функції $|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|$, відповідна функція $g(t)$ також неперервно диференційовна функція на $[0, +\infty)$ за винятком, можливо, зліченної множини точок.

Позначимо $u_j(t) = u_j(t, R, \Theta) = l_j(\frac{tR}{r^*} e^{i\Theta})$, де $t \in \mathbb{R}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Нехай функція $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ — додатна неперервно диференційовна за кожною змінною r_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$. Легко перевірити, що $\mathbf{L} \in QW^n$ за умови

$$r^*(-(u_j(t, R, \Theta))'_{t=r^*})^+ / (r_j l_j^2(Re^{i\Theta})) \to 0 \tag{6.83}$$

рівномірно по $\Theta \in [0, 2\pi]^n$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ при $|R| \to \infty$, $R \geq R_0 > \mathbf{0}$.

Отже, використовуючи нерівність $\frac{d}{dr}|g(r)| \leq |g'(r)|$, яка виконується скрізь, крім точок $r = t$, в яких $g(t) = 0$, встановлюємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \right) = \frac{1}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \frac{d}{dt} |F^{(S)}(Ate^{i\Theta})| + |F^{(S)}(Ate^{i\Theta})| \frac{d}{dt} \frac{1}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \left| \sum_{j=1}^n F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta}) \alpha_j e^{i\theta_j} \right| - \frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \sum_{j=1}^n \frac{s_j u'_j(t)}{l_j(Ate^{i\Theta})} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})} \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta}) + \frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^{S}(Ate^{i\Theta})} \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})} \ . \qquad (6.84)$$

Для абсолютно неперервних функцій h_1, h_2, …, h_k та $h(x) := \max\{h_j(z) : 1 \leq j \leq k\}$, $h'(x) \leq \max\{h_j'(x) : 1 \leq j \leq k\}$, $x \in [a, b]$ (див. [206, лема 4.1, с. 81]). Функція g — абсолютна неперервна, тому з (6.68) та (6.84) випливає, що

$$g'(t) \leq \max\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^{S}(Ate^{i\Theta})}\right) : \|S\| \leq p\right\} \leq$$

$$\leq \max_{\|S\|\leq p}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})} + \frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{\mathbf{L}^{S}(Ate^{i\Theta})} \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\} \leq$$

$$\leq g(t)\Big(\max\{1, c\} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta}) + \max_{\|S\|\leq p}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}\Big) =$$

$$= g(t)(\beta(t) + \gamma(t)),$$

де $\beta(t) = \max\{1, c\} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta}), \gamma(t) = \max_{\|S\|\leq p}\Big\{\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\Big\}$. Отже, $\frac{d}{dt}\ln g(t) \leq \beta(t) + \gamma(t)$ і $g(t) \leq g(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}(\beta(\tau) + \gamma(\tau))d\tau$, де t_0 — вибране так, що $g(t_0) \neq 0$. Умова $\mathbf{L} \in W^n$ дає

$$\frac{\gamma(t)}{\beta(t)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}}{\max\{1, c\}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})} \leq p \sum_{j=1}^{n} \frac{(-u_j'(t))^+}{\alpha_j l_j^2(Ate^{i\Theta})} \leq p\varepsilon,$$

де $\varepsilon = \varepsilon(R) \to 0$ рівномірно по $\Theta \in [0, 2\pi]^n$, $t = r^*$ при $|R| \to \infty$.

Але $|F(Ate^{i\Theta})| \leq g(t) \leq g(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}(\beta(\tau) + \gamma(\tau))d\tau$ та $r^*A = R$. Покладемо $t = r^*$ і дістанемо

$$\ln\max\{|F(z)\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\} = \ln \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} |F(Re^{i\Theta})| \leq \ln \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} g(r^*) \leq$$

$$\leq \ln g(t_0) + \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_{t_0}^{r^*} (\beta(\tau) + \gamma(\tau))d\tau \leq$$

$$\leq \ln g(t_0) + \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_{t_0}^{r^*} \max\{1, c\} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j(A\tau e^{i\Theta})\,(1 + p\varepsilon)\,d\tau =$$

$$= \ln g(t_0) + \max\{1, c\} \max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_{t_0}^{r^*} \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{r^*} l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right)(1 + p\varepsilon)\,d\tau.$$

Звідси випливає (6.81). □

Лема 6.8. *Нехай* $\mathbf{L} \in QW^n$, F *— ціла функція. Якщо існують* $R' \in \mathbb{R}_+^n$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $c > 0$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R')$ *справджується нерівність*

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} :\ \|J\| = p + 1\right\} \leq c \cdot \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} :\ \|K\| \leq p\right\}, \qquad (6.85)$$

то

$$\varlimsup_{|R|\to\infty} \frac{\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau} \le (p+1)\max\{1,c\}. \tag{6.86}$$

Доведення. Доведення леми 6.8 подібне до доведення леми 6.7.

Нехай $R=(r_1,\dots,r_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, $R>R'$, $\Theta\in[0,2\pi]^n$. Як і у доведенні леми 6.7, позначимо $r^*=\max_{1\le j\le n} r_j$, $\alpha_j=\frac{r_j}{r^*}$, $j\in\{1,\dots,n\}$ та $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Розглянемо функцію

$$g(t)=\max\left\{\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}:\ \|S\|\le p\right\},$$

де $Ate^{i\Theta}=(\alpha_1te^{i\theta_1},\dots,\alpha_nte^{i\theta_n})$, $|At|>|R'|$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Як і вище, функція $\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}$ — неперервно диференційовна по дійсній змінній $t\in[0,+\infty)$ зовні нульової множини функції $|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|$, функція $g(t)$ — неперервно диференційовна на $[0,+\infty)$ за винятком, можливо, зліченної множини точок.

Тому, застосовуючи нерівність $\frac{d}{dr}|g(r)|\le|g'(r)|$, яка виконується скрізь, крім точок $r=t$, в яких $g(t)=0$, дістаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\right)=\frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\frac{d}{dt}|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|+$$
$$+|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|\frac{d}{dt}\frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\le\frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\left|\sum_{j=1}^n F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})\alpha_je^{i\theta_j}\right|-$$
$$-\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^n\frac{s_ju_j'(t)}{l_j(Ate^{i\Theta})}\le\sum_{j=1}^n\frac{|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{(S+\mathbf{1}_j)!\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})}\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})+$$
$$+\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^n\frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\ . \tag{6.87}$$

Для абсолютно неперервних функцій h_1, h_2, …, h_k та $h(x):=\max\{h_j(z):1\le j\le k\}$, $h'(x)\le\max\{h_j'(x):1\le j\le k\}$, $x\in[a,b]$ (див. [206, лема 4.1, с. 81]). Функція g — абсолютно неперервна. Отже, з (6.68) та (6.87) випливає

$$g'(t)\le\max\left\{\frac{d}{dt}\Big(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\Big):\|S\|\le N\right\}\le$$
$$\le\max_{\|S\|\le p}\left\{\sum_{j=1}^n\frac{\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{(S+\mathbf{1}_j)!\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})}+\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}\le$$
$$\le g(t)\Big(\max\{1,c\}\max_{\|S\|\le p}\Big\{\sum_{j=1}^n\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})\Big\}+\max_{\|S\|\le p}\Big\{\sum_{j=1}^n\frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\Big\}\Big)=$$
$$=g(t)(\beta(t)+\gamma(t)),$$

де $\beta(t)=\max\{1,c\}\max\limits_{\|S\|\leq p}\Big\{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})\Big\}$, $\gamma(t)=\max\limits_{\|S\|\leq p}\Big\{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\Big\}$.

Тому, $\frac{d}{dt}\ln g(t)\leq\beta(t)+\gamma(t)$ та $g(t)\leq g(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau$, де t_0 — вибране так, що $g(t_0)\neq 0$. Позначимо $\widetilde{\beta}(t)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})$. Позаяк $\mathbf{L}\in W^n$, для деякого S^*, $\|S^*\|\leq p$ та $\widetilde{S}$, $\|\widetilde{S}\|\leq p$, отримуємо

$$\frac{\gamma(t)}{\widetilde{\beta}(t)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{s_j^*(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})}\leq\sum_{j=1}^{n}s_j^*\frac{(-u_j'(t))^+}{\alpha_j l_j^2(Ate^{i\Theta})}\leq p\sum_{j=1}^{n}\frac{(-u_j'(t))^+}{\alpha_j l_j^2(Ate^{i\Theta})}\leq p\varepsilon \text{ та}$$

$$\frac{\beta(t)}{\widetilde{\beta}(t)}=\frac{\max\{1,c\}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\tilde{s}_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})}=\max\{1,c\}\Big(1+\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\tilde{s}_j l_j(Ate^{i\Theta})}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})}\Big)\leq$$

$$\leq\max\{1,c\}(1+\sum_{j=1}^{n}\tilde{s}_j)\leq(1+p)\max\{1,c\},$$

де $\varepsilon=\varepsilon(R)\to 0$ рівномірно по $\Theta\in[0,2\pi]^n$, $t=r^*$ при $|R|\to\infty$.

Але $|F(Ate^{i\Theta})|\leq g(t)\leq g(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau$ і $r^*A=R$. Покладемо $t=r^*$ та отримаємо

$$\ln\max\{|F(z)\colon\ z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}=\ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}|F(Re^{i\Theta})|\leq\ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}g(r^*)\leq$$

$$\leq\ln g(t_0)+\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_{t_0}^{r^*}(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau\leq$$

$$\leq\ln g(t_0)+\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_{t_0}^{r^*}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j l_j(A\tau e^{i\Theta})\left(\max\{1,c\}(1+p)+p\varepsilon\right)d\tau=$$

$$=\ln g(t_0)+\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_{t_0}^{r^*}\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j}{r^*}l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right)\left(\max\{1,c\}(1+p)+p\varepsilon\right)d\tau.$$

Звідси отримуємо (6.86). □

Зауваження 6.9. *Зазначимо, що умова* (6.85) *означає*

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)}\colon\ \|J\|=p+1\right\}\leq\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\colon\ \|J\|=p+1\right\}\cdot\max_{\|J\|=p+1}J!\leq$$

$$\leq c(p+1)!\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:|K\|\leq p\right\}\leq\frac{c(p+1)!}{\min\limits_{\|K\|\leq p}K!}\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)}:|K\|\leq p\right\}\leq$$

$$\leq c(p+1)!\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)}\colon\ \|K\|\leq p\right\}.$$

Тому за лемою 6.7 маємо

$$\varlimsup_{|R|\to\infty}\frac{\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau}\leq\max\{1,c(p+1)!\}.$$

Позаяк $c(p+1)! > c(p+1)$ для $p > 1$, бачимо, що з леми 6.8 не випливає лема 6.7. Зрозуміло тако, що і навпаки з леми 6.7 не випливає лема 6.8. Тому нам потрібна як лема 6.7, так і лема 6.8.

6.4.3 Зростання та обмеженість L-індексу за сукупністю змінних цілих розв'язків систем рівнянь з частинними похідними. Використовуючи доведені леми, сформулюємо та доведемо твердження, які дають оцінки зростання цілих розв'язків таких систем рівнянь з частинними похідними:

$$G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z) + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} G_{S_j}(z)F^{(S_j)}(z) = H_j(z),\ j \in \{1,\dots,n\} \qquad (6.88)$$

$p_j \in \mathbb{N}$, $S_j \in \mathbb{Z}_+^n$, H_j та G_{S_j} — цілі функції.

Кожна функція $\mathbf{L} \in Q^n$ має властивість

$$\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R e^{i\Theta})\rangle d\tau \to +\infty \text{ при } |R| \to +\infty,$$

Це випливає з леми 6.3.

Кажемо, що неоднорідна система рівнянь з частинними похідними (6.88) належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{L})$, якщо $\mathbf{L} \in QW^n$, для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ та для кожного $j \in \{1,\dots,n\}$ цілі функції H_j та G_{S_j} задовольняють такі умови:
1) для кожного $\|S_j\| \le p_j - 1$ та $M \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|M\| \le 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$, $\left|G_{S_j}^{(M)}(z)\right| \mathbf{L}^{S_j-M}(z) \le B_{S_j,M} l_j^{p_j}(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$ і $\left|G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z)\right| \le B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\mathbf{L}^M(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$,
2) для будь-якого $I \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|I\| = 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$, $\left|H_j^{(I)}(z)\right| \le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)|H_j(z)|$,
3) $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z) \ne 0$,
де $B_{S_j,M}$, $D_{I,j}$, $B_{p_j\mathbf{1}_j,M}$ — додатні сталі, $\mathbf{H}(z) = (H_1(z),\dots,H_n(z))$, $\mathbf{G}(z)$ — матриця, складена з коефіцієнтів $G_{S_J}(z)$ системи (6.88).

Однорідна система рівнянь з частинними похідними (6.88) належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{0},\mathbf{L})$, якщо умова 1) виконується для $M \in \mathbb{Z}_+^n$ таких, що $\|M\| \le \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$ та $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z) \ne 0$. Умова 2) не потрібна в цьому випадку.

Замість умови $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z) \ne 0$ можна вимагати справедливості умов 1) та 2) для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R')$. Це можливо з огляду на лему 6.6. Якщо для деякого $M \in \mathbb{Z}_+^n$ $G_{S_j}^{(M)}(z) \equiv 0$ або $H_j^{(M)}(z) \equiv 0$, то вважатимемо $B_{S_j,M} = 0$ або $D_{M,j} = 0$, відповідно.

Теорема 6.7. *Якщо неоднорідна система рівнянь з частинними похідними* (6.88) *належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{L})$ і ціла функція $F(z)$ задовольняє* (6.88), *то F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R e^{i\Theta})\rangle d\tau} \le \max\{1, c\}, \qquad (6.89)$$

де c — визначено нижче в (6.93).

Доведення. Позаяк функція $F(z)$ задовольняє систему (6.88), можна обчислити частинні похідні $I \in \mathbb{Z}_+^n$ в кожному рівнянні тої системи

$$\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \left(G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z) F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z) + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} G_{S_j}^{(M)}(z) F^{(S_j+I-M)}(z) \right) = H_j^{(I)}(z), \tag{6.90}$$

де $C_I^M = \frac{i_1!\ldots i_n!}{m_1!(i_1-m_1)!\ldots m_n!(i_n-m_n)!}$ та $\|I\| = 1 - p_j + \sum_{k=1}^n p_k = 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$. Використовуючи умову 2) теореми, отримаємо

$$|H_j^{(I)}(z)| \le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)|H_j(z)| \le$$
$$\le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)\left(|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)||F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)| + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} |G_{S_j}(z)||F^{(S_j)}(z)| \right).$$

Рівняння (6.90) має наслідком таке

$$F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z) = \frac{1}{G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)}\left(H_j^{(I)}(z) - \sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z) F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z) - \right.$$
$$\left. - \sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} G_{S_j}^{(M)}(z) F^{(S_j+I-M)}(z) \right). \tag{6.91}$$

З (6.91) та умови 2) випливає

$$\left|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)\right| \le \left(D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)\left(|F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)| + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} \frac{|G_{S_j}(z)|}{|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|}|F^{(S_j)}(z)| \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M \frac{|G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z)|}{|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|}|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)| + \sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} \frac{|G_{S_j}^{(M)}(z)|}{|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|}|F^{(S_j+I-M)}(z)| \right) \le$$
$$\le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)\left(|F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)| + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,\mathbf{0}} l_j^{p_j}(z) L^{-S_j}(z)|F^{(S_j)}(z)| \right) +$$
$$+ \sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\mathbf{L}^M(z)|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)| +$$
$$+ \sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M} l_j^{p_j}(z)\mathbf{L}^{M-S_j}(z)|F^{(S_j+I-M)}(z)| \ . \tag{6.92}$$

Поділивши цю нерівність на $l_j^{p_j}(z)\mathbf{L}^I(z)$, отримаємо, що для кожного I, $\|I\| = 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$ та $j \in \{1,\ldots,n\}$

$$\frac{\left|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)\right|}{\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)} \le D_{I,j}\left(\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)|}{l_j^{p_j}(z)} + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,\mathbf{0}} \frac{|F^{(S_j)}(z)|}{\mathbf{L}^{S_j}(z)} \right) +$$

$$+\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|}{\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I-M}(z)}+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\frac{|F^{(S_j+I-M)}(z)|}{\mathbf{L}^{S_j+I-M}(z)}\le$$

$$\le\Bigg(D_{I,j}(1+\sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,\mathbf{0}})+\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\Bigg)\times$$

$$\times\max\Big\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)}:\|S\|\le\sum_{j=1}^n p_j\Big\}.$$

Очевидно, $\|p_j\mathbf{1}_j+I\|=1+\sum_{j=1}^n p_j$. Звідси маємо

$$\max\Big\{\frac{\left|F^{(K)}(z)\right|}{\mathbf{L}^K(z)}:\|K\|=1+\sum_{j=1}^n p_j\Big\}\le\max\{1,c\}\max\Big\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)}:\|S\|\le\sum_{j=1}^n p_j\Big\},$$

$$\text{де } c=\max_{\substack{\|I\|=1-p_j+\sum_{k=1}^n p_k,\\ j\in\{1,\dots,n\}}}\Bigg(D_{I,j}(1+\sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,\mathbf{0}})+\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}+$$

$$+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\Bigg) \tag{6.93}$$

для всіх $z\in\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{D}^n(\mathbf{0},R')$. Отже, за лемою 6.7 оцінка (6.89) виконується, а за наслідком 6.4 ціла функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Якщо система (6.88) — однорідна ($H_j(z)\equiv 0$), то попередню теорему можна спростити.

Теорема 6.8. *Якщо однорідна система рівнянь з частинними похідними* (6.88) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{0},\mathbf{L})$ *і ціла функція* F *є розв'язком цієї системи, то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to\infty}\frac{\ln\max\{|F(z)|:\,z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau}\le\max\{1,c\}, \tag{6.94}$$

де c *визначено в* (6.93) *при* $D_{I,j}=0$ *та* $\|I\|=-p_j+\sum_{k=1}^n p_k$ *замість* $\|I\|=1-p_j+\sum_{k=1}^n p_k$.

Доведення. Якщо $H_j(z)\equiv 0$, то з (6.91) випливає

$$F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)=\frac{1}{G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)}\Bigg(-\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M G^{(M)}_{p_j\mathbf{1}_j}(z)F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)-$$

$$-\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} G^{(M)}_{S_j}(z)F^{(S_j+I-M)}(z)\Bigg). \tag{6.95}$$

Звідси отримуємо

$$|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)| \le \frac{1}{|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|}\Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M |G^{(M)}_{p_j\mathbf{1}_j}(z)||F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|+$$

$$+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} |G^{(M)}_{S_j}(z)||F^{(S_j+I-M)}(z)|\Bigg).$$

Поділивши отриману нерівність на $\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)$ та використовуючи припущення теореми щодо функцій G_{S_j}, отримуємо

$$\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)|}{\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)} \le \sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|}{\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I-M}(z)}+$$

$$+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\frac{|F^{(S_j+I-M)}(z)|}{\mathbf{L}^{S_j+I-M}(z)} \le \Bigg(\sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M}+$$

$$+\sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M}\Bigg)\max\Big\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)} : \|S\|\le -1+\sum_{j=1}^n p_j\Big\}.$$

Очевидно, $\|p_j\mathbf{1}_j+I\| = \sum_{j=1}^n p_j$. Тобто,

$$\max\Big\{\frac{\left|F^{(K)}(z)\right|}{\mathbf{L}^K(z)} : \|K\|=\sum_{j=1}^n p_j\Big\}\le \max\{1,c\}\max\left\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)} : \|S\|\le -1+\sum_{j=1}^n p_j\right\}$$

для всіх $z\in\mathbb{C}^n\backslash\mathbb{D}^n(\mathbf{0},R')$. Тому, всі умови наслідку 6.4 виконані. Отже, функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, а згідно з лемою 6.7, оцінка (6.94) — справджується. □

Зазначимо, що оцінки (6.89) та (6.94) не можна поліпшити (див. приклади для $n=1$ в [67]). Тут розглянемо випадок $n=2$. Наприклад, ціла функція $w=1+e^{-z_1-z_2}$ є розв'язком неоднорідної системи

$$\begin{cases} w'_{z_1}+w=1,\\ w'_{z_2}+w=1.\end{cases} \tag{6.96}$$

З огляду на (6.88) та (6.96) маємо $H_1(z)=H_2(z)=1$, $G_{1,1}(z)=G_{1,2}\equiv 1$, $G_{2,1}(z)=G_{2,2}\equiv 1$, де $G_{i,j}$ — коефіцієнт у i-ому рівнянні системи (6.96) при частинній похідні j-ого порядку за змінною z_i від функції w. Зрозуміло, що ціла функція w має обмежений індекс за сукупністю змінних, тобто, $\mathbf{L}(z_1,z_2)=(1,1)$. Перевіряючи припущення теореми 6.7, встановлюємо $B_{i,j,M}\equiv 0$ для $M\ne\mathbf{0}$ та $B_{i,j,\mathbf{0}}=1$. Також усі частинні похідні другого порядку від H_1 та H_2 дорівнюють 0. Тоді $D_{I,1}=D_{I,2}=0$, де $I\in\mathcal{I}:=\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$. Звідси, з врахуванням (6.93) $c=1$.

Отже, за теоремою 6.7 $\varlimsup\limits_{|R|\to\infty} \frac{\ln\max\{|w(z)|\colon z\in\mathbb{T}^2(\mathbf{0},R)\}}{\int_0^1\sum_{j=1}^2 r_j d\tau} \le 1$. Але

$$\varlimsup_{|R|\to\infty} \frac{\ln\max\{|1+\exp(-z_1-z_2)|\colon (z_1,z_2)\in\mathbb{T}^2(\mathbf{0},R)\}}{\int_0^1(r_1+r_2)d\tau} = \varlimsup_{|R|\to\infty} \frac{r_1+r_2}{(r_1+r_2)\tau\big|_0^1} = 1.$$

Тому оцінка (6.89) — точна.

За аналогією можна розглянути однорідну систему

$$\begin{cases} w'_{z_1} - z_2 w = 0, \\ w'_{z_2} - z_1 w = 0. \end{cases}$$

Функція $w(z_1,z_2) = \exp(z_1 z_2)$ є її цілим розв'язком обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, де $\mathbf{L}(z_1,z_2) = (|z_2|,|z_1|)$. Використовуючи теорему 6.8, не складно показати, що

$$\varlimsup_{|R|\to\infty} \frac{\ln\max\{|w(z)|\colon z\in\mathbb{T}^2(\mathbf{0},R)\}}{\int_0^1(r_1r_2\tau + r_2r_1\tau)d\tau} \le 1.$$

Прямі обчислення доводять, що ця оцінка також точна. Отже, (6.94) — неполіпшувана.

Навіть більше, за допомогою наслідку 6.4 та леми 6.8 можна доповнити дві попередні теореми 6.7 та 6.8 твердженнями, які міститимуть оцінки $\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}$, що інколи можуть виявитися кращими, ніж (6.94) та (6.89). Два наступні твердження мають доведення, які подібні до відповідних доведень теорем 6.7 і 6.8.

Твердження 6.13. *Якщо неоднорідна система рівнянь з частинними похідними* (6.88) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{L})$ *та ціла функція* $F(z)$ *задовольняє* (6.88), *то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to\infty} \frac{\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau} \le (1+\sum_{j=1}^n p_j)\max\{1,c'\}, \tag{6.97}$$

де c' *визначено у* (6.98).

Доведення. Як і в доведенні теореми 6.7, поділивши (6.92) на $(p_j\mathbf{1}_j + I)!L^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)$, отримаємо, що для кожного $\|I\| = 1+\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$ та $j\in\{1,\dots,n\}$

$$\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I}(z)} \le \frac{D_{I,j}|F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j}(z)} + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} \frac{D_{I,j}B_{S_j,\mathbf{0}}|F^{(S_j)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j-S_j}(z)} +$$

$$+ \sum_{\substack{\mathbf{0}\le M\le I\\ M\ne\mathbf{0}}} C_I^M B_{p_j\mathbf{1}_j,M} \frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I-M}(z)} +$$

$$+ \sum_{\mathbf{0}\le M\le I} C_I^M \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} B_{S_j,M} \frac{|F^{(S_j+I-M)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!\mathbf{L}^{S_j+I-M}(z)} \le$$

$$\leq D_{I,j}\Bigg(\frac{|F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j}(z)}+B\sum_{\|S_j\|\leq p_j-1}\frac{|F^{(S_j)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j-S_j}(z)}\Bigg)+$$

$$+\sum_{\substack{\mathbf{0}\leq M\leq I\\ M\neq\mathbf{0}}}\frac{C_I^M B|F^{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!\mathbf{L}^{p_j\mathbf{1}_j+I-M}(z)}+\sum_{\mathbf{0}\leq M\leq I}C_I^M\sum_{\|S_j\|\leq p_j-1}\frac{B|F^{(S_j+I-M)}(z)|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!\mathbf{L}^{S_j+I-M}(z)}\leq$$

$$\leq\Bigg(D_{I,j}\Big(\frac{p_j!}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!}+B\sum_{\|S_j\|\leq p_j-1}\frac{(p_j\mathbf{1}_j-S_j)!}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!}\Big)+B\sum_{\substack{\mathbf{0}\leq M\leq I\\ M\neq\mathbf{0}}}C_I^M\frac{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)!|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!}+$$

$$+B\sum_{\mathbf{0}\leq M\leq I}C_I^M\sum_{\|S_j\|\leq p_j-1}\frac{(S_j+I-M)!}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!}\Bigg)\max\Big\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{\mathbf{L}^S(z)}:\|S\|\leq\sum_{j=1}^n p_j\Big\}.$$

де $B=\max\Big\{B_{S_j,M},B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\colon j\in\{1,\dots,n\},\mathbf{0}\leq M\leq I,\|I\|=1+\sum\limits_{k=1,k\neq j}^n p_k.\Big\}$

Очевидно, що $\|p_j\mathbf{1}_j+I\|=1+\sum_{j=1}^n p_j$. Для всіх $z\in\mathbb{C}^n\backslash\mathbb{D}^n(\mathbf{0},R')$ отримуємо

$$\max\Big\{\frac{\big|F^{(K)}(z)\big|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\|K\|=1+\sum_{j=1}^n p_j\Big\}\leq\max\{1,c'\}\max\Big\{\frac{|F^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}^S(z)}:\|S\|\leq\sum_{j=1}^n p_j\Big\},$$

де

$$c'=\max_{\substack{\|I\|=1-p_j+\sum_{k=1}^n p_k,\\ j\in\{1,\dots,n\}}}\Bigg(D_{I,j}\Big(\frac{p_j!}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!}+B\sum_{\|S_j\|\leq p_j-1}\frac{(p_j\mathbf{1}_j-S_j)!}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!}\Big)+$$

$$+B\sum_{\mathbf{0}\leq M\leq I,M\neq\mathbf{0}}C_I^M\frac{(p_j\mathbf{1}_j+I-M)!|}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!}+B\sum_{\mathbf{0}\leq M\leq I}C_I^M\sum_{\|S_j\|\leq p_j-1}\frac{(S_j+I-M)!}{(p_j\mathbf{1}_j+I)!}\Bigg).\tag{6.98}$$

З огляду на лему 6.6 ціла функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. А за лемою 6.8 виконується оцінка (6.97). □

За аналогією до доведень теореми 6.8 і твердження 6.13 можна показати правильність такого твердження.

Твердження 6.14. *Якщо однорідна система рівнянь з частинними похідними* (6.88) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{0},\mathbf{L})$ *і ціла функція* F *є розв'язком цієї системи, то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to\infty}\frac{\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau}\leq\sum_{j=1}^n p_j\max\{1,c\},$$

де c' *визначено в* (6.98) *при* $D_{I,j}=0$ *та* $\|I\|=-p_j+\sum_{k=1}^n p_k$ *замість* $\|I\|=1-p_j+\sum_{k=1}^n p_k$.

Якщо ж $\mathbf{L}(z)\equiv\mathbf{1}$, то з теореми 6.7 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 6.5. *Для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R')$ *та для кожного* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *цілі функції* H_j *та* G_{S_j} *задовольняють такі умови:*
1) для будь-якого $\|S_j\| \le p_j - 1$ *та для кожного* $M \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|M\| \le 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^n p_k$,
$\left|G_{S_j}^{(M)}(z)\right| \le B_{S_j,M}|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$ *і* $\left|G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z)\right| \le B_{p_j\mathbf{1}_j,M}|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$,
2) для всіх $I \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|I\| = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^n p_k$, $\quad \left|H_j^{(I)}(z)\right| \le D_{I,j}|H_j(z)|$,
3) $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z) \ne 0$,
де $B_{S_j,M}$, $D_{I,j}$, $B_{p_j\mathbf{1}_j,M}$ *— додатні сталі. Якщо ціла функція* $F(z)$ *задовольняє* (6.88), *то* F *має обмежений індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{r_1 + \ldots + r_n} \le \max\{1, c\},$$

де c *визначено в* (6.93).

Подібні наслідки також можна отримати з теорем 6.8 та тверджень 6.13-6.14.

Припустимо, що всі коефіцієнти в (6.88) є многочленами. Позначимо $l_0(z) = \max\limits_{1\le j\le n} |z_j|$, $deg\, G_{S_j}(z)$ — степінь многочлена $G_{S_j}(z)$, тобто, найвищий степінь серед одночленів, що входять до нього. Тоді з теореми 6.7 випливає такий наслідок.

Наслідок 6.6. *Нехай* $H_j(z)$ *— одночлен,* $G_{S_j}(z)$ *— многочлен,* $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z) \equiv 1$ *у* (6.88) *для кожного* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *та всіх* $\|S_j\| \le p_j - 1$, $s = \max_{j,S_j} \frac{deg\, G_{S_j}(z)}{\|p_j\mathbf{1}_j - S_j\|}$, $\mathbf{L}(z) = (l_0^s(z), \ldots, l_0^s(z))$. *Тоді кожний цілий розв'язок* F *системи* (6.88) *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та справджується нерівність*

$$\varlimsup_{|R|\to\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\frac{(r^*)^s}{s+1} \sum_{j=1}^n r_j} \le \max\{1, c\},$$

де c *визначене в* (6.93).

Зауваження 6.10. Хотіли б зауважити, що отримані твердження також є покращеннями відповідних теорем для $n = 1$ в [67]. Справді там розглядається додатна неперервна функція $l = l(|z|)$ така, що $l'(t) = o(l^2(t))$ при $t \to +\infty$. Але наші обмеження на функцію l є слабшими. Адже досліджуємо додатну неперервну функцію $l = l(z)$, для якої $(-(u(r,\theta))'_r)^+/l^2(r,\theta) \to 0$ рівномірно по $\theta \in [0, 2\pi]$ при $r \to \infty$, де $u(r,\theta) = l(re^{i\theta})$.

6.4.4 Композиція цілих функцій та обмежений L-індекс за сукупністю змінних. Тут досліджуємо обмеженість $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних деяких композицій цілих функцій.

Наразі про властивості цілих функцій обмеженого індексу опубліковано чимало праць. Тим не менш, тільки п'ять досліджень присвячені обмеженості індексу композиції цілих та аналітичних функцій від однієї змінної

[206,213,219,276,277]. Зокрема, найзагальніший результат про композицію отримав у своїй дисертації В.О. Кушнір [277], який досліджував аналітичні в довільних областях з $\mathbb{C}$ функції.

Проте багатовимірний випадок [56, 255] досліджено лише для складених функцій такого вигляду $f\big(\sum\limits_{j=1}^{n} z_j m_j\big)$ і $f(z_1 z_2)$, де $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{C}^n$ — фіксований вектор. Згаданий результат В.О.Кушніра нами узагальнено для цього класу функцій (див. підрозділ 5.7) з дещо слабшими обмеженнями. Натомість композиція цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних ще ніким не розглядалася. Тому природно постає таке **питання:** *Нехай $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого l-індексу, $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — ціла функція, $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція. Якою має бути неперервна функція $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ для того, щоби складена функція $f(\Phi(z))$ мала обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних?*

У розмові зі проф. Скасківим О. Б. проф. М.М. Шеремета запропонував розглянути таке загальніше **питання:** *Нехай $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, $\Phi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ та $\Phi_2 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ — цілі функції, $\mathbf{L} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція. Якою має бути неперервна функція $\widetilde{\mathbf{L}} : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{R}^n_+$, щоб складена функція $H(z, w) = G(\Phi_1(z), \Phi_2(w))$ мала обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних?*

Тут даємо відповіді на сформульовані питання.

Додатково введемо такі позначення $\nabla\Phi(z) = (\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n})$ та $|\nabla|\Phi(z) = (|\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}|, \ldots, |\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n}|)$.

Наш основний результат формулюється у вигляді такої теореми.

Теорема 6.9. *Нехай f ціла функція в $\mathbb{C}$, Φ ціла функція в $\mathbb{C}^n$ така що для деякого p і для всіх $z \in \mathbb{C}^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ та $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\|J\| \le p$ виконуються нерівності $\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_k} \ne 0$ та*

$$|\Phi^{(J)}(z)| \le C|\nabla|\Phi(z)^J, \quad C \equiv \mathrm{const} > 0. \tag{6.99}$$

Нехай функція $l \in Q$ така, що $l(w) \ge 1$ $(w \in \mathbb{C})$ та $\mathbf{L} \in Q^n$, де $\mathbf{L}(z) = l(\Phi(z))|\nabla|\Phi(z)$. Ціла функція f має обмежений l-індекс тоді і тільки тоді, коли $F(z) = f(\Phi(z))$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.

Доведення. Доведемо, що

$$F^{(K)}(z) = f^{(\|K\|)}(\Phi(z))(\nabla\Phi(z))^K + \sum_{j=1}^{\|K\|-1} f^{(j)}(\Phi(z))Q_{j,K}(z), \tag{6.100}$$

де

$$Q_{j,K}(z) =$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{1}_1 p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_n p_{\mathbf{1}_n}+\ldots+K p_K=K \\ 0\le p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\le j-1}} c_{j,K,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_K}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1}}\ldots(\Phi^{(\mathbf{1}_n)}(z))^{p_{\mathbf{1}_n}}\ldots(\Phi^{(K)}(z))^{p_K},$$

та $c_{j,K,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_K}$ — деякі невід'ємні цілі коефіцієнти, $K\in\mathbb{Z}_+^n$.

Доведемо також таку формулу

$$f^{(k)}(\Phi(z)) = \frac{F^{(k\mathbf{1}_i)}(z)}{(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^k} + \frac{1}{(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{2k}}\sum_{j=1}^{k-1} F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^j\widetilde{Q}_{j,k}(z), \qquad (6.101)$$

де

$$\widetilde{Q}_{j,k}(z)=\sum_{m_1+\ldots+km_k=2(k-j)} b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{m_1}\ldots(\Phi^{(k\mathbf{1}_i)}(z))^{m_k},$$

та $b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}$ — деякі цілі коефіцієнти, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Скористаємося методом математичної індукції для доведення формул (6.100) та (6.101). Очевидно, що $K=\mathbf{1}_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, рівності (6.100) і (6.101) виконуються. Припустимо, що вони справджуються для $K=S$. Доведемо їх для $K=S+\mathbf{1}_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Обчислимо частинну похідну за змінною z_i в (6.100)

$$F^{(S+\mathbf{1}_i)}(z) = f^{(\|S\|+1)}(\Phi(z))(\nabla\Phi(z))^{S+\mathbf{1}_i}+$$
$$+f^{(\|S\|)}(\Phi(z))\sum_{k=1}^{n} s_k(\nabla\Phi(z))^{S-\mathbf{1}_k}\Phi^{(\mathbf{1}_k+\mathbf{1}_i)}(z)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\|S\|-1}\left(f^{(j+1)}(\Phi(z))\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{j,S}(z)+f^{(j)}(\Phi(z))Q_{j,S}^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right)=$$
$$=f^{(\|S\|+1)}(\Phi(z))(\nabla\Phi(z))^{S+\mathbf{1}_i}+$$
$$+f^{(\|S\|)}(\Phi(z))\left(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{\|S\|-1,S}(z)+\sum_{k=1}^{n} s_k(\nabla\Phi(z))^{S-\mathbf{1}_k}\Phi^{(\mathbf{1}_k+\mathbf{1}_i)}(z)\right)+$$
$$+\sum_{j=2}^{s-1} f^{(j)}(\Phi(z))\left(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{j-1,S}(z)+Q_{j,S}^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right)+f'(\Phi(z))Q_{1,S}^{(\mathbf{1}_i)}(z).$$

Позаяк

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(\nabla\Phi(z))^{S-\mathbf{1}_k}\Phi^{(\mathbf{1}_k+\mathbf{1}_i)}(z)+\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{\|S\|-1,S}(z)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} s_k(\nabla\Phi(z))^{S-\mathbf{1}_k}\Phi^{(\mathbf{1}_k+\mathbf{1}_i)}(z)+$$
$$+\sum_{\substack{\mathbf{1}_1 p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_n p_{\mathbf{1}_n}+\ldots+S p_S=S \\ 0\le p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\le\|S\|-2}} c_{\|S\|-1,S,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_S}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1}}\ldots$$
$$\times(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{1+p_{\mathbf{1}_i}}\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{p_S}=$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{1}_1 m_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_n m_{\mathbf{1}_n}+\ldots+S m_S=S+\mathbf{1}_i \\ 0\le m_{\mathbf{1}_1}+\ldots+m_{\mathbf{1}_n}\le\|S\|-1}} \tilde{c}_{\|S\|,S+\mathbf{1}_i,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_S}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{m_{\mathbf{1}_1}}\ldots$$

$$\times(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{m_{\mathbf{1}_i}}\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{m_S}=$$

$$=Q_{\|S\|,S+\mathbf{1}_i}(z),$$

$$Q_{1,S}^{(\mathbf{1}_i)}(z)=$$

$$=\sum_{\substack{Jp_J+\ldots+Sp_S=S \\ \|J\|\ge 2}} c_{1,S,0,\ldots,p_S}\Big(p_J(\Phi^{(J)}(z))^{p_J-1}(\Phi^{(J+\mathbf{1}_i)}(z))^{p_{J+\mathbf{1}_i}+1}\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{p_S}+\ldots+$$

$$+p_S(\Phi^{(J)}(z))^{p_J}\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{p_S-1}\Phi^{(S+\mathbf{1}_i)}(z)\Big)=$$

$$=\sum_{\substack{Jm_J+\ldots+(S+\mathbf{1}_i)m_{S+\mathbf{1}_i}=S+\mathbf{1}_i \\ \|J\|\ge 2}} \tilde{c}_{1,S+\mathbf{1}_i,0,\ldots,p_S}(\Phi^{(J)}(z))^{m_J}\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{m_S}(\Phi^{(S+\mathbf{1}_i)}(z))^{m_{S+\mathbf{1}_i}}=$$

$$=Q_{1,S+\mathbf{1}_i}(z),$$

та

$$\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)Q_{j-1,S}(z)+Q_{j,S}^{(\mathbf{1}_i)}(z)=$$

$$=\sum_{\substack{\mathbf{1}_1 p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_n p_{\mathbf{1}_n}+\ldots+Sp_S=S \\ 0\le p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\le j-2}} c_{j-1,S,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_S}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1}}\ldots(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{1+p_{\mathbf{1}_i}}\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{p_S}+$$

$$+\sum_{\substack{\mathbf{1}_1 p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_n p_{\mathbf{1}_n}+\ldots+Sp_S=S \\ 0\le p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\le j-1}} c_{j,S,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_S}\Big(p_{\mathbf{1}_1}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1}-1}(\Phi^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_i)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_i}+1}\ldots$$

$$\times(\Phi^{(S)}(z))^{p_S}+\ldots++p_S(\Phi^{(J)}(z))^{p_J}\ldots(\Phi^{(S)}(z))^{p_S-1}\Phi^{(S+\mathbf{1}_i)}(z)\Big)=$$

$$=\sum_{\substack{\mathbf{1}_1 m_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_n m_{\mathbf{1}_n}+\ldots+(S+\mathbf{1}_i)m_{S+\mathbf{1}_i}=S+\mathbf{1}_i \\ 0\le p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\le j-1}} \tilde{c}_{j,S+\mathbf{1}_i,m_{\mathbf{1}_1},\ldots,m_{S+\mathbf{1}_i}}(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{m_{\mathbf{1}_1}}\ldots$$

$$\times(\Phi^{(S)}(z))^{m_S}(\Phi^{(S+\mathbf{1}_i)}(z))^{m_{S+\mathbf{1}_i}}=Q_{j,S+\mathbf{1}_i}(z),$$

ми отримуємо (6.100) з $S+\mathbf{1}_i$ замість K.

Після диференціювання за змінною z_i з рівності (6.101) маємо

$$f^{(s+1)}(\Phi(z))=\frac{F^{(s+1)\mathbf{1}_i}(z)}{\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{s+1}}-s\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)F^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\Big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\Big)^{-s-2}+$$

$$+\sum_{j=1}^{s-1}\Big\{F^{((j+1)\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{j-2s-1}\widetilde{Q}_{j,s}(z)+$$

$$+F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{j-2s-2}\Big((j-2s)\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}(z)+\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}^{(\mathbf{1}_i)}(z)\Big)\Big\}=$$

$$=\frac{F^{(s+1)\mathbf{1}_i}(z)}{\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{s+1}}+F^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\Big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\Big)^{-s-2}\Big(-s\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)+\widetilde{Q}_{s-1,s}(z)\Big)+$$

$$+\sum_{j=2}^{s-1}\Big\{F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)\big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\big)^{j-2s-2}\Big(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}^{(\mathbf{1}_i)}(z)+(j-2s)\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}(z)+$$

$$+\widetilde{Q}_{j-1,s}(z)\Big)\Big\}+F^{(\mathbf{1}_i)}(z)\left(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{-2s-1}\times$$

$$\times\Big((1-2s)\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{1,s}(z)+\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{1,s}^{(\mathbf{1}_i)}(z)\Big).$$

Оскільки

$$-s\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)+Q^*_{s-1,s}(z)=$$

$$=(-s+b_{s-1,s,0,1,\ldots,0})\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)+b_{s-1,s,2,0,\ldots,0}(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^2=$$

$$=\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s+\\+(s+1)m_{s+1}=2}}\tilde{b}_{s,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}}(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{m_1}\ldots(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z))^{m_s}(\Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z))^{m_{s+1}}=$$

$$=\widetilde{Q}_{s,s+1}(z),$$

$$(1-2s)\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{1,s}(z)+\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{1,s}^{(\mathbf{1}_i)}(z)=$$

$$=(1-2s)\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2s-2}}b_{1,s,m_1,\ldots,m_s}(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{m_1}(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z))^{m_2+1}\ldots(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z))^{m_s}+$$

$$+\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2s-2}}b_{1,s,m_1,\ldots,m_s}\Big\{m_1(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{m_1}(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z))^{m_2+1}\ldots(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z))^{m_s}+$$

$$+m_2(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{m_1}(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z))^{m_2-1}(\Phi^{(3\cdot\mathbf{1}_i)}(z))^{m_3+1}\ldots(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z))^{m_s}+\ldots+$$

$$+m_s(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{m_1+1}\ldots(\Phi^{(s\cdot\mathbf{1}_i)}(z))^{m_s-1}\Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z)\Big\}=$$

$$=\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s+\\+(s+1)m_{s+1}=2s}}\tilde{b}_{1,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}}(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z))^{m_1}\ldots(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z))^{m_s}(\Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z))^{m_{s+1}}=$$

$$=\widetilde{Q}_{1,s+1}(z),$$

та

$$\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}^{(\mathbf{1}_i)}(z)+(j-2s)\Phi^{(2\mathbf{1}_i)}(z)\widetilde{Q}_{j,s}(z)+\widetilde{Q}_{j-1,s}(z)=\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2(s-j)}}b_{j,s,m_1,\ldots,m_s}\times$$

$$\times\Big\{m_1\left(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_1}\left(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_2+1}\ldots\left(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_s}+\ldots+$$

$$+m_s\left(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_1+1}\left(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_2}\ldots\left(\Phi^{(s\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_s-1}\Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z)\Big\}+$$

$$+(j-2s)\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2(s-j)}}b_{j,s,m_1,\ldots,m_s}\left(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_1}\left(\Phi^{(2\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_2+1}\ldots\times$$

$$\times\left(\Phi^{(s\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_s}+\sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s=\\=2(s-j)+2}}b_{j-1,s,m_1,\ldots,m_s}\left(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_1}\ldots\left(\Phi^{(s\cdot\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_s}=$$

$$= \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+sm_s+\\+(s+1)m_{s+1}=2(s+1-j)}} \tilde{b}_{j,s+1,m_1,\ldots,m_{s+1}} \left(\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_1} \ldots \left(\Phi^{((s+1)\mathbf{1}_i)}(z)\right)^{m_{s+1}} =$$

$$= \widetilde{Q}_{j,s+1}(z),$$

одержуємо (6.101) з $s+1$ замість k.

Нехай f — ціла функція обмеженого l-індексу. За теоремою 6.6 виконується нерівність (6.68). Зважаючи на (6.99) та (6.100), з (6.68) маємо, що для $K = S + \mathbf{1}_i$ при $\|S\| = p$ справджується

$$\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} \le \frac{|f^{(\|K\|)}(\Phi(z))|}{\mathbf{L}^K(z)} |\nabla|\Phi(z)^K + \sum_{j=1}^{\|K\|-1} \frac{|f^{(j)}(\Phi(z))||Q_{j,K}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} : \ 0 \le k \le p\right\} \left(C + \sum_{j=1}^{p} \frac{|Q_{j,K}(z)|}{l^{p+1-j}(\Phi(z))|\nabla|\Phi(z)^K}\right) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} : \ 0 \le k \le p\right\} \left(C + \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{\mathbf{1}_1 p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+\mathbf{1}_n p_{\mathbf{1}_n}+\ldots+Kp_K=K\\ 0\le p_{\mathbf{1}_1}+\ldots+p_{\mathbf{1}_n}\le j-1}} c_{j,K,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_K} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{|(\Phi^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1}} \ldots (\Phi^{(\mathbf{1}_n)}(z))^{p_{\mathbf{1}_n}} \ldots (\Phi^{(K)}(z))^{p_K}|}{l^{p+1-j}(\Phi(z))|\nabla|\Phi(z)^K}\right) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} : \ 0 \le k \le p\right\} \times$$

$$\times \left(C + \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{n_1+2n_2+\ldots+(p+1)n_{p+1}=p+1\\ 0\le n_1\le j-1}} \frac{c_{j,K,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_K} C_1^{\|K\|}}{l^{p+1-j}(\Phi(z))}\right) \le$$

$$\le C_2 \max\left\{\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} : 0 \le k \le p\right\}.$$

Використовуючи (6.101), можна оцінити зверху дріб $\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))}$:

$$\frac{|f^{(k)}(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} \le \frac{|F^{(k\mathbf{1}_i)}(z)|}{l^k(\Phi(z))|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)|^k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)||\widetilde{Q}_{j,k}(z)|}{l^k(\Phi(z))|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)|^{2k-j}} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : 1 \le \|J\| \le k\right\} \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|\widetilde{Q}_{j,k}(z)|}{l^{k-j}(\Phi(z))|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)|^{2(k-j)}}\right) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : 1 \le \|J\| \le k\right\} \times$$

$$\times \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m_1+\ldots+km_k=2(k-j)} |b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}| \frac{|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)|^{m_1} \ldots |\Phi^{(k\mathbf{1}_i)}(z)|^{m_k}}{l^{k-j}(\Phi(z))|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)|^{2(k-j)}}\right) \le$$

$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : 1 \leq \|J\| \leq k\right\} \times$$

$$\times \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m_1+\ldots+km_k=2(k-j)} \frac{|b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}| C_1^{2(k-j)}}{l^{k-j}(\Phi(z))}\right) \leq$$

$$\leq C_3 \max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : 1 \leq \|J\| \leq k\right\}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : \|J\| = p+1\right\} \leq C_2 C_3 \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \ 0 \leq \|K\| \leq p\right\}. \tag{6.102}$$

Отже, за теоремою 6.6 з нерівності (6.102) випливає, що функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.

Тепер навпаки припустимо, що F є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Тоді вона задовольняє (6.68). Беручи до уваги (6.99) та (6.101), отримуємо для $\|K\| = p+1$ таке

$$\frac{|f^{(p+1)}(\Phi(z))|}{l^{p+1}(\Phi(z))} \leq \frac{|F^{((p+1)\mathbf{1}_i)}(z)|}{l^{p+1}(\Phi(z))|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)|^{p+1}} + \sum_{j=1}^{p} \frac{|F^{(j\mathbf{1}_i)}(z)||\widetilde{Q}_{j,p+1}(z)|}{l^{p+1}(\Phi(z))|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)|^{2p+2-j}} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : 0 \leq \|J\| \leq p\right\} \left(C + \sum_{j=1}^{p} \frac{|\widetilde{Q}_{j,p+1}(z)|}{l^{p+1-j}(\Phi(z))|\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)|^{2(p+1-j)}}\right) \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : 0 \leq \|J\| \leq p\right\} \times$$

$$\times \left(C + \sum_{j=1}^{p} \sum_{m_1+\ldots+(p+1)m_{p+1}=2(p+1-j)} |b_{j,p+1,m_1,\ldots,m_{p+1}}| \times\right.$$

$$\left.\times |\Phi^{(\mathbf{1}_i)}(z)|^{m_1} \ldots |\Phi^{((p+1)\mathbf{1}_i)}(z)|^{m_{p+1}}\right) \leq \max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : 0 \leq \|J\| \leq p\right\} \times$$

$$\times \left(C + \sum_{j=1}^{p} \sum_{m_1+\ldots+(p+1)m_{p+1}=2(p+1-j)} \frac{|b_{j,p+1,m_1,\ldots,m_{p+1}}| C_1^{2p+2-2j}}{l^{p+1-j}(\Phi(z))}\right) \leq$$

$$\leq C_4 \max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : 0 \leq \|J\| \leq p\right\}.$$

Використовуючи (6.100), отримуємо таку оцінку

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} \leq \frac{|f^{(\|J\|)}(\Phi(z))||\nabla|\Phi(z)^J}{\mathbf{L}^J(z)} + \sum_{j=1}^{\|J\|} \frac{|f^{(j)}(\Phi(z))||Q_{j,J}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|f^{(j)}(\Phi(z))|}{l^j(\Phi(z))} : 1 \leq j \leq \|J\| - 1\right\} \left(1 + \sum_{j=1}^{\|J\|-1} \frac{|Q_{j,J}(z)|}{l^{\|J\|-j}(\Phi(z))|\nabla|\Phi(z)^J}\right) \leq$$

$$\leq C_5 \max\left\{\frac{|f^{(j)}(\Phi(z))|}{l^j(\Phi(z))} : 1 \leq j \leq p\right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{|f^{(p+1)}(\Phi(z))|}{l^{p+1}(\Phi(z))} \leq C_4 C_5 \max\left\{\frac{|f^{(j)}(\Phi(z))|}{l^j(\Phi(z))} : 0 \leq j \leq p\right\}.$$

Тому за теоремою 6.6 функція f має обмежений l-індекс. □

Тепер розглянемо відповідь на загальнішу проблему Шеремети, сформульовану нами у вступі.

Теорема 6.10. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^2$, $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *— ціла функція обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* $\Phi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *та* $\Phi_2 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ *цілі функції такі, що* $\frac{\partial \Phi_1(z)}{\partial z_k} \neq 0$, $\frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w_l} \neq 0$, *та*

$$|\Phi_1^{(J)}(z)| \leq C|\nabla|\Phi_1(z)^J, \ |\Phi_2^{(I)}(w)| \leq C||\nabla|\Phi_2(w)^I, \quad C \equiv \mathrm{const} > 0, \tag{6.103}$$

для всіх $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^m$, $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $I \in \mathbb{Z}_+^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $l \in \{1, \ldots, m\}$, $\|J\| \leq p$, $\|I\| \leq p$, *де* $p = N(G, \mathbf{L})$ *вибране з нерівності* (6.68).

Тоді $H(z, w) = G(\Phi_1(z), \Phi_2(w))$ *має обмежений* $\widetilde{\mathbf{L}}$*-індекс за сукупністю змінних, де*

$$\widetilde{\mathbf{L}}(z, w) = \left(l_1(\Phi_1(z))\left|\frac{\partial \Phi_1(z)}{\partial z_1}\right|, \ldots, l_1(\Phi_1(z))\left|\frac{\partial \Phi_1(z)}{\partial z_n}\right|,\right.$$
$$\left. l_2(\Phi_2(w))\left|\frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w_1}\right|, \ldots, l_2(\Phi_2(w))\left|\frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w_m}\right|\right) \in Q^{n+m}.$$

Доведення. Нехай $G = G(v_1, v_2)$, $v_1 = \Phi_1(z)$, $v_2 = \Phi_2(w)$. Як і в теоремі 6.9, ми можемо довести методом математичної індукції таку формулу

$$\frac{\partial^{\|J\|+\|I\|} H(z, w)}{\partial z^J \partial w^I} = \frac{\partial^{\|J\|+\|I\|} F(v_1, v_2)}{\partial v_1^{\|J\|} \partial v_2^{\|I\|}}\Big|_{\substack{v_1=\Phi_1(z)\\ v_2=\Phi_2(w)}} \cdot (\nabla \Phi_1(z))^J (\nabla \Phi_2(w))^I +$$
$$+ \sum_{\substack{\|K_1\|+\|K_2\| \in \{1,\ldots,\|J\|+\|I\|-1\}\\ \|K_1\| \in \{0,\ldots,\|J\|\}, \|K_2\| \in \{0,\ldots,\|I\|\}}} \frac{\partial^{\|K_1\|+\|K_2\|} F(v_1, v_2)}{\partial v_1^{\|K_1\|} \partial v_2^{\|K_2\|}}\Big|_{\substack{v_1=\Phi_1(z)\\ v_2=\Phi_2(w)}} \times$$
$$\times Q(z, w; \|K_1\| + \|K_2\|, J, I) \tag{6.104}$$

де

$$Q(z, w; k, J, I) = \sum_{\substack{\mathbf{1}_1 p_{\mathbf{1}_1} + \ldots + J p_J = J, \ \mathbf{1}_1 s_{\mathbf{1}_1} + \ldots + I s_I = I\\ 0 \leq p_{\mathbf{1}_1} + \ldots + p_{\mathbf{1}_n} + s_{\mathbf{1}_1} + \ldots + s_{\mathbf{1}_m} \leq k-1}} c_{k,J,I,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_J,s_{\mathbf{1}_1},\ldots,s_I} \times$$
$$\times (\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{p_{\mathbf{1}_1}} \ldots (\Phi_1^{(J)}(z))^{p_J} (\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w))^{s_{\mathbf{1}_1}} \ldots (\Phi_2^{(I)}(w))^{s_I}$$

$c_{k,J,I,p_{\mathbf{1}_1},\ldots,p_J,s_{\mathbf{1}_1},\ldots,s_I}$ — деякі цілі невід'ємні коефіцієнти.

Також можна вивести, що

$$\frac{\partial^{j+i} G(v_1, v_2)}{\partial v_1^j \partial v_2^i}\Big|_{\substack{v_1=\Phi_1(z)\\ v_2=\Phi_2(w)}} = \frac{\frac{\partial^{j+i} H(z,w)}{\partial z^j \partial w^i}}{(\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z))^j (\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w))^i} + \frac{1}{(\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{2j} (\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w))^{2i}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{1\le p+s\le j+i-1\\ p\le j,\ s\le i}} \frac{\partial^{p+s}H(z,w)}{\partial z^p \partial w^s}(\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z))^p(\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w))^s\widetilde{Q}_{p,s,j,i}(z,w) \tag{6.105}$$

де

$$\widetilde{Q}_{p,s,j,i}(z,w) = \sum_{\substack{m_1+\ldots+jm_j+n_1+\ldots+in_i=\\ =2(i+j-p-s)}} b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}(\Phi_1^{(\mathbf{1}_1)}(z))^{m_1}\ldots(\Phi_1^{(j\mathbf{1}_1)}(z))^{m_j}\times$$
$$\times(\Phi_2^{(\mathbf{1}_1)}(w))^{n_1}\ldots(\Phi_2^{(i\mathbf{1}_1)}(w))^{n_i}$$

та $b_{j,k,m_1,\ldots,m_k}$ — деякі цілі числа.

Використовуючи (6.104) та (6.105), можна довести за аналогією з доведенням теореми 6.9, що ціла функція H задовольняє нерівність (6.68). Тоді за теоремою 6.6 функція H має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних. □

Зауваження 6.11. *Як і в підрозділі 5.7, тут також можна сформулювати і довести аналоги теорем 6.9 та 6.10 без припущення* $\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_k}\neq 0$ *та* $\frac{\partial\Phi_1(z)}{\partial z_k}\neq 0$, $\frac{\partial\Phi_2(w)}{\partial w_l}\neq 0$, $k\in\{1,\ldots,n\}$ *відповідно (там це була теорема 5.13).*

6.5 Простори цілих функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

Функції обмеженого індексу мають цікаві як аналітичні, так і метричні властивості.

Зокрема, К. Екблау [93] досліджував метричний простір цілих функцій обмеженого індексу. Ним доведено, що в топології, породженій метрикою Ієра [137]

$$d(f,g)=\sup\{|f_0-g_0|,|f_p-g_p|^{1/p}: p\in\mathbb{N}\},$$

де f_p, g_p – тейлорівські коефіцієнти функцій f, g відповідно, такий простір є простором першої категорії. У статті [260] цей результат узагальнено на клас цілих функцій від декількох комплексних змінних. Подібну властивість встановлено у підрозділі 5.8 для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком.

Водночас у попередніх підрозділах означення цілої функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних узагальнене, заміною вектор-функції $\mathbf{L}(z)=(l_1(|z_1|),\ldots,l_n(|z_n|))$ на вектор-функцію загальнішого вигляду $\mathbf{L}(z)=(l_1(z),\ldots,l_n(z))$, де $l_j(z)=l_j(z_1,\ldots,z_n)\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}_+$ — неперервна функція, $j\in\{1,\ldots,n\}$. Зазначимо, що ціла функція $F(z)=e^{z_1+\ldots+z_n}$ є функцією обмеженого індексу за сукупністю змінних, тобто, обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з $\mathbf{L}(z)\equiv(1,\ldots,1)$. Проте вже ціла функція $F(z)=e^{z_1\cdots z_n}$ є функцією необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для будь-якої функції вигляду $\mathbf{L}(z)=(l_1(|z_1|),\ldots,l_n(|z_n|))$. Але при цьому дана функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних для функції $\mathbf{L}(z)=(l_1(z),\ldots,l_n(z))$,

де $l_j(z) = |z_1 \cdots z_{j-1} z_{j+1} \cdots z_n| + 1$. Тобто, навіть цей простий приклад показує, що загальніша функція $\mathbf{L}$ дозволяє вивчати властивості ширшого класу цілих функцій від декількох комплексних змінних.

З огляду на [93,260] виникає таке питання: *Чи є простором першої категорії простір цілих функцій обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних для* $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$? Тут дано ствердну відповідь на це питання. Зауважимо, що доведені нижче теореми 6.9, 6.15 та твердження 6.16 отримані при $n = 1$ та $l(z) \equiv 1$ у статті [93], а у випадку $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$ в статті [260]. Для цілих у $\mathbb{C}^n$ функцій $F(z) = \sum\limits_{J \geq \mathbf{0}} f_J z^J$, $G(z) = \sum\limits_{J \geq \mathbf{0}} g_J z^J$ покладемо

$$d(F, G) = \sup\{|f_{\mathbf{0}} - g_{\mathbf{0}}|, |f_J - g_J|^{1/\|J\|} : J \in \mathbb{Z}^n_+\},$$

а простір усіх цілих функцій з такою метрикою позначимо E^n. Також позначимо через $B^n(\mathbf{L})$ множину усіх цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, а через $B^n_\nu(\mathbf{L})$ — множину функцій з $B^n(\mathbf{L})$ таких, що $N(F, \mathbf{L}) \leq \nu$. Зрозуміло, що $B^n(\mathbf{L}) = \bigcup\limits_{\nu=0}^{+\infty} B^n_\nu(\mathbf{L})$.

Нам потрібне таке твердження.

Теорема XVIII ([260]). *Нехай $F \in E^n$. Тоді для будь-яких $\nu_0 \in \mathbb{N}$ та $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для $G \in E^n$ такої, що $d(F, G) < \delta$ виконується $d(F^{(K)}, G^{(K)}) < \varepsilon$ для всіх $K \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K\| \leq \nu_0$.*

Лема 6.9. *Нехай $F \in E^n$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$ та $N(F, \mathbf{L}) > \nu$. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що для кожної функції $G \in E^n$ з нерівності $d(F, G) < \delta$ випливає, що $N(G, \mathbf{L}) > \nu$.*

Доведення. Оскільки $N(F, \mathbf{L}) > \nu$, то знайдуться $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $\nu_0 > \nu$, для яких $N(F, \mathbf{L}, z^0) = \nu_0 > \nu$. Водночас для всіх $\|K\| \leq \nu_0 - 1$ та деякого K^0, $\|K^0\| = \nu_0$ справджується нерівність $\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} < \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}$. Тоді існує $\delta^* > 0$ таке, що

$$\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} + \delta^* < \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}. \tag{6.106}$$

Використовуючи нерівність $a - b \geq c - d - |a - c| - |b - d|$, ми отримуємо

$$\frac{|G^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} - \frac{|G^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} \geq \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} - \frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} -$$
$$- \frac{|\,|G^{(K^0)}(z^0)| - |F^{(K^0)}(z^0)|\,|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} - \frac{|\,|G^{(K)}(z^0)| - |F^{(K)}(z^0)|\,|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)}. \tag{6.107}$$

Звідси випливає, що

$$||G^{(K)}(z^0)| - |F^{(K)}(z^0)|| \leq |G^{(K)}(z^0) - F^{(K)}(z^0)| \leq$$
$$\leq |K!(f_K - g_K)| + \sum_{J \neq \mathbf{0}} \frac{(K+J)!}{J!} |f_{J+K} - g_{J+K}||(z^0)^J| \leq$$

$$\leq d(F^{(K)}, G^{(K)}) + \sum_{J\neq \mathbf{0}} d(F^{(K)}, G^{(K)})^{\|J\|} |(z^0)^J|. \tag{6.108}$$

За теоремою XVIII число δ можна вибрати так, що при $d(F,G) < \delta$ також виконуються нерівності $d(F^{(K)}, G^{(K)}) < \varepsilon < 1$ та $d(F^{(K)}, G^{(K)})|z_i^0| < \varepsilon < 1$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$ та $\|K\| \leq \nu_0$. З нерівності (6.108) випливає, що

$$\Big| |G^{(K)}(Z^0)| - |F^{(K)}(Z^0)| \Big| \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\|J\|=k} \varepsilon^{\|J\|} = \varepsilon - 1 + \big(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k\big)^n =$$

$$= \varepsilon - 1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)^n} = \frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{(1-\varepsilon)^n} \tag{6.109}$$

Підставляючи (6.106) та (6.109) в (6.107), для $\|K\| \leq \nu_0 - 1$ маємо

$$\frac{|G^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} - \frac{|G^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} > \delta^* - \left\{ \frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{(1-\varepsilon)^n} \left(\frac{1}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} + \frac{1}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} \right) \right\}.$$

З огляду на довільність ε, це означає, що $\frac{|G^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} > \frac{\delta^*}{2} + \frac{|G^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)}$, тобто, $N(G, \mathbf{L}) \geq N(G, \mathbf{L}, z^0) \geq \nu_0 > \nu$. Теорема доведена. □

Наслідок 6.7. *Множина $B_\nu^n(\mathbf{L})$ замкнена в E^n.*

Через K^n позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z)$, для яких існує $c > 0$ таке, що для кожного $R \in \mathbb{R}_+^n$ та $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\max_{\Theta_1, \Theta_2 \in [0, 2\pi]^n} \frac{l_j(Re^{i\Theta_2})}{l_j(Re^{i\Theta_1})} \leq c.$$

Твердження 6.15. *Нехай $\mathbf{L} \in Q^n \cap K^n$, $\min\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} l_j(Re^{i\Theta})$ неспадна за кожною змінною r_k, $k, j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq j$. Тоді $B^n(\mathbf{L})$ є простором першої категорії.*

Доведення. Нам потрібно показати, що для будь-якого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ множина $B_\nu^n(\mathbf{L})$ ніде не щільна в $B^n(\mathbf{L})$. З огляду на $B^n(\mathbf{L}) = \bigcup_\nu B_\nu^n(\mathbf{L})$ це означатиме справедливість твердження теореми.

Покладемо

$$\psi(r) = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}, \Theta\in[0,2\pi]^n} \left\{ \int_0^r l_j(r^{i\theta_1}, \ldots, re^{i\theta_j - 1}, te^{i\theta_j}, re^{i\theta_{j+1}} \ldots, re^{i\theta_n}) dt \right\}.$$

Нехай $\Phi(r)$ буде додатною, опуклою, неспадною на $(-\infty, +\infty)$ функцією такою, що $\psi(r) = o(\Phi(\ln r))$, $\quad r \to \infty$. За теоремою Клуні [88] існує ціла функція $F(z_1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k$ з $c_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ така, що

$$\ln M(r, F) \sim \Phi(\ln r), \quad r \to \infty,$$

де $M(r,F)=\max\{|F(z_1)|:\ |z_1|=r\}$. Виберемо $R=(r,\dots,r)$. Тоді

$$\frac{\ln M(r,F)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\int_0^r l_j(r^{i\theta_1},\dots,re^{i\theta_j-1},te^{i\theta_j},re^{i\theta_{j+1}}\dots,re^{i\theta_n})dt}\geq\frac{\ln M(r,F)}{n\psi(r)}\to\infty, \qquad (6.110)$$

при $|R|\to\infty$. За наслідком 6.9 (див. підрозділ 6.7), якщо $N(F,\mathbf{L})<\infty$, то ліва частина в (6.110) обмежена. Тому це означає, що функція F необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Навіть більше, така функція $\widetilde{F}_j(z)=P_j(z_1,\dots,z_n)+\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}c_kz_1^k$ також є необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, де P_j — довільний многочлен степеня j за усіма змінними.

Множина $B^n_\nu(\mathbf{L})$ ніде не щільна в $B^n(\mathbf{L})$, якщо доповнення її замикання щільне в $B^n(\mathbf{L})$, тобто, $\overline{B^n(\mathbf{L})\setminus\overline{B^n_\nu(\mathbf{L})}}=B^n(\mathbf{L})$. Отже, слід довести, що будь-яка функція з $B^n_\nu(\mathbf{L})$ може бути апроксимована функціями з $B^n(\mathbf{L})\setminus B^n_\nu(\mathbf{L})$.

Нехай $f(z)=\sum\limits_{K\geq\mathbf{0}}f_Kz^K$ — функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних $\nu(f,L)=\nu_o<\infty$. Покладемо

$$f_j(z)=\sum_{||K||\leq j}f_Kz^K+\sum_{k=j+1}^{\infty}c_kz_1^k,\quad f_{j,m}(z)=\sum_{||K||\leq j}f_Kz^K+\sum_{k=j+1}^{m}c_kz_1^k\quad(m>j).$$

Очевидно, що $d(f,f_j)\to0$ при $j\to\infty$ та $d(f_j,f_{j,m})\to0$ при $m\to\infty$. Але ця функція f_j необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, тобто, $N(f_j,\mathbf{L})>\nu_0$. Тоді за лемою 6.9 отримуємо, що $N(f_{j,m},\mathbf{L})>\nu_0$ для всіх досить великих m. Отже, $f_{j,m}\in B^n(\mathbf{L})\setminus B^n_{\nu_o}(\mathbf{L})$, бо $N(f_{j,m},\mathbf{L})\leq m$ та $d(f,f_{j,m})\leq d(f,f_j)+d(f_j,f_{j,m})\to0$ при $m,j\to\infty$. Звідси маємо, що $B^n_{\nu_o}(\mathbf{L})$ ніде не щільна в $B^n(\mathbf{L})$. Тому простір $B^n(\mathbf{L})$ є простором першої категорії. □

Твердження 6.16. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q^n\cap K^n$, $\min\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}l_j(Re^{i\Theta})$ *неспадна за кожною змінною* r_k, $k,j\in\{1,\dots,n\}$, $k\neq j$. *Тоді для будь-якого* $\nu\in\mathbb{Z}_+$ $B^n(\mathbf{L})\setminus B^n_\nu(\mathbf{L})$ *та* $E^n\setminus B^n(\mathbf{L})$ *щільні в* E^n.

Доведення. Для будь-якої функції $f\in B^n(\mathbf{L})$ будуємо функцію $f_j\in E^n\setminus B^n(\mathbf{L})$ таку ж, як у доведенні теореми 6.15. Тоді $d(f,f_j)\to0$ $(j\to\infty)$. А це й означає, що $E^n\setminus B^n(\mathbf{L})$ щільна в E^n.

Нехай $f\in E^n\setminus(B^n(\mathbf{L})\setminus B^n_\nu(\mathbf{L}))$, тобто, або f необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, або $N(f,\mathbf{L})\leq\nu$. Доведемо, що в кожному з цих двох випадків f є границею функцій f_j, $\nu<N(f_j,\mathbf{L})<\infty$.

Нехай f – функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Тоді покладемо $f_j(z)=\sum_{0\leq||K||\leq j}f_Kz^K$. Очевидно, що $\lim\limits_{j\to\infty}d(f,f_j)=0$. Звідси, за теоремою XVIII, $N(f_j,\mathbf{L})>\nu$ для всіх досить великих j.

Нехай $f\in B^n_\nu(\mathbf{L})$. Тоді можна вибрати $f_{j,m}\in B^n(\mathbf{L})\setminus B^n_{\nu_o}(\mathbf{L})$, як у доведенні теореми 6.15. Звісно, $d(f,f_{j,m})\to0$ $(m,j\to\infty)$. Твердження 6.16 доведено. □

6.6 Існування неперервної функції $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ такої, що ціла функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних

У одновимірному випадку М.М. Шеремета [207] (див. також [70]) висунув гіпотезу, що якщо ціла функція f має обмежену кратність нулів, то існує додатна неперервна функція l така, що f обмеженого l-індексу. Згодом у [66] було доведено цю гіпотезу. Інші цікаві проблеми, пов'язані з існуванням цілої функції обмеженого l-індексу для заданої l, розглянуті в [122, 209].

У багатовимірному випадку відомий аналог згаданого твердження для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком [56].

Для цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних аналог такого твердження не був відомий. Це обумовлено тим фактом, що означення [264] спершу було дане для $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$. Навіть більше, функції з цього класу мають властивість [264]: $\ln \max\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\} = O(\sum_{j=1}^n l_j(r_j))$ при $r_1 + \ldots + r_n \to +\infty$. Останнє співвідношення, зокрема, є свідченням того, що функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу в сенсі означення 1.1 у деякому розумінні має властивості схожі на властивості функції з відокремленими змінними.

Водночас, у цьому розділі ми перенесли згадане означення на ширший клас вектор-функцій $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ неперервна функція, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тому виникає таке природне питання: *Чи існує неперервна вектор-функція $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ для будь-якої цілої функції F з обмеженою кратністю нульової множини така, що F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних?*

Нижче даємо ствердну відповідь на це запитання.

Нехай F — ціла функція, Z_F — нульова множина функції F. Якщо $z^0 \in Z_F$, то через $p_F(z^0)$ позначимо "кратність" нульової точки z^0 функції F, тобто, таке ціле число, що для всіх J, $\|J\| < p_F(z^0)$, $F^{(J)}(z^0) = 0$, але, принаймні для одного J, $\|J\| = p_F(z^0)$, виконується $F^{(J)}(z^0) \neq 0$.

Теорема 6.11. *Для того, щоб для цілої функції F існувала додатна неперервна вектор-функція $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ така, що $F(z)$ є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних необхідно та досить, щоб існувало $p \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $p_F(z^0) \leq p$ для всіх $z^0 \in Z_F$.*

Доведення. Необхідність. Для спрощення запису ми скрізь у доведенні вживаємо позначення $p_0 := p_F(z^0)$. Необхідність випливає безпосередньо з означення обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Справді, припустимо від супротивного, що

$$(\forall p \in \mathbb{Z}_+)(\exists z^0 \in Z_F): \quad p_0 > p.$$

Це означає, що для деякого $J^0 \in \mathbb{Z}^+_n$, $\|J^0\| = p_0$, справджується $F^{(J^0)}(z^0) \neq 0$ та $F^{(J)}(z^0) = 0$ для всіх J, $\|J\| \leq p_0 - 1$ та $z^0 \in Z_F$. Тому, $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних в точці z^0 не менший за $p_0 > p$, тобто, $N(F, \mathbf{L}, z^0) \geq p_0 > p$. Якщо

$p \to +\infty$, то ми отримуємо $N(F, \mathbf{L}, z^0) \to +\infty$. А це суперечить обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних функції F.

Достатність. Нехай p — найменше натуральне число таке, що $(\forall z^0 \in Z_F)$: $p_0 \le p$. Для A, $B \in \mathbb{R}^n_+$ позначимо

$$\max\{A, B\} = (\max\{a_1, b_1\}, \ldots, \max\{a_n, b_n\}).$$

Визначимо $K_R = \{z \in \mathbb{C}^n \colon z \in \mathbb{D}^n[\mathbf{0}, R+\mathbf{1}] \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, \max\{\mathbf{0}, R-\mathbf{1}\})\}$ для всіх $R \ge \mathbf{0}$ та

$$m_1(R) = \min_{z^0 \in K_R \cap Z_F} \left\{ \frac{\left|F^{(J^0)}(z^0)\right|}{J^0!} \colon \ \|J^0\| = p_0, F^{(J^0)}(z^0) \ne 0 \right\}.$$

Позаяк F — ціла функція, то існує $E = E(R) = (\varepsilon_1(R), \ldots, \varepsilon_n(R)) > \mathbf{0}$ така, що

$$\frac{\left|F^{(J^0)}(z)\right|}{J^0!} \ge \frac{m_1(R)}{2}$$

для всіх $z \in K_R \cap G_E$, $\quad G_E = \bigcup_{z^0 \in Z_F} \mathbb{D}^n(z^0, E(R))$, та для кожного J^0, $\|J^0\| = p_0$ з $F^{(J^0)}(z^0) \ne 0$. Введемо позначення

$$m_2(R) = \min\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{D}^n[\mathbf{0}, R+\mathbf{1}], z \notin G_E\},$$
$$Q(R) = \min\{m_1(R)/2, m_2(R)\}.$$

Для довільного $z \in \mathbb{C}^n$ покладемо $R = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$. Тоді бодай одне з чисел $|F(z)|$, $\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!}$ при $\|J\| \le p$ не менше, ніж $Q(R)$ (відповідно, $\frac{|F^{(J^0)}(z)|}{J^0!}$ для $z \in K_R \cap G_E$ та $|F(z)|$ для $z \in K_R \setminus G_E$). Звідси випливає, що

$$\max\left\{ \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!} \colon \|J\| \le p \right\} \ge Q(R, z^0). \tag{6.111}$$

Застосовуючи формулу Коші для полікруга $\mathbb{D}^n(z, \mathbf{1})$, ви встановлюємо, що для всіх J, $\|J\| \ge p+1$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!} = \left| \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n(z,\mathbf{1})} \frac{F(\tau)}{(\tau - z)^{J+\mathbf{1}}} d\tau \right| \le \max\{|F(\tau)| \colon \tau \in \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R+\mathbf{1})\}. \tag{6.112}$$

Додатну неперервну вектор-функцію $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ виберемо так

$$l_1(z) = \ldots = l_n(z) := \max\left\{ \frac{\max\{|F(\tau)| \colon \tau \in \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R+\mathbf{1})\}}{Q(R)}, 1 \right\}$$

Враховуючи (6.111) та (6.112), отримуємо, що для всіх $\|J\| \ge p+1$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|/(J!\mathbf{L}^J(z))}{\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \le p\right\}} \le \frac{l_1^{-\|J\|}(z)}{Q(R) l_1^{-p}(z)} \times$$
$$\times \max\{|F(\tau)| \colon \tau \in \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R+\mathbf{1})\} \le l_1^{p+1-\|J\|}(z) \le 1.$$

Звідси, маємо

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le p\right\}.$$

З огляду на довільність z ціла функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. $\square$

Через $\mathcal{B}^n$ позначимо множину цілих функцій з рівномірно обмеженою кратністю нульових точок. З доведеної теореми, а також з того, що коли $\mathbf{L}_1(z) \le \mathbf{L}_2(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ і $F \in B^n(\mathbf{L}_1)$, то $F \in B^n(\mathbf{L}_2)$ (див. лему 6.4), як наслідок випливає таке твердження

Наслідок 6.8. *Нехай $\mathbf{L}_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ послідовність неперервних вектор-функцій, кожна компонента якої монотонно зростає до $+\infty$ за кожною змінною. Тоді $\bigcup_k B^n(\mathbf{L}_k) = \mathcal{B}^n$.*

6.7 Оцінки зростання цілих функцій

У 1970 році В. Дж. Пудж та С. М. Шах [175] поставили ряд питань про властивості цілих функцій обмеженого індексу. Одним з цих питань є таке: *I. Яким є зростання функцій обмеженого індексу: (c) чи можна вивести обмеженість (або, навпаки, необмеженість) індексу з асимптотичних властивостей логарифма максимуму модуля $f(z)$, тобто,* $\ln M(r, f)$*?*

В. К. Хейман [128] довів, що ціла функція обмеженого індексу має експоненційний тип, який не перевищує $N(f) + 1$. Пізніше А. Д. Кузик та М. М. Шеремета [150] отримали оцінку зростання цілої функції обмеженого $l-$індексу. М. М. Шеремета, В. О. Кушнір, Т. О. Банах [6, 206] вивели подібні нерівності для аналітичних в одиничному крузі та в довільній комплексній області функцій обмеженого l-індексу.

Зрозуміло, що питання Шаха та Пуджа можна сформулювати для цілих у $\mathbb{C}^n$ функцій: *Яким є зростання функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних? Чи можна вивести обмеженість (або необмеженість) $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з асимптотичних властивостей логарифма максимуму модуля функції $F(z)$ на кістяку полікруга?*

У [264] дано відповідь на це питання, коли $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$, та для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$ функція $l_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — додатною. Тут розширюємо їхні результати для $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$. Зазначимо, що ціла функція $f(z) = e^{z_1 \cdots z_n}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ є необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для будь-якої функції $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$. Але вона має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних для функції $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z) = |z_1 \cdots z_{j-1} z_{j+1} \cdots z_n| + 1$. У деякому розумінні наші результати є новими навіть в одновимірному випадку (див. зауваження 6.12 та зауваження до

теореми 6.13). Отримані оцінки не є прямими аналогами результатів М. Т. Бордуляк та М. М. Шеремети. Вони — *точніші* (див. зауваження 6.12). Крім того, показуємо, що нерівність (6.125) точна.

Нехай $\mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(R)$, $R = (r_1, \ldots, r_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $r_k = |z_k|$ $(1 \le k \le n)$. Позначимо $r^* = \max_{1\le k\le n} r_k$. У цьому випадку наш основний результат має вигляд

Теорема 6.12. *Нехай* $\mathbf{L}(R) = (l_1(R), \ldots, l_n(R))$, $l_j(R)$ *— додатні неперервно диференційовні неспадні функції за кожною змінною* $r_k \in [0, +\infty)$, $k, j \in \{1, \ldots, n\}$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F, \mathbf{L})$ *за сукупністю змінних, то*

$$\varlimsup_{|R|\to+\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R)\rangle d\tau} \le N + 1.$$

Ця теорема є наслідком з твердження 6.18, яка отримана за значно загальніших умов на функцію $\mathbf{L}$.

Через K^n позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z)$, для яких існує $c > 0$ таке, що для всіх $R \in \mathbb{R}^n_+$ та $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\max_{\Theta_1,\Theta_2\in[0,2\pi]^n} \frac{l_j(Re^{i\Theta_2})}{l_j(Re^{i\Theta_1})} \le c.$$

Якщо $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|, \ldots, |z_n|), \ldots, l_n(|z_1|, \ldots, |z_n|))$, то $\mathbf{L} \in K^n$. Легко довести, що $|e^z| + 1 \in Q^1 \setminus K^1$, але $e^{e^{|z|}} \in K^1 \setminus Q^1$, $z \in \mathbb{C}$. Крім того, за умови $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \in K^n$ маємо, що $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \in K^n$ та $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 \in K^n$. Для спрощення будемо писати $K \equiv K^1$ та $M(F, R) = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}$.

Теорема 6.13. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n \cap K^n$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln M(F, R) = O\left(\min_{\sigma_n\in\mathcal{S}_n} \min_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \sum_{j=1}^n \int_0^{r_j} l_j(R(j, \sigma_n, t)e^{i\Theta})dt\right) \text{ при } |R| \to \infty, \tag{6.113}$$

де σ_n *— перестановка з* $\{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{S}_n$ *— множина усіх перестановок з* $\{1, \ldots, n\}$, $R(j, \sigma_n, t) = (r'_1, \ldots, r'_n)$, $r'_k = \begin{cases} r^0_k, & \text{якщо } \sigma_n(k) < j, \\ t, & \text{якщо } k = j, \\ r_k, & \text{якщо } \sigma_n(k) > j, \end{cases}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$, $R^0 = (r^0_1, \ldots, r^0_n)$ *— досить великий радіус.*

Доведення. Нехай $R > 0$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$ та точка $z^* \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})})$ така, що

$$|F(z^*)| = \max\left\{|F(z)| : z \in T^n\left(\mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}.$$

Позначимо $z^0 = \frac{z^* R}{R + \mathbf{2}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}$. Тоді для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$|z^0_j - z^*_j| = \left|\frac{z^*_j r_j}{r_j + 2/l_j(Re^{i\Theta})} - z^*_j\right| = \left|\frac{2z^*_j/l_j(Re^{i\Theta})}{r_j + 2/l_j(Re^{i\Theta})}\right| = \frac{2}{l_j(Re^{i\Theta})} \text{ та}$$

$$\mathbf{L}(z^0)=\mathbf{L}\left(\frac{z^*R}{R+\mathbf{2}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)=\mathbf{L}\left(\frac{(R+\mathbf{2}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta}))e^{i\arg z^*}R}{R+\mathbf{2}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)=\mathbf{L}(Re^{i\arg z^*}).$$

Позаяк $\mathbf{L}\in K^n$, маємо, що $c\mathbf{L}(z^0)=c\mathbf{L}(Re^{i\arg z^*})\geq\mathbf{L}(Re^{i\Theta})\geq\frac{1}{c}\mathbf{L}(z^0)$. Розглянемо два кістяки $\mathbb{T}^n(z^0,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$ та $\mathbb{T}^n(z^0,\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)})$. За теоремою 3.3 існує $p_1=p_1(\frac{\mathbf{1}}{c},c\mathbf{2})\geq 1$ таке, що (6.11) виконується з $R'=\frac{\mathbf{1}}{c}$, $R''=c\mathbf{2}$, тобто,

$$\max\left\{|F(z)|\colon z\in T^n\left(\mathbf{0},R+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}\leq\max\left\{|F(z)|\colon z\in T^n\left(z^0,\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}\leq$$
$$\leq\max\left\{|F(z)|\colon z\in T^n\left(z^0,\frac{c\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}\leq p_1\max\left\{|F(z)|\colon z\in T^n\left(z^0,\frac{\mathbf{1}}{c\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\}\leq$$
$$\leq p_1\max\left\{|F(z)|:z\in T^n\left(\mathbf{0},R+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}\tag{6.114}$$

Функція $\ln^+\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}$ є опуклою функцією відносно змінних $\ln r_1,\ldots,\ln r_n$ (див. [177, с.84]). Тому ця функція допускає представлення

$$\ln^+\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}-\ln^+\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R+(r_j^0-r_j)\mathbf{1}_j)\}=$$
$$=\int_{r_j^0}^{r_j}\frac{A_j(r_1,\ldots,r_{j-1},t,r_{j+1},\ldots,r_n)}{t}dt\tag{6.115}$$

для довільних $0<r_j^0\leq r_j<+\infty$, де функції $A_j(r_1,\ldots,r_{j-1},t,r_{j+1},\ldots,r_n)$ — додатні неспадні за змінною $t\in(0;+\infty)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Використовуючи (6.114), встановлюємо

$$\ln p_1\geq\ln\max\left\{|F(z)|\colon z\in T^n\left(\mathbf{0},R+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}-$$
$$-\ln\max\left\{|F(z)|:z\in T^n\left(\mathbf{0},R+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}=$$
$$=\sum_{j=1}^n\ln\max\left\{|F(z)|\colon z\in T^n\left(\mathbf{0},R+\frac{\mathbf{1}+\sum_{k=j}^n\mathbf{1}_k}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}-$$
$$-\ln\max\left\{|F(z)|\colon z\in T^n\left(\mathbf{0},R+\frac{\mathbf{1}+\sum_{k=j+1}^n\mathbf{1}_k}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\right)\right\}=$$
$$=\sum_{j=1}^n\int_{r_j+1/l_j(Re^{i\Theta})}^{r_j+2/l_j(Re^{i\Theta})}\frac{1}{t}A_j\left(r_1+\frac{1}{l_1(Re^{i\Theta})},\ldots,r_{j-1}+\frac{1}{l_{j-1}(Re^{i\Theta})},t,\right.$$
$$\left.r_{j+1}+\frac{2}{l_{j+1}(Re^{i\Theta})},\ldots,r_n+\frac{2}{l_n(Re^{i\Theta})}\right)dt\geq\sum_{j=1}^n\ln\left(1+\frac{1}{r_jl_j(Re^{i\Theta})+1}\right)\times$$
$$\times A_j\left(r_1+\frac{1}{l_1(Re^{i\Theta})},\ldots,r_{j-1}+\frac{1}{l_{j-1}(Re^{i\Theta})},r_j,r_{j+1}+\frac{2}{l_{j+1}(Re^{i\Theta})},\ldots,r_n+\frac{2}{l_n(Re^{i\Theta})}\right).\tag{6.116}$$

За лемою 6.3 функція $r_jl_j(Re^{i\Theta})\to+\infty$ ($r_j\to+\infty$). Тоді для $j\in\{1,\ldots,n\}$ та

$r_j \geq r_j^0$ маємо

$$\ln\left(1+\frac{1}{r_j l_j(Re^{i\Theta})+1}\right) \sim \frac{1}{r_j l_j(Re^{i\Theta})+1} \geq \frac{1}{2r_j l_j(Re^{i\Theta})}.$$

Отже, для кожного $j \in \{1,\ldots,n\}$ з нерівності (6.116) отримуємо

$$A_j\left(r_1+\frac{1}{l_1(Re^{i\Theta})},\ldots,r_{i-1}+\frac{1}{l_{j-1}(Re^{i\Theta})},r_j,r_{j+1}+\frac{2}{l_{j+1}(Re^{i\Theta})},\ldots,\right.$$
$$\left. r_n+\frac{2}{l_n(Re^{i\Theta})}\right) \leq 2\ln p_1\ r_j l_j(Re^{i\Theta}).$$

Нехай $R^0=(r_1^0,\ldots,r_n^0)$, де кожне r_j^0 вибране вище. Застосовуючи послідовно формулу (6.115) n раз, одержимо

$$\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\} =$$
$$= \ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R+(r_1^0-r_1)\mathbf{1}_1)\} + \int_{r_1^0}^{r_1}\frac{A_1(t,r_2,\ldots,r_n)}{t}dt =$$
$$= \ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R+(r_1^0-r_1)\mathbf{1}_1+(r_2^0-r_2)\mathbf{1}_2)\}+$$
$$+\int_{r_1^0}^{r_1}\frac{A_1(t,r_2,\ldots,r_n)}{t}dt+\int_{r_2^0}^{r_2}\frac{A_2(r_1^0,t,r_3\ldots,r_n)}{t}dt =$$
$$=\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R^0)\}+\sum_{j=1}^n\int_{r_j^0}^{r_j}\frac{A_j(r_1^0,\ldots,r_{j-1}^0,t,r_{j+1},\ldots,r_n)}{t}dt\leq$$
$$\leq \ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R^0)\}+$$
$$+2\ln p_1\sum_{j=1}^n\int_{r_j^0}^{r_j} l_j(r_1^0e^{i\theta_1},\ldots,r_{j-1}^0e^{i\theta_{j-1}},te^{i\theta_j},r_{j+1}e^{i\theta_{j+1}},\ldots,r_ne^{i\theta_n})dt\leq$$
$$\leq \ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R^0)\}+$$
$$+2\ln p_1\sum_{j=1}^n\int_{0}^{r_j} l_j(r_1^0e^{i\theta_1},\ldots,r_{j-1}^0e^{i\theta_{j-1}},te^{i\theta_j},r_{j+1}e^{i\theta_{j+1}},\ldots,r_ne^{i\theta_n})dt\leq$$
$$\leq C(R^0)\sum_{j=1}^n\int_{0}^{r_j} l_j(r_1^0e^{i\theta_1},\ldots,r_{j-1}^0e^{i\theta_{j-1}},te^{i\theta_j},r_{j+1}e^{i\theta_{j+1}},\ldots,r_ne^{i\theta_n})dt,$$

де $C(R^0)$ — деяка стала. Функція $\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}$ незалежна від Θ. Тому справедлива така оцінка

$$\ln\max\{|F(z)|\colon z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\} =$$
$$=O\left(\min_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\sum_{j=1}^n\int_0^{r_j} l_j(r_1^0e^{i\theta_1},\ldots,r_{j-1}^0e^{i\theta_{j-1}},te^{i\theta_j},r_{j+1}e^{i\theta_{j+1}},\ldots,r_ne^{i\theta_n})dt\right),$$

при $|R|\to+\infty$. Очевидно, що подібна рівність може бути доведена для будь-якої перестановки σ_n множини $\{1,2,\ldots,n\}$. Тому, справджується оцінка (6.113). Теорему 6.13 доведено. $\square$

Наслідок 6.9. *Якщо* $\mathbf{L} \in Q^n \cap K^n$, $\min\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} l_j(Re^{i\Theta})$ *неспадна за кожною змінною* r_k, k, $j \in \{1,\dots,n\}$, $k \neq j$ *та ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln\max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\} = O\left(\min_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{r_j} l_j(R^{(j)}e^{i\Theta})dt\right)$$

при $|R| \to \infty$, *де* $R^{(j)} = (r_1,\dots,r_{j-1},t,r_{j+1},\dots,r_n)$.

Зазначимо, що теорема 6.13 нова навіть для $n = 1$, бо ми замінили умову $l = l(|z|)$ на умову $l \in K$, тобто, існує $c > 0$ таке, що для кожного $r > 0$ $\max\limits_{\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]} \frac{l(re^{i\theta_2})}{l(re^{i\theta_1})} \le c$.

В. К. Хейман, А. Д. Кузик, М. М. Шеремета [128, 150] покращили оцінку (6.113) через інші умови на функцію l для випадку $n = 1$. В [264] встановлено подібні результати для цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, якщо $l_j = l_j(|z_j|)$, $j \in \{1,\dots,n\}$. Використовуючи їхній метод, узагальнимо цю оцінку для $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$.

Позначимо $a^+ = \max\{a, 0\}$, $u_j(t) = u_j(t,R,\Theta) = l_j(\frac{tR}{r^*}e^{i\Theta})$, де $a \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $r^* = \max_{1\le j\le n} r_j$.

Твердження 6.17. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* $r_k \in [0,+\infty)$, $k \in \{1,\dots,n\}$, $\Theta \in [0,2\pi]^n$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних, то для кожного* $\Theta \in [0,2\pi]^n$ *та для всіх* $R \in \mathbb{R}^n_+$ *і* $S \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\ln\max\left\{\frac{|F^{(S)}(Re^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Re^{i\Theta})}:\ \|S\|\le N\right\} \le \ln\max\left\{\frac{|F^{(S)}(\mathbf{0})|}{S!\mathbf{L}^S(\mathbf{0})}:\ \|S\|\le N\right\} +$$
$$+\int_0^{r^*}\left(\max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j}{r^*}(k_j+1)l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right)\right\} + \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j(-u_j'(\tau))^+}{l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right)}\right\}\right)d\tau. \tag{6.117}$$

Доведення. Нехай $R \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\Theta \in [0,2\pi]^n$. Позначимо $\alpha_j = \frac{r_j}{r^*}$, $j \in \{1,\dots,n\}$ та $A = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Розглянемо функцію

$$g(t) = \max\left\{\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}:\ \|S\|\le N\right\}, \tag{6.118}$$

де $At = (\alpha_1 t,\dots,\alpha_n t)$, $Ate^{i\Theta} = (\alpha_1 te^{i\theta_1},\dots,\alpha_n te^{i\theta_n})$.

Оскільки функція $\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{K!\mathbf{L}^K(Ate^{i\Theta})}$ неперервно диференційовна за дійсною змінною $t \in [0,+\infty)$ зовні нульової множини функції $|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|$, функція $g(t)$ також неперервно диференційовна на $[0,+\infty)$, крім, можливо, зліченної множини точок.

Тому, застосовуючи нерівність $\frac{d}{dr}|g(r)| \le |g'(r)|$, яка виконується скрізь за винятком точок $r = t$, в яких $g(t) = 0$, виводимо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\right) = \frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\frac{d}{dt}|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})| +$$

$$+|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|\frac{d}{dt}\frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})} \le \frac{1}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\left|\sum_{j=1}^n F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})\alpha_j e^{i\theta_j}\right| -$$

$$\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^n \frac{s_j u_j'(t)}{l_j(Ate^{i\Theta})} \le \sum_{j=1}^n \frac{|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{(S+\mathbf{1}_j)!\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})}\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})+$$

$$+\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}. \tag{6.119}$$

Для абсолютно неперервних функцій h_1, h_2, $\ldots$, h_k та $h(x) := \max\{h_j(z) : 1 \le j \le k\}$, $h'(x) \le \max\{h_j'(x) : 1 \le j \le k\}$, $x \in [a,b]$ (див. [206, лема 4.1, с. 81]). Функція g абсолютно неперервна, тому з (6.119) отримуємо

$$g'(t) \le \max\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\right) : \|S\| \le N\right\} \le$$

$$\le \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})|F^{(S+\mathbf{1}_j)}(Ate^{i\Theta})|}{(S+\mathbf{1}_j)!\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}_j}(Ate^{i\Theta})} + \frac{|F^{(S)}(Ate^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Ate^{i\Theta})}\frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\} \le$$

$$\le g(t)\left(\max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})\right\} + \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}\right) =$$

$$= g(t)(\beta(t)+\gamma(t)),$$

де $\beta(t) = \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \alpha_j(s_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})\right\}$, $\gamma(t) = \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}\right\}$. Тому, $\frac{d}{dt}\ln g(t) \le \beta(t)+\gamma(t)$ та

$$g(t) \le g(0)\exp\int_0^t (\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau, \tag{6.120}$$

бо $g(0) \ne 0$. Але $r^*A = R$. Відповідно підставляючи $t = r^*$ в (6.120) і враховуючи (6.118), дістаємо

$$\ln\max\left\{\frac{|F^{(S)}(Re^{i\Theta})|}{S!\mathbf{L}^S(Re^{i\Theta})} : \ \|S\| \le N\right\} \le \ln\max\left\{\frac{|F^{(S)}(\mathbf{0})|}{S!\mathbf{L}^S(\mathbf{0})} : \ \|S\| \le N\right\} +$$

$$+\int_0^{r^*}\left(\max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \alpha_j(s_j+1)l_j(A\tau e^{i\Theta})\right\} + \max_{\|S\|\le N}\left\{\sum_{j=1}^n \frac{s_j(-u_j'(\tau))^+}{l_j(A\tau e^{i\Theta})}\right\}\right)d\tau,$$

тобто, (6.117) доведено. □

Теорема 6.14. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* $r_k \in [0,+\infty)$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\Theta \in [0,2\pi]^n$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних та існує* $C > 0$ *таке, що функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє нерівності*

$$\sup_{R\in\mathbb{R}_+^n}\max_{t\in[0,r^*]}\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\max_{1\le j\le n}\frac{(-(u_j(t,R,\Theta))_t')^+}{\frac{r_j}{r^*}l_j^2(\frac{t}{r^*}Re^{i\Theta})} \le C, \tag{6.121}$$

$$\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1 \left\langle R, \mathbf{L}\left(\tau Re^{i\Theta}\right)\right\rangle d\tau \to +\infty \text{ при } |R|\to+\infty, \tag{6.122}$$

то

$$\varlimsup_{|R|\to+\infty} \frac{\ln\max\{|F(z)|\colon\ z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}\left(\tau Re^{i\Theta}\right)\rangle d\tau} \le (C+1)N+1. \tag{6.123}$$

Доведення. Позначимо $\widetilde{\beta}(t)=\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})$. Якщо ж (6.121)-(6.122) виконуються, то для деякого S^*, $\|S^*\|\le N$ та $\widetilde{S}$, $\|\widetilde{S}\|\le N$,

$$\frac{\gamma(t)}{\widetilde{\beta}(t)}=\frac{\sum_{j=1}^n \frac{s_j^*(-u_j'(t))^+}{l_j(Ate^{i\Theta})}}{\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})}\le \sum_{j=1}^n s_j^*\frac{(-u_j'(t))^+}{\alpha_j l_j^2(Ate^{i\Theta})}\le \sum_{j=1}^n s_j^*\cdot C\le NC \text{ та}$$

$$\frac{\beta(t)}{\widetilde{\beta}(t)}=\frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j(\tilde{s}_j+1)l_j(Ate^{i\Theta})}{\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})}=1+\frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j\tilde{s}_j l_j(Ate^{i\Theta})}{\sum_{j=1}^n \alpha_j l_j(Ate^{i\Theta})}\le$$

$$\le 1+\sum_{j=1}^n \tilde{s}_j\le 1+N.$$

З огляду на (6.120) маємо $|F(Ate^{i\Theta})|\le g(t)\le g(0)\exp\int_0^t(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau$ і $r^*A=R$. Покладемо $t=r^*$ і отримуємо

$$\ln\max\{|F(z)|\colon\ z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}=\ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}|F(Re^{i\Theta})|\le\ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}g(r^*)\le$$

$$\le\ln g(0)+\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^{r^*}(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau\le$$

$$\le\ln g(0)+(NC+N+1)\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^{r^*}\widetilde{\beta}(\tau)d\tau=$$

$$=\ln g(0)+(NC+N+1)\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^{r^*}\sum_{j=1}^n\alpha_j l_j(A\tau e^{i\Theta})d\tau=$$

$$=\ln g(0)+(NC+N+1)\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^{r^*}\sum_{j=1}^n\frac{r_j}{r^*}l_j\left(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\right)d\tau=$$

$$=\ln g(0)+(NC+N+1)\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^{1}\sum_{j=1}^n r_j l_j\left(\tau Re^{i\Theta}\right)d\tau$$

Отже, робимо висновок про правильність нерівності (6.123). Теорема 6.14 доведена. □

Твердження 6.18. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* $r_k\in[0,+\infty)$, $k\in\{1,\dots,n\}$, $\Theta\in[0,2\pi]^n$. *Якщо ціла функця* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N=N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних та*

$$r^*(-(u_j(t,R,\Theta))'_{t=r^*})^+/(r_j l_j^2(Re^{i\Theta}))\to 0 \tag{6.124}$$

рівномірно для всіх $\Theta \in [0, 2\pi]^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *та* (6.122) *виконується при* $|R| \to +\infty$, *то*

$$\varlimsup_{|R|\to+\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}\left(\tau R e^{i\Theta}\right)\rangle d\tau} \le N + 1. \tag{6.125}$$

Оцінка (6.125) може бути встановлена за аналогією з доведенням теореми 6.14.

Якщо $\mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(R)$, то (6.122) та (6.124) можна записати у зручнішій формі.

Наслідок 6.10. *Нехай* $\mathbf{L}(R)$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* $r_k \in [0, +\infty)$, $k \in \{1, \dots, n\}$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F, \mathbf{L})$ *за сукупністю змінних і для кожного* $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\langle R, \nabla l_j(R)\rangle}{r_j l_j^2(R)} \to 0, \quad \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}\left(\tau R\right)\rangle\, d\tau \to +\infty \text{ при } |R| \to +\infty,$$

то

$$\varlimsup_{|R|\to+\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\int_0^1 \langle R, \mathbf{L}\left(\tau R\right)\rangle d\tau} \le N + 1,$$

де $\nabla l_j(R) = (\frac{\partial l_j(R)}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial l_j(R)}{r_n})$.

Зауваження 6.12. Наш результат *точніший*, ніж результат Шеремети, який отриманий для випадку $n = 1$, $C \ne 0$ та $l(|z|)$. Справді, відповідно теорема з [206, с. 83] стверджує, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \max\{|f(z)\colon |z| = r\}}{\int_0^r l(\tau) d\tau} \le (C + 1)(N + 1).$$

Очевидно, що $NC + N + 1 < (C + 1)(N + 1)$ для $C \ne 0$ та $N \ne 0$.

Оцінка (6.125) точна. У цьому легко переконатися для таких функцій $F(z_1, z_2) = \exp(z_1 z_2)$, $l_1(z_1, z_2) = |z_2| + 1$, $l_2(z_1, z_2) = |z_1| + 1$. Тоді $N(F, \mathbf{L}) = 0$ та $\ln \max\{|F(z)|\colon z \in T^2(\mathbf{0}, R)\} = r_1 r_2$.

6.8 Достатні умови обмеженості L-індексу за сукупністю змінних для суми цілих функцій

У 1970 році В. Дж. Пудж та С. М. Шах [175] поставили деякі питання про властивості цілих функцій обмеженого індексу. Одне з цих питань є таким: *II. Класи функцій обмеженого індексу: чи сума (або добуток) двох функцій обмеженого індексу також є обмеженого індексу?*

Пізніше В. Дж. Пудж [174] довів, що сума двох функцій обмеженого індексу не обов'язково буде функцією обмеженого індексу. Він запропонував приклад двох цілих функцій, сума яких є функцією з необмеженою кратністю нулів,

тобто, функцією необмеженого індексу. Також ним встановлені достатні умови обмеженості індексу для суми цілих функцій.

Приклад Пуджа і його теорема були узагальнені для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком (див. підрозділи 5.3.1, 5.3). Але ми також почали вивчати властивості цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$- індексу за сукупністю змінних, де $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ — неперервна вектор-функція.

Зрозуміло, що питання Шаха та Пуджа можна сформулювати для цілих функцій від декількох змінних: *Чи сума двох цілих функцій обмеженого* $\mathbf{L}$-*індексу за сукупністю змінних також є функцією обмеженого* $\mathbf{L}$-*індексу за сукупністю змінних?*

Тут ми формулюємо і доводимо відповідну теорему, яка дає достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу для суми цілих функцій від декількох змінних.

Теорема 6.15. *Нехай* $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ *— неперервна функція,* F, G *— цілі функції в* $\mathbb{C}^n$, *які задовольняють такі умови:*

1) $G(z)$ *має обмежений* $\mathbf{L}$-*індекс за сукупністю змінних з* $N(G, \mathbf{L}) = N < +\infty$;
2) *знайдеться* $\alpha \in (0, 1)$ *таке, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n$ *та кожного* $\|P\| \geq N + 1$ $(P \in \mathbb{N}^n)$
$$\frac{|G^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}^P(z)} \leq \alpha \max\left\{\frac{|G^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \leq N\right\}; \tag{6.126}$$
3) *для деякого* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ $(F(z^0) \neq 0)$ *та кожного* $z \in \mathbb{C}^n$ *виконуються нерівності*
$$\max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{2R}{\mathbf{L}(z)}\right)\right\} \leq \max\left\{\frac{|G^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \ \|K\| \leq N\right\} \tag{6.127}$$
де $r_j = |z_j - z_j^0| l_j(z)$, $R = (r_1, \ldots, r_n)$.
4) *справджується одна з наступних умов — або* $(\exists c \geq 1)$ $(\forall z \in \mathbb{C}^n)$ *таке, що* $|z_j - z_j^0| l_j(z) \leq 1$ *для деякого* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *та*
$$\frac{\max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R/L(z))\right\}}{|F(z^0)|} \leq c < +\infty,$$
або $L \in Q^n$.

Тоді для кожного $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| \leq \frac{1-\alpha}{2c}$, *функція*
$$H(z) = G(z) + \varepsilon F(z) \tag{6.128}$$
має обмежений $\mathbf{L}$-*індекс за сукупністю змінних та* $N(H, \mathbf{L}) \leq N$.

Доведення. Спершу зазначимо, що при $L \in Q^n$ за лемою 6.3 множина $A := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| l_j(z) \leq 1$ для деякого $j \in \{1, \ldots, n\}\}$ є обмеженою. Тому $(\exists c \geq 1)$ $(\forall z \in A)$ справджується нерівність
$$\frac{\max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2\max\{\frac{\Lambda_2(\mathbf{1})}{\mathbf{L}(z^0)}, \frac{R}{\mathbf{L}(z)}\})\right\}}{|F(z^0)|} \leq c < +\infty. \tag{6.129}$$

Запишемо формулу Коші для цілої функції $F(z)$

$$\frac{F^{(P)}(z)}{P!} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{z' \in \mathbb{T}^n(z, R/\mathbf{L}(z))} \frac{F(z')}{(z'-z)^{P+\mathbf{1}}} dz'. \tag{6.130}$$

Для вибраного $r_j = |z_j - z_j^0| l_j(z)$ виконуються такі нерівності

$$\frac{r_j}{l_j(z)} = |z_j' - z_j| \geq |z_j' - z_j^0| - |z_j - z_j^0| = |z_j' - z_j^0| - \frac{r_j}{l_j(z)}.$$

Звідси,

$$|z_j' - z_j^0| \leq \frac{2r_j}{l_j(z)}. \tag{6.131}$$

З формули (6.130) отримуємо

$$\frac{|F^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}^P(z)} \leq \frac{1}{(2\pi)^n \mathbf{L}^P(z)} \cdot \frac{\mathbf{L}^{P+\mathbf{1}}(z)}{R^{P+\mathbf{1}}} \prod_{j=1}^n \frac{2\pi r_j}{l_j(z)} \max\left\{|F(z')| : z' \in \mathbb{T}^n(z, R/\mathbf{L}(z))\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{R^P} \max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R/\mathbf{L}(z))\right\}. \tag{6.132}$$

Якщо $R^P > 1$, то (6.132) означає, що

$$\frac{|F^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}^P(z)} \leq \max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R/\mathbf{L}(z))\right\}. \tag{6.133}$$

Нехай $R^P \in (0;1]$. Тоді для деякого $j \in \{1, \ldots, n\}$ $r_j = |z_j - z_j^0| l_j(z) \in (0;1]$. Поклавши $r_j = 1$ для цих j у (6.130) та (6.131) і $R' = \max\{\mathbf{1}, R\}$, подібно виводимо

$$\frac{|F^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}^P(z)} \leq \frac{1}{R'^P} \max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R'/\mathbf{L}(z))\right\} =$$

$$= \frac{1}{R'^P} \frac{\max\left\{|F(z')| : z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R'/\mathbf{L}(z))\right\}}{\max\left\{|F(z')| : z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R/\mathbf{L}(z))\right\}} \max\left\{|F(z')| : z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R/\mathbf{L}(z))\right\} \leq$$

$$\leq \frac{\max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R/\mathbf{L}(z))\right\}}{R'^P |F(z^0)|} \max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R/\mathbf{L}(z))\right\} \leq$$

$$\leq c \max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R/\mathbf{L}(z))\right\}, \tag{6.134}$$

де

$$c = \sup_{\substack{z \in \mathbb{C}^n \ \exists j \in \{1,\ldots,n\} \\ |(z_j - z_j^0) l_j(z)| \leq 1}} \frac{\max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2R/\mathbf{L}(z))\right\}}{|F(z^0)|}.$$

Якщо $\mathbf{L} \in Q^n$, то $\sup\left\{\frac{l_j(z^0)}{l_j(z)} : \ z^0 \in \mathbb{D}^n(z, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z)})\right\} \leq \lambda_{2,j}(\mathbf{1})$. Це означає, що $l_j(z) \geq \frac{l_j(z^0)}{\lambda_{2,j}(\mathbf{1})}$. Використовуючи цю нерівність, виберемо

$$c := \sup_{\substack{z \in \mathbb{C}^n \ \exists j \in \{1,\ldots,n\} \\ |(z_j - z_j^0) l_j(z)| \leq 1}} \frac{\max\left\{|F(z')| : \ z' \in \mathbb{T}^n(z^0, 2\max\{\frac{\Lambda_2(\mathbf{1})}{\mathbf{L}(z^0)}, \frac{R}{\mathbf{L}(z)}\})\right\}}{|F(z^0)|} \geq 1$$

у (6.134). Зважаючи на (6.133) та (6.134), маємо

$$\frac{|F^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}^P(z)} \le c\max\left\{|F(z')|:\ z'\in\mathbb{T}^n(z^0,2R/\mathbf{L}(z))\right\} \tag{6.135}$$

для всіх $P\in\mathbb{Z}_+^n$.

Продиференціюємо рівність (6.128) p раз, $\|P\|=p\ge N+1$, та застосуємо послідовно (6.126), (6.135) та (6.127) до отриманої рівності

$$\frac{|H^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}^P(z)} \le \frac{|G^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}^P(z)} + \frac{|\varepsilon||F^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}^P(z)} \le \alpha\max\left\{\frac{|G^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\|K\|\le N\right\}+$$
$$+c|\varepsilon|\max\left\{|F(z')|:\ z'\in\mathbb{T}^n(z^0,2R/\mathbf{L}(z))\right\}\le$$
$$\le(\alpha+c|\varepsilon|)\max\left\{\frac{|G^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\|K\|\le N\right\}. \tag{6.136}$$

При $\|S\|\le N$ справджується (6.135) з $P=S$, але (6.126) не виконується. Тому диференціювання (6.128) дає нам нижню оцінку

$$\frac{|H^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}^S(z)} \ge \frac{|G^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}^S(z)} - \frac{|\varepsilon||F^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}^S(z)} \ge$$
$$\ge\frac{|G^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}^S(z)} - c|\varepsilon|\max\left\{|F(z')|:\ z'\in\mathbb{T}^n(z^0,2R/\mathbf{L}(z))\right\}, \tag{6.137}$$

де $\|S\|\le N$. З (6.127) та (6.137) випливає

$$\max\left\{\frac{|H^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}^S(z)}:\|S\|\le N\right\}\ge(1-c|\varepsilon|)\max\left\{\frac{|G^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}^S(z)}:\|S\|\le N\right\}. \tag{6.138}$$

При $c|\varepsilon|<1$ з (6.136) та (6.138) висновуємо

$$\frac{|H^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}^P(z)} \le \frac{\alpha+c|\varepsilon|}{1-c|\varepsilon|}\max_{0\le s\le N}\left\{\frac{|H^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}^S(z)}:\|S\|\le N\right\} \tag{6.139}$$

для $\|P\|\ge N+1$. Припустимо, що $\frac{\alpha+c|\varepsilon|}{1-c|\varepsilon|}\le 1$. Тоді $|\varepsilon|\le\frac{1-\alpha}{2c}$. Для такого ε функція H має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних з $N(H,\mathbf{L})\le N$. Теоерму 6.15 доведено. □

Зауваження 6.13. Кожна ціла функція F з $N(F,\mathbf{L})=0$ задовольняє нерівність (6.129) (див. доведення необхідності теореми 6.4).

Якщо $\mathbf{L}\in Q^n$, то умова 2) в теоремі 6.15 завжди справедлива. Правильна така теорема.

Теорема 6.16. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q^n$, $\alpha\in(0,1)$ *та* F, G *— цілі функції в* $\mathbb{C}^n$, *які задовольняють такі умови:*

1) $G(z)$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних;*
2) *для деякого* $z^0\in\mathbb{C}^n$ $(F(z^0)\ne 0)$ *та кожного* $z\in\mathbb{C}^n$ *виконується нерівність*

$$\max\left\{|F(z')|:\ z'\in\mathbb{T}^n\left(z^0,\frac{2R}{\mathbf{L}(z)}\right)\right\}\le\max\left\{\frac{|G^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\ \|K\|\le N(G_\alpha,\mathbf{L}_\alpha)\right\},$$

де $r_j=|z_j-z_j^0|l_j(z)$, $R=(r_1,\dots,r_n)$.

Якщо $|\varepsilon| \le \frac{1-\alpha}{2c}$, *то функція*

$$H(z) = G(z) + \varepsilon F(z)$$

має обмежений $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних з* $N(H, L) \le N(G_\alpha, \mathbf{L}_\alpha)$, *де* $G_\alpha(z) = G(z/\alpha)$, $\mathbf{L}_\alpha(z) = \mathbf{L}(z/\alpha)$.

Доведення. Умова 2) в теоремі 6.15 завжди виконується при $N = N(G_\alpha, \mathbf{L}_\alpha)$ замість $N = N(G, \mathbf{L})$, де $G_\alpha(z) = G(z/\alpha)$, $\mathbf{L}_\alpha(z) = \mathbf{L}(z/\alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$. Справді, за твердженням 6.2 нерівність (6.11) справджується для функції G. Підставляючи $\frac{z^0}{\alpha}$, $\frac{z}{\alpha}$ замість z^0, z відповідно в (6.11), отримуємо

$$\max\left\{|G(z/\alpha)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R''\alpha}{\mathbf{L}(z^0/\alpha)}\right)\right\} \le$$
$$\le p_1 \max\left\{|G(z/\alpha)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R'\alpha}{\mathbf{L}(z^0/\alpha)}\right)\right\}. \tag{6.140}$$

За твердженням 6.2 з нерівності (6.140) випливає, що $G_\alpha(z) = G(z/\alpha)$ має обмежений $\mathbf{L}_\alpha$-індекс за сукупністю змінних і навпаки. Тоді, для кожного $\|P\| \ge N(G_\alpha, \mathbf{L}_\alpha) + 1$ та $\alpha \in (0, 1)$ маємо

$$\frac{|G_\alpha^{(P)}(z)|}{P!\mathbf{L}_\alpha^P(z)} = \frac{|G^{(P)}(z/\alpha)|}{\alpha^{\|P\|}P!\mathbf{L}^P(z/\alpha)} \le \max\left\{\frac{|G_\alpha^{(S)}(z)|}{S!\mathbf{L}_\alpha^S(z)}\colon\ \|S\| \le N(G_\alpha, \mathbf{L}_\alpha)\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{|G^{(S)}(z/\alpha)|}{\alpha^{\|S\|}S!\mathbf{L}^S(z/\alpha)}\ :\ \|S\| \le N(G_\alpha, \mathbf{L}_\alpha)\right\}.$$

Звідси для всіх $z \in \mathbb{C}^n$

$$\frac{|G^{(P)}(z/\alpha)|}{P!\mathbf{L}^p(z/\alpha)} \le \max\left\{\frac{\alpha^{\|P\|-\|S\|}|G(z/\alpha)|}{S!\mathbf{L}^S(z/\alpha)} : \|S\| \le N(G_\alpha, \mathbf{L}_\alpha)\right\} \le$$
$$\le \alpha \max\left\{\frac{|G^{(S)}(z/\alpha)|}{S!\mathbf{L}^S(z/\alpha)}\ :\ \|S\| \le N(G_\alpha, \mathbf{L}_\alpha)\right\}. \tag{6.141}$$

Тому, з нерівності (6.141) випливає нерівність (6.126). □

Зауваження 6.14. Легко переконатися в тому, що $N(G_\alpha, \mathbf{L}_\alpha) \le N(G, \mathbf{L})$ для $\alpha \in (0, 1)$. Отже, $N(G_\alpha, \mathbf{L}_\alpha)$ в теоремі 6.16 можна замінити на $N(G, \mathbf{L})$.

Доведені теореми 6.15 та 6.16 також є новими для функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних.

Висновки до розділу 6

Для відповідного класу функцій

1) отримано оцінки зростання логарифма максимуму модуля на кістяку полікруга, причому в одновимірному випадку вони покращують відповідний результат проф. М.М. Шеремети;

2) знайдено достатні умови обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних цілих розв'язків систем лінійних рівнянь з частинними похідними значно загальнішого вигляду, а також оцінки їхнього зростання. Завдяки ширшому класу вектор-функцій **L**, вдалося позбутися такої неприродної умови як відокремленість змінних у коефіцієнтів цих систем, що виникла в працях інших математиків;
3) знайдено достатні умови обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних для суми цілих функцій;
4) вперше встановлено два аналоги логарифмічного критерію (у вигляді достатніх умов) для функцій цього класу двома принципово різними підходами — через похідні за напрямком та безпосередньо. Причому дано ствердну відповідь на питання проф. І. Е. Чижикова про можливість збільшити розмір виняткової множини, зовні якої оцінюються частинні логарифмічні похідні;
5) вперше отримано аналог достатніх умов у вигляді оцінки максимуму модуля через мінімум модуля на кістяку полікруга. Знайдені умови в певному розумінні є новими і слабшими навіть в одновимірному випадку, бо на колі відповідного радіуса (при $n = 1$ кістяк стає колом) можуть міститися нулі, а в раніше відомих умовах коло обиралось так, щоб на ньому не містилися нулі функції;
6) розв'язано проблему проф. М.М. Шеремети про обмеженість **L**-індексу за сукупністю змінних композиції цілих функцій від декількох змінних;
7) для довільної цілої функції F з обмеженою кратністю нульових точок доведено теорему про існування додатної неперервної вектор-функції **L** такої, що F є цілою функцією обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних;
8) вперше використано підхід до знаходження критеріїв обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних через вичерпання багатовимірного комплексного простору кулями, що дозволило встановити повністю нові твердження, які описують поводження цілих функцій на сфері, а не на кістяку полікруга.

Результати п'ятого розділу опубліковано в статтях [32, 34, 47, 53, 251, 252, 256], у монографії [30], а також доповідалися на конференціях [21, 45, 59].

РОЗДІЛ 7. ОБМЕЖЕНИЙ L-ІНДЕКС ТА M-ІНДЕКС ДЛЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

У цьому розділі розглядаються функції від однієї змінної, як аналітичні в одиничному крузі або в комплексній площині з виколотим нулем, так і цілі функції. Для функцій з таких класів вивчається обмеженість l-індексу та $l-M$-індексу деяких їхніх композицій з огляду на проблеми, поставлені М. М. Шереметою. Основний метод дослідження базується на використання аналога теореми Хеймана для згаданих класів. Також розглядається проблема А. А. Гольдберга про взаємозв'язок між класом цілих функцій цілком регулярного зростання та цілих функцій обмеженого l_ρ-індексу. Із її загальної постановки виділяються частинні задачі, які вивчаються докладніше. Досліджується обмеженість l-індексу цілих розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку з цілими коефіцієнтами, що швидко зростають. Насамкінець пропонується підхід до введення поняття обмеженості l-індексу для мероморфних функцій та на його основі встановлюється ряд аналогів достатніх та необхідних умов обмеженості l-індексу, в тому числі теорема Хеймана та логарифмічний критерій.

Розглянемо композиції таких видів $G(z)=f(q/(1-z)^n)$, $n\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, та $F(z)=f(g(z))$, де f і g — цілі функції. Нижче наведено дослідження обмеженості l-індексу та $l-M$-індексу для цих складених функцій, де l — додатна неперервна функція в деякій області $G\subseteq\mathbb{C}$. Нам потрібні деякі означенні та позначення.

Нехай G — довільна область у $\mathbb{C}$ та l — додатна неперервна функція в G така, що для всіх $z\in G$

$$l(z)>\frac{\beta}{dist\{z,\partial G\}},\quad \beta=const>1. \tag{7.1}$$

Аналітична функція f в G називається [149, 206] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ та кожного $z\in G$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\le\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)}:\,0\le k\le N\right\}. \tag{7.2}$$

Найменше таке ціле число N називається l-індексом функції f та позначається через $N(f;l,G)$.

Нехай $0<R\le+\infty$, $\mathbb{D}_R=\{z:\,|z|<R\}$ та l — додатна неперервна функція на $[0,\,R)$, яка задовольняє

$$l(r)>\frac{\beta}{R-r},\quad \beta=\mathrm{const}>1. \tag{7.3}$$

Якщо $G=\mathbb{D}_R$, то аналітична в $\mathbb{D}_R$ функція f [206, 283] називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ та $z\in\mathbb{D}_R$ виконується нерівність (7.2) з $l(|z|)$ замість $l(z)$.

Коли $R = +\infty$ (тобто, f — ціла функція), умова (7.3) стає зайвою. Зазначимо, що коли f — ціла функція та $l(|z|) \equiv 1$, тоді f називається [156] функцією обмеженого індексу. При $R = 1$ скорочено писатимемо $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$.

Для $r \in [0, \beta]$ покладемо $\lambda_1(r) = \inf\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : \ |z - z_0| \le \frac{r}{l(z_0)}, \ z_0 \in G\}$ and $\lambda_2(r) = \sup\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : \ |z - z_0| \le \frac{r}{l(z_0)}, \ z_0 \in G\}$. Через $Q_\beta(G)$ позначимо клас додатних неперервних функцій l, які задовольняють (7.1) і для деякого $r_0 \in [0, \beta]$

$$0 < \lambda_1(r_0) \le \lambda_2(r_0) < +\infty. \tag{7.4}$$

Зазначимо, що якщо (7.4) виконується для деякого $r_0 \in [0, \beta]$, то нерівність правильна для всіх $r \in [0, \beta]$.

Нещодавно, Шеремета М. М. висунув таку гіпотезу

Гіпотеза 7.1 ([213]). *Для цілої функції f така функція $F(z) = f\left(\dfrac{q}{(1-z)^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, має обмежений l-індекс у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ з $l(|z|) = \dfrac{\beta}{(1-|z|)^{n+1}}$, $\beta > 1$, тоді і тільки тоді, коли f — обмеженого індексу.*

Розглянемо загальнішу гіпотезу.

Гіпотеза 7.2 (М.М. Шеремета). *Нехай f — ціла функція та*

$$g(z) = \frac{q_1}{(1-z)^p} + \frac{q_2}{(1-z)^{p-1}} + \ldots + \frac{q_p}{1-z} + q_{p+1}, \ p \in \mathbb{N}, \ q_j \in \mathbb{C}, \ q_1 \ne 0.$$

Складена функція $F = f(g)$ у $\mathbb{D}$ має обмежений l-індекс у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ з $l(|z|) = \frac{\beta}{(1-|z|)^{p+1}}$ тоді і тільки тоді, коли f є обмеженого індексу.

Тут гіпотеза 7.2 частково доводиться (твердження 7.1, теореми 7.1, 7.2). Подібна проблема також розглядається нижче для обмеженого $l - M$-індексу (теорема 7.3 та 7.4).

Зазначимо, що є статті про обмежений l-індекс композицій цілих функцій від однієї змінної [206, 219, 276]. Найзагальніший результат такого типу отриманий в [277]. Обмеженість L-індексу за напрямком композицій цілих функцій від декількох змінних вивчалася в підрозділі 5.7. Але обмежений $l - M$-індекс складених функцій залишався поза увагою математиків.

Нам потрібні деякі додаткові теоретичні факти, отримані М. М. Шереметою та В. О. Кушніром. Наступна теорема є аналогом відомої теореми Хеймана з [128]. Сформулюємо її для аналітичних в області G функцій.

Теорема XIX ([274], [206, теорема 1.5]). *Нехай $\beta > 1$ та $l \in Q_\beta(G)$. Аналітична функція f в області G є обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли існують числа $m \in \mathbb{Z}_+$ та $C > 0$ такі, що для кожного $z \in G$*

$$\frac{|f^{(m+1)}(z)|}{l^{m+1}(z)} \le C \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z)} : \ 0 \le k \le m\right\}.$$

Теорема XX. *[206, теорема 2.2] Нехай G — довільна область у $\mathbb{C}$, а область $D \subset G$ буде такою, що $dist\{\partial D, \partial G\} > 0$. Нехай $\beta > 1$ та l — додатна неперервна функція в G така, що $l(z) \geq \beta/d$ для всіх $z \in G$. Якщо функція f — аналітична в G, то f є обмеженого l-індексу в D.*

Теорема XXI. *[206, теорема 1.6] Нехай $\beta > 1$, $\frac{1}{\beta} < \theta_1 \leq \theta_2 < +\infty$, $l \in Q_\beta(G)$ та $\theta_1 l(z) \leq l_*(z) \leq \theta_2 l(z)$ для всіх $z \in G$. Аналітична в області G функція f має обмежений l_*-індекс тоді і тільки тоді, коли вона є обмеженого l-індексу.*

Зауваження 7.1. *Насправді у доведенні теореми XXI показано, що за умов l_1, l_2 — додатна неперервні функції в G, $l_1(z) \leq l_2(z)$ для всіх $z \in G$ та f — аналітична функція в G справджується таке $N(f; l_2, G) \leq N(f; l_1, G)$.*

Теорема XXII. *[206, теорема 3.3] Нехай $0 < R \leq +\infty$, $l \in Q_\beta(\mathbb{D}_R)$, а аналітична в $\mathbb{D}_R$ функція f має обмежений l-індекс. Тоді $\ln M(r, f) = O(\int_0^r l(t)dt)$, $r \to R$, де $M(r, f) = \max\{|f(z)| : \ |z| = r\}$.*

7.1 Обмежений l-індекс деяких композицій

Беручи до уваги гіпотезу 7.2, доведемо таку теорему.

Теорема 7.1. *Нехай f — ціла функція. Функція $f(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1})$ має обмежений l-індекс у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ з $l(|z|) = \frac{\beta}{|z|^{p+1}}$ тоді і тільки тоді, коли функція f має обмежений індекс, де $p \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{C}$, $q_1 \neq 0$.*

Доведення. Якщо $p = 1$ та $q_2 = 0$, то таке твердження отримане в [206, с. 99]. Ми доведемо його для довільного $p \in \mathbb{N}$.

Нехай $F(z) = f(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1})$. Легко перевірити, що

$$F'(z) = -f'\left(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1}\right)\left(\frac{q_1 p}{z^{p+1}} + \frac{q_2(p-1)}{z^p} + \ldots + \frac{q_p}{z^2}\right),$$

$$F^{(k)}(z) = f^{(k)}\left(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1}\right)\left(\frac{q_1 p}{z^{p+1}} + \frac{q_2(p-1)}{z^p} + \ldots + \frac{q_p}{z^2}\right)^k +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} f^{(j)}\left(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1}\right)\left(\frac{c_{j,pj+k}}{z^{pj+k}} + \ldots + \frac{c_{j,j+k}}{z^{j+k}}\right) \tag{7.5}$$

та

$$f'\left(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1}\right) = -\frac{F'(z)z^{p+1}}{q_1 p + q_2(p-1)z + \ldots + q_p z^{p-1}},$$

$$f^{(k)}\left(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1}\right) =$$
$$= (-1)^k F^{(k)}(z)\left(\frac{z^{p+1}}{q_1 p + q_2(p-1)z + \ldots + q_p z^{p-1}}\right)^k +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} F^{(j)}(z)\frac{z^{pk+j}Q_{j,k}(z)}{(q_1 p + q_2(p-1)z + \ldots + q_p z^{p-1})^{2k-1}}, \tag{7.6}$$

де $Q_{j,k}(z)$ — деякі многочлени степеня, залежного від j та k.

Формули (7.5)-(7.6) можна довести методом математичної індукції.

Нехай f — ціла функція обмеженого індексу. Тоді з (7.5) за теоремою XIX маємо

$$|F^{(m+1)}(z)||z|^{(p+1)(m+1)} \le$$
$$\le |f^{(m+1)}\left(\frac{q_1}{z^p}+\frac{q_2}{z^{p-1}}+\ldots+q_{p+1}\right)|\left|q_1p+q_2(p-1)z+\ldots+q_pz^{p-1}\right|^{m+1}+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\left|f^{(j)}\left(\frac{q_1}{z^p}+\frac{q_2}{z^{p-1}}+\ldots+q_{p+1}\right)\right|\times$$
$$\times\left(|c_{j,pj+m+1}||z|^{p(m+1-j)}+\ldots+|c_{j,j+m+1}||z|^{(m+1)p-j}\right)\le$$
$$\le\left(C+\sum_{j=1}^{m}\left(|c_{j,pj+m+1}||z|^{p(m+1-j)}+\ldots+|c_{j,j+m+1}||z|^{(m+1)p-j}\right)\right)\times$$
$$\times\max\left\{\left|f^{(j)}\left(\frac{q_1}{z^p}+\frac{q_2}{z^{p-1}}+\ldots+q_{p+1}\right)\right|:0\le j\le m\right\}\le$$
$$\le C_1\max\left\{\left|f^{(k)}\left(\frac{q_1}{z^p}+\frac{q_2}{z^{p-1}}+\ldots+q_{p+1}\right)\right|:0\le k\le m\right\}$$

для всіх $|z|\le 1$. Використовуючи (7.6), встановимо

$$\left|f^{(k)}\left(\frac{q_1}{z^p}+\frac{q_2}{z^{p-1}}+\ldots+q_{p+1}\right)\right|\le$$
$$\le|F^{(k)}(z)||z|^{(p+1)k}\frac{1}{|q_1p+q_2(p-1)z+\ldots+q_pz^{p-1}|^k}+$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}|F^{(j)}(z)||z|^{(p+1)j}\frac{|Q_{j,k}(z)||z|^{p(k-j)}}{|q_1p+q_2(p-1)z+\ldots+q_pz^{p-1}|^{2k-1}}\le$$
$$\le\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{|Q_{j,k}(z)||z|^{p(k-j)}}{|q_1p+q_2(p-1)z+\ldots+q_pz^{p-1}|^{2k-1}}\right)\times$$
$$\times\max\left\{|F^{(j)}(z)||z|^{(p+1)j}:1\le j\le k\right\}\le$$
$$\le 2\max\left\{|F^{(j)}(z)||z|^{(p+1)j}:1\le j\le k\right\}$$

для всіх $|z|<\varepsilon$, де $\varepsilon>0$ досить мале число і таке, що круг $|z|\le\varepsilon$ не містить нулів многочлена $q_1p+q_2(p-1)z+\ldots+q_pz^{p-1}$. Це можливо, бо $q_1\ne 0$. Тоді

$$|F^{(m+1)}(z)||z|^{(p+1)(m+1)}\le 2C_1\max\left\{|F^{(j)}(z)||z|^{(p+1)j}:1\le j\le mk\right\}.$$

Використовуючи теореми XIX та XX, висновуємо, що функція F має обмежений l-індекс з $l(|z|)=\frac{\beta}{|z|^{p+1}}$.

Навпаки, нехай F — обмеженого l-індексу з $l(|z|)=\frac{\beta}{|z|^{p+1}}$. Як і вище, за теоремою (XIX) з (7.6) отримуємо

$$\left|f^{(m+1)}\left(\frac{q_1}{z^p}+\frac{q_2}{z^{p-1}}+\ldots+q_{p+1}\right)\right|\le C_1\max\left\{|F^{(j)}(z)||z|^{(p+1)j}:0\le j\le m\right\},$$

а з (7.5) випливає, що

$$|F^{(j)}(z)||z|^{(p+1)j} \le 2\max\left\{|f^{(k)}\left(\frac{q_1}{z^p}+\frac{q_2}{z^{p-1}}+\ldots+q_{p+1}\right)|:\ 0\le k\le j\right\}$$

для всіх $|z|<\varepsilon$, де $\varepsilon>0$ досить мале число. Звідси,

$$\left|f^{(m+1)}\left(\frac{q_1}{z^p}+\frac{q_2}{z^{p-1}}+\ldots+q_{p+1}\right)\right| \le$$
$$\le 2C_1\max\left\{|f^{(k)}\left(\frac{q_1}{z^p}+\frac{q_2}{z^{p-1}}+\ldots+q_{p+1}\right)|:\ 0\le k\le m\right\},$$

тобто,

$$\left|f^{(m+1)}(w)\right| \le 2C_1\max\left\{|f^{(k)}(w)|:\ 0\le k\le m\right\}$$

для досить великих $|w|$. Тому, за теоремами XIX та XX функція f має обмежений індекс. □

Нехай $q_2=q_3=\ldots=q_{p+1}=0$, тобто, $F(z)=f(\frac{q_1}{(1-z)^p})$. Заміна z на $1-z$ у теоремах XIX та 7.1 дає нам, що існують $m\in\mathbb{Z}_+$ та $C>0$, для яких

$$|f^{(m+1)}(z)|\le C\max\{|f^{(j)}(z):\ 0\le j\le m\},$$

тоді і тільки тоді, коли знайдуться $m\in\mathbb{Z}_+$ та $C>0$ такі, що

$$\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(\frac{\beta}{|1-z|^{p+1}})^{m+1}} \le C\max\left\{\frac{|F^{(j)}(z)|}{(\frac{\beta}{|1-z|^{p+1}})^{j}}: 0\le j\le m\right\}. \tag{7.7}$$

Позаяк $1-|z|\le|1-z|$, з нерівності (7.7) випливає таке

$$\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(\frac{\beta}{(1-|z|)^{p+1}})^{m+1}} \le C\max\left\{\frac{|F^{(j)}(z)|}{(\frac{\beta}{(1-|z|)^{p+1}})^{j}} 0\le j\le m\right\},$$

з огляду на зауваження 7.1 та теорему XIX.

Отже, якщо ціла функція f — обмеженого індексу, то за теоремою 7.1 функція $F(z)=f(\frac{q_1}{(1-z)^p})$ є обмеженого l-індексу з $l(|z|)=\frac{\beta}{(1-|z|)^{p+1}}$. І, навпаки, якщо функція $F(z)=f(\frac{q_1}{(1-z)^p})$ має необмежений l-індекс, то f має необмежений індекс.

Твердження 7.1. *Нехай f — ціла функція скінченного порядку, для якої нуль є пікарівським винятковим значенням. Якщо $F(z)=f\left(\frac{q}{(1-z)^p}\right)$ має обмежений l-індекс у $\mathbb{D}$ з $l(r)=\frac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$, то f має обмежений індекс.*

Доведення. Припустимо, що f необмеженого індексу. Тоді така оцінка $\ln M_f(r)=O(r)$ при $r\to+\infty$ за теоремою XXII не виконується. Оскільки f — ціла функція скінченного порядку з пікарівським винятковим значення 0, вона допускає представлення $f(z)=e^{P(z)}$, де $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$, $a_n\ne0$, $n\ge2$. Звідси,

$$F(z)=\exp\left\{(1+o(1))\frac{q^na_n}{(1-z)^{np}}\right\},\ z\to1.$$

Але функція F — обмеженого l-індексу з $l(r) = \frac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$. За теоремою XXII F має властивість

$$\ln M_F(r) = O\left(\int_0^r l(t)dt\right) = O\left(\frac{1}{(1-r)^p}\right),\ r \uparrow 1.$$

З іншої сторони,

$$(1-r)^p \ln M_F(r) \geq (1-r)^p \ln|F(z)| = (1+o(1))\, Re\left\{\frac{q^n a_n}{(1-r)^{pn}}\right\}(1-r)^p =$$
$$= (1+o(1))\frac{Re\{a_n q^n\}}{(1-r)^{(n-1)p}} \to +\infty,$$

що неможливо. □

Наступне твердження випливає з теореми 7.1 та твердження 7.1.

Теорема 7.2. *Для того, щоб функція F була обмеженого l-індексу з $l(r) = \frac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$, досить, а якщо f — ціла функція скінченного порядку та 0 — її пікарівське виняткове значення, то і необхідно, щоб f була обмеженого індексу.*

7.2 Обмежений $l-M$-індекс деяких композицій

Аналітична функція f в $\mathbb{D}_R$ називається [206, с.74] функцією обмеженого $l-M$-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{M(r, f^{(n)})}{n! l^n(r)} \leq \max\left\{\frac{M(r, f^{(k)})}{k! l^k(r)} :\ 0 \leq k \leq N\right\}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in [0, R)$.

Поняття цілої функції f обмеженого $l-M$-індексу введено Ш. Абуарабі та М. Шереметою [248]. Ціла функція f обмеженого $l-M$-індексу з $l(r) \equiv 1$ називається [116] функцією обмеженого M-індексу. Було встановлено [116], що f є функцією обмеженого M-індексу тоді і тільки тоді, коли $\ln M(r, f) = O(r)$ при $r \to +\infty$. М. Шеремета [206] узагальнив цей результат.

Нам потрібні деякі позначення з [206]. Нехай $-\infty < A \leq +\infty$ та $\Omega(A)$ — клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' — неперервна, додатна та зростає до $+\infty$ на $(-\infty, A)$. Для $\Phi \in \Omega(A)$ через ϕ позначимо обернену функцію до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — це функція, асоційована з Φ у сенсі Ньютона.

Як і в [206, с. 84], аналітична функція f у $\mathbb{D}_R$ називається функцією скінченного Φ-типу, якщо $\Phi \in \Omega(\ln R)$ та $\ln M(r, f) = O(\Phi(\ln r))$ при $r \uparrow R$.

Правильна така теорема.

Теорема XXIII. *[206, теорема 4.5] Припустимо, що функція $\Phi \in \Omega(\ln R)$, $0 < R \leq +\infty$, задовольняє умови:*

1) Φ' неперервно диференційовна на $(-\infty, \ln R)$;

2) $\overline{\lim}_{x\to\ln R}\frac{1}{\Phi'(x)}\Phi'\left(\Phi^{-1}\left(x+\frac{\ln\Phi'(\Phi^{-1}(x))}{\Phi'(\Phi^{-1}(x))}\right)\right)<+\infty$;

3) $\Phi'(x+\frac{\alpha}{\Phi'(x)})=O(\Phi'(x))$ *при* $x\to\ln R$;

4) $\Phi'(\ln r)>\frac{\alpha}{\ln R-\ln r}$ $(0\le r<R)$ *для деякого* $\alpha>1$.

Аналітична функція f *у* $\mathbb{D}_R$ *є скінченного* Φ*-типу тоді і тільки тоді, коли вона є обмеженого* $l-M$*-індексу з* $l(r)=\frac{\Phi'(\ln r)}{r}$ *на* $[r_0,R)$ *та* $l(r)=\frac{\Phi'(lnr_0)}{r_0}$ *на* $[0,r_0]$, *де* $r_0\in[0,R)$ *— довільне фіксоване число.*

Теорема XXIII для цілих функцій обмеженого $l-M$-індексу доведена Ш. Абуарабі та М. М. Шереметою [248]. Її аналог для рядів Діріхле встановлений у [166].

Використовуючи цю теорему, можна довести таке твердження

Теорема 7.3. *Нехай* f *— ціла функція та* $F(z)=f\left(\frac{q}{(1-z)^p}\right)$, *де* $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Для того, щоб функція* F *була обмеженого* $l-M$*-індексу з* $l(r)=\frac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$, $\beta>1$, *досить, а якщо коефіцієнти розвинення у степеневий ряд функції* f *невід'ємні та* $q>0$, *то необхідно, щоб функція* f *була обмеженого* M*-індексу.*

Доведення. Якщо функція f має обмежений M-індекс, то $\ln M(\rho,f)=O(\rho)$ при $\rho\to+\infty$. Оскільки $M(r,F)\le M\left(\frac{|q|}{(1-r)^p},f\right)$, маємо таке $\ln M(r,F)=O\left(\frac{1}{(1-r)^p}\right)$ при $r\uparrow 1$. Але $1-r=(1+o(1))|\ln r|$ при $r\uparrow 1$. Звідси, $\ln M(r,F)=O\left(\frac{1}{|\ln r|^p}\right)$ при $r\uparrow 1$.

Функція $\Phi(\sigma)=\frac{1}{|\sigma|^p}$, $\sigma<0$, задовольняє умови теореми XXIII. Тому функція F є обмеженого $l-M$-індексу з $l(r)=\frac{p}{r|\ln r|^{p+1}}$. А це означає, що F є обмеженого $l-M$-індексу з $l(r)=\frac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$. Достатність доведена.

Якщо $q>0$ та коефіцієнти степеневого розвинення функції f — невід'ємні, то максимум модуля функцій f та F досягається на додатному промені, тобто, $M(r,F)=M\left(\frac{q}{(1-r)^p},f\right)$. Якщо функція f — необмеженого M-індексу, то існує послідовність $(\rho_k)\uparrow+\infty$ така, що $\frac{\ln M(\rho_k,f)}{\rho_k}\to+\infty$ при $k\to\infty$. Покладемо $r_k=1-(q/\rho_k)^{1/p}$. Отримаємо $\frac{\ln M(r_k,F)}{\frac{q}{(1-r_k)^p}}\to+\infty$ при $k\to+\infty$. Звідси, $\frac{\ln M(r_k,F)}{\Phi(|\ln r_k|)}\to+\infty$ при $k\to\infty$ з $\Phi(\sigma)=\frac{1}{|\sigma|^p}$.

За теоремою XXIII функція F — необмеженого $l-M$-індексу з $l(r)=\frac{\beta}{r|\ln r|^{p+1}}$. А, отже, вона необмеженого $l-M$-індексу з $l(r)=\frac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$. Теорема 7.3 доведена. □

Зауваження 7.2. *Г. Пойа [172] довів, що якщо* f *та* g *— цілі функції,* $g(0)=0$ *та* $F(z)=f(g(z))$, *то існує стала* $c\in(0,1)$, *незалежна від* f *та* g *така, що для всіх* $r>0$

$$M_F(r)\ge M_f(cM_g(r/2)) \tag{7.8}$$

та

$$M_F(r)\le M_f(M_g(r)). \tag{7.9}$$

Ж. Клуні [90] трохи уточнив нерівність (7.8). *Ним доведено, що для довільних цілих функцій f та g, $g(0) = 0$,*

$$M_F(r) \geq M_f\left(c(\rho)M_g(\rho r)\right) \quad (r > 0). \tag{7.10}$$

where $c(\rho) = \frac{(1-\rho)^2}{4\rho}$, $\rho \in (0;1)$.

Це веде до такого питання:

Проблема 7.1 (М.М. Шеремета)**.** *Чи можна вивести оцінку подібну до* (7.10) *для* $F(z) = f(\frac{1}{(1-z)^p})$, $p \in \mathbb{N}$*?*

Твердження 7.2. *Нехай f — ціла функція, $F(z) = f(\frac{1}{(1-z)^p})$, $p \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$M_F(r) \geq \max\{|f(z + (1-r^2)^{-p})|\colon |z| = pr(1-r^2)^{-p}/4\}.$$

для будь-якого $r \in (0;1)$.

Доведення. Нам потрібно знайти нижню оцінку для такого максимуму $M_F(r) = \max\{|f(\frac{1}{(1-z)^p})|\colon |z| = r\}$, де $r \in (0,1)$. Спершу знайдемо образ кола $|z| = r$ при здійсненні відображення функцією $w = \frac{1}{1-z}$. Зрозуміло, що такий образ також є колом. Відомо, що при відображенні комплексної площини дробово-лінійною функцією образи симетричних точок є симетричними точками відносно нового кола. Центр кола та нескінченність є симетричними точками. Точка $z = r^2$ — симетрична точці $z = 1$ відносно $|z| = r$. Оскільки $w(1) = \infty$, то маємо, що $w(r^2) = \frac{1}{1-r^2}$ — центр нового кола. Знайдемо радіус нового кола $|w(r) - w(r^2)| = |\frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r^2}| = \frac{r}{1-r^2}$. Отже, образом кола $|z| = r$ при відображенні $w = \frac{1}{1-z}$ є коло $|w - \frac{1}{1-r^2}| = \frac{r}{1-r^2}$.

Тобто,

$$M_F(r) = \max\left\{|f(w^p)| : \left|w - \frac{1}{1-r^2}\right| = \frac{r}{1-r^2}\right\} =$$
$$= \max\left\{\left|f\left(\left(s + \frac{1}{1-r^2}\right)^p\right)\right| : |s| = \frac{r}{1-r^2}\right\}$$

для $s = w - \frac{1}{1-r^2}$. Нехай $g(s) = (s + \frac{1}{1-r^2})^p$. Оскільки $g(0) = \frac{1}{(1-r^2)^p} \neq 0$, покладемо $g_1(s) = (s + \frac{1}{1-r^2})^p - \frac{1}{(1-r^2)^p}$. Тоді $f(g(s)) = f(g_1(s) + \frac{1}{(1-r^2)^p}) = f_1(g_1(s))$, де $f_1(z) = f(z + \frac{1}{(1-r^2)^p})$.

З огляду на (7.10) отримуємо

$$M_F(r) = M_{f_1 \circ g_1}\left(\frac{r}{1-r^2}\right) \geq M_{f_1}(c(\rho)M_{g_1}(\rho r)) =$$
$$= M_{f_1}\left(c(\rho)\left(\frac{(\rho r + 1)^p}{(1-r^2)^p} - \frac{1}{(1-r^2)^p}\right)\right) \geq M_{f_1}\left(\frac{(1-\rho)^2 pr}{4(1-r^2)^p}\right).$$

Звідси для $\rho = 0$ випливає

$$M_F(r) \geq M_{f_1}\left(\frac{pr}{4(1-r^2)^p}\right) = \max\{|f(z + (1-r^2)^{-p})|\colon |z| = pr(1-r^2)^{-p}/4\}.$$

□

Використовуючи результати Пойя-Клуні, вивчатимемо $l-M$-індекс функції $F(z) = f(g(z))$ стосовно $l-M$-індексів функцій f і g.

Наш основний результат — такий.

Теорема 7.4. *Нехай f та g — цілі функції. Якщо f має обмежений M-індекс та $M'_g(r)$ — неперервно диференційовна функція, то функція $F(z) = f(g(z))$ має обмежений $l-M$-індекс з $l(r) = M'_g(r)$. Якщо ж функція $F(z) = f(g(z))$ обмеженого $l-M$-індексу з $l(r) = M'_g(r/2)$ та $g(z)$ є многочленом, то f — обмеженого M-індексу.*

Доведення. Припустимо, що f — обмеженого M-індексу. Тоді $\ln M_f(r) = O(r)$, $r \uparrow \infty$. З (7.9) випливає, що $\ln M_F(r) \leq O(M_g(r))$, $r \to \infty$. Позначимо $\Phi(\ln r) = M_g(r)$, тобто, $\Phi(x) = M_g(e^x)$. Звідси, $\Phi'(x) = M'_g(e^x)e^x$ та $\frac{\Phi'(\ln r)}{r} = \frac{M'_g(r)r}{r} = M'_g(r)$. Отже, за теоремою XXIII робимо висновок, що функція F — обмеженого $l-M$-індексу з $l(r) = M'_g(r)$. Потрібно, щоби $M'_g(r)$ була неперервно диференційовна, але $M_g(r)$ можна наблизити такою функцією Φ.

Доведемо другу частину теореми. Від супротивного, нехай f — необмеженого M-індексу. Тоді $\exists(\rho_k) \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ така, що $\frac{\ln M_f(\rho_k)}{\rho_k} \to +\infty$. Нерівність (7.10) може бути записана у вигляді $M_F(2r) \geq M_f(\frac{1}{8}M_g(r) - |g(0)|)$. Покладемо $r_k = M_g^{-1}(8\rho_k)$. Звідси, отримуємо

$$\frac{\ln M_F(2M_g^{-1}(8\rho_k))}{\rho_k} \geq \frac{\ln M_f(\rho_k - |g(0)|)}{\rho_k} \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

тобто

$$\frac{8 \ln M_F(2r_k)}{M_g(r_k)} \to +\infty, \ k \to \infty, \tag{7.11}$$

З іншої сторони, якщо функція F — обмеженого $l-M$-індексу з $l(r) = M'_g(r)$, то $\ln M_F(r) = O(\ln M_g(r))$. Для отримання суперечності з (7.11) нам потрібно $\ln M_F(2r) = O(\ln M_F(r))$, або $M_g(r) = O(M_g(r/2))$ при $r \to \infty$.

Зазначимо, що $M_g(2r) = O(M_g(r)) \Leftrightarrow g$ — многочлен.

Справді, $M_g(2r) \leq KM_g(r)$. Підставимо $r_n = 2^n$ та отримаємо $M_g(2^{n+1}) \leq KM_g(2^n) \leq K^n M_g(2)$. Для $2^n \leq r \leq 2^{n+1}$ маємо

$$\ln M_g(r) \leq \ln M_g(2^{n+1}) \leq n \ln K + \ln M_g(2) \leq \frac{\ln K}{\ln 2} \ln r + \ln M_g(2) = \\ = K_1 \ln r + K_2.$$

Звідси, $\frac{\ln M_g(r)}{\ln r} \leq K_1 \neq o(1)$, $r \to +\infty$. Отже, g — многочлен з $deg \leq K$. □

Виникає таке питання:

Проблема 7.2 (М.М. Шеремета)**.** *Якими є цілі функції f і g та сталі c_1, c_2 такі, що $M_F(r) \geq M_f(c_1 M_g(r) - c_2)$ для $F(z) = f(g(z))$?*

Наразі можемо дати лише таку відповідь: якщо тейлорівські коефіцієнти функцій f та g — невід'ємні, то $M_F(r) = M_f(M_g(r))$.

7.3 Обмеженість l-індексу та цілком регулярне зростання цілих функцій

На сьогодні властивості цілих функцій цілком регулярного зростання є досить добре вивченими. Широку бібліографію про такі функції можна знайти у монографіях [3, 123, 158, 178, 266, 269]. Тим не менш, існує багато давніх нерозв'язаних задач для них. Однієї з таких цікавих задач є проблема **Гольдберга - Островського - Петренка** [119]: *Нехай*

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \ldots + a_1(z)w' + a_0(z)w = 0 \tag{7.12}$$

— лінійне диференціальне рівняння n-го порядку, коефіцієнти якого a_j $(0 \leq j \leq n-1)$ є цілими функціями цілком регулярного зростання. Чи правда те, що кожний розв'язок $w(z)$ рівняння (7.12)*, який має скінченний порядок, є цілком регулярного зростання?*

В.П. Петренко [279] поставив цю задачу без припущення про те, що коефіцієнти $a_j(z)$ є цілими функціями цілком регулярного зростання. Він також довів цю гіпотезу у випадку, коли $a_j(z)$ є многочленами. Пізніше, А. А. Гольдберг [119] спростував проблему у постановці Петренка. Він показав, що довільна ціла функція f з нулями порядку щонайбільше $n-1$ задовольняє деяке лінійне диференціальне рівняння $n-$го порядку вигляду (7.12), де a_j $(0 \leq j \leq n-1)$ — цілі функції. Тому А. А. Гольдберг та Й.В. Островський уточнили формулювання Петренка шляхом введення додаткового припущення про цілком регулярне зростання коефіцієнтів a_j $(0 \leq j \leq n-1)$. Незважаючи на 30 років досліджень, ця задача залишається відкритою [134].

Зазначимо [191], що кожний цілий розв'язок лінійного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами є функцією обмеженого індексу. Цілі функції обмеженого l-індексу мають властивості, що вказують на подібність до функцій цілком регулярного зростання. Нехай $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ — фіксована додатна неперервна функція, де $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Ціла функція f називається функцією обмеженого $l-$індексу [150], якщо існує ціле число m, незалежне від z таке, що для всіх p та кожного $z \in \mathbb{C}$ $\frac{|f^{(p)}(z)|}{l^p(z)p!} \leq \max\{\frac{|f^{(s)}(z)|}{l^s(z)s!} : 0 \leq s \leq m\}$. Найменше таке ціле число m називається l-індексом функції f та позначається через $N(f; l)$. Якщо $l(z) \equiv 1$, то функція f є обмеженого індексу [156].

Зокрема, ці функції мають такі властивості: свої точні оцінки зростання, рівномірний у деякому сенсі розподіл своїх нулів, певне регулярне поводження розв'язків диференціальних рівнянь, тощо. Водночас відомо [273], що кожен цілий розв'язок (7.12) з многочленними коефіцієнтами $a_j(z)$ має обмежений l-індекс з $l(z) = |z|^s + 1$, де $s = \max\limits_{j \in \{0,\ldots,n-1\}} \frac{deg\, a_j(z)}{j}$. Також існують достатні умови [115, 273] обмеженості l-індексу цілих розв'язків (7.12), коли $a_j(z)$ — трансцендентні цілі функції. Крім того, для цілої функції обмеженого l-індексу

встановлено таку оцінку зростання в [150, 206]:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\max\{|f(z)|:\ |z|=r\}}{\int_0^r l(t)dt} \le N(f;l)+1,$$

де $l=l(|z|)$ задовольняє певні додаткові умови. Визначимо таку функцію

$$l_\rho(z)=\begin{cases}1, & 0\le|z|\le 1,\\ |z|^{\rho-1}, & 1\le|z|<\infty.\end{cases}.$$

Зважаючи на вказану оцінку зростання, А. А. Гольдберг [267] неявно поставив таку проблему:

Проблема 7.3. *Яким є зв'язок між класом цілих функцій цілком регулярного зростання зі скінченним порядком ρ та класом цілих функцій обмеженого l_ρ-індексу?*

У [267] встановлено такі факти:

1) Нехай $0<\rho<\infty$. Функція Міттаг-Лефлера $E_\rho(z)=\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(1+k/\rho)}$ має порядок ρ, обмежений l_ρ-індекс та цілком регулярне зростання, де Γ — це гамма-функція, тобто, $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$.
2) Існує ціла функція цілком регулярного зростання та скінченного порядку $\rho\in(0;1)$, яка має необмежений l_ρ-індекс.

Ця функція будується таким способом. Для $0<\rho<\infty$ позначимо $k_n=2^{2^n}$, $q_n=2^{2^n}-2^{2^n-n}=k_n(1-2^{-n})$, $\mathcal{B}=\bigcup_{n=1}^\infty[k_n,q_{n+1}]$, $\mathcal{A}=\{k^{1/\rho}:\ k\in\mathcal{B}\cap\mathbb{N}\}$. Тоді визначимо $g(z)=\prod_{a\in\mathcal{A}}(1-z/a)$. Зауважимо, що $n(r)=\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\|a|<r}}1=(1+o(1))r^\rho$ при $r\to\infty$ (див. [267]).

Для встановлення обмеженості l-індексу функції g для деякої функції l скористаємося результатом з [290]. Нехай Q — клас додатних неперервних функцій l на $[0,+\infty)$ таких, що

$$\lambda(r)=\sup\left\{\frac{l(t_1)}{l(t_2)}\colon |t_1-t_2|<\frac{r}{\min\{l(t_1),l(t_2)\}}\right\}$$

є скінченним для всіх $r\ge 0$. Наступне припущення забезпечує достатні умови обмеженості l-індексу для нескінченних добутків нульового роду.

Теорема XXIV ([290]). *Нехай* $\pi(z)=\prod\limits_{n=1}^\infty\left(1-\frac{z}{c_n}\right)$, $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{|c_n|}<+\infty$, $n(r,\pi)=\sum_{|c_n|<r}1$, *та* $n^\gamma/c_n\searrow 0$ $(n\to\infty)$ *для якогось* $\gamma\in(0,1]$. *Якщо* $\sum_{k=n(r,\pi)}^\infty\frac{1}{|c_k|}=O(r^{-1}n(r,\pi)\ln n(r,\pi)$, $r\to\infty$, *то функція* $\pi(z)$ *має обмежений* l*-індекс з такою функцією* $l\in Q$, *що* $l(r)\asymp r^{-1}n(r,\pi)\ln n(r,\pi)$ $(r\to\infty)$.

Також існують інші результати [87, 208, 289] про обмежений індекс нескінченних добутків нульового роду. З огляду на теорему XXIV функція $g(z)$ має обмежений l-індекс з $l(r)\asymp r^{\rho-1}\ln r$.

Для докладнішого розгляду проблеми 7.3 нам потрібні деякі факти з [158]. Нехай f — ціла функція, c_n — її нулі, $\rho(r)$ — уточнений порядок функції f. Б.Я. Левін [158, с. 107] виділив два підкласи цілих функцій цілком регулярного зростання. Він припустив, що виконується одна з таких умов (C) або (C′).

(C) Існує число $d > 0$ таке, що кола з радіусами $r_n = d|c_n|^{1-\frac{\rho(|c_n|)}{2}}$ та центрами у точках c_n не перетинаються.

(C′) Точки c_n лежать в середині кутів зі спільною вершиною у початку координат, але не мають більше інших спільних точок, причому якщо упорядкувати точки множини $\{c_n\}$ в середині будь-якого з цих кутів за зростанням модулів, то всі точки, які потрапили в середину одного з кутів, задовольняють нерівність $|c_{k+1}| - |c_k| > d|c_k|^{1-\rho(|c_k|)}$ для деякого $d > 0$.

Функція $g(z)$, побудована А.А. Гольдбергом задовольняє умову (C′).

Наразі ми не можемо дати повної відповіді на проблему Гольдберга. Тут розглянемо деякі частинні проблеми, які мають безпосередній стосунок до проблеми 7.3. Зокрема, умови (C) та (C′) не вичерпують усіх функцій цілком регулярного зростання. Існує великий клас функцій цілком регулярного зростання, нулі яких не задовольняють ні (C), ані (C′). Тому виникає таке цікаве питання.

Проблема 7.4. *Чи існує ціла функція f порядку ρ, цілком регулярного зростання та необмеженого l_ρ-індексу, чиї нулі не задовольняють жодну з умов (C) та (C′)?*

Використовуючи приклад з [272, с. 75-76] дамо ствердну відповідь на це питання. Далі запис $[a]$ означає цілу частину числа $a \in \mathbb{R}$. Наш основний результат є таким.

Твердження 7.3. *Нехай $\alpha \geq 1$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — додатна послідовність , яка строго зростає до $+\infty$ і така, що $x_{n+1} - x_n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{x_n^p} < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{x_n^{p-1}} = +\infty$ для деякого $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.*

Нехай $\rho = \inf\{\beta \geq 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{x_n^\beta} < \infty\}$, $m_1 = 1$, $m_{k+1} = m_k + [k^\alpha]$ $(k \in \mathbb{N})$, $\lambda_{m_k} = x_k$ та $\lambda_j = \lambda_{m_k} + \frac{j-m_k}{m_{k+1}-m_k}\lambda_{m_k}^{1-\rho}$ для $m_k \leq j < m_{k+1}$. Тоді нескінченний добуток

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^p}{\lambda_k^p}\right) \tag{7.13}$$

має такі властивості:

1) *f — ціла функція порядку ρ;*
2) *нулі функції f не задовольняють умову (C), а якщо додатково $n^{-\alpha}x_n^{1-\rho/2} \to 0$ при $n \to \infty$, то вони не задовольняють умову (C′);*
3) *f має необмежений l_ρ-індекс.*
4) *якщо $\alpha = 1$ та $x_n = n^\gamma$, $\gamma \in [1, 2]$, то функція f має цілком регулярне зростання..*

Доведення. Зрозуміло, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} \frac{1}{\lambda_j^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} [k^\alpha]\lambda_{m_k}^{-p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{x_k^p} < +\infty,$$

тобто, функція f є цілою. Також для $m_k \le j < m_{k+1}$ маємо $\lambda_{m_k} \le \lambda_j \le \lambda_{m_k}+1$. Звідси, для $m_k \le j < m_{k+1}$ $\;x_k \le \lambda_j \le x_k+1$. Підсумовуючи відповідні вирази, отримуємо

$$\frac{[k^\alpha]}{x_k^\beta} \le \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} \frac{1}{\lambda_j^\beta} \le \frac{[k^\alpha]}{(x_k+1)^\beta}.$$

Тоді

$$\rho = \inf\left\{\beta \ge 1 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{x_k^\beta} < \infty\right\} = \inf\left\{\beta \ge 1 : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^\beta} < \infty\right\}.$$

Отже, функція f має порядок ρ.

Позначимо $n(r, z, 1/f) = \sum_{|a_k - z|<r} 1$ — лічильна функція нулів, де $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — послідовність нулів функції f, z — фіксована точка. Для доведення необмеженості l_ρ-індексу скористаємося теоремою VIII для випадку $n = 1$, $\mathbf{1} = 1$.

Доведемо, що умова 2) у теоремі VIII не виконується. Дійсно,

$$n\left(\frac{1}{\lambda_{m_k}^{\rho-1}}, \lambda_{m_k}, \frac{1}{f}\right) = \sum_{|\lambda_j - \lambda_{m_k}| \le \lambda_{m_k}^{1-\rho}} 1 = m_{k+1} - m_k = [k^\alpha] \to +\infty \ (k \to \infty).$$

Тому функція f має необмежений l_ρ-індекс.

Перевіримо умову (C$'$). Наприклад, для $j = m_k$ маємо

$$|\lambda_{j+1}| - |\lambda_j| = \left(\lambda_{m_k} + \frac{1}{m_{k+1} - m_k}\lambda_{m_k}^{1-\rho}\right) - \lambda_{m_k} =$$
$$= \frac{1}{m_{k+1} - m_k}\lambda_{m_k}^{1-\rho} = \frac{1}{k^\alpha} \cdot \lambda_{m_k}^{1-\rho}. \tag{7.14}$$

Оскільки $\frac{1}{k^\alpha} \to 0$ при $k \to +\infty$ умова (C$'$) не виконується. Для того, щоби спростувати справедливість умови (C), досить показати при $j = m_k$

$$\lambda_j + d\lambda_j^{1-\rho/2} > \lambda_{j+1} - d\lambda_{j+1}^{1-\rho/2}$$

або

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j < d(\lambda_j^{1-\rho/2} + \lambda_{j+1}^{1-\rho/2}).$$

Але з (7.14) випливає

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j = \frac{\lambda_{m_k}^{1-\rho/2}}{k^\alpha} \cdot \lambda_{m_k}^{1-\rho/2} = \frac{x_k^{1-\rho/2}}{k^\alpha} \cdot \lambda_{m_k}^{1-\rho/2}.$$

За припущенням теореми $\frac{x_k^{1-\rho/2}}{k^\alpha} \to 0$ при $k \to \infty$. Тому умова (C) не дійсна для нулів функції f.

Для того, щоб довести властивість 4), нам потрібні деякі факти з [158, Розділ 2].

Теорема XXV ([158], с. 158)**.** *Для того, щоб ціла функція $F(z)$ уточненого порядку $\rho(r)$ була функцією цілком регулярного зростання, необхідно та досить, щоб її нулі були правильно розподілені, тобто, якщо для всіх значень*

ν та θ $(0 < \nu < \theta < 2\pi)$ за винятком, можливо, зліченного числа, існує скінченна границя $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{n(r,\nu,\theta)}{r^{\rho(r)}}$ та у випадку цілого порядку ρ додатково існує скінченна границя $\delta_f = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\delta_f(r)}{r^{\rho(r)-r}}$ $(\delta_f(r) = c_\rho + \frac{1}{\rho}\sum_{|a_n|\le r} a_n^{-\rho})$, де c_ρ — коефіцієнт біля старшого степеня в експоненційному множнику перед канонічним добутком.

Нехай $\alpha = 1$, $x_n = n^\gamma$, $\gamma \in [1;2]$. Тоді $\rho = \frac{2}{\gamma}$, $p = [\frac{2}{\gamma}]+1$. Звідси, $m_{k+1} = m_k + k$, $\lambda_{m_k} = x_k = k^\gamma$ та

$$\lambda_j = \lambda_k + \frac{j - m_k}{m_{k+1} - m_k}\lambda_{m_k}^{1-\rho} = k^\gamma + \frac{j - m_k}{k}\left(k^\gamma\right)^{1-2/\gamma} = k^\gamma + (j - m_k)k^{\gamma-3}$$

для $m_k \le j < m_{k+1}$.

Нулі функції $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^p}{\lambda_k^p}\right)$ симетрично розподілені на p променях. Тому досить розглянути один промінь. Нехай $n(r,0)$ — число нулів на промені $\arg z = 0$ в середині круга $|z| < r$. Тоді верхня оцінка кутової щільності цих нулів може бути знайдена з таких рівностей:

$$\lambda_{m_{k+1}-1} = k^\gamma + k\cdot k^{\gamma-3} = k^\gamma + k^{\gamma-2} = r,$$
$$\text{та } n(r,0) = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Звідси,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,0)}{r^\rho} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k^2+k)/2}{(k^\gamma + k^{\gamma-2})^{2/\gamma}} = \frac{1}{2}.$$

Для нижньої оцінки візьмемо $\lambda_{m_k} = k^\gamma = r$, тобто, $k = r^{1/\gamma}$. Тоді $n(r,0) = 1 + 2 + \dots + (k-2) + k - 1 + 1 = \frac{k(k-1)}{2} + 1 = \frac{r^{1/\gamma}(r^{1/\gamma}-1)}{2} + 1$. Звідси,

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,0)}{r^\rho} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^{1/\gamma}(r^{1/\gamma}-1)/2 + 1}{r^{2/\gamma}} = \frac{1}{2}.$$

За теоремою XXV функція f має цілком регулярне зростання, якщо $2/\gamma$ — не ціле, тобто, $\gamma \notin \{1,2\}$.

Коли $2/\gamma$ — ціле, то за теоремою XXV потрібно показати існування границі $\delta_f = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\delta_f(r)}{r^{\rho(r)-r}}$. У цьому випадку $c_\rho = 0$. Для $\rho(r) = \rho \in \{1,2\}$ маємо

$$\delta_f = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\rho} \sum_{|\lambda_k|<r} \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_k^{-\rho} e^{\frac{2\pi i j}{p}} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\rho} \sum_{|\lambda_k|<r} \lambda_k^{-\rho} \sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i j}{p}} =$$
$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\rho} \sum_{|\lambda_k|<r} \lambda_k^{-\rho} \frac{1 - e^{\frac{2\pi i p}{p}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{p}}} = 0.$$

Звідси для $\gamma \in \{1,2\}$ функція f також має цілком регулярне зростання. □

У [117] отримані деякі оцінки логарифмічної похідної цілої функції f цілком регулярного зростання, чиї нулі c_n задовольняють (C).

Теорема XXVI ([117]). *Нехай $f(z)$ — ціла функція порядку ρ та цілком регулярного зростання стосовно уточненого порядку $\rho(r) \to \rho$ $(r \to \infty)$, а її нулі задовольняють умову (C). Нехай $\Delta(\psi)$ — кутова щільність послідовності нулів функції $f(z)$, E — множина точок розриву функції $\Delta(\psi)$, M – довільна замкнена множина, $M \subset [0, 2\pi] \setminus E$, $U = \bigcup_k \{z : |z - c_n| < q|c_n|^{1-\rho/2}\}$, (c_n) — послідовність нулів. Тоді для $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus U$ рівномірно по φ, $\varphi \in M$, виконується*

$$f'(z)/f(z) = \mathcal{H}(\varphi) r^{\rho(r)-1} + o(r^{\rho(r)-1}),\ r \to \infty, \tag{7.15}$$

де

$$\mathcal{H}(\varphi) = \begin{cases} -\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \int\limits_0^{2\pi} \exp\{i[-\psi + (\rho-1)(|\varphi - \psi| - \pi)\mathrm{sgn}(\varphi - \psi)]\} d\Delta(\psi), \rho \notin \mathbb{Z}_+, \\ \exp(i(\rho-1)\varphi) \left\{ \delta + i \int\limits_0^{2\pi} [\varphi - \psi - \pi \mathrm{sgn}(\varphi - \psi)] e^{-i\rho\psi} d\Delta(\psi) \right\}, \rho \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

$\delta = \lim\limits_{r \to \infty} r^{\rho - \delta(r)} \delta(r)$ *та* $\delta(r) = c + \frac{1}{\rho} \sum_{|c_k| \le r} |c_n|^{-\rho}$.

За твердженням XXVI ціла функція $f(z)$ скінченного порядку $\rho > 0$ та цілком регулярного зростання з нулями, які задовольняють (C), допускає оцінку

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \le P l_\rho(z) \tag{7.16}$$

для всіх z, які лежать зовні множини $U = \bigcup_k \{z : |z - c_n| < q|c_n|^{1-\rho/2}\}$.

У доведенні твердження 7.3 скористалися відомим логарифмічним критерієм обмеженості l-індексу. За теоремою VIII, нерівність (7.16) є необхідною умовою обмеженості l_ρ-індексу цілої функції, якщо ця нерівність виконується для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus G_q(f)$, де $G_q(f) = \bigcup_n \{z : |z - c_n| < \frac{q}{l_\rho(c_n)}\}$. Позаяк $\mathbb{C} \setminus U \subset \mathbb{C} \setminus G_q(f)$, це призводить до такого питання:

Проблема 7.5. *Чи існує ціла функція f порядку ρ та цілком регулярного зростання, чиї нулі задовольняють (C) така, що функція f необмеженого l_ρ-індексу?*

Зауважимо, що існують функції обмеженого l_ρ-індексу, порядку ρ та цілком регулярного зростання, чиї нулів задовольняють (C) (див. приклади в доведенні теореми 4 в [70]).

Зважаючи на описані властивості функції Міттаг-Лефлера та функції $g(z)$, поставимо таку очікувану проблему:

Проблема 7.6. *Чи існує ціла функція порядку ρ та обмеженого l_ρ-індексу, але не цілком регулярного зростання відносно цього порядку?*

Функції скінченного порядку та не цілком регулярного зростання з [120] мають необмежений l_ρ-індекс. Можна безпосередньо переконатися, що їхні логарифмічні похідні не задовольняють (7.16). Якщо проблема 7.6 має заперечну відповідь, то проблема Гольдберга - Островського - Петренка розв'язується для диференціальних рівнянь вигляду (7.12), чиї коефіцієнти є функціями обмеженого l_ρ-індексу та задовольняють деякі природні додаткові припущення (наприклад, див. [115, 273] та підрозділ 5.5).

7.4 Лінійні однорідні диференціальні рівняння з коефіцієнтами, що швидко зростають

Насамкінець розглядаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння вигляду

$$f^{(p)}(z) + g_1(z)f^{(p-1)}(z) + \cdots + g_p(z)f(z) = 0, \tag{7.17}$$

яке отримується з (5.62), при $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$, $h(z) \equiv 0$, $g_0(z) \equiv 1$.

Відомо результат А. Д. Кузика та М. М. Шеремети [150] про зростання цілої функції обмеженого l-індексу. Згодом А. Д. Кузик, М. М. Шеремета [273] та М. Т. Бордуляк [67] дослідили обмеженість l-індексу цілих розв'язків рівняння (7.17) та їхнє зростання. Отримані ними оцінки містять функцію l. Взагалі кажучи, l — невідома. Вона вибирається настільки великою, що (5.63) або інша подібна до неї нерівність (див. більше в [67, 273]) виконується.

Тим часом, чимало математиків таких, як Л. Кіннунен, Я. Хейтоканґас, Р. Корхонен, Я. Раття, Т. Б. Цао, Ж. К. Чен, Ц. Ц. Янґ, К. Хамані, Б. Белаїді та інші [76, 81, 127, 132, 142] використовували ітеровані порядки для вивчення зростання розв'язків рівняння (7.17). Я. Лін, Я. Ту та Л. Ч. Ші [160] запропонували гнучкішу шкалу для вивчення зростання розв'язків. Вони використовували $[p, q]$-порядок.

Нещодавно, І. Чижиков та Н. Семочко слушно відмітили, що ітеровані порядки та $[p, q]$-порядки не охоплюють довільне зростання (див. приклад в [84]). Вони розглянули загальнішу шкалу для опису зв'язку між зростанням цілих коефіцієнтів та цілих розв'язків (7.17).

З огляду на теорему 5.7 та результати І. Чижикова та Н. Семочко виникло таке питання: *якою є додатна неперервна функція l, що цілі розв'язки* (7.17) *з довільно швидким зростанням мають обмежений l-індекс?*

Дамо відповідь на це питання. Зауважимо, що поняття обмеженого L-індексу за напрямком має декілька переваг у порівнянні з традиційними підходами до вивчення властивостей цілих розв'язків диференціальних рівнянь. Зокрема, якщо цілий розв'язок має обмежений індекс, то це відразу дає певні оцінки зростання, рівномірний у деякому сенсі розподіл його нулів та певне регулярне поводження самого розв'язку тощо.

Також нам потрібний такий результат Шеремети і Кузика для $n = 1$.

Теорема XXVII ([150, 206]). *Нехай l — додатна неперервно диференційовна функція дійсної змінної $t \in [0, +\infty)$. Припустимо, що $(-l'(t))^+ = o(l^2(t))$ при $t \to +\infty$, де $a^+ = \max\{a, 0\}$. Якщо ціла функція f має обмежений l-індекс, то*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r, f)}{\int_0^r l(t)dt} \le N(f, l) + 1.$$

Як і в [84], нехай φ — додатна необмежена функція, яка строго зростає на $[1, +\infty)$, φ^{-1} — обернена функція до φ, $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Визначимо порядок зростання цілої функції так

$$\widetilde{\sigma}^0_\varphi[f] = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(M(r,f))}{\ln r}, \quad \alpha_\varphi = \sup\{\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] |\ j = 1, 2, \ldots, p\},$$

а функцію $l_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ задамо через цю формулу

$$l_1(z) = \begin{cases} \max\limits_{1\le j\le p} (\varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] + \varepsilon) \ln |z|))^{1/j}, & |z| > r_1, \\ c_1, & |z| \le r_1, \end{cases}$$

де $\varepsilon > 0$ — задане, r_1 вибране так, що

$$c_1 = \max_{1\le j\le p} (\varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] + \varepsilon) \ln r_1))^{1/j} \ge 1.$$

Також нам потрібна більша функція $l_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$

$$l_0(z) = \begin{cases} \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon) \ln |z|), & |z| > r_0, \\ c_0, & |z| \le r_0, \end{cases}$$

де r_0 — вибране так, що $c_0 = \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon) \ln r_0) \ge 1$.

Нехай K — клас додатних неперервно диференційовних на $[0, +\infty)$ функцій l таких, що $l'(x) = o(l^2(x))$ при $x \to +\infty$. Нам потрібне таке твердження М. Т. Бордуляк:

Теорема XXVIII ([67]). *Нехай $l \in K \cap Q$, цілі функції $g_1, \ldots, g_p$ задовольняють умову $|g_j(z)| \le m_j l^j(|z|)$, $(1 \le j \le p)$ для всіх z, $|z| \ge R$. Якщо ціла функція f є розв'язком (7.17), то f є обмеженого l-індексу та $\limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r,f)}{\int_0^r l(t)dt} \le \max\left\{1, \sum_{j=1}^p m_j\right\}$.*

Сформулюємо основний результат цього підрозділу.

Теорема 7.5. *Нехай φ — додатна необмежена функція, що строго зростає на $[1, +\infty)$. Якщо $\alpha_\varphi \in (0, +\infty)$, $l_1 \in Q$, кожна ціла функція g_j має обмежений l_1-індекс ($j \in \{1, \ldots, p\}$), то кожна ціла функція, що задовольняє (7.17), має обмежений l_1-індекс.*

Якщо, крім того, $l_0 \in Q$, φ — неперервно диференційовна функція від дійсної змінної $t \in [1, +\infty)$, то для кожної цілої трансцендентної функції f, що задовольняє (7.17), справджується така оцінка

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{\int_{r_0}^r \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon) \ln r) dr} \le N(f, l_0) + 1. \tag{7.18}$$

Доведення. Позаяк $\alpha_\varphi \in (0, +\infty)$, виконуються такі нерівності

$$\varphi(M(r, g_j)) < (\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] + \varepsilon) \ln r,$$

для довільних $\varepsilon > 0$, $r \ge r_0(\varepsilon)$ та $j = 1, \ldots, p$. Це означає, що $M(r, g_j) < \varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] + \varepsilon) \ln r)$. Позначимо $r' = \min\{r \ge r_0(\varepsilon) :\ \varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] + \varepsilon) \ln r) \ge 1\}$. Звідси для $|z| \ge r'$ отримуємо

$$|g_j(z)| < \varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] + \varepsilon) \ln |z|) \le (l_1(z))^j,$$

тобто, (5.63) справедлива для $|z| \geq r'$.

З леми 5.1 для $n = 1$, $\mathbf{1}$ і теореми 5.7 випливає, що цілі розв'язки рівняння (7.17) мають обмежений l_1-індекс. Легко показати, що для всіх $t \in \mathbb{C}$ $l_1(t) \leq l_0(t)$. Тоді за теоремою XII ціла функція f, яка задовольняє (7.17), є також функцією обмеженого l_0-індексу.

Функція φ^{-1} теж строго зростає та є аналітичною функцією від дійсної змінної. Тому $(\varphi^{-1})' \geq 0$. Тоді й поготів $(-l_0'(t))^+ \equiv 0$ при $t \to +\infty$. Застосовуючи теорему XXVII, одержуємо (7.18). □

Теорема 7.6. *Нехай φ — додатна необмежена та неперервно диференційовна функція, що строго зростає на $[1, +\infty)$. Якщо $\alpha_\varphi \in (0, +\infty)$, $l_1 \in Q$, $t^2\varphi'(t)e^{\frac{\varphi(t)}{\alpha_\varphi+\varepsilon}} \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то кожна ціла функція, що задовольняє* (7.17)*, має обмежений l_1-індекс та*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, f)}{\int_{r_0}^r \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln r)dr} \leq p. \tag{7.19}$$

Доведення. Насамперед доведемо, що $l_1 \in K$. Справді,

$$\frac{l_1'(t)}{l_1^2(t)} = \frac{(\varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln t))'}{(\varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln t))^2} = \frac{(\alpha_\varphi + \varepsilon)(\varphi^{-1})'((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln t)}{t(\varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln t))^2} =$$
$$= \frac{\alpha_\varphi + \varepsilon}{y^2 e^{\frac{\varphi(y)}{\alpha_\varphi+\varepsilon}}\varphi'(y)} \to 0 \text{ при } y \to +\infty,$$

де $y = \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln t) \to +\infty$ as $t \to +\infty$. Як і вище, маємо $M(r, g_j) < \varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}_\varphi^0[g_j] + \varepsilon)\ln r)$. Звідси, $|g_j(z)| < \varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}_\varphi^0[g_j] + \varepsilon)\ln|z|) \leq (l_1(z))^j$. Тому, g_j та l_1 задовольняють умови теореми XXVIII при $m_j = 1$. Отже, кожна ціла функція, що є розв'язком рівняння (7.17), має обмежений l_1-індекс, при цьому для неї справджується (7.19). □

Легко помітити, що з простішого припущення $\liminf_{t\to+\infty} \varphi'(t) > 0$ випливає таке $t^2\varphi'(t)e^{\frac{\varphi(t)}{\alpha_\varphi+\varepsilon}} \to +\infty$.

Наслідок 7.1. *Нехай φ — додатна необмежена та неперервно диференційовна функція, що строго зростає на $[1, +\infty)$. Якщо $\alpha_\varphi \in (0, +\infty)$, $l_1 \in Q$, $\liminf_{t\to+\infty} \varphi'(t) > 0$, то кожна ціла функція, що задовольняє* (7.17)*, має обмежений l_1-індекс, причому для неї виконується* (7.19)*.*

Нехай

$$l_2(z) = \begin{cases} \varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}_\varphi^0[f] + \varepsilon)\ln|z|), & |z| > r_0, \\ c_0, & |z| \leq r_0, \end{cases}$$

де r_0 вибране так, що $c_0 = \varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}_\varphi^0[f] + \varepsilon)\ln r_0) \geq 1$.

Наведені теореми є уточненням результатів М. Бордуляк, А. Кузика та М. Шеремети [67, 273] у випадку, коли коефіцієнт біля старшої похідної дорівнює одиниці. На відміну від цих авторів, ми визначаємо конкретну функцію l таку,

що цілі розв'язки мають обмежений l-індекс. Але ця функція l залежить від функції φ. Тому з огляду на теореми 7.5 та 7.6 виникає питання:

Чи існує додатна необмежена та неперервно диференційовна функція φ на $[1,+\infty)$, яка строго зростає і така, що $\widetilde{\sigma}^0_\varphi[f] \in (0,+\infty)$ та $l_2 \in Q$ для цілої трансцендентної функції f нескінченного порядку?

Нижче дається відповідь на це питання.

Спершу наведемо твердження, що належить нашому співатору П.В. Філевичу. З його повним доведенням можна ознайомитися у статті [36]. З люб'язного дозволу П.Ф. Філевича ми тут наводимо його формулювання.

Теорема XXIX ([36, Філевич П. В.]). *Для довільної цілої трансцендентної функції f нескінченного порядку існує опукла на $\mathbb{R}$ функція $\Phi(r)$ така, що*

i) $\ln M_f(t) \le \Phi(\ln r)$, $r \ge 0$;

ii) $\ln M_f(r) = \Phi(\ln r)$ *для необмеженої зверху множини значень* $r > 0$;

iii) $\frac{\Phi'_+(r)}{\Phi(r)} \to +\infty$, $r \to +\infty$.

Наступне твердження дає відповідь на сформульоване вище питання.

Твердження 7.4. *Для довільної цілої трансцендентної функції f нескінченного порядку існує додатна необмежена та неперервно диференційовна функція φ, що строго зростає на $[1,+\infty)$, з $\widetilde{\sigma}^0_\varphi[f] \in (0,+\infty)$. А якщо $\liminf_{t\to+\infty} te^{\frac{\varphi(t)}{s}}\varphi'(t) > 0$, то знайдеться $l_2 \in Q$, де $s = \widetilde{\sigma}^0_\varphi[f] + \varepsilon$.*

Доведення. З огляду на теорему XXIX вибираємо $\varphi(t) := \exp\{\Phi^{-1}(\ln\ln t)\}$, де Φ^{-1} — обернена функція до Φ. Тоді $l_2(t) = \exp(\exp(\Phi(\ln(s\ln(t)))))$. Зауважимо, що в доведенні теореми XXIX $\Phi(t) = \exp(\Phi(t))$ та $\Phi(t) = A + \int_a^t \phi(t)dt$, де a — досить велике дійсне число, $A = A(a) > 0$ деяка стала і $\phi(t)$ деяка кусково-стала додатна необмежена функція. Стала A та функція ϕ залежать від функції f.

Очевидно, що функція φ додатна необмежена та строго зростає для всіх $t \ge t'$ та $\widetilde{\sigma}^0_\varphi[f] = 1$. Крім того, φ — неперервно диференційовна функція за винятком точок розриву ϕ. Для того, щоб переконатися у приналежності l_2 до класу Q, застосуємо лему 5.2 з підрозділу 5.5.3 до l_2 та перевіримо умову (5.74):

$$\frac{|l_2'(t)|}{c+|l_2(t)|} = \frac{|(\varphi^{-1}(s\ln t))'|}{c+|\varphi^{-1}(d\ln t)|} = \frac{s|(\varphi^{-1})'(s\ln t)|}{|t|(c+|\varphi^{-1}(d\ln t)|)} =$$

$$= \frac{s}{(c+|y|)e^{\frac{\varphi(y)}{s}}\varphi'(y)} \to 0 \text{ при } y \to +\infty \text{ та } \liminf_{t\to+\infty} te^{\frac{\varphi(t)}{s}}\varphi'(t) > 0,$$

де $y = \varphi^{-1}(s\ln t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Це, власне, й означає, що $l_2 \in Q$. □

7.5 Мероморфні функції обмеженого l-індексу

У цьому підрозділі запропонуємо підхід до введення поняття обмеженості l-індексу для мероморфних функцій, який може бути застосовний до дослідження властивостей мероморфних розв'язків диференціальних рівнянь.

Нехай $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — мероморфна функція. Нагадаємо деякі класичні позначення з теорії мероморфних функцій від однієї змінної (див. також [118, 269]). Число полюсів функції $f(z)$ у крузі $\{|z| \le r\}$ позначимо через $n(r, f)$. Порядок ρ мероморфної функції f визначається як

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln^+ T(r, f)}{\ln r},$$

де $a^+ = \max\{a, 0\}$, $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$, $m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$, $N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t} dt + n(0, f) \ln r$.

Мероморфна функція f допускає представлення у вигляді дробу $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, де $f_1(z)$ та $f_2(z)$ — цілі функції без спільних нулів. Нехай $u(z) = \max\{|f_1(z)|, |f_2(z)|\}$. Попри неєдиність представлення функції f, як частки цілих функцій, маємо [118, с. 17] $T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln u(re^{i\phi}) d\varphi$.

Число $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ називається порядком послідовності $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^p} = \infty$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty$.

Для мероморфних функцій скінченного порядку відомо зручне представлення.

Теорема XXX (Адамар, [118, с. 57])**.** *Нехай $f(z)$ — мероморфна функція скінченного порядку ρ, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ — послідовності нулів і полюсів функції $f(z)$, які не лежать в $z = 0$, p_1 — рід послідовності (a_n) та p_2 — рід (b_m). Нехай в околі $z = 0$ функція $f(z)$ допускає розвинення $f(z) = c_s z^s + c_{s+1} z^{s+1} + \ldots$ з $c_s \ne 0$. Тоді*

$$f(z) = z^s e^{P(z)} \frac{\prod_{a_n} E(z/a_n, p_1)}{\prod_{b_n} E(z/b_n, p_2)}, \tag{7.20}$$

де $P(z)$ — многочлен зі степенем q не більшим за $[\rho]$ і

$$E(z, p) = \begin{cases} 1 - z, & \text{якщо } p = 0, \\ (1 - z)\exp\{z + z^2/2 + \ldots + z^p/p\}, & \text{якщо } p \ge 1. \end{cases}$$

Зважаючи на теорему XXX, припустимо, що $f_1(z) = z^s e^{P(z)} \prod_{a_n} E(z/a_n, p_1)$, $f_2(z) = \prod_{b_n} E(z/b_n, p_2)$.

Існує чимало диференціальних рівнянь, які мають лише мероморфні розв'язки. Зокрема, рівняння Ріккаті, Пенлеве, Бріо-Буке тощо. Не зважаючи на два століття дослідження властивостей розв'язків цих рівнянь, вони досі залишаються об'єктами зацікавлення для багатьох математиків [89, 124, 136]. Разом з тим, для цілих розв'язків диференціальних рівнянь наявна добре розроблена теорія функцій обмеженого індексу. Це поняття має декілька переваг у порівнянні з традиційними підходами до вивчення властивостей цілих розв'язків диференціальних рівнянь. Зокрема, якщо цілий розв'язок має обмежений індекс, то це відразу дає оцінки його зростання, рівномірний у деякому розумінні розподіл його нулів, певне регулярне поводження розв'язків тощо [36, 200, 220, 273].

Нехай $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ — фіксована додатна неперервна функція, де $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Кажемо, що мероморфна функція f скінченного порядку є функцією обмеженого l-індексу, якщо цілі функції f_1 та f_2 мають обмежений l-індекс, де функції f_1, f_2 визначені вище. А l-індекс функції f визначимо як $N(f, l) = \max\{N(f_1; l), N(f; l_2)\}$.

Ця означення є коректним [220], бо якщо ціла функція f є обмеженого l-індексу, то f є обмеженого l^*-індексу для будь-якого $l^* \geq l$. Якщо $f_2(z)$ є многочленом та $l \equiv 1$, то це означення збігається з означенням обмеженості індексу для мероморфних функцій зі скінченним числом полюсів, яка запропоноване Р. Роєм та С. Шахом [179].

Використовуючи запропоноване означення та деякі властивості цілих функцій обмеженого l-індексу ми негайно дістаємо наступні твердження для мероморфних функцій обмеженого l-індексу.

Твердження 7.5. *Нехай $l \in Q$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ — мероморфна функція скінченного порядку, f_1, f_2 визначені вище. Якщо існує $r > 0$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ та $P_0 \geq 1$ такі, що для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$ та деякого $k_j = k_j(z_0) \in \mathbb{Z}_+$ при $0 \leq k_j \leq n_0$, $j \in \{1, 2\}$*

$$\max\{|f_j^{(k_j)}(z)| : \ |z - z_0| \leq \frac{r}{l(z_0)}\} \leq P_0 |f_j^{(k_j)}(z_0)|, \ j \in \{1, 2\}, \tag{7.21}$$

то f має обмежений l-індекс.

Твердження 7.6. *Нехай $l \in Q$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ — мероморфна функція скінченного порядку, f_1, f_2 визначені вище. Якщо f має обмежений l-індекс, то для кожного $r > 0$ існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ та $P_0 \geq 1$ такі, що для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$ та деякого $k_j = k_j(z_0) \in \mathbb{Z}_+$ при $0 \leq k_j \leq n_0$, $j \in \{1, 2\}$ виконується нерівність* (7.21).

Твердження 7.7. *Нехай $l \in Q$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ — мероморфна функція скінченного порядку, f_1, f_2 визначені вище. Якщо існують r_{1j}, r_{2j} з $0 < r_{1j} < r_{2j}$ та $P_1 \geq 1$ такі, що для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$*

$$\max\left\{|f_j(z)| : |z - z_0| = \frac{r_{2j}}{l(z_0)}\right\} \leq P_1 \max\left\{|f_j(z)| : |z - z_0| = \frac{r_{1j}}{l(z_0)}\right\}, j \in \{1, 2\},$$

то f має обмежений l-індекс.

Твердження 7.8. *Нехай $l \in Q$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ — мероморфна функція скінченного порядку, f_1, f_2 визначені вище. Якщо f — обмеженого l-індексу, то для кожних r_1, r_2 при $0 < r_1 < r_2$ існує $P_1 \geq 1$ таке, що для будь-якого $z_0 \in \mathbb{C}$*

$$\max\left\{|f_j(z)| : |z - z_0| = \frac{r_2}{l(z_0)}\right\} \leq P_1 \max\left\{|f_j(z)| : |z - z_0| = \frac{r_1}{l(z_0)}\right\}, j \in \{1, 2\}.$$

Твердження 7.9. *Нехай $l \in Q$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ — мероморфна функція скінченного порядку, f_1, f_2 визначені вище. Якщо існують $R > 0$, $P_2 \geq 1$ та $\eta \in (0, R)$ такі, що для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$ та деякого $r_j = r_j(z_0) \in [\eta, R]$*

$$\max\left\{|f_j(z)| : |z - z_0| = \frac{r_j}{l(z_0)}\right\} \leq P_2 \min\left\{|f_j(z)| : |z - z_0| = \frac{r_j}{l(z_0)}\right\}, j \in \{1, 2\}, \tag{7.22}$$

то f має обмежений l-індекс.

Твердження 7.10. *Нехай $l \in Q$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ — мероморфна функція скінченного порядку, f_1, f_2 визначені вище. Якщо функція f має обмежений l-індекс, то для кожного $R > 0$ знайдеться $P_2 \geq 1$ та $\eta \in (0, R)$ такі, що для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$ та деякого $r_j = r_j(z_0) \in [\eta, R]$ виконується нерівність* (7.22).

Твердження 7.11. *Нехай $l \in Q$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ — мероморфна функція скінченного порядку, f_1, f_2 визначені вище. Мероморфна функція f є обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли існують числа $p_j \in \mathbb{Z}_+$ та $C > 0$ такі, що*

$$\frac{|f_j^{(p_j+1)}(z)|}{l^{p+1}(z)} \leq C \max\left\{\frac{|f_j^{(k)}(z)|}{l^{p+1}(z)} : 0 \leq k \leq p_j\right\}, \ j \in \{1, 2\}.$$

Позначимо через $n(r, z, 1/f) = \sum_{|a_k - z| < r} 1$ лічильну функцію нулів, а через $n(r, z, f) = \sum_{|b_k - z| < r} 1$ лічильну функцію полюсів, де z — фіксована точка, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — послідовність нулів функції f, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — послідовність полюсів функції f. Позначимо $G_q(f_1) = \bigcup_n \{z : |z - a_n| < \frac{q}{l(a_n)}\}$ та $G_q(f_2) = \bigcup_n \{z : |z - b_n| < \frac{q}{l(b_n)}\}$.

Твердження 7.12. *Припустимо, що $l \in Q$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ — мероморфна функція скінченного порядку, f_1, f_2 визначені вище. Якщо мероморфна функція f має обмежений l-індекс, то*

1) *для будь-якого $r > 0$ існує $P = P(r) > 0$ таке, що $|f_j'(z)/f_j(z)| \leq Pl(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus G_r(f_j)$, $j \in \{1, 2\}$;*
2) *для будь-якого $r > 0$ знайдеться $\tilde{n} = \tilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$, при якому $n(r/l(z), z, 1/f) \leq \tilde{n}$ та $n(r/l(z), z, f) \leq \tilde{n}$ для всіх $z \in \mathbb{C}$.*

Позначимо $n(r, f) = \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} n(r, z, f)$, $n(r, 1/f) = \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} n(r, z, 1/f)$, $n(r) = \max\{n(r, f), n(r, 1/f)\}$.

Твердження 7.13. *Нехай $l \in Q$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ — мероморфна функція скінченного порядку, f_1, f_2 визначені вище. Якщо*

1) *існують $r_1 > 0$, $P > 0$ такі, що для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus G_{r_1}(f_j)$, $j \in \{1, 2\}$ справджується нерівність $\frac{|f_j'(z)|}{|f_j(z)|} \leq Pl(z)$;*
2) *$n(r) \equiv 0$ або знайдеться $r_2 > 0$ $n(r_2) \in [1; \infty)$ та $2n(r_2)r_1 < r_2/\lambda(r_2)$ де r_1 вибране з умови 1),*

то функція f має обмежений l-індекс.

Твердження 7.5 випливає з достатності теореми 4 у [220], твердження 7.6, 7.8, 7.10 випливають з необхідності відповідно теорем 2, 5, 6 у [220], твердження 7.11 випливає з теореми 1 в [219], а твердження 7.12 випливає з необхідності теореми 1 в [220]. Натомість, твердження 7.7, 7.9, 7.13 отримуються відповідно з теорем 4, 6, 8 в [46].

Для цілих функцій обмеженого індексу аналоги тверджень 7.5-7.10, 7.12-7.13 вперше були отримані Г. Х. Фріке [104, 108], а твердження 7.11 — У. Хейманом [128]. Пізніше М. М. Шеремета та А. Д. Кузик [219, 220] узагальнили їх для

цілих функцій обмеженого l-індексу. Нещодавно, ми спільно зі О. Б. Скасківим [33, 46] (див. також розділ 5) послабили достатні умови в достатніх умовах цих теорем, досліджуючи властивості цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямом. Тут ми формулюємо достатні умови та необхідні умови, як різні твердження, а не у вигляді критеріїв. Твердження 7.5-7.13 описують локальне поводження мероморфних функцій обмеженого l-індексу. Крім того, аналоги тверджень 7.11, 7.12, 7.13 для різноманітних класів голоморфних функцій часто використовуються, щоб дослідити властивості цілих та аналітичних в обмеженій області розв'язків диференціальних рівнянь чи систем диференціальних рівнянь [36, 58, 171]. Зокрема, вони допомагають встановлювати обмеженість l-індексу цих розв'язків. Це викликає появу такого питання:

Проблема 7.7. *Let $l \in Q$. Які умови на мероморфні коефіцієнти лінійного диференціального рівняння вищого порядку*

$$p_0(z)w^{(n)} + p_1(z)w^{(n-1)} + \ldots + p_n(z)w = h(z)$$

забезпечують обмеженість l-індексу кожного мероморфного розв'язку скінченного порядку?

Якщо h — мероморфна функція зі скінченним числом полюсів та обмеженого індексу ($l \equiv 1$), p_j — многочлени, то наведене рівняння вивчалося С. Шахом та Р. Роєм [179]. Зокрема, вони довели, що за умови $\deg P_0 \geq \max_{1\leq i\leq n} P_i$ кожний мероморфний розв'язок цього рівняння має обмежений індекс.

Звісно, твердження 7.5-7.13 породжують загальнішу проблему

Проблема 7.8. *Чи можна перенести результати відомі для цілих функцій обмеженого l-індексу на випадок мероморфних функцій скіненного порядку?*

У цьому підрозділі ми, по суті, вказали напрямок подальших досліджень, який може призвести до цікавих результатів у теорії мероморфних функцій.

Висновки до розділу 7

Основні здобутки сьомого розділу:

1) доведено достатність умов гіпотези Шеремети про обмеженість l-індексу такої складеної функції $f(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1})$. Також виділено підклас цілих функцій f, для яких повністю справджується ця гіпотеза;
2) досліджено обмеженість $l - M$-індексу композиції цілих та деяких аналітичних функцій;
3) узагальнено результати Пойя-Клуні про зростання композиції цілих функцій на випадок $g(\frac{1}{(1-z)^p}$;
4) побудовано функцію скінченного порядку ρ і цілком регулярного зростання, нулі якої не задовольняють відомі умови Левіна C та (C') і яка причому має необмежений l_{rho}-індекс, де $l_\rho(|z|) = |z|^{\rho-1}$, $|z| \geq 1$. Тим самим

частково вирішено проблему Гольдберга про взаємозв'язок між цими класами;

5) побудовано функцію l таку, що кожний цілий розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку з коефіцієнтами скінченного ϕ-порядку має обмежений l-індекс, та знайдено оцінку зростання цілих розв'язків такого рівняння.
6) запропоновано підхід до введення поняття обмеженості l-індексу для мероморфних функцій та отримано цілий ряд, як достатніх, так і необхідних умов приналежності до цього класу. Відповідні твердження для цілих функцій знайшли застосування в дослідженнях властивостей цілих розв'язків диференціальних рівнянь. Тому, встановлені аналоги для мероморфних функцій, можливо, в майбутньому також знайдуть застосування до цих рівнянь.

Результати сьомого розділу опубліковано в статтях [36, 62, 63], а також доповідалися на конференціях [61].

ВИСНОВКИ

Варто зазначити, що досліджувані в дисертації класи цілих та аналітичних функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних чи обмеженого L-індексу за напрямком є досить широкими. Про це свідчать доведені теореми існування. Зокрема, для цілої функції $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ існує додатна неперервна функція $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ така, що F — обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, тоді і тільки тоді, коли F має обмежену кратність нульових точок. Цей факт забезпечує широту та всеохопність проведених досліджень, бо завдяки вибору вектор-функції $\mathbf{L}$ можна вивчати досить складні за структурою та властивостями функції.

Навіть більше, запропоновані підходи до введення поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для аналітичних у полікрузі чи в одиничній кулі функцій дозволяють вивчати функцій від декількох змінних, які дійсно мають особливі точки на межі полікруга чи на одиничній сфері. Це було нездійсненним при розгляді функцій, які задовольняють означення обмеженого індексу в сенсі Крішни-Шаха для аналітичних довільній області з $\mathbb{C}^n$ функцій, бо такі функції насправді виявлялися цілими.

Серед вагомих здобутків дисертаційної роботи треба відзначити такі:

1) для класу цілих функцій від декількох змінних обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних встановлено нові критерії приналежності функцій до цього класу, теореми існування та інші властивості;
2) для класу аналітичних в одиничній кулі функцій від декількох змінних обмеженого L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних досліджено характеристичні властивості функцій з цього класу;
3) знайдено точні оцінки зростання логарифма максимуму модуля функцій з відповідних класів функцій обмеженого індексу на колі чи кістяку полікруга, причому розв'язано проблему Шеремети про зростання цілих обмеженого L-індексу за напрямку;
4) виділено клас цілих функцій необмеженого індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b}$ таких, що на кожній зрізці вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ вони мають обмежений індекс та знайдено функцію L, для якої деякі цілі функції з описаною властивістю матимуть обмежений L-індекс за тим напрямком;
5) повністю доведено гіпотезу про можливість послаблення достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком для цілих функцій (оцінка максимуму модуля, мінімуму модуля на колі, логарифмічний критерій) через заміну квантора загальності на квантор існування;

6) встановлено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком композиції цілих функцій від декількох змінних. Отримані умови є слабшими в одновимірному випадку, ніж відомі досі;
7) доведено достатність умов у гіпотезі М. М. Шеремети [213] про обмеженість l-індексу деяких композицій аналітичних функцій від однієї змінної та дано відповідь на питання М. М. Шеремети про обмеженість $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних композицій цілих функцій;
8) отримано достатні умови обмеженості l-індексу цілих розв'язків рівняння $w' = f(z, w)$;
9) знайдено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для суми цілих функцій;
10) знайдено достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних цілих чи аналітичних в кулі розв'язків систем лінійних рівнянь з частинними похідними вищих порядків та отримано точні оцінки їхнього зростання через параметри, залежні від коефіцієнтів систем;
11) виявлено нові характеристичні властивості функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних через оцінку максимуму модуля таких функцій на сфері замість кістяка полікруга;
12) вперше отримано аналоги логарифмічного критерію у вигляді достатніх умов та оцінки максимуму модуля через мінімум модуля для цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, причому один з цих аналогів є ствердною відповіддю на питання І. Е. Чижикова про можливість оцінки частинних логарифмічних похідних ззовні більших виняткових множин;
13) побудовою відповідного прикладу спростовано гіпотезу С. Ю. Фаворова, що умову „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“ можна замінити на умову „F — голоморфна на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ в теорії цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком;
14) встановлено аналог теореми Хеймана для аналітичних в полікрузі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних та описано поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд;
15) узагальнено результати Пойя-Клуні про зростання композиції цілих функцій на випадок деяких композицій аналітичних функцій;
16) досліджено взаємозв'язок між класами функцій обмеженого l_ρ-індексу та функціями цілком регулярного зростання (проблема А. А. Гольдберга з [267]) через побудову функцію скінченного порядку ρ і цілком регулярного зростання, нулі якої не задовольняють відомі умови Левіна C та (C') і яка причому має необмежений l_ρ-індекс.

Іншим потужним підходом, який дозволяє досліджувати асимптотику аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь, є метод Вімана - Валірона. Проте наразі нам не відома адаптація цього методу до систем рівнянь з частинними похідними, які розглянуті в цій праці. Водночас, на таких системах досить гнучко працює поняття обмеженого індексу, його узагальнення для різних класів функцій та відповідні аналоги теореми Хеймана, завдяки яким можна встановити обмеженість індексу аналітичних розв'язків таких систем, а звідти витягнути оцінки зростання через коефіцієнти систем, певне регулярне поводження як самих розв'язків, так і їхніх похідних, оцінки логарифмічних похідних розв'язків, рівномірний в деякому розумінні розподіл їхніх нулів та багато інших цікавих властивостей, не знаходячи при цьому явного вигляду розв'язку.

Крім того, узагальнюючи одновимірні результати на багатовимірний комплексний простір, у багатьох випадках (результати з пунктів 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12) нам вдалося добитися покращення нових відповідних одновимірних наслідків через послаблення достатніх умов або через уточнення нерівностей.

Список використаних джерел

1. Agler, J., McCarthy, J., Stankus, M.: Local geometry of zero sets of holomorphic functions near the torus. New York J. Math. **14**, 517–538 (2008). URL `http://nyjm.albany.edu/j/2008/14-24.html`
2. Ahn, H., Cho, H.: Zero sets of holomorphic functions in the Nevanlinna type class on convex domains in $\mathbb{C}^2$. Japan. J. Math. (N.S.) **28**(2), 245–260 (2002). URL `https://www.jstage.jst.go.jp/article/math1924/28/2/28_2_245/_pdf`
3. Azarin, V.: Growth theory of subharmonic functions. Birkhäuser, Basel (2009)
4. Azpeitia, A.G.: On entire functions of bounded index defined by Dirichlet expansions. Riv. Math. Univ. Parma **3**, 95–97 (1977)
5. Bajpai, S.K.: On entire functions of bounded index defined by Dirichlet expansions. Indian J. Pure Appl. Math. **11**(4), 422–427 (1980)
6. Banakh, T.O., Kushnir, V.O.: On growth and distribution of zeros of analytic functions of bounded l-index in arbitrary domains. Mat. Stud. **14**(2), 165–170 (2000)
7. Bandura, A.: A new class of functions of bounded L-index in direction. In: Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблем теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, pp. 31–32. Івано-Франківськ (2011). Ворохта, 23-28 лютого 2011 року
8. Bandura, A.: The properties of a space of entire functions of bounded L-index in direction. In: International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: abstracts of reports, p. 122. Lviv (2012). Lviv, September 17-21, 2012
9. Bandura, A.: About boundedness and unboundedness of L-index of entire functions. In: International conference “Complex analysis and related topics”: abstracts, p. 8. Lviv (2013). Lviv, September 23-28, 2013
10. Bandura, A.: A improvement of some criterion of boundedness L-index in direction. In: Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, pp. 35–36. Івано-Франківськ (2013). Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013
11. Bandura, A.: Distribution of zeros of analytic in an unit ball functions of bounded L-index in direction. In: IV International Hahn conference dedicated to the 135-th anniversary of Hans Hahn: book of abstracts, pp. 222–223. Chernivtsi (2014). Chernivtsi, June 30 - July 5, 2014
12. Bandura, A.: Growth of analytic in an unit ball functions of bounded L-index in direction. In: IX-th Summer school Algebra, Topology and Analysis, pp. 3–4. Ivano-Frankivs'k (2014). Polianytsia, July 7 - July 18, 2014
13. Bandura, A.: Analytic in the unit ball functions of bounded L-index in direction and everywhere dense in a sequence of balls set. In: II International Seminar on Analytic functions, pp. 3–4. Ivano-Frankivs'k (2015). Ivano-Frankivsk, June 1-3, 2015
14. Bandura, A.: Entire function of unbounded index in any direction. In: Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаґе. Тези доповідей, pp. 133–134. ЧНУ, Чернівці (2015). Чернівці, 1-4 липня 2015 року
15. Bandura, A.: Estimate of maximum modulus by minimum modulus for entire functions of bounded L-index in direction. In: International conference "Complex analysis and related topics": abstracts, pp. 10–11. ЛНУ ім. І. Франка, Львів (2016). Lviv, May 30-June 4, 2016
16. Bandura, A.: L-index in direction of function of form $f(\sqrt{z_1 z_2})$. In: International Conference «Contemporary Problems of Natural Sciences» «Tarapov Readings-2016»: abstracts, p. 38. Цифрова друкарня № 1, Харків (2016). Kharkiv, March 1-15, 2016
17. Bandura, A.: Remark about bounded L-index in direction $\mathbf{b}$ of function $\cos\sqrt{z_1 z_2}$. In: Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, p. 50. ПНУ ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ (2016). Ворохта, 24-27 лютого 2016 року
18. Bandura, A.: Sums of entire functions of bounded L-index in direction. In: Друга Всеукр. наук. конф. „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції, pp. 7–8. ІФНТУНГ (2016). Івано-Франківськ, 13-15 жовтня 2016

19. Bandura, A.: Analytic in a ball functions of bounded **L**-index in joint variables. In: International conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach: book of abstracts, p. 111. Дослідно-видавничий центр Наукового товариства ім. Шевченка, Lviv (2017). Lviv, Ukraine, September 18 – 23, 2017
20. Bandura, A.: Composition of entire functions and bounded L-index in direction. Mat. Stud. **47**(2), 179–184 (2017). doi: 10.15330/ms.47.2.179-184
21. Bandura, A.: Estimate minimum modulus of entire function of bounded **L**-index in joint variables. In: Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, p. 52. ПНУ ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ (2017). Ворохта, 22-25 лютого 2017 року
22. Bandura, A.I.: Composition of entire functions and bounded L-index in direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, p. 5. Івано-Франківськ (2018). Ворохта, 27 лютого - 2 березня 2018 року
23. Bandura, A.: Analytic solutions in the unit ball of system of partial differential equations and bounded **L**-index in joint variables. XIXth International conference on analytic functions and related topics. Book of absracts & conference program, p. 32-33. University of Rzeszów (2018). Rzeszów, Poland, 25-29 June 2018.
24. Bandura, A., Petrechko, N.: Analytic functions in a bidisc of bounded **L**-index in joint variables. In: International conference "Complex analysis and related topics": abstracts, pp. 63–64. ЛНУ ім. І. Франка, Львів (2016). Lviv, May 30-June 4, 2016
25. Bandura, A., Petrechko, N., Skaskiv, O.: Dominating polynomial of power series of analytic in bidisc functions of bounded **L**-index in joint variables: book of abstracts. In: International conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, pp. 128–129. Дослідно-видавничий центр Наукового товариства ім. Шевченка, Lviv (2017). Lviv, Ukraine, September 18 – 23, 2017
26. Bandura, A., Petrechko, N., Skaskiv, O.: Maximum modulus in a bidisc of analytic functions of bounded **L**-index and an analogue of Hayman's theorem. Mat. Bohemica, (2018). doi: 10.21136/MB.2017.0110-16
27. Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic in a ball functions of bounded L-index in direction. In: Всеукр. наук. конф. „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції, pp. 31 – 33. Івано-Франківськ (2011). Яремче, 13-15 жовтня 2011 року
28. Bandura, A., Skaskiv, O.: Existence theorems for analytic in a ball functions of bounded L-index in direction. In: International scientific conference "Theory of approximation of functions and its applications" dedicated to the 70th anniversary of corresponding member of NASU, prof. A. I. Stepanets: abstracts, p. 117. Kyiv (2012). Kamianets-Podilsky, May 28 — June 3, 2012
29. Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic in the unit ball functions of bounded L-index in direction. URL `https://arxiv.org/abs/1501.04166`
30. Bandura, A., Skaskiv, O.: Entire functions of several variables of bounded index. Publisher I. E. Chyzhykov, Chyslo, Lviv (2016)
31. Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic functions in the unit ball. LAP Lambert Academic Publishing, Beau Bassin (2017)
32. Bandura, A., Skaskiv, O.: Asymptotic estimates of entire functions of bounded **L**-index in joint variables. Novi Sad J. Math., **48** (1), 103–116 (2018). doi: 10.30755/NSJOM.06997
33. Бандура, А., Скасків, О.: Логарифмічна похідна за напрямком та розподіл нулів цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком. Укр. мат. журн., **69**(3), 426-432 (2017). Engl. transl.: Bandura, A., Skaskiv, O.: Directional logarithmic derivative and the distribution of zeros of an entire function of bounded L-index along the direction. Ukr. Math. J. **69**(3), 500–508 (2017). doi: 10.1007/s11253-017-1377-8
34. Bandura, A., Skaskiv, O.: Entire functions of bounded **l**-index: Its zeros and behavior of partial logarithmic derivatives. J. Complex Analysis **2017**, 1–10 (2017). doi: 10.1155/2017/3253095. Article ID 3253095

35. Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic in an unit ball functions of bounded **L**-index in joint variables, Ukr. Mat. Visn., **14**(1), 1–15 (2017). Engl. transl.: Bandura, A., Skaskiv, O.: Functions analytic in a unit ball of bounded **L**-index in joint variables. J. Math. Sci. **227**(1), 1–12 (2017). doi: 10.1007/s10958-017-3570-6
36. Bandura, A., Skaskiv, O., Filevych, P.: Properties of entire solutions of some linear pde's. J. Appl. Math. Comput. Mech. **16**(2), 17–28 (2017). doi: 10.17512/jamcm.2017.2.02
37. Bandura, A.I.: The properties of entire functions of bounded value L-distribution in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(13)**, 50–55 (2011)
38. Bandura, A.I.: Sufficient conditions of strongly boundedness index in direction for entire functions of 0 genus with "plane" zeros. In: Book of abstracts: International conference „Complex analysis and its applications", p. 12. Kharkiv (2011). Kharkiv, August 16-18, 2011
39. Bandura, A.I.: The metric properties of a space of entire functions of bounded L-index in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(17)**, 46–52 (2012)
40. Bandura, A.I.: A modified criterion of boundedness of L-index in direction. Mat. Stud. **39**(1), 99–102 (2013)
41. Bandura, A.I.: A class of entire functions of unbounded index in each direction. Mat. Stud. **44**(1), 107–112 (2015). doi: 10.15330/ms.44.1.107-112
42. Bandura, A.I.: Entire function of unbounded index in any real direction. Prykarpatskyi Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(29)**, 24–30 (2015)
43. Bandura, A.I.: Properties of positive continuous functions in $\mathbb{C}^n$. Carpathian Math. Publ. **7**(2), 137–147 (2015). doi: 10.15330/cmp.7.2.137-147
44. Bandura, A.I.: Sum of entire functions of bounded L-index in direction. Mat. Stud. **45**(2), 149–158 (2016). doi: 10.15330/ms.45.2.149-158
45. Bandura, A.I.: Growth estimate of entire functions of bounded **L**-index in joint variables. In: International conference "Computational methods and Function theory 2017", pp. 33–34. UMCS, Lublin (2017). Lublin, Poland, July 10 – 15, 2017
46. Bandura, A.I.: Some improvements of criteria of L-index boundedness in direction. Mat. Stud. **47**(1), 27–32 (2017). doi: 10.15330/ms.47.1.27-32
47. Bandura, A.I., Bordulyak, M.T., Skaskiv, O.B.: Sufficient conditions of boundedness of **L**-index in joint variables. Mat. Stud. **45**(1), 12–26 (2016). doi: 10.15330/ms.45.1.12-26
48. Bandura, A.I., Kulinich, H.: Some problems in the theory of entire functions of unbounded index in direction. In: Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": тези доповідей, pp. 42–43. Івано-Франківськ (2014). Ворохта, 24 лютого - 2 березня 2014
49. Bandura, A.I., Kulinich, H.: The order of entire functions of bounded index on direction. In: Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": тези доповідей, p. 7. Івано-Франківськ (2015). Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015 року
50. Bandura, A.I., Kulinich, H.M.: Entire functions of strongly bounded L-index in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(21)**, 46–52 (2013)
51. Bandura, A.I., Kulinich, H.M., Shegda, L.M.: The order of entire functions of bounded index in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(25)**, 22–25 (2014)
52. Bandura, A.I., Petrechko, N.V.: Properties of power series of analytic in a bidisc functions of bounded **L**-index in joint variables. Carpathian Math. Publ. **9**(1), 6–12 (2017). doi: 10.15330/cmp.9.1.6-12
53. Bandura, A.I., Petrechko, N.V.: Sum of entire functions of bounded index in joint variables. Electr. J. Math. Anal. Appl. **6**(2), 60–67 (2018).
54. Bandura, A.I., Petrechko, N.V., Skaskiv, O.B.: Analytic in a polydisc functions of bounded **L**-index in joint variables. Mat. Stud. **46**(1), 72–80 (2016). doi: 10.15330/ms.46.1.72-80
55. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Sufficient sets for boundedness L-index in direction for entire functions. Mat. Stud. **30**(2), 177–182 (2008)
56. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Boundedness of L-index in direction of functions of the form $f(\langle z, m\rangle)$ and existence theorems. Mat. Stud. **41**(1), 45–52 (2014)

57. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Open problems for entire functions of bounded index in direction. Mat. Stud. **43**(1), 103–109 (2015). doi: 10.15330/ms.43.1.103-109
58. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Analytic functions in the unit ball of bounded **L**-index: asymptotic and local properties. Mat. Stud. **48**(1), 37–73 (2017). doi: 10.15330/ms.48.1.37-73
59. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Behavior of partial logarithmic derivatives and distribution of zeros of entire functions. In: International conference "Theory of appoximation of functions and its applications"in honor of 75th anniversary of corresponding member of NASU, prof. A. I. Stepanets: abstracts, p. 18. видавництво Б. І. Маторіна, Slovyansk (2017). Slovyansk, May 28 — June 3, 2017
60. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Growth of entire functions of bounded L-index in direction. Mat. Met. Phys.mech. fields **60**(1), 22–31 (2017)
61. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Properties of entire solutions of some linear PDE's: book of abstracts. In: International conference on Differential equations, Mathematical Physics and Applications, p. 55. Vinnytsia, Vasyl Stus Donetsk National University, Cherkasy (2017). Cherkasy, Ukraine, October, 17 – 19, 2017
62. Bandura, A.I., Sheremeta, M.M.: Bounded l-index and $l-M$-index and compositions of analytic functions. Mat. Stud. **48** (2), 180-188 (2017). doi: 10.15330/ms.48.2.180-188
63. Bandura, A.: Bounded l-index and infinite products of infinite genus. Visn. Lviv Un-ty, Ser. Mech. Math. Issue **84**, 71–79 (2017).
64. Bandura, A.I.: Analytic functions in the unit ball of bounded value L-distribution in a direction. Mat. Stud. **49** (1), 75–79 (2018). doi: 10.15330/ms.49.1.75-79
65. Barth, K.F., Brannan, D., Hayman, W.: Research problems in complex analysis. Bull. London Math. Soc **16**(5), 490–517 (1984). doi: 10.1112/blms/16.5.490
66. Bordulyak, M.T.: A proof of Sheremeta conjecture concerning entire function of bounded l-index. Mat. Stud. **12**(1), 108–110 (1999)
67. Bordulyak, M.T.: On the growth of entire solutions of linear differential equations. Mat. Stud. **13**(2), 219–223 (2000)
68. Bordulyak, M.T.: On l-index boundedness of the Weierstrass σ-function. Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform. **63**(1), 49–56 (2013)
69. Bordulyak, M.T., Chyzhykov, I.E., Sheremeta, M.M.: Preservation of l-index boundedness under zero shifts. Mat. Stud. **19**(1), 21–30 (2003)
70. Bordulyak, M.T., Sheremeta, M.M.: On the existence of entire functions of bounded l-index and l-regular growth. Ukrainian Math. J. **48**(9), 1322–1340 (1996). doi: 10.1007/BF02595355
71. Bordulyak, M.T., Sheremeta, M.M.: A problem in the theory of entire functions of bounded index. Mat. Stud. **15**(1), 105–107 (2001)
72. Bordulyak, M.T., Sheremeta, M.M.: Boundedness of l-index of analytic curves. Mat. Stud. **36**(2), 152–161 (2011)
73. Bordulyak, M.T., Sheremeta, M.M., Trukhan, Yu.S.: On zeros of derivatives of an entire function. Mat. Stud. **25**(2), 141–148 (2006)
74. Bose, A.K.: A note on entire functions of bounded index. Proc. Amer. Math. Soc. **21**(2), 257–262 (1969)
75. Briot, C., Bouquet, J.C.: Théorie des fonctions elliptiques. Gauthier-Villars, Paris (1875)
76. Cao, T.B.: Complex oscillation of entire solutions of higher-order linear differential equations. Electronic Journal of Differential Equations **81**, 1–8 (2006)
77. Chakraborty, B.C., Chanda, R.: A class of entire functions of bounded index in several complex variables. J. Pure Math. **12**, 16–21 (1995)
78. Chakraborty, B.C., Samanta, T.K.: A generalized FK-space of entire functions of M-bounded index. J. Pure Math. **16**, 99–108 (1999)
79. Chakraborty, B.C., Samanta, T.K.: On entire functions of bounded index in several complex variables. J. Pure Math. **17**, 53–71 (2000)
80. Chakraborty, B.C., Samanta, T.K.: Entire functions of L-bounded index. J. Pure Math. **18**, 53–64 (2001)

81. Chen, Z.X., Yang, C.C.: Quantitative estimations on the zeros and growth of entire solutions of linear differential equations. Complex variables **42**, 119–133 (2000)
82. Chyzhykov, I., Gundersen, G., Heittokangas, J.: Linear differential equations and logarithmic derivative estimates. Proc. London Math. Soc. **86**(3), 735–754 (2003). doi: 10.1112/S0024611502013965
83. Chyzhykov, I., Heittokangas, J., Rättyä, J.: Sharp logarithmic derivative estimates with applications to ODE's in the unit disc. J. Austr. Math. Soc. **88**(2), 145–167 (2010). doi: 10.1017/S1446788710000029
84. Chyzhykov, I., Semochko, N.: Fast growing enitre solutions of linear differential equations. Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13**, 68–83 (2016)
85. Chyzhykov, I.E., Semochko, N.: On estimates of a fractional counterpart of the logarithmic derivative of a meromorphic function. Mat. Stud. **39**(1), 107–112 (2013)
86. Chyzhykov, I.E., Semochko, N.: Generalization of the Wiman-Valiron method for fractional derivatives. Int. J. Appl. Math. **29**(1), 19–30 (2016). doi: 10.12732/ijam.v29i1.3
87. Chyzhykov, I.E., Sheremeta, M.M.: Boundedness of l-index for entire functions of zero genus. Mat. Stud. **16**(2), 124–130 (2001)
88. Clunie, J.: On entire functions having prescribed growth. Canad. J. Math. **17**, 396–404 (1965)
89. Ciechanowicz, E., Filipuk, G.: Meromorphic solutions of $P_{3,34}$ and their value distribution. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica, **41**, 617–638 (2016). doi: 10.5186/aasfm.2016.4146
90. Clunie, J.: The composition of entire and meromorphic functions. In: Mathematical Essays Dedicated to A. J. Macintyre, pp. 75–92. Ohio University Press, Athens, Ohio (1970)
91. Cumenge, A.: Zero sets of functions in the Nevanlinna or the Nevanlinna-Djrbachian classes. Pacific J. Math. **199**(1), 79–92 (2001). doi: 10.2140/pjm.2001.199.79
92. Datta, S.K.: On entire functions of L-bounded index and of non uniforma L-bounded index. Bull. Calcutta Math. Soc. **98**(1), 63–70 (2006)
93. Ekblaw, K.A.: The functions of bounded index as a subspace of a space of entire functions. Pacific J. Math. **37**(2), 353–355 (1971)
94. Ekblaw, K.A.: Polynomials of maximal index. Aequationes Mathematicae **10**(1), 34–39 (1974)
95. Eremenko, A.: Meromorphic solutions of algebraic differential equations. Russian Math. Surveys **37**(4), 61–95 (1982). doi: 10.1070/RM1982v037n04ABEH003967
96. Eremenko, A.: Progress in entire and meromorphic functions (2003). URL `https://www.math.purdue.edu/~eremenko/dvi/progr.pdf`. Preprint
97. Frank, G.: Über den index einer ganzen funktion. Arch. Math. **22**(1), 175–180 (1971)
98. Frank, G.: Über ganze funktionen, die einer linearen differentialgleichung genügen. Manuscripta Math. **4**(3), 225–253 (1971)
99. Frank, G.: Zur lokalen werteverteilung der lösungen linearer differentialgleichungen. Manuscripta Math. **6**(4), 381–404 (1972)
100. Frank, G., Mues, E.: Über den index der lösungen linearer differentialgieichungen. Manuscripta Math. **5**(2), 155–163 (1971)
101. Frank, G., Mues, E.: Über das wachstum des index ganzer funktionen. Math. Ann. **195**(3), 114–120 (1972)
102. Frank, G., Mues, E.: Über lokale maximalbeträge und den index ganzer funktionen. Arch. Math. **23**(1), 269–277 (1972)
103. Fricke, G.H.: A characterization of functions of bounded index. Indian J. Math. **14**(3), 207–212 (1972)
104. Fricke, G.H.: Functions of bounded index and their logarithmic derivatives. Math. Ann. **206**, 215–223 (1973)
105. Fricke, G.H.: A note on multivalence of functions of bounded index. Proc. Amer. Math. Soc. **40**(6), 140–142 (1973)

106. Fricke, G.H.: Entire functions having positive zeros. Indian J. Pure Appl. Math. **5**(5), 478–485 (1974)
107. Fricke, G.H.: A characterization of functions of bounded index having positive zeros. Indian J. Math. **17**(3), 121–132 (1975)
108. Fricke, G.H.: Entire functions of locally slow growth. J. Anal. Math. **28**(1), 101–122 (1975)
109. Fricke, G.H.: Entire functions with prescribed asymptotic behavior. Rocky Mountain J. Math. **6**(2), 237–246 (1976)
110. Fricke, G.H.: A note on bounded index and bounded value distribution. Indian J. Pure Appl. Math. **11**(4), 428–432 (1980)
111. Fricke, G.H., Powell, R.E.: Some product theorem on functions of bounded index. Indian J. Pure Appl. Math. **3**(5), 795–800 (1972)
112. Fricke, G.H., Powell, R.E.: Bounded index and summability methods. J. Aust. Math. Soc. **21**, 79–87 (1976)
113. Fricke, G.H., Roy, R., Shah, S.M.: Bounded index, entire solutions of ordinary differential equations and summability methods. Int. J. Math. Math. Sci. **4**(3), 417–434 (1981)
114. Fricke, G.H., Shah, S.M.: Entire functions satisfying a linear differential equation. Indag. Math. **78**(1), 39 – 41 (1975). doi: 10.1016/1385-7258(75)90012-8
115. Fricke, G.H., Shah, S.M.: On bounded value distribution and bounded index. Nonlinear Anal. **2**(4), 423–435 (1978)
116. Fricke, G.H., Shah, S.M., Sisarcick, W.C.: A characterization of entire functions of exponential type and M-bounded index. Indiana Univ. Math. J. **23**(5), 405–412 (1974). doi: 10.1512/iumj.1974.23.23032
117. Goldberg, A., Korenkov, N.: Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of an entire function of completely regular growth. Ukr. Math. J. **30**(1), 17–22 (1978). doi: 10.1007/BF01130625
118. Goldberg, A., Ostrovskii, I.: Value Distribution of meromorphic functions, Providence, AMS: Translations of Mathematical monographs, vol. 236, (2008)
119. Goldberg, A., Ostrovskii, I.: Completely regular growth of entire solutions of linear differential equation. problem 16.2. In: Linear and complex analysis. Problem book 3. Part II, p. 300. Springer-Verlag, Berlin (1994)
120. Goldberg, A., Strochik, N.: Asymptotic behavior of meromorphic functions of completely regular growth and of their logarithmic derivatives. Sib. Math. J. **26**(6), 802–809 (1985). doi: 10.1007/BF00969100
121. Goldberg, A.A., Sheremeta, M.M.: On the boundedness l-index of canonical products. Ukr. Math. Bull. **2**(1), 53–65 (2005)
122. Goldberg, A.A., Sheremeta, M.N.: Existence of an entire transcendental function of bounded l-index. Math. Notes **57**(1), 88–90 (1995). doi: 10.1007/BF02309399
123. Govorov, N.: Riemann's Boundary Problem with Infinite Index. Birkhäuser, Basel (1994)
124. Gromak, V., Laine, I., Shimomura, S.: Painlevé Differential Equations in the Complex Plane, in: De Gruyter Studies in Mathematics, V. 28, Walter de Gruyter (2008)
125. Gross, F.: Entire functions of bounded index. Proc. Amer. Math. Soc. **18**(6), 974–980 (1967)
126. Gross, F.: Entire functions of exponential type. Journal of Research of NBS **74B**(1), 55–59 (1970)
127. Hamani, K., Belaïdi, B.: Growth of solutions of complex linear differential equations with entire coefficients of finite iterated order. Acta Universitatis Apulensis **27**, 203–216 (2011)
128. Hayman, W.K.: Differential inequalities and local valency. Pacific J. Math. **44**(1), 117–137 (1973)
129. Hayman, W.K.: The growth of solutions of algebraic differential equations. Rend. Mat. Acc. Lincei s.9 **7**(2), 67–73 (1996)
130. Heath, L.F.: Vector-valued entire functions of bounded index satisfying a differential equation. Journal of Research of NBS **83B**(1), 75–79 (1978)
131. Heittokangas, J.: Growth estimates for logarithmic derivatives of Blaschke products and of functions in the Nevanlinna class. Kodai Math. J. **30**(2), 263–279 (2007). doi: 10.2996/kmj/1183475517

132. Heittokangas, J., Korhonen, R., J.Rattyä: Growth estimates for analytic solutions of complex linear differential equations. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **29**, 233–246 (2004)
133. Heittokangas, J., Korhonen, R., Rättyä, J.: Generalized logarithmic derivative estimates of Gol'dberg and Grinshtein type. Bull. London Math. Soc. **36**(1), 105–114 (2004). doi: 10.1112/S0024609303002649
134. Heittokangas, J., Laine, I., Tohge, K., Wen, Z.T.: Completely regular growth solutions of second order complex linear differential equations. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **40**, 985–1003 (2015). doi: 10.5186/aasfm.2015.4057
135. Hennekemper, W.: Some results on functions of bounded index. In: I. Laine, O. Lehto, T. Sorvali (eds.) Complex Analysis Joensuu 1978, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 747, pp. 158–160. Springer, Berlin, Heidelberg (1979)
136. Hinkkanen, A., Laine, I.: Solutions of a modified third Painlevé equation are meromorphic. J. Anal. Math. **85**(1), 323–337 (2001). doi: 10.1007/BF02788086
137. Iyer, V.G.: On the space of integral functions. J. Indian Math. Soc., New Series **12**, 12–30 (1948)
138. Jasiczak, M.: Remark on zero sets of holomorphic functions in convex domains of finite type. Canad. Math. Bull. **53**(2), 311–320 (2010). doi: 10.4153/CMB-2010-037-3
139. Kanter, M.: Gauss-Lucas theorems for entire functions on C^M. Complex Var. Elliptic Equ. **60**(1), 93–98 (2015). doi: 10.1080/17476933.2014.930829
140. King, A.C., Patterson, J.: A computer method for approximating the zeros of certain entire functions. Rocky Mountain J. Math. **17**(1), 135–140 (1987). doi: 10.1216/RMJ-1987-17-1-135
141. King, A.C., Shah, S.M.: Indices of Lindelöf functions and their derivatives. Rocky Mountain J. Math. **2**(4), 579–594 (1972)
142. Kinnunen, L.: Linear differential equations with solutions of finite iterated order. Southeast Asian Bull. Math. **22**, 385–405 (1998)
143. Knab, O.: Wachstumsordnung und Index der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Manuscripta Math. **18**(3), 299–316 (1976)
144. Knab, O.: Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten in Winkelräumen. Manuscripta Math. **24**(3), 295–322 (1978)
145. Knab, O.: Über Wachstumsordnung und Typus der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Arch. Math. **31**(1), 61–69 (1978)
146. Krishna, G.J., Shah, S.M.: Functions of bounded indices in one and several complex variables. In: Mathematical Essays Dedicated to A. J. Macintyre, pp. 223–235. Ohio University Press, Athens, Ohio (1970)
147. Kulyavec', L.V., Sheremeta, M.M.: On the l-index boundedness of entire ridge functions. Mat. Stud. **40**(2), 144–148 (2013)
148. Kushnir, V.O.: Analytic functions of bounded l-index. Нелин. гран. зад. **11**, 100–104 (2001)
149. Kushnir, V.O., Sheremeta, M.M.: Analytic functions of bounded l-index. Mat. Stud. **12**(1), 59–66 (1999)
150. Kuzyk, A.D., Sheremeta, M.N.: Entire functions of bounded l-distribution of values. Math. notes. **39**(1), 3–8 (1986). doi: 10.1007/BF01647624
151. Lahiri, I., Bhattacharjee, N.: Functions of L-bounded index and of non-uniform L-bounded index. Indian J. Math. **40**(1), 43–57 (1998)
152. Lakshminarasimhan, T.: A note on entire functions of bounded index. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **38**, 43–49 (1974)
153. Lee, B.S., Shah, S.M.: The type of an entire function satisfying a linear differential equation. Arch. Math. **20**(6), 616–622 (1969). doi: 10.1007/BF01899062
154. Lee, B.S., Shah, S.M.: Inequalities satisfied by entire functions and their derivatives. Trans. Amer. Math. Soc. **149**, 109–117 (1970)
155. Lee, B.S., Shah, S.M.: On the growth of entire functions of bounded index. Indiana Univ. Math. J. **20**(1), 81–87 (1970)

156. Lepson, B.: Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index. Proc. Sympos. Pure Math. **11**, 298–307 (1968)
157. Lepson, B.: Entire functions of extreme rates of growth. Journal of Mathematical Analysis and Applications **36**(2), 371–376 (1971). doi: 10.1016/0022-247X(71)90009-6
158. Levin, B.: Distribution of zeros of entire functions, *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 5. AMS (1980). Revised ed.
159. Levin, B.Y.: Lectures on entire functions. American Mathematical Soc. (1996)
160. Lin, J., Tu, J., Shi, L.Z.: Linear differential equations with entire coefficients of $[p;q]$-order in the complex plane. J. Math. Anal. Appl. **372**, 55–67 (2010)
161. Lundqvist, J.: An explicit calculation of the Ronkin function. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Ser. 6 **24**(2), 227–250 (2015). doi: 10.5802/afst.1447
162. Macdonnell, J.J.: Some convergence theorems for Dirichlet-type series whose coefficients are entire functions of bounded index. Doctoral dissertation, Catholic University of America, Washington (1957)
163. Majumder, N.K.: Entire functions of bounded index. Math. Ed. (Siwan) **19**(2), 54–57 (1985)
164. Malmquist, J.: Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre. Acta Math. **42**, 317–325 (1920). doi: 10.1007/BF02404413
165. Marić, V., Shah, S.M.: Entire functions defined by gap power series and satisfying a differential equation. Tohoku Math. J. **21**(4), 621–631 (1969)
166. Mykytyuk, Y.V., Fedynyak, S.I., Sheremeta, M.M.: Dirichlet series of bounded $l-M$-index. Mat. Stud. **11**(2), 159–166 (1999)
167. Nuray, F., Patterson, R.F.: Entire bivariate functions of exponential type. Bull. Math. Sci. **5**(2), 171–177 (2015). doi: 10.1007/s13373-015-0066-x
168. Nuray, F., Patterson, R.F.: Multivalence of bivariate functions of bounded index. Le Matematiche **70**(2), 225–233 (2015). doi: 10.4418/2015.70.2.14
169. Nuray, F., Patterson, R.F.: Vector-valued bivariate entire functions of bounded index satisfying a system of differential equations. Mat. Stud. **49**(1), 67–74 (2018). doi: 10.15330/ms.49.1.67-74
170. Patterson, R.F., Nuray, F.: A characterization of holomorphic bivariate functions of bounded index. Math. Slov. **67**(3), 731–736 (2017). doi: 10.1515/ms-2017-0005
171. Petrechko, N.: Bounded **L**-index in joint variables and analytic solutions of some systems of PDE's in bidisc. Visn. Lviv Univ. Ser. Mech. Math. Issue **83**, 100–108 (2017)
172. Polya, G.: On an integral function of an integral function. J. London Math. Soc. **1**(1), 12–15 (1926). doi: 10.1112/jlms/s1-1.1.12
173. Powell, R.E., Shah, S.M.: Summability theory and applications. Van Nostrand Reinhold, London (1972)
174. Pugh, W.J.: Sums of functions of bounded index. Proc. Amer. Math. Soc. **22**, 319–323 (1969)
175. Pugh, W.J., Shah, S.M.: On the growth of entire functions of bounded index. Pacific J. Math. **33**(1), 191–201 (1970)
176. Rahman, Q.I., Stankiewicz, J.: Differential inequalities and local valency. Pacific J. Math. **54**(2), 165–181 (1974)
177. Ronkin, L.I.: Introduction to the theory of entire functions of several variables, 1 edn. AMS, Providence (1974)
178. Ronkin, L.I.: Functions of completely regular growth, *Mathematics and Its Applications: Soviet series*, vol. 81. Springer (1992)
179. Roy, R., Shah, S.M.: Meromorphic functions satisfying a differential equation. In: Value Distribution Theory and Its Applications, *Contemporary Mathematics*, vol. 25, pp. 131–139. American Mathematical Society (1983)
180. Roy, R., Shah, S.M.: Growth properties of vector entire functions satisfying differential equations. Indian J. Math. **28**(1), 25–35 (1986)
181. Roy, R., Shah, S.M.: The product of two functions of bounded value distribution. Indian J. Pure Appl. Math. **17**(5), 690–693 (1986)

182. Roy, R., Shah, S.M.: Vector-valued entire functions satisfying a differential equation. J. Math. Anal. Appl. **116**(2), 349–362 (1986)
183. Roy, R., Shah, S.M.: Entire functions of ν-bounded index. In: Analysis of one complex variable (Laramie, Wyo., 1985), pp. 181–191. World Sci. Publishing, Singapore (1987)
184. Roy, R., Shah, S.M.: Functions of bounded index, bounded value distribution and v-bounded index. Nonlinear Anal. **11**, 1383–1390 (1987)
185. Roy, R., Shah, S.M.: Sums of functions of bounded index and ordinary differential equations. Complex Var. Elliptic Equ. **12**, 95–100 (1989)
186. Rudin, W.: Function Theory in the unit ball on $\mathbb{C}^n$. Springer (2008). Reprint of the 1980 Edition
187. Salmassi, M.: Some classes of entire functions of exponential type in one and several complex variables. Doctoral dissertation, University of Kentucky, Lexington, Kentucky (1978)
188. Salmassi, M.: Functions of bounded indices in several variables. Indian J. Math. **31**(3), 249–257 (1989)
189. Salmassi, M.: Entire solutions of nonhomogenous differential equations. J. Math. Anal. Appl. **162**, 577–591 (1991)
190. Shah, S.: Entire functions of bounded value distribution and gap power series. In: P. Erdős, L. Alpár, G. Halász, A. Sárközy (eds.) Studies in Pure Mathematics To the Memory of Paul Turán, pp. 629–634. Birkhäuser Basel (1983). doi: 10.1007/978-3-0348-5438-2_54
191. Shah, S.M.: Entire functions of bounded index. Proc. Amer. Math. Soc. **19**(5), 1017–1022 (1968)
192. Shah, S.M.: Entire functions satisfying a linear differential equation. Indiana Univ. Math. J. **18**(2), 131–136 (1969)
193. Shah, S.M.: Entire functions of unbounded index and having simple zeros. Math. Z. **118**(3), 193–196 (1970)
194. Shah, S.M.: On entire functions of bounded index whose derivatives are of unbounded index. J. Lond. Math. Soc. (2) **4**(1), 127–139 (1971)
195. Shah, S.M.: Analytic functions with univalent derivatives and entire functions of exponential type. Bull. Amer. Math. Soc. **78**(2), 154–171 (1972)
196. Shah, S.M.: Functions of bounded index and M-bounded index. J. Math. Phys. Sci. **7**, 81–86 (1973)
197. Shah, S.M.: Entire functions whose Fourier transforms vanish outside a finite interval. J. Math. Anal. Appl. **53**(1), 174 – 185 (1976). doi: 10.1016/0022-247X(76)90154-2
198. Shah, S.M.: Entire function of bounded index. In: J.D. Buckholtz, T.J. Suffridge (eds.) Complex Analysis, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 599, pp. 117–145. Springer, Berlin, Heidelberg (1977)
199. Shah, S.M.: Functions of exponential type are differences of functions of bounded index. Canad. Math. Bull. **20**(4), 479–483 (1977)
200. Shah, S.M.: Entire solutions of linear differential equations and bounds for growth and index numbers. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **94**, 49–60 (1983)
201. Shah, S.M., Shah, S.N.: A new class of functions of bounded index. Trans. Amer. Math. Soc. **173**, 363–377 (1972)
202. Shah, S.M., Sisarcick, W.C.: On entire functions of exponential type. Journal of Research of NBS **75B**(3), 141–147 (1971)
203. Shah, S.M., Wiener, J.: Distributional and entire solutions of ordinary differential and functional differential equations. Int. J. Math. Math. Sci. **6**(2), 243–269 (1983)
204. Sheremeta, M.: Asymptotic properties of entire functions defined by dirichlet series and of their derivatives. Ukr. Math. J. **31**(6), 558–564 (1979). doi: 10.1007/BF01092538
205. Sheremeta, M.: On the derivative of an entire dirichlet series. Mathematics of the USSR-Sbornik **65**(1), 133–145 (1990). doi: 10.1070/SM1990v065n01ABEH002076
206. Sheremeta, M.: Analytic functions of bounded index, *Mathematical Studies. Monograph Series*, vol. 6. VNTL Publishers, Lviv (1999)

207. Sheremeta, M.M.: Five open problems in the theory of entire functions. Mat. Stud. **6**, 157–159 (1996)
208. Sheremeta, M.M.: Generalization of the Fricke theorem on entire functions of finite index. Ukrainian Math. J. **48**(3), 460–466 (1996). doi: 10.1007/BF02378535
209. Sheremeta, M.M.: Remark to existence theorem for entire function of bounded l-index. Mat. Stud. **13**(1), 97–99 (2000)
210. Sheremeta, M.M.: Problems in the theory of entire functions of bounded index and functions of sine type. Mat. Stud. **15**(2), 217–224 (2001)
211. Sheremeta, M.M.: On a Gross conjecture concerning entire functions of bounded index. Mat. Stud. **18**(2), 211–212 (2002)
212. Sheremeta, M.M.: On the univalence of entire function of bounded l-index. Mat. Stud. **43**(2), 185–188 (2015). doi: 10.15330/ms.43.2.185-188
213. Sheremeta, M.M.: On the l-index boundedness of some composition of functions. Mat. Stud. **47**(2), 207–210 (2017). doi: 10.15330/ms.47.2.207-210
214. Sheremeta, M.M., Bordulyak, M.T.: Boundedness of the l-index of Laguerre-Polya entire functions. Ukr. Math. J. **55**(1), 112–125 (2003). doi: 10.1023/A:1025076720052
215. Sheremeta, M.M., Sumyk, O.M., Zelisko, M.M.: On the boundedness of $l-M$ and $l-\mu$-index of the Dirichlet series. Mat. Stud. **20**(2), 143–150 (2003)
216. Sheremeta, M.M., Trukhan, Yu.S.: Boundedness of the l-index of the Naftalevich-Tsuji product. Ukr. Math. J. **56**(2), 305–317 (2004). doi: 10.1023/B:UKMA.0000036104.89729.3e
217. Sheremeta, M.M., Trukhan, Yu.S.: Properties of the solutions of the Gauss equation. Mat. Stud. **41**(2), 157–167 (2014)
218. Sheremeta, M.N.: An l-index and an l-distribution of the values of entire functions. Soviet Math. (Iz. VUZ) **34**(2), 115–117 (1990)
219. Sheremeta, M.N.: Entire functions and Dirichlet series of bounded l-index. Russian Math. (Iz. VUZ) **36**(9), 76–82 (1992)
220. Sheremeta, M.N., Kuzyk, A.D.: Logarithmic derivative and zeros of an entire function of bounded l-index. Sib. Math. J. **33**(2), 304–312 (1992). doi: 10.1007/BF00971102
221. Sheremeta, Z.M., Sheremeta, M.M.: Properties of entire solutions of differential equations. Ukr. Math. J. **58**(12), 1924–1934 (2006). doi: 10.1007/s11253-006-0177-3
222. Singh, V., Goel, R.M.: Differential inequalities and local valency. Houston J. Math. **18**(2), 215–233 (1992)
223. Sisarcick, W.C.: Metric spaces of entire functions. Indian J. Pure Appl. Math. **6**(6), 628–636 (1975)
224. Skaskiv, O.: On Wiman's theorem concerning the minimum modulus of a function analytic in the unit disk. Mathematics of the USSR-Izvestiya **35**(1), 165–182 (1990). doi: 10.1070/IM1990v035n01ABEH000694
225. Skaskiv, O.B.: Progress in the open problems in theory of functions of bounded index. Mat. Stud. **49**(1), 109–112 (2018). doi: 10.15330/ms.49.1.109-112
226. Somasundaram, D., Thamizharasi, R.: On entire functions of L-bounded index. Indian J. Pure Appl. Math. **14**(3), 330–344 (1983)
227. Somasundaram, D., Thamizharasi, R.: The functions of bounded index as a subspace of the space of entire functions represented by Dirichlet series with given exponent. Math. Student **56**(1-4), 176–180 (1988)
228. Somasundaram, D., Thamizharasi, R.: A note the entire functions of L-bounded index and L-type. Indian J. Pure Appl. Math. **19**(3), 284–294 (1988)
229. Somasundaram, D., Thamizharasi, R.: On characterisations of entire Dirichlet series of M-bounded index. J. Math. Phys. Sci. **25**(4), 437–441 (1991)
230. Sreenivasulu, V.: Entire functions of bounded index over non-Archimedean field. Ann. Polon. Math. **28**(2), 163–173 (1973)
231. Sreenivasulu, V.: A characterization of non-Archimedean entire functions of bounded index. Indian J. Pure Appl. Math. **28**(3), 381–389 (1997)

232. Sreenivasulu, V.: Non-Archimedean entire functions of bounded index. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **65**(1-4), 153–170 (1998)
233. Sridhar, S.: Bounded index and summability methods. Indian J. Pure Appl. Math. **10**(2), 161–165 (1979)
234. Sridhar, S.: Corrigendum to: "Bounded index and summability methods". Indian J. Pure Appl. Math. **10**(7), 910–911 (1979)
235. Sridhar, S.: Bounded index and summability methods. II. Acta Cienc. Indica **6**(4), 248–252 (1980)
236. Sridhar, S.: On a generalized power series summability. Nat. Acad. Sci. Letters **5**(9), 305–307 (1982)
237. Steinmetz, N.: Über das Anwachsen der Lösungen homogener algebraischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Manuscripta Math. **32**(3-4), 303–308 (1980). doi: 10.1007/BF01299607
238. Steinmetz, N.: Über die eindeutigen Lösungen einer homogenen algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ann. Acad. Sci. Fenn. **7**(3-4), 177–188 (1982). doi: 10.5186/aasfm.1982.0730
239. Strelitz, S.: Asymptotic properties of entire transcendental solutions of algebraic differential equations. Contemp. Math. **25**, 171–214 (1983). doi: 10.1090/conm/025/730048
240. Tang, H.: The index of an entire function related to a Bessel function. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **XXIII**(8), 1235–1242 (1978)
241. Trukhan, Y.: Properties of the solutions of the legendre equation. Visn. Lviv Univ. Ser. Mech. Math. Issue **83**, 82–89 (2017)
242. Trukhan, Yu.S.: On properties of the solutions of the Weber equation. Carpathian Math. Publ. **7**(2), 247–253 (2015). doi: 10.15330/cmp.7.2.247-253
243. Trukhan, Yu.S., Sheremeta, M.M.: On l-index boundedness of the Blaschke product. Mat. Stud. **19**(1), 106–112 (2003)
244. Wittich, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, 2 edn. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 8. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1968)
245. Zhu, K.: Spaces of holomorphic functions in the unit ball. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York (2005)
246. Zimogljad, V.V.: On the order of growth of transcendental entire solutions of algebraic differential equations of second order. Math. USSR Sb. **14**(2), 281–296 (1971). doi: 10.1070/SM1971v014n02ABEH002618
247. Абуарабі, Ш.: Про тейлорівські коефіцієнти цілої функції обмеженого $l-M$-індексу. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **38**, 74–75 (1993)
248. Абуарабі, Ш., Шеремета, М.: Цілі функції обмеженого $l-M$-індексу. Доповіді АН УРСР **11**, 3–5 (1989)
249. Бандура, А.: Достатні умови обмеженості L-індексу за напрямом для цілих функцій з "плоскими"нулями роду p. Мат. вісник НТШ **6**, 44–49 (2009)
250. Бандура, А.: Добуток двох цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком є функцією з того ж класу. Буковин. матем. журн. **4**(1-2), 8–12 (2016)
251. Бандура, А., Скасків О.: Метричний простір Ієра, теорема існування та цілі функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. Буковин. матем. журн. **5**(3-4), 8–14 (2017)
252. Бандура, А., Петречко, Н.: Властивості степеневого розвинення цілої функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **82**, 27–33 (2016)
253. Бандура, А., Петречко, Н.: Два критерії обмеженості L-індексу за сукупністю змінних аналітичних у бікрузі функцій. In: Друга Всеукр. наук. конф. „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції, pp. 18–19. ІФНТУНГ (2016). Івано-Франківськ, 13-15 жовтня 2016
254. Бандура, А., Скасків, О.Б.: Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком. Мат. Студ. **27**(1), 30–52 (2007)

255. Бандура, А., Скасків, О.Б.: Цілі функції обмеженого і необмеженого індексу за напрямком. Мат. Студ. **27**(2), 211–215 (2007)
256. Бандура, А.: Нові критерії обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій. Мат. вісник НТШ **13**, 58–67 (2016)
257. Бандура, А., Петречко, Н.В., Скасків, О.Б.: Аналог теореми Хеймана для аналітичних у бікрузі функцій обмеженого **L**-індексу. In: Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, pp. 114–115. ПНУ ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ (2017). Ворохта, 22-25 лютого 2017 року
258. Бандура, А. І., Скасків, О.Б.: Аналітичні функції в одиничній кулі обмеженого L-індексу за напрямком. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, p. 9. Івано-Франківськ (2018). Ворохта, 27 лютого - 2 березня 2018 року
259. Бандура, А.І.: Цілі функції від декількох змінних обмеженого L-індексу за напрямком. дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів (2010). 01.01.01 — математичний аналіз.
260. Бордуляк, М.: Простір цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого **L**-індексу. Мат. Студ. **4**, 53–58 (1995)
261. Бордуляк, М.Т.: Обмеженість **L**-індексу цілих функцій багатьох комплексних змінних. дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Львів. ун-т ім. І. Франка, Львів (1996). 01.01.01 — Математичний аналіз
262. Бордуляк, М.Т.: Обмеженість розподілу значень функції Міттаг-Лефлера. Мат. Студ. **9**(2), 177–186 (1998)
263. Бордуляк, М.Т., Кушнір, В.О.: Про компактність сім'ї аналітичних функцій обмеженого l-індексу. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **59**, 41–44 (2001)
264. Бордуляк, М.Т., Шеремета, М.М.: Обмеженість **L**-індексу цілої функції багатьох змінних. Допов. Акад. Наук Укр. **9**, 10–13 (1993)
265. Гольдберг, А.: Об однозначных интегралах дифференциального уравнения первого порядка. Укр. мат. журн. **8**(3), 254–261 (1956)
266. Гольдберг, А., Левин, Б., Островский, И.: Целые и мероморфные функции. In: Комплексный анализ, одна переменная, Современные проблемы математики, Том 85, pp. 5–186. ВИНИТИ, Москва (1991)
267. Гольдберг, А.А.: Оцінка модуля логарифмічної похідної функції Міттаг-Лефлера та її застосування. Мат. Студ. **5**, 21–30 (1996)
268. Заболоцький, М., Шеремета, З.: Про обмеженість індексу цілого розв'язку одного диференціального рівняння. Мат. мет. фіз.-мех. поля **47**(2), 181–185 (2004)
269. Кондратюк, А.А.: Ряды Фурье и мероморфные функции. Вища школа, Львов (1988)
270. Кузик, А.Д.: Про обмеженість l-індексу цілого розв'язку лінійного диференційного рівняння. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **34**, 46–47 (1990). Надійшла 28.03.89
271. Кузик, А.Д., Шеремета, М.М.: Цілі функції обмеженого l-індексу. Допов. АН УРСР **6**, 15–17 (1988)
272. Кузык, А.Д.: Целые функции ограниченного l-индекса. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Львов. госуд. унив. им. И. Франко, Львов (1992). 01.01.01 — Математический анализ.
273. Кузык, А.Д., Шеремета, М.Н.: О целых функциях, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям. Дифф. уравн. **26**(10), 1716–1722 (1990)
274. Кушнір, В.: Аналог теореми Хеймана для аналітичних функцій обмеженого l-індексу. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **53**, 48–51 (1999)
275. Кушнір, В.: Обмеженість l-індексу та розподіл значень аналітичної в області функції. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **54**, 114–116 (1999)
276. Кушнір, В.: Про аналітичні в крузі функції обмеженого l-індексу. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **58**, 21–24 (2000)
277. Кушнір, В.О.: Аналітичні функції обмеженого l-індексу. дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів (2002). 01.01.01 — математичний аналіз.

278. Переселкова, И.Н.: Замечание к работе А. А. Гольдберга "Оцінка модуля логарифмічної похідної функції Міттаг-Леффлера та її застосування". Мат. Физ. Анал. Геом. **6**(3/4), 353–360 (1999)
279. Петренко, В.П.: Целые кривые. Вища школа, Харьков (1984)
280. Скасків, О.: Про логарифмічну похідну і центральний показник ряду Діріхле. Математичний вісник НТШ **2**, 213–230 (2005)
281. Скасків, О., Стасюк, Я.: Про похідні рядів Діріхле. Науковий вісник Чернів. нац. ун-ту Вип. **239**, 107–111 (2005)
282. Стрелиц, Ш.: Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Минтис, Вильнюс (1972)
283. Строчик, С.М., Шеремета, М.: Аналітичні в крузі функції обмеженого l-індексу. Доповіді НАН України **1**, 19–22 (1993)
284. Трухан, Ю., Шеремета, М.: Властивості розв'язків рівняння Вебера. Буковин. мат. журн. **2**(2-3), 223–230 (2014)
285. Трухан, Ю., Шеремета, М.: Про обмеженість l-індексу виродженої гіпергеометричної функції. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **80**, 161–165 (2015)
286. Трухан, Ю.С.: До обмеженості l-індексу добутку Бляшке. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **63**, 143–147 (2004)
287. Трухан, Ю.С.: Збереження обмеженості l-індексу добутку Бляшке при зсувах нулів. Мат. Студ. **25**(1), 29–37 (2006)
288. Трухан, Ю.С., Шеремета, М.: Обмеженість l-індексу добутку Бляшке. Мат. Студ. **17**(2), 127–137 (2002)
289. Трухан, Ю.С., Шеремета, М.: Про обмеженість l-індексу канонічного добутку нульового роду та добутку Бляшке. Мат. Студ. **29**(1), 45–51 (2008)
290. Чижиков, І., Шеремета, М.: Про обмеженість l-індексу цілих функцій нульового роду. Доповіді НАН України **7**, 33–39 (2003)
291. Шеремета, З., Шеремета, М.: Обмеженість l-індексу аналітичних функцій, зображених степеневими рядами. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **66**, 208–213 (2006)
292. Шеремета, З.М.: Обмеженість індексу цілого розв'язку одного диференціального рівняння. Мат. Студ. **19**(2), 208–212 (2003)
293. Шеремета, З.М.: Про обмеженість l-індексу цілого розв'язку одного диференціального рівняння. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **63**, 148–151 (2004)
294. Шеремета, З.М.: Властивості похідних цілого розв'язку одного диференціального рівняння. Мат. мет. фіз.-мех. поля **49**(2), 80–85 (2006)
295. Шеремета, З.М., Шеремета, М.М.: Про обмеженість l-індексу цілих розв'язків одного диференціального рівняння. Допов. Нац. Акад. Наук Укр. **2**, 31–36 (2007)
296. Шеремета, М.: Властивості гіпергеометричної функції з невід'ємними коефіцієнтами. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **70**, 183–190 (2009)
297. Шеремета, М.: Обмеженість $l-M$-індексу аналітичних кривих. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **75**, 226–231 (2011)