Міністерство освіти і науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

На правах рукопису

**Луківська Дзвенислава Володимирівна**

УДК 517.53

# Властивості узагальнених локсодромних та еліптичних функцій

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
**Христіянин Андрій Ярославович**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Львів — 2018

# АНОТАЦІЯ

Луківська Дз. В. Властивості узагальнених локсодромних та еліптичних функцій. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 «Математичний аналіз». – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

**Зміст анотації.** Дисертаційна робота присвячена узагальненню класів локсодромних та еліптичних функцій.

Нехай $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|q| < 1$. *Локсодромною функцією з мультиплікатором* $q$ називається [53] мероморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функція $f$, така, що для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ задовольняє умову $f(qz) = f(z)$.

Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $g$ називається *еліптичною* [53], якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, такі, що для всіх $u \in \mathbb{C}$ виконуються умови $g(u + \omega_1) = g(u)$, $g(u + \omega_2) = g(u)$.

В роботі вперше введено таке поняття як *p-локсодромна функція* (мероморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функція $f$, така, що задовольняє рівняння $f(qz) = pf(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ при деяких фіксованих $q$, $p \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $|q| < 1$), доведено критерій $p$-локсодромності, знайдено зображення голоморфної $p$-локсодромної функції, доведено теорему про кількість нулів та полюсів $p$-локсодромної функції, знайдено вигляд логарифмічної спіралі, на якій розташовані нулі та полюси $p$-локсодромної функції, встановлено Жюліа винятковість $p$-локсодромних функцій.

В дисертації також запропоновано ще одне суттєве узагальнення поняття локсодромності – *раціонально-локсодромні функції*, тобто ме-

роморфні в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функції, які при деякому $q \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ |q| < 1$, для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ задовольняють умову $f(qz) = R(z)f(z)$, де $R$ – раціональна функція.

Вперше введено поняття квазі-еліптичної функції. Нехай $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $g$ називається *квазі-еліптичною*, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\quad Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, такі що для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$g(u + \omega_1) = pg(u), \;\; g(u + \omega_2) = qg(u).$$

Доведено теореми про кількість нулів та полюсів квазі-еліптичної функції, про голоморфні квазі-еліптичні функції, побудовано аналоги відомих $\wp$, $\zeta$ та $\sigma$-функцій Вейєрштрасса в теорії квазі-еліптичних функцій, встановлено зв'язок квазі-еліптичних функцій з $p$-локсодромними функціями.

Крім того, у роботі також запропоновані альтернативні узагальнення локсодромних та еліптичних функцій – модуль-локсодромні та модуль-еліптичні функції, відповідно. Доведено теореми, що описують зв'язок між класами $p$-локсодромних та модуль-локсодромних функцій, а також між квазі-еліптичними та модуль-еліптичними функціями.

**Ключові слова:** $p$-локсодромна функція, модуль-локсодромна функція, раціонально-локсодромна функція, $p$-еліптична функція, квазі-еліптична функція, модуль-еліптична функція, первинна функція Шотткі-Кляйна, Жюліа винятковість, $\wp$-функція Вейєрштрасса, $\zeta$-функція Вейєрштрасса, $\sigma$-функція Вейєрштрасса.

**Список публікацій в яких опубліковано основні результати дисертації:**

1) Khoroshchak, V.S., Khrystiyanyn, A.Ya., Lukivska, D.V.: A class of Julia exceptional functions. Карпатські математичні публікації. **8** (1), 172–180 (2016). doi:10.15330/cmp.8.1.172-180.
2) Kondratyuk, A., Khoroshchak, V., Lukivska, D.: $p$-Elliptic functions. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 121–129 (2016).
3) Lukivska, D.: Generalization of the Weierstrass $\wp$, $\zeta$ and $\sigma$ functions. Буковинський Математичний Журнал. **4** № 1-2, 107–109 (2016).
4) Луківська, Дз. В.: Деякі голоморфні узагальнення локсодромних функцій. Укр. мат. журн. **69** № 9, 1284–1288 (2017). (Lukivs'ka, Dz. V.: Some Holomorphic Generalizations of Loxodromic Functions. Ukr. Math. J. **69** No. 9, 1490 – 1495 (2018). doi.org/10.1007/s11253-018-1449-4)
5) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Some generalizations of $p$-loxodromic functions. Вісник Харківського університету ім. В. Н. Каразіна. Серія мат.,прикл.мат. і стат. **86**, 18–25 (2017).
doi: 10.26565/2221-5646-2017-86-03
6) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: On some generalizations of $p$-loxodromic functions. Буковинський Математичний Журнал. **5** № 1-2, 144–148 (2017).
7) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Modulo-elliptic and modulo-loxodromic functions. Буковинський Математичний Журнал. **5** № 3-4, 88–89 (2017).

8) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Quasi-elliptic functions. Ufa Math. J. **9** № 4, 129–136 (2017).
9) Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Про раціонально локсодромні голоморфні функції. Укр. мат. журн. **69** № 11, 1505–1514 (2017).

**Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

1. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 36–37. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.
2. Khoroshchak, V. S., Lukivska, D. V.: A subclass of quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 35–36. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.
3. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the III International Conference: "Spectral Problems, Nonlinear and Complex Analysis": pp. 86–87. Bashkir State University, Ufa, 01–03.10.2015.
4. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: The linear space $\mathcal{L}_{qp}$. Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": с. 86–87. смт. Ворохта, 24–27 лютого 2016 р.
5. Khrystiyanyn, A. Ya., Lukivska, D. V.: Quasi-elliptic functions. Матеріали II Всеукраїнської наукової конференції, присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського

національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики": с. 12–13. м. Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.

6. Lukivska, D. V.: Some generalizations of p-loxodromic functions. Матеріали II Всеукраїнської наукової конференції, присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики": с. 13–14. м. Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.
7. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Раціонально локсодромні мероморфні функції. Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": с. 99–101. смт. Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.
8. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Квазі-еліптичні функції. Тези доповідей XII Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз": с. 9–10. с. Колочава, 10–23 липня 2017 р.
9. Lukivska, Dz. V., Khrystiyanyn, A. Ya.: Quasi-elliptic functions. International conference in Functional Analysis. Book of abstracts: p. 124. Lviv, 18–23 September 2017.

Lukivska Dz. V. The properties of generalized loxodromic and generalized elliptic functions. – A manuscript copyrighted qualifying scientific work.

PhD Thesis for a degree in physics and mathematics, speciality 01.01.01 «Mathematical Analysis». – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

**Annotation.** The PhD Thesis is devoted to a generalization of loxodromic and elliptic functions.

Let $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|q| < 1$. A meromorphic in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ function $f$ is said to be *loxodromic of multiplicator* $q$ [53] if for every $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holds $f(qz) = f(z)$.

A meromorphic in $\mathbb{C}$ function $g$ is called *elliptic* [53], if there exist $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, such that $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ and for every $u \in \mathbb{C}$

$$g(u + \omega_1) = g(u), \ g(u + \omega_2) = g(u)$$

hold.

We introduce for the first time the notion of a $p$-loxodromic function (a meromorphic in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ function $f$, such that for every $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $f(qz) = pf(z)$ for some fixed $q$, $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|q| < 1$); a criterion of $p$-loxodromicity is proved; a representation of holomorphic $p$-loxodromic function is found; a theorem about the number of zeros and poles of $p$-loxodromic function is proved; a logarithmic spiral, containing zeros and poles of $p$-loxodromic function is found; Julia exceptionality of $p$-loxodromic functions is established.

The PhD Thesis also contains another generalization of loxodromicity, namely rationally-loxodromic functions, i. e. meromorphic in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ functions $f$, such that for some $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|q| < 1$ and for every $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

satisfy the following condition $f(qz) = R(z)f(z)$, where $R$ is a rational function.

Also, the notion of quasi-elliptic function is introduced. Let $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, where $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. A meromorphic in $\mathbb{C}$ function $g$ is called *quasi-elliptic*, if there exist $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, such that for every $u \in \mathbb{C}$

$$g(u + \omega_1) = pg(u), \;\; g(u + \omega_2) = qg(u).$$

The theorems about the number of zeros and poles of quasi-elliptic function, holomorphic quasi-elliptic function are proved. For the class of quasi-elliptic function analogues of the classic Weierstrass $\wp$, $\zeta$ and $\sigma$-functions are constructed. The connection between quasi-elliptic and $p$-loxodromic functions is obtained.

Additionally, the PhD Thesis also contains alternative generalizations of loxodromic and elliptic functions, so called modulo-loxodromic and modulo-elliptic functions. The theorems, which describe relations between the classes of modulo-loxodromic and $p$-loxodromic as well as between modulo-elliptic and quasi-elliptic functions are proved.

**Key words:** $p$-loxodromic function, modulo-loxodromic function, rationally-loxodromic function, $p$-elliptic function, quasi-elliptic function, modulo-elliptic function, the Schottky-Klein prime function, Julia exceptionality, the Weierstrass $\wp$-function, the Weierstrass $\zeta$-function, the Weierstrass $\sigma$-function.

**List of publications:**

1) Khoroshchak, V.S., Khrystiyanyn, A.Ya., Lukivska, D.V.: A class of Julia exceptional functions. Carpathian Math. Publ. **8** (1), 172–180 (2016). doi:10.15330/cmp.8.1.172-180.

2) Kondratyuk, A., Khoroshchak, V., Lukivska, D.: $p$-Elliptic functions. Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **81**, 121–129 (2016).
3) Lukivska, D.: Generalization of the Weierstrass $\wp$, $\zeta$ and $\sigma$ functions. Bukovynskiy Math. J. **4** № 1-2, 107–109 (2016).
4) Lukivska, Dz. V.: Some holomorphic generalizations of loxodromic functions. Ukrainian Math. J. **69** № 9, 1284–1288 (2017). (in ukrainian)

   (Lukivs'ka, Dz. V.: Some Holomorphic Generalizations of Loxodromic Functions. Ukr. Math. J. **69** No. 9, 1490 – 1495 (2018). doi.org/10.1007/s11253-018-1449-4)
5) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Some generalizations of $p$-loxodromic functions. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". **86** 18–25 (2017). doi: 10.26565/2221-5646-2017-86-03
6) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: On some generalizations of $p$-loxodromic functions. Bukovynskiy Math. J. **5** № 1-2, 144–148 (2017).
7) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Modulo-elliptic and modulo-loxodromic functions. Bukovynskiy Math. J. **5** № 3-4, 88–89 (2017).
8) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Quasi-elliptic functions. Ufa Math. J. **9** № 4, 129–136 (2017).
9) Lukivska, Dz. V., Khrystiyanyn, A. Ya.: On rationally loxodromic holomorphic functions. Ukrainian Math. J. **69** № 11, 1505–1514 (2017). (in ukrainian)

**List of conference abstracts:**

1. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 36–37. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.
2. Khoroshchak, V. S., Lukivska, D. V.: A subclass of quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 35–36. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.
3. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions In: Abstracts of the III International Conference: "Spectral Problems, Nonlinear and Complex Analysis": pp. 86–87. Bashkir State University, Ufa, 01–03.10.2015.
4. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: The linear space $\mathcal{L}_{qp}$ In: Abstracts of Ukrainian Scientific Conference "Modern Problems of Probability Theory and Mathematical Analysis": pp. 86–87. Vorokhta, 24–27 February 2016.
5. Khrystiyanyn, A. Ya., Lukivska, D. V.: Quasi-elliptic functions. Materials of the Second All-Ukrainian Scientific Conference devoted to the 55th anniversary of the Department of Higher Mathematics of the Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas "Applied Problems of Mathematics": pp. 12–13. Ivano-Frankivsk, 13–15 October 2016.
6. Lukivska, D. V.: Some generalizations of p-loxodromic functions. Materials of the Second All-Ukrainian Scientific Conference devoted to the 55th anniversary of the Department of Higher Mathe-

matics of the Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas "Applied Problems of Mathematics": pp. 13–14. Ivano-Frankivsk, 13–15 October 2016.

7. Lukivska, Dz. V., Khrystiyanyn, A. Ya.: Rationally loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of Ukrainian Scientific Conference "Modern Problems of Probability Theory and Mathematical Analysis": pp. 99–101. Vorokhta, 22–25 February 2017.
8. Lukivska, Dz. V., Khrystiyanyn, A. Ya.: Quasi-elliptic functions. Abstracts of X Summer School "Algebra, Topology, Analysis": pp. 9–10. Kolochava, 10–23 July 2017.
9. Lukivska, Dz. V., Khrystiyanyn, A. Ya.: Quasi-elliptic functions. International conference in Functional Analysis. Book of abstracts: p. 124. Lviv, 18–23 September 2017.

# ЗМІСТ

# ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

$\mathcal{L}_{qp}$ – множина $p$-локсодромних функцій з мультиплікатором $q$;

$\mathcal{QE}$ – множина квазі-еліптичних функцій;

$H(z) = \prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 - q^n z),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1;$

$P(z) = (1 - z) \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - q^n z)\left(1 - \frac{q^n}{z}\right),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1;$

$A_q(R) = \{z \in \mathbb{C} : |q|R < |z| \leqslant R\},\ R > 0,\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1;$

$\prod(u_0) = \{u_0 + r_1\xi_1 + r_2\xi_2 : \xi_1,\, \xi_2 \in \mathbb{C}^*,\, Im\frac{\xi_2}{\xi_1} > 0,\, r_1, r_2 \in [0, 1)\};$

$\omega = m\omega_1 + n\omega_2,\ \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C},\ Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0,\ m, n \in \mathbb{Z};$

$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum\limits_{\omega \neq 0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right);$

$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum\limits_{\omega \neq 0}\left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right);$

$\sigma(u) = u \prod\limits_{\omega \neq 0}\left(1 - \dfrac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}};$

$G_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^2} + \sum\limits_{\omega \neq 0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) e^{i(m\alpha+n\beta)},\ m, n \in \mathbb{Z},\, \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

$C_{\alpha\beta} = \dfrac{G_{\alpha\beta}\left(\dfrac{\omega_1}{2}\right) - e^{i\alpha}G_{\alpha\beta}\left(-\dfrac{\omega_1}{2}\right)}{e^{i\alpha}-1} = \dfrac{G_{\alpha\beta}\left(\dfrac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\beta}G_{\alpha\beta}\left(-\dfrac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\beta}-1},\ C_{00} = 0;$

$\wp_{\alpha\beta}(u) = G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta};$

$\zeta_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u} + \sum\limits_{\omega \neq 0}\left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right) e^{i(m\alpha+n\beta)},\ m^2 + n^2 \neq 0,\ m, n \in \mathbb{Z};$

$\sigma_{mn}(u) = \left(1 - \dfrac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}},\ \ m^2 + n^2 \neq 0,\ m, n \in \mathbb{Z};$

$\sigma_{00}(u) = u.$

# ВСТУП

Еліптичні функції як особливий розділ спеціальних функцій займають важливе місце в математиці ще з XIX століття. Теорія еліптичних функцій зародилася у працях Л. Ейлера, А. Лежандра, К. Гаусса, Н. Абеля, К. Якобі і динамічно розвивалась завдяки таким видатним вченим як Ф. Ейзенштейн, Ж. Ліувілль, К. Вейєрштрасс, Б. Ріман, Л. Кронекер, Ф. Фробеніус, Г. Вебер, Р. Фрікке.

Еліптичні функції, вирізняючись неабияким багатством, різноманіттям та універсальністю своїх властивостей, постійно служили і досі служать джерелом натхнення і нових ідей для математиків, а також, поєднуючи в собі не тільки аналітичну, а й алгебраїчно-арифметичну, геометричну і топологічну природу, були і є сполучною ланкою для різних математичних теорій та дисциплін.

Теорія еліптичних функцій тісно пов'язана з теорією локсодромних функцій, які з'явились дещо пізніше і відомі завдяки монографіям О. Раузенбергера (1884 р.) та Ж. Валірона (1947 р.). Локсодромні функції дають просту конструкцію еліптичних [71].

Розвиток теорії еліптичних функцій у XX столітті пов'язаний з іменами Ф. Фуртвенглера, Т. Такагі, Е. Артіна, М. Дойрінга, Х. Хассе, К. Шевалле, І. Шафаревича, Г. Шімури, С. Ленга, А. Вейля, Н. Ахієзера, К. Чандразекхарана, Д. Массера.

А от щодо локсодромних функцій, то відновлення інтересу до їх вивчення відбулося вже в XXI столітті, зокрема після звернення до цієї тематики А. Кондратюка. А. Кондратюком та його учнями (А. Христіянином, Н. Сокульською, О. Гущак) отримано важливі результати в теорії локсодромних функцій та їх узагальнень. Також дослідженням локсодромних функцій та їх застосувань в даний час займаються Д. Кровді, С. Кос, Т. Погани, Дж. Маркотт, М. Саломон та інші.

Теорією еліптичних функцій та їх застосувань в останні роки також займається чимало математиків, зокрема А. Дієнтсфрей, Дж. Хуанг, Й. Чен, Ж. Ян, М. Вальдшмідт, Г. Пастрас та інші.

Завдяки своїм особливим властивостям, і еліптичні, і локсодромні функції знайшли чимало застосувань в різних галузях математики (таких як комплексний аналіз, теорія функцій, алгебра і теорія чисел, геометрія і топологія, диференціальні рівняння), фізики (класична та квантова механіка, електротехніка, оптика, динаміка, теорія потенціалів, комп'ютерна фізика та ін.).

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Оскільки локсодромні та еліптичні функції володіють такими унікальними і водночас універсальними властивостями, то природнім чином постає питання про узагальнення класів еліптичних та локсодромних функцій та дослідження їх властивостей.

**Актуальність теми.** Вивчення властивостей узагальнених локсодромних та узагальнених еліптичних функцій становить певний науковий інтерес і може знайти застосування у подальших теоретичних та прикладних дослідженнях.

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є дослідження властивостей узагальнених локсодромних та узагальнених еліптичних функцій.

Для досягнення поставленої мети в дисертації потрібно розв'язати наступні завдання:

- знайти і описати всі мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння $f(qz) = pf(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q$, $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|q| < 1$ та дослідити їх властивості;
- знайти і описати всі мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння $f(qz) = R(z)f(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|q| < 1$, $R$ – раціональна функція;
- побудувати узагальнення еліптичних функцій та знайти аналоги класичних $\wp$, $\zeta$ і $\sigma$-функцій Вейєрштрасса;
- встановити зв'язок між квазі-еліптичними та $p$-локсодромними функціями.

*Об'єктами* дослідження є узагальнені локсодромні та узагальнені еліптичні функції, а *предметом* досліджень – властивості узагальнених локсодромних та узагальнених еліптичних функцій.

*Методи дослідження.* У процесі вивчення дисертаційних задач застосовуються методи комплексного аналізу, теорії функцій, деякі прийоми з теорії еліптичних та локсодромних функцій.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Усі результати отримані в дисертаційній роботі є новими.

Основні наукові результати, що виносяться на захист:

1. досліджено властивості $p$-локсодромних функцій, аналогічні властивостям локсодромних функцій та встановлено зв'язок між $p$-локсодромними та модуль-локсодромними функціями;
2. введено поняття та отримано зображення раціонально-локсодромних функцій;

3. вивчено властивості введених у роботі квазі-еліптичних функцій та отримано їх зв'язок з $p$-локсодромними та модуль-еліптичними функціями.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статтей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору. Зокрема, у статті [55] автору належать усі результати, за винятком тих, що наведені у розділі 3 статті; у статті [72] автору належить лише розділ 3 статті. Результати з цих двох статтей, що не належать авторові до дисертації не включені. У спільних з науковим керівником публікаціях ( [65], [66], [67], [68], [20]) А. Христіянину належить постановка задач та загальне керівництво роботою.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації доповідалися на наукових конференціях, наукових семінарах і літній школі, а саме:

1) Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 29.10.2015 р., 5.11.2015 р., 10.05.2018 р.;
2) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , смт. Ворохта, 24–27 лютого 2016 р.;
3) науковому семінарі з комплексного і нелінійного аналізу, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 23.06 та 30.06.2016 р.;

4) науковому семінарі з комплексного аналізу кафедри математики "Oberseminar Funktionentheorie" у Вюрцбурзькому університеті імені Юліуса Максиміліана, Вюрцбург, Німеччина, 8 липня 2016 р.;
5) всеукраїнській науковій конференції, присвяченій 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики" , Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.;
6) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , смт. Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.;
7) XII-й Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" , с. Колочава, 10–23 липня 2017 р.;
8) міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю з дня народження Стефана Банаха, Львів, 18–23 вересня 2017 р.;
9) Львівському міжвузівському семінарі з функціонального аналізу імені проф. В. Е. Лянце, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 10.10.2017 р.;

**Публікації.** Основні результати роботи опубліковано у 9 статтях (2 з них опубліковані одноосібно) та додатково відображено в 9 тезах конференцій. Усі статті опубліковані в наукових фахових виданнях, що задовольняють вимогам, які передбачені законодавством України щодо кандидатських дисертацій.

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертація складається з анотації (двома мовами), переліку основних позначень, вступу, 4-ох розділів, висновків, списку літератури та одного додатку. Повний обсяг роботи – 127 сторінок.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана на кафедрі математичного і функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми Ма-06 Ф "Інваріантні функціональні підпростори в нелінійних однорідних просторах та обернені задачі теорії операторів" (номер державної реєстрації 0115U003250).

**Подяка.** Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, кандидату фізико-математичних наук, доценту кафедри математичного і функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка Христіянину Андрію Ярославовичу за постійну підтримку, цікаві дискусії та цінні зауваження, а також першому науковому керівнику та головному ідейному натхненнику цієї дисертаційної роботи, доктору фізико-математичних наук, заслуженому професору Кондратюку Андрію Андрійовичу.

# РОЗДІЛ 1
# ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

## 1.1. Огляд літератури

Еліптичні функції з'явились в математиці на початку XIX століття, яке через велику кількість відкритих в ньому різноманітних функцій математики іноді називають століттям спеціальних функцій. Серед всіх спеціальних функцій еліптичні функції з моменту їх відкриття виділяються неабиякою універсальністю своїх властивостей (причому не тільки аналітичного, а й алгебраїчно-арифметичного, геометричного, і, навіть, топологічного характеру). Еліптичні функції параметризують еліптичні криві і поєднуючи в собі алгебраїчно-арифметичну та аналітичну природу, займають важливе місце в математиці з XIX століття. Саме завдяки різноманітності та багатству своїх властивостей еліптичні функції постійно служили джерелом нових ідей та були сполучною ланкою для різних математичних теорій.

Еліптичні функції були відкриті, як функції, обернені до еліптичних інтегралів. Історія еліптичних інтегралів бере свій початок ще у XVII столітті (приблизно 1647-1650 рр.) [8].

З історією еліптичних функцій та їх роллю в математиці XIX століття можна ознайомитись, наприклад, в монографіях Ф. Кляйна "Лекції про розвиток математики в XIX столітті" [14], Г. Вілейтнера "Історія математики від Декарта до середини XIX століття" [8], А. Колмогорова, А. Юшкевича "Математика XIX століття: геометрія, теорія аналітичних функцій" [16].

Теорія еліптичних функцій зародилася у працях К. Гаусса, Л. Ейлера, А. Лежандра, Н. Абеля і К. Якобі. Засновником теорії еліптичних функції вважається Н. Абель, хоча, як пише К. Якобі у листі 1847 року, теорія еліптичних функцій зародилась ще 23 грудня 1751 року, коли монографія Г. Фагнано про дуги лемніскат ("Математичні твори") в Берліні була передана на рецензію Л. Ейлеру (див. [8]).

Подальший розвиток цієї теорії пов'язаний з іменами Ф. Ейзенштейна, Ж. Ліувілля, К. Вейєрштрасса, Б. Рімана, Л. Кронекера, Ф. Фробеніуса, Г. Вебера, Р. Фрікке.

У першій половині XX століття розвивались тільки окремі аспекти теорії еліптичних функцій, пов'язані з теорією полів [77]. Отримані в цьому напрямку результати пов'язані з іменами [77] Д. Гільберта, Ф. Фуртвенглера, Т. Такагі, Е. Артіна, М. Дойрінга, Х. Хассе, К. Шевалле, І. Шафаревича.

В другій половині XX століття Г. Шімура подав класичні результати Л. Кронекера, Г. Вебера і Р. Фрікке в абсолютно новому світлі. Як пише С. Ленг, книга Г. Шімури [30] "Вступ в арифметичну теорію автоморфних функцій" є еталоном досить сучасного викладу деяких аспектів теорії еліптичних кривих.

Роботи Ф. Ейзенштейна та Л. Кронекера з теорії еліптичних функцій справили серйозне враження на А. Вейля, який написав історичну роботу про їхні дослідження "Еліптичні функції за Ейзенштейном та Кронекером" (див. [98]).

Також до другої половини XX століття відносяться монографії Н. Ахієзера [2] "Елементи теорії еліптичних функцій", К. Чандразекхарана [37] "Еліптичні функції" та Д. Массера [84] "Еліптичні функції і трансцендентність" та ін. (див. [50], [34], [35], [45], [46], [96], [88]).

Є. Янке, Ф. Емде, Ф. Леш у своїй праці "Спеціальні функції. Формули, графіки, таблиці" [31], присвятили розділ знаменитій теорії еліптичних функцій. В згаданій роботі проілюстровано взаємозв'язки між еліптичними функціями та еліптичними інтегралами, між еліптичними функціями К. Якобі та К. Вейєрштрасса, описано еліптичні модулярні функції, присутні оригінальні графіки рельєфу еліптичних модулярних функцій.

Про еліптичні функції як розділ спеціальних функцій також можна довідатись у [12], [4], [33], [21], [1], [97], [93], [13], [49].

Зважаючи на величезний інтерес, який викликали і викликають еліптичні функції, в багатьох підручниках та монографіях з математичного аналізу, комплексного аналізу, теорії функцій, теоретичної механіки є розділ про еліптичні функції, див. наприклад [11], [7], [10], [22], [27], [100].

Еліптичні функції знайшли своє застосування і у фізиці, зокрема, цей об'єкт згадується у роботі С. Ковалевської [15] про заломлення світла.

Також у багатьох підручниках, монографіях та статтях з фізики (причому у різноманітних її розділах, таких як теорія потенціалів, електротехніка, динаміка, електродинаміка плазми, плазмова електроніка, комп'ютерна фізика, оптика) є відомості про еліптичні функції, див. напр. [6], [9], [23], [24], [29], [78], [82].

Необхідно також відзначити деякі статті з цієї тематики.

В першу чергу хотілося б згадати про видатного західноукраїнського математика, члена Наукового товариства ім. Т. Шевченка, основоположника математичної культури нашого народу – В. Левицького, який цікавився теорією аналітичних функцій, і еліптичних функцій в тому числі. Зокрема, однією з його статтей у цьому напрямку є "Ріжничкове рівняння модульової еліптичної функції $J(\tau)$" у Збірнику Наукового товариства ім. Т. Шевченка (Математично-природничо-лікарська секція) 1930 р. В. Левицький досліджував властивості еліптичних модулярних форм, модулярні еліптичні функції, знайшов диференціальне рівняння, яке задовольняє еліптична модулярна функція [5].

Звісно ж, є велика кількість статтей, що стосуються такого об'єкту як еліптичні функції. У нашому огляді, ми обмежимося лише оглядом деяких статтей, які вийшли у XXI столітті, див. [44], [95], [3], [25], [26].

Також еліптичні функції застосовуються в алгоритмі знаходження подвійно-періодичних розв'язків нелінійних хвильових рівнянь, див. статтю [38].

Нижче сформулюємо означення та найпростіші властивості еліптичних функцій.

Позначимо $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $g$ називається **еліптичною** [53], якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, такі, що для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$g(u + \omega_1) = g(u), \;\; g(u + \omega_2) = g(u).$$

Еліптичні функції також називають подвійно періодичними. Клас еліптичних функцій позначатимемо через $\mathcal{E}$.

Найпростіші властивості еліптичних функцій [10]:

- Довільна стала є еліптичною функцією.
- Множина еліптичних функцій $\mathcal{E}$ утворює поле.
- Якщо $f \in \mathcal{E}$, то $f' \in \mathcal{E}$.
- Кожна голоморфна еліптична функція є сталою.

Нехай пара $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, і $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. Точки площини $u$ і $v$, для яких виконується співвідношення $u = v + m\omega_1 + n\omega_2$, де $m, n \in \mathbb{Z}$, будемо називати конгруентними [10].

Візьмемо довільну точку $u_0$ і побудуємо паралелограм з вершинами $u_0,\ u_0+\omega_1,\ u_0+\omega_1+\omega_2,\ u_0+\omega_2$. Цей паралелограм ми будемо називати паралелограмом періодів $u_0$, побудованим на періодах $\omega_1$ і $\omega_2$ і позначати $\prod(u_0)$ [10]. Точками паралелограма періодів $\prod(u_0)$ є точки вигляду

$$u_0 + r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \quad (0 \leqslant r_1 < 1,\, 0 \leqslant r_2 < 1).$$

Правильні такі теореми.

**Теорема 1.1.1.** *[10] Довільна точка $v \in \mathbb{C}$ конгруентна одній і лише одній точці паралелограма періодів $\prod(u_0)$.*

**Теорема 1.1.2.** *[53] Нехай $f \in \mathcal{E}$. Тоді кількість нулів функції $f$ дорівнює кількості її полюсів (з урахуванням кратності) в кожному паралелограмі періодів $\prod(u_0)$.*

Однією з найпростіших еліптичних функцій є $\wp$-функція Вейєрштрасса [99]

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right), \quad \omega = m\omega_1 + n\omega_2,\ \ m, n \in \mathbb{Z}.$$

У теорії еліптичних функцій ця функція відіграє досить важливу роль, адже $\wp$ і $\wp'$ є твірними всього поля еліптичних функцій [10].

Відомо [10], що функція $\wp$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3,$$

де

$$g_2 = 60\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}.$$

Числа $g_2$ і $g_3$ прийнято називати інваріантами функції $\wp$ (детальніше див. [10]), а ряди $\sum\limits_{\omega\neq 0}\dfrac{1}{\omega^4}$ та $\sum\limits_{\omega\neq 0}\dfrac{1}{\omega^6}$, як відомо [53], називаються рядами Ейзенштейна ваги 4 та 6, відповідно.

Класична $\zeta$-функція Вейєрштрасса має вигляд [10]

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right),\quad \omega=m\omega_1+n\omega_2,\ \ m,n\in\mathbb{Z}.$$

Також має місце наступна рівність [2], яка демонструє зв'язок між $\wp$ та $\zeta$-функціями Вейєрштрасса.

$$\wp(u)=-\zeta'(u). \tag{1.1}$$

Класична $\sigma$-функція Вейєрштрасса має вигляд [10]

$$\sigma(u)=u\prod_{\omega\neq 0}\left(1-\frac{u}{\omega}\right)e^{\frac{u}{\omega}+\frac{u^2}{2\omega^2}}.$$

Варто навести також наступні співвідношення

$$\zeta(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}, \tag{1.2}$$

$$\wp(u)=-\left(\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right)', \tag{1.3}$$

які ілюструють зв'язок між $\zeta$ та $\sigma$ і між $\wp$ та $\sigma$.

Про застосування $\wp$, $\zeta$ та $\sigma$-функцій Вейєрштрасса, а також диференціального рівняння для $\wp$-функції Вейєрштрасса та еліптичних інваріантів $g_2$, $g_3$ в класичній і квантовій механіці, теорії потенціалів та сучасній фізиці пише Г. Пастрас у своїх лекціях [87].

Зауважимо, що $\wp$, $\zeta$ та $\sigma$-функції Вейєрштрасса відіграють дуже важливу роль в теорії еліптичних функцій, оскільки за їх допомогою можна зобразити довільну еліптичну функцію.

Як відомо [53], еліптичні функції тісно пов'язані з так званими локсодромними функціями. За словами А. Кондратюка, ці теорії є дуальними. Локсодромні функції дають просту конструкцію еліптичних функцій [94].

Нехай $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Функція $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ називається [53] **локсодромною з мультиплікатором** $q$, якщо $f$ мероморфна і для всіх $\zeta \in \mathbb{C}^*$ виконується рівність

$$f(q\zeta) = f(\zeta).$$

Локсодромні функції також називають мультиплікативно періодичними. Клас локсодромних функцій з мультиплікатором $q$ позначатимемо символом $\mathcal{L}_q$.

Теорія мероморфних мультиплікативно періодичних функцій була розроблена О. Раузенбергером [90]. Ж. Валірон [94] назвав ці функції локсодромними, тому що точки, в яких ці функції у випадку недодатного $q$ набувають однакових значень, лежать на логарифмічних спіралях. Поверхня Землі може бути змодельованою математично у вигляді сфери Рімана, тобто як проекція сфери на комплексну площину. Образи логарифмічних спіралей при стереографічній проекції на сферу Рімана перетинають меридіани під одним і тим же кутом і називаються локсодромними кривими ($\lambda o\xi o\varsigma$- косий, $\delta\rho o\mu o\varsigma$ - шлях) [71].

Історія локсодроми сягає тих часів, коли мореплавці вперше зрозуміли, що Земля не є плоскою. Отже, вони повинні були взяти до уваги кривину. Важливою подією стала поява у 1569 р. проекції Меркатора [32], тобто рівнокутної циліндричної проекції. "Рівнокутна" в назві проекції підкреслює те, що проекція зберігає кути між напрямками. Проекція Меркатора виявилася досить зручною для потреб мореплавства. Пояснюється це тим, що траєкторія руху корабля, що йде під одним і тим же румбом до меридіану (тобто з незмінним положенням стрілки компаса щодо шкали) зображається прямою лінією на карті в проекції Меркатора, тобто всі локсодроми в ній зображуються прямими лініями. Для проекції Меркатора характерно те, що на картах не спотворюються кути і форми, а відстані зберігаються тільки на екваторі (на півночі і півдні істотно спотворюються відстані і розміри). В даний час вона застосовується для складання морських навігаційних і аеронавігаційних карт, а також в геодезії, системах GPS навігації. Сьогодні у геоінформаційних системах широко застосовується Універсальна трансверсальна проекція Меркатора (Universal Transverse Mercator - UTM). Багато навігаційних сервісів, зокрема Google Maps користуються системою координат Web Mercator.

У статтях [83], [76] також можна знайти деякі застосування локсодромних функцій.

Для локсодромних функцій мають місце властивості, подібні до властивостей еліптичних функцій:

- Довільна стала є локсодромною функцією.
- Множина локсодромних функцій $\mathcal{L}_q$ утворює поле.

**Теорема 1.1.3.** *[53] Кожна голоморфна локсодромна функція є сталою.*

Позначимо $A_q(R) = \{z \in \mathbb{C} : |q|R < |z| \leqslant R\}$, $R > 0$ і $A_q = A_q(1)$.

**Теорема 1.1.4.** *[53] Нехай $f \in \mathcal{L}_q$. Тоді кількість нулів функції $f$ дорівнює кількості її полюсів (з урахуванням кратності) в кожному кільці $A_q(R)$.*

**Теорема 1.1.5.** *[53] Кожна, відмінна від тотожно сталої, локсодромна функція з мультиплікатором $q$ має принаймні 2 полюси в кожному кільці $A_q(R)$.*

Локсодромні функції зображаються за допомогою первинної функції Шотткі-Кляйна.

**Означення 1.1.6.** [53], [69], [92] Функція $P : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, що визначається рівністю

$$P(z) = (1-z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)\left(1-\frac{q^n}{z}\right),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q|<1,$$

називається *первинною функцією Шотткі-Кляйна.*

Її досліджували Фелікс Кляйн [69] та Фрідріх Шотткі [92] в другій половині XIX – на початку XX століття. В останні роки первинну функцію Шотткі-Кляйна та її різноманітні застосування активно досліджує Д. Кровді (див. [39], [40], [41], [43]).

Дана функція голоморфна (як добуток голоморфних функцій) в $\mathbb{C}^*$. Вона має нулі у точках $\{q^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Має місце така теорема про зображення локсодромних функцій.

**Теорема 1.1.7.** *[53] Нехай $R$ таке, що межа кільця $A_q(R)$ не містить ні нулів $a_1, ..., a_m$, ні полюсів $b_1, ..., b_m$ функції $f \in \mathcal{L}_q$, відмінної від сталої в кільці $A_q(R)$, і нехай $\lambda = \dfrac{a_1 \cdot ... \cdot a_m}{b_1 \cdot ... \cdot b_m}$. Тоді $\lambda = q^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Причому, якщо $\lambda = q^{-n}$, то*

$$f(z) = cz^n \frac{P(\frac{z}{a_1}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{a_m})}{P(\frac{z}{b_1}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{b_m})}.$$

Відновлення інтересу до вивчення локсодромних мероморфних функцій відбулося відносно нещодавно, після звернення до цієї тематики А. Кондратюка. Так у серії робіт А. Кондратюка та його учнів отримано важливі результати в теорії локсодромних функцій та їх узагальнень, про які ми згадаємо нижче.

Вперше до питання локсодромності А. Кондратюк звернувся у статті [61], присвяченій мероморфним відображенням двовимірного тора на сферу Рімана та їх зв'язку з локсодромними мероморфними функціями у проколеній комплексній площині.

**Означення 1.1.8.** Нехай $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, мероморфні функції в області $G$. Кажуть, що послідовність $\{f_n\}$ є **рівномірно збіжною** до функції $f$ в $G$ **в сенсі Каратеодорі-Ландау** [36], якщо для кожної точки $z_0 \in G$ існує замкнений круг $K(z_0)$ з центром в цій точці, такий що $K(z_0) \subset G$ і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall z \in K(z_0)) : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

у випадку $f(z_0) \neq \infty$ або

$$\left| \frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)} \right| < \varepsilon,$$

у випадку $f(z_0) = \infty$.

Зауважимо, що така збіжність еквівалентна збіжності в сферичній метриці.

**Означення 1.1.9.** Сім'я $\mathcal{F}$ мероморфних в $\mathbb{C}^*$ називається **нормальною** в $G \subset \mathbb{C}^*$ [91], якщо кожна послідовність $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ містить підпослідовність, яка збігається рівномірно в сенсі Каратеодорі-Ландау на компактних підмножинах з $G$.

**Означення 1.1.10.** Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ називається **Жюліа винятковою** [85], якщо для деякого $q$, $0 < |q| < 1$, сім'я $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, де $f_n(z) = f(q^n z)$, є нормальною в $\mathbb{C}^*$.

Жюліа виняткові функції вивчали Г. Жюліа [51], П. Монтель [85] та А. Островський [86]. Ці функції тісно пов'язані з нормальними сім'ями функцій і названі так тому що для них не існує променів Жюліа ( [22], [54], [91]).

У своїй роботі [51], яку А. Островський [86] назвав "besonders schöne und überraschende", тобто "особливо красивою і дивною", Г. Жюліа навів приклад мероморфної в проколеній площині $\mathbb{C}^*$ функції, що для всіх $z \in \mathbb{C}^*$ задовольняє рівняння $f(qz) = f(z)$, при деякому фіксованому $q \neq 0$, такому, що $|q| \neq 1$. Він зазначив, що сім'я $\{f_n(z)\}$, $f_n(z) = f(q^n z)$ є нормальною [85] в $\mathbb{C}^*$, оскільки $f_n(z) = f(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^*$.

А. Островський [86] встановив необхідні та достатні умови Жюліа винятковості мероморфної функції в $\mathbb{C}$. Пізніше, А. Єрьоменко [48] сформулював аналог критерію Жюліа винятковості А. Островського для мероморфних функцій в проколеній комплексній площині $\mathbb{C}^*$.

У статті [54] А. Кондратюк разом з О. Гущак також вивчали питання Жюліа винятковості і довели, що кожна локсодромна функція є Жюліа винятковою. Також, як наслідок, використовуючи зв'язок еліптичності з локсодромністю, автори отримали аналог результату К. Іосіди [101] про нормальні сім'ї еліптичних функцій.

В роботі [62] А. Кондратюком, Н. Сокульською та А. Христіянином досліджено характеристики зростання локсодромних та еліптичних функцій. Також авторами отримано оцінки на характеристики типу Неванлінни для таких класів функцій.

Розглянувши локсодромні різниці субгармонійних функцій, А. Кондратюк спільно зі своїми учнями, отримав зображення таких функцій та описав їх міри Ріса у [70], [71], [56], [59]. Варто також згадати роботу Н. Сокульської та В. Хорощак [57], у якій розглядаються класи локсодромних (мультиплікативно періодичних) мероморфних функцій у верхній півплощині комплексної площини.

У статті [63] А. Христіянина та А. Кондратюка вперше зустрічається поняття модуль-локсодромної функції (мероморфної в $\mathbb{C}^*$ функції $f$, такої, що для всіх $z \in \mathbb{C}^*$ задовольняє умову $|f(qz)| = |f(z)|$). Не викликає сумнівів, що локсодромні функції є підмножиною модуль-локсодромних. Проте, як показано у [63], існують модуль-локсодромні функції, які не є локсодромними. У [63] отримано теореми про зображення модуль-локсодромних функцій та про розподіл і деякі властивості нулів та полюсів модуль-локсодромних функцій. Використовуючи відомі результати А. Єрьоменка [48] та Л. Радченко [89] з теорії нормальних функцій, автори довели, що кожна модуль-локсодромна функція є Жюліа винятковою.

Як відомо [47], локсодромні функції, так як і еліптичні, мають досить широкий спектр застосувань, зокрема з їх допомогою з'являється можливість будувати явні розв'язки проблеми Хеле-Шоу. Також локсодромні функції застосовуються для знаходження вихрової рівноваги у рівнянні Ейлера, вільних поверхневих ейлерових потоків з поверхневою напруженістю (див. детальніше [47]).

Ще одне особливе застосування локсодромних функцій наводить у своїй статті [42] Д. Кровді.

## 1.2. Огляд основних результатів

Основними об'єктами дослідження у дисертаційній роботі є узагальнені локсодромні та узагальнені еліптичні функції, а предметом дослідження виступають властивості таких функцій.

Найпершим узагальненням локсодромних функцій, яке ми отримали є так звані $p$-локсодромні функції, їх дослідженню присвячений підрозділ 2.1 дисертації.

**Означення 2.1.1**. Нехай $q, p \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ називається *$p$-локсодромною з мультиплікатором $q$,* якщо для кожного $z \in \mathbb{C}^*$ виконується рівність

$$f(qz) = pf(z).$$

Символ $\mathcal{L}_{qp}$ позначає клас $p$-локсодромних функцій з мультиплікатором $q$.

У підрозділі 2.1

- наведено приклади $p$-локсодромних функцій з мультиплікатором $q$;
- описано їх елементарні властивості;
- досліджено розташування нулів та полюсів $p$-локсодромної функції та показано, що нулі та полюси $p$-локсодромної функції у випадку недодатного $q$ лежать на логарифмічній спіралі;
- знайдено рівняння цієї логарифмічної спіралі;
- отримано теорему про співвідношення між кількостями нулів та полюсів $p$-локсодромної функції;
- отримано теорему про зображення $p$-локсодромної функції, яку можна вважати своєрідним критерієм $p$-локсодромності;

- описано вигляд голоморфної $p$-локсодромної функції;
- доведено Жюліа винятковість $p$-локсодромних функцій;
- проведено порівняльну характеристику властивостей локсодромних та $p$-локсодромних функцій.

Наведемо основні теореми цього підрозділу.

Як і раніше, $A_q(R) = \{z \in \mathbb{C} : |q|R < |z| \leqslant R\}$, $R > 0$.

**Теорема 2.1.7**. *Нехай $f \in \mathcal{L}_{qp}$ і не має ні нулів, ні полюсів на межі кільця $A_q(R)$. Тоді кількість нулів функції $f$ дорівнює кількості її полюсів у кільці $A_q(R)$ з урахуванням їх кратностей.*

Вищенаведена теорема є аналогом теореми 1.1.4 про нулі та полюси для класичних локсодромних функцій.

Нехай $a_1, ..., a_m$ і $b_1, ..., b_m$ є нулями і полюсами функції $f \in \mathcal{L}_{qp}$ в кільці $A_q$ відповідно. Позначимо $\lambda = \dfrac{a_1 \cdot ... \cdot a_m}{b_1 \cdot ... \cdot b_m}$.

**Теорема 2.1.8**. *Відмінна від нуля, мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ належить до класу $\mathcal{L}_{qp}$, $p \neq 1$, тоді і лише тоді, коли існує $\nu \in \mathbb{Z}$, таке що $\lambda = \dfrac{p}{q^\nu}$ і $f$ має вигляд*

$$f(z) = cz^\nu \frac{P\left(\frac{z}{a_1}\right) \cdot ... \cdot P\left(\frac{z}{a_m}\right)}{P\left(\frac{z}{b_1}\right) \cdot ... \cdot P\left(\frac{z}{b_m}\right)},$$

*де $c$ – стала.*

Теорема 2.1.8 також є узагальненням класичного результату – теореми 1.1.7.

Сформулюємо також отриманий нами наслідок із теореми про зображення $p$-локсодромних функцій. Цей наслідок описує вигляд довільної голоморфної $p$-локсодромної функції.

**Наслідок 2.1.9**. *Нехай* $f \in \mathcal{L}_{qp}$. *Якщо* $f$ *голоморфна в* $\mathbb{C}^*$, *то* $f(z) \equiv 0$ *або існує* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, *таке що* $p = q^k$ *і* $f(z) = cz^k$, *де* $c$ *– стала. І навпаки, голоморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція вигляду* $f(z) = cz^k$, *де* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c$ *– стала, належить до класу* $\mathcal{L}_{qp}$.

Через $P_f$ позначимо множину полюсів $p$-локсодромної функції $f$.

Досліджуючи питання Жюліа винятковості $p$-локсодромних функцій, ми отримали таку теорему.

**Теорема 2.1.10**. *Кожна функція* $f \in \mathcal{L}_{qp}$ *є Жюліа винятковою в* $\mathbb{C}^* \setminus P_f$.

Остання теорема є аналогом відомого результату А. Кондратюка та О. Гущак для локсодромних функцій, отриманого в статті [54].

Підрозділ 2.2 присвячений дослідженню ще одного узагальнення поняття локсодромності – модуль-локсодромних функцій.

**Означення 2.2.1**. Нехай $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ називається **модуль-локсодромною з мультиплікатором** $q$**,** якщо для всіх $z \in \mathbb{C}^*$

$$|f(qz)| = |f(z)|.$$

Символом $|\mathcal{L}|_q$ позначаємо множину модуль-локсодромних функцій з мультиплікатором $q$.

В цьому підрозділі доведено теорему 2.2.2 про зв'язок між модуль-локсодромними та $p$-локсодромними функціями.

Позначимо клас $p$-локсодромних функцій з мультиплікатором $q$ з $p = e^{i\alpha}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, через $\mathcal{L}_q^\alpha$. Справедливою є наступна теорема.

**Теорема 2.2.2**. $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{L}_q^\alpha = |\mathcal{L}|_q$.

Оскільки [53] локсодромні функції тісно пов'язані з еліптичними, нашим завданням було побудувати деяке узагальнення еліптичних функцій. Найпершим кроком у цьому напрямку стало вивчення так званих $p$-еліптичних функцій. Останній об'єкт розглянуто у підрозділі 2.3.

**Означення 2.3.1**. Нехай $\omega_1, \omega_2$ – комплексні числа, такі що $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $g$ називається ***p*-еліптичною** з періодами $\omega_1, \omega_2$, якщо існує $p \in \mathbb{C}^*$, таке, що для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$g(u + \omega_1) = g(u), \quad g(u + \omega_2) = pg(u).$$

У підрозділі 2.3 проілюстровано зв'язок між $p$-локсодромними та $p$-еліптичними функціями.

У розділі 3 ми продовжували будувати певні узагальнення локсодромних функцій. Для цього ми розглядали функціональне рівняння вигляду $f(qz) = p(z)f(z)$, $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$ і шукали його розв'язки для різних функцій $p(z)$.

Природно було почати наше дослідження з найпростіших випадків. Таким чином, спочатку в ролі $p(z)$ ми розглянули елементарні функції $\dfrac{1}{1-z}$ та $\dfrac{1}{z}$, і для функціональних рівнянь

$$f(qz) = \frac{1}{1-z}f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad q \in \mathbb{C}^*, \quad |q| < 1 \tag{3.1}$$

та

$$f(qz) = \frac{1}{z}f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad q \in \mathbb{C}^*, \quad |q| < 1 \tag{3.5}$$

зробили спробу знайти голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки. Нижче наведемо основні теореми, які ми отримали в цьому напрямку.

Позначимо

$$H(z) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - q^n z),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1. \tag{3.2}$$

**Теорема 3.1.1**. *Голоморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* $f$ *є розв'язком рівняння (3.1) тоді і лише тоді, коли* $f(z) = CH(z)$, *де* $C$ *- стала.*

Як бачимо, з теореми 3.1.1 випливає що всі голоморфні розв'язки рівняння (3.1) насправді є цілими функціями.

Нагадаємо,

$$P(z) = (1 - z)\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n z)\left(1 - \frac{q^n}{z}\right).$$

**Теорема 3.1.4**. *Голоморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* $f$ *є розв'язком рівняння (3.5)* $\Leftrightarrow$ $f(z) = CP(-z)$, *де* $C$ *– стала.*

Також ми отримали наступну властивість розв'язків рівняння (3.5), сформулюємо її у вигляді наслідку.

**Наслідок 3.1.5**. *Нехай* $f$ *є голоморфним в* $\mathbb{C}^*$ *розв'язком (3.5) і існує* $R > 0$ *таке, що виконується* $\int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)}{z}dz = 0$. *Тоді* $f(z) \equiv 0$.

Наступним кроком у нашому дослідженні став розгляд більш загальних функціональних рівнянь, а саме

$$f(qz) = \frac{a}{z^m}f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad a \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{3.13}$$

та

$$f(qz) = \frac{a}{(b - z)^m}f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad a, b \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{3.21}$$

Теореми, які ми довели, описують вигляд мероморфних та голоморфних розв'язків рівнянь (3.13) і (3.21).

**Теорема 3.1.6**. *Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ є розв'язком рівняння (3.13) тоді і лише тоді, коли*

$$f(z) = P^m((-1)^m z)g(z),$$

*де $g \in \mathcal{L}_{qa}$.*

**Теорема 3.1.8**. *Кожен голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.13) можна зобразити у вигляді $f(z) = Cz^\nu \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right)$, де $\nu \in \mathbb{Z}$, $c_1, c_2, \dots c_m$ – комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що $\prod_{j=1}^{m} c_j = (-1)^m a q^{-\nu}$, а $C$ – стала.*

**Теорема 3.1.9**. *Якщо $m$ – від'ємне ціле, то рівняння (3.13) не має голоморфних в $\mathbb{C}^*$ розв'язків.*

**Теорема 3.1.11**. *Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ є розв'язком рівняння (3.21) тоді і лише тоді, коли*

$$f(z) = H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z),$$

*де $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = \frac{a}{b^m}$, а $H$ визначена рівністю* (3.2).

**Теорема 3.1.13**. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $a = b^m q^k$, де $k$ – додатне ціле. Тоді кожен голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.21) має вигляд $f(z) = Cz^k H^m(\frac{z}{b})$, де $C$ – стала.*

**Теорема 3.1.14**. *Якщо $m$ – від'ємне ціле, то рівняння (3.21) не має голоморфних в $\mathbb{C}^*$ розв'язків.*

Отож, основним результатом підрозділу 3.1 є опис всіх мероморфних та голоморфних розв'язків рівнянь (3.13) і (3.21). Це стало допоміжним результатом і "зеленим світлом" для подальших наших досліджень. Використання результатів підрозділу 3.1 надало нам можливість знайти мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння $f(qz) = p(z)f(z)$, $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$ у випадку коли $p(z)$ є раціональною функцією.

Нехай $R$ – раціональна функція від $z$. Тоді $R$ можна подати у вигляді

$$R(z) = Cz^m \frac{(a_1 - z)(a_2 - z)\dots(a_k - z)}{(b_1 - z)(b_2 - z)\dots(b_l - z)}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

де $a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2, \dots, b_l$ – відмінні від 0 комплексні числа, не обов'язково різні, але такі, що $a_i \neq b_j$ для всіх $i, j$, а $C$ – стала.

У підрозділі 3.2 розглянуто рівняння

$$f(qz) = R(z)f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{3.27}$$

і описано його мероморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки. Розв'язки рівняння (3.27) ми називатимемо раціонально-локсодромними функціями. Основним результатом підрозділу 3.2 є теорема 3.2.2.

**Теорема 3.2.2**. *Нехай $a_1, a_2, \dots, a_k$ та $b_1, b_2, \dots, b_l$ – відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що $a_i \neq b_j$ для всіх $i, j$, $C$ – стала, $m \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathcal{L}_{qp}$, де $p = C\frac{a_1 a_2 \dots a_k}{b_1 b_2 \dots b_l}$. Тоді кожен мероморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.27) має вигляд*

$$f(z) = \frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2})\dots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2})\dots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)} g(z).$$

Використовуючи теорему 2.1.8 (про зображення $p$-локсодромних функцій), теорему 3.2.2 можна сформулювати в дещо іншому вигляді.

**Теорема 3.2.5**. *Нехай* $a_1, a_2, \dots, a_k$ *та* $b_1, b_2, \dots, b_l$ *– відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що* $a_i \neq b_j$ *для всіх* $i, j$, $C$ *– стала,* $m \in \mathbb{Z}$, $u_1, u_2, \dots, u_n$ *та* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *– відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що* $C \prod_{j=1}^{k} a_j \prod_{j=1}^{n} v_j = \prod_{j=1}^{l} b_j \prod_{j=1}^{n} u_j$, $m \in \mathbb{Z}$. *Тоді кожен мероморфний в* $\mathbb{C}^*$ *розв'язок рівняння (3.27) має вигляд*

$$f(z) = \frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2})\dots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2})\dots H(\frac{z}{a_k})} \frac{P(\frac{z}{u_1})P(\frac{z}{u_2}) \cdot \ldots \cdot P(\frac{z}{u_n})}{P(\frac{z}{v_1})P(\frac{z}{v_2}) \cdot \ldots \cdot P(\frac{z}{v_n})P^m((-1)^m z)}.$$

Опираючись на результати підрозділу 3.1, ми побачили, що голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки рівняння (3.27) існуватимуть лише за умови, що $R(z)$ матиме наступний вигляд

$$R(z) = \frac{M(z)}{z^m(b_1 - z)(b_2 - z)\dots(b_l - z)},$$

де $b_1, b_2, \dots, b_l$ – відмінні від 0 комплексні числа, не обов'язково різні, $\deg M(z) = 0$ і $m \geqslant 0$. Тоді рівняння (3.27) набуде вигляду

$$f(qz) = \frac{M}{z^m(b_1 - z)(b_2 - z)\dots(b_l - z)} f(z), \tag{3.31}$$

де $z \in \mathbb{C}^*$, $M = const$.

Нами доведена наступна теорема, яка є центральним результатом підрозділу 3.3.

**Теорема 3.3.2**. *Кожен голоморфний в* $\mathbb{C}^*$ *розв'язок рівняння* (3.31) *можна записати у вигляді* $f(z) = Cz^\nu \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right)$, *де* $C$ *– стала,* $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c_1, c_2, \dots c_m$ *– відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі що* $M = (-1)^m q^\nu \prod_{i=1}^{l} b_i \prod_{j=1}^{m} c_j$.

Розділ 4 дисертації присвячений узагальненню теорії Вейєрштрасса еліптичних функцій. Основним узагальненням еліптичних функцій, яке ми отримали є так звані квазі-еліптичні функції.

**Означення 4.1.1**. Нехай $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, де $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $g$ називається **квазі-еліптичною**, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, такі що для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$g(u + \omega_1) = pg(u), \;\; g(u + \omega_2) = qg(u).$$

Символом $\mathcal{QE}$ позначаємо множину квазі-еліптичних функцій.

В підрозділі 4.1

- показано нетривіальність класу $\mathcal{QE}$;
- отримано аналоги деяких класичних теорем теорії еліптичних функцій;
- побудовано квазі-еліптичну функцію Вейєрштрасса – $\wp_{\alpha\beta}$, яка є безпосереднім узагальненням класичного випадку;
- знайдено аналоги $\zeta$ та $\sigma$-функцій Вейєрштрасса для класу квазі-еліптичних функцій;
- показано зв'язок та співвідношення між узагальненими функціями Вейєрштрасса $\wp_{\alpha\beta}$, $\zeta_{\alpha\beta}$ та $\sigma_{mn}$;
- проілюстровано зв'язок між квазі-еліптичними та $p$-локсодромними функціями.

Наведемо основні теореми, які ми довели.

**Теорема 4.1.4**. *Кожна голоморфна квазі-еліптична функція є сталою.*

Як відомо з підрозділу 1.1, для еліптичних функцій теж має місце подібна теорема.

**Теорема 4.1.5**. *Нехай $f \in \mathcal{QE}$. Тоді кількість нулів функції $f$ дорівнює кількості її полюсів (з урахуванням кратності) в кожному паралелограмі періодів $\prod(u_0)$.*

Теорема 4.1.5 є аналогом класичного результату для еліптичних функцій, а саме теореми 1.1.2.

Позначимо

$$G_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left( \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) e^{i(m\alpha + n\beta)},$$

де $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $Im \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Функція $G_{\alpha\beta}$ є мероморфною в $\mathbb{C}$.

Нехай

$$C_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e^{i\alpha} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\beta} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\beta} - 1}.$$

Якщо $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$, то довизначимо $C_{00} = 0$.

**Теорема 4.1.6**. *Функція*

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta}$$

*належить до класу $\mathcal{QE}$ з $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$.*

Зрештою, бачимо, що $\wp_{00}$ збігається з класичною $\wp$-функцією Вейєрштрасса. Отже, $\wp_{\alpha\beta}$ справді є узагальненням класичного випадку.

Функцію $\wp_{\alpha\beta}$, визначену таким чином, ми називаємо квазі-еліптичною $\wp$-функцією Вейєрштрасса.

Мероморфну функцію

$$\zeta_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right) e^{i(m\alpha+n\beta)},$$

де $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m^2 + n^2 \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, ми називаємо узагальненою $\zeta$-функцією Вейєрштрасса.

Слід зауважити, що у випадку $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$, $\zeta_{00}$ дорівнює класичній $\zeta$-функції Вейєрштрасса.

Цілі функції

$$\sigma_{mn}(u) = \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}}, \quad m^2 + n^2 \neq 0,$$

і

$$\sigma_{00}(u) = u,$$

без сумніву, є аналогами $\sigma$-функції Вейєрштрасса в теорії квазі-еліптичних функцій.

Нижче, подано рівності, які демонструють зв'язок між узагальненими функціями $\wp_{\alpha\beta}$, $\zeta_{\alpha\beta}$ та $\sigma_{mn}$

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = -\zeta'_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta},$$

$$\zeta_{\alpha\beta}(u) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{i(m\alpha+n\beta)} \frac{\sigma'_{mn}(u)}{\sigma_{mn}(u)},$$

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = C_{\alpha\beta} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{i(m\alpha+n\beta)} \frac{(\sigma'_{mn}(u))^2 - \sigma''_{mn}(u)\sigma_{mn}(u)}{\sigma^2_{mn}(u)}.$$

Три останні співвідношення є аналогами класичних рівностей (1.1), (1.2) та (1.3), відповідно.

Наприкінці відзначимо, що якщо розглядати добуток $\prod\limits_{m,n\in\mathbb{Z}} \sigma_{mn}(u)$, то отримаємо класичну $\sigma$-функцію Вейєрштрасса.

У підрозділі 4.2 наведено ще одне узагальнення еліптичних функцій – модуль-еліптичні функції.

**Означення 4.2.1**. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $f$ називається **модуль-еліптичною**, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, такі що $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ і для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$|f(u+\omega_1)| = |f(u)|, \;\; |f(u+\omega_2)| = |f(u)|.$$

Клас модуль-еліптичних функцій позначаємо символом $|\mathcal{E}|$.

Доведено теорему про зв'язок між модуль-еліптичними та квазіеліптичними функціями.

**Теорема 4.2.2**. $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}} \mathcal{QE}_{\alpha\beta} = |\mathcal{E}|$.

Огляд основних результатів дисертації завершено.

**Висновки.**

У розділі 1 проведено огляд літератури за тематикою дисертації і подано огляд основних результатів.

В підрозділі 1.1 зроблено аналіз літературних джерел і висвітлено передумови вибору тематики дисертації. Підкреслено значний вклад А. Кондратюка в розвиток теорії локсодромних функцій та їх узагальнень.

В підрозділі 1.2 наведені основні результати наших досліджень.

# РОЗДІЛ 2
# ПРО $P$-ЛОКСОДРОМНІ ТА $P$-ЕЛІПТИЧНІ ФУНКЦІЇ

Локсодромну функцію можна трактувати як мероморфну в проколеній комплексній площині функцію, яка є розв'язком деякого функціонального рівняння, а саме $f(qz) = f(z)$ при деякому фіксованому $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Природнім чином постало питання про те як можна узагальнити поняття локсодромної функції. Логічно розглядати більш загальне функціональне рівняння, а саме $f(qz) = p(z)f(z)$, $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$.

Першим кроком в цьому напрямку буде дослідження випадку $p(z) = p$, $p \in \mathbb{C}^*$. Функції, що задовольняють це рівняння в даному випадку ми називатимемо $p$-локсодромними. Очевидно, якщо $p = 1$, ми отримуємо класичну локсодромну функцію. В підрозділі 2.1 ми досліджуємо $p$-локсодромні функції, будуємо їх приклади та отримуємо деякі їхні властивості. Отримано теореми про зображення $p$-локсодромної функції, а також про кількість її нулів та полюсів. Знайдено вигляд логарифмічної спіралі, на якій лежать нулі та полюси $p$-локсодромної функції у випадку недодатного $q$. Доведено, що $p$-локсодромні функції є Жюліа винятковими функціями. Також зроблено порівняння класів локсодромних та $p$-локсодромних функцій.

Як відомо [53], локсодромні функції тісно пов'язані з еліптичними. Відповідно, ми можемо розглядати деяке узагальнення еліптичних функцій – так звані $p$-еліптичні функції (див. означення 2.3.1), які є об'єктом вивчення підрозділу 2.3 дисертаційної роботи. В даному підрозділі також наведено зв'язок між $p$-еліптичними та $p$-локсодромними функціями.

Ще одним узагальненням локсодромних функцій є так звані модуль-локсодромні функції (термін введений А. Кондратюком), а саме мероморфні в в проколеній комплексній площині функції, що задовольняють умову $|f(qz)| = |f(z)|$ при деякому фіксованому $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Їх дослідженню присвячений підрозділ 2.2 дисертаційної роботи. Даний розділ також містить теорему про зв'язок між модуль-локсодромними та $p$-локсодромними функціями.

Результати, наведені у розділі 2 опубліковані в [60], [73], [74], [75], [55], [72], [67].

## 2.1. Про $p$-локсодромні функції та їх властивості

### Означення та приклади $p$-локсодромних функцій

**Означення 2.1.1.** Нехай $q, p \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ називається *$p$-локсодромною з мультиплікатором $q$,* якщо для кожного $z \in \mathbb{C}^*$ виконується рівність

$$f(qz) = pf(z). \tag{2.1}$$

Зрозуміло, що у випадку $p = 1$, ми отримуємо класичні локсодромні функції [90], [94], [53].

Позначимо через $\mathcal{L}_{qp}$ клас $p$-локсодромних функцій з мультиплікатором $q$. Ці функції є узагальненнями класичних локсодромних функцій.

Легко бачити, що множина $\mathcal{L}_{qp}$ утворює абелеву групу відносно операції додавання.

Розглянемо деякі приклади $p$-локсодромних функцій з мультиплікатором $q$.

**Приклад 2.1.2.** Нехай $f$ – локсодромна функція з мультиплікатором $q$ в $\mathbb{C}^*$, тобто $f$ задовольняє умову $f(qz) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$. Тоді

$$f'(qz) = \frac{1}{q} f'(z). \tag{2.2}$$

Таким чином, ми отримали, що похідна локсодромної функції з мультиплікатором $q$ є $p$-локсодромною функцією з $p = \dfrac{1}{q}$.

**Приклад 2.1.3.** Розглянемо функцію $f$, яка є такою часткою

$$f(z) = \frac{P\left(\frac{z}{p}\right)}{P(z)},$$

де $P(z)$ – це первинна функція Шотткі-Кляйна (див. означення 1.1.6)

Первинна функція Шотткі-Кляйна володіє властивістю

$$P(qz) = -z^{-1}P(z). \tag{2.3}$$

Справді,

$$\begin{aligned} P(qz) &= (1-qz)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n+1}z)\left(1-\frac{q^{n-1}}{z}\right) = \\ &= (1-qz)\prod_{n=2}^{\infty}(1-q^{n}z)\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{q^{n}}{z}\right) = \\ &= \left(1-\frac{1}{z}\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n}z)\left(1-\frac{q^{n}}{z}\right) = \\ &= \left(\frac{z-1}{z}\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n}z)\left(1-\frac{q^{n}}{z}\right) = -z^{-1}P(z). \end{aligned}$$

Тепер, використовуючи формулу (2.3), покажемо, що $f \in \mathcal{L}_{qp}$,

$$f(qz) = \frac{P\left(\frac{qz}{p}\right)}{P(qz)} = \frac{-z^{-1}pP\left(\frac{z}{p}\right)}{-z^{-1}P(z)} = p\frac{P\left(\frac{z}{p}\right)}{P(z)} = pf(z).$$

**Приклад 2.1.4.** Розглянемо функцію

$$\rho_p(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(pq)^n z}{(z-q^n)^2}, \quad |q|<1,\ |q|<|p|<\frac{1}{|q|}. \tag{2.4}$$

Нехай $L$ – компактна підмножина $\mathbb{C}^*$. Оскільки $|pq|<1$, $q^n \to 0$ при $n \to +\infty$, $q^{-n} \to 0$ при $n \to +\infty$, і $\left|\frac{q}{p}\right| < 1$, то залишок ряду (2.4) збігається рівномірно на множині $L$. Отже, функція $\rho_p$ є мероморфною в $\mathbb{C}^*$.

Покажемо, що функція $\rho_p$ є $p$-локсодромною. Справді,

$$\begin{aligned} \rho_p(qz) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(pq)^n qz}{(qz-q^n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{p^n q^{n-1} z}{(z-q^{n-1})^2} = \\ &= p\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(pq)^{n-1} z}{(z-q^{n-1})^2} = p\rho_p(z). \end{aligned}$$

## Про розташування нулів та полюсів $p$-локсодромної функції

Із означення 2.1.1 негайно випливає така властивість $p$-локсодромних функцій: якщо $f \in \mathcal{L}_{qp}$ і $a$ є нулем функції $f$, то $aq^n$, $n \in \mathbb{Z}$ також буде нулем функції $f$. Аналогічно, якщо точка $b$ є полюсом функції $f \in \mathcal{L}_{qp}$, то $bq^n$, $n \in \mathbb{Z}$, також буде її полюсом.

Нехай число $z = a = |a|e^{i\alpha}$ є нулем $p$-локсодромної функції $f$. Очевидно, що у випадку додатного $q$, всі точки вигляду $z_n = aq^n$, $n \in \mathbb{Z}$, лежать на одній прямій. Значно цікавішим є випадок недодатного $q$. Покажемо, що в цьому випадку, точки вигляду $z_n = aq^n$, $n \in \mathbb{Z}$, лежать на логарифмічній спіралі.

Нехай $q = |q|e^{i\gamma}$, де $\gamma = \arg q$, тоді $q^n = |q|^n e^{in\gamma}$. Зауважимо, що у випадку недодатного $q$, $\gamma \neq 0$. А отже,

$$z_n = aq^n = |a||q|^n e^{i\alpha + in\gamma} = |a||q|^n e^{i(\alpha+n\gamma)}. \tag{2.5}$$

Позначимо $r_0 = |z|$, $\varphi_0 = \arg z$, $r = |z_n|$, $\varphi = \varphi_0 + n \arg q \in \operatorname{Arg} z_n$, Тоді справджується рівність

$$\log r - \log r_0 = \frac{\log |q|}{\gamma}(\varphi - \varphi_0). \tag{2.6}$$

Справді, розглядаючи ліву частину рівності (2.6), з врахуванням (2.5), будемо мати

$$\log r - \log r_0 = \log |a| + n \log |q| - \log |a| = n \log |q|.$$

Тепер, розглянемо праву частину рівності (2.6),

$$\frac{\log |q|}{\gamma}(\varphi - \varphi_0) = \frac{\log |q|}{\gamma}(\alpha + n\gamma - \alpha) = n \log |q|.$$

Із двох останніх рівностей негайно випливає (2.6).

Тепер запишемо (2.6) наступним чином

$$\log\frac{r}{r_0} = \log e^{\frac{\log|q|}{\gamma}(\varphi-\varphi_0)}.$$

Потенціюючи останню рівність, маємо

$$\frac{r}{r_0} = e^{\frac{\log|q|}{\gamma}(\varphi-\varphi_0)}$$

або

$$r = r_0 e^{-\frac{\log|q|}{\gamma}\varphi_0} e^{\frac{\log|q|}{\gamma}\varphi}.$$

Іншими словами

$$r = Ce^{k\varphi}, \tag{2.7}$$

де $k = \frac{\log|q|}{\gamma}$, а це рівняння логарифмічної спіралі у полярних координатах $(r,\varphi)$. Також можна подати рівняння (2.7) у наступній формі

$$\log r - \log|a| = k(\varphi - \alpha).$$

Зрозуміло, що зроблені вище висновки стосуються також і розташування полюсів $p$-локсодромної функції.

Образи логарифмічних спіралей на сфері Рімана перетинають меридіани під одним і тим же кутом і називаються локсодромними кривими ($\lambda o\xi o\varsigma$- косий, $\delta\rho o\mu o\varsigma$ - шлях). Саме тому (наслідуючи Ж. Валірона) ми називаємо функції з класу $\mathcal{L}_{qp}$ $p$-локсодромними.

## Лінійний простір $\mathcal{L}_{qp}$

Легко перевірити, що клас $p$-локсодромних функцій $\mathcal{L}_{qp}$ утворює лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ і над полем $\mathcal{L}_q$. Наведемо деякі властивості лінійного простору $\mathcal{L}_{qp}$.

**Твердження 2.1.5.** *Лінійний простір $\mathcal{L}_{qp}$ володіє такими властивостями:*

*1. Відображення $D : f(z) \mapsto zf'(z)$ переводить функції з простору $\mathcal{L}_{qp}$ в простір $\mathcal{L}_{qp}$.*

*2. Відображення $D_l : f(z) \mapsto z\frac{f'(z)}{f(z)}$ переводить функції з простору $\mathcal{L}_{qp}$ в простір $\mathcal{L}_q$.*

*3. $f(z) \in \mathcal{L}_{qp} \Rightarrow f(\frac{1}{z}) \in \mathcal{L}_{q\frac{1}{p}}$.*

*Д о в е д е н н я.*

1. Нехай $f \in \mathcal{L}_{qp}$. Тоді виконується умова $f(qz) = pf(z)$. Візьмемо похідну за змінною $z$ від обох частин цієї рівності: $qf'(qz) = pf'(z)$, тобто

$$f'(qz) = \frac{p}{q}f'(z). \tag{2.8}$$

Тепер покажемо, що функція $g(z) = zf'(z)$ також є $p$-локсодромною з мультиплікатором $q$. Справді, користуючись співвідношенням (2.8), отримуємо

$$g(qz) = qzf'(qz) = qz\frac{p}{q}f'(z) = pzf'(z).$$

2. Знову, нехай $f \in \mathcal{L}_{qp}$. Розглянемо функцію $g(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)}$. З огляду на рівність (2.8), бачимо що

$$g(qz) = qz\frac{f'(qz)}{f(qz)} = qz\frac{\frac{p}{q}f'(z)}{pf(z)} = z\frac{f'(z)}{f(z)},$$

тобто $g \in \mathcal{L}_q$.

3. Функція $f$ задовольняє умову $f(qw) = pf(w)$ для всіх $w \in \mathbb{C}^*$. Покладемо $w = \dfrac{z}{q}$ в останню рівність. Тоді $f(z) = pf\left(\frac{z}{q}\right)$ або

$$f\left(\frac{z}{q}\right) = \frac{1}{p} f(z). \tag{2.9}$$

Позначимо $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ і покажемо, що $g \in \mathcal{L}_{q\frac{1}{p}}$. Справді, використовуючи співвідношення (2.9), маємо

$$g(qz) = f\left(\frac{1}{qz}\right) = \frac{1}{p} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{p} g(z).$$

$\square$

**Твердження 2.1.6.** *Частка двох p-локсодромних функцій з фіксованим p є локсодромною функцією.*

*Д о в е д е н н я.* Нехай $f(qz) = pf(z)$, $g(qz) = pg(z) \forall z \in \mathbb{C}^*$. Розглянемо функцію $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$. Тоді

$$h(qz) = \frac{f(qz)}{g(qz)} = \frac{pf(z)}{pg(z)} = h(z).$$

Отже, $h \in \mathcal{L}_q$, що і треба було показати. $\square$

## Про кількість нулів та полюсів $p$-локсодромної функції

Нагадаємо, $A_q(R) = \{z \in \mathbb{C} : |q|R < |z| \leqslant R\}$, $R > 0$.

**Теорема 2.1.7.** *Нехай $f \in \mathcal{L}_{qp}$ і не має ні нулів, ні полюсів на межі кільця $A_q(R)$. Тоді кількість нулів функції $f$ дорівнює кількості її полюсів у кільці $A_q(R)$ з урахуванням їх кратностей.*

*Д о в е д е н н я.* Нехай $\Gamma_1 = \{z : |z| = R\},\ \Gamma_2 = \{z : |z| = |q|R\}$ позначають кола, що обмежують кільце $A_q(R)$, $\quad n\left(\frac{1}{f}\right)$ і $n(f)$ позначають кількості нулів і полюсів функції $f$ у кільці $A_q(R)$, відповідно.

Застосуємо принцип аргументу до функції $f$. Враховуючи орієнтацію кривих, що обмежують кільце $A_q(R)$, отримуємо

$$n\left(\frac{1}{f}\right) - n(f) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\Gamma_1^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi + \int\limits_{\Gamma_2^-} \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}d\eta\right).$$

Використаємо такі параметризації:

1) $\Gamma_1^+ :\quad \xi = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $d\xi = Rie^{i\theta}d\theta$;

2) $\Gamma_2^+ :\quad \eta = qRe^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $d\eta = qRie^{i\theta}d\theta$.

Будемо мати:

$$n\left(\frac{1}{f}\right) - n(f) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_0^{2\pi} iRe^{i\theta}\frac{f'(Re^{i\theta})}{f(Re^{i\theta})}d\theta - \int\limits_0^{2\pi} iqRe^{i\theta}\frac{f'(qRe^{i\theta})}{f(qRe^{i\theta})}d\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} Re^{i\theta}\frac{f'(Re^{i\theta})}{f(Re^{i\theta})}d\theta - \int\limits_0^{2\pi} qRe^{i\theta}\frac{f'(qRe^{i\theta})}{f(qRe^{i\theta})}d\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(I_1 - I_2).$$

Розглянемо інтеграл $I_2$. Використовуючи $p$-локсодромність функції $f$ і, відповідно, рівність (2.8) про похідну $p$-локсодромної функції в точці $qz$, можемо переписати інтеграл $I_2$ наступним чином

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} qRe^{i\varphi}\frac{pf'(Re^{i\varphi})}{qf(qRe^{i\varphi})}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} Re^{i\varphi}\frac{pf'(Re^{i\varphi})}{pf(Re^{i\varphi})}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} Re^{i\varphi}\frac{f'(Re^{i\varphi})}{f(Re^{i\varphi})}d\varphi.$$

Як бачимо, $I_1 = I_2$. Отже, можна зробити висновок, що $n\left(\frac{1}{f}\right) = n(f)$. Теорему доведено.

$\square$

### Про зображення $p$-локсодромних функцій

Нехай $a_1, ..., a_m$ і $b_1, ..., b_m$ є нулями і полюсами функції $f \in \mathcal{L}_{qp}$ в кільці $A_q$ відповідно. Позначимо

$$\lambda = \frac{a_1 \cdot ... \cdot a_m}{b_1 \cdot ... \cdot b_m}. \tag{2.10}$$

**Теорема 2.1.8.** *Відмінна від нуля, мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ належить до класу $\mathcal{L}_{qp}$, $p \neq 1$, тоді і лише тоді, коли існує $\nu \in \mathbb{Z}$, таке що $\lambda = \dfrac{p}{q^\nu}$ і $f$ має вигляд*

$$f(z) = cz^\nu \frac{P\left(\frac{z}{a_1}\right) \cdot ... \cdot P\left(\frac{z}{a_m}\right)}{P\left(\frac{z}{b_1}\right) \cdot ... \cdot P\left(\frac{z}{b_m}\right)}, \tag{2.11}$$

*де $c$ – стала.*

*Д о в е д е н н я.* Спочатку, позначимо

$$M(z) = \frac{P\left(\frac{z}{a_1}\right) \cdot ... \cdot P\left(\frac{z}{a_m}\right)}{P\left(\frac{z}{b_1}\right) \cdot ... \cdot P\left(\frac{z}{b_m}\right)}.$$

Бачимо, що $M$ визначає мероморфну функцію в $\mathbb{C}^*$, з нулями $\alpha_{ik} = a_i q^k,\ i = 1, \ldots, m,\ k \in \mathbb{Z}$, та полюсами $\beta_{ik} = b_i q^k,\ i = 1, \ldots, m$, $k \in \mathbb{Z}$.

Використовуючи властивість (2.3) первинної функції Шотткі-Кляйна, отримаємо:

$$M(qz) = \frac{P(\frac{qz}{a_1}) \cdot ... \cdot P(\frac{qz}{a_m})}{P(\frac{qz}{b_1}) \cdot ... \cdot P(\frac{qz}{b_m})} = \frac{-\frac{a_1}{z} P(\frac{z}{a_1}) \cdot ... \cdot (-\frac{a_m}{z}) P(\frac{z}{a_m})}{-\frac{b_1}{z} P(\frac{z}{b_1}) \cdot ... \cdot (-\frac{b_m}{z}) P(\frac{z}{b_m})} =$$
$$= \frac{a_1 \cdot ... \cdot a_m \cdot P(\frac{z}{a_1}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{a_m})}{b_1 \cdot ... \cdot b_m \cdot P(\frac{z}{b_1}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{b_m})} = \lambda M(z).$$

Отже,

$$M(qz) = \lambda M(z). \tag{2.12}$$

*Необхідність.* Розглянемо функцію

$$g(z) = \frac{f(z)}{M(z)}. \tag{2.13}$$

Оскільки функції $f$ та $M$ мають ті самі множини нулів та полюсів, то їхня частка – функція $g$ голоморфна в $\mathbb{C}^*$. Розвинемо функцію $g$ в ряд Лорана у $\mathbb{C}^*$. Нехай $g(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$.

Використовуючи рівності (2.1) і (2.3), ми отримуємо

$$\lambda g(qz) = \frac{\lambda f(qz)}{M(qz)} = \frac{p\lambda f(z)}{\lambda M(z)} = pg(z). \tag{2.14}$$

З огляду на (2.14), маємо

$$\lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n q^n z^n = p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

для всіх $z \in \mathbb{C}^*$. Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях $z$:

$$\lambda c_n q^n = pc_n. \tag{2.15}$$

Оскільки $g \neq 0$, то обов'язково знайдеться $\nu \in \mathbb{Z}$, таке, що $c_\nu \neq 0$. При цьому, з огляду на (2.15) має виконуватися

$$c_\nu(\lambda q^\nu - p) = 0. \tag{2.16}$$

Звідси випливає, що таке $\nu$ повинно бути єдиним і таким чином, з рівності (2.16) отримуємо $q^\nu = \dfrac{p}{\lambda}$. А, отже, $c_n = 0$ якщо $n \neq \nu$. Тому $g(z) = c_\nu z^\nu$. Враховуючи (2.13), можна зробити висновок, що

$$f(z) = g(z)M(z) = cz^\nu M(z),$$

де $c$ – стала.

*Достатність.* Тепер, нехай ми маємо функцію $f(z) = cz^\nu M(z)$, де $\nu \in \mathbb{Z}$, таке що $\lambda = \frac{p}{q^\nu}$ Покажемо, що $f \in \mathcal{L}_{qp}$. Розглянемо $f(qz) = $ $= cq^\nu z^\nu M(qz)$. Справді, використовуючи властивість (2.12) функції $M$, отримуємо

$$f(qz) = cq^\nu z^\nu \lambda M(z) = pf(z).$$

Доведення завершено.

$\square$

**Наслідок 2.1.9.** *Нехай $f \in \mathcal{L}_{qp}$. Якщо $f$ голоморфна в $\mathbb{C}^*$, то $f(z) \equiv 0$ або існує $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, таке що $p = q^k$ і $f(z) = cz^k$, де $c$ – стала. І навпаки, голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція вигляду $f(z) = cz^k$, де $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c$ – стала, належить до класу $\mathcal{L}_{qp}$.*

*Д о в е д е н н я. Необхідність.* Розглянемо голоморфну в $\mathbb{C}^*$ функцію $f \in \mathcal{L}_{qp}$. Якщо $f(z) \equiv 0$, то все доведено. В іншому випадку, за теоремою 2.1.8, повинно існувати ціле число $\nu$, таке що $\lambda = \dfrac{p}{q^\nu}$, а $f$ повинна мати вигляд (2.11), де, нагадаємо, $a_1, ..., a_m$ і $b_1, ..., b_m$ – нулі і полюси функції $f$ в кільці $A_q$, відповідно. Оскільки, функція $f$ – голоморфна в $\mathbb{C}^*$, вона не має полюсів, а отже, за теоремою 2.1.7, $f$ не має і нулів. Звідси, $f(z) = cz^k$, де $k \in \mathbb{Z}$, $c$ – стала. Залишилося зауважити, що $k \neq 0$, оскільки це суперечило би належності функції $f$ до класу $\mathcal{L}_{qp}$.

*Достатність.* Покажемо, що голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f(z) = cz^k$, де $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c$ – стала є $p$-локсодромною з мультиплікатором $q$. Справді, для кожного $z \in \mathbb{C}^*$

$$f(qz) = c(qz)^k = cq^k z^k = pf(z),$$

де $p = cq^k$. Наслідок доведено.

$\square$

## Жюліа винятковість $p$-локсодромних функцій

Ми використовуватимемо тут означення 1.1.10 (Жюліа винятковості) та означення 1.1.9 (нормальної сім'ї), наведені у розділі 1. Доведемо ще одну властивість $p$-локсодромних функцій, а саме Жюліа винятковість.

Через $P_f$ позначимо множину полюсів $p$-локсодромної функції $f$.

**Теорема 2.1.10.** *Кожна функція $f \in \mathcal{L}_{qp}$ є Жюліа винятковою в $\mathbb{C}^* \setminus P_f$.*

*Д о в е д е н н я.* Розглянемо сім'ю функцій $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, де $f_n(z) = f(q^n z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^*$. Оскільки $f \in \mathcal{L}_{qp}$, то $f_n(z) = p^n f(z)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ для всіх $z \in \mathbb{C}^*$.

Якщо $|p| > 1$, то гранична функція послідовності $\{f_n(z)\}$, $n \in \mathbb{N}$, дорівнює $\infty$. Якщо ж $|p| < 1$, то гранична функція послідовності $\{f_n(z)\}$, $n \in \mathbb{N}$ дорівнює 0. Якщо $|p| = 1$, іншими словами, $p = e^{i\alpha}$, ми маємо $f_n(z) = e^{in\alpha} f(z)$. Тоді, множина граничних функцій залежить від $\alpha$. Якщо $\alpha = \frac{\pi m}{k}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, то кількість граничних функцій є меншою або рівною $2k$. Якщо ж $\alpha = \pi r$, де $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то кількість граничних функцій є нескінченною. В будь-якому разі отримуємо виконання означення Жюліа винятковості. Доведення завершено.

$\square$

**Приклад 2.1.11.** Нехай $f \in \mathcal{L}_{qp}$ з $p = e^{i\alpha}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Тоді

$$f_n(z) = f(q^n z) = p^n f(z) = e^{in\frac{\pi}{4}} f(z).$$

У цьому випадку ми отримуємо вісім граничних функцій, а саме

$$\pm f,\ \pm i f,\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) f,\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) f.$$

## Деякі відмінності між $p$-локсодромними та класичними локсодромними функціями

З наведених раніше результатів випливає, що класичні локсодромні та $p$-локсодромні функції мають багато спільного. Але між ними існують певні відмінності. У цьому пункті наведемо у вигляді зауважень ключові відмінності між $p$-локсодромними та класичними локсодромними функціями.

**Зауваження 2.1.12.** Відомо [53], що клас локсодромних функцій з мультиплікатором $q$ утворює поле, а клас $\mathcal{L}_{qp}$ з фіксованим $p$ утворює абелеву групу відносно операції додавання.

**Зауваження 2.1.13.** Кожна функція $f \equiv const$ належить до класу $\mathcal{L}_q$, але єдиною сталою функцією, що належить до класу $\mathcal{L}_{qp}$ є $f \equiv 0$.

**Зауваження 2.1.14.** Локсодромні функції володіють такою властивістю: якщо $f \in \mathcal{L}_q$ і $z$ є її $a$-точкою, $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, то $\{q^n z\}, n \in \mathbb{Z}$ також буде її $a$-точкою. У випадку $p$-локсодромних функцій такі міркування справедливі лише для нулів та полюсів функції $f \in \mathcal{L}_{qp}$.

**Зауваження 2.1.15.** Кожна, відмінна від сталої, локсодромна функція з мультиплікатором $q$ має принаймні два полюси (і два нулі) в довільному кільці $A_q(R)$ [53]. Натомість, $p$-локсодромна функція може мати лише один полюс (нуль) в кільці $A_q(R)$. Зокрема, у прикладі 2.1.3, $p$-локсодромна функція $f$ має єдиний полюс $z = 1$ в кільці $A_q$.

## 2.2. Модуль-локсодромні функції

**Означення 2.2.1.** [63] Нехай $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ називається **модуль-локсодромною з мультиплікатором $q$,** якщо для всіх $z \in \mathbb{C}^*$

$$|f(qz)| = |f(z)|. \tag{2.17}$$

Множину модуль-локсодромних функцій з мультиплікатором $q$ позначатимемо символом $|\mathcal{L}|_q$.

Розглянемо також $p$-локсодромну функцію з мультиплікатором $q$ та $p = e^{i\alpha}$. Це означає, що функція $f$ задовольняє умову

$$f(qz) = e^{i\alpha} f(z) \tag{2.18}$$

для всіх $z \in \mathbb{C}^*$ і фіксованого $\alpha \in \mathbb{R}$. Клас таких функцій позначимо через $\mathcal{L}_q^\alpha$.

**Теорема 2.2.2.** $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{L}_q^\alpha = |\mathcal{L}|_q$.

*Д о в е д е н н я.* Нехай $f \in \mathcal{L}_q^\alpha$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді із рівності (2.18) випливає

$$|f(qz)| = |e^{i\alpha} f(z)| = |f(z)|.$$

Звідси, $f \in |\mathcal{L}|_q$.

Тепер, навпаки, нехай $f \in |\mathcal{L}|_q$. Розглянемо мероморфну функцію

$$g(z) = \frac{f(qz)}{f(z)}. \tag{2.19}$$

Оскільки $f(z)$ мероморфна в $\mathbb{C}^*$, із співвідношення (2.17), отримуємо, що множини нулів та множини полюсів функцій $f(z)$ та $f(qz)$ збігаються. Звідси, робимо висновок, що частка цих функцій – функція

$g$ – голоморфна в $\mathbb{C}^*$. З рівності (2.17) також випливає, що

$$|g(z)| = 1$$

всюди, за винятком точки $z = 0$, нулів та полюсів функції $f$. Отже, всі ці точки є усувними. Застосовуючи теорему Ліувілля, отримуємо, що $g(z) \equiv c$, де $c$ – стала. Беручи до уваги, що $|g| = 1$, ми робимо висновок, що існує $\alpha \in \mathbb{R}$, таке що $c = e^{i\alpha}$ і з (2.19) маємо, що

$$f(qz) = e^{i\alpha} f(z),$$

тобто $f \in \mathcal{L}_q^\alpha$, а, отже, $f \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{L}_q^\alpha$. Доведення завершено.

$\square$

## 2.3. Про $p$-еліптичні функції та їх зв'язок з $p$-локсодромними функціями

**Означення 2.3.1.** Нехай $\omega_1, \omega_2$ – комплексні числа, такі що $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $g$ називається **$p$-еліптичною** з періодами $\omega_1, \omega_2$, якщо існує $p \in \mathbb{C}^*$, таке, що для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$g(u+\omega_1) = g(u), \quad g(u+\omega_2) = pg(u). \tag{2.20}$$

Друга властивість називається мультиплікативною $p$-періодичністю за періодом $\omega_2$. Зазначимо, що з (2.20) випливає, що $g(u+m\omega_1+$ $+n\omega_2) = p^n g(u)$, де $m, n \in \mathbb{Z}$.

Клас $p$–еліптичних функцій позначатимемо через $\mathcal{E}_p$.

Якщо $p = 1$ ми отримуємо класичні еліптичні функції.

Нижче наведено зв'язок між $p$-локсодромними та $p$-еліптичними функціями.

Нехай функція $f$ мероморфна в $\mathbb{C}^*$ і $p$-локсодромна з мультиплікатором $q = e^{2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, тобто $f \in \mathcal{L}_{qp}$. Тоді функція

$$g(u) = f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right)$$

мероморфна в $\mathbb{C}$ і $p$-еліптична з періодами $\omega_1, \omega_2$. Справді, для всіх $u \in \mathbb{C}$ маємо

$$g(u+m\omega_1+n\omega_2) = f\left(e^{2\pi i \frac{u+m\omega_1+n\omega_2}{\omega_1}}\right) = f\left(e^{2\pi i n \frac{\omega_2}{\omega_1}} e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) =$$

$$= f\left(q^n e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) = p^n f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) = p^n g(u).$$

Отже, $g \in \mathcal{E}_p$.

Навпаки, нехай тепер $g \in \mathcal{E}_p$ і $z \in \mathbb{C}^*$. Тоді функція

$$f(z) = g\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\log z\right) \tag{2.21}$$

є коректно визначеною, оскільки, $g$ є періодичною з періодом $\omega_1$, а тому заміна $\log z$ на $\log z + 2\pi ik$ не змінює значення функції $g$ в правій частині (2.21). Іншими словами, ми маємо композицію багатозначного і однозначного відображень, яка є однозначною функцією. Таким чином, якщо ми покладемо $q = e^{2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1}}$, де $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, то отримаємо

$$f(qz) = g\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\log(qz)\right) = g\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2i\pi}\log z\right) =$$

$$= pg\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\log z\right) = pf(z).$$

Отже, $f \in \mathcal{L}_{qp}$.

Як бачимо, $p$-локсодромні функції породжують $p$-еліптичні та навпаки.

**Висновки.** Основними об'єктами, які вивчаються у розділі 2 є $p$-локсодромні, $p$-еліптичні та модуль-локсодромні функції.

У підрозділі 2.1 описано клас $p$-локсодромних функцій та їх елементарні властивості, наведено приклади, доведено теореми про зображення мероморфної та голоморфної $p$-локсодромної функкції, про кількість нулів та полюсів $p$-локсодромної функкції, про Жюліа винятковість функцій з цього класу, виконано порівняльний аналіз та окреслено основні відмінності між локсодромними та $p$-локсодромними функціями. Основні результати цього підрозділу опубліковано в статті [55] та тезах доповідей [73], [74], [75].

Підрозділ 2.2 присвячений модуль-локсодромним функціям. Результати цього підрозділу опубліковано в статті [67] і тезах [60].

У підрозділі 2.3 показано зв'язок між $p$-локсодромними та $p$-еліптичними функціями (див. статтю [72]).

# РОЗДІЛ 3
# УЗАГАЛЬНЕННЯ ЛОКСОДРОМНИХ ФУНКЦІЙ

В попередньому розділі зроблено перший крок у напрямку знаходження узагальнень локсодромних функцій, а саме знайдено мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння

$$f(qz) = p(z)f(z),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1$$

у випадку $p(z) \equiv const$. Природно, наступним кроком є розгляд випадку, коли $p(z)$ є функцією, не обов'язково сталою. В цьому розділі ми починаємо з розгляду найпростіших випадків. А саме, в підрозділі 3.1 ми дослідимо випадки $p(z) = \dfrac{a}{z^m}$ та $p(z) = \dfrac{a}{(b-z)^m}$, $m \in \mathbb{Z}$. Застосування результатів підрозділу 3.1 дає можливість знайти мероморфні та голоморфні розв'язки згаданого рівняння у випадку коли $p(z)$ є раціональною функцією. Цьому присвячені підрозділи 3.2 та 3.3.

Результати розділу 3 опубліковані в [80], [17], [19], [65], [66], [20].

## 3.1. Прості випадки

### Голоморфні розв'язки рівняння $f(qz) = \dfrac{1}{1-z} f(z),\ z \in \mathbb{C}^*$

Нехай $0 < |q| < 1$. Почнемо наше дослідження з розгляду простого функціонального рівняння

$$f(qz) = \frac{1}{1-z} f(z),\ z \in \mathbb{C}^*. \tag{3.1}$$

Наше завдання полягає у знаходженні голоморфних в $\mathbb{C}^*$ розв'язків даного рівняння. При цьому при $z = 1$ ми вважаємо, що права частина (3.1) має усувну особливість, зокрема $f(1) = 0$.

Для цього визначимо цілу функцію

$$H(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n z) \tag{3.2}$$

з послідовністю нулів $\{q^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де нагадаємо $0 < |q| < 1$.

**Теорема 3.1.1.** *Голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ є розв'язком рівняння (3.1) тоді і лише тоді, коли*

$$f(z) = CH(z),$$

*де $C$ - стала.*

*Д о в е д е н н я.* Спочатку, доведемо існування розв'язків рівняння (3.1), для цього покажемо, що так визначена функція $f$ задовольняє рівняння (3.1). Справді,

$$(1-z) f(qz) = (1-z) C \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{n+1} z) =$$

$$= C(1-z) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k z) = C \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n z) = f(z).$$

Тепер покажемо, що кожен голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.1) має вищевказаний вигляд.

Вже показано, що $f$ задовольняє (3.1). Спочатку зауважимо, що $f(1) = 0$. Справді, оскільки $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}^*$, звідси випливає, що $f(qz)$ теж голоморфна в $\mathbb{C}^*$. А тоді з (3.1)

$$f(z) = (1 - z)f(qz),\ z \in \mathbb{C}^*.$$

Як бачимо, з останньої рівності випливає, що $f(1) = 0$.

Далі, покладемо $z = \dfrac{1}{q}$ в (3.1). Ми отримуємо

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) f\left(q\frac{1}{q}\right) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) f(1) = 0.$$

Методом математичної індукції легко показати, що $f\left(\dfrac{1}{q^n}\right) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $f(1) = 0$ і $f\left(\dfrac{1}{q^n}\right) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то

$$f(z) = g(z)H(z),$$

де $g$ – голоморфна. Функція $H$ є розв'язком рівняння (3.1), як ми показали. А тому

$$f(qz) = g(qz)H(qz) = g(qz)\frac{1}{1 - z}H(z). \tag{3.3}$$

З іншого боку, з огляду на (3.1), маємо

$$f(qz) = \frac{1}{1 - z}g(z)H(z). \tag{3.4}$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (3.3) і (3.4), бачимо, що $g(qz) = g(z)$ для кожного $z \neq q^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Іншими словами, для всіх $z \in \mathbb{C}^*$ виконується $g(qz) = g(z)$. З останньої рівності негайно випливає, що функція $g$ – локсодромна. При цьому, як було зауважено вище, $g$ є голоморфною. Отже, $g$ є сталою (див. теорему 1.1.3). Теорема доведена.

$\square$

**Зауваження 3.1.2.** З теореми 3.1.1 випливає що всі голоморфні розв'язки рівняння (3.1) є цілими функціями.

### Голоморфні розв'язки рівняння $f(qz) = \dfrac{1}{z}f(z),\ z \in \mathbb{C}^*$

Тепер розглянемо функціональне рівняння

$$f(qz) = \frac{1}{z}f(z),\ z \in \mathbb{C}^*. \tag{3.5}$$

Знайдемо його голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок. Для цього розглянемо первинну функцію Шотткі-Кляйна

$$P(z) = (1-z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)\left(1-\frac{q^n}{z}\right). \tag{3.6}$$

Нам знадобиться такий допоміжний результат.

**Лема 3.1.3.** *Для всіх* $z \in \mathbb{C}^*$

$$P(z) = A\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n, \tag{3.7}$$

*де*

$$A = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^2 / \sum_{n=1}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{3.8}$$

*Д о в е д е н н я.* Оскільки функція $P$ є аналітичною в $\mathbb{C}^*$, то її можна розвинути в ряд Лорана в $\mathbb{C}^*$. Нехай

$$P(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n. \tag{3.9}$$

Знайдемо коефіцієнти $a_n$. Розглянемо функцію $P(qz)$ і застосуємо до неї властивість (2.3). Ми одержимо

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n z^n = P(qz) \overset{(2.3)}{=} -\frac{1}{z}P(z) \overset{(3.9)}{=} -\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-a_n) z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-a_{n+1}) z^n.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $z$, бачимо що

$$a_{n+1} = -a_n q^n \tag{3.10}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Знайдемо явний вираз коефіцієнтів $a_n$ виходячи з рекурентного співвідношення (3.10).

Нехай $a_0 = A$. Тоді $a_1 = -A$, $a_2 = Aq$, $a_3 = -Aq^3, \ldots$ Методом математичної індукції можна довести, що для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = (-1)^n A q^{n(n-1)/2}.$$

Перевіримо, насамперед, виконання кроку індукції. Покажемо, що якщо $a_n = (-1)^n A q^{n(n-1)/2}$, то $a_{n+1} = (-1)^{n+1} A q^{(n+1)n/2}$. Справді,

$$a_{n+1} = -a_n q^n = (-1)^{n+1} A q^{n(n-1)/2} q^n = (-1)^{n+1} A q^{n(\frac{n-1}{2}+1)} =$$

$$= (-1)^{n+1} A q^{(n+1)n/2}.$$

Подібним чином, для цілих від'ємних $n$, з рекурентної формули (3.10) маємо $a_n = -a_{n+1} q^{-n}$. Звідси, $a_{-1} = -a_0 q^1 = -Aq^1$, $a_{-2} = Aqq^2 = Aq^3$, $a_{-3} = -Aq^3q^3 = -Aq^6$, $a_{-4} = Aq^6q^4 = Aq^{10}, \ldots$ Аналогічно, методом математичної індукції,

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_{-n} = (-1)^{-n} A q^{-n(-n-1)/2} = (-1)^n A q^{n(n+1)/2}.$$

Нехай $a_{-n} = (-1)^n A q^{n(n+1)/2}$. Тоді, оскільки $a_{-n} = -a_{-n+1} q^n$ , то

$$a_{-(n+1)} = -a_{-n} q^{n+1} = (-1)^{n+1} A q^{n(n+1)/2} q^{n+1} =$$
$$= (-1)^{n+1} A q^{(n+1)(\frac{n}{2}+1)} = (-1)^{n+1} A q^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}},$$

що і треба було довести.

Оскільки $q^{\frac{n(n-1)}{2}} = q^{\frac{(-n)(-n+1)}{2}}$, то можна зробити висновок що для всіх $z \in \mathbb{C}^*$

$$P(z) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n.$$

Залишилося знайти $A$. Розглянемо $P(-1)$,

$$P(-1) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} =$$

$$= \cdots + \underset{n=-2}{Aq^3} + \underset{n=-1}{Aq} + \underset{n=0}{A} + \underset{n=1}{A} + \underset{n=2}{Aq} + \underset{n=3}{Aq^3} + \cdots = 2A \sum_{n=1}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

З іншого боку, із формули (3.6) ми бачимо, що $P(-1) = 2 \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)^2$. Таким чином

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)^2 / \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Зауважимо, що оскільки $0 < |q| < 1$, то $\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)^2$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ – збіжні.

$\square$

**Теорема 3.1.4.** *Голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f$ є розв'язком рівняння (3.5) тоді і лише тоді, коли*

$$f(z) = CP(-z),$$

*де $C$ – стала.*

*Д о в е д е н н я.* Нехай $f(z) = CP(-z)$, де $C$ – стала. Використовуючи рівність (2.3), отримуємо

$$f(qz) = CP(-qz) = C\frac{1}{z}P(-z) = \frac{1}{z}f(z).$$

Отже, ми встановили існування розв'язків рівняння (3.5).

Тепер опишемо всі голоморфні розв'язки рівняння (3.5). Нехай функція $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ є голоморфним в $\mathbb{C}^*$ розв'язком (3.5). Тоді, для всіх $z \in \mathbb{C}^*$ маємо

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q^n z^n = f(qz) \overset{(3.5)}{=} \frac{1}{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n+1} z^n.$$

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти, отримаємо $a_{n+1} = a_n q^n$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$.

Нехай $a_0 = B$.

Якщо $B = 0$, то $f(z) \equiv 0$ і немає що доводити.

Нехай $B \neq 0$. За індукцією, легко показати що $a_n = Bq^{n(n-1)/2}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Аналогічні міркування застосовуємо для від'ємних цілих $n$. Отже, для всіх $n \in \mathbb{Z}$

$$f(z) = B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n. \tag{3.11}$$

З леми 3.1.3 нам відомо розвинення в ряд Лорана функції $P$ в $\mathbb{C}^*$,

$$P(-z) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n,$$

де $A = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^2 / \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Комбінуючи (3.7), (3.8) і (3.11), ми отримуємо, що

$$f(z) = \frac{B}{A} A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n = \frac{B}{A} P(-z).$$

Отже, справді, $f(z) = CP(-z)$, де $C = \dfrac{B}{A}$, що і треба було довести.

$\square$

Як наслідок, ми отримуємо наступну властивість розв'язків рівняння (3.5).

**Наслідок 3.1.5.** *Нехай $f$ є голоморфним в $\mathbb{C}^*$ розв'язком (3.5) і існує $R > 0$ таке, що виконується $\int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)}{z} dz = 0$. Тоді $f(z) \equiv 0$.*

*Д о в е д е н н я.* Оскільки $f$ – голоморфна в $\mathbb{C}^*$, то ми можемо розвинути її в ряд Лорана в $\mathbb{C}^*$ $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. Коефіцієнти $a_n$ були знайдені у доведенні Теореми 3.1.4,

$$a_n = a_0 q^{n(n-1)/2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

Як відомо, $a_0 = \int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)}{z} dz = 0$. Тоді з (3.12) випливає, що $a_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Таким чином $f(z) \equiv 0$. Доведення завершено.

$\square$

## Розв'язки рівняння $f(qz) = \dfrac{a}{z^m} f(z)$

Тепер розглянемо дещо загальніше функціональне рівняння

$$f(qz) = \frac{a}{z^m} f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad a \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{3.13}$$

Знайдемо мероморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки (3.13).

Зрозуміло, що у випадку $m = 0$, розв'язком даного рівняння є клас $p$-локсодромних функцій з $p = a$. Той факт, що множина мероморфних розв'язків цього рівняння є непорожньою для всіх цілих $m$, встановлюється наступною теоремою.

**Теорема 3.1.6.** *Мероморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* $f$ *є розв'язком рівняння (3.13) тоді і лише тоді, коли*

$$f(z) = P^m((-1)^m z)g(z), \tag{3.14}$$

*де* $g \in \mathcal{L}_{qa}$.

*Доведення.* Застосовуючи рівність (2.3), $a$-локсодромність функції $g$, а також той факт, що парність чисел $m$ та $m^2$ є однаковою, отримуємо

$$f(qz) = P^m(q(-1)^m z)g(qz) = \left(-\frac{1}{(-1)^m z}P((-1)^m z)\right)^m ag(z) =$$

$$= \frac{1}{z^m}P^m((-1)^m z)ag(z) = \frac{a}{z^m}f(z).$$

Тепер покажемо що усі роз'язки рівняння (3.13) мають вигляд (3.14).

Нехай $f$ – мероморфний розв'язок (3.13). Очевидно,

$$f(z) = \frac{f(z)}{P^m((-1)^m z)}P^m((-1)^m z) = g(z)P^m((-1)^m z),$$

де $g(z) = \dfrac{f(z)}{P^m((-1)^m z)}$. Покажемо, що $g \in \mathcal{L}_{qa}$. Справді,

$$f(qz) = g(qz)P^m(q(-1)^m z) = g(qz)\left(-\frac{1}{(-1)^m z}P((-1)^m z)\right)^m =$$

$$= \frac{1}{z^m}P^m((-1)^m z)g(qz). \tag{3.15}$$

З іншого боку, з огляду на (3.13)

$$f(qz) = \frac{a}{z^m}P^m((-1)^m z)g(z). \tag{3.16}$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (3.15) та (3.16), ми отримуємо, що $g(qz) = ag(z)$ для всіх $z \neq q^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Цього достатньо щоб зробити висновок, що $g$ є $a$-локсодромною. Доведення завершено.

□

Знайдемо також голоморфні розв'язки рівняння (3.13). У випадку $m = 0$, ми отримуємо голоморфну $p$-локсодромну функцію з $p = a$, її зображення відоме з наслідку 2.1.9. Для випадку $m = 1$ та $a = 1$ має місце теорема 3.1.4. Розглянемо інші випадки.

Обмежимося спочатку випадком $m \in \mathbb{N}$. Спочатку доведемо існування таких розв'язків.

**Теорема 3.1.7.** *Голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція*

$$f(z) = Cz^{\nu} \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right), \tag{3.17}$$

*де $\nu \in \mathbb{Z}$, $c_1, c_2, \dots c_m$ – комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що*

$$\prod_{j=1}^{m} c_j = (-1)^m a q^{-\nu}, \tag{3.18}$$

*а $C$ – стала, задовольняє рівняння (3.13).*

*Д о в е д е н н я.* Використовуючи формулу (2.3), отримуємо

$$f(qz) = Cq^{\nu} z^{\nu} \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{qz}{c_j}\right) = Cq^{\nu} z^{\nu} \prod_{j=1}^{m} \left(-\frac{c_j}{z} P\left(\frac{z}{c_j}\right)\right).$$

Далі,

$$Cq^{\nu} z^{\nu} \prod_{j=1}^{m} \left(-\frac{c_j}{z} P\left(\frac{z}{c_j}\right)\right) =$$

$$= Cq^{\nu} z^{\nu} \frac{(-1)^m c_1 c_2 \dots c_m}{z^m} \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right).$$

В силу умови (3.18) накладеної на $c_1, c_2, \dots, c_m$, останній вираз перетворюється на

$$\frac{a}{z^m} Cz^{\nu} \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right).$$

Згадуючи, що $f$ має вигляд (3.17), отримуємо, що $f(qz) = \frac{a}{z^m} f(z)$. Доведення завершено. $\square$

Подібно, як у випадку мероморфних розв'язків виявляється, що усі голоморфні розв'язки рівняння (3.13) мають вигляд (3.17) з умовою (3.18) на $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

**Теорема 3.1.8.** *Кожен голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.13) можна зобразити у вигляді $f(z) = Cz^\nu \prod\limits_{j=1}^{m} P\left(\dfrac{z}{c_j}\right)$, де $\nu \in \mathbb{Z}$, $c_1, c_2, \ldots c_m$ – комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що $\prod\limits_{j=1}^{m} c_j = (-1)^m a q^{-\nu}$, а $C$ – стала.*

*Д о в е д е н н я.* Припустимо, що функція $f$ є голоморфним в $\mathbb{C}^*$ розв'язком (3.13). Тоді, за теоремою 3.1.6, $f(z) = P^m((-1)^m z)g(z)$, де $g \in \mathcal{L}_{qa}$. Оскільки функції $f$ та $P$ голоморфні в $\mathbb{C}^*$, то $g$ або є голоморфною в $\mathbb{C}^*$ або має полюси, причому лише в точках $\{(-1)^m q^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ і кратність кожного полюса $l_k \leqslant m$, $l_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $g$ – голоморфна, то за наслідком 2.1.9, $g(z) \equiv Cz^\nu$. Тоді $f(z) = Cz^\nu P^m((-1)^m z) = Cz^\nu \prod\limits_{j=1}^{m} P\left(\dfrac{z}{c_j}\right)$, де $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = (-1)^m$.

В іншому випадку, використаємо теорему 2.1.8 про зображення $p$-локсодромних функцій за допомогою первинної функції Шоттки-Кляйна (див. [55]). А саме, нехай $c_1, c_2, ..., c_n$ та $d_1, d_2 ..., d_n$ є нулями і полюсами функції $g$ у кільці $A_q(R) = \{z \in \mathbb{C} : |q|R < |z| \leqslant R\}$, $R > 0$, відповідно, і нехай $\partial A_q(R)$ не містить ні нулів, ні полюсів функції $g \in \mathcal{L}_{qp}$. Зауважимо, що для кожної $p$-локсодромної функції $g$ кількість її нулів дорівнює кількості її полюсів (з урахуванням кратностей) у кожному такому кільці $A_q(R)$ (див. теорему 2.1.7). Тоді, враховуючи, що у розглядуваному випадку $p = a$, маємо

$$g(z) = Cz^\nu \frac{P(\frac{z}{c_1})P(\frac{z}{c_2}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{c_n})}{P(\frac{z}{d_1})P(\frac{z}{d_2}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{d_n})}, \tag{3.19}$$

де

$$\frac{c_1 c_2 \ldots c_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} = \frac{a}{q^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \tag{3.20}$$

а $C$ – стала.

Зрозуміло, що кожне кільце $A_q(R)$ містить тільки одну точку з послідовності $\{(-1)^m q^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Зручно вибрати таке кільце $A_q(R)$, що містить полюси $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = (-1)^m q^0 = (-1)^m$. Зауважимо, що $n = l_0$, де $l_0$ – кратність полюса в точці $z = (-1)^m$. Оскільки $\prod\limits_{j=1}^{n} d_j = (-1)^{mn}$, то звідси випливає, що $c_1 c_2 \ldots c_n = (-1)^{mn} a q^{-\nu}$.

Тепер ми можемо переписати $f$ таким чином

$$f(z) = Cz^\nu \frac{P(\frac{z}{c_1})P(\frac{z}{c_2}) \cdot \ldots \cdot P(\frac{z}{c_n})}{P^n(\frac{z}{(-1)^m})} P^m((-1)^m z)$$

або

$$f(z) = Cz^\nu P\left(\frac{z}{c_1}\right) P\left(\frac{z}{c_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\frac{z}{c_n}\right) P^{m-n}((-1)^m z).$$

Зауважимо, що $(-1)^{m^2} = (-1)^m$. Тому, у випадку $m = n$ теорема 3.1.8 доведена.

Якщо ж $n < m$, то покладемо $c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = c_m = (-1)^m$. Тоді, маємо $f(z) = Cz^\nu \prod\limits_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right)$ і знову, використовуючи рівність $(-1)^{m^2} = (-1)^m$, отримуємо, що $\prod\limits_{j=1}^{m} c_j = (-1)^m a q^{-\nu}$. Доведення завершено.

$\square$

Якщо $m < 0$, має місце наступна теорема.

**Теорема 3.1.9.** *Якщо $m$ – від'ємне ціле, то рівняння (3.13) не має голоморфних в $\mathbb{C}^*$ розв'язків.*

*Д о в е д е н н я.* Розглянемо рівняння (3.13). Нехай $m < 0$ і для визначеності, $m$ є парним. Припустимо, що існує голоморфний в $\mathbb{C}^*$

розв'язок $f$ рівняння (3.13). У цьому випадку, за теоремою 3.1.6, він має вигляд $f(z) = P^m(z)g(z)$, де $g \in \mathcal{L}_{qa}$. Тоді $g(z) = f(z)P^{-m}(z)$. Оскільки $m < 0$, то $g$ є голоморфною в $\mathbb{C}^*$, як добуток голоморфних функцій. З огляду на наслідок 2.1.9, можна стверджувати, що $g(z) \equiv Cz^k$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $C$ – стала.

Але, з іншого боку, функція $f(z) = Cz^kP^m(z)$, де $C$ – стала, не буде голоморфною в $\mathbb{C}^*$, бо $f$ матиме полюси в точках $\{q^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Це суперечить нашому припущенню. Теорему 3.1.9 доведено.

□

### Розв'язки рівняння $f(qz) = \dfrac{a}{(b-z)^m} f(z)$

Тепер розглянемо таке функціональне рівняння

$$f(qz) = \frac{a}{(b-z)^m} f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad a, b \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{3.21}$$

Спочатку знайдемо мероморфні розв'язки (3.21).

Як і у випадку рівняння (3.13) при $m = 0$, очевидно, що розв'язками рівняння (3.21) будуть $p$-локсодромні функції (із $p = a$).

Далі, нам знадобиться така лема.

**Лема 3.1.10.**

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \forall b \in \mathbb{C}^* : \quad H\left(\frac{qz}{b}\right) = \frac{b}{b-z} H\left(\frac{z}{b}\right). \tag{3.22}$$

*Д о в е д е н н я.* Оскільки, за теоремою 3.1.1, функція $H$ є розв'язком рівняння (3.1), то має місце рівність

$$H(qu) = \frac{1}{1-u} H(u), \quad u \in \mathbb{C}^*.$$

Підставляючи $u = \dfrac{z}{b}$ в останню рівність, отримуємо твердження леми. Лему доведено. □

Тепер можемо перейти безпосередньо до знаходження розв'язків рівняння (3.21).

**Теорема 3.1.11.** *Мероморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* $f$ *є розв'язком рівняння (3.21) тоді і лише тоді, коли*

$$f(z) = H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z), \tag{3.23}$$

*де* $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = \dfrac{a}{b^m}$, *а* $H$ *визначена рівністю* (3.2).

*Доведення.* В доведенні скористаємось твердженням леми 3.1.10, а саме рівністю (3.22). Оскільки $g$ є $p$-локсодромною з $p = \dfrac{a}{b^m}$, то

$$f(qz) = H^m\left(\frac{qz}{b}\right) g(qz) \overset{(3.22)}{=} \left(\frac{b}{b-z}\right)^m H^m\left(\frac{z}{b}\right) \frac{a}{b^m} g(z) =$$
$$= \frac{a}{(b-z)^m} H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z) \overset{(3.23)}{=} \frac{a}{(b-z)^m} f(z).$$

А тепер доведемо, що насправді всі мероморфні розв'язки рівняння (3.21) мають вигляд (3.23). Нехай $f$ є розв'язком рівняння (3.21). Розглянемо функцію $g(z) = \dfrac{f(z)}{H^m\left(\frac{z}{b}\right)}$. Оскільки $f$ є мероморфною функцією, а $H$ – голоморфною, то отримуємо, що $g$ є мероморфною. Застосовуючи (3.21) і (3.22), бачимо, що

$$g(qz) = \frac{f(qz)}{H^m\left(\frac{qz}{b}\right)} = \frac{\frac{a}{(b-z)^m} f(z)}{\left(\frac{b}{b-z}\right)^m H^m\left(\frac{z}{b}\right)} = \frac{a}{b^m} g(z) = pg(z).$$

Таким чином, для всіх $z \neq bq^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ми можемо зробити висновок, що $g(qz) = pg(z)$. Іншими словами, $g$ є $p$-локсодромною. Доведення завершено.

$\square$

Перейдемо до знаходження голоморфних розв'язків. Знову зауважимо, що випадок $a = b = m = 1$ розглянуто раніше (див. теорему 3.1.1). Розглянемо загальніший випадок.

Аналогічно до розгляду рівняння (3.13) обмежимося спочатку випадком $m > 0$.

**Теорема 3.1.12.** *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $a = b^m q^k$, де $k$ – додатне ціле. Тоді голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція $f(z) = Cz^k H^m\left(\frac{z}{b}\right)$, де $C$ – стала, задовольняє рівняння (3.21).*

*Д о в е д е н н я.* Розглянемо функцію $f(z) = Cz^k H^m\left(\frac{z}{b}\right)$. Використовуючи властивість функції $H$ (3.22), маємо

$$(b-z)^m f(qz) = (b-z)^m C q^k z^k H^m\left(\frac{qz}{b}\right) \overset{(3.22)}{=}$$

$$\overset{(3.22)}{=} (b-z)^m C q^k z^k \left(\frac{b}{b-z}\right)^m H^m\left(\frac{z}{b}\right) = af(z).$$

Теорема доведена.

□

**Теорема 3.1.13.** *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $a = b^m q^k$, де $k$ – додатне ціле. Тоді кожен голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.21) має вигляд $f(z) = Cz^k H^m(\frac{z}{b})$, де $C$ – стала.*

*Д о в е д е н н я.* Припустимо, що $f$ є голоморфним в $\mathbb{C}^*$ розв'язком (3.21). За теоремою 3.1.11,

$$f(z) = H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z), \tag{3.24}$$

де $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = \dfrac{a}{b^m}$. Перепишемо (3.24) у вигляді

$$g(z) = \frac{f(z)}{H^m\left(\frac{z}{b}\right)}. \tag{3.25}$$

Функції $f$ і $H$ – голоморфні в $\mathbb{C}^*$. Ми також знаємо, що $H^m$ має нулі в точках $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ кратності $m$.

Якщо $f$ має лише ті самі нулі, що і $H$, то $g$ не має нулів. Тоді $g \in \mathcal{L}_{qp}$ є голоморфною і за наслідком 2.1.9, $g(z) \equiv Cz^k$. В цьому випадку теорема доведена.

Припустимо, що $f$ має також нулі, відмінні від $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тоді $g$ має нулі. А тому, за властивістю $p$-локсодромної функції (див. теорему 2.1.7), $g$ також має полюси. Оскільки $f$ є голоморфним в $\mathbb{C}^*$ розв'язком, то $g$ може мати полюси лише у точках $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ кратності $l_n \leqslant m$.

Використаємо зображення $g \in \mathcal{L}_{qp}$ в кільці $A_q(R)$, а саме рівність (3.19). Кожне кільце $A_q(R)$ містить лише одну точку з послідовності $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Виберемо таке кільце $A_q(R)$, що містить полюси $d_1 = d_2 = \cdots = d_l = bq^0 = b$. Зауважимо що $l = l_0$, де $l_0$ – кратність полюса в точці $z = b$. Тоді можна переписати (3.24) у вигляді

$$f(z) = Cz^{\nu} \frac{\prod_{j=1}^{l} P\left(\frac{z}{c_j}\right)}{P^l\left(\frac{z}{b}\right)} H^m\left(\frac{z}{b}\right).$$

Оскільки $P\left(\frac{z}{b}\right)$ має нулі в точках $\{bq^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, а $H\left(\frac{z}{b}\right)$ має нулі лише в точках $\{bq^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то ми отримуємо протиріччя.

$\square$

Тепер розглянемо рівняння (3.21) у випадку $m < 0$.

**Теорема 3.1.14.** *Якщо $m$ – від'ємне ціле, то рівняння (3.21) не має голоморфних в $\mathbb{C}^*$ розв'язків.*

*Д о в е д е н н я.* Доведення схоже на доведення теореми 3.1.9. Розглянемо рівняння (3.21) із $m < 0$. Припустимо, що існує голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок $f$ рівняння (3.21). Тоді, за теоремою 3.1.11, цей розв'язок має вигляд $f(z) = H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z)$, де $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = \frac{a}{b^m}$. Тоді $g(z) = f(z)H^{-m}\left(\frac{z}{b}\right)$. Як ми бачимо, $g$ є голоморфною в $\mathbb{C}^*$. З огляду на наслідок 2.1.9, можна стверджувати, що $g(z) \equiv Cz^k$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $C$ – стала.

Але, з іншого боку, оскільки $m < 0$, то функція $f(z) = Cz^kH^m\left(\frac{z}{b}\right)$, де $C$ – стала, не буде голоморфною в $\mathbb{C}^*$, бо $f$ матиме полюси в точках $\{q^{-n}b\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Отримали протиріччя. Цим завершуємо доведення.

$\square$

## 3.2. Раціонально локсодромні мероморфні функції

Дослідивши прості випадки $p(z) = \dfrac{a}{z^m}$ та $p(z) = \dfrac{a}{(b-z)^m}$, перейдемо тепер до більш загального випадку.

Нехай $R$ – раціональна функція від $z$. Тоді $R$ можна подати у вигляді

$$R(z) = Cz^m \frac{(a_1 - z)(a_2 - z)\dots(a_k - z)}{(b_1 - z)(b_2 - z)\dots(b_l - z)}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{3.26}$$

де $a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2, \dots, b_l$ відмінні від 0 комплексні числа, не обов'язково різні, але такі, що $a_i \neq b_j$ для всіх $i, j$, а $C$ – стала.

Тепер розглянемо рівняння

$$f(qz) = R(z)f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{3.27}$$

Надалі, називатимемо розв'язки рівняння (3.27) раціонально-локсодромними функціями. Використовуючи результати попереднього розділу, ми можемо описати мероморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки (3.27).

**Теорема 3.2.1.** *Нехай $a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2, \dots, b_l$ – відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що $a_i \neq b_j$ для всіх $i, j$, а $C$ – стала, $m \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathcal{L}_{qp}$, де $p = C\frac{a_1 a_2 \dots a_k}{b_1 b_2 \dots b_l}$. Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція*

$$f(z) = \frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2})\dots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2})\dots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)} g(z)$$

*задовольняє рівняння (3.27).*

*Д о в е д е н н я.* З огляду на рівності (2.3), (3.22) і взявши до уваги вибір $p$, одержуємо

$$f(qz) = \frac{H(\frac{qz}{b_1})H(\frac{qz}{b_2})\dots H(\frac{qz}{b_l})}{H(\frac{qz}{a_1})H(\frac{qz}{a_2})\dots H(\frac{qz}{a_k})P^m(q(-1)^m z)} g(qz) \overset{(2.3),(3.22)}{=}$$

$$\overset{(2.3),(3.22)}{=} \frac{\frac{b_1}{b_1-z}H(\frac{z}{b_1})\frac{b_2}{b_2-z}H(\frac{z}{b_2})\dots\frac{b_l}{b_l-z}H(\frac{z}{b_l})}{\frac{a_1}{a_1-z}H(\frac{z}{a_1})\frac{a_2}{a_2-z}H(\frac{z}{a_2})\dots\frac{a_k}{a_k-z}H(\frac{z}{a_k})(-\frac{1}{(-1)^m z}P((-1)^m z))^m} pg(z) =$$

$$= Cz^m\frac{(a_1-z)(a_2-z)\dots(a_k-z)}{(b_1-z)(b_2-z)\dots(b_l-z)}\times$$

$$\times\frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2})\dots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2})\dots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)}g(z) =$$

$$= R(z)f(z),$$

що і слід було показати.

□

**Теорема 3.2.2.** *Нехай $a_1, a_2, \dots, a_k$ та $b_1, b_2, \dots, b_l$ – відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що $a_i \neq b_j$ для всіх $i, j$, $C$ – стала, $m \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathcal{L}_{qp}$, де $p = C\frac{a_1a_2\dots a_k}{b_1b_2\dots b_l}$. Тоді кожен мероморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.27) має вигляд*

$$f(z) = \frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2})\dots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2})\dots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)}g(z).$$

*Д о в е д е н н я.* Нехай $f$ є мероморфним в $\mathbb{C}^*$ розв'язком (3.27). Розглянемо функцію

$$g(z) = \frac{f(z)H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2})\dots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)}{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2})\dots H(\frac{z}{b_l})}. \tag{3.28}$$

Очевидно, що $g$ мероморфна в $\mathbb{C}^*$. Тепер розглянемо $g(qz)$,

$$g(qz) = \frac{f(qz)H(\frac{qz}{a_1})H(\frac{qz}{a_2})\dots H(\frac{qz}{a_k})P^m(q(-1)^m z)}{H(\frac{qz}{b_1})H(\frac{qz}{b_2})\dots H(\frac{qz}{b_l})} \overset{(3.27)}{=}$$

$$\overset{(3.27)}{=} R(z)f(z)\frac{H(\frac{qz}{a_1})H(\frac{qz}{a_2})\dots H(\frac{qz}{a_k})P^m(q(-1)^m z)}{H(\frac{qz}{b_1})H(\frac{qz}{b_2})\dots H(\frac{qz}{b_l})}.$$

Використовуючи (3.26) і (3.28), маємо

$$g(qz) = Cz^m\frac{(a_1-z)(a_2-z)\dots(a_k-z)}{(b_1-z)(b_2-z)\dots(b_l-z)}\times$$

$$\times\frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2})\dots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2})\dots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)}g(z)\times$$
$$\times\frac{H(\frac{qz}{a_1})H(\frac{qz}{a_2})\dots H(\frac{qz}{a_k})P^m(q(-1)^m z)}{H(\frac{qz}{b_1})H(\frac{qz}{b_2})\dots H(\frac{qz}{b_l})}.$$

Застосовуючи (2.3) і (3.22), можемо переписати $g(qz)$ наступним чином

$$g(qz) = Cz^m\frac{(a_1-z)(a_2-z)\dots(a_k-z)}{(b_1-z)(b_2-z)\dots(b_l-z)}\times$$

$$\times\frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2})\dots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2})\dots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)}g(z)\times$$
$$\times\frac{\frac{a_1}{a_1-z}H(\frac{z}{a_1})\frac{a_2}{a_2-z}H(\frac{z}{a_2})\dots\frac{a_k}{a_k-z}H(\frac{z}{a_k})(-\frac{1}{(-1)^m z}P((-1)^m z))^m}{\frac{b_1}{b_1-z}H(\frac{z}{b_1})\frac{b_2}{b_2-z}H(\frac{z}{b_2})\dots\frac{b_l}{b_l-z}H(\frac{z}{b_l})} =$$
$$= \frac{a_1a_2\dots a_k}{b_1b_2\dots b_l}\frac{(-1)^m}{(-1)^{m^2}}g(z).$$

Оскільки парність чисел $m$ та $m^2$ є однаковою, то враховуючи вибір $p$ (у твердженні теореми), з останньої рівності, отримуємо

$$g(qz) = C\frac{a_1a_2\dots a_k}{b_1b_2\dots b_l}g(z) = pg(z).$$

Таким чином, $g(qz) = pg(z)$ для всіх $z$, крім нулів функцій $P((-1)^m z))$, $H(\frac{z}{a_i}),\ H(\frac{z}{b_j})$. Це означає, що $g$ є $p$-локсодромною з мультиплікатором $q$. Теорема доведена.

□

Функція $g$, яка фігурує у теоремах 3.2.1 та 3.2.2 є $p$-локсодромною. А отже, з огляду на теорему 2.1.8, може бути вираженою через первинні функції Шотткі-Кляйна. Це дає можливість описати вигляд розв'язків рівняння (3.27), використовуючи лише функції $H$ та $P$. Для формулювання цього результату нам будуть потрібні такі зауваження і лема.

**Зауваження 3.2.3.** Рівність (2.3) можна переписати у такому вигляді

$$\forall z \in \mathbb{C}^*: \quad P\left(\frac{z}{q}\right) = -\frac{z}{q}P(z).$$

Справді, використовуючи (2.3), можемо записати $P(z) = -zP(qz)$. Покладемо $qz = w$. Тоді $P\left(\frac{w}{q}\right) = -\frac{w}{q}P(w)$.

**Лема 3.2.4.** *Нехай* $c \in \mathbb{C}^*$. *Тоді*

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \forall k \in \mathbb{Z}: \quad z^k P\left(\frac{z}{c}\right) = (-1)^k c^k q^{\frac{k(k+1)}{2}} P\left(\frac{z}{q^k c}\right).$$

*Д о в е д е н н я.* Спочатку розглянемо $k > 0$. Використовуючи зауваження 3.2.3, отримуємо

$$z^k P\left(\frac{z}{c}\right) = \frac{z}{c}P\left(\frac{z}{c}\right)z^{k-1}c = (-1)qP\left(\frac{z}{qc}\right)z^{k-1}c =$$

$$= \frac{z}{qc}P\left(\frac{z}{qc}\right)z^{k-2}c^2(-1)q^2 = (-1)qP\left(\frac{z}{q^2c}\right)z^{k-2}c^2(-1)q^2 =$$

$$= (-1)^2 z^{k-2}c^2 q q^2 P\left(\frac{z}{q^2c}\right) = \dots = (-1)^k z^{k-k}c^k q q^2 q^3 \dots q^k P\left(\frac{z}{q^k c}\right) =$$

$$= (-1)^k c^k q^{\frac{k(k+1)}{2}} P\left(\frac{z}{q^k c}\right).$$

Подібним чином для $k < 0$. Використовуючи формулу (2.3), маємо

$$z^k P\left(\frac{z}{c}\right) = \left(\frac{1}{z}\right)^{-k} P\left(\frac{z}{c}\right) = \frac{c}{z}P\left(\frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{-k-1}\frac{1}{c} =$$

$$= (-1)P\left(\frac{qz}{c}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{-k-1}\frac{1}{c} = (-1)\frac{c}{qz}P\left(\frac{qz}{c}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{-k-2}\frac{1}{c^2}q =$$

$$= (-1)^2 P\left(\frac{q^2 z}{c}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{-k-2}\frac{1}{c^2}q = \dots =$$

$$= (-1)^k P\left(\frac{q^{-k}z}{c}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{-k-(-k)}\frac{1}{c^{-k}}qq^2\dots q^{-k-1} =$$

$$= (-1)^k c^k q^{\frac{k(k+1)}{2}} P\left(\frac{z}{q^k c}\right).$$

Випадок $k = 0$ тривіальний. □

Тепер використаємо теорему 2.1.8 (про зображення $p$-локсодромних функцій). Нехай $c_1, c_2, ..., c_n$ і $v_1, v_2..., v_n$ є нулями і полюсами $p$-локсодромної функції в кільці $A_q(R)$, відповідно, межа кільця $A_q(R)$ не містить ні нулів, ні полюсів $g \in \mathcal{L}_{qp}$. Як ми знаємо з теореми 2.1.7, кількість нулів $p$-локсодромної функції дорівнює кількості її полюсів (з урахуванням їх кратностей) у кожному такому кільці $A_q(R)$. Тоді, за теоремою 2.1.8,

$$g(z) = Kz^\nu \frac{P(\frac{z}{c_1})P(\frac{z}{c_2}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{c_n})}{P(\frac{z}{v_1})P(\frac{z}{v_2}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{v_n})}, \tag{3.29}$$

де

$$\frac{c_1 c_2 \dots c_n}{v_1 v_2 \dots v_n} = \frac{p}{q^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \tag{3.30}$$

і $K$ – стала.

Застосовуючи лему 3.2.4 до зображення (3.29), отримаємо

$$g(z) = L \frac{P(\frac{z}{q^\nu c_1})P(\frac{z}{c_2}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{c_n})}{P(\frac{z}{v_1})P(\frac{z}{v_2}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{v_n})},$$

де

$$L = (-c_1)^\nu q^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} K.$$

Позначимо $u_1 = q^\nu c_1$, $u_2 = c_2, \dots, u_n = c_n$. Тепер перепишемо функцію $g$ наступним чином

$$g(z) = L \frac{P(\frac{z}{u_1})P(\frac{z}{u_2}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{u_n})}{P(\frac{z}{v_1})P(\frac{z}{v_2}) \cdot ... \cdot P(\frac{z}{v_n})}.$$

Використовуючи останнє зображення $p$-локсодромної функції $g$ із врахуванням співвідношення (3.30), ми можемо переформулювати теорему 3.2.2 у такому вигляді.

**Теорема 3.2.5.** *Нехай* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_l$ *– відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що* $a_i \neq b_j$ *для всіх* $i, j$, $C$ *– стала,* $m \in \mathbb{Z}$, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *та* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *– відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що*

$$C \prod_{j=1}^{k} a_j \prod_{j=1}^{n} v_j = \prod_{j=1}^{l} b_j \prod_{j=1}^{n} u_j,$$

$m \in \mathbb{Z}$. *Тоді кожен мероморфний в* $\mathbb{C}^*$ *розв'язок рівняння (3.27) має вигляд*

$$f(z) = \frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2}) \ldots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2}) \ldots H(\frac{z}{a_k})} \frac{P(\frac{z}{u_1})P(\frac{z}{u_2}) \cdot \ldots \cdot P(\frac{z}{u_n})}{P(\frac{z}{v_1})P(\frac{z}{v_2}) \cdot \ldots \cdot P(\frac{z}{v_n})P^m((-1)^m z)}.$$

## 3.3. Раціонально локсодромні голоморфні функції

Беручи до уваги доведені вище результати, ми можемо очікувати, що голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки рівняння (3.27) існуватимуть лише за умови, що $R(z)$ має наступний вигляд

$$R(z) = \frac{M(z)}{z^m(b_1 - z)(b_2 - z)\dots(b_l - z)},$$

де $b_1, b_2, \dots, b_l$ – відмінні від 0 комплексні числа, не обов'язково різні, $\deg M(z) = 0$ і $m \geqslant 0$.

За таких умов, рівняння (3.27) набуде вигляду

$$f(qz) = \frac{M}{z^m(b_1 - z)(b_2 - z)\dots(b_l - z)} f(z), \tag{3.31}$$

де $z \in \mathbb{C}^*$, $M = const$.

Ми отримали наступні теореми, які описують голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки (3.31).

**Теорема 3.3.1.** *Голоморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція*

$$f(z) = Cz^\nu \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right),$$

*де* $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c_1, c_2, \dots c_m$ *– відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, а* $C$ *– стала, задовольняє рівняння* (3.31) *з*

$$M = (-1)^m q^\nu \prod_{i=1}^{l} b_i \prod_{j=1}^{m} c_j.$$

*Д о в е д е н н я.* Справді, використовуючи (2.3) і (3.22), отримуємо

$$f(qz) = Cq^\nu z^\nu \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{qz}{b_i}\right) \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{qz}{c_j}\right) =$$

$$= Cq^\nu z^\nu \prod_{i=1}^{l} \frac{b_i}{b_i - z} H\left(\frac{z}{b_i}\right) \prod_{j=1}^{m} \left(-\frac{c_j}{z} P\left(\frac{z}{c_j}\right)\right) =$$

$$= \frac{M}{\prod\limits_{i=1}^{l}(b_i - z)} Cz^\nu \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) P\left(\frac{z}{c_j}\right) = \frac{M}{(b_1 - z)(b_2 - z)\dots(b_l - z)} f(z),$$

що і треба було показати.

$\square$

**Теорема 3.3.2.** *Кожен голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння* (3.31) *можна записати у вигляді* $f(z) = Cz^\nu \prod\limits_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) \prod\limits_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right)$, *де $C$ – стала, $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c_1, c_2, \dots c_m$ – відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі що* $M = (-1)^m q^\nu \prod\limits_{i=1}^{l} b_i \prod\limits_{j=1}^{m} c_j$.

*Д о в е д е н н я.* Нехай $f$ є голоморфним в $\mathbb{C}^*$ розв'язком (3.31). З теореми 3.2.2 ми знаємо, що мероморфні розв'язки (3.31) мають вигляд

$$f(z) = \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) P^m((-1)^m z) g(z), \tag{3.32}$$

де $g \in \mathcal{L}_{qp}$, з $p = \dfrac{M}{b_1 b_2 \dots b_l}$. З цієї множини розв'язків ми вибиратимемо голоморфні в $\mathbb{C}^*$ функції. Можливі наступні випадки.

1. Якщо $g$ голоморфна, то $f$ є добутком голоморфних функцій, тобто $f$ буде голоморфним в $\mathbb{C}^*$ розв'язком (3.31).

Зауважимо, що в даному випадку, за наслідком 2.1.9, $g(z) \equiv 0$ або існує $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ таке, що $p = \dfrac{M}{b_1 b_2 \dots b_l} = q^\nu$ і $g(z) = Cz^\nu$, де $C$ – стала. Іншими словами, $f$ матиме вигляд

$$f(z) = Cz^\nu P^m((-1)^m z) \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right),$$

причому в цьому випадку $M = q^\nu \prod\limits_{i=1}^{l} b_i = (-1)^m q^\nu \prod\limits_{i=1}^{l} b_i \prod\limits_{j=1}^{m} (-1)^m$, оскільки $(-1)^{m^2+m} = 1$.

2. Якщо $g$ мероморфна і $g$ має принаймні один полюс відмінний від нулів функцій $P((-1)^m z)$ та $H\left(\frac{z}{b_i}\right)$, то очевидно, що $f$ не буде голоморфною.

3. Нехай $g$ мероморфна і має принаймні один полюс $z_0$, який є нулем функції $H\left(\frac{z}{b_i}\right)$ і не є нулем функції $P((-1)^m z)$, тобто $z_0 \neq$ $\neq (-1)^m q^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ми маємо $H\left(\frac{z}{b_i}\right) = 0 \Leftrightarrow z = b_i q^{-k}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Оскільки $g$ є $p$-локсодромною, то $g$ також матиме полюси в точках $z = b_i q^k$, $k \in \mathbb{N}$. Для того щоб функція $f$ була голоморфною в точці $b_i q^k$, $k \in \mathbb{N}$, необхідно щоб ця точка була нулем функції $P((-1)^m z)$, тобто $\{b_i q^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{(-1)^m q^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Якщо $m$ – парне, то $b_i = q^{l_0}$, $l_0 \in \mathbb{Z}$, тоді $z_0 = q^{l_0+k}$, $l_0 \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, тобто є нулем функції $P(z)$, що суперечить припущенню. Аналогічно, якщо $m$ – непарне, то $b_i = -q^{l_0}$, $l_0 \in \mathbb{Z}$, тоді $z_0 = -q^{l_0+k}$, $l_0 \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, тобто є нулем функції $P(-z)$, що суперечить припущенню.

4. Нехай $g$ є мероморфною і має полюси лише в точках, які є нулями $P$, тобто $g$ має полюси лише в точках $z = (-1)^m q^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Через $l_k$ позначимо кратність кожного такого полюса $g$. Тоді необхідною умовою для отримання голоморфного розв'язку $f$ є умова $l_k \leqslant m$.

Використовуючи зображення (3.19) $p$-локсодромної функції і підставляючи його в (3.32), отримаємо

$$f(z) = Cz^\nu \prod_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) P^m((-1)^m z) \frac{P(\frac{z}{c_1})P(\frac{z}{c_2}) \cdot \ldots \cdot P(\frac{z}{c_n})}{P(\frac{z}{d_1})P(\frac{z}{d_2}) \cdot \ldots \cdot P(\frac{z}{d_n})},$$

де $C$ – стала, $c_1, c_2, ..., c_n$ та $d_1, d_2..., d_n$ – нулі та полюси $p$-локсодромної функції $g$ у кільці $A_q(R)$ відповідно (як ми вже знаємо з теореми 2.1.7, їх однакова кількість) і виконується умова

$$\frac{c_1c_2\dots c_n}{d_1d_2\dots d_n}=\frac{p}{q^\nu},\quad \nu\in\mathbb{Z}. \tag{3.33}$$

Кожне кільце $A_q(R)$ містить лише одну точку з послідовності $\{(-1)^m q^k\}$, $k\in\mathbb{Z}$. Виберемо таке кільце $A_q(R)$, що містить полюси $d_1=d_2=\dots=d_n=(-1)^m q^0=(-1)^m$. Зауважимо, що $n=l_0$, де $l_0$ – кратність полюса в точці $z=(-1)^m$. Тоді

$$f(z)=P^m\left(\frac{(-1)^m z}{1}\right)\prod_{i=1}^{l}H\left(\frac{z}{b_i}\right)Cz^\nu\frac{P\left(\frac{z}{c_1}\right)P\left(\frac{z}{c_2}\right)\cdot\ldots\cdot P\left(\frac{z}{c_{l_0}}\right)}{P^{l_0}\left(\frac{z}{(-1)^m}\right)},$$

де

$$\frac{c_1c_2\ldots c_{l_0}}{(-1)^{ml_0}}=\frac{p}{q^\nu},\quad \nu\in\mathbb{Z}. \tag{3.34}$$

Оскільки $l_0\leqslant m$, то $f$ – голоморфна. Позначивши $c_{l_0+1}=c_{l_0+2}=$ $=\ldots=c_m=(-1)^m$, отримуємо, що $f$ можна подати у вигляді

$$f(z)=Cz^\nu\prod_{i=1}^{l}H\left(\frac{z}{b_i}\right)\prod_{j=1}^{m}P\left(\frac{z}{c_j}\right),$$

де $C$ – стала. При цьому, враховуючи (3.34), матимемо, що

$$M=(-1)^m q^\nu\prod_{i=1}^{l}b_i\prod_{j=1}^{m}c_j.$$

Доведення завершено.

$\square$

**Висновки.**

Розділ 3 дисертації присвячений подальшому узагальненню локсодромних функцій.

Основним результатом, який ми отримали є те, що ми розв'язали функціональне рівняння

$$f(qz) = p(z)f(z),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1$$

у випадку, коли $p(z)$ є раціональною функцією. Ці розв'язки ми назвали раціонально-локсодромними функціями.

Таким чином, підрозділ 3.1 містить допоміжні результати, а у підрозділах 3.2 і 3.3 описано мероморфні та голоморфні раціонально-локсодромні функції.

Про апробацію результатів розділу 3 свідчать матеріали тез доповідей [80], [17]. Дослідження, проведені у розділі 3, опубліковані у низці статтей [19], [65], [66], [20].

# РОЗДІЛ 4
# УЗАГАЛЬНЕННЯ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В даному розділі зроблено спробу узагальнити теорію Вейєрштрасса еліптичних функцій. Введений клас функцій названо квазі-еліптичними функціями.

У підрозділі 4.1 показано нетривіальність цього класу функцій, наведено їх елементарні властивості. Також в підрозділі 4.1 для функцій з цього класу побудовано аналоги класичних $\wp$, $\sigma$ і $\zeta$-функцій Вейєрштрасса.

Альтернативне узагальнення еліптичних функцій – модуль-еліптичні функції і їх зв'язок з квазі-еліптичними міститься у підрозділі 4.2.

Результати розділу 4 наведені у [79], [64], [18], [67], [68], [81].

## 4.1. Квазі-еліптичні функції та їх властивості

### Означення та приклад квазі-еліптичної функції

**Означення 4.1.1.** Нехай $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, де $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $g$ називається **квазі-еліптичною**, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, $\ Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, такі що для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$g(u+\omega_1) = pg(u), \ \ g(u+\omega_2) = qg(u). \tag{4.1}$$

Через $\mathcal{QE}$ позначатимемо множину квазі-еліптичних функцій.

Нехай $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Якщо $f \in \mathcal{QE}$, то з означення 4.1.1 отримуємо

$$g(u+\omega) = p^m q^n g(u).$$

Очевидно, якщо $p = 1$ і $q = 1$ в означенні 4.1.1, ми отримуємо класичну еліптичну функцію. Якщо $p = 1$ або $q = 1$ в означенні 4.1.1, ми отримуємо $p$-еліптичну функцію. Якщо $p = q$ в означенні 4.1.1, ми отримуємо так звані подвійно $p$-еліптичні функції, які були розглянуті автором у роботі [79]. Розглянемо одразу більш загальний випадок.

**Зауваження 4.1.2.** Зауважимо, що є один особливий випадок, коли із означення 4.1.1 ми все ще отримуємо еліптичну функцію.

А саме, якщо $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, де $\alpha$, $\beta \in 2\pi\mathbb{Q}$. Тоді

$$f(u+l\omega_1) = f(u), \quad f(u+l\omega_2) = f(u),$$

де $l$ – найменший спільний знаменник для $\dfrac{\alpha}{2\pi}$ і $\dfrac{\beta}{2\pi}$.

Справді, якщо $\alpha = 2\pi\dfrac{a}{b}$, використовуючи означення 4.1.1, отримуємо

$$f(u+l\omega_1) = f(u+(l-1)\omega_1)e^{i2\pi\frac{a}{b}} = \cdots = f(u)e^{i2\pi\frac{al}{b}} = f(u).$$

Аналогічний результат отримаємо і для $\beta$.

**Зауваження 4.1.3.** Клас $\mathcal{QE}$ непорожній.

Наприклад, розглянемо функцію

$$f(u) = \sum_{\omega \neq 0} \frac{e^{im\alpha} e^{in\beta}}{(u-\omega)^3}, \quad \omega = m\omega_1 + n\omega_2, \;\; m, n \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Нехай $K$ – довільна компактна підмножина з $\mathbb{C}$. Оскільки ( [53], [10])

$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^3} < +\infty, \tag{4.3}$$

то ряд в правій частині (4.2) або принаймні його залишок, є рівномірно збіжний на множині $K$. А отже, його сума є мероморфною функцією на $K$. Таким чином, можна зробити висновок, що $f(u)$ мероморфна в $\mathbb{C}$ і для довільного $u \in \mathbb{C}$ виконується

$$f(u+\omega_1) = e^{i\alpha} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(m-1)\alpha} e^{in\beta}}{(u-(m-1)\omega_1 - n\omega_2)^3} = e^{i\alpha} f(u).$$

Аналогічно, для довільного $u \in \mathbb{C}$, ми маємо $f(u+\omega_2) = e^{i\beta} f(u)$.

### Властивості квазі-еліптичних функцій

Ми використовуємо тут поняття паралелограма періодів, наведене у розділі 1.

**Теорема 4.1.4.** *Кожна голоморфна квазі-еліптична функція є сталою.*

*Д о в е д е н н я.* Справді, якщо функція $f \in \mathcal{QE}$ не має полюсів, то $|f(u)| \leqslant C < \infty$ в паралелограмі періодів $\prod(u_0)$ [10]. За теоремою 1.1.1, для довільних значень $u$ отримуємо, що $|f(u)|$ набуває в усіх інших паралелограмах періодів тих самих значень, що і в паралелограмі $\prod(u_0)$. Тобто, для всіх $u \in \mathbb{C} : \ |f(u)| \leqslant C < \infty$. За теоремою Ліувілля, ціла функція, обмежена у всій комплексній площині, є сталою.

□

**Теорема 4.1.5.** *Нехай $f \in \mathcal{QE}$. Тоді кількість нулів функції $f$ дорівнює кількості її полюсів (з урахуванням кратності) в кожному паралелограмі періодів $\prod(u_0)$.*

*Д о в е д е н н я.* Припустимо, що межа паралелограма $\prod(u_0)$ не містить ні нулів, ні полюсів функції $f \in \mathcal{QE}$. Нехай $N$ - кількість нулів $f$, а $P$ кількість полюсів $f$ (кожен нуль і полюс рахуємо стільки разів, яка його кратність).

Згідно з принципом аргументу,

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \prod(u_0)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Обчислимо останній інтеграл

$$\int\limits_{\partial\prod(u_0)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz =$$

$$= \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int\limits_{u_0+\omega_1}^{u_0+\omega_1+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int\limits_{u_0+\omega_1+\omega_2}^{u_0+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int\limits_{u_0+\omega_2}^{u_0} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Зробимо заміни $u = t+\omega_1, \ \ u = t+\omega_2$, у другому і третьому інтегалах, відповідно. Тоді,

$$\int\limits_{\partial\prod(u_0)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz =$$

$$= \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_2} \frac{f'(t+\omega_1)}{f(t+\omega_1)}dt + \int\limits_{u_0+\omega_1}^{u_0} \frac{f'(t+\omega_2)}{f(t+\omega_2)}dt + \int\limits_{u_0+\omega_2}^{u_0} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Оскільки функція $f \in \mathcal{QE}$, то $f' \in \mathcal{QE}$ з тими ж $p$ і $q$, що і $f$. Використовуючи цей факт, і групуючи перший інтеграл з третім, а другий з четвертим, отримуємо, що

$$\int\limits_{\partial\prod(u_0)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0.$$

Отже $N = P$. Теорему доведено. $\square$

### Побудова узагальненої $\wp$-функції Вейєрштрасса

Нехай $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$. Розглянемо функцію

$$G_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq 0} \left( \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) e^{i(m\alpha+n\beta)}, \tag{4.4}$$

де $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$. З огляду на співвідношення (4.3), аналогічно як у випадку ряду 4.2, ми бачимо, що $G_{\alpha\beta}$ є мероморфною функцією в $\mathbb{C}$.

Очевидно, $G_{00}$ дорівнює $\wp$-функції Вейєрштрасса.

Розглядаємо випадок $\alpha \neq 0 \mod 2\pi$ і $\beta \neq 0 \mod 2\pi$, тобто $p \neq 1$ і $q \neq 1$.

**Теорема 4.1.6.** *Функція*

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta},$$

*де*

$$C_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e^{i\alpha} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\beta} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\beta} - 1}$$

*належить до класу $\mathcal{QE}$ з $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$.*

*Д о в е д е н н я.* Розглянемо функцію $G_{\alpha\beta}$. Покажемо, що існує єдина стала $C_{\alpha\beta}$ така, що функція $(G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta}) \in \mathcal{QE}$, тобто

$$G_{\alpha\beta}(u + \omega_1) + C_{\alpha\beta} = e^{i\alpha}(G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta}),$$

$$G_{\alpha\beta}(u + \omega_2) + C_{\alpha\beta} = e^{i\beta}(G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta}).$$

Тобто функція $G_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}$ повинна бути мультиплікативно $p$-періодичною за періодом $\omega_1$ і мультиплікативно $q$-періодичною за періодом $\omega_2$.

Розглянемо похідну функції $G_{\alpha\beta}$

$$G'_{\alpha\beta}(u) = -2 \sum_{\substack{\omega = m\omega_1 + n\omega_2 \\ m,n\in\mathbb{Z}}} \frac{e^{i(m\alpha+n\beta)}}{(u-\omega)^3}.$$

Тоді

$$G'_{\alpha\beta}(u+\omega_1) = -2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(m\alpha+n\beta)}}{(u+\omega_1 - m\omega_1 - n\omega_2)^3} =$$

$$= -2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(m\alpha+n\beta)}}{(u-(m-1)\omega_1 - n\omega_2)^3} =$$

$$= -2e^{i\alpha} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i((m-1)\alpha+n\beta)}}{(u-(m-1)\omega_1 - n\omega_2)^3} = e^{i\alpha} G'_{\alpha\beta}(u).$$

Таким чином, ми отримали

$$G'_{\alpha\beta}(u+\omega_1) - e^{i\alpha} G'_{\alpha\beta}(u) = 0. \tag{4.5}$$

Зауважимо, що функція $(G_{\alpha\beta} + C)$ задовольняє рівність (4.5) для всіх $C \in \mathbb{C}$. Покладемо

$$C = C_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e^{i\alpha} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)}{e^{i\alpha}-1}. \tag{4.6}$$

Інтегруючи рівність (4.5), маємо

$$G_{\alpha\beta}(u+\omega_1) + C_{\alpha\beta} - e^{i\alpha}\big(G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta}\big) = A, \tag{4.7}$$

де $A$ – стала. Покладемо в (4.7) $u = -\frac{\omega_1}{2}$, тоді

$$G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e^{i\alpha} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + (1-e^{i\alpha})C_{\alpha\beta} = A.$$

Беручи до уваги вибір сталої $C_{\alpha\beta}$, яка визначена формулою (4.6), робимо висновок, що $A = 0$. Отже,

$$G_{\alpha\beta}(u+\omega_1) + C_{\alpha\beta} = e^{i\alpha}\big(G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta}\big), \tag{4.8}$$

тобто, ми показали, що $\big(G_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta}\big)$ є мультиплікативно $p$-періодичною за періодом $\omega_1$.

Залишилося довести єдиність сталої $C_{\alpha\beta}$. Припустимо, що існує стала $C$, відмінна від $C_{\alpha\beta}$ така, що функція $\big(G_{\alpha\beta}+C\big)$ також є мультиплікативно $p$-періодичною за періодом $\omega_1$. Тоді, ми матимемо

$$G_{\alpha\beta}(u+\omega_1)+C=e^{i\alpha}\big(G_{\alpha\beta}(u)+C\big).$$

Віднімаючи від останньої рівності рівність (4.8), отримуємо

$$C-C_{\alpha\beta}=e^{i\alpha}\big(C-C_{\alpha\beta}\big).$$

Оскільки $\alpha\neq 0 \mod 2\pi$, то $C=C_{\alpha\beta}$.

Аналогічно, для періоду $\omega_2$, маємо

$$G_{\alpha\beta}(u+\omega_2)+C_{\alpha\beta}=e^{i\beta}\big(G_{\alpha\beta}(u)+C_{\alpha\beta}\big)+B, \tag{4.9}$$

де $B$ – деяка стала. Знайдемо $B$. Розглянемо $G_{\alpha\beta}(u+\omega_1+\omega_2)$ і використаємо послідовно рівності (4.8) та (4.9) в різному порядку. В першому випадку отримуємо

$$G_{\alpha\beta}(u+\omega_1+\omega_2)+C_{\alpha\beta}\overset{(4.9)}{=}e^{i\beta}(G_{\alpha\beta}(u+\omega_1)+C_{\alpha\beta})+B\overset{(4.8)}{=}$$

$$=e^{i\beta}(e^{i\alpha}(G_{\alpha\beta}(u)+C_{\alpha\beta}))+B=e^{i(\alpha+\beta)}(G_{\alpha\beta}(u)+C_{\alpha\beta})+B.$$

А в другому, маємо

$$G_{\alpha\beta}(u+\omega_1+\omega_2)+C_{\alpha\beta}\overset{(4.8)}{=}e^{i\alpha}(G_{\alpha\beta}(u+\omega_2)+C_{\alpha\beta})\overset{(4.9)}{=}$$

$$=e^{i\alpha}(e^{i\beta}(G_{\alpha\beta}(u)+C_{\alpha\beta})+B)=e^{i(\alpha+\beta)}(G_{\alpha\beta}(u)+C_{\alpha\beta})+Be^{i\alpha}.$$

Прирівнюючи праві частини цих рівностей, бачимо що $B=Be^{i\alpha}$. Позаяк $\alpha\neq 0 \mod 2\pi$, то з останньої рівності випливає, що $B=0$. Звідси,

$$G_{\alpha\beta}(u+\omega_2)+C_{\alpha\beta}=e^{i\beta}\big(G_{\alpha\beta}(u)+C_{\alpha\beta}\big).$$

Отже, функція $G_{\alpha\beta}$ є мультиплікативно $p$-періодичною за періодом $\omega_1$ і мультиплікативно $q$-періодичною за періодом $\omega_2$.

Легко бачити, що сталу $C_{\alpha\beta}$ можна також виразити у вигляді

$$C_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\beta} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\beta} - 1}.$$

$\square$

**Означення 4.1.7.** Нехай $\alpha \neq 0 \mod 2\pi$, $\beta \neq 0 \mod 2\pi$. Функція

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta} = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left( \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) e^{i(m\alpha + n\beta)} + C_{\alpha\beta},$$

де

$$C_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e^{i\alpha} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\beta} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\beta} - 1}$$

називається **узагальненою $\wp$-функцією Вейєрштрасса.**

**Зауваження 4.1.8.** Для повноти, зауважимо, що у випадку $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$, ми визначимо $C_{00} = 0$. Тоді $\wp_{00} = \wp$.

### Узагальнені $\zeta$ та $\sigma$-функції Вейєрштрасса

Розглянемо функцію

$$\zeta_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega \neq 0} \left( \frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right) e^{i(m\alpha+n\beta)},$$

де $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2,\ m^2+n^2 \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Диференціюючи $\zeta_{\alpha\beta}$, бачимо, що $G_{\alpha\beta}(u) = -\zeta'_{\alpha\beta}(u)$. Звідси,

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = -\zeta'_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta}.$$

Остання рівність є аналогом рівності (1.1) для класичних еліптичних функцій.

Позначимо

$$\chi_{mn}(u) = \left( \frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right), \quad m^2+n^2 \neq 0,$$

та

$$\chi_{00}(u) = \frac{1}{u}.$$

Тоді можемо переписати функцію $\zeta_{\alpha\beta}$ у вигляді

$$\zeta_{\alpha\beta}(u) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{i(m\alpha+n\beta)} \chi_{mn}(u). \tag{4.10}$$

Варто зауважити, що $\zeta_{00}$ співпадає з класичною $\zeta$-функцією Вейєрштрасса.

Через $A^*$ позначимо комплексну площину $\mathbb{C}$ з радіальними розрізами від $\omega$ до $\infty$. Інтегруючи $\chi_{mn}$ та $\chi_{00}$ вздовж довільного шляху в $A^*$ який з'єднує точки 0 і $u$, отримуємо

$$\int_0^u \chi_{mn}(t)dt = \log\left(1 - \frac{u}{\omega}\right) + \frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}, \quad m^2+n^2 \neq 0 \tag{4.11}$$

та

$$\int\limits_0^u \chi_{00}(t)dt = \log u. \tag{4.12}$$

Розглянемо цілі функції

$$\sigma_{mn}(u) = \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}}, \quad m^2 + n^2 \neq 0,$$

і покладемо

$$\sigma_{00}(u) = u.$$

Використовуючи ці функції, перепишемо (4.11) у вигляді

$$\int\limits_0^u \chi_{mn}(t)dt = \log \sigma_{mn}(u), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Диференціюючи останню рівність, і використовуючи означення $\chi_{00}$ та $\sigma_{00}$, маємо

$$\forall\, m, n \in \mathbb{Z}: \quad \chi_{mn}(u) = \frac{\sigma'_{mn}(u)}{\sigma_{mn}(u)}.$$

З огляду на останнє зображення $\chi_{mn}$, перепишемо (4.10) наступним чином

$$\zeta_{\alpha\beta}(u) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{i(m\alpha + n\beta)} \frac{\sigma'_{mn}(u)}{\sigma_{mn}(u)}.$$

Немає жодних сумнівів, що останнє співвідношення є аналогом формули (1.2). Так само, маємо,

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = C_{\alpha\beta} + \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{i(m\alpha + n\beta)} \frac{(\sigma'_{mn}(u))^2 - \sigma''_{mn}(u)\sigma_{mn}(u)}{\sigma^2_{mn}(u)}.$$

Ця рівність також є аналогом відомої рівності (1.3).

Варто зазначити, що якщо розглядати добуток $\prod\limits_{m,n \in \mathbb{Z}} \sigma_{mn}(u)$, то отримаємо класичну $\sigma$-функцію Вейєрштрасса.

## Зв'язок між
## $p$-локсодромними та квазі-еліптичними функціями

Нехай $a_1 = e^{2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$, $a_2 = e^{2\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}}$ і $f_1 \in \mathcal{L}_{a_1 q}$, $f_2 \in \mathcal{L}_{a_2 p}$. Іншими словами,

$$f_1(a_1 z) = f_1(e^{2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}} z) = q f_1(z), \tag{4.13}$$

$$f_2(a_2 z) = f_2(e^{2\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}} z) = p f_2(z). \tag{4.14}$$

Визначимо

$$g(u) := f_1(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}) f_2(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_2}}).$$

Тоді $g \in \mathcal{QE}$. Справді,

$$g(u+\omega_1) = f_1\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) f_2\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_2}} e^{2\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}}\right) \overset{(4.14)}{=} f_1\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) f_2\left(a_2 e^{2\pi i \frac{u}{\omega_2}}\right) =$$

$$= p f_1(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}) f_2(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_2}}) = p g(u),$$

і

$$g(u+\omega_2) = f_1\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}} e^{2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}\right) f_2\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_2}}\right) \overset{(4.13)}{=} f_1\left(a_1 e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) f_2\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_2}}\right) =$$

$$= q f_1(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}) f_2(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_2}}) = q g(u).$$

Навпаки, нехай $g \in \mathcal{QE}$, $p = 1$, $q \neq 1$, тобто

$$g(u+\omega_1) = g(u), \quad g(u+\omega_2) = q g(u).$$

Позначимо

$$f(z) := g\left(\frac{\omega_1}{2i\pi} \log z\right).$$

Функція $f$ є коректно визначеною, оскільки $g$ є періодичною з періодом $\omega_1$, а тому заміна $\log z$ на $\log z + 2\pi i k$ не змінює значення функції $g$ в правій частині останньої рівності. Іншими словами, ми маємо композицію багатозначного і однозначного відображень, яка є однозначною функцією. Тоді, якщо ми покладемо $a = e^{2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$, $Im \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, то отримаємо

$$f(az) = g\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\log(az)\right) = g\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2i\pi}\log z\right) =$$
$$= qg\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\log z\right) = qf(z).$$

Отже, $f \in \mathcal{L}_{aq}$. Випадок $p \neq 1$, $q = 1$ подібний. Покладемо

$$f(z) := g\left(\frac{\omega_2}{2i\pi}\log z\right)$$

і $a = e^{2\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}}$. Тоді $f \in \mathcal{L}_{ap}$. Дійсно,

$$f(az) = g\left(\frac{\omega_2}{2i\pi}\log(az)\right) = g\left(\omega_1 + \frac{\omega_2}{2i\pi}\log z\right) =$$
$$= pg\left(\frac{\omega_2}{2i\pi}\log z\right) = pf(z).$$

У випадку $p \neq 1$, $q \neq 1$ функції $g\left(\frac{\omega_k}{2i\pi}\log z\right)$ багатозначні, $k = 1, 2$.

## Диференціальне рівняння для узагальненої $\wp$-функції Вейєрштрасса

Перейдемо тепер до виведення диференціального рівняння для узагальненої $\wp$-функції Вейєрштрасса.

Відомо [53], що в достатньо малому околі точки $u = 0$

$$\frac{1}{(u-\omega)^2} = -\left(\frac{1}{u-\omega}\right)' =$$

$$= -\left(-\frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{u}{\omega}\right)^k\right)' = \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ku^{k-1}}{\omega^k},$$

де $\omega = m\omega_1 + n\omega_2,\ \ m,n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Тоді,

$$\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{2u}{\omega^3} + \frac{3u^2}{\omega^4} + \frac{4u^3}{\omega^5} + \cdots = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{ku^{k-1}}{\omega^{k+1}},$$

де $\omega = m\omega_1 + n\omega_2,\ \ m,n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Звідси, отримуємо, що в околі точки $u = 0$ функція $\wp_{\alpha\beta}(u)$ має вигляд

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^2} + C_{\alpha\beta} + \sum_{\omega\neq 0}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{ku^{k-1}}{\omega^{k+1}}e^{i(m\alpha+n\beta)}.$$

Також можна записати останній вираз у такій формі

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^2} + C_{\alpha\beta} + \sum_{k=2}^{+\infty}ku^{k-1}\sum_{\omega\neq 0}\frac{e^{i(m\alpha+n\beta)}}{\omega^{k+1}}.$$

Для скорочення записів, позначимо

$$A_k = A_k(\alpha,\beta) = \sum_{\omega\neq 0}\frac{e^{i(m\alpha+n\beta)}}{\omega^{k+1}}, \quad k = 2,3,\ldots$$

З врахуванням цих позначень, перепишемо $\wp_{\alpha\beta}$ наступним чином

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^2} + C_{\alpha\beta} + \sum_{k=2}^{+\infty}A_k ku^{k-1}. \tag{4.15}$$

Тоді,

$$\wp'_{\alpha\beta}(u) = -\frac{2}{u^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} A_k k(k-1)u^{k-2},$$

і

$$\wp'^2_{\alpha\beta}(u) = \frac{4}{u^6} - \frac{4}{u^6}\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k(k-1)u^{k-2} + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k(k-1)u^{k-2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{u^6} - \frac{8A_2}{u^3} - \frac{24A_3}{u^2} - \frac{48A_4}{u} - \frac{4}{u^3}\sum_{k=5}^{+\infty} A_k k(k-1)u^{k-2} +$$

$$+ \left(\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k(k-1)u^{k-2}\right)^2.$$

Також нам потрібні розвинення $\wp^2_{\alpha\beta}(u)$ та $\wp^3_{\alpha\beta}(u)$. З рівності (4.15) отримуємо

$$\wp^2_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^4} + C^2_{\alpha\beta} + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k u^{k-1}\right)^2 +$$

$$+\frac{2C_{\alpha\beta}}{u^2} + \frac{2}{u^2}\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k u^{k-1} + 2C_{\alpha\beta}\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k u^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{u^4} + \frac{2C_{\alpha\beta}}{u^2} + \frac{4A_2}{u} + C^2_{\alpha\beta} + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k u^{k-1}\right)^2 +$$

$$+\frac{2}{u^2}\sum_{k=3}^{+\infty} A_k k u^{k-1} + 2C_{\alpha\beta}\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k u^{k-1}.$$

Подібно, для $\wp^3_{\alpha\beta}$ маємо

$$\wp^3_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^6} + \frac{3C_{\alpha\beta}}{u^4} + \frac{6A_2}{u^3} + (9A_3 + 3C^2_{\alpha\beta})\frac{1}{u^2} +$$

$$+(12A_4 + 12A_2C_{\alpha\beta})\frac{1}{u} + \frac{3}{u^4}\sum_{k=5}^{+\infty} A_k k u^{k-1} +$$

$$+(3C_{\alpha\beta} + \frac{1}{u^2})\left(\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k u^{k-1}\right)^2 + C^3_{\alpha\beta} + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} A_k k u^{k-1}\right)^3 +$$

$$+(3C_{\alpha\beta}^2+\frac{4A_2}{u})\sum_{k=2}^{+\infty}A_kku^{k-1}+\frac{6C_{\alpha\beta}}{u^2}\sum_{k=3}^{+\infty}A_kku^{k-1}+$$

$$+\frac{2}{u^2}\sum_{k=2}^{+\infty}A_kku^{k-1}\sum_{k=3}^{+\infty}A_kku^{k-1}.$$

З огляду на ці розвинення, можемо записати

$$\wp_{\alpha\beta}'^2(u)-4\wp_{\alpha\beta}^3(u)+12C_{\alpha\beta}\wp_{\alpha\beta}^2(u)-16A_2\wp_{\alpha\beta}'(u)+$$

$$+(60A_3+12C_{\alpha\beta}^2-24C_{\alpha\beta})\wp_{\alpha\beta}(u)=$$

$$=(48A_2-96A_4-48A_2C_{\alpha\beta})\frac{1}{u}+H(u),$$

де $H$ – ціла функція вигляду

$$H(u)=2A_2(1-16A_2)-140A_5+8C_{\alpha\beta}^3-24C_{\alpha\beta}^2+60A_3C_{\alpha\beta}+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\{(1-16A_2)A_{k+2}(k+2)(k+1)-4A_{k+5}(k+7)(k+5)\}u^k-$$

$$-4\left(\sum_{k=1}^{+\infty}A_{k+1}(k+1)u^k\right)^3-\frac{4}{u^2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}A_{k+1}(k+1)u^k\right)^2+$$

$$+\left(60A_3-\frac{16A_2}{u}-8\sum_{k=0}^{+\infty}A_{k+3}(k+3)u^k-4C_{\alpha\beta}^3+36C_{\alpha\beta}^2-24C_{\alpha\beta}^2\right)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{+\infty}A_{k+1}(k+1)u^k.$$

Отже, узагальнена $\wp$-функція Вейєрштрасса $\wp_{\alpha\beta}$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\wp_{\alpha\beta}'^2(u)=4\wp_{\alpha\beta}^3(u)-12C_{\alpha\beta}\wp_{\alpha\beta}^2(u)+16A_2\wp_{\alpha\beta}'(u)-$$

$$-(60A_3+12C_{\alpha\beta}^2-24C_{\alpha\beta})\wp_{\alpha\beta}(u)+$$

$$+(48A_2-96A_4-48A_2C_{\alpha\beta})\frac{1}{u}+H(u), \tag{4.16}$$

де $H$ – ціла функція, задана рівністю (4.1).

## Зв'язок між диференціальними рівняннями для $\wp_{\alpha\beta}$ та $\wp$

Розглянемо випадок $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$. Оскільки $C_{00} = 0$, $A_{2k}(0,0) = \sum\limits_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{2k+1}} = 0$ для $k \in \mathbb{N}$, і $A_3(0,0) = \dfrac{g_2}{60}$, тоді рівняння (4.16) набуде вигляду

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) + H(u), \tag{4.17}$$

чи

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) + g_2\wp(u) = H(u), \tag{4.18}$$

Функція у лівій частині рівності (4.18) є еліптичною. Позаяк $H$ є голоморфною функцією, то за теоремою 4.1.4, $H$ є сталою. Отже, $H(u) = H(0)$ для всіх $u$. Покладемо $u = 0$ в співвідношення (4.1), отримуємо $H(0) = -140A_5 = -g_3$. Таким чином, можемо записати рівняння (4.17) у вигляді

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3.$$

А останнє рівняння є класичним рівнянням для $\wp$-функції Вейєрштрасса. Отже, як бачимо, диференціальне рівняння для $\wp_{\alpha\beta}$ є узагальненням диференціального рівняння для $\wp$-функції Вейєрштрасса, тобто відомого класичного випадку.

## 4.2. Модуль-еліптичні функції

**Означення 4.2.1.** Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $f$ називається **модуль-еліптичною**, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, такі що $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ і для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$|f(u+\omega_1)| = |f(u)|, \;\; |f(u+\omega_2)| = |f(u)|.$$

Це означення було введене ще А. Кондратюком [58]. Клас модуль-еліптичних функцій позначатимемо символом $|\mathcal{E}|$.

Множину квазі-еліптичних функцій з $p = e^{i\alpha}, \;\; q = e^{i\beta}$ тепер позначатимемо $\mathcal{QE}_{\alpha\beta}$. Тобто, якщо $g \in \mathcal{QE}_{\alpha\beta}$, то для всіх $u \in \mathbb{C}$

$$g(u+\omega_1) = e^{i\alpha} g(u), \;\; g(u+\omega_2) = e^{i\beta} g(u). \tag{4.19}$$

Має місце наступна теорема про зв'язок між класами квазі-еліптичних та модуль-еліптичних функцій.

**Теорема 4.2.2.** $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}} \mathcal{QE}_{\alpha\beta} = |\mathcal{E}|.$

*Д о в е д е н н я.* Нехай $f \in \mathcal{QE}_{\alpha\beta}$. Тоді, з рівності (4.19), маємо

$$|f(u+\omega_1)| = |e^{i\alpha} f(u)| = |f(u)|,$$

$$|f(u+\omega_2)| = |e^{i\beta} f(u)| = |f(u)|.$$

Отже, $f \in |\mathcal{E}|$.

Тепер, навпаки, нехай $f \in |\mathcal{E}|$. Іншими словами, для всіх $u \in \mathbb{C}$ є правильними рівності

$$|f(u+\omega_1)| = |f(u)|, \;\; |f(u+\omega_2)| = |f(u)|.$$

Розглянемо першу з них

$$|f(u+\omega_1)| = |f(u)|, \;\; u \in \mathbb{C}. \tag{4.20}$$

Якщо $f(u) \neq 0$ і $f(u) \neq \infty$, ми можемо поділити (4.20) на $|f(u)|$,

$$\left|\frac{f(u+\omega_1)}{f(u)}\right| = 1. \tag{4.21}$$

Позначимо

$$g(u) = \frac{f(u+\omega_1)}{f(u)}. \tag{4.22}$$

Функція $g$ – мероморфна в $\mathbb{C}$. Із рівності (4.22) та означення 4.2.1 випливає, що функція $g$ – голоморфна в $\mathbb{C}$ за винятком множини нулів і полюсів функції $f$. Оскільки функція $g$ є обмеженою, ці точки є усувними, і з рівності (4.21) маємо

$$\forall u \in \mathbb{C}: \quad |g(u)| = 1.$$

За теоремою Ліувілля, функція $g$ є сталою. Тоді, з останньої рівності випливає, що існує $\alpha \in \mathbb{R}$, таке, що $g(u) = e^{i\alpha}$. Це означає

$$\forall u \in \mathbb{C}: \quad f(u+\omega_1) = e^{i\alpha} f(u).$$

Подібним чином, як вище, можна показати, що існує $\beta \in \mathbb{R}$ таке, що

$$\forall u \in \mathbb{C}: \quad f(u+\omega_2) = e^{i\beta} f(u).$$

Звідси, $f \in \mathcal{QE}_{\alpha\beta}$, а, отже, $f$ належить $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}} \mathcal{QE}_{\alpha\beta}$. $\square$

**Висновки.**

Основними об'єктами, які вивчаються у розділі 4 є квазі-еліптичні та модуль-еліптичні функції.

В підрозділі 4.1 висвітлено основні аспекти теорії квазі-еліптичних функцій, зокрема, показано, що квазі-еліптичні функції, насправді, є узагальненням еліптичних, доведено теореми про кількість нулів та полюсів квазі-еліптичної функції, про вигляд голоморфної квазі-еліптичної функції, побудовано аналоги відомих $\wp$, $\sigma$ та $\zeta$-функцій Вейєрштрасса в теорії квазі-еліптичних функцій.

У підрозділі 4.2 запропоновано альтернативне узагальнення еліптичних функцій – так звані модуль-еліптичні функції і доведено теорему про зв'язок між класами квазі-еліптичних та модуль-еліптичних функцій.

Результати цього розділу опубліковані в статтях [79], [67], [68] і тезах доповідей [64], [18], [81].

# ВИСНОВКИ

У розділі 1 проведено огляд літератури за тематикою дисертації, а також подано огляд основних отриманих результатів.

Завдання, що розв'язані в розділі 2 дисертації

- знайдено та описано всі мероморфні розв'язки функціонального рівняння $f(qz) = pf(z),\ q,\, p \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1$, які ми називаємо $p$-локсодромними функціями;
- описано найпростіші властивості $p$-локсодромних функцій;
- доведено критерій $p$-локсодромності;
- отримано зображення голоморфної $p$-локсодромної функції;
- доведено теорему про співвідношення між кількостями нулів та полюсів $p$-локсодромної функції;
- досліджено розташування нулів та полюсів $p$-локсодромної функції та показано, що нулі та полюси $p$-локсодромної функції у випадку недодатного $q$ лежать на логарифмічній спіралі, отримано зображення цієї логарифмічної спіралі;
- доведено Жюліа винятковість $p$-локсодромних функцій;
- зроблено порівняльний аналіз та окреслено основні відмінності між класичними локсодромними та $p$-локсодромними функціями;
- встановлено зв'язок між $p$-локсодромними та модуль-локсодромними функціями, а також між $p$-локсодромними та $p$-еліптичними функціями.

Основним результатом розділу 3 є те, що автором знайдено і описано всі мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння $f(qz) = R(z)f(z),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1$, де $R$ – раціональна функція.

Розділ 4 присвячений узагальненню теорії еліптичних функцій К. Вейєрштрасса. В цьому розділі:

- введено клас квазі-еліптичних функцій;
- показано нетривіальність класу квазі-еліптичних функцій;
- для функцій з цього класу отримано аналоги деяких класичних теорем теорії еліптичних функцій;
- побудовано квазі-еліптичну функцію Вейєрштрасса – $\wp_{\alpha\beta}$, яка є безпосереднім узагальненням класичного випадку;
- знайдено аналоги $\zeta$ та $\sigma$-функцій Вейєрштрасса для класу квазі-еліптичних функцій;
- показано зв'язок та співвідношення між узагальненими функціями Вейєрштрасса $\wp_{\alpha\beta}$, $\zeta_{\alpha\beta}$ та $\sigma_{mn}$;
- встановлено зв'язок між квазі-еліптичними та $p$-локсодромними функціями, а також між квазі-еліптичними та модуль-еліптичними функціями, які є ще одним альтернативним узагальненням еліптичних функцій.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Абрамовиц, М., Стиган, И.: Справочник по специальним функциям. Наука, Москва (1979).
2. Ахиезер, Н. И.: Элементы теории эллиптических функций (2-е изд.). Наука, Москва (1970).
3. Барабаш, Г., Холявка, Я.: Наближення модулярних інваріантів, періодів та значень двох еліптичних функцій Якобі. Carpathian Math. Publ. **6** (2), 191–195 (2014). doi:10.15330/cmp.6.2.191-195
4. Бейтмен, Г., Эрдейи, А.: Высшие трансцендентные функции. Том 3. Эллиптические и автоморфнные функции. Функции Ляме и Матье. Наука, Москва (1967).
5. Бенч, О., Бенч-Шокало, О., Троян, В.: Визначні постаті Тернопілля: біографічний збірник. Вид-во "Дніпро" (2003).
6. Бобылев, Ю., Кузелев, М.: Нелинейные явления при электромагнитных взаимодействиях электронных пучков с плазмой. Физматлит, Москва (2009).
7. Бухгольц, Н.: Основной курс теоретической механики. Часть 2. Динамика системы материальных точек. Изд. 4. Наука, Москва (1966).
8. Вилейтнер, Г.: История математики от Декарта до середины XIX столетия. Пер. с нем. под ред. Юшкевича, А. П. М. Физматлит, Москва (1960).
9. Ворович, И. И.: Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд на механику Ньютона и её развитие. Ч. 2. Изд. 2. Физматлит, Москва (2010).

10. Гурвиц, А., Курант, Р. Теория функций. Пер. М. А. Евграфова. Наука, Москва (1968).
11. Гурса, Э.: Курс математического анализа. Том 2. Часть 1. Теория аналитических функций. Пер. с франц. Изд. 2. Государственное технико-теоретическое издательство. М.-Л. (1933).
12. Журавский, А. М.: Справочник по эллиптическим функциям. АН СССР, М.-Л. (1941).
13. Киселев, О. М.: Зоопарк чудовищ или знакомство со специальными функциями. БашГУ, Уфа (2000).
14. Клейн, Ф.: Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I. Пер. с нем. под ред. Б. Лившица, А. Лопшица, Ю. Рабиновича, Л. Тумермана. ГОНТИ, М.-Л. (1937).
15. Ковалевская, С.: Научные работы. АН СССР, Москва (1948).
16. Колмогоров, А. Н., Юшкевич, А. П.: Математика XIX века: Геометрия. Теория аналитических функций. Наука, Москва (1981).
17. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Раціонально локсодромні мероморфні функції. Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": с. 99–101. смт. Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.
18. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Квазі-еліптичні функції. Тези доповідей XII Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз": с. 9–10. с. Колочава, 10–23 липня 2017 р.
19. Луківська, Дз. В.: Деякі голоморфні узагальнення локсодромних функцій. Укр. мат. журн. **69** № 9, 1284–1288 (2017).
(Lukivs'ka, Dz. V.: Some Holomorphic Generalizations of Loxodromic Functions. Ukr. Math. J. **69** No. 9, 1490 – 1495 (2018). doi.org/10.1007/s11253-018-1449-4)

20. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Про раціонально локсодромні голоморфні функції. Укр. мат. журн. **69** № 11, 1505–1514 (2017).
21. Маркушевич, А.: Замечательные синусы. Введение в теорию эллиптических функций. Изд. 2. Наука, Москва (1974).
22. Маркушевич, А.: Теория аналитических функций. (том 2): Дальнейшее построение теории. Наука, Москва (1968).
23. Метьюз, Дж., Уокер, Р.: Математические методы физики. Атомиздат, Москва (1970).
24. Морс, Ф. М., Фешбах, Г. Методы теоретической физики. Том 1. Издательство иностранной литературы, Москва (1958).
25. Мильо, О., Холявка, Я.: Сумісні наближення еліптичних функцій Вейєрштрасса та Якобі. Visn. L'viv. Univ., Ser. Series Appl. Math. and Informatics. Issue **22**, 85-91 (2014).
26. Мильо, О., Холявка, Я.: Сумісні наближення інваріантів, періодів та значень двох еліптичних функцій Вейєрштрасса. Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **80**, 107–111 (2015).
27. Привалов, И. И.: Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд. 13-е. Наука, Москва (1984).
28. Тихомандрицкий, М.: Теория эллиптических интегралов и эллиптических функций. Харьков (1895).
29. Шимони, К.: Теоретическая электротехника. Мир, Москва (1964).
30. Шимура, Г.: Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. Мир, Москва (1973).
31. Янке, Е., Эмде, Ф., Леш, Ф.: Специальные функции (формулы, графики, таблицы). Наука, Москва (1964).
32. Alexander, J.: Loxodromes: A Rhumb Way to Go. Mathematics Magazine. **77** (5), 349-356, (2004).

33. Bell, W. W.: Special Functions for Scientists and Engineers. Van Nostrand (1968).
34. Bowman, F.: Introduction to Elliptic Functions, with Applications. Dover, New York (1961).
35. Cayley, A.: An Elementary Treatise on Elliptic Functions. 2nd ed. London (1961).
36. Carathéodory, C., Landau, E.: Beiträge zur Konvergenz von Functionenfolgen. Sitzungsber. Kon. Preuss. Akad. Wiss, 587-613 (1911).
37. Chandrasekharan, K.: Elliptic functions. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1985).
38. Chen, Y., Yan, Zh.: The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations. Chaos, Solitons and Fractals. **29**, 948-964 (2006).
39. Crowdy, D. G., Marshall, J.: Computing the Schottky-Klein Prime Function on the Schottky Double of Planar Domains. Computational Methods and Function Theory. **7** (1), 293-308 (2007).
40. Crowdy, D. G.: Geometric function theory: a modern view of a classical subject. IOP Publishing Ltd and London Mathematical Society, Nonlinearity. **21** (10), T205-T219 (2008). doi.org/10.1088/0951-7715/21/10/T04
41. Crowdy, D. G.: The Schottky-Klein Prime Function on the Schottky Double of Planar Domains. Computational Methods and Function Theory. **10** (2), 501-517 (2010).
42. Crowdy, D. G.: Stress fields around two pores in an elastic body: exact quadrature domain solutions. Proc.R.Soc. **471** (2180), 1-18 (2015). doi.org/10.1098/rspa.2015.0240
43. Crowdy, D. G.: Finite Gap Jacobi Matrices and the Schottky-Klein

Prime Function. Computational Methods and Function Theory. **17**, 319-341 (2017). doi.org/10.1007/s40315-016-0186-7

44. Dienstfrey, A., Huang, J.: Integral representations for elliptic functions. J. Math. Anal. Appl. **316**, 142-160 (2006). doi:10.1016/j.jmaa.2005.04.058
45. Dutta, M., Debnath L.: Elements of the Theory of Elliptic and Associated Functions with Applications. World Press, Calcutta (1965).
46. Du Val, P.: Elliptic Functions and Elliptic Curves. Cambridge University Press, London (1973).
47. Ebenfelt, P., Gustafsson, B., Khavinson, D., Putinar, M.: Quadrature Domains and Their Applications. The Harold S. Shapiro Anniversary Volume, Germany (2006).
48. Eremenko, A.: Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces. arXiv:0710.1281v1 [math.CV] 5 Oct 2007.
49. Gil, A., Segura, J., Temme, N.: Numerical Methods for Special Functions. SIAM (2007). doi. 10.1137/1.9780898717822
50. Greenhill, A.: The Applications of Elliptic Functions. Dover, New York (1959).
51. Julia, G.: Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé. Gauthier-Villars, Paris (1924).
52. Hayman, W. K.: Meromorphic functions. Clarendon Press, Oxford (1975).
53. Hellegouarch, Y.: Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles. Academic Press (2002).
54. Hushchak, O., Kondratyuk, A.: The Julia exceptionality of loxodromic meromorphic functions. Visnyk of the Lviv Univ., Series Mech. Math. **78**, 35-41 (2013).

55. Khoroshchak, V. S., Khrystiyanyn, A. Ya., Lukivska, D. V.: A class of Julia exceptional functions. Карпатські математичні публікації. **8** (1), 172–180 (2016). doi:10.15330/cmp.8.1.172-180.
56. Khoroshchak, V. S., Kondratyuk, A. A.: The Riesz measures and a representation of multiplicatively periodic $\delta$-subharmonic functions in a punctured euclidean space. Mat. Stud. **43** (1), 61-65 (2015).
57. Khoroshchak, V. S., Sokulska, N. B.: Multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane. Mat. Stud. **42** (2), 143-148 (2014).
58. Khoroshchak, V. S., Kondratyuk, A. A.: Some steps to nonlinear analysis. In: Abstracts of the International Conference "XVIII-th Conference on analytic functions and related topics": pp. 38-39. Chełm (Poland), 26-29 June 2016.
59. Khoroshchak, V. S., Kondratyuk, A. A.: Stationary harmonic functions on homogeneous spaces. Ufa. Math. J. **7** (4), 155–159 (2015).
60. Khoroshchak, V. S., Lukivska, D. V.: A subclass of quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 35–36. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.
61. Khrystiyanyn, A. Ya., Kondratyuk, A. A.: Meromorphic mappings of torus onto the Riemann sphere. Carpathian Math. Publ. **4** (1), 155-159 (2012).
62. Khrystiyanyn, A. Ya., Kondratyuk, A. A., Sokulska, N. B.: Growth characteristics of loxodromic and elliptic functions. Mat. Stud. **37** (1), 52-57 (2012).
63. Khrystiyanyn, A. Ya., Kondratyuk, A. A.: Modulo-loxodromic meromorphic function in $\mathbb{C}\setminus 0$. Ufa. Math. J. **8** (4), 156-162 (2016)

64. Khrystiyanyn, A. Ya., Lukivska, D. V.: Quasi-elliptic functions. Матеріали Другої Всеукраїнської наукової конференції, присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики": с. 12–13. м. Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.
65. Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Some generalizations of $p$-loxodromic functions. Вісник Харківського університету ім. В. Н. Каразіна. Серія мат.,прикл.мат. і стат. **86**, 18–25 (2017). doi: 10.26565/2221-5646-2017-86-03
66. Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: On some generalizations of $p$-loxodromic functions. Буковинський Математичний Журнал. **5** № 1-2, 144–148 (2017).
67. Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Modulo-elliptic and modulo-loxodromic functions. Буковинський Математичний Журнал. **5** № 3-4, 88–89 (2017).
68. Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Quasi-elliptic functions. Ufa Math. J. **9** № 4, 129–136 (2017).
69. Klein, F.: Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. **36**, 1-83 (1890). doi.org/10.1007/BF01199432
70. Kondratyuk, A. A., Zaborovska, V. S.: Multiplicatively periodic subharmonic functions in the punctured Euclidean space. Mat. Stud. **40** (2), 159-164 (2013).
71. Kondratyuk, A. A.: Loxodromic meromorphic and $\delta$-subharmonic functions. In: Proceedings of the Workshop on Complex Analysis and its Applications to Differential and Functional Equations: **14**, pp. 89–99. Publ. of the University of Eastern Finland Reports and Studies in Forestry and Natural Sciences, Joensuu, Finland. (2014).

72. Kondratyuk, A., Khoroshchak, V., Lukivska, D.: $p$-Elliptic functions. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 121–129 (2016).

73. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 36–37. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.

74. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the III International Conference: "Spectral Problems, Nonlinear and Complex Analysis": pp. 86–87. Bashkir State University, Ufa, 01–03.10.2015.

75. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: The linear space $\mathcal{L}_{qp}$. Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": с. 86–87. смт. Ворохта, 24–27 лютого 2016 р.

76. Kos, S., Pogány T.: On the Mathematics of Navigational Calculations for Meridian Sailing. Electronic Journal of Geography and Mathematics. (2012).

77. Lang, S.: Elliptic Functions. 2nd ed. Springer-Verlag, New York (1987).

78. Lawden, D.: Elliptic functions and Applications. Springer-Verlag, New York, (1989).

79. Lukivska, D.: Generalization of the Weierstrass $\wp$, $\zeta$ and $\sigma$ functions. Буковинський Математичний Журнал. **4** № 1-2, 107–109 (2016).

80. Lukivska, D. V.: Some generalizations of p-loxodromic functions. Матеріали II Всеукраїнської наукової конференції, присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського націо-

нального технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики": с. 13–14. м. Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.

81. Lukivska, Dz. V., Khrystiyanyn, A. Ya.: Quasi-elliptic functions. International conference in Functional Analysis. Book of abstracts: p. 124. Lviv, 18–23 September 2017.
82. Lamé, G.: Sur les Surfaces Isothermes dans les Corps Homognes en Équilibre de Température. Journal de mathématiques pures et appliques. 2: 147188. Available at Gallica (1837).
83. Marcotte, J., Salomone, M.: Loxodromic Spirals in M. C. Escher's Sphere Surface. Journal of Humanistic Mathematics. **4**, Issue 2, 25-46 (2014). doi.10.5642/jhummath.201402.04
84. Masser, D.: Elliptic functions and transcendence. Springer-Verlag, Berlin (1975).
85. Montel, P.: Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques at leurs applications. Gauthier-Villars, Paris (1927).
86. Ostrowski, A.: Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes. Mathematische Zeitschrift. **24** (1), 215-258 (1926).
87. Pastras, G.: Four Lectures on Weierstrass Elliptic Function and Applications in Classical and Quantum Mechanics. arXiv:1706.07371v2 [math-ph] 6 Sep 2017.
88. Prasolov, V., Solovyev, Yu.: Elliptic Functions and Elliptic Integrals. Providence, RI: Amer. Math. Soc. (1997).
89. Radchenko, L.: Normal functions in the complex plane without the origin. Visnyk Kharkiv Nat. Univ., Ser. Math., Appl. Math., Mech. **931**, 20-32 (2010).

90. Rausenberger, O.: Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer variabeln. Druck und Ferlag von B. G.Teubner, Leipzig (1884).
91. Schiff, J.: Normal Families. Springer-Verlag, New York (1993).
92. Schottky, F.: Über eine specielle Function welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt J. Reine Angew. Math. **101** , 227-272 (1887).
93. Temme, N.: Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. John Wiley and Sons, New York (1996).
94. Valiron, G.: Cours d'Analyse Mathematique. Théorie des fonctions. 2nd Edition. Masson et.Cie., Paris (1947).
95. Waldschmidt, M.: Elliptic Functions and Transcendence. Surveys in Number Theory. Springer-Verlag. Developments in Mathematics 17, 143–188 (2008)
96. Walker, P. L.: Elliptic Functions: A Constructive Approach. Wiley, New York (1996).
97. Wang, Z. X., Guo, D. R.: Special Functions. World Scientific. (1989)
98. Weil, A.: Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. Springer-Verlag., Berlin, Heidelberg, New York (1976).
99. Weierstrass, K.: Zur Theorie der Elliptischen Funktionen, Mathematische Werke. Bd 2. Teubner, Berlin. pp. 245-255 (1894).
100. Whittaker, E., Watson, G.: A Course of Modern Analysis. 4th ed. Cambridge University Press, Cambridge (1990).
101. Yosida, K.: On a class of meromorphic functions. Proc. Phis.-Math. Soc. Japan. **30** (1), 125-131 (2008).

# СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

**Список публікацій в яких опубліковано основні результати дисертації:**


1) Khoroshchak, V.S., Khrystiyanyn, A.Ya., Lukivska, D.V.: A class of Julia exceptional functions. Карпатські математичні публікації. **8** (1), 172–180 (2016). doi:10.15330/cmp.8.1.172-180.
2) Kondratyuk, A., Khoroshchak, V., Lukivska, D.: $p$-Elliptic functions. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 121–129 (2016).
3) Lukivska, D.: Generalization of the Weierstrass $\wp$, $\zeta$ and $\sigma$ functions. Буковинський Математичний Журнал. **4** № 1-2, 107–109 (2016).
4) Луківська, Дз. В.: Деякі голоморфні узагальнення локсодромних функцій. Укр. мат. журн. **69** № 9, 1284–1288 (2017). (Lukivs'ka, Dz. V.: Some Holomorphic Generalizations of Loxodromic Functions. Ukr. Math. J. **69** No. 9, 1490 – 1495 (2018). doi.org/10.1007/s11253-018-1449-4)
5) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Some generalizations of $p$-loxodromic functions. Вісник Харківського університету ім. В. Н. Каразіна. Серія мат.,прикл.мат. і стат. **86**, 18–25 (2017). doi: 10.26565/2221-5646-2017-86-03
6) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: On some generalizations of $p$-loxodromic functions. Буковинський Математичний Журнал. **5** № 1-2, 144–148 (2017).

7) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Modulo-elliptic and modulo-loxodromic functions. Буковинський Математичний Журнал. **5** № 3-4, 88–89 (2017).
8) Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Quasi-elliptic functions. Ufa Math. J. **9** № 4, 129–136 (2017).
9) Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Про раціонально локсодромні голоморфні функції. Укр. мат. журн. **69** № 11, 1505–1514 (2017).

**Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

1. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 36–37. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.
2. Khoroshchak, V. S., Lukivska, D. V.: A subclass of quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 35–36. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.
3. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the III International Conference: "Spectral Problems, Nonlinear and Complex Analysis": pp. 86–87. Bashkir State University, Ufa, 01–03.10.2015.
4. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: The linear space $\mathcal{L}_{qp}$. Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": с. 86–87. смт. Ворохта, 24–27 лютого 2016 р.

5. Khrystiyanyn, A. Ya., Lukivska, D. V.: Quasi-elliptic functions. Матеріали II Всеукраїнської наукової конференції, присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики": с. 12–13. м. Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.
6. Lukivska, D. V.: Some generalizations of p-loxodromic functions. Матеріали II Всеукраїнської наукової конференції, присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики": с. 13–14. м. Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.
7. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Раціонально локсодромні мероморфні функції. Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": с. 99–101. смт. Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.
8. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Квазі-еліптичні функції. Тези доповідей XII Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз": с. 9–10. с. Колочава, 10–23 липня 2017 р.
9. Lukivska, Dz. V., Khrystiyanyn, A. Ya.: Quasi-elliptic functions. International conference in Functional Analysis. Book of abstracts: p. 124. Lviv, 18–23 September 2017.

**Апробація результатів дисертації:** Основні результати дисертації доповідалися на наукових конференціях, наукових семінарах і літній школі, а саме:

1) Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних

функцій, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 29.10.2015 р., 5.11.2015 р., 10.05.2018 р.;

2) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , смт. Ворохта, 24–27 лютого 2016 р.;
3) науковому семінарі з комплексного і нелінійного аналізу, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 23.06 та 30.06.2016 р.;
4) науковому семінарі з комплексного аналізу кафедри математики "Oberseminar Funktionentheorie" у Вюрцбурзькому університеті імені Юліуса Максиміліана, Вюрцбург, Німеччина, 8 липня 2016 р.;
5) всеукраїнській науковій конференції, присвяченій 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики" , Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.;
6) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , смт. Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.;
7) XII-й Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз " , с. Колочава, 10–23 липня 2017 р.;
8) міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю з дня народження Стефана Банаха, Львів, 18–23 вересня 2017 р.;
9) Львівському міжвузівському семінарі з функціонального аналізу імені проф. В. Е. Лянце, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 10.10.2017 р.;