

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СТЕЛЬМАЩУК ВІТАЛІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 519.63

ДИСЕРТАЦІЯ

АНАЛІЗ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ ТА ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВІ СХЕМИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

01.01.07 - обчислювальна математика

Математика і статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ (В.В. Стельмащук)

Науковий керівник
Шинкаренко Георгій Андрійович
доктор фізико-математичних наук
професор

Львів–2018

АНОТАЦІЯ

Стельмащук В. В. *Аналіз узагальнених задач термоп'єзоелектрики та проекційно-сіткові схеми їх розв'язування.* – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню і розвитку чисельних схем МСЕ для задач класичної та узагальненої термоп'єзоелектрики. Для задачі про вимушені коливання піроелектрика у випадку класичної моделі побудовано h -адаптивну схему МСЕ. Для задачі про вимушені коливання піроелектрика у випадках узагальнених моделей термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея доведено коректність відповідних варіаційних задач, на основі МСЕ розроблено чисельні схеми їх розв'язування та проведено аналіз стійкості та збіжності цих схем. Для задачі нестационарної термоп'єзоелектрики у випадках узагальнених моделей термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея доведено коректність відповідних варіаційних задач, на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми розроблено чисельні схеми їх розв'язування. Розроблено програмні засоби, з допомогою яких проведено ряд числових експериментів, які підтверджують правильність теоретичних досліджень та демонструють ефективність розроблених методів. Зроблено порівняння результати деяких експериментів з результатами, що отримали інші дослідники.

Ключові слова: задачі класичної та узагальненої термоп'єзоелектрики, модель Лорда-Шульмана, модель Гріна-Ліндсея, варіаційні задачі, метод скінченних елементів, метод Гальоркіна, h -адаптивна схема, однокрокова рекурентна схема.

Stelmashchuk V. V. *Analysis of generalized thermopiezoelectricity problems and projection-mesh schemes for their solution.* – On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.07 – Computational mathematics. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

The thesis is devoted to investigation and development of numerical FEM-

based schemes for problems of classical and generalized thermopiezoelectricity. For problem of forced harmonic vibrations of pyroelectric h-adaptive FEM scheme has been built. For problem of forced harmonic vibrations of pyroelectric in cases of generalized Lord-Shulman and Green-Lindsay thermopiezoelectricity models the well-posedness of the corresponding variational problems has been proved. Based on FEM, the numerical schemes for their solution have been constructed and the analysis of these schemes robustness and convergence has been performed. For non-stationary thermopiezoelectricity problem in cases of generalized Lord-Shulman and Green-Lindsay thermopiezoelectricity models the well-posedness of the corresponding variational problems has been proved too. Based on FEM and one step recurrent scheme, the numerical schemes for their solution have been constructed. The corresponding software has been implemented, by means of which the series of numerical experiments has been conducted, which confirm the correctness of theoretical research and demonstrate the effectiveness of constructed numerical methods. The results of some numerical experiments have been compared to the ones of other researchers.

Key words: classical and generalized thermopiezoelectricity problems, Lord-Shulman model, Green-Lindsay model, variational problems, finite element method, Galerkin method, h-adaptive scheme, one step recurrent scheme.

Наукові статті у вітчизняних фахових виданнях:

1. Стельмащук В. Числове моделювання динамічних задач піроелектрики / В.Стельмащук, Г.Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2014. – Вип. 22. – С. 92-107.
2. Stelmashchuk V. V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity forced vibrations problem / V. V. Stelmashchuk, H. A. Shynkarenko // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2016. – №2 (122). – С. 106-119.
3. Stelmashchuk V. V. Well-posedness of Lord-Shulman thermopiezoelectricity variational problem / V. V. Stelmashchuk, H. A. Shynkarenko // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – Т.59, № 4. – С. 116-127.

4. Stelmashchuk V. Finite-element analysis of Green-Lindsay thermopiezoelectricity time-harmonic problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2017. – Вип. 25. – С. 136-147.

Наукові статті у закордонних виданнях:

5. Chaban F. Numeric modeling of mechanical and electric fields interaction in piezoelectrics. / F.Chaban, H.Shynkarenko, V.Stelmashchuk, S.Rosinska // Manufacturing processes. Some problems. – Opole: Pol. Opolska. – 2012. – Vol.1, Ch.9. – P. 107-118.
6. Shynkarenko H. Numerical modeling of thermopiezoelectricity problems / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // Manufacturing processes. Actual Problems-2015. – Opole: Pol. Opolska. – 2015. – Vol. 1. – P. 75–87.
7. Shynkarenko H. Solvability and finite element approximation of time-harmonic Lord-Shulman thermopiezoelectricity problem / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // Manufacturing processes. Actual problems - 2016. – Opole: Pol. Opolska. – 2016. – P. 79-92.
8. Stelmashchuk V. Numerical modeling of thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem using finite element method / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues. – Taylor & Francis Group. – 2016. – P. 547–550. DOI: 10.1201/b20057-117.

Матеріали конференцій:

9. Ковалик Т. Числовий аналіз задач піроелектрики методом скінченних елементів / Т. Ковалик, В. Стельмащук, Ф. Чабан, Г. Шинкаренко // XVIII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (м.Львів, ЛНУ, 4-5 жовтня 2012): Матеріали конференції. – Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2012. – С. 92–93.
10. Стельмащук В. Числове моделювання динамічних задач піроелектрики методом скінченних елементів / В. Стельмащук, Г. Шинкаренко // XIX Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики

та інформатики” (м.Львів, ЛНУ, 3-4 жовтня 2013): Матеріали конференції. – Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2013. – С. 121–122.

11. Стельмащук В. Числове моделювання вимушених гармонійних коливань піроелектриків адаптивним методом скінченних елементів / В. Стельмащук // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання-2014», (Львів, ІППММ, 28-30 травня 2014). – Львів, 2014. Режим доступу:
<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Stelmashchuk.pdf>
12. Стельмащук В. Чисельне розв’язування задачі термоп’єзоелектрики у випадку моделі Лорда-Шульмана / В. Стельмащук, Г. Шинкаренко // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми термомеханіки», (Львів, ІППММ, 22-24 вересня 2016). – Львів, 2016. – С.129-130.
13. Чабан Ф. Побудова числових схем МСЕ для задач теорії піроелектриків / Ф. Чабан, В. Стельмащук // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька, (Дрогобич, ДДПІ, 19-23 вересня 2011). – Дрогобич, 2011. – С.214.
14. Shynkarenko H. Numerical modeling of dynamical pyroelectricity problems / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // VI Int. Conf. named by I. I. Lyashko “Computational and applied mathematics” (Taras Shevchenko National University of Kyiv, September 5-6, 2013):Short papers. – Kyiv, 2013. – P.36-39.
15. Shynkarenko H. Thermopiezoelectricity forced vibrations problem solution using adaptive FEM /H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk //VII Int. Conf. named by I. I. Lyashko “Computational and applied mathematics” (Taras Shevchenko National University of Kyiv, October 9-10, 2014):Short papers. – Kyiv, 2014. – P.136-137.
16. Stelmashchuk V. Numerical approximation of pyroelectricity problems using finite element method / V.Stelmashchuk, H.Shynkarenko // International Conference on Modern Problems of Mechanics and Mathematics (Lviv, IAPMM, May 21-25, 2013): Short papers. – Lviv, 2013. – P. 75-77.

17. Stelmashchuk V. Adaptive finite element modeling of pyroelectricity forced vibrations problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // I Міжнародна XX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (ЛНУ ім.І.Франка, 7-9 квітня 2014):Матеріали конференції. – Львів, 2014. – С.31-32.
18. Stelmashchuk V. Numerical modeling of thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem using adaptive Finite Element Method / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko //3rd Polish Congress of Mechanics – 21st International Conference on Computer Methods in Mechanics, (Politechnika Gdanska, September 8-11, 2015):Short papers. – Gdansk, 2015. – P.51-52.
19. Stelmashchuk V. Numerical scheme for Lord-Shulman thermopiezoelectricity problem / V.Stelmashchuk // XXI Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», 24-25.09. 2015 р. – Львів,2015. – С. 42-45.
20. Stelmashchuk V. Numerical scheme for Green-Lindsay thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem. / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko //XXII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», (Львів, ЛНУ, 5-7 жовтня 2016р.). – Львів, 2016. – С.24-25.
21. Stelmashchuk. V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity dynamical problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // 22nd International conference on computer methods in mechanics CMM-2017, (September 13th -16th 2017, Lublin, Poland). – Lublin, 2017. – P.MS03-1-MS03-2.
22. Stelmashchuk V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity dynamical problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // AIP Conf. Proc. – 2018. – Vol. 1922. – 040006. – P. 1-10. DOI: 10.1063/1.5019051.

Зміст

АНОТАЦІЯ	2
ВСТУП	10
РОЗДІЛ 1.	
АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ	16
1.1 Явища піроефекту, п'єзоефекту та їх застосування	16
1.1.1 Практичне застосування піроелектриків та п'єзоелектриків	18
1.2 Основні математичні моделі термоп'єзоелектрики	19
1.2.1 Початково-крайова задача класичної термоп'єзоелектрики	21
1.2.2 Задача узагальненої термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана	26
1.2.3 Задача узагальненої термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея	29
1.2.4 Основні результати теоретичного аналізу задач термоп'єзоелектрики	31
1.3 Методи розв'язування задач термоп'єзоелектрики	33
1.3.1 Проекційно-сіткові методи. Метод скінченних елементів	34
1.4 Програмна реалізація та апробація	35
1.5 Висновки та заключні зауваження	36
РОЗДІЛ 2.	
ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПРО ВИМУШЕНІ ГАРМОНІЙНІ КОЛИВАННЯ У КЛАСИЧНІЙ ТЕОРІЇ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ	38
2.1 Формулювання варіаційних задач класичної термоп'єзоелектрики	38
2.1.1 Варіаційне формулювання динамічної задачі класичної термоп'єзоелектрики	38
2.1.2 Варіаційна задача про вимушені гармонійні коливання піроелектрика за класичною теорією термоп'єзоелектрики	40
2.2 Коректність варіаційної задачі про вимушені гармонійні коливання	42
2.3 Метод скінченних елементів в задачах про вимушені гармонійні коливання	43
2.3.1 Дискретизація Гальоркіна для одно- та двовимірних задач	43
2.3.2 Коректність числової схеми: апроксимативність, стійкість та збіжність	44
2.3.3 Обчислювальні аспекти та результати числових експериментів	45
2.4 Адаптивна схема МСЕ	52
2.4.1 Числові експерименти	54
2.5 Висновки та заключні зауваження	56
РОЗДІЛ 3.	
ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ КЛАСИЧНОЇ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ	58

3.1	Напівдискретизація Гальоркіна варіаційної задачі термоп'єзоелектрики за просторовою змінною	58
3.2	Задача Коші.	59
3.3	Коректність варіаційної задачі. Збіжність напівдискретних апроксимацій	61
3.4	Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі.	62
3.4.1	Апроксимації розв'язків за часовою змінною	62
3.4.2	Побудова однокрокової рекурентної схеми	63
3.4.3	Стійкість і збіжність побудованої однокрокової рекурентної схеми	64
3.5	Числові експерименти	65
3.5.1	Одновимірний випадок: ударні хвилі та прямий п'єзо ефект	65
3.5.2	Одновимірний випадок. Вплив піроефекту на розв'язки задачі термоп'єзоелектрики	71
3.5.3	Одновимірний випадок. Обернений п'єзо ефект	73
3.5.4	Двовимірний випадок. Порівняння з результатами відомими з літератури.	77
3.5.5	Двовимірний випадок. Прямий п'єзо ефект	80
3.6	Висновки та заключні зауваження	85

РОЗДІЛ 4.

АНАЛІЗ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОП'ЄЗО-		
ЕЛЕКТРИКИ ЛОРДА-ШУЛЬМАНА		86
4.1	Варіаційна задача термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана	86
4.2	Задача про вимушені гармонійні коливання	88
4.2.1	Варіаційна постановка	88
4.2.2	Коректність варіаційної задачі	89
4.2.3	Дискретизація Гальоркіна. Збіжність апроксимацій МСЕ	92
4.2.4	Особливості алгоритму та програмної реалізації МСЕ	94
4.3	Нестаціонарна задача	95
4.3.1	Варіаційна постановка	95
4.3.2	Рівняння енергетичного балансу	96
4.3.3	Апріорні енергетичні оцінки	97
4.3.4	Напівдискретизація методом скінченних елементів	100
4.3.5	Існування розв'язку варіаційної задачі LS-термоп'єзоелектрики	102
4.3.6	Дискретизація в часі. Однокрокова рекурентна схема	104
4.4	Результати числових експериментів	105
4.4.1	Вимушені гармонійні коливання	105
4.4.2	Нестаціонарна задача. Порівняння з результатами відомими з літератури	108
4.5	Висновки та заключні зауваження	111

РОЗДІЛ 5.

АНАЛІЗ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОП'ЄЗО-	
ЕЛЕКТРИКИ ГРІНА-ЛІНДСЕЯ	113
5.1 Варіаційна задача термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея	113
5.2 Задача про вимушені гармонійні коливання	114
5.2.1 Варіаційна постановка	114
5.2.2 Коректність варіаційної задачі	116
5.2.3 Дискретизація Гальоркіна. Збіжність апроксимацій МСЕ	117
5.2.4 Особливості алгоритму та програмної реалізації МСЕ	118
5.3 Нестационарна задача	119
5.3.1 Рівняння енергетичного балансу	120
5.3.2 Априорні енергетичні оцінки	121
5.3.3 Напівдискретизація методом скінченних елементів	123
5.3.4 Існування розв'язку варіаційної задачі GL-термоп'єзоелектрики	126
5.3.5 Дискретизація в часі. Однокрокова рекурентна схема	126
5.4 Результати числових експериментів	127
5.5 Висновки та заключні зауваження	129
ВИСНОВКИ	130
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	132
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА	148

ВСТУП

Актуальність теми. П'єзоелектричні та піроелектричні матеріали все ширше застосовуються в сучасних технічних пристроях. Явище прямого п'єзо ефекту використовується для побудови таких приладів як: вимірювачі тиску, вібрацій, датчики механічних напружень, датчики деформацій та прискорення та інші сенсори. На основі явища оберненого п'єзо ефекту побудовані різноманітні актуатори (прилади, що передають дію з керуючого пристрою на об'єкт керування). Найважливішими застосуваннями піроелектричного ефекту є детектори інфрачервоної радіації, термографія (тепловізори) та піроелектричні телевізійні трубки. Вищезгадані факти зумовлюють актуальність комп'ютерного моделювання поведінки п'єзоелектричних та піроелектричних матеріалів.

Вперше математична модель взаємодії механічного, електричного та теплового полів у піроелектрику була сформульована в працях R.D Mindlin. Подальше теоретичне дослідження цієї моделі здійснив W. Nowacki. Інші вчені розробляли свої дещо модифіковані моделі термоп'єзоелектрики, в цьому зв'язку варто згадати роботи Н. Tiersten та R.A. Toupin. Вагомий внесок у розвиток математичних моделей термоп'єзоелектрики та методів, що застосовуються для їх розв'язування, здійснили такі вчені як В.Т. Грінченко, О.Ю. Жарій, В.Г. Карнаухов, М.Р. Короткіна, Б.А. Кудрявцев, В.З. Партон, А.Ф. Улітко, Г.А. Шинкаренко, Н.А. Шульга, Ф.В. Чабан, F. Ashida, T.R. Tauchert, J. Yang.

У дисертації Ф.В. Чабана описана розроблена ним адаптивна схема МСЕ для задачі про вимушені гармонійні коливання п'єзоелектриків. Актуальною є побудова подібних схем для розв'язування задач термоп'єзоелектрики, адже, використовуючи їх, ми можемо наперед гарантувати точність отриманого чисельного розв'язку.

Основним недоліком класичної моделі термоп'єзоелектрики є припущення про нескінченну швидкість поширення тепла в матеріалі, що не є правильним з фізичної точки зору. Способи обійти цю проблему були застосовані у роботах C. Cattaneo, P. Vernotte, H. Lord & Y. Shulman, A.E. Green & K.A. Lindsay, Я.С. Підстригача. До задач термоп'єзоелектрики вперше такі підходи застосував S. Kaliski, а далі G. Lebon, D.S. Chandrasekharaiah.

Зрештою, було розроблено багато інших моделей термопружності та термоп'єзоелектрики, які враховують скінченну швидкість поширення тепла, зокрема, Green-Naghdi, Chandrasekharaiah-Tzou, Hetnarski-Ignaczak. Такі моделі називають узагальненими моделями термоп'єзоелектрики.

У роботах Г.А. Шинкаренка досліджено дещо модифіковану (з врахуванням в'язкості матеріалу та з рівнянням електродинаміки, що впливає з диференціювання закону Максвелла для електричного поля) початково-крайову задачу термоп'єзоелектрики та з допомогою переходу до варіаційної задачі розроблено чисельні схеми її розв'язування на основі МСЕ. З огляду на вищенаведені факти, актуальним є формулювання та дослідження варіаційних задач термоп'єзоелектрики на основі моделей Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея та модифікацій Г.А. Шинкаренка, а також побудова чисельних схем їх розв'язування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках держбюджетних науково-дослідних робіт кафедри інформаційних систем Львівського національного університету імені Івана Франка: Пі-120П “Чисельне розв'язування прямих і обернених задач математичної фізики і механіки проекційно-сітковими методами” (2012-2013 рр., № ДР 0112U001285); наукові керівники – д.ф.-м.н., проф. Шинкаренко Г. А., д.ф.-м.н., проф. Хапко Р. С; Пі-17П “Побудова, аналіз і програмна реалізація чисельних методів для прямих та обернених задач фізики та механіки” (2015-2016 рр., № ДР 0115U003256); науковий керівник – д.ф.-м.н., проф. Хапко Р. С.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є побудова, аналіз та апробація високоточних скінченно-елементних схем для розв'язування одното двовимірних задач класичної та узагальненої термоп'єзоелектрики, порівняння результатів одержаних за різними математичними моделями, а також порівняння власних результатів з наявними в літературі, а детальніше:

1. Програмна реалізація проекційно-сіткових схем на основі МСЕ, описаних у роботах Шинкаренка Г.А., для нестационарної задачі класичної термоп'єзоелектрики та задачі про вимушені коливання піроелектриків. Аналіз отриманих числових результатів, порівняння їх з результатами одержаними іншими дослідниками.

2. Побудова апостеріорних оцінювачів похибок (АОП) апроксимацій МСЕ для задач про вимушені усталені коливання піроелектриків та їх застосування для побудови h -адаптивних схем МСЕ.
3. Дослідження коректності варіаційної задачі про вимушені усталені коливання піроелектрика у випадку моделей термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана (Lord-Shulman) та Гріна-Ліндсея (Green-Lindsay). Побудова схем МСЕ для розв'язування цих задач. Аналіз стійкості та збіжності цих схем.
4. Дослідження коректності нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. Побудова чисельної схеми розв'язування цієї задачі на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми. Порівняння отриманих числових результатів з результатами інших дослідників.
5. Дослідження коректності нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Побудова чисельної схеми розв'язування цієї задачі на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.

Об'єктом дослідження у дисертаційній роботі є крайові та початково-крайові задачі термоп'єзоелектрики та відповідні їм варіаційні задачі (класична модель, модель Лорда-Шульмана, модель Гріна-Ліндсея).

Предмет дослідження – коректність формулювань варіаційних задач термоп'єзоелектрики для моделей Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея, чисельні схеми МСЕ їх розв'язування, зокрема h -адаптивні, рекурентні схеми інтегрування в часі..

Методи досліджень – елементи функціонального аналізу в гільбертових просторах та варіаційного числення, метод Гальоркіна, метод скінченних елементів, рекурентні схеми інтегрування в часі.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Побудовано h -адаптивну схему для розв'язування задач про вимушені коливання піроелектриків у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики, що дозволяє знаходити розв'язок з наперед заданою точністю.

2. Доведено коректність варіаційної задачі про вимушені коливання піроелектриків моделі Лорда-Шульмана. Розроблено скінченно-елементну схему її розв'язування та доведено її стійкість та збіжність.
3. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. Розроблено чисельну схему її розв'язування на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.
4. Доведено коректність варіаційної задачі про вимушені коливання піроелектриків моделі Гріна-Ліндсея. Розроблено скінченно-елементну схему її розв'язування та доведено її стійкість та збіжність.
5. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Розроблено чисельну схему її розв'язування на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.

Практичне значення одержаних результатів. Побудовану h -адаптивну схему МСЕ для розв'язування задачі про вимушені коливання піроелектрика можна використати для знаходження розв'язку задачі з наперед гарантованою точністю. Створений комплекс програм для розв'язування крайових та початково-крайових задач класичної та узагальненої термоп'єзоелектрики можна використати для комп'ютерного моделювання процесів, що відбуваються в піроелектричних матеріалах.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, які виносяться на захист, автор дисертації отримав самостійно. У спільних з науковим керівником роботах [20, 54, 103, 104, 121–125] проф. Г.А.Шинкаренку належать постановка задач, загальні підходи розв'язування варіаційних задач, ідеї для постановки числових експериментів, а здобувачеві належить розробка програмних засобів для побудованих схем та числові результати і їх аналіз. У роботі [20] здобувачеві належить доведення теореми про обмеженість розв'язку задачі піроелектрики. В праці [122] автору дисертації належать теореми (з доведеннями) про взаємозв'язок білінійних форм, про єдиність розв'язку та коректність задачі про вимушені коливання піроелектриків у випадку моделі Лорда-Шульмана, побудова числової схеми розв'язування та теорема про збіжність МСЕ-апроксимацій у побудованій числовій схемі. В роботі [125] здобувачеві належить доведення існування

та єдності розв'язку нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. В праці [123] автору дисертації належать теорема про коректність задачі про вимушені коливання піроелектриків у випадку моделі Гріна-Ліндсея, побудова числової схеми розв'язування та теорема про збіжність МСЕ-апроксимацій у побудованій числовій схемі. В роботах [54, 104] здобувачеві належать результати числових експериментів та їх аналіз. В статті [103] автору дисертації належить порівняння числових розв'язків задачі термоп'єзоелектрики з розв'язками задачі п'єзоелектрики, а також порівняння отриманих числових результатів з результатами праць інших дослідників. В роботі [121] здобувачеві належить побудова h-адаптивної схеми МСЕ для розв'язування задачі про вимушені коливання піроелектрика у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики. В роботі [124] автору дисертації належить побудова однокрокової рекурентної схеми для розв'язування нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики та числові результати з порівнянням їх з відомими з літератури результатами інших дослідників.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на *міжнародних наукових конференціях*: «Computer Methods in Mechanics» (Gdansk, 2015; Lublin, 2017), Ім. В. Я. Скоробагатька (Дрогобич, 2011); «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2013-2014), «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2013), «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016); *вітчизняних наукових конференціях*: «Підстригачівські читання» (Львів, 2014); «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2012-2016); *семінарах кафедри*: інформаційних систем; *аспірантських семінарах* факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка 2012-2015рр.

В цілому дисертаційна робота обговорювалася на науковому семінарі кафедри інформаційних систем та міжкафедральному науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 8-ми наукових працях: [20, 122, 123, 125] у наукових фахових виданнях з переліку, затвердженого МОН України, та [54, 103, 104, 121] у закордонних виданнях. Ста-

ття [122] входить до наукометричної бази даних Web of Science, [121] – до Scopus та CRCnetBASE, [54, 103, 104] складають розділи монографій. У матеріалах наукових конференцій опубліковано 14 тез та матеріалів доповідей.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 149 найменувань на 16 сторінках та додатку зі списком публікацій здобувача. Дисертація містить 43 рисунки. Загальний обсяг дисертації становить 151 сторінку.

*Автор дисертації виражає вдячність науковому керівнику Шинкаренку
Георгію Андрійовичу.*

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ

У цьому розділі зроблено опис явищ піроефекту та п'єзоефекту та прикладів практичного застосування піроелектриків та п'єзоелектриків у сучасній техніці. Розглянуто основні математичні моделі термоп'єзоелектрики, які описують ці явища у матеріалах. Сформульовано початково-крайову задачу класичної термоп'єзоелектрики. Також сформульовано початково-крайові задачі узагальненої термоп'єзоелектрики за моделями Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея, які, на відміну від класичної моделі, враховують скінченну швидкість поширення тепла в матеріалах. Проведено огляд літератури, методів розв'язування задач термоп'єзоелектрики, а також огляд існуючого програмного забезпечення для чисельного розв'язування таких задач. На базі цього визначено основні цілі та завдання дисертаційного дослідження.

1.1 Явища піроефекту, п'єзоефекту та їх застосування

Піроелектричний ефект (піроефект) – це явище виникнення електричного поля в деяких матеріалах, коли їх нагрівають чи охолоджують. Вперше такий феномен помітили ще стародавні греки. Зокрема, давньогрецький філософ Теофраст (371 -287 р. до н.е.) у своєму трактаті "Про камені" описує явище піроефекту в кристалах турмаліну. Проте, протягом наступних двох тисяч років не було написано жодної праці присвяченої явищу піроефекту і лише в XVIII столітті в Європі знову зацікавилися дослідженням властивостей турмаліну. В 1717 році фізик і хімік Луїс Лемері опублікував перший опис явища піроелектрики в науковому журналі. Шведський природознавець Карл Лінней був першим вченим, хто зрозумів, що явище піроелектрики пов'язане з виникненням електричного поля в матеріалі і називав турмалін "електричним каменем".

Більш точне пояснення явища піроелектрики з'явилося вже у XIX ст. В 1824 році шотландський фізик Девід Брюстер вперше вжив термін "піроелектрика" у науковій праці. У 1859 році John Mothee Gaugain вперше

зробив точне вимірювання електричних зарядів, що виникали в результаті явища піроефекту. Він зауважив, що кількість продукованих електричних зарядів в кристалі турмаліну прямопропорційно залежить від зміни температури кристалу. У 1878 році Вільям Томсон (лорд Кельвін) опублікував перші теоретичні дослідження явища піроелектрики.

У 1880 році брати Жак та П'єр Кюрі експериментально відкрили явище п'єзоефекту. П'єзоелектричний ефект (п'єзоефект) – це явище виникання електричних зарядів на поверхні деяких кристалів під дією механічних навантажень на них. Відомий також обернений п'єзоефект – виникання механічних деформацій у кристалах під дією електричного поля. У 1881 році Габріель Ліпманн теоретично передбачив існування оберненого п'єзоефекту, що згодом було експериментально підтверджено братами Кюрі.

Розрізняють первинний та вторинний піроефект. Первинний піроефект – це прямий вплив зміни температури на електричне зміщення. Вторинний піроефект виникає під час теплового розширення матеріалу під дією зміни температури, що в свою чергу, зважаючи на механічні деформації, викликає зміни в електричному полі внаслідок явища п'єзоефекту.

У 1920 році Joseph Valasek відкрив ферроелектричний ефект в кристалах сегнетової солі - явище зміни напрямку невимушеної поляризації в матеріалах, які її мають, під дією електричного струму.

Матеріали, в яких спостерігається піроефект, п'єзоефект чи ферроелектричний ефект називають піроелектриками, п'єзоелектриками та ферроелектриками відповідно. Всі ці три види матеріалів є насправді діелектриками. Також їх ще називають "розумними" матеріалами (англ. smart materials). Відношення між ними зручно представити за допомогою діаграми Венна, яка показано на рис. 1.1. Тобто, кожен піроелектрик є водночас і п'єзоелектриком, а кожен ферроелектрик є піроелектриком та п'єзоелектриком також.

Існує велика кількість матеріалів з піроелектричними (а, отже, з п'єзоелектричними також) властивостями. В природі такими властивостями володіють кристали кварцу, турмаліну та сегнетової солі. Починаючи з середини ХХ ст., було створено багато штучних матеріалів, в яких піроелектричні та п'єзоелектричні властивості було значно суттєвішими, ніж в природних матеріалах. До них належать керамічні матеріали такі як цир-



Рис. 1.1. Відношення між видами "розумних" матеріалів.

конат титанат свинцю (PZT), титанат барію, ніобат літію, танталат літію. Також такими властивостями можуть володіти штучно створені полімери такі як полівініліденфторид (PVDF), які часто застосовують у вигляді плівок.

1.1.1 Практичне застосування піроелектриків та п'єзоелектриків

П'єзоелектрики та піроелектрики широко застосовуються в сучасних технічних пристроях. Явище прямого п'єзо ефекту використовується для побудови таких приладів як: вимірювачі тиску, вібрацій, датчики механічних напружень, датчики деформацій та прискорення та інші сенсори, а також генератори значних електричних напруг та запалювальні елементи [99, 133]. На основі явища оберненого п'єзо ефекту побудовані різноманітні актуатори (прилади, що передають дію з керуючого пристрою на об'єкт керування), наприклад пневматичні та гідравлічні клапани, а також мікро- та нано-позиціонери (пристрої, що дозволяють дуже точно поставити певний об'єкт в певну точку простору) [73]. Також на основі оберненого п'єзо ефекту будуються потужні ультразвукові випромінювачі тиску [133]. Також п'єзоелектрики можуть використовуватися в побудові надточних годинників та хвильових фільтрів [133] та перетворювачі енергії (трансдюсери) [73].

Найважливішими застосуваннями піроелектричного ефекту є детектори інфрачервоної радіації [82], термографія (тепловізори) та піроелектричні телевізійні трубки. Також піроелектрики застосовуються в електрично каліброваних радіометрах, для вимірювання енергії, в хімічному аналізі та

навіть для біологічних застосувань [133]. Піроелектричні детектори широко застосовувалися для збирання даних в космічних місіях [82]. Існують практичні застосування піроелектриків в різноманітних областях: проти-пожежні системи, для виявлення наземних мін, для будівельного нагляду, для розпізнавання осіб і транспортного контролю.

Вищезгадані факти зумовлюють актуальність комп'ютерного моделювання поведінки п'єзоелектричних та піроелектричних матеріалів.

1.2 Основні математичні моделі термоп'єзоелектрики

Вперше математична модель взаємодії механічного, електричного та теплового полів у піроелектрику була сформульована в праці Mindlin [89]. Сформульована цим вченим модель вважається класичною математичною моделлю термоп'єзоелектрики (в деяких наукових джерелах вживають поняття "піроелектрики" замість "термоп'єзоелектрики"). Вагомий внесок в подальше теоретичне дослідження цієї моделі зробив Nowacki [13, 91, 92], який вперше довів єдиність розв'язку цієї задачі та сформулював рівняння енергетичного балансу. Інші вчені розробляли свої дещо модифіковані моделі термоп'єзоелектрики, в цьому зв'язку варто згадати роботи Tiersten [134] та Tourin [135].

Класична теорія поширення тепла (яка і лежить в основі класичної математичної моделі термоп'єзоелектрики) передбачає, що якщо деякий матеріал піддається температурним збуренням, то ефект цих збурень буде відчуватися негайно навіть на відстанях, що знаходяться нескінченно далеко від джерела цих збурень. Зрозуміло, що такі припущення є нереалістичними з фізичної точки зору, особливо в випадках раптових теплових навантажень. Недолік цієї теорії зумовлений фактом, що рівняння, яке описує розподіл тепла є диференціальним рівнянням параболічного типу і тому допускає нескінченну швидкість поширення тепла. Щоб побороти цей дефект, різні дослідники розробляли різні нові теорії поширення тепла. Здебільшого ці теорії модифікують класичний закон Фур'є з отриманням рівнянь поширення тепла гіперболічного типу, що зумовлює скінченну швидкість теплових сигналів. Згідно з цими теоріями, поширення тепла розглядається більше як хвильове явище, ніж дифузійне. Хвилепод-

дібні теплові збурення часто називають "другим звуком" ("перший звук" – це звукові хвилі самі по собі), і тому теорії, що передбачають існування таких теплових збурень, називають теоріями з скінченними швидкостями хвиль або теоріями з "другим звуком".

Насправді, теорії термодинаміки з гіперболічним рівнянням теплопровідності мають досить далеку історію. Ще у 1867 році Максвелл запропонував свою модифікацію закону Фур'є, що призводила до гіперболічного рівняння. Варто зауважити, що хвильове поширення тепла при деяких умовах було також доведено експериментально. В 1944 році Пешков [95] спостерігав "другий звук" в наддрідкому гелії при температурах нижче 2,2 К. Пізніше "другий звук" був експериментально підтверджений в твердому гелії та інших кристалах. Згодом, в 50-их роках ХХ ст. Cattaneo [51] та Vernotte [139] запропонували свої модифікації закону Фур'є подібно до Максвелла. В 1967 році Lord & Shulman [86] запропонували використовувати модифікований закон Фур'є для задач термопружності. В 1972 році Green & Lindsay [66] запропонували своє узагальнення задачі класичної термопружності, при якому гіперболічне рівняння теплопровідності отримується без модифікації закону Фур'є.

Вперше ж було застосовано модифікований закон Фур'є для задач термоп'єзоелектрики в праці Kaliski [75]. Lebon [83] запропонував в теорії Лорда-Шульмана для термопружності вважати тепловий потік незалежною змінною. Chandrasekharaiah [57] розширив модель Lebon'a для задач термоп'єзоелектрики і довів єдиність розв'язку такої задачі. Також Chandrasekharaiah [55] вперше застосував модель Гріна-Ліндсея для задач термоп'єзоелектрики і довів єдиність розв'язку задачі у цьому випадку.

Теорії поширення тепла в матеріалах для задач термопружності та термоп'єзоелектрики не обмежуються математичними моделями Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея. Існує багато інших моделей: Green-Naghdi, Chandrasekharaiah-Tzou, Hetnarski-Ignaczak та ін., детальніше з існуючими моделями термоп'єзоелектрики та термопружності можна ознайомитися в оглядових статтях [56, 59, 69] та монографіях [70, 72, 126].

На даний момент також багато дослідників цікавляться задачами термоп'єзоелектрики. Але незважаючи на велику кількість публікацій, дуже мала кількість з них присвячена варіаційним задачам термоп'єзоелектрики

та методам розв'язування таких задач. Шинкаренко [28, 29] дослідив дещо модифіковану (з врахуванням в'язкості матеріалу та з рівнянням електродинаміки, що випливає з диференціювання закону Максвелла для електричного поля) початково-крайову задачу термоп'єзоелектрики та з допомогою переходу до варіаційної задачі розробив чисельні схеми її розв'язування на основі МСЕ. Дана робота одним зі своїх завдань має формулювання та дослідження варіаційних задач термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея за допомогою методик подібних до тих, що були використані в [28, 29] та розробку чисельних схем для їх розв'язування.

1.2.1 Початково-крайова задача класичної термоп'єзоелектрики

Згідно з Mindlin [89] та Nowacki [91], взаємодія механічного, електричного та теплового полів у піроелектрику описується за допомогою лінійної математичної моделі такими основними співвідношеннями:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}[\varepsilon_{km} - \alpha_{km}\theta] - e_{kij}E_k, \quad (1.1)$$

$$D_k = e_{kij}\varepsilon_{ij} + \chi_{km}E_m + \pi_k\theta, \quad (1.2)$$

$$\rho S = c_{ijkl}\alpha_{km}\varepsilon_{ij} + \pi_k E_k + \frac{\rho c_v}{T_0}\theta, \quad (1.3)$$

де σ_{ij} – тензор механічних напружень, D_k – вектор електричного зміщення (електричної індукції), S – щільність ентропії, ε_{km} – тензор механічних деформацій, E_k – вектор електричної напруженості, θ – приріст температури відносно початкової температури T_0 екземпляра піроелектрика. Тут і скрізь нижче передбачається підсумовування за індексами, що повторюються.

Зауважимо, що у випадку лінійної математичної моделі справедливі наступні співвідношення для тензора механічних деформацій ε_{km} та вектора електричної напруженості E_k :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{km} &= \varepsilon_{km}(u) = \frac{1}{2}(u_{k,m} + u_{m,k}), \\ E_k &= E_k(p) = -p_{,k}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де u – вектор пружних зміщень з компонентами u_k , p – електричний потенціал, а кома в нижньому індексі означає часткову похідну за просторовою змінною, наприклад, $g_{,k} = -\partial g / \partial x_k$.

Решта позначень у (1.1)-(1.3) є коефіцієнтами, які характеризують фізико-механічні властивості піроелектрика. Тензор c_{ijklm} складається із коефіцієнтів пружності зі звичайними властивостями симетрії та еліптичності, тобто:

$$\begin{aligned} c_{ijklm} &= c_{jiklm} = c_{kmlji}, \\ c_{ijklm}\kappa_{ij}\kappa_{km} &\geq c_0\kappa_{ij}\kappa_{km}, c_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \kappa_{ij} = \kappa_{ji} \in R. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Тензор α_{km} характеризує коефіцієнти теплового розширення зі звичайними властивостями симетрії та еліптичності, тобто:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{ji} \\ \alpha_{ij}\xi_i\xi_j &\geq \alpha_0\xi_i\xi_j, \alpha_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_i \in R. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тензор e_{kij} описує коефіцієнти п'єзоелектрики, які характеризують перетворення енергії між механічним та електричним полями піроелектрика, з такими властивостями симетрії:

$$e_{kij} = e_{kji}. \quad (1.7)$$

Тензор χ_{ij} характеризує коефіцієнти діелектричної проникливості і має наступні властивості:

$$\begin{aligned} \chi_{ij} &= \chi_{ji}, \\ \chi_{ij}\xi_i\xi_j &\geq \chi_0\xi_i\xi_j, \chi_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_i \in R. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Вектор π_k містить коефіцієнти піроелектрики, які відповідають за первинний піроефект та характеризують перетворення енергії між електричним та тепловим полями. Позначення ρ та c_v означають густину маси піроелектрика та його питому теплоємність відповідно.

Як і в роботах Шинкаренка [28, 29], для того щоб взяти до уваги в'язкість піроелектричних матеріалів, будемо використовувати модифіковане рівняння (1.1) для механічного напруження σ_{ij} з додатковим членом пропорційним до швидкості механічної деформації. Тому, основне відношення між механічними напруженням та деформацією тепер має вигляд:

$$\sigma_{ij} = c_{ijklm}[\varepsilon_{km} - \alpha_{km}\theta] - e_{kij}E_k + a_{ijklm}\varepsilon'_{km}, \quad (1.9)$$

де a_{ijklm} – тензор коефіцієнтів в'язкості з властивостями симетрії та еліптичності:

$$\begin{aligned} a_{ijklm} &= a_{jiklm} = a_{kmlji}, \\ a_{ijklm}\kappa_{ij}\kappa_{km} &\geq a_0\kappa_{ij}\kappa_{km}, a_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \kappa_{ij} = \kappa_{ji} \in R. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для того, щоб дослідити динамічну взаємодію механічного, електричного та теплового полів у піроелектрику, основні феноменологічні співвідношення (1.1) - (1.4) доповнюються рівняннями руху, рівняннями Максвелла для електричного поля та рівнянням теплопровідності.

З узагальненого принципу Гамільтона одержуються наступні рівняння руху:

$$\rho u_i'' - \sigma_{ij,j} = \rho f_i, \quad (1.11)$$

де f_i – вектор об'ємних механічних навантажень.

Як і в роботах Шинкаренка [28, 29], для опису динаміки електричного поля будемо використовувати рівняння, що одержується з допомогою диференціювання закону Максвелла:

$$D'_{k,k} + J_{k,k} = 0, \quad (1.12)$$

де J_k – вектор електричного струму. Тут припускається, що піроелектрик не є ідеальним діелектриком, отож електричний струм протікає вздовж піроелектрика згідно з стандартним законом Ома:

$$J_k = z_{km} E_m(p). \quad (1.13)$$

Тут z_{km} – тензор коефіцієнтів електричної провідності з звичайними властивостями симетрії та еліптичності:

$$\begin{aligned} z_{km} &= z_{mk}, \\ z_{km} \xi_k \xi_m &\geq z_0 \xi_k \xi_m, \quad z_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_k \in R. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Також з принципу Гамільтона впливає наступне рівняння теплопровідності:

$$\rho(T_0 S' - w) + q_{i,i} = 0, \quad (1.15)$$

де q_i – вектор теплового потоку та w – об'ємні джерела притоку тепла. В класичних моделях термопружності та терноп'єзоелектрики для опису взаємодії теплового потоку q_i та приросту температури θ використовується закон Фур'є:

$$q_i = -\lambda_{ij} \theta_{,j}, \quad (1.16)$$

де λ_{ij} – тензор коефіцієнтів теплопровідності з властивостями симетрії та еліптичності:

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \lambda_{ji}, \\ \lambda_{ij} \xi_i \xi_j &\geq \lambda_0 \xi_i \xi_j, \quad \lambda_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_i \in R. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Сформулюємо тепер початково-крайову задачу термоп'єзоелектрики. Припустимо, що екземпляр піроелектрика займає обмежену область Ω в евклідовому просторі R^d , $d = 1, 2, 3$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ та з одиничним вектором зовнішньої нормалі $n = (n_1, n_2, \dots, n_d)$, де $n_i = \cos(n, x_i)$. Нехай $x = \{x_i\}_{i=1}^d$ – точка в області Ω та t – час, $t \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$. Необхідно знайти вектор пружних зміщень $u = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^d$, електричний потенціал $p = p(x, t)$ та приріст температури $\theta = \theta(x, t)$, що задовольняють рівняння еластодинаміки (1.11), рівняння електродинаміки (1.12) та рівняння теплопровідності (1.15), які в свою чергу використовують основні феноменологічні співвідношення (1.2)-(1.4), (1.9). Для однозначної розв'язності системи цих диференціальних рівнянь в частинних похідних доповнимо систему відповідними крайовими та початковими умовами.

Крайові та початкові умови ми виберемо таким же чином як і в роботах Шинкаренка [28, 29]. Крайові умови для механічного поля мають вигляд:

$$\begin{cases} u_i = 0 & \text{на } \Gamma_u \times [0, T], \Gamma_u \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_u) > 0 \\ \sigma_{ij}n_j = \hat{\sigma}_i & \text{на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma := \Gamma \setminus \Gamma_u. \end{cases} \quad (1.18)$$

Крайові умови для теплового поля:

$$\begin{cases} \theta = 0 & \text{на } \Gamma_\theta \times [0, T], \Gamma_\theta \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_\theta) > 0, \\ q_i n_i = \hat{q} & \text{на } \Gamma_q \times [0, T], \Gamma_q := \Gamma \setminus \Gamma_\theta. \end{cases} \quad (1.19)$$

Крайові умови для електричного поля:

$$\begin{cases} p = 0 & \text{на } \Gamma_p \times [0, T], \Gamma_p \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_p) > 0, \\ [D'_k + J_k] n_k = 0 & \text{на } \Gamma_d \times [0, T], \Gamma_d \subset \Gamma, \Gamma_p \cap \Gamma_d = \emptyset \\ \int_{\Gamma_e} [D'_k + J_k] n_k d\gamma = I & \text{на } \Gamma_e \times [0, T], \Gamma_e = \Gamma \setminus (\Gamma_d \cup \Gamma_p), \\ E_k(p) - n_k E_m(p) n_m = 0 & \text{на } \Gamma_e \times [0, T]. \end{cases} \quad (1.20)$$

Для завершення постановки початково-крайової задачі класичної термоп'єзоелектрики наведемо початкові умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = v_0, \quad p|_{t=0} = p_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Отже, до початково-крайової задачі класичної термоп'єзоелектрики входять: рівняння еластодинаміки (1.11), рівняння Максвелла (1.12) та рівняння теплопровідності (1.15), основні феноменологічні співвідношення (1.2)-(1.4), (1.9), закон Ома (1.13), закон Фур'є (1.16), крайові умови

(1.18)-(1.20) та початкові умови (1.21). Для скорочення записів нижче на цю модель термоп'єзоелектрики будемо посилалися скороченням ТПЕ-К. У роботах Шинкаренка [28, 29] також розглядається ТПЕ-К, сформульовано відповідну варіаційну задачу та доведено її коректність, розроблено чисельні схеми її розв'язування. Ця задача буде основою досліджень, проведених в Розділі 2 та Розділі 3, які в основному будуть полягати в практичній реалізації числових схем та проведенні числових експериментів та аналізі одержаних результатів.

Необхідно зазначити, що згідно з Nowacki [92], для існування єдиного розв'язку ТПЕ-К, повинна виконувати нерівність:

$$\chi_{km}y_k y_m + 2\pi_k y_k \xi + \rho c_v \xi^2 \geq 0 \quad \forall \xi, y_k \in R. \quad (1.22)$$

У роботах Шинкаренка [28, 29] також коректність варіаційної задачі доведена з використанням нерівності (1.22). З практичної точки зору виконання цієї нерівності для кераміки PZT-4 перевірено в нашій статті [20].

Також варто зауважити, що якщо знехтувати тепловим полем (вважати, що ми маємо справу з п'єзоелектриком, а не з піроелектриком), то відкинути рівняння теплопровідності (1.15) та занулити коефіцієнти π_k та α_{km} в основних співвідношеннях, то ми отримаємо початково-крайову задачу п'єзоелектрики, яка є частковим випадком ТПЕ-К. Введемо скорочення ПЕ-К для неї. Задача ПЕ-К ґрунтовно розглянута в дисертації Чабана [23]. Зокрема, ним побудовано проєкційно-сіткову схему розв'язування задачі ПЕ-К, доведено її стійкість та збіжність та проведено ряд чисельних експериментів для одновимірних та двовимірних областей. Також ним побудовано адаптивну схему для розв'язування задачі ПЕ-К у випадку вимушених гармонійних коливань. Оскільки ПЕ-К є насправді частковим випадком ТПЕ-К, при проведенні числових експериментів в Розділі 2 та Розділі 3 також деколи буде робитися порівняння числових розв'язків ТПЕ-К з числовими розв'язками ПЕ-К для оцінки вкладу теплового поля в систему.

1.2.2 Задача узагальненої термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана

Розглянемо детальніше закон Фур'є для ізотропного матеріалу. У цьому випадку він виглядає наступним чином:

$$\mathbf{q} = -k\nabla\theta. \quad (1.23)$$

Тут \mathbf{q} – вектор теплового потоку, k – коефіцієнт теплопровідності ізотропного матеріалу. Якщо підставити цей вираз (1.23) у рівняння теплопровідності (1.15), знехтувавши взаємодії з механічним та електричним полями та поклавши значення об'ємних джерел тепла $w = 0$, то отримаємо наступне рівняння:

$$k\nabla^2\theta = \rho c_v\theta'. \quad (1.24)$$

Як видно, рівняння (1.24) є параболічним. Це означає нескінченну швидкість поширення тепла в матеріалі. В свою чергу рівняння еластодинаміки (1.11) є гіперболічним і механічні хвилі поширюються зі скінченною швидкістю. Тому виникає потреба модифікувати задачу ТПЕ-К таким чином, щоб поширення тепла також було хвилеподібним.

Фундаментальними роботами в цьому напрямку були роботи Cattaneo [51] та Vernotte [139]. В цих роботах було запропоновано замінити закон Фур'є (1.23) на модифікований закон, який у випадку гомогенного та ізотропного матеріалу виглядає так:

$$\tau\mathbf{q}' + \mathbf{q} = -k\nabla\theta, \quad (1.25)$$

де τ – деяка невід'ємна константа. Відповідне рівняння теплопровідності буде в цьому випадку виглядати таким чином:

$$k\nabla^2\theta = \rho c_v [\theta' + \tau\theta'']. \quad (1.26)$$

На відміну від рівняння 1.24), воно вже є гіперболічним і передбачає поширення тепла зі скінченною швидкістю v_θ :

$$v_\theta = \left(\frac{k}{\rho c_v \tau} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.27)$$

якщо $\tau > 0$.

Стала $\tau > 0$ з рівняння (1.24) має чітку фізичну інтерпретацію. Вона визначає проміжок часу, який потрібний, щоб встановити стаціонарну

теплопровідність в елементі об'єму, коли градієнт температури прикладається до цього елемента. Цю величину ще називають "тепловим часом релаксації" а константу τ – "параметром часу релаксації".

Різні дослідники працювали над визначенням значення параметра τ для різних типів матеріалів. Як зазначено в [56], значення параметра τ коливається між 10^{-10} (для газів) та 10^{-14} (для металів). Значення параметра для рідин і діелектриків також входять в цей діапазон. Довгий час вважалося, що такі малі значення параметра τ характерні для усіх матеріалів. Але згодом, було досліджено, що $\tau = 21\text{с}$ для піску, $\tau = 25\text{с}$ для гіалуронової кислоти, $\tau = 29\text{с}$ для NaHCO_3 та $\tau = 16\text{с}$ для вареного м'яса, див. напр. [59].

Вагомість впливу останнього доданка правої частини рівняння (1.26) залежить переважно від трьох складових: значення τ , періоду часу спостереження T і швидкості приросту температури. Tzou [136] показав, що цей доданок вказує на домінантність хвильової складової поширення тепла над дифузійною, якщо:

$$\theta' \gg \frac{\theta_0}{2\tau} \exp(T/\tau). \quad (1.28)$$

З цього випливає, що хвилеподібне поширення тепла є найбільш помітним, якщо виконується хоча б одна з умов:

- τ – велике;
- T – мале;
- θ' – велике.

Зауважимо, що у випадку анізотропного матеріалу, модифікований закон Фур'є (1.25) набуває вигляду:

$$\tau q'_i + q_i = -\lambda_{ij} \theta_{,j}, \quad (1.29)$$

де λ_{ij} – коефіцієнти теплопровідності. Рівняння (1.29) в літературі відоме під різними назвами: рівняння Maxwell-Cattaneo-Vernotte, рівняння Maxwell-Cattaneo, рівняння Cattaneo-Vernotte.

Рівняння виду (1.29) для термоп'єзоелектрики вперше було застосовано Kaliski [75]. Але найбільший вплив мала пізніша робота Lord & Shulman

[86], в якій рівняння такого виду використовувалося для задач термопружності. Тому використання рівняння виду (1.29) в задачах термопружності та термоп'єзоелектрики дістало загальновідому назву – модель Лорда-Шульмана. Згодом Lebon [83] запропонував вважати тепловий потік \mathbf{q} як незалежну змінну. Chandrasekharaiah [57] вперше використав рівняння (1.29) до задач термоп'єзоелектрики з одночасним трактуванням теплового потоку \mathbf{q} як незалежної змінної.

При аналізі задачі термоп'єзоелектрики з рівнянням (1.29) Chandrasekharaiah [57] вводить допоміжні коефіцієнти b_{ij} таким чином:

$$T_0 b_{ij} \lambda_{jm} = \delta_{im}, \quad (1.30)$$

де δ_{im} – елементи одиничної матриці. Тоді вони також задовольняють властивості симетрії та еліптичності:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= b_{ji}, \\ b_{ij} \xi_i \xi_j &\geq b_0 \xi_i \xi_j, \quad b_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_i \in R. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Тоді рівняння Maxwell-Cattaneo-Vernotte (1.29) може бути переписане в вигляді:

$$\tau b_{ij} q_i' + b_{ij} q_i = -T_0^{-1} \theta_{,j}. \quad (1.32)$$

В нашій роботі також будемо використовувати такий запис рівняння Maxwell-Cattaneo-Vernotte.

Сформулюємо тепер початково-крайову задачу термоп'єзоелектрики згідно моделі Лорда-Шульмана. Припустимо, що екземпляр піроелектрика займає обмежену область Ω в Евклідовому просторі R^d , $d = 1, 2, 3$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ та одиничним вектором зовнішньої нормалі $n = (n_1, n_2, \dots, n_d)$, де $n_i = \cos(n, x_i)$. Нехай $x = \{x_i\}_{i=1}^d$ – точка в області Ω та t – час, $t \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$. Необхідно знайти вектор пружних зміщень $u = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^d$, електричний потенціал $p = p(x, t)$, приріст температури $\theta = \theta(x, t)$ та вектор теплових потоків $q = \{q_i(x, t)\}_{i=1}^d$, що задовольняють рівняння еластодинаміки (1.11), рівняння Максвелла (1.12) та рівняння теплопровідності (1.15) з використанням рівняння Maxwell-Cattaneo-Vernotte (1.32) замість закону Фур'є (1.16). Для однозначної розв'язності системи цих диференціальних рівнянь в частинних похідних доповнимо систему відповідними крайовими та початковими умовами. Крайові умови –

ті ж самі, що для задачі ТПЕ-К. Початкові умови повинні містити значення теплового потоку, тому матимуть вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = v_0, \quad p|_{t=0} = p_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad q|_{t=0} = q_0 \quad \text{в } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Отже, до початково-крайової задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана входять: рівняння еластодинаміки (1.11), рівняння Максвелла (1.12) та рівняння теплопровідності (1.15), основні співвідношення (1.2)-(1.4), (1.9), закон Ома (1.13), рівняння Maxwell-Cattaneo-Vernotte (1.32), крайові умови (1.18)-(1.20) та початкові умови (1.33). Позначимо цю початково-крайову задачу як ТПЕ-ЛШ. Chandrasekharaiah [57] довів єдиність розв'язку задачі ТПЕ-ЛШ у випадку виконання нерівності (1.22). Варто зауважити, що поклавши $\tau = 0$ в рівняння Maxwell-Cattaneo-Vernotte (1.32), ми отримуємо початково-крайову задачу класичної термоп'єзоелектрики ТПЕ-К.

1.2.3 Задача узагальненої термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея

Насправді, рівняння класичної лінійної математичної моделі термоп'єзоелектрики отримуються з використанням нерівності Clausius-Duhem [56], яка вимагає додатній приріст ентропії в системі:

$$\rho(TS' - w) + q_{i,i} - (q_i/T)T_{,i} \geq 0. \quad (1.34)$$

Тут T – абсолютне значення температури піроелектрика. Green & Lindsay [66] модифікували задачу термопружності, використовуючи при виведенні її рівнянь частковий випадок нерівності Green-Laws [56] замість нерівності Clausius-Duhem, яка виглядає наступним чином:

$$\rho(T^*S' - w) + q_{i,i} - (q_i/T^*)T_{,i}^* \geq 0. \quad (1.35)$$

Тут $T^* = T^*(T_0, T, T')$ – деяка скалярна функція, яка завжди набуває додатніх значень. Chandrasekharaiah [55] застосував теорію Green & Lindsay до термоп'єзоелектрики, використовуючи при виведенні рівнянь нерівність (1.35) і довів єдиність розв'язку такої початково-крайової задачі за умови (1.22). Дещо спрощений варіант виведень таких рівнянь для задачі термопружності можна побачити в роботі [72].

На відміну від моделі Лорда-Шульмана, модель Гріна-Ліндсея не суперечить класичному закону Фур'є (1.16). Замість цього, вона модифікує основні співвідношення класичної моделі термоп'єзоелектрики. Модель

Гріна-Ліндсея передбачає два параметри часу релаксації $t_1 \geq t_0 > 0$, які не пов'язані з параметром релаксації τ моделі Лорда-Шульмана.

У моделі Гріна-Ліндсея основні співвідношення (1.9), (1.2), (1.3) набувають вигляду:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}[\varepsilon_{km} - \alpha_{km}(\theta + t_1\theta')] - e_{kij}E_k + a_{ijkl}\varepsilon'_{km}, \quad (1.36)$$

$$D_k = e_{kij}\varepsilon_{ij} + \chi_{km}E_m + \pi_k(\theta + t_1\theta'), \quad (1.37)$$

$$\rho S = c_{ijkl}\alpha_{km}\varepsilon_{ij} + \pi_k E_k + \frac{\rho c_v}{T_0}(\theta + t_0\theta'). \quad (1.38)$$

Сформулюємо тепер початково-крайову задачу термоп'єзоелектрики для моделі Гріна-Ліндсея. Припустимо, що екземпляр піроелектрика займає обмежену область Ω в Евклідовому просторі R^d , $d = 1, 2, 3$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ та з одиничним вектором зовнішньої нормалі $n = (n_1, n_2, \dots, n_d)$, де $n_i = \cos(n, x_i)$. Нехай $x = \{x_i\}_{i=1}^d$ – точка в області Ω та t – час, $t \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$. Необхідно знайти вектор пружних зміщень $u = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^d$, електричний потенціал $p = p(x, t)$ та приріст температури $\theta = \theta(x, t)$, що задовольняють рівняння еластодинаміки (1.11), рівняння Максвелла (1.12) та рівняння теплопровідності (1.15). Для однозначної розв'язності системи цих диференціальних рівнянь в частинних похідних доповнимо систему відповідними крайовими та початковими умовами. Крайові умови – ті ж самі, що для задачі ТПЕ-К. Початкові умови повинні містити значення похідної від приросту температури, тому матимуть вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = v_0, \quad p|_{t=0} = p_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta'|_{t=0} = \theta_{10} \quad \text{в } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.39)$$

Отже, до початково-крайової задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея входять: рівняння еластодинаміки (1.11), рівняння Максвелла (1.12) та рівняння теплопровідності (1.15), основні співвідношення (1.4) та (1.36)-(1.38), закон Ома (1.13), закон Фур'є (1.16), крайові умови (1.18)-(1.20) та початкові умови (1.39). Позначимо цю початково-крайову задачу як ТПЕ-ГЛ. Chandrasekharaiah [55] довів єдиність розв'язку задачі ТПЕ-ГЛ у випадку виконання нерівності (1.22). Варто зауважити, що поклавши $t_1 = t_0 = 0$ в основні співвідношення (1.36)-(1.38), ми отримуємо початково-крайову задачу класичної термоп'єзоелектрики ТПЕ-К.

Хоча і з задачі ТПЕ-ЛШ, і з задачі ТПЕ-ГЛ можна отримати класичну задачу термоп'єзоелектрики ТПЕ-К, зануливши параметри часу релаксації, немає прямого способу перейти від задачі ТПЕ-ГЛ до задачі ТПЕ-ЛШ (і навпаки), використовуючи подані вище постановки задач. В літературі відомі спроби уніфікувати запис рівнянь задач ТПЕ-ЛШ та ТПЕ-ГЛ таким чином, щоб одна система рівнянь могла описувати як і модель Лорда-Шульмана, так і модель Гріна-Ліндсея (звісно, такий ефект досягається зануленням певних коефіцієнтів). Зокрема, Ignaszak [71] розробив уніфікований запис задачі термопружності для ізотропного матеріалу. El-Karamany & Ezzat [63] сформулювали уніфікований запис задачі термоп'єзоелектрики, який враховує випадки моделей Lord-Shulman, Green-Lindsay та Chandrasekharaiah-Tzou. Задачі ТПЕ-ЛШ та ТПЕ-ГЛ в літературі є також відомі як "узагальнені задачі термоп'єзоелектрики".

1.2.4 Основні результати теоретичного аналізу задач термоп'єзоелектрики

Протягом останніх десятиліть розробка методів для розв'язування класичної та узагальнених задач термоп'єзоелектрики є актуальною проблемою і була розглянута в працях багатьох дослідників. Для розв'язування таких задач використовувалися як чисельні, так і аналітичні методи.

Шинкаренко [28, 29] довів коректність постановки варіаційної задачі термоп'єзоелектрики, яка враховує в'язкість та яка містить рівняння електродинаміки. Хоча в дисертації Чабана [23] описані результати експериментів для таких задач п'єзоелектрики, для задач термоп'єзоелектрики за постановкою Шинкаренка [28, 29] не було розроблено програмного забезпечення для проведення чисельних експериментів. Тому одним з завдань дисертації є розробка таких програмних засобів та порівняння отриманих результатів числових експериментів з результатами інших дослідників.

Chandrasekharaiah [55, 57] довів єдиність розв'язку задачі ТПЕ-ЛШ та ТПЕ-ГЛ у випадку виконання нерівності (1.22). Проте, ніде в літературі не досліджено коректність постановки цих задач. Варіаційні методи для задач класичної термоп'єзоелектрики розглянуто в працях Altay & Dosteci [35, 62]. Варіаційні методи для узагальнених задач термоп'єзоелектрики розглянуто в працях Kuang [78–80]. Однак, у літературі відсутні варіаційні методи для узагальнених задач термоп'єзоелектрики з ураху-

ванням в'язкості та з рівняннями електродинаміки. Тому, зважаючи на вищезгадані факти, одним з завдань дисертації є формулювання відповідних варіаційних задач узагальненої термоп'єзоелектрики та дослідження їх коректності. Як і в працях Шинкаренка [28, 29], досліджувати будемо і варіаційні задачі для вимушених коливань піроелектрика.

Aouadi [34] застосував комбінований метод скінченних елементів з перетворенням Лапласа для порівняння розв'язків задач термоп'єзоелектрики для нескінченної пластини піроелектрика у випадках класичної моделі та моделей Lord-Shulman, Green-Lindsay та Chandrasekharaiah-Tzou. В іншій своїй праці Aouadi [33] застосував узагальнену модель Лорда-Шульмана до задачі термо-магнетоелектропружності і довів єдиність її розв'язку. Схожу модель для термо-магнетоелектропружності на основі моделі Лорда-Шульмана запропонував El-Karamany [64]. He et al. [67] застосували метод скінченних елементів до узагальнених задач термо-магнетоелектропружності з врахуванням дифузійних процесів. Othman et al. [94] проаналізували поведінку піроелектрика з гексагональною кристалічною ґраткою на резонансних частотах з порівнянням результатів отриманих з застосуванням класичної теорії, теорії Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея. Heidary & Eslami [68] використовують метод скінченних елементів та схему Ньюмарка для розв'язування класичної задачі термоп'єзоелектрики. В роботі Ashida & Tauchert [37] використовується метод скінченних різниць для розв'язування класичної задачі термоп'єзоелектрики. В роботах Ashida & Tauchert [36, 39–41, 43, 132] використовуються аналітичні методи для розв'язування класичної задачі термоп'єзоелектрики в специфічних областях. В працях Sladek et al. [108–114] використовуються безсіткові методи для розв'язування класичної задачі термоп'єзоелектрики.

Singh [106] досліджує поширення площинних гармонічних хвиль для моделей термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея. Sharma [100] досліджує поширення площинних гармонічних хвиль для моделі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. У роботах Yuan [145–147] досліджуються поширення площинних гармонічних хвиль для моделі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. У роботі Zhou & Yang [148] досліджуються поширення площинних гармонічних хвиль для моделі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана з врахуванням ефектів в'язкості.

Окремим видом задачі виступає задача про вимушені гармонійні коливання піроелектрика. Вперше вимушені коливання для задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана розглянуті у праці Nandy [90]. Bendjedou [47] досліджує вимушені коливання пластини п'єзоелектрика. Buchanan [49] досліджує вимушені коливання піроелектрика для класичної моделі термоп'єзоелектрики. Деякі аналітичні методи дослідження вимушених коливань піроелектрика для класичної моделі термоп'єзоелектрики представлені у роботах Yang & Batra [143] та Kapuria & Alam [76]. Karnaukhov et al. [77] розглядають затухаючі коливання пластини піроелектрика. В роботах Tauchert [129] та Tang & Xu [128] розглядаються вимушені коливання пластини з ламінованим шаром піроелектрика на ній. Wauer [140] розглядає вимушені коливання у випадку магнето-електро-термопружності. В дисертації Чабана [23] та статті [22] описана адаптивна схема для задачі про вимушені коливання п'єзоелектрика, що дозволяє отримувати розв'язки цієї задачі з наперед заданою точністю. Проте, в літературі не знайдено якогось аналогічного адаптивного методу для задач термоп'єзоелектрики про вимушені коливання піроелектрика. Тому одним із завдань дисертації буде розробка адаптивної схеми для розв'язування такого виду задач.

Інший сегмент наукових праць з теорії термоп'єзоелектрики складають роботи, які моделюють поведінку піроелектричних складових в інженерних системах, наприклад, коли піроелектрик використовується як актуатор, сенсор чи перетворювач енергії. В роботі Tauchert et al. [131] зроблений огляд публікацій на тему моделювання задач термоп'єзоелектрики цікавих з практичної точки зору. Результати моделювання практично важливих застосувань піроелектриків (п'єзоелектричний перетворювач енергії), зроблені за допомогою методу скінченних елементів та їх порівняння з експериментальними даними можна побачити у, наприклад, [144].

1.3 Методи розв'язування задач термоп'єзоелектрики

Як можна бачити з вищенаведених постановок задач термоп'єзоелектрики, вони є початково-крайовими (чи крайовими у випадку вимушених гармонійних коливань) задачами з системою диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для розв'язування такого роду задач розроблені як аналіти-

чні, так і числові методи.

Найбільш поширеним аналітичним методом для розв'язування таких задач є метод рядів Фур'є, який використовує розділення змінних та в результаті подає розв'язок у вигляді суми деякого ряду. Іншим аналітичним методом, що часто використовується, є метод функції Гріна [97]. Також поширене використання різноманітних модифікацій перетворення Лапласа. Наприклад, у роботах Грінченка [5, 6], Карнаухова [9], Улітка [4], Шульги [4, 30], Ashida & Tauchert [43, 132] можна побачити аналітичні методи для розв'язування задач п'єзоелектрики та термоп'єзоелектрики у специфічних областях. В роботі Ashida & Tauchert [42] аналітичний метод застосовується до задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. А Shen & Tian в своїй статті [101] використовують аналітичний метод FLIT (швидке обернене перетворення Лапласа) для розв'язування узагальнених задач термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея. Проте, зазвичай аналітичні методи вдається застосувати для розв'язування задач термоп'єзоелектрики з значними обмеженнями. Зокрема, переважно вони виявляються ефективними лише для окремих типів областей, в яких шукається розв'язок. Також, зміна типу крайових умов, коефіцієнтів рівнянь системи може провокувати труднощі для розв'язування аналітичними методами.

Числові методи дають змогу обійти вищезгадані обмеження аналітичних методів. Проте, очевидно, їхнім результатом є лише наближений розв'язок і не завжди можна бути впевненим, що це наближення повністю відображає характер шуканого розв'язку. З стрімким розвитком обчислювальної техніки поширилося їхнє застосування та розробка нових числових методів. До стандартного набору методів розв'язування крайових задач входять різницеві схеми (напр. метод скінченних різниць), метод граничних елементів, метод скінченних елементів тощо. Для інтегрування за часовою змінною можуть використовуватися методи Ейлера, Рунге-Кутта, схеми Ньюмарка, Кранка-Ніколсона.

1.3.1 Проекційно-сіткові методи. Метод скінченних елементів

Застосування різницевих схем до деяких задач стикнулося з проблемою, що при певних умовах в певній частині області (найчастіше в приміжевих шарах) числовий розв'язок демонстрував сингулярні осциляції. Рівномірне

(чи квазірівномірне) згущення сітки не вирішувало цієї проблеми. В таких випадках найкраще зарекомендував себе метод скінченних елементів (МСЕ), який дозволяє найбільш гнучко проводити адаптування сітки.

МСЕ – найбільш поширений спосіб побудови базису простору допустимих функцій в методі Гальоркіна. Для його застосування область, в якій шукається розв’язок, ділиться на скінченні елементи. Для одновимірних задач такими елементами є відрізки, для двовимірних – трикутники та чотирикутники (зокрема прямокутники), для тривимірних – шестигранники та тетраедри. На кожному скінченному елементі вибираються вузли, які використовуються як точки інтерполювання для апроксимації шуканого розв’язку. В залежності від використаного інтерполяційного многочлена отримуємо різні порядки апроксимацій. Зокрема, в одновимірному випадку найбільш поширеними є лінійні, квадратичні та кубічні апроксимації, а в двовимірному – білінійні, біквадратичні та серендипові.

Окремими різновидами МСЕ є адаптивні МСЕ. Саме вони дозволяють ефективно боротися з осциляціями в чисельних розв’язках та дозволяють отримати результати з наперед заданою точністю. Існує три основних різновиди адаптивного МСЕ: h -адаптивний (коли відбувається локальне згущення сітки), p -адаптивний (коли ми змінюємо порядок інтерполяційного полінома на окремих скінченних елементах) та комбінація двох попередніх методів – hp -адаптивний МСЕ.

1.4 Програмна реалізація та апробація

На даний момент існують програмні комплекси, які дозволяють розв’язувати широкий спектр початко-крайових та крайових задач за допомогою методу скінченних елементів. Таке програмне забезпечення буває як безкоштовним з відкритим вихідним кодом (наприклад, FEniCS та FreeFEM++), так і комерційним (наприклад, ANSYS та COMSOL Multiphysics). Однак, їх недоліком є те, що вони не достатньо гнучкі до внесення змін у математичну модель задачі (наприклад, додавання якогось параметра в модель) та не завжди дозволяють зробити деяку специфічну модифікацію в схемі МСЕ.

Тому для повного контролю над чисельним алгоритмом розв’язування

задач термоп'єзоелектрики, автором було розроблено власний набір програм: окремі програми для одновимірних та двовимірних динамічних задач термоп'єзоелектрики, окремі програми для одновимірних та двовимірних задач про вимушені коливання піроелектриків. Програми розроблені на платформі .NET мовою програмування C# за допомогою інтегрованого середовища розробки Microsoft Visual Studio. Для полегшення розробки програм використовувалася система контролю версій Git. Для візуалізації отриманих результатів використовувалися пакети MatLab та Wolfram Mathematica.

Для апробації результатів у випадку програм для класичної термоп'єзоелектрики, спочатку занулювалися параметри, що відповідають за зв'язок з тепловим полем і порівнювалися результати з результатами отриманими Чабаном у його дисертації [23] для задачі п'єзоелектрики. Також для модельної задачі термоп'єзоелектрики проводилося порівняння з результатами Sladek et al. [111], які вони отримали за допомогою іншого методу розв'язування. Для апробації програм, що побудовані для моделей Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея, спочатку занулювалися параметри "часу релаксації" і результати порівнювалися з результатами отриманими за допомогою програм для класичної термоп'єзоелектрики. Також апробацію програми для динамічної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана було зроблено шляхом порівняння одержаних результатів з результатами наведеними у праці Sumi & Ashida [127], які отримані методом характеристик.

1.5 Висновки та заключні зауваження

У цьому розділі розглянуто постановку задач класичної термоп'єзоелектрики, а також моделей термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея з врахування впливу в'язкості. Ці типи задач є об'єктами наших подальших досліджень. Проведено огляд методів розв'язування та сучасних досліджень класичної та узагальнених задач термоп'єзоелектрики. На цій основі визначено основні задачі та цілі досліджень у дисертації:

1. Програмна реалізація схем МСЕ для задач класичної термоп'єзоелектрики та їх апробація на ряді модельних задач з порівнянням одержаних результатів з результатами інших дослідників.

2. Побудова h -адаптивної схеми МСЕ для розв'язування задач про вимушені коливання піроелектрика з наперед заданою точністю у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики.
3. Аналіз коректності варіаційних задач у випадках узагальнених задач термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея.
4. Побудова та аналіз стійкості та збіжності проекційно-сіткових схем для розв'язування узагальнених задач термоп'єзоелектрики.
5. Програмна реалізація схем МСЕ для розв'язування задач термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея.

РОЗДІЛ 2

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПРО ВИМУШЕНІ ГАРМОНІЙНІ КОЛИВАННЯ У КЛАСИЧНІЙ ТЕОРІЇ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ

У цьому розділі зроблено формулювання варіаційних задач класичної термоп'єзоелектрики. На основі варіаційної задачі про вимушені гармонійні коливання піроелектрика побудовано чисельну схему МСЕ для розв'язування цієї задачі. Розроблено програмну реалізацію цієї схеми для одновимірних та двовимірних областей, та з її допомогою проведено чисельні експерименти. Побудовано h -адаптивну схему МСЕ для розв'язування цієї задачі з наперед заданою точністю.

2.1 Формулювання варіаційних задач класичної термоп'єзоелектрики

2.1.1 Варіаційне формулювання динамічної задачі класичної термоп'єзоелектрики

З огляду на початково-крайову задачу термоп'єзоелектрики ТПЕ-К, введемо простори допустимих функцій пружного зміщення, електричного потенціалу та приросту температури

$$\begin{aligned} V &= \{v \in [H^1(\Omega)]^d | v = 0 \text{ на } \Gamma_u\}, \\ Q &= \{q = H^1(\Omega) | p = 0 \text{ на } \Gamma_p, q = \text{const на } \Gamma_e\} \\ Z &= \{\xi \in [H^1(\Omega)] | \xi = 0 \text{ на } \Gamma_\theta\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

і будемо використовувати позначення

$$\Phi = V \times Q \times Z, \quad G = L^2(\Omega), \quad H = G^m.$$

Тут символ $H^m(\Omega)$ позначає простір Соболева, що складається з функцій $u(x)$, що інтегровні з квадратом в області Ω разом зі своїми всеможливими частинними похідними

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha_i \geq 0,$$

до m -го порядку включно. Простір $H^m(\Omega)$ є повним за нормою

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} [D^{\alpha}u]^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Припустимо, що дані задачі класичної термop'єзоелектрики ТПЕ-К задовольняють умови

$$\begin{aligned} \psi_0 &= (u_0, p_0, \theta_0) \in \Phi, \quad v_0 \in H, \\ f &\in L^2(0, T; H), \quad w \in L^2(0, T; G), \\ \hat{\sigma} &\in L^2(0, T; [L^2(\Gamma_{\sigma})]^d), \\ \hat{h} &\in L^2(0, T; L^2(\Gamma_h)), \\ I &\in L^{\infty}(0, T). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Використовуючи принцип віртуальних робіт (див. [13]), сформулюємо наступне варіаційне формулювання задачі термop'єзоелектрики ТПЕ-К:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \psi_0 = (u_0, p_0, \theta_0) \in \Phi, \quad v_0 \in H \text{ та } (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'); \\ \text{знайти трійку } \psi = \{u(x, t), p(x, t), \theta(x, t)\} \in L^2(0, T; \Phi) \text{ таку, що} \\ m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - e(p(t), v) - \gamma(\theta(t), v) = \langle l(t), v \rangle, \\ g(p'(t), q) + e(q, u'(t)) + z(p(t), q) + \pi(\theta'(t), q) = \langle r(t), q \rangle, \\ s(\theta'(t), \xi) + k(\theta(t), \xi) + \pi(\xi, p'(t)) + \gamma(\xi, u'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(u'(0) - v_0, v) = 0, \quad c(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V, \\ g(p(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in Z. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Тут Φ' - простір, спряжений до простору Φ , а присутні білінійні форми та

лінійні функціонали визначаються таким чином:

$$\begin{aligned}
m(u, v) &:= \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx = \int_{\Omega} \rho u \cdot v dx, \\
a(u, v) &:= \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx, \\
c(u, v) &:= \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx, \\
\langle l, v \rangle &:= \int_{\Omega} \rho f_i v_i dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\sigma}_i v_i d\gamma, \\
\gamma(\xi, v) &:= \int_{\Omega} \xi c_{ijkl} \alpha_{kl} \varepsilon_{ij}(v) dx, \\
e(q, v) &:= \int_{\Omega} e_{kij} E_k(q) \varepsilon_{ij}(v) dx \quad \forall u, v \in V, \\
g(p, q) &:= \int_{\Omega} g_{km} E_k(p) E_m(q) dx, \\
z(p, q) &:= \int_{\Omega} z_{km} E_k(p) E_m(q) dx, \\
\langle r, q \rangle &:= Iq|_{\Gamma_e}, \\
\pi(\xi, q) &:= \int_{\Omega} \xi \pi_k E_k(q) dx \quad \forall p, q \in Q, \\
s(\theta, \xi) &:= \int_{\Omega} c_{\epsilon} T_0^{-1} \theta \xi dx, \\
k(\theta, \xi) &:= \int_{\Omega} T_0^{-1} \lambda_{ij} \theta_{,i} \xi_{,j} dx, \\
\langle \mu, \xi \rangle &:= \int_{\Omega} T_0^{-1} w \xi dx + \int_{\Gamma_h} T_0^{-1} \hat{h} \xi d\gamma \quad \forall \xi, \theta \in Z.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1.2 Варіаційна задача про вимушені гармонійні коливання піроелектрика за класичною теорією термоп'єзоелектрики

У практичних застосуваннях часто піроелектрик піддається усталеним гармонійним високочастотним навантаженням. Зокрема, часто такі прилади працюють на частотах близьких до резонансних, оскільки у цьому випадку енергетичні характеристики піроелектрика досягають своїх максимальних значень.

За припущення, що піроелектрик піддається гармонійному в часі навантаженню із круговою частотою $\omega > 0$ за законом виду

$$\begin{aligned}
l(t) &= l_1 \cos \omega t + l_2 \sin \omega t, \\
r(t) &= r_1 \cos \omega t + r_2 \sin \omega t, \\
\mu(t) &= \mu_1 \cos \omega t + \mu_2 \sin \omega t \quad \forall t \in (0, T],
\end{aligned} \tag{2.5}$$

має зміст шукати наближені розв'язки задачі (2.3) також у вигляді розв'язків:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\cong u_1(x) \cos \omega t + u_2(x) \sin \omega t, \\ p(x, t) &\cong p_1(x) \cos \omega t + p_2(x) \sin \omega t, \\ \theta(x, t) &\cong \theta_1(x) \cos \omega t + \theta_2(x) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де u_1 , u_2 , p_1 , p_2 та θ_1 , θ_2 - невідомі амплітуди механічних зміщень, електричного потенціалу та приросту температури відповідно. Після підстановки припущення (2.5) та наближення (2.6) у рівняння задачі (2.3) та нехтування її початковими умовами одержуємо варіаційну задачу про вимушені гармонійні коливання піроелектрика:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано кругову частоту } \omega = \text{const} > 0, \\ \text{амплітуди навантажень } \ell = (l_1, r_1, \mu_1, l_2, r_2, \mu_2) \in W' = \Phi' \times \Phi', \\ \text{знайти вектор амплітуд} \\ \psi = (u_1, p_1, \theta_1, u_2, p_2, \theta_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ такий, що} \\ -\omega^2 m(u_1, v_1) + \omega a(u_2, v_1) + c(u_1, v_1) - e(p_1, v_1) - \gamma(\theta_2, v_1) = \langle l_1, v_1 \rangle \\ \forall v_1 \in V, \\ \omega g(p_2, q_1) + \omega e(q_1, u_2) + z(p_1, q_1) + \pi(\theta_2, q_1) = \langle r_1, q_1 \rangle \quad \forall q_1 \in Q, \\ \omega \gamma(\xi_1, u_2) + \omega \pi(\xi_1, p_2) + k(\theta_1, \xi_1) + s(\theta_2, \xi_1) = \langle \mu_1, \xi_1 \rangle \quad \forall \xi_1 \in Z, \\ -\omega^2 m(u_2, v_2) - \omega a(u_1, v_2) + c(u_2, v_2) - e(p_2, v_2) - \gamma(\theta_1, v_2) = \langle l_2, v_2 \rangle \\ \forall v_2 \in V, \\ -\omega g(p_1, q_2) - \omega e(q_2, u_1) + z(p_2, q_2) - \pi(\theta_1, q_2) = \langle r_2, q_2 \rangle \quad \forall q_2 \in Q, \\ -\omega \gamma(\xi_2, u_1) - \omega \pi(\xi_2, p_1) + k(\theta_2, \xi_2) - s(\theta_1, \xi_2) = \langle \mu_2, \xi_2 \rangle \quad \forall \xi_2 \in Z. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Сформульована задача (2.7) буде основним об'єктом дослідження цього розділу.

Введемо білінійну форму $\Pi_\omega(\cdot, \cdot) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ та лінійний функціонал

$\chi_\omega : W \rightarrow \mathbb{R}$ наступним чином:

$$\begin{aligned} \Pi_\omega(\psi, w) = & -\omega^2(m(u_1, v_1) + m(u_2, v_2)) + \omega(a(u_2, v_1) + a(u_1, v_2)) + \\ & + (c(u_1, v_1) + c(u_2, v_2)) - (e(p_1, v_1) + e(p_2, v_2)) + \omega(e(q_1, u_2) - e(q_2, u_1)) - \\ & - (\gamma(\theta_2, v_1) + \gamma(\theta_1, v_2)) + \omega(\gamma(\xi_1, u_2) + \gamma(\xi_2, u_1)) + \omega(\pi(\theta_1, q_2) - \pi(\theta_2, q_1)) + \\ & + \omega(g(p_2, q_1) - g(p_1, q_2)) + (z(p_1, q_1) + z(p_2, q_2)) + \omega(\pi(\xi_1, p_2) - \pi(\xi_2, p_1)) + \\ & + (k(\theta_1, \xi_1) + k(\theta_2, \xi_2)) + \omega(s(\theta_2, \xi_1) - s(\theta_1, \xi_2)) \\ \forall \psi = & (u_1, p_1, \theta_1, u_2, p_2, \theta_2) \in W, \quad \forall w = (v_1, q_1, \xi_1, v_2, q_2, \xi_2) \in W. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \langle \chi_\omega, w \rangle = & \langle l_1, v_1 \rangle + \langle r_1, q_1 \rangle + \langle \mu_1, \xi_1 \rangle + \\ & + \langle l_2, v_2 \rangle + \langle r_2, q_2 \rangle + \langle \mu_2, \xi_2 \rangle \quad \forall w = (v_1, q_1, \xi_1, v_2, q_2, \xi_2) \in W. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тоді варіаційна задача про вимушені гармонійні коливання піроелектрика може бути записана у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано кругову частоту } \omega = \text{const} > 0, \\ \chi_\omega \in W' = \Phi' \times \Phi', \\ \text{знайти вектор амплітуд} \\ \psi = (u_1, p_1, \theta_1, u_2, p_2, \theta_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ такий, що} \\ \Pi_\omega(\psi, w) = \langle \chi_\omega, w \rangle \quad \forall w = (v_1, q_1, \xi_1, v_2, q_2, \xi_2) \in W. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

2.2 Коректність варіаційної задачі про вимушені гармонійні коливання

Наведемо послідовність міркувань, згідно з роботою [28], що дають нам змогу дослідити питання коректності даної варіаційної задачі. Введемо на просторі W скалярний добуток:

$$\begin{aligned} ((y, w)) = & \sum_{i=1}^2 [a(u_i, v_i) + z(p_i, q_i) + k(\theta_i, \xi_i)] \\ \forall y = & (u_1, p_1, \theta_1, u_2, p_2, \theta_2) \in W, \\ \forall w = & (v_1, q_1, \xi_1, v_2, q_2, \xi_2) \in W. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Введемо норму, що відповідає скалярному добутку (2.11):

$$|||y|||^2 = ((y, y)) \quad \forall y \in W. \quad (2.12)$$

Тоді легко встановлюються оцінки:

$$\begin{aligned} |\Pi_\omega(y, w)| \leq & M_1(\omega) |||y||| \cdot |||w|||, \\ M_1(\omega) = & C \max\{\omega^{-1}, 1, \omega, \omega^2\}, \quad \forall y, w \in W, \end{aligned} \quad (2.13)$$

та

$$\begin{aligned} | \langle \chi_\omega, w \rangle | &\leq M_2(\omega) \|\chi_\omega\|_* \cdot \|w\|, \\ M_2(\omega) &= C \max\{\omega^{-1}, 1\}, \quad \forall w \in W. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тут всюди символом C позначено додатні константи, значення яких не залежать від величин, що нас цікавлять.

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що білінійна форма $\Pi_\omega(\cdot, \cdot)$ є W -еліптичною, тобто:

$$\Pi_\omega(w, w) \geq \alpha(\omega) \cdot \|w\|^2, \quad \alpha(\omega) = \min\{\omega^{-1}, \omega\} \quad \forall w \in W. \quad (2.15)$$

Оскільки виконуються умови (2.13) - (2.15), то ми перебуваємо в умовах теореми Лакса-Мільграма-Вишика, з якої випливає справедливність наступної теореми:

Теорема 2.1. *Для кожних значень параметра $\omega > 0$ варіаційна задача (2.10) має єдиний розв'язок $y \in W$, причому*

$$\|y\| \leq \alpha^{-1}(\omega) M_2(\omega) \|\chi_\omega\|_*. \quad (2.16)$$

2.3 Метод скінченних елементів в задачах про вимушені гармонійні коливання

2.3.1 Дискретизація Гальоркіна для одно- та двовимірних задач

У схемі Гальоркіна розв'язок варіаційної задачі (2.10) переноситься з простору $W := \Phi \times \Phi$ до його певного скінченновимірного підпростору $W_h := \Phi_h \times \Phi_h$, $\Phi_h \subset \Phi$, $\dim W_h = N(h) < +\infty$. Тому, дискретизована за Гальоркіним задача (2.10) матиме вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано частоту } \omega > 0, \quad \chi_\omega \in W', \\ \text{простір апроксимацій } W_h \subset W, \quad \dim W_h < +\infty; \\ \text{знайти вектор } \psi_h = (u_{1h}, p_{1h}, \theta_{1h}, u_{2h}, p_{2h}, \theta_{2h}) \in W_h \text{ такий, що} \\ \Pi_\omega(\psi_h, \varphi) = \langle \chi_\omega, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in W_h. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Зважаючи на те, що задача (2.10) є коректно поставленою, то те саме ми можемо стверджувати і щодо задачі (2.17).

2.3.2 Коректність числової схеми: апроксимативність, стійкість та збіжність

Виокремимо в просторі W певний базис $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$. Для кожного натурального $m \geq 1$ покладемо $h = 1/m$. Нехай W_h - послідовність просторів апроксимацій та $\text{Pr}_h : W \rightarrow W_h$ - послідовність операторів ортогонального проектування побудовані таким чином, що множина $\{w_i\}_{i=1}^m$ утворює базис W_h , а $((\psi - \text{Pr}_h \psi, w)) = 0 \forall \psi \in W, \forall w_h \in W_h$.

Тепер ми можемо замінити варіаційну задачу (2.17) послідовністю наступних задач

$$\begin{cases} \text{задано } \omega > 0, \chi_\omega \in W' \text{ та } h > 0, W_h \subset W, \dim W_h = m < +\infty; \\ \text{знайти вектор } \psi_h \in W_h \text{ такий, що} \\ \Pi_\omega(\psi_h, w) = \langle \chi_\omega, w \rangle \quad \forall w \in W_h. \end{cases} \quad (2.18)$$

Тоді, згідно з роботою [28], справедливі наступні теореми:

Теорема 2.2. *Нехай $\psi \in W$ - розв'язок задачі (2.17) з параметром $\omega > 0$. Тоді розв'язки задач (2.18) однозначно визначають послідовність апроксимацій Гальоркіна $\{\psi_h\} \subset W$, для якої виконується*

$$|||\psi - \psi_h||| \leq \alpha^{-1} M_1(\omega) \inf_{w \in W_h} |||\psi - w||| \quad \forall h > 0; \quad (2.19)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |||\psi - \psi_h||| = 0. \quad (2.20)$$

Теорема 2.3. *про збіжність апроксимацій МСЕ.*

Нехай $\psi \in W$ - розв'язок задачі (2.17), причому існує натуральне $k \geq 1$ таке, що $\psi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(d+1)}$, і нехай апроксимації Гальоркіна ψ_h визначаються розв'язками задачі (2.18) в просторах $W_h \subset W$, які побудовані з допомогою кусково-поліноміальних базисів МСЕ та які володіють властивістю квазіоптимального наближення:

для кожного $\varphi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(d+1)}$, $k \geq 1$, існують $\varphi_h \in W_h$ та $C = \text{const} > 0$ такі, що $|||\varphi - \varphi_h|||_{m,\Omega} \leq C \cdot h^{k+1-m} |||\varphi|||_{k+1,\Omega}$, $0 \leq m \leq k$, де h - діаметр триангуляції та k - максимальний степінь повного поліному від d змінних, який точно відтворюється базисними функціями з W_h в межах кожного скінченного елемента.

Тоді справедлива така оцінка швидкості збіжності послідовності $\psi_h \subset W$:

$$|||\psi - \psi_h||| \leq C \cdot h^k \alpha^{-1}(\omega) M_1(\omega) |||\psi|||_{k+1,\Omega}, \quad (2.21)$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять.

2.3.3 Обчислювальні аспекти та результати числових експериментів

Приділимо тепер більшу увагу скінченновимірному простору $W_h \in W$. Згідно з його визначенням, $W_h = V_h \times Q_h \times Z_h V_h \times Q_h \times Z_h$, де

$$\begin{aligned} V_h &\subset V, \quad Q_h \subset Q, \quad Z_h \subset Z, \\ \dim V_h &< +\infty, \quad \dim Q_h < +\infty, \quad \dim Z_h < +\infty. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Виділимо в просторі допустимих функцій $\Phi = V \times Q \times Z$ послідовність скінченновимірних підпросторів апроксимацій $\Phi_h = V_h \times Q_h \times Z_h$, $\dim \Phi_h \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$ з такими властивостями щільності

$$\begin{cases} \text{для кожного вектора } \phi \in \Phi \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{d+2}, \quad k \geq 1, \\ \text{знайдеться вектор } \phi_h \in \Phi_h \text{ і } C = \text{const} > 0 \text{ такі, що} \\ \|\phi - \phi_h\|_{m,\Omega} \leq Ch^{k+1-m} \|\phi\|_{k+1,\Omega}, \quad 0 \leq m \leq k. \end{cases} \quad (2.23)$$

Тоді невідомі амплітуди будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} u_k(x) \cong u_{kh}(x) = \sum_{i=0}^{N_V} U_{ki} \phi_i^V(x), \quad p_k(x) \cong p_{kh}(x) = \sum_{i=0}^{N_Q} P_{ki} \psi_i^Q(x), \\ \theta_k(x) \cong \theta_{kh}(x) = \sum_{i=0}^{N_Z} \Theta_{ki} \varphi_i^Z(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad k = 1, 2. \end{cases} \quad (2.24)$$

В результаті підстановки розвинень (2.24) та базових функцій скінченновимірних підпросторів V_h , Q_h та Z_h у варіаційну задачу (2.7) отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів амплітуд $(U_1, P_1, \Theta_1, U_2, P_2, \Theta_2)$:

$$\begin{bmatrix} \omega A & -[-\omega^2 M + C] & 0 & E^T & 0 & Y^T \\ [-\omega^2 M + C] & \omega A & -E^T & 0 & -Y^T & 0 \\ 0 & \omega E & Z & \omega G & 0 & \omega \Pi^T \\ -\omega E & 0 & -\omega G & Z & -\omega \Pi^T & 0 \\ 0 & \omega Y & 0 & \omega \Pi & K & \omega S \\ -\omega Y & 0 & -\omega \Pi & 0 & -\omega S & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ P_1 \\ P_2 \\ \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Тут елементи матриць та векторів обчислюються за білінійними формами та лінійними функціоналами (2.4).

Одновимірний випадок

Прямий п'єзоефект Розглянемо піроелектричний стрижень з кераміки PZT-4 довжиною $L = 0.01\text{м}$. Припустимо, що напрям його поляризації збігається з напрямом його осі Ox . Коефіцієнти, що характеризують фізико-механічні властивості матеріалу PZT-4, мають такі значення:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 7500\text{кг/м}^3, \quad c = 13.9 \cdot 10^{10}\text{Н/м}^2, \quad e = -15.1\text{Кл/м}^2, \\
 g &= 6.46 \cdot 10^{-8}\text{Ф/м}^2, \quad \text{див. [142];} \\
 z &= 5 \cdot 10^{-12}\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}, \quad \text{див. [81];} \\
 \pi &= 27 \cdot 10^{-5}\text{Кл} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}, \quad \text{див. [87];} \\
 \alpha &= 2 \cdot 10^{-6}\text{К}^{-1}, \quad c_\varepsilon = 350\text{Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}, \\
 \lambda &= 1.16\text{Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}, \quad \text{див. [133]}.
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Прийmemo коефіцієнт в'язкості $a(x) = 4\text{м}^2/\text{с}$ потужність внутрішніх пружних джерел $f = 0\text{м/с}^2$ та потужність внутрішніх теплових джерел $w = 0\text{Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. Візьmemo кругову частоту коливань стержня $\omega = 3 \cdot 10^6\text{рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Вважаємо, що лівий кінець стержня жорстко закріплений, заземлений і підтримується з нульовим збуренням температури. До правого кінця будемо подавати ненульове механічне навантаження, тобто крайові умови на правому кінці матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{cos} &= 5 \cdot 10^6\text{Н/м}^2, \\
 \bar{\sigma}_{sin} &= 0\text{Н/м}^2, \\
 \bar{J}_{cos} &= \bar{J}_{sin} = 0\text{А}, \\
 \bar{h}_{sin} &= \bar{h}_{cos} = 0\text{Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Для дискретизації візьmemo рівномірну сітку з $N = 256$ скінченних елементів з кусково-лінійними апроксимаціями розв'язку. Профілі отриманих розв'язків виглядають наступним чином:

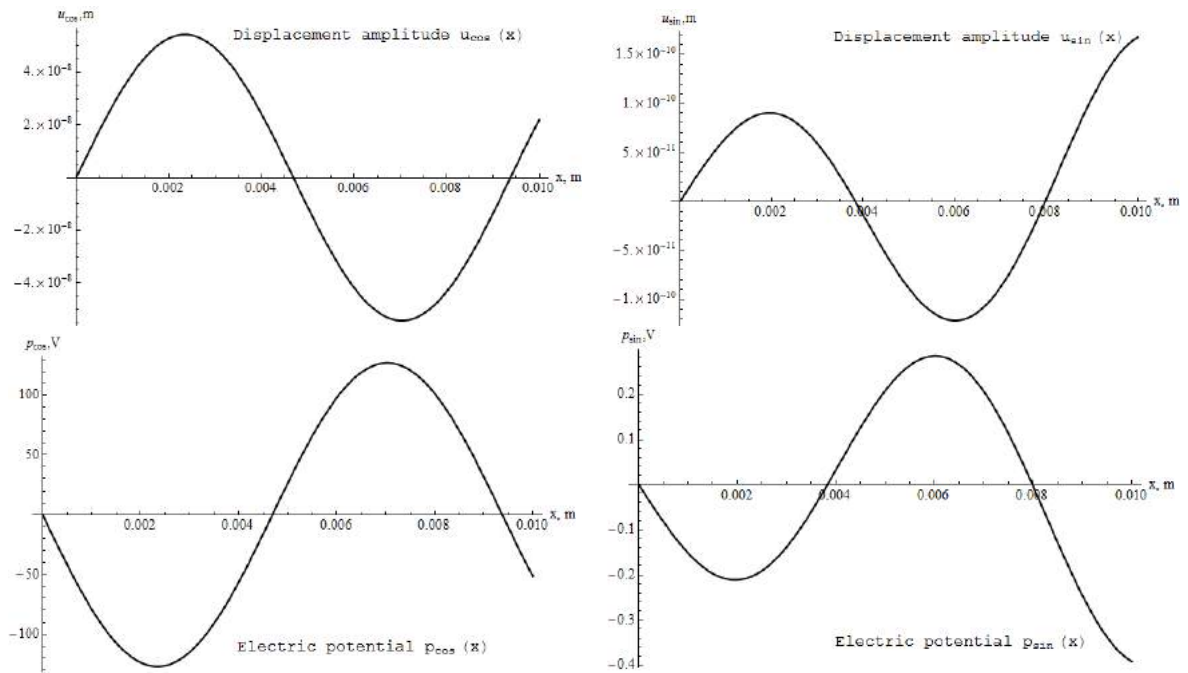


Рис. 2.1. Амплітуди зміщень $u_{cos}(x)$, $u_{sin}(x)$ та потенціалів $p_{cos}(x)$, $p_{sin}(x)$

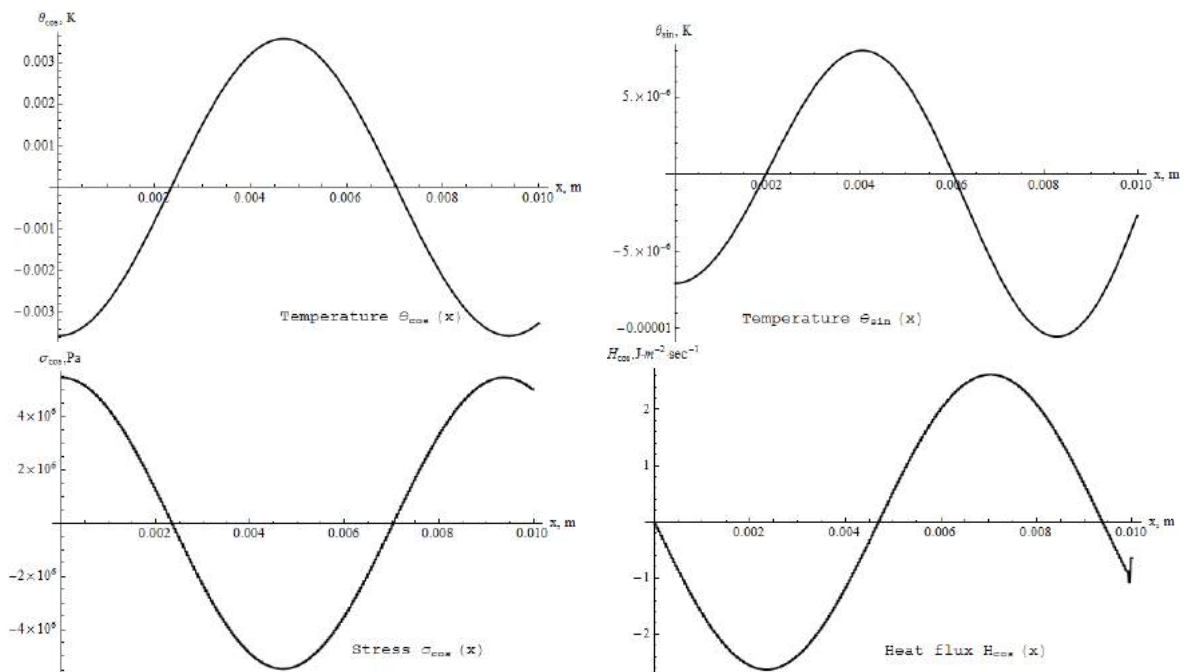


Рис. 2.2. Амплітуди температури $\theta_{cos}(x)$, $\theta_{sin}(x)$, механічного напруження $\sigma_{cos}(x)$ та теплового потоку $h_{cos}(x)$

Піроелект Розглянемо піроелектричний стрижень з кераміки PZT-4 довжиною $L = 0.01\text{м}$. Припустимо, що напрям його поляризації збігається з напрямом його осі Ox . Коефіцієнти, що характеризують фізико-механічні властивості матеріалу PZT-4 дані в (2.26). Прийmemo коефіцієнт в'язкості $a(x) = 4\text{м}^2/\text{с}$ потужність внутрішніх пружних джерел $f = 0\text{М}/\text{с}^2$ та по-

тужність внутрішніх теплових джерел $w = 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. Візьмемо кругову частоту коливань стержня $\omega = 3 \cdot 10^6 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Вважаємо, що лівий кінець стержня жорстко закріплений, заземлений і підтримується з нульовим збуренням температури. До правого кінця будемо подавати ненульовий тепловий потік, тобто крайові умови на правому кінці матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{cos} &= \bar{\sigma}_{sin} = 0 \text{ Н/м}^2, \\ \bar{J}_{cos} &= \bar{J}_{sin} = 0 \text{ А}, \\ \bar{h}_{sin} &= 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \\ \bar{h}_{cos} &= 100 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для дискретизації візьмемо рівномірну сітку з $N = 256$ скінченних елементів з кусково-лінійними апроксимаціями розв'язку. Профіль теплового потоку h_{cos} виглядає наступним чином:

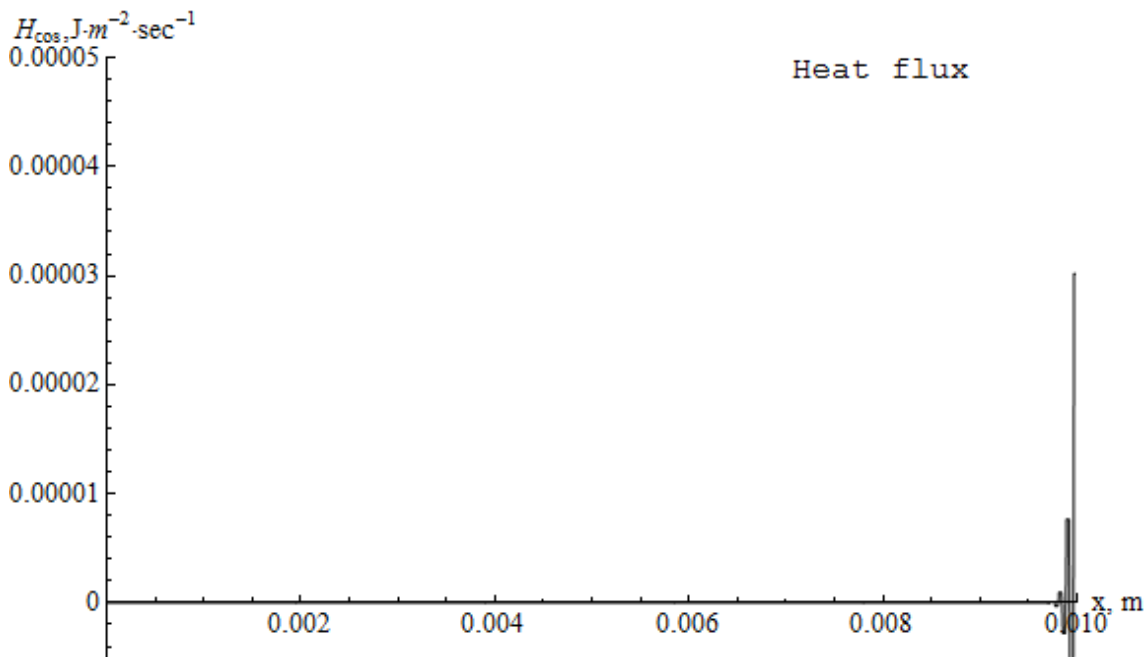


Рис. 2.3. Профіль теплового потоку h_{cos}

Той самий профіль в іншому масштабі виглядає наступним чином:

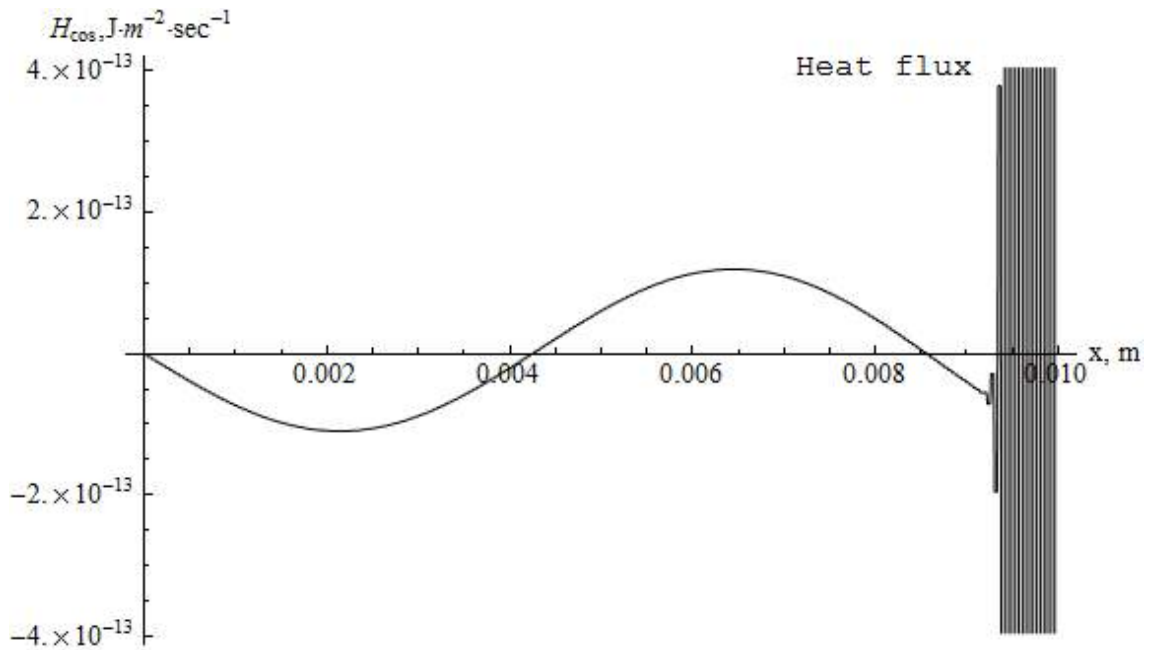


Рис. 2.4. Профіль теплового потоку h_{cos}

Як видно з графіків, крайова умова на правому кінці на тепловий потік не виконується. Це пов'язано з тим, що основна похибка зосереджена саме на правому кінці стержня і даної сітки скінченних елементів недостатньо для отримання коректного розв'язку задачі. Рівномірне згущення сітки також не дає очевидних переваг. Для отримання коректного розв'язку будемо зрештою застосовувати адаптивну схему МСЕ.

Двовимірний випадок

Прямий п'єзоелектр Нехай ми маємо пластину-піроелектрик, вироблену з кераміки PZT-4. Щоб оцінити наші чисельні результати ми будемо розглядати випадки, які будуть дуже подібними до тих, що ми розглядали у випадку одновимірної задачі. Припускаємо, що напрям поляризації співпадає з напрямом осі Ox_1 .

Ліва сторона пластинки закріплена, заземлена і підтримується при сталій температурі. Електричний струм та тепловий потік рівні нулю на правій стороні пластини. Верхня і нижня сторони пластини вільні від навантажень будь-якого виду, а до правої сторони буде подаватися імпульс механічного навантаження такого вигляду:

$$\bar{\sigma}_{cos} = 5 \cdot 10^6 \text{Н/м}^2, \bar{\sigma}_{sin} = 0 \text{Н/м}^2, \quad (2.29)$$

Надалі ми виокремимо випадки прямокутної пластини та квадратної пластини, оскільки результати експериментів дещо відрізняються у цих випадках з огляду на присутність поперечних хвиль у пластині.

Прямокутна пластина Нехай прямокутна пластина має розміри $\Omega = [0, 01 \times 0, 001\text{м}]$. Візьмемо кругову частоту коливань $\omega = 3 \cdot 10^6 \text{рад} \cdot \text{с}^{-1}$. Початкові та крайові умови описані вище. Для дискретизації за просторовою змінною візьмемо $N = 128 \times 4$ прямокутних скінченних елементів з білінійними апроксимаціями розв'язку на них. Профілі розв'язків показані на рис. 2.5.

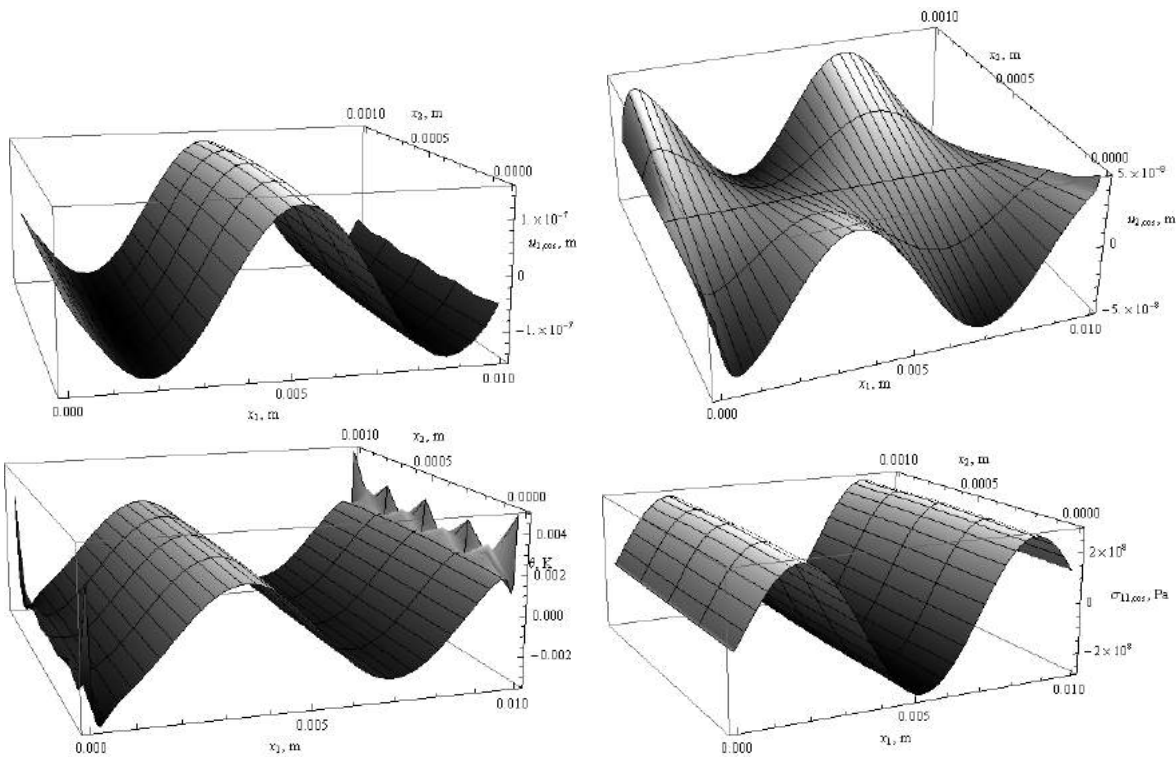


Рис. 2.5. Амплітуди зміщень $u_{1,\cos}(x)$, $u_{2,\cos}(x)$, температури $\theta_{\cos}(x)$ та механічного напруження $\sigma_{11,\cos}(x)$

Як видно з рисунка, профілі розв'язків $u_{1,\cos}(x)$, $\theta_{\cos}(x)$ нагадують нам одновимірні, зображені на рис. 2.1 та 2.2. Аналогічно механічне напруження $\sigma_{11,\cos}(x)$ також є схожим до отриманого в результаті експерименту з піроелектричним стрижнем і зображеного на рис. 2.2.

Квадратна пластина Нехай прямокутна пластина має розміри $\Omega = [0, 01 \times 0, 01\text{м}]$. Початкові та крайові умови описані ті ж самі та описані вище. Для дискретизації за просторовою змінною візьмемо $N = 16 \times 16$ прямокутних скінченних елементів з білінійними апроксимаціями розв'язку на них. У

випадку квадратної пластини на характер розв'язків впливають поперечні хвилі, тому величини виглядають так як зображено на рисунку:

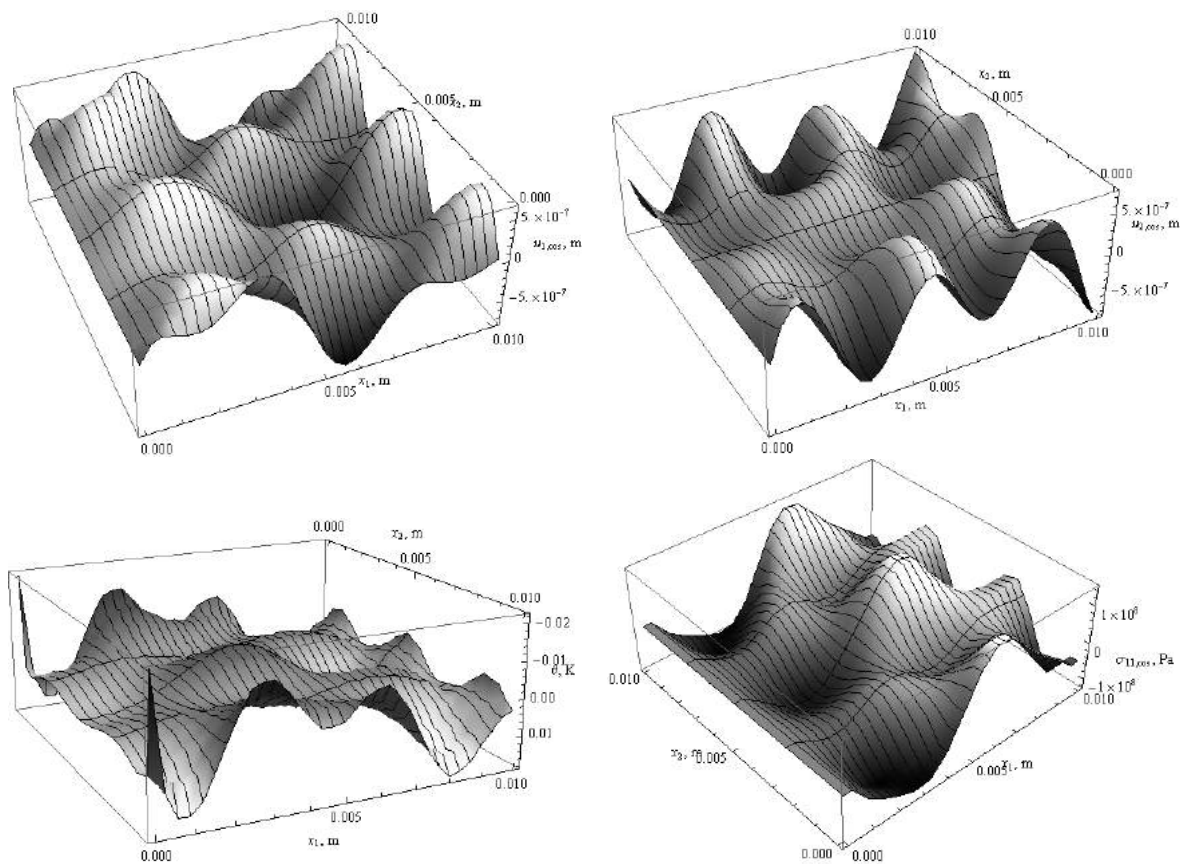


Рис. 2.6. Амплітуди зміщень $u_{1,cos}(x)$, $u_{2,cos}(x)$, температури $\theta_{cos}(x)$ та механічного напруження $\sigma_{11,cos}(x)$

2.4 Адаптивна схема МСЕ

Задача про похибку Використовуючи варіаційне формулювання задачі про вимушені коливання у вигляді (2.10) запишемо варіаційну задачу про похибку розв'язування:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано кругову частоту } \omega = \text{const} > 0, \\ \text{та апроксимацію } \psi_h = (u_{1h}, p_{1h}, \theta_{1h}, u_{2h}, p_{2h}, \theta_{2h}) \in W_h = \Phi_h \times \Phi_h, \\ \text{знайти похибку } e = \psi - \psi_h \in W \setminus W_h \text{ таку, що} \\ \Pi_\omega(e, w) = \langle \rho(\omega, \psi_h), w \rangle := \langle \Upsilon_\omega, w \rangle - \Pi_\omega(\psi_h, w) \\ \forall w \in E = W \setminus W_h. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Ввівши скінченновимірний підпростір E_h простору допустимих похибок E , отримаємо дискретизовану варіаційну задачу для знаходження оцінювача похибки e_h :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано кругову частоту } \omega = \text{const} > 0, \text{ апроксимацію } \psi_h \in W_h, \\ \text{знайти оцінювач } e_h = (\epsilon_h^1, \xi_h^1, \nu_h^1, \epsilon_h^2, \xi_h^2, \nu_h^2) \in E_h \text{ такий, що} \\ \Pi_\omega(e_h, w) = \langle \rho(\omega, \psi_h), w \rangle \forall w \in E_h. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Нехай маємо деяку триангуляцію τ_h області Ω . Простір E_h побудуємо таким чином, щоб мати змогу обчислювати апостеріорний оцінювач похибки e_h на кожному скінченному елементі $K \in \tau_h$ незалежно від інших скінченних елементів. Для цього за базисні функції простору E_h будемо брати кусково визначені невід'ємні функції бульбашкової структури:

$$\left\{ \begin{array}{l} b|_K := b_K \in H_0^1(K), \\ b_K(x_K) = 1 \forall K \in \tau_h \forall h > 0, \end{array} \right. \quad (2.32)$$

де за точку $x_K \in K$ будемо вибирати, наприклад, центр ваги елемента K . Апостеріорний оцінювач похибки $\hat{e}_K = (\hat{\epsilon}_K^1, \hat{\epsilon}_K^2)$ апроксимації зміщень

$u_h = (u_{1h}, u_{2h})$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$\hat{\epsilon}_K^\alpha(x) := \epsilon_{1K}^\alpha \begin{pmatrix} b_K(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon_{2K}^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ b_K(x) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \epsilon_{dK}^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_K(x) \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 1, 2, \forall x \in K \quad (2.33)$$

з невідомими коефіцієнтами ϵ_K^α .

Апостеріорний оцінювач похибки $\hat{\xi}_K = (\hat{\xi}_K^1, \hat{\xi}_K^2)$ апроксимації електричного потенціалу $p_h = (u_{1h}, u_{2h})$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$\hat{\xi}_K^\alpha(x) := \xi_K^\alpha b_K(x), \alpha = 1, 2, \forall x \in K. \quad (2.34)$$

Аналогічно, апостеріорний оцінювач похибки $\hat{\nu}_K = (\hat{\nu}_K^1, \hat{\nu}_K^2)$ апроксимації приросту температури $\theta_h = (\theta_{1h}, \theta_{2h})$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$\hat{\nu}_K^\alpha(x) := \nu_K^\alpha b_K(x), \alpha = 1, 2, \forall x \in K. \quad (2.35)$$

На кожному скінченному елементі $K \in \tau_h$ розв'язуємо систему (2.36) для знаходження апостеріорного оцінювача похибок амплітуд пружних зміщень, електричних потенціалів та приростів температури.

Знайти вектори $\hat{\epsilon}_K = (\epsilon_K^1, \epsilon_K^2) \in R^{2d}$, $\hat{\xi}_K = (\xi_K^1, \xi_K^2) \in R^2$, $\hat{\nu}_K = (\nu_K^1, \nu_K^2) \in R^2$, такі, що

$$\begin{bmatrix} \omega A & -[-\omega^2 M + C] & 0 & E^T & 0 & Y_T \\ [-\omega^2 M + C] & \omega A & -E^T & 0 & -Y_T & 0 \\ 0 & \omega E & Z & \omega G & 0 & \omega \Pi_T \\ -\omega E & 0 & -\omega G & Z & -\omega \Pi_T & 0 \\ 0 & \omega Y & 0 & \omega \Pi & K & \omega S \\ -\omega Y & 0 & -\omega \Pi & 0 & -\omega S & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_K^1 \\ \epsilon_K^2 \\ \xi_K^1 \\ \xi_K^2 \\ \nu_K^1 \\ \nu_K^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Тут матриці обчислюються за білінійними формами (2.4) від бульбашкових

функцій b_K , а вектори в правій частині схеми обчислюються за виразами:

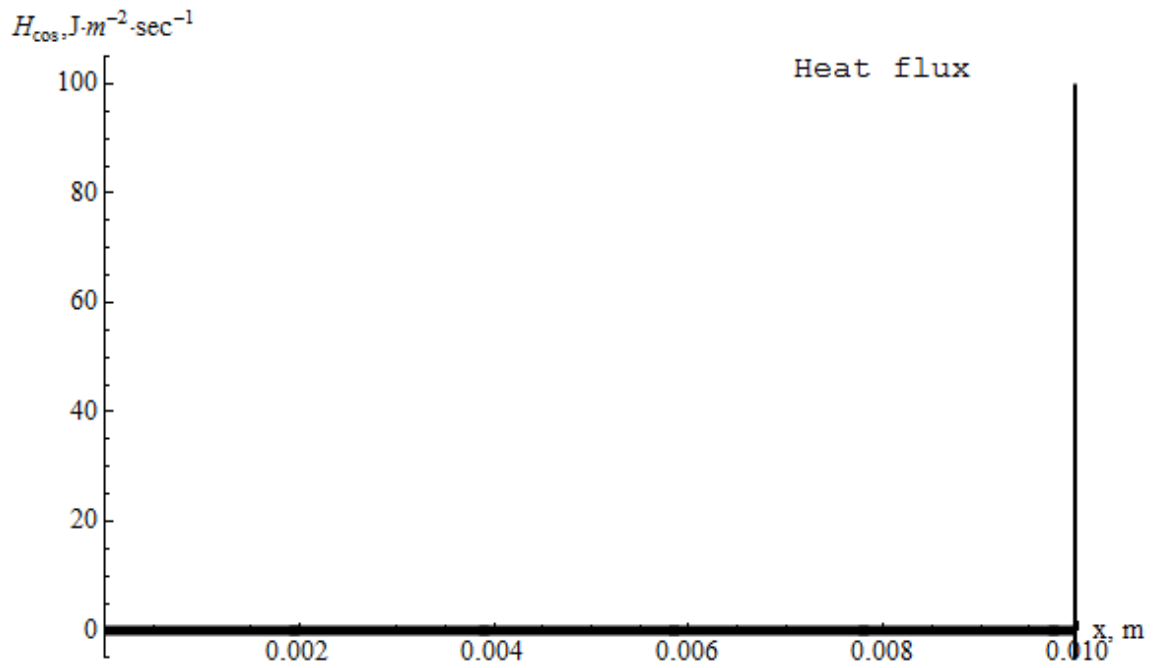
$$\left\{ \begin{array}{l} L_m^1 = \langle \rho(\omega, \psi_h), (\hat{b}_K^m, 0, 0, 0, 0, 0) \rangle, \\ L_m^2 = \langle \rho(\omega, \psi_h), (0, \hat{b}_K^m, 0, 0, 0, 0) \rangle, m = 1, 2, \dots, d, \\ \hat{b}_K^1 = (b_K, 0, \dots, 0), \dots, \hat{b}_K^d = (0, \dots, 0, b_K), \\ R^1 = \langle \rho(\omega, \psi_h), (0, 0, b_K, 0, 0, 0) \rangle, R^2 = \langle \rho(\omega, \psi_h), (0, 0, 0, b_K, 0, 0) \rangle, \\ F^1 = \langle \rho(\omega, \psi_h), (0, 0, 0, 0, b_K, 0) \rangle, F^2 = \langle \rho(\omega, \psi_h), (0, 0, 0, 0, 0, b_K) \rangle. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Адаптивна схема виглядає наступним чином:

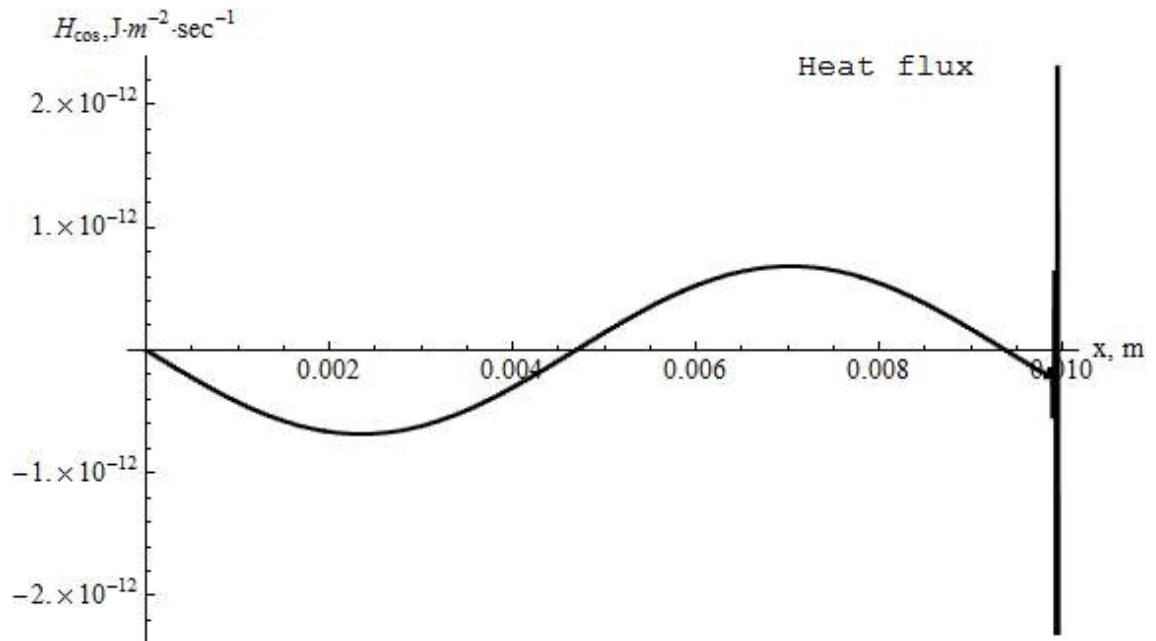
1. Розв'язуємо задачу на рівномірній сітці.
2. Обчислюємо норму загальної похибки розв'язку.
3. Якщо загальна похибка перевищує очікуваний рівень похибки:
 - проходимо по всіх скінченних елементах і якщо похибка на деякому елементі K більша за середню, ділимо цей елемент на 2;
 - розв'язуємо задачу на новій сітці та переходимо на крок 2;
 інакше - розв'язок отриманий з наперед заданою точністю.

2.4.1 Числові експерименти

Піроефект Будемо розглядати такий самий випадок як і розглядали раніше для звичайної схеми МСЕ задачі про гармонійні коливання піроелектрика: маємо стержень з кераміки PZT-4 з властивостями (2.26), кругова частота $\omega = 3 \cdot 10^6 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$, крайові умови ті ж самі - (2.28). Починати будемо з рівномірної сітки з $N = 256$ скінченних елементів з кусково-лінійними апроксимаціями розв'язку. Відносна похибка розв'язку на цій рівномірній сітці рівна 32,47 %. Виберемо очікуваний рівень похибки 0,1%. Цей очікуваний рівень похибки досягається за 12 ітерацій адаптивної схеми. Поглянемо тепер на профіль теплового потоку h_{cos} :

Рис. 2.7. Профіль теплового потоку h_{cos}

В іншому масштабі він має наступний вигляд:

Рис. 2.8. Профіль теплового потоку h_{cos}

Як можна побачити, тепер крайова умова на тепловий потік на правому кінці виконується і цього було досягнуто за рівня похибки в 0,1%, причому на сітці з лише 410 скінченних елементів (при рівномірному згущенні сітки наступна ітерація одразу ж дає 512 елементів, проте не дає вагомого виграшу в відносній похибці розв'язку).

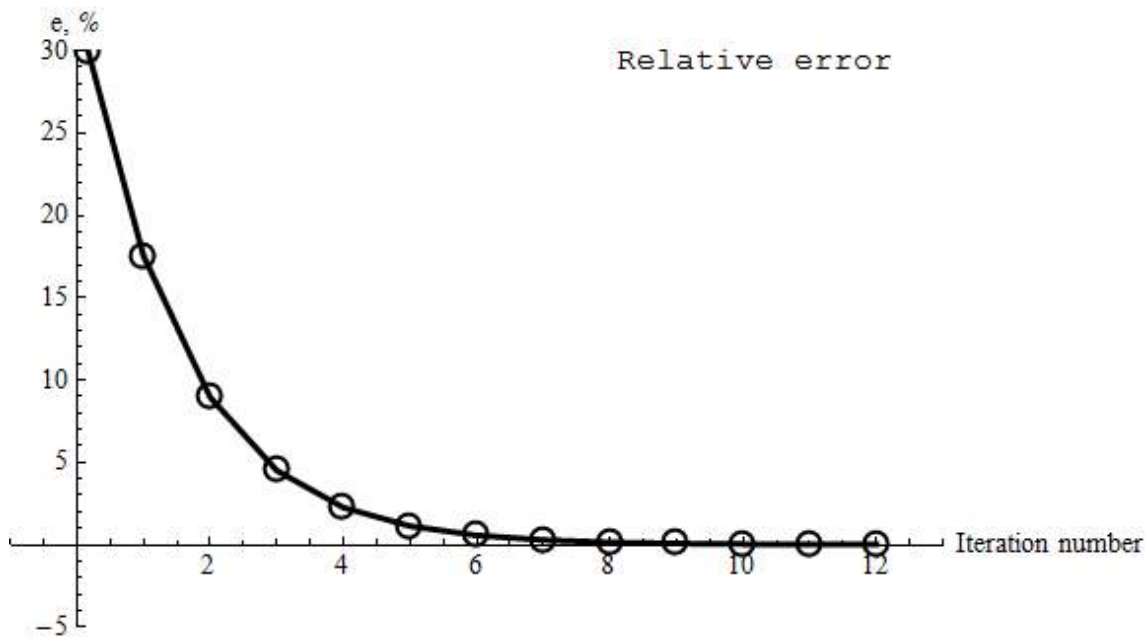


Рис. 2.9. Відносна похибка розв'язку

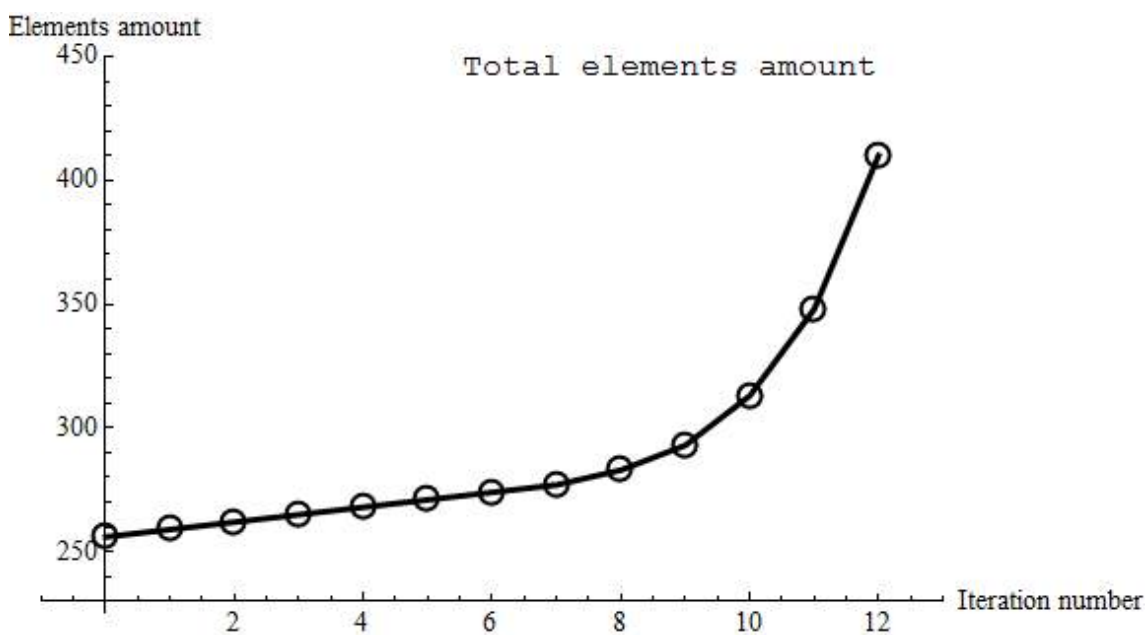


Рис. 2.10. Кількість скінченних елементів в сітці

На графіках 2.9 та 2.10 можна побачити як змінювалася відносна похибка розв'язку протягом ітерацій адаптивного процесу.

2.5 Висновки та заключні зауваження

Розроблено програмні засоби, що реалізують чисельну схему МСЕ для розв'язування варіаційної задачі про вимушені коливання піроелектрика у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики, та з їх допомогою про-

ведено чисельні експерименти. Побудовано h -адаптивну схему МСЕ для розв'язування цієї задачі з наперед заданою точністю. Встановлено, що застосування h -адаптивної схеми є найбільш ефективним при моделюванні дій теплових сил на піроелектрик (при явищі прямого піроефекту).

РОЗДІЛ 3

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ КЛАСИЧНОЇ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ

У цьому розділі розглянута однокрокова рекурентна схема для розв'язування нестационарної варіаційної задачі класичної термоп'єзоелектрики, що була розроблена Шинкаренком Г.А. у його роботах. Розроблено програмні засоби на основі цієї чисельної схеми для розв'язування цієї задачі в одно- та двовимірних областях і проведено ряд чисельних експериментів. Зокрема, досліджено вплив явища піроефекту на характер розв'язків задачі, зроблено порівняння отриманих чисельних результатів з результатами інших дослідників.

3.1 Напівдискретизація Гальоркіна варіаційної задачі термоп'єзоелектрики за просторовою змінною

Наведемо теоретичні дослідження розв'язування варіаційної задачі термоп'єзоелектрики згідно з працею [29]. Виберемо в просторі допустимих розв'язків $\Phi = V \times Q \times Z$ послідовність скінченновимірних підпросторів їх апроксимацій $\Phi_h = V_h \times Q_h \times Z_h$, $\dim \Phi_h \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$ з такими властивостями щільності

$$\begin{cases} \forall \phi \in \Phi \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{d+2}, k \geq 1, \\ \exists \phi_h \in \Phi_h \text{ та } C = \text{const} > 0 \text{ такі, що} \\ \|\phi - \phi_h\|_{m,\Omega} \leq Ch^{k+1-m} \|\phi\|_{k+1,\Omega}, 0 \leq m \leq k. \end{cases} \quad (3.1)$$

Тут і в подальшому символ C позначає різні додатні сталі, значення яких не залежать від величин розв'язків нашої задачі. Для кожного конкретно

вибраного $h > 0$ розв'язок $\psi_h = (u_h, p_h, \theta_h)$ задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } h = \text{const} > 0, \psi_0 = (u_0, p_0, \theta_0) \in V \times Q \times Z, \\ v_0 \in H, \ell = (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'); \\ \text{знайти } \psi_h = (u_h, p_h, \theta_h) \in L^2(0, T; \Phi_h) \text{ такий, що} \\ m(u_h''(t), v) + a(u_h'(t), v) + c(u_h(t), v) - e(p_h(t), v) - \gamma(\theta_h(t), v) = \langle l(t), v \rangle, \\ g(p_h'(t), q) + e(q, u_h'(t)) + \pi(\theta_h'(t), q) + z(p_h(t), q) = \langle r(t), q \rangle, \\ s(\theta_h'(t), \xi) + \pi(\xi, p_h'(t)) + \gamma(\xi, u_h'(t)) + k(\theta_h(t), \xi) = \langle \mu(t), \xi \rangle, \\ m(u_h'(0) - v_0, v) = 0, \quad c(u_h(0) - u_0, v) = 0, \\ g(p(0) - p_0, q) = 0, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0, \quad \forall \phi = (v, q, \xi) \in \Phi_h \end{array} \right. \quad (3.2)$$

називатимемо напівдискретною апроксимацією Гальоркіна розв'язку $\psi = (u, p, \theta)$ задачі класичної термоп'єзоелектрики (2.3), а константу h - параметром дискретизації задачі (2.3) за просторовою змінною. Визначення білінійних форм та лінійних функціоналів, що присутні в варіаційному формулюванні задачі (3.2) міститься в виразах (2.4).

3.2 Задача Коші.

Зафіксуємо деякі базиси $\{v_i\}$, $\{q_i\}$, $\{\xi_i\}$ в просторах апроксимацій V_h , Q_h та Z_h відповідно. Тоді наші шукані величини можна представити у вигляді розвинень:

$$\begin{aligned} u_h(x, t) &= \sum_{i=1}^{\dim V_h} U_i(t) v_i(x), \\ p_h(x, t) &= \sum_{i=1}^{\dim Q_h} P_i(t) q_i(x), \\ \theta_h(x, t) &= \sum_{i=1}^{\dim Z_h} \Theta_i(t) \xi_i(x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далі за допомогою процедури Гальоркіна отримуємо задачу Коші для визначення коефіцієнтів $U(t) = \{U_i(t)\}$, $P(t) = \{P_i(t)\}$ та $\Theta(t) = \{\Theta_i(t)\}$ розвинень напівдискретних апроксимацій u_h , p_h та θ_h за цими базисами.

Вищезгадана задача Коші виглядає наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} MU''(t) + AU'(t) + CU(t) - E^T P(t) - Y^T \Theta(t) = L(t), \\ EU'(t) + GP'(t) + \Pi^T \Theta'(t) + ZP(t) = R(t), \\ YU'(t) + \Pi P'(t) + S^T \Theta'(t) + K\Theta(t) = F(t), \\ MU'(0) = V^0, \quad CU(0) = U^0, \\ GP(0) = P^0, \quad S\Theta(0) = \Theta^0, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

де коефіцієнти матриць $M, A, C, E, Y, G, \Pi, Z, S, K$ в системі(3.4) розраховуються за відповідними білінійними формами (2.4), а вектори правих частин обчислюються за відповідними лінійними функціоналами наступним чином:

$$L(t) = \{ \langle l(t), v_i \rangle \}, \quad R(t) = \{ \langle r(t), q_i \rangle \}, \quad F(t) = \{ \langle \mu(t), \xi_i \rangle \} \quad (3.5)$$

та

$$V^0 = \{ m(v_0, v_i) \}, \quad U^0 = \{ c(u_0, v_i) \}, \quad P^0 = \{ g(p_0, q_i) \}, \quad \Theta^0 = \{ s(\theta_0, \xi_i) \}. \quad (3.6)$$

Взявши до уваги те, що для кожного $h > 0$ матриці M, A, C, G, Z, S, K додатно визначені, можна стверджувати, що задача Коші (3.4) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок і буде визначати напівдискретну апроксимацію Гальоркіна $\psi_h(t) = (u_h(t), p_h(t), \theta_h(t))$ у вигляді (3.3).

Підставивши $v = u'_h(t), q = p_h(t), \xi = \theta_h(t)$ в рівняння задачі (3.2) та додавши їх, отримаємо таке рівняння енергетичного балансу для напівдискретних апроксимацій розв'язків:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u'_h(t)\|_H^2 + \|\psi_h(t)\|^2 + 2\pi(\theta_h(t), p_h(t)) \} + \|\psi_h(t)\|^2 = \\ = \langle l(t), u'_h(t) \rangle + \langle r(t), p_h(t) \rangle + \langle \mu(t), \theta_h(t) \rangle, \end{aligned} \quad (3.7)$$

де

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|^2 &= \|u_h\|_V^2 + \|p_h\|_Q^2 + \|\theta_h\|_G^2, \\ \|\psi_h\|^2 &= \|u'_h\|_V^2 + \|p_h\|_Q^2 + \|\theta_h\|_G^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Тут вирази $\frac{1}{2} \|u'_h(t)\|_H^2, \frac{1}{2} \{ \|\psi_h(t)\|^2 + 2\pi(\theta_h(t), p_h(t)) \}$ та $\|\psi_h(t)\|^2$ визначають значення кінетичної, повної потенціальної енергії піроелектрика та її дисипацію відповідно, а величини $\|u'_h\|_V^2, \|p_h\|_Q^2$ та $\|\theta_h\|_G^2$ визначають потенціальну енергію механічного поля, електричну та теплову енергії відповідно.

Проінтегрувавши рівняння енергетичного балансу (3.7) за часом, враховуючи початкові умови задачі (3.2), отримуємо таку апріорну оцінку для напівдискретних апроксимацій Гальоркіна:

$$\begin{aligned} & \|u'_h(t)\|_H^2 + \|\psi_h(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi(\tau)\| d\tau \leq \\ & \leq C\{\|v_0\|_H^2 + \|\psi_0\| + \int_0^t \|\ell(\tau)\|_*^2 d\tau\} \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall h > 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

де $\|\cdot\|_*$ визначає норму в спряженому просторі Φ' . Згідно з [29] з цієї оцінки випливає

Теорема 3.1. *Нехай виконується умова (2.2), що забезпечує правильність умови $\ell \in L^2(0, T; \Phi')$. Тоді $\forall h > 0$ напівдискретна апроксимація Гальоркіна $\psi_h = (u_h, p_h, \theta_h)$ однозначно обчислюється як розв'язок задачі (3.2) і при цьому справедливі апріорні оцінки (3.9) з $C = \text{const} > 0$ незалежною від h та ψ .*

3.3 Коректність варіаційної задачі. Збіжність напівдискретних апроксимацій

Як наведено в праці [29], справедливими будуть наступні теореми.

Теорема 3.2. *Нехай виконується умова (2.2). Тоді існує єдиний розв'язок $\psi = (u, p, \theta)$ варіаційної задачі класичної термодинаміки (2.3) з властивостями*

$$\begin{aligned} & u \in L^\infty(0, T; V), \quad u' \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \\ & u'' \in L^2(0, T; V'), \quad p \in L^\infty(0, T; Q), \quad p' \in L^2(0, T; Q'), \\ & \theta \in L^\infty(0, T; G) \cap L^2(0, T; Z), \quad \theta' \in L^2(0, T; Z'), \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теорема 3.3. *Нехай $\psi = (u, p, \theta)$ - розв'язок задачі (2.3) такий, що для деякого цілого $k \geq 1$ виконується припущення про його запас гладкості:*

$$\psi, \psi' \in L^2(0, T; \Phi \cup Y^{d+2}), \quad u'' \in L^2(0, T; Y^d), \quad Y = H^{k+1}(\Omega). \quad (3.11)$$

Крім того, припустимо, що $\forall h > 0$ напівдискретні апроксимації $\psi_h = (u_h, p_h, \theta_h)$ є розв'язками задачі (3.2) і при цьому простори Φ_h побудовані з властивістю щільності (3.1). Тоді послідовність напівдискретних

апроксимації $\{\psi_h(t)\}$ збіжна при $h \rightarrow 0$ до розв'язку $\psi(t)$ задачі (2.3) і швидкість її збіжності можна оцінити наступним чином:

$$\begin{aligned} & \|\psi_h(t) - \psi(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi_h(\tau) - \psi(\tau)\|^2 d\tau \leq \\ & \leq Ch^{2k} \{ |v_0|^2 + |\theta_0|^2 + |\psi(t)|^2 + |u'(t)|^2 + \sum_{j=0}^1 \int_0^t [|u^{(j+1)}(\tau)|^2 + \\ & + |p^{(j)}(\tau)|^2 + |\theta^{(j)}(\tau)|^2] d\tau \} \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall h > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

де $C = \text{const} > 0$ - деяка стала, що не залежить від ψ та h , а норма $|\cdot| = \|\cdot\|_{k+1, \Omega}$.

3.4 Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі.

Тут будемо розглядати конструювання та питання стійкості і збіжності однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі на базисі напівдискретизованої задачі (3.2) та задачі Коші (3.4) для системи звичайних диференціальних рівнянь, згідно з працею [29].

3.4.1 Апроксимації розв'язків за часовою змінною

Рівномірно розіб'ємо відрізок часу $[0, T]$ за допомогою N вузлів $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \dots, N+1$, $T = (N+1)\Delta t$ (N - фіксоване натуральне число). На кожному інтервалі $[t_j, t_{j+1}]$ для апроксимації розв'язку $\psi_h(t) = (u_h(t), p_h(t), \theta_h(t))$ задачі (3.2) використовуватимемо поліноми такого вигляду:

$$\begin{aligned} u_h(t) & \cong [1 - \omega^2(t)]u^i + \Delta t \omega(t)[1 - \omega(t)]v^j + \omega^2(t)u^{j+1}, \\ p_h(t) & \cong [1 - \omega(t)]p^j + \omega(t)p^{j+1}, \quad \omega(t) = \frac{t - t_j}{\Delta t}, \\ \theta_h(t) & \cong [1 - \omega(t)]\theta^j + \omega(t)\theta^{j+1} \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

з невідомими коефіцієнтами $\psi_h = (u^m, p^m, \theta^m) \in \Phi_h$ і $v^m \in V_h$. Лінійні функціонали з правих частин рівнянь (3.2) будемо наближати виразами

$$\begin{aligned} l(t) & \cong l_j = l(t_{j+1/2}), \quad r(t) \cong r_j = r(t_{j+1/2}) \\ \mu(t) & \cong \mu_j = \mu(t_{j+1/2}), \quad t_{j+1/2} = t_j + \frac{1}{2}\Delta t \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Апроксимації у вигляді (3.13), де для апроксимації зміщення використовуються поліном другого порядку, а для апроксимації потенціалу та приросту температури - першого, були вибрані таким чином, тому що рівняння руху в напівдискретизованій задачі (3.2) є гіперболічним (містить другу похідну по часу від переміщення), а рівняння електродинаміки та теплопровідності є параболічними.

3.4.2 Побудова однокрокової рекурентної схеми

Як можна бачити у роботах [26, 29], на основі наближень (3.13) та (3.14) будується наступна однокрокова рекурентна схема інтегрування задачі (3.2) в часі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \Delta t > 0, \quad \alpha = \text{const} \geq 0, \\ \psi^j = (u^j, p^j, \theta^j), y^j = (v^j, \psi^j) \in V_h \times \Phi_h, \quad \ell_j = (l_j, r_j, \mu_j) \in \Phi'; \\ \text{знайти } y^{j+1} = (v^{j+1}, \psi^{j+1}) \in V_h \times \Phi_h \text{ такий, що} \\ m(\dot{v}^{j+1/2}, v) + a(v^{j+\alpha}, v) + c(u^{j+\alpha}, v) - e(p^{j+1/2}, v) - \gamma(\theta^{j+1/2}, v) = \langle l_j, v \rangle, \\ g(\dot{p}^{j+1/2}, q) + e(q, v^{j+1/2}) + z(p^{j+\alpha}, q) + \pi(\dot{\theta}^{j+1/2}, q) = \langle r_j, q \rangle, \\ s(\dot{\theta}^{j+1/2}, \xi) + \pi(\xi, \dot{p}^{j+1/2}) + k(\theta^{j+\alpha}, \xi) + \gamma(\xi, v^{j+1/2}) = \langle \mu_j, \xi \rangle, \\ \forall \phi = (v, q, \xi) \in \Phi_h, \quad v^{j+1/2} = \dot{v}^{j+1/2}, \quad j = 0, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Тут використовуються такі позначення:

$$\begin{aligned} w^{j+1/2} &= \frac{1}{2}(w^{j+1} + w^j), \quad \dot{w}^{j+1/2} = \frac{1}{\Delta t}(w^{j+1} - w^j), \\ w^{j+\alpha} &= w^{j+1/2} + (\alpha - \frac{1}{2})\Delta t \dot{w}^{j+1/2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Підставивши апроксимації (3.13) в початкові умови задачі (3.2) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} m(v^0 - v_0, v) &= 0, \quad c(u^0 - u_0, v) = 0 \\ g(p^0 - p_0, q) &= 0, \quad s(\theta^0 - \theta_0, \xi) \quad \forall \phi = (v, q, \xi) \in \Phi_h \end{aligned} \quad (3.17)$$

для визначення вектора $y^0 = (v^0, \psi^0)$, який є буде використовуватися для початку обчислень за схемою (3.15). Зважаючи на еліптичність білінійних форм з (3.17), рівняння (3.17) допускають єдиний розв'язок y^0 , який не має похибок, зумовлених апроксимацією початкових умов в процесі рекурентних обчислень.

Вважаючи вектор $(v^{j+1/2}, \psi^{j+1/2})$ невідомим в перших трьох рівняннях схеми (3.15), з допомогою леми Лакса-Мільграма неважко показати, що ці

рівняння однозначно розв'язуються. Тоді з (3.16) і останнього із рівнянь (3.15) можна визначити вектор $y^{j+1} = (v^{j+1}, u^{j+1}, p^{j+1}, \theta^{j+1})$. В алгебричному поданні схема (3.15) може бути записана так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \Delta t > 0, \alpha \geq 0, (V^j, U^j, P^j, \Theta^j); \\ \text{знайти вектор } (V^{j+1}, U^{j+1}, P^{j+1}, \Theta^{j+1}) \text{ такий, що} \\ \left(\begin{array}{ccc} M + \alpha\Delta t[A + \frac{1}{2}\Delta tC] & -\frac{1}{2}\Delta tE^T & -\frac{1}{2}\Delta t\Gamma^T \\ \frac{1}{2}\Delta tE & G + \alpha\Delta tZ & \frac{1}{2}\Delta t\Pi^T \\ \frac{1}{2}\Delta t\Gamma & \frac{1}{2}\Delta t\Pi & S + \alpha\Delta tK \end{array} \right) \begin{pmatrix} V^{j+1/2} \\ P^{j+1/2} \\ \Theta^{j+1/2} \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2}\Delta t \begin{pmatrix} L_i \\ R_i \\ F_i \end{pmatrix} + \\ + \left(\begin{array}{ccc} M + \Delta\tilde{t}A & -\frac{1}{2}\Delta tC & 0 \\ 0 & 0 & G + \Delta\tilde{t}Z \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} V^j \\ U^j \\ P^j \\ \Theta^j \end{pmatrix}, \\ V^{j+1} = 2V^{j+1/2} - V^j, \quad U^{j+1} = U^j + \Delta tV^{j+1/2}, \\ P^{j+1} = 2P^{j+1/2} - P^j, \\ \Theta^{j+1} = 2\Theta^{j+1/2} - \Theta^j, \quad j = 0, \dots, N, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

де $\Delta\tilde{t} = (\alpha - \frac{1}{2})\Delta t$. Розв'язок повністю дискретизованої задачі п'єзоелектрики в момент часу t_{j+1} визначається формулами (3.3), замінивши коефіцієнти $U_i(t)$, $P_i(t)$, $\Theta_i(t)$ коефіцієнтами U_i^{j+1} , P_i^{j+1} та Θ_i^{j+1} відповідно.

3.4.3 Стійкість і збіжність побудованої однокрокової рекурентної схеми

Для оцінки похибки

$$e^m = (e_v^m, e_u^m, e_p^m, e_\theta^m) = (v^m - u'_h(t_m), u^m - u_h(t_m), p^m - p_h(t_m), \theta^m - \theta_h(t_m)) \quad (3.19)$$

побудованої рекурентної схеми, опираючись на рівняння задачі (3.15), будемо використовувати енергетичне рівняння.

Припустимо, що розв'язок $\psi_h = (u_h, p_h, \theta_h)$ задачі (3.2) такий, що

$$u_h^{IV} \in L^2(0, T; V_h), \quad p_h^{III} \in L^2(0, T; Q_h), \quad \theta_h^{III} \in L^2(0, T; Z_h). \quad (3.20)$$

Тоді, згідно з [29], буде справедливою наступна теорема:

Теорема 3.4. *Нехай розв'язок $\psi_h = (u_h, p_h, \theta_h)$ напівдискретизованої задачі (3.2) такий, що виконуються умови (3.20). Крім того, припустимо, що вектор $y^m = (v^m, u^m, p^m, \theta^m) \in V_h \times \Phi_h$ обчислюється рекурентною схемою (3.18) в якості апроксимації (u'_h, ψ_h) для моменту часу t_m . Тоді правильними будуть наступні твердження:*

1. *Рекурентна схема (3.18) безумовно (по відношенню до кроку інтегрування Δt) стійка в сенсі норми*

$$\left\{ \|v^m\|_H^2 + \|\psi^m\|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \|\psi^{j+1/2}\|^2 \right\}^{1/2}$$

якщо її параметр α вибраний з умови

$$\alpha \geq \frac{1}{2}. \quad (3.21)$$

2. *При виконанні умови (3.21) значення y^m збігаються при $\Delta t \rightarrow 0$ до значень $(u'_h(t_m), u_h(t_m), p_h(t_m), \theta_h(t_m))$ і при цьому похибка апроксимації (3.19) характеризується оцінкою*

$$\begin{aligned} & |e^{m+1}|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^m \|\psi^{j+1/2}\|^2 \leq \\ & \leq \aleph T \Delta t^2 \left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \max_{j=0, \dots, N} \|\ell_j^1\|_*^2 + \right. \\ & \left. + \Delta t^2 \max_{j=0, \dots, N} \|\ell_j^2\|_*^2 \right\}, \quad m = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.22)$$

з $\aleph = \text{const} > 0$, значення якої не залежить від величин ψ_h та Δt . Таким чином, максимальний порядок збіжності схеми (3.18) досягається при $\alpha = \frac{1}{2}$.

3.5 Числові експерименти

3.5.1 Одновимірний випадок: ударні хвилі та прямий п'єзо ефект

Розглянемо піроелектричний стрижень з кераміки PZT-4 довжиною $L = 0.01\text{м}$. Припустимо, що напрям його поляризації збігається з напрямом його осі Ox . Коефіцієнти, що характеризують фізико-механічні властивості

матеріалу PZT-4, мають такі значення:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 7500 \text{кг/м}^3, \quad c = 13.9 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2, \quad e = -15.1 \text{Кл/м}^2, \\
 g &= 6.46 \cdot 10^{-8} \text{Ф/м}^2, \quad \text{див. [142];} \\
 z &= 5 \cdot 10^{-12} \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}, \quad \text{див. [81];} \\
 \pi &= 27 \cdot 10^{-5} \text{Кл} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}, \quad \text{див. [87];} \\
 \alpha &= 2 \cdot 10^{-6} \text{К}^{-1}, \quad c_\varepsilon = 350 \text{Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}, \\
 \lambda &= 1.16 \text{Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}, \quad \text{див. [133]}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Прийmemo коефіцієнт в'язкості $a(x) = 4\text{м}^2/\text{с}$ потужність внутрішніх пружних джерел $f = 0\text{м}/\text{с}^2$ та потужність внутрішніх теплових джерел $w = 0\text{Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$.

Нарешті припустимо, що лівий і правий кінці стрижня є електродами, які можуть бути під'єднаними до електричного кола, і тому електричний струм може проходити вздовж стрижня. Вважаємо, що лівий кінець стрижня жорстко закріплений, заземлений і підтримується з нульовим збуренням температури. До правого кінця будемо подавати механічне навантаження, електричний струм і тепловий потік таким способом, щоб можна було змоделювати особливості прямого та оберненого п'єзоефекту у розглядуваному стрижні за умов, що в початковий момент часу зміщення, швидкість, електричний потенціал і збурення температури мають нульові значення у всіх точках стрижня.

Спостереження будемо проводити протягом періоду часу $T = 75 \cdot 10^{-7}\text{с}$. Для дискретизації візьmemo рівномірну сітку з $N = 512$ скінченних елементів з кусково-квадратичними апроксимаціями розв'язку і $N_T = 4000$ кроків інтегрування в часі. В такому разі виконується умова Куранта-Фрідрікса $v\Delta t \leq \frac{1}{2}h$, де $v = \sqrt{c\rho^{-1}}$ - швидкість поширення хвилі збурень. Наведені результати одержано зі значенням параметра $\alpha = 0,5$, яке, згідно з [29], забезпечує другий (найкращий) порядок збіжності ОРС.

Розглядатимемо випадок, коли імпульс механічного навантаження подається до правого кінця стрижня. Значення електричного струму та теплового потоку дорівнюють нулю на цьому кінці стрижня. Для конкретного чисельного експерименту візьmemo крайові умови на правому кінці вигляду

$$\bar{\sigma}(t) = \begin{cases} 5 \cdot 10^6 \text{Н/м}^2, & t \leq 5 \cdot 10^{-7}\text{с} \\ 0 \text{Н/м}^2, & t > 5 \cdot 10^{-7}\text{с} \end{cases}, \quad \bar{J}(t) = 0, \quad \bar{h}(t) = 0 \text{Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \tag{3.24}$$

Поширення хвилі вздовж стрижня Найперше покажемо динаміку проходження хвилі вздовж стрижня, аналогічно до того, як у наших роботах [54] [20]. З першого рядка на рис.3.1 видно профілі пружного зміщення та механічного напруження під час руху хвилі до лівого кінця стрижня після зняття навантаження. Наступний рядок демонструє перетворення в структурі хвиль, які відбуваються при відбитті від закріпленого кінця стрижня. Як видно рис. 3.1, в ці моменти часу значення механічного напруження подвоюється. В третьому рядку показано профілі пружного зміщення та механічного навантаження, коли хвиля рухається вже до правого кінця стрижня. Останній рядок зображає профілі хвиль після відбиття від вільного кінця стрижня. Варто зауважити, що амплітуди хвиль залишаються такими самими, але змінюють свій знак.

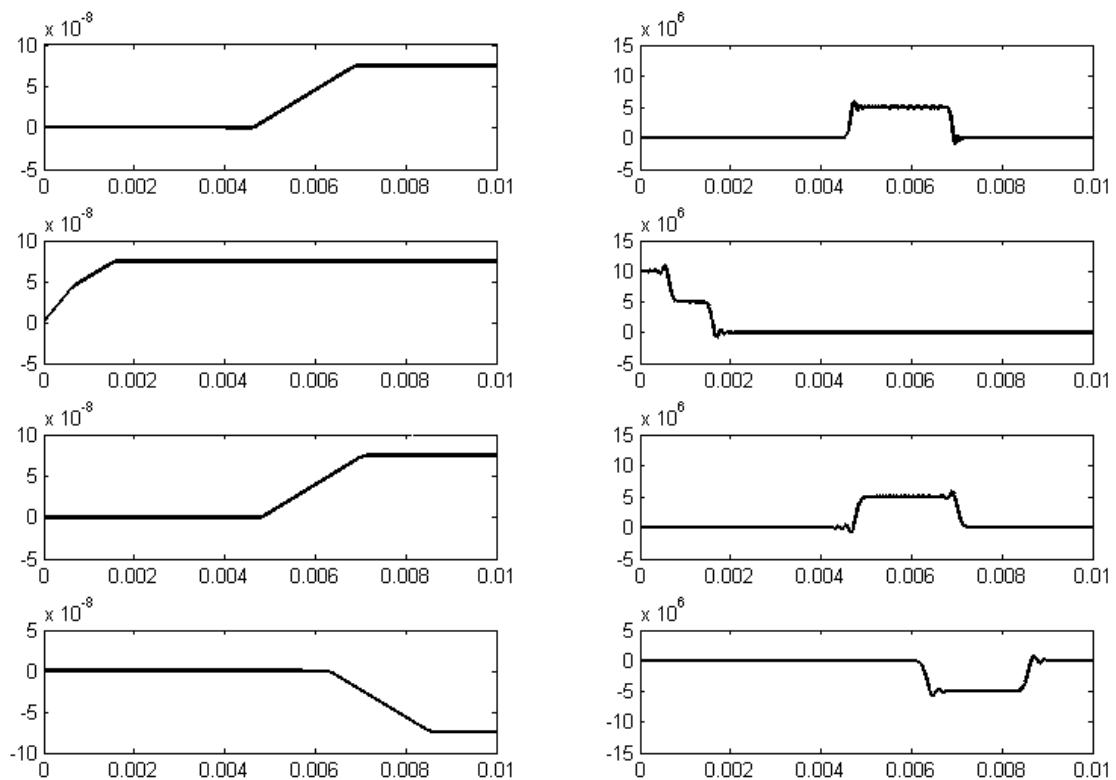


Рис. 3.1. Профілі пружного зміщення (зліва) та механічного напруження (справа) в моменти часу $t = 12 \cdot 10^{-7} \text{с}$; $23.85 \cdot 10^{-7} \text{с}$; $38.1 \cdot 10^{-7} \text{с}$; $53.95 \cdot 10^{-7} \text{с}$

Оскільки динаміка профілів хвиль інших характеристик схожа до тої, що зображена на рис. 3.1, всі інші графіки розв'язків будемо зображати лише в певні моменти часу, щоб підкреслити саме структуру профілю, а не його поведінку в часі. Покажемо профілі розв'язків в момент часу $t = 12.9 \cdot 10^{-7} \text{с}$, коли хвиля розташована приблизно посередині стрижня.

На рис.3.2 ми можемо бачити, що і пружне зміщення, і електричний потенціал - кусково-лінійні функції, а структура їхніх профілів однакова, вони відрізняються тільки значеннями. Те саме можна сказати і про їхні швидкості.

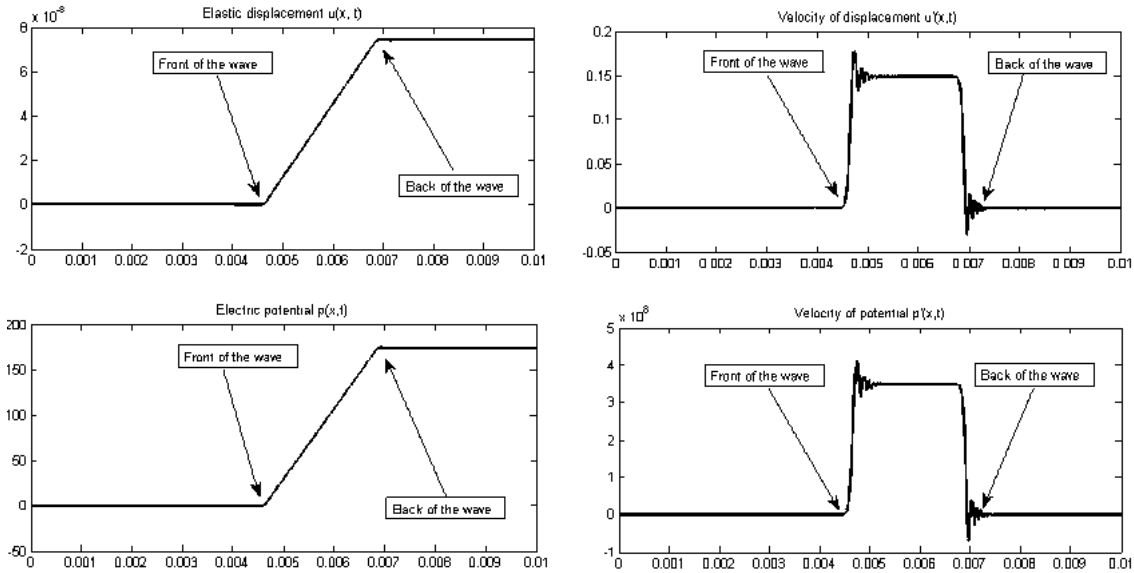


Рис. 3.2. Пружне зміщення, електричний потенціал і їхні швидкості в момент часу $t = 12.9 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

Наступні характеристики зображені на рис. 3.3. Варто зауважити, що профіль приросту температури $\theta(x,t)$ структурно нагадує профіль швидкості пружного зміщення $u'(x,t)$, а його швидкість нагадує механічне прискорення $u''(x,t)$.

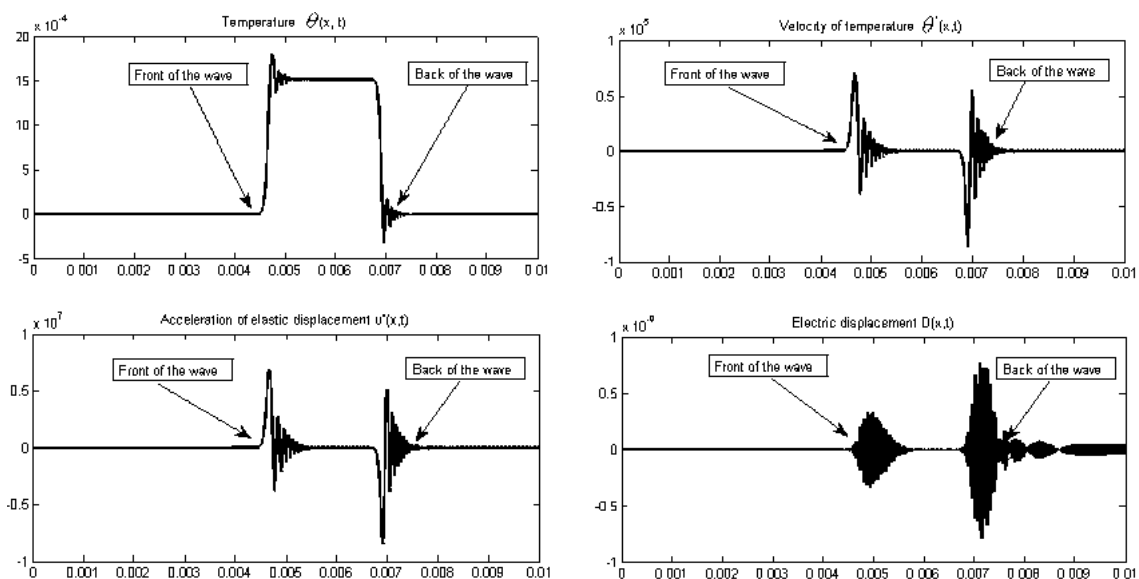


Рис. 3.3. Приріст температури, його швидкість, механічне прискорення та електрична індукція в момент часу $t = 12.9 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

Також варто продемонструвати профілі таких характеристик:

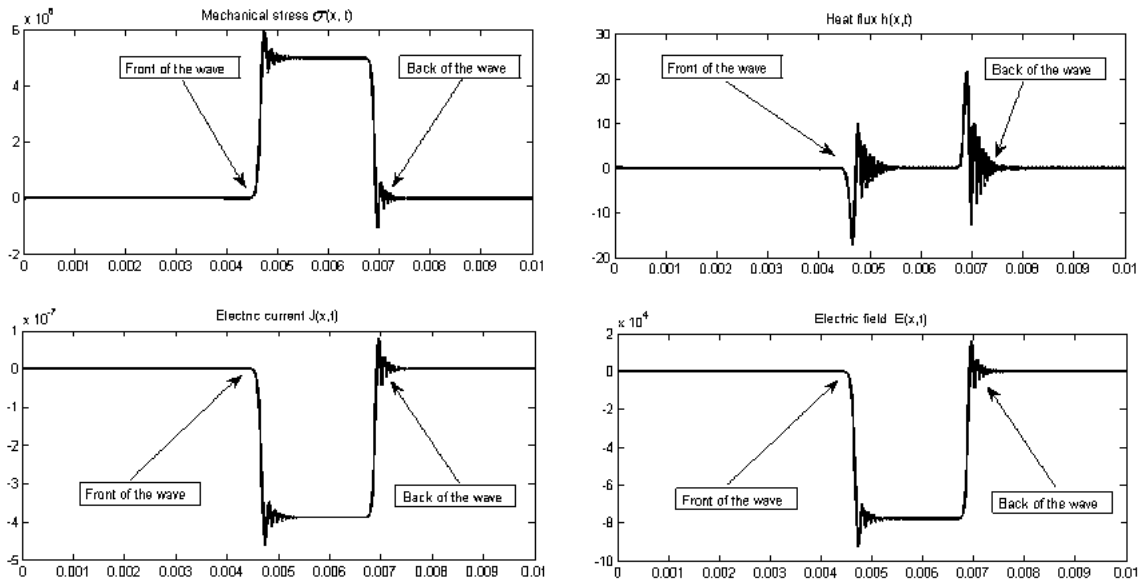


Рис. 3.4. Механічне напруження, тепловий потік, електричний струм та напруженість електричного поля в момент часу $t = 12.9 \cdot 10^{-7} \text{c}$

Зауважимо, що висота сходинки в профілі механічного напруження $\sigma(x, t)$ становить $5 \cdot 10^6 \text{Н/м}^2$, тобто величині імпульсу механічного навантаження, яке подається до правого кінця стрижня. Структури хвиль електричного струму $J(x, t)$ та напруженості електричного поля $E(x, t)$ знаходяться в протифазі до профілю механічного напруження. Профіль теплового потоку $h(x, t)$ нагадує нам профіль механічного прискорення $u''(x, t)$.

Розглянемо розподіл у часі різних компонентів повної енергії піроелектрика.

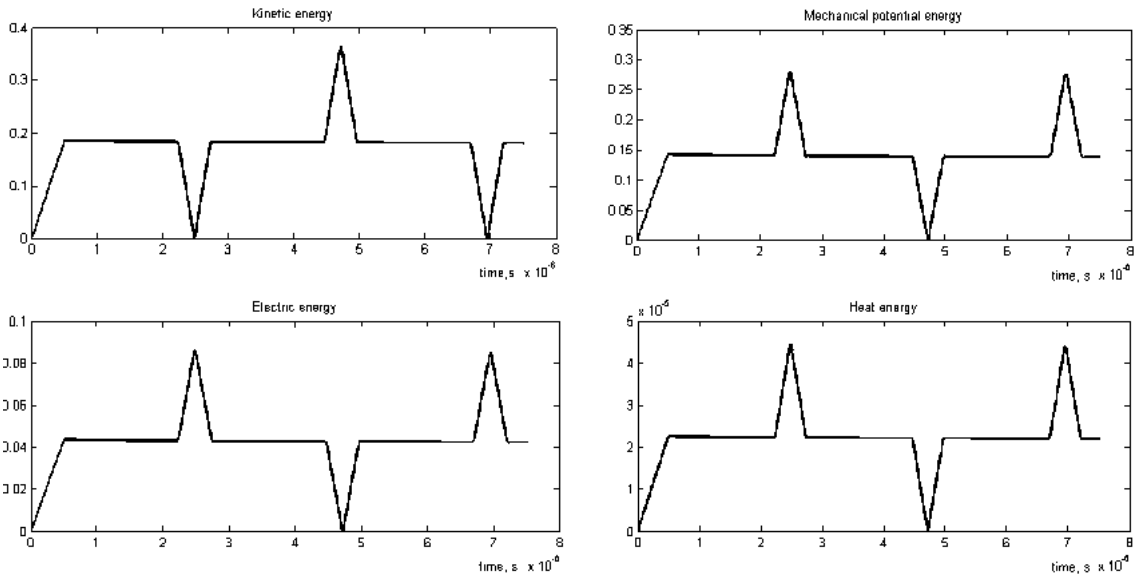


Рис. 3.5. Зміна з часом кінетичної, механічної потенціальної, електричної та теплової складових енергії піроелектрика

Як видно з рис. 3.5, механічна потенціальна, електрична та теплова енергії мають подібну структуру. Це цілком очікувано, оскільки всі вони є частинами повної потенціальної енергії піроелектрика. Тепер пояснимо детальніше динаміку зміни складових енергії в часі. Всі компоненти повної енергії піроелектрика зростають лінійно поки імпульс механічного напруження все ще подається. Потім, коли хвиля рухається вздовж стрижня, всі вони залишаються сталими, аж доки вона досягає закріпленого кінця стрижня. В цей момент відбуваються перетворення в структурі хвилі, як ми вже описували раніше. Отже, кінетична енергія тоді починає зменшуватися, аж поки не досягне нуля, коли задній фронт хвилі досягне лівого кінця стрижня. Решта компонент енергії досягають свого максимуму в цей момент часу. Далі перетворення продовжується і кінетична енергія починає зростати, тоді як значення інших складових енергії зменшується. Коли перетворення хвилі завершилося, всі компоненти енергії піроелектрика залишаються константами. Схожа ситуація з перетворенням енергії з одного виду в інший трапляється, коли хвиля досягає правого кінця стрижня. Якщо звернути увагу на величини компонент повної енергії піроелектрика, то можна помітити, що тепла енергія значно менша від інших. Максимальне значення кінетичної енергії – близько 0.36 Дж, максимальне значення електричної енергії 0.086 Дж і максимальне значення теплової енергії – близько $4.42 \cdot 10^{-4}$ Дж. Коли кінетична енергія досягає свого максимуму,

інші компоненти дорівнюють нулю, отже, можна стверджувати, що приблизно 23.8 % механічної енергії може бути перетворено в електричну, і лише приблизно 0.0123% її може бути перетворено в теплову.

3.5.2 Одновимірний випадок. Вплив піроефекту на розв'язки задачі термо-п'єзоелектрики

Розв'яжемо задачу класичної термоп'єзоелектрики при таких самих параметрах, крайових та початкових умовах, що й для вищезгаданого випадку прямого п'єзоелефекту в стрижні, лише зануливши коефіцієнти теплового розширення α та піроелектрики π . В результаті отримаємо задачу п'єзоелектрики, динаміку розв'язків якої ми досліджували в нашій статті [54]. Якісно розв'язки не відрізняються в поведінці. Тому цікаво порівняти кількісний вплив піроелектричних властивостей матеріалу.

Отже, ми розв'язали цю задачу для нульових (пієзо-випадок) на ненульових (руго-випадок) коефіцієнтів α та π . Обчислимо норму електричного потенціалу в стандартному просторі Соболева $H^1([0, L])$ в кожен момент часу $t \in [0, T]$. Оскільки значення $\|p_{piezo}\|_1$ та $\|p_{pyro}\|_1$ відрізняються не суттєво, наводимо лише графік $\|p_{pyro}\|_1$ на рис. 3.6.

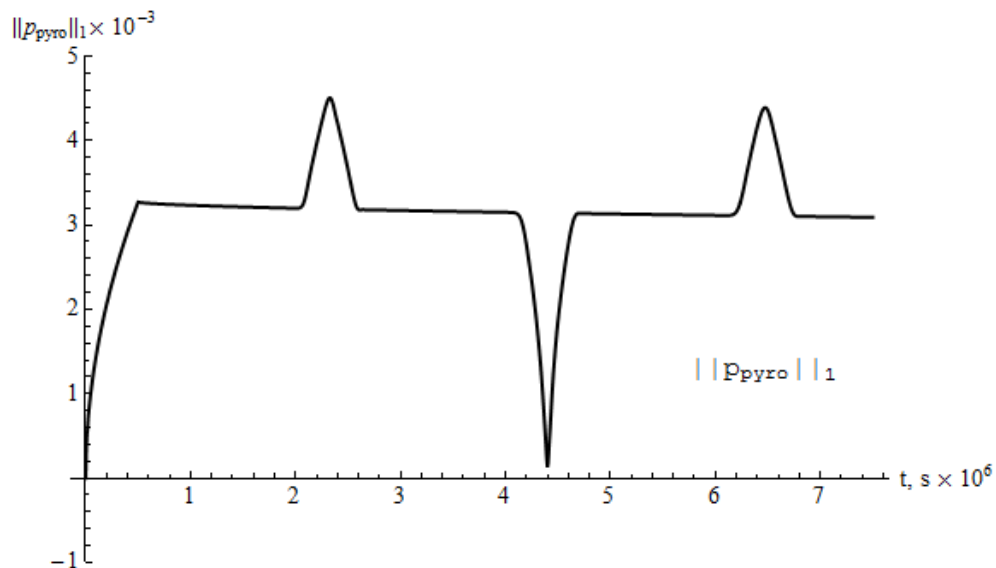


Рис. 3.6. Норма електричного потенціалу: поведінка в часі.

Графік різниці $\|p_{pyro}\|_1 - \|p_{piezo}\|_1$ показаний на рис.3.7. Максимальна різниця $\|p_{pyro}\|_1 - \|p_{piezo}\|_1$ становить лише близько 0,6% від максимального значення $\|p_{pyro}\|_1$.

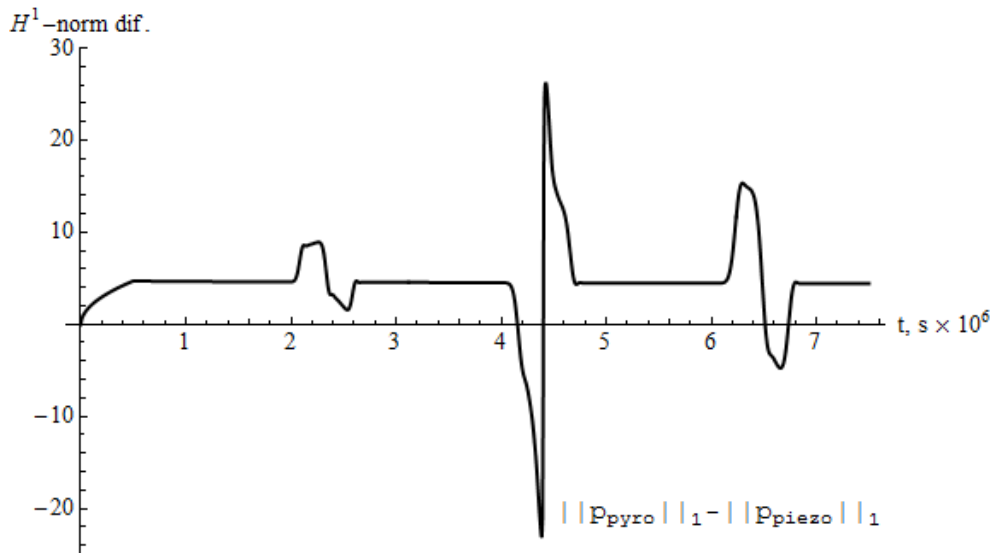


Рис. 3.7. Різниця норм електричного потенціалу: поведінка в часі.

Також, ми порахували значення електричного потенціалу в цих двох випадках (pyro- і piezo) в центрі стрижня в кожний момент часу. Поведінка $p_{pyro}(L/2, t)$ показана на рис. 3.8. Графік різниці $p_{pyro}(L/2, t) - p_{piezo}(L/2, t)$ показаний на рис. 3.9. Максимальне значення $p_{pyro}(L/2, t) - p_{piezo}(L/2, t)$ становить лише 0,43% максимального значення $p_{pyro}(L/2, t)$. Таким чином, можна зробити висновок, що у випадку механічних навантажень на кераміку PZT-4 можна знехтувати піроелектричними властивостями цього матеріалу.

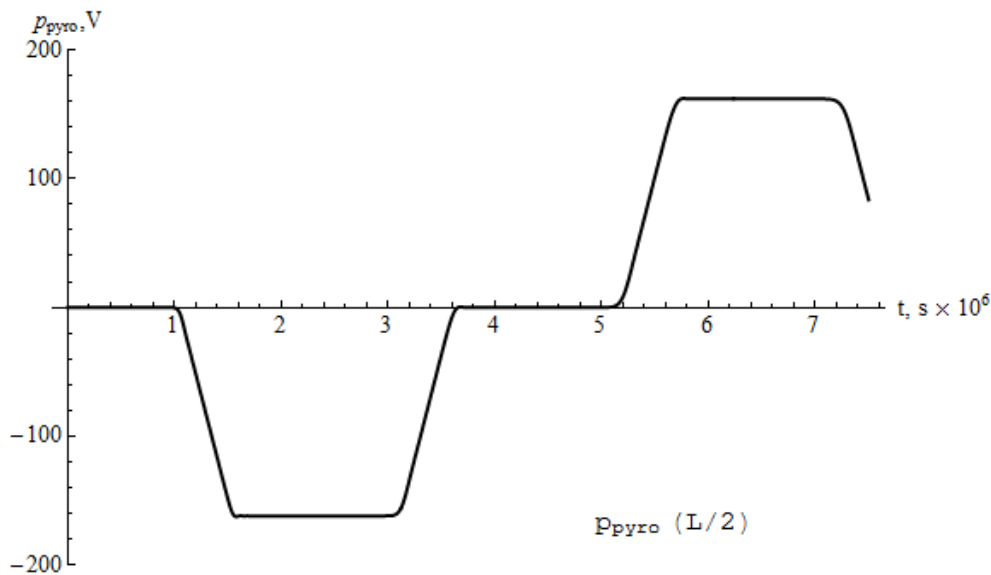


Рис. 3.8. Електричний потенціал в середині стрижня: поведінка в часі.

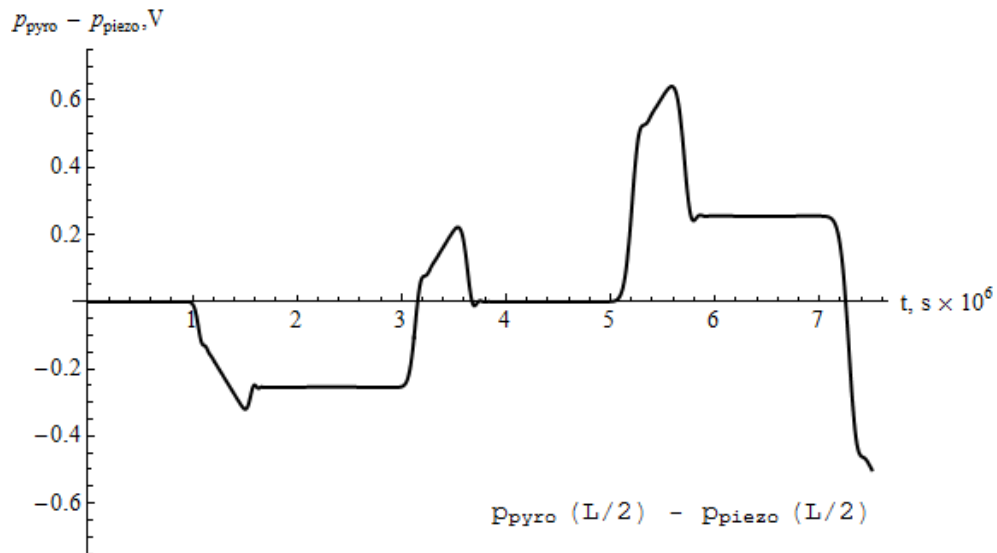


Рис. 3.9. Електричний потенціал в середині стрижня: поведінка в часі.

3.5.3 Одновимірний випадок. Обернений п'єзоефект

Тепер розглянемо випадок, коли імпульс електричного струму подається на правий кінець стрижня, а механічне навантаження та тепловий потік дорівнюють нулю. Нехай крайова умова на правому кінці набуває вигляду

$$\bar{\sigma}(t) = 0 \text{ Н/м}^2, \quad \bar{J}(t) = \begin{cases} 100 \text{ А}, & t \leq 5 \cdot 10^{-7} \text{ с} \\ 0 \text{ А}, & t > 5 \cdot 10^{-7} \text{ с} \end{cases}, \quad \bar{h}(t) = 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (3.25)$$

Знову візьмемо тривалість періоду спостереження $T = 75 \cdot 10^{-7} \text{ с}$. Для дискретизації візьмемо рівномірну сітку з $N = 512$ скінченних елементів з кусково-квадратичними апроксимаціями розв'язку і виконаємо $N_T = 4000$ кроків інтегрування в часі.

Як і у випадку прямого п'єзоефекту, будемо демонструвати профілі розв'язків у момент часу $t = 12.9 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, коли хвиля, що рухається, розташована приблизно посередині стрижня.

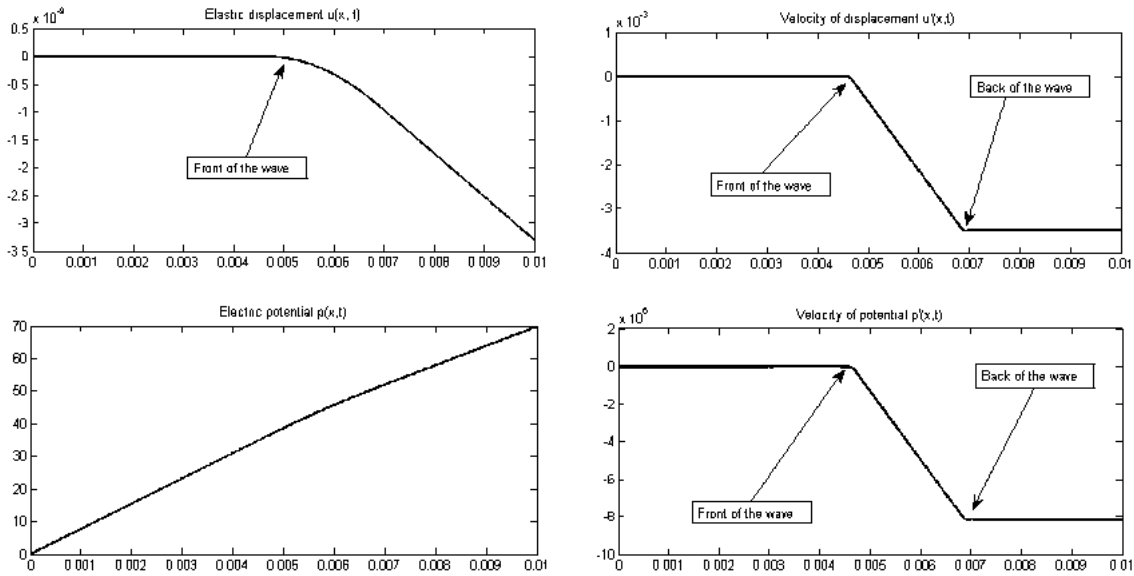


Рис. 3.10. Пружне зміщення, електричний потенціал і їхні швидкості в момент часу $t = 12.9 \cdot 10^{-7} \text{c}$

Тут можна побачити, що профілі пружного зміщення $u(x, t)$ та електричного потенціалу $p(x, t)$ вже не є кусково-лінійними, як в попередньому випадку. Крім того, вони вже не є структурно подібними, хоча їхні швидкості залишаються такими. Решта характеристик зображено на рис.3.11 та 3.12. Зауважимо, що профіль приросту температури $\theta(x, t)$ знову нагадує профіль швидкості пружного зміщення $u'(x, t)$. Так само швидкість приросту температури $\theta'(x, t)$ структурно схожа на профіль механічного прискорення $u''(x, t)$, що спостерігалось і у випадку прямого п'єзоефекту. Однак електрична індукція $D(x, t)$ тепер є ненульовою константою вздовж всього піроелектричного стрижня.

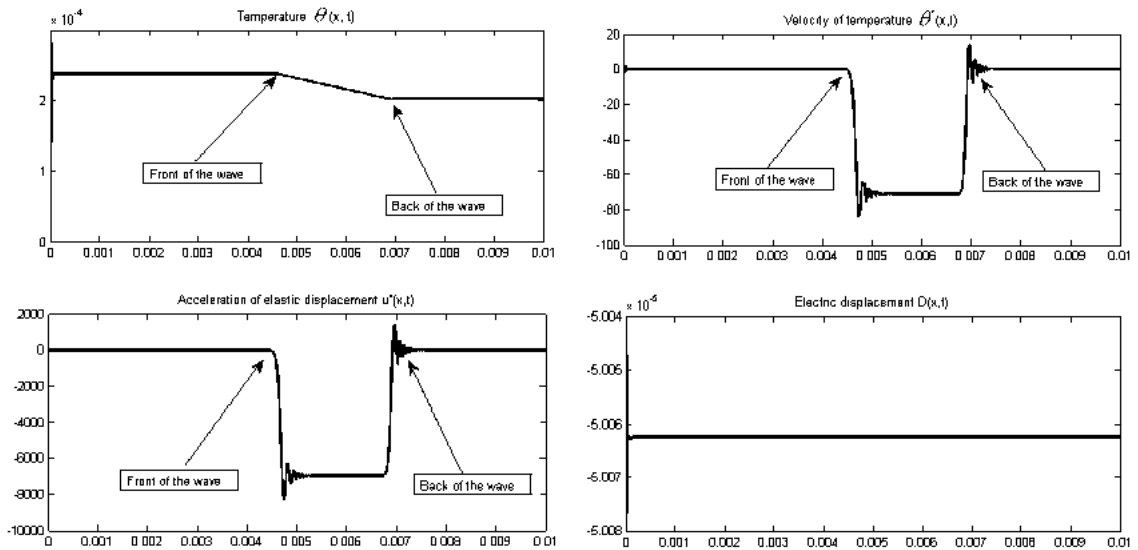


Рис. 3.11. Приріст температури, його швидкість, механічне прискорення та електрична індукція в момент часу $t = 12.9 \cdot 10^{-7}$ с

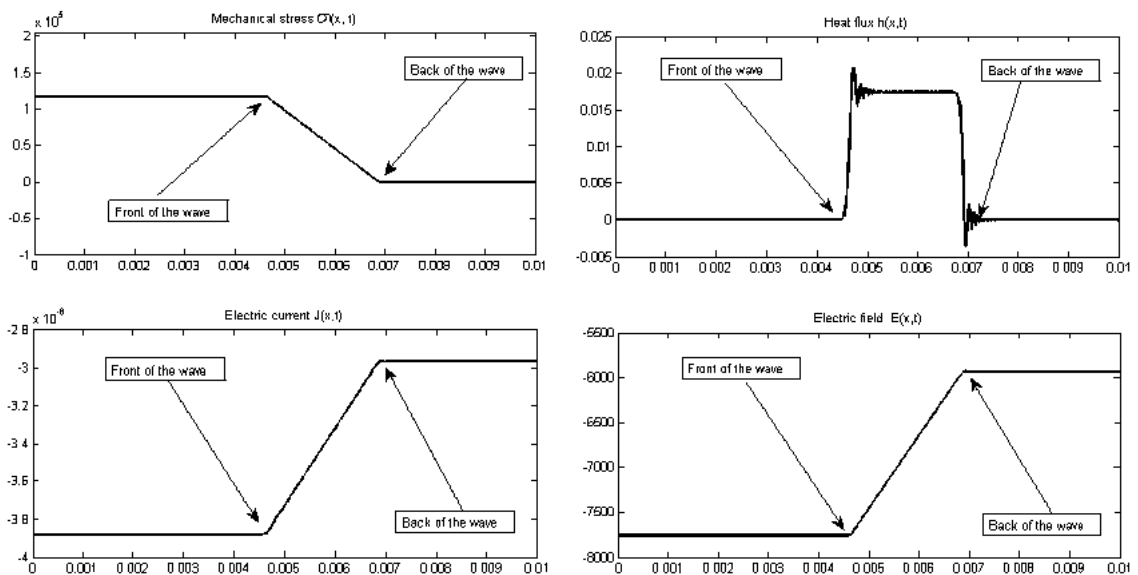


Рис. 3.12. Механічне напруження, тепловий потік, електричний струм і напруженість електричного поля в момент часу $t = 12.9 \cdot 10^{-7}$ с

Також структури профілів електричного струму $J(x, t)$ та напруженості електричного поля $E(x, t)$, що зображені на рис.3.12, знаходяться в протифазі до профілю механічного напруження $\sigma(x, t)$, як і у випадку прямого п'єзоефекту.

Розглянемо тепер розподіл в часі складових повної енергії піроелектрика.

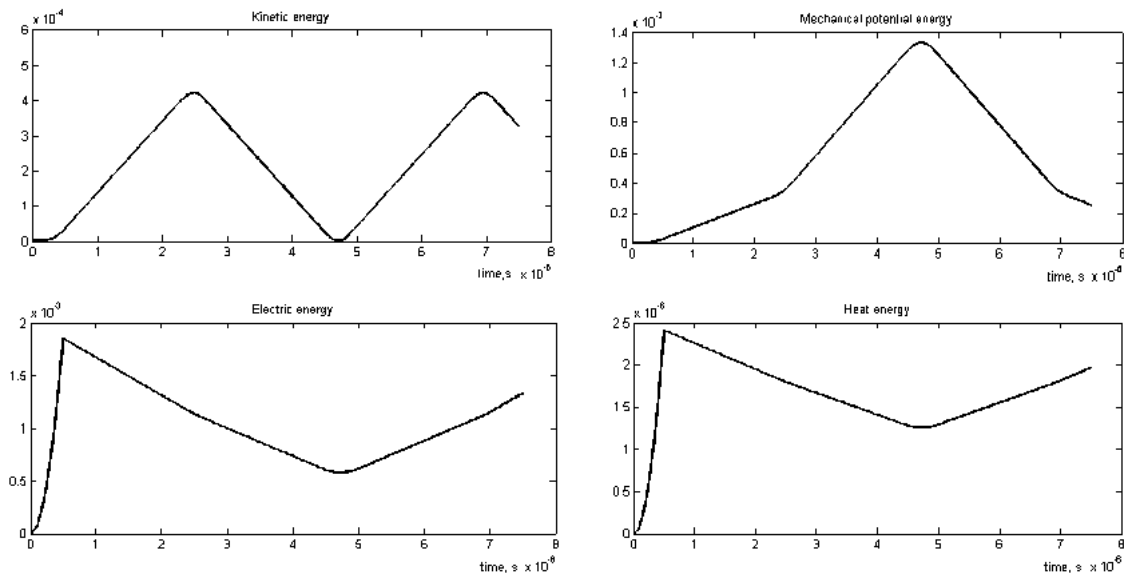


Рис. 3.13. Зміна з часом кінетичної, механічної потенціальної, електричної та теплової складових енергії піроелектрика

Можемо бачити, що графіки електричної та теплової енергій мають подібну структуру. Однак структура графіка механічної потенціальної енергії є іншою. Всі складові повної енергії піроелектрика зростають квадратично, поки струм все ще подається. Потім кінетична та механічна потенціальна енергії зростають лінійно, а тепла спадає лінійно протягом часу, коли хвиля рухається в напрямі лівого кінця стрижня. Коли перетворення проходять на закріпленому кінці, кінетична енергія спочатку квадратично зростає, досягає свого максимуму, а потім квадратично спадає. Всі решта складові повної енергії піроелектрика тільки змінюють швидкість свого зростання (чи спадання). Коли хвиля досягає правого кінця стрижня, кінетична енергія спочатку квадратично спадає, досягає нуля, а потім квадратично зростає. При відбитті хвилі від правого кінця механічна потенціальна енергія спочатку квадратично зростає, а потім квадратично спадає. Інші дві компоненти енергії поведуться подібно до кінетичної енергії, але вони не досягають нуля, а лише деякого мінімального значення.

Подивимося тепер на величини компонентів повної енергії піроелектрика. Після того, як навантаження у вигляді електричного струму перестає подаватися, повна енергія системи залишається сталою і дорівнює 0.0019 Дж . Максимальне значення суми кінетичної та механічної потенціальної енергії – близько 0.0013 Дж і максимальне значення теплової енергії – $2.5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$. Отже, ми можемо стверджувати, що близько 68.42% еле-

ктричної енергії може перетворитися в механічну, і лише приблизно 0.132% її може перетворитися в теплову.

3.5.4 Двовимірний випадок. Порівняння з результатами відомими з літератури.

Повторимо числовий експеримент, який описують у своїй статті Sladek et al. [111]. На верхній стороні квадратної пластини розміром $a \times a$ підтримується сталий приріст температури $\theta = H(t - 0)$, де $H(\tau)$ – одинична функція Хевісайда, тобто $H(\tau) = 1, \tau \geq 0$, інші крайові умови мають вигляд таких, як показано на рис. 3.14.

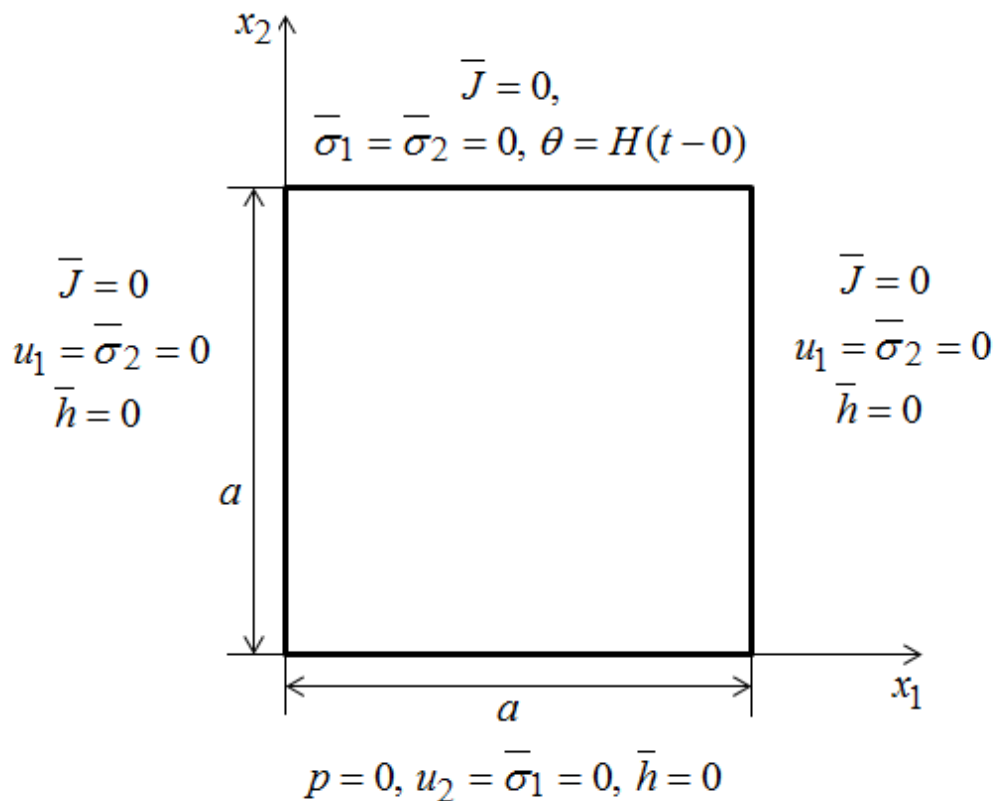


Рис. 3.14. Рівномірно нагріта квадратна пластина з п'єзоелектрика

У праці [50] вказано аналітичний розв'язок для незв'язної термопружності у випадку ізотропного матеріалу:

$$\theta(x_2, t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp \left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \kappa t}{4a^2} \right] \cos \left(\frac{(2n+1)\pi x_2}{2a} \right) \right\}, \quad (3.26)$$

де a - довжина сторони квадратної пластини, $\kappa = \lambda_{22}/\rho c_\epsilon$ - коефіцієнт дифузивності. Вважатимемо, що наша пластина зроблена з кераміки PZT-5H

[111]. Занулимо коефіцієнти теплового розширення $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ та піроелектрики $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ і застосуємо нашу чисельну схему до такої модифікованої задачі термоп'єзоелектрики. Виберемо довжину сторони пластини $a = 1\text{ м}$ і часовий інтервал T такий, що задовільняє умову $Tk_{22}/\rho c_\epsilon a^2 = 1, 3$. Як і у праці [111] апроксимацію розв'язку шукатимемо у $121=11 \times 11$ вузлах, тобто маємо сітку з $5 \times 5=25$ скінченних елементів з кусково-біквдратичними апроксимаціями розв'язку на них. Кількість кроків однокрокової рекурентної схеми в часі виберемо $N_T = 8$. На рис. 3.15 представлено чисельний та аналітичний розв'язки $\theta(x, t)$ на прямій $x_2 = 0$. Як можна бачити, вони практично співпадають. Відносна похибка розв'язку обчислена за формулою

$$r = \frac{||\theta_a - \theta_{num}||}{||\theta_a||}. \quad (3.27)$$

рівна 0,04%.

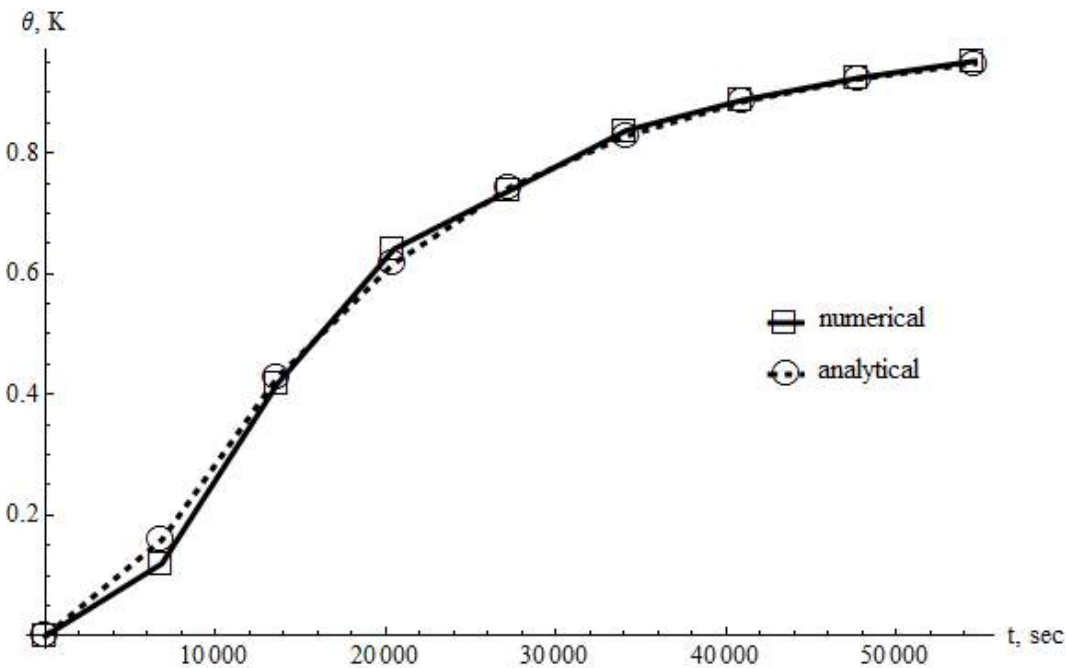


Рис. 3.15. Чисельний та аналітичний розв'язки $\theta(x, t)$ на прямій $x_2 = 0$

Далі будемо розв'язувати задачу термоп'єзоелектрики з ненульовими коефіцієнтами $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ та $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ (зі значеннями характерними для кераміки PZT-5Н). Крайові умови та сітка скінченних елементів залишаються тими самими. Кількість кроків однокрокової рекурентної схеми в часі виберемо $N_T = 400$. Значення механічного напруження $\sigma_{11}(x, t)$ на прямих $x_2 = 0$ та $x_2 = a/2$ показані на рисунку 3.16 і повністю співпадають

з наведеними у праці [111]. Значення $\sigma_{11}(x_1, 0, T)$ за нашими результатами рівне $-1,32 \cdot 10^6$ Дж, в той час як у статті [111] $-1,29 \cdot 10^6$ Дж.

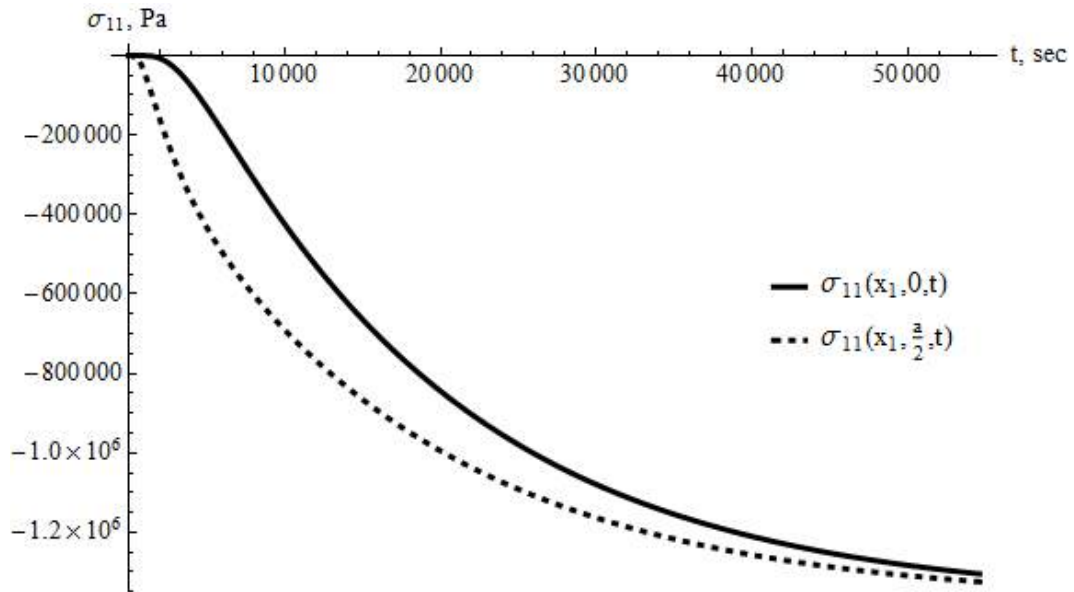


Рис. 3.16. $\sigma_{11}(x, t)$ на прямих $x_2 = 0$ та $x_2 = a/2$

Значення потенціалу $p(x, t)$ на прямих $x_2 = a$ та $x_2 = a/2$ показані на рисунку 3.17 і співпадають з наведеними у праці [111]. Значення $p(x_1, a, T)$ за нашими результатами рівне $-1,17 \cdot 10^4$ В, в той час як у статті [111] $-1,48 \cdot 10^4$ В.

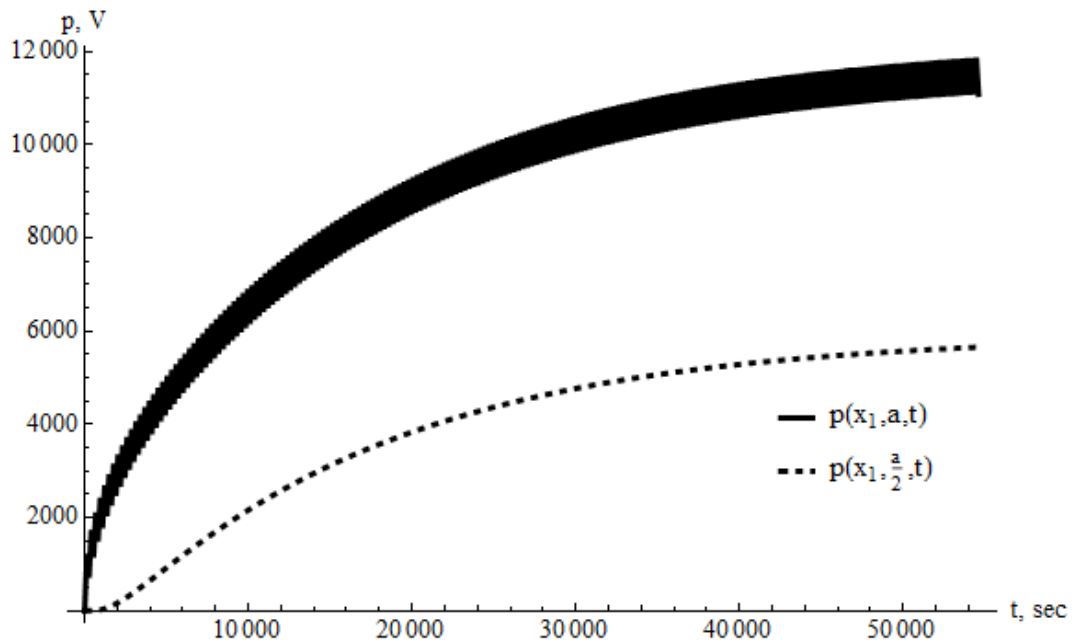


Рис. 3.17. $p(x, t)$ на прямих $x_2 = 0$ та $x_2 = a/2$

3.5.5 Двовимірний випадок.Прямий п'єзоефект

Нехай ми маємо пластину-піроелектрик, виготовлену з кераміки PZT-4. Щоб оцінити наші чисельні результати, ми будемо розглядати випадки, які будуть дуже подібними до тих, що ми розглядали у випадку одновимірної задачі. Припускаємо, що напрям поляризації співпадає з напрямом осі Ox_1 . Крайові умови задачі зображені на рис.3.18.

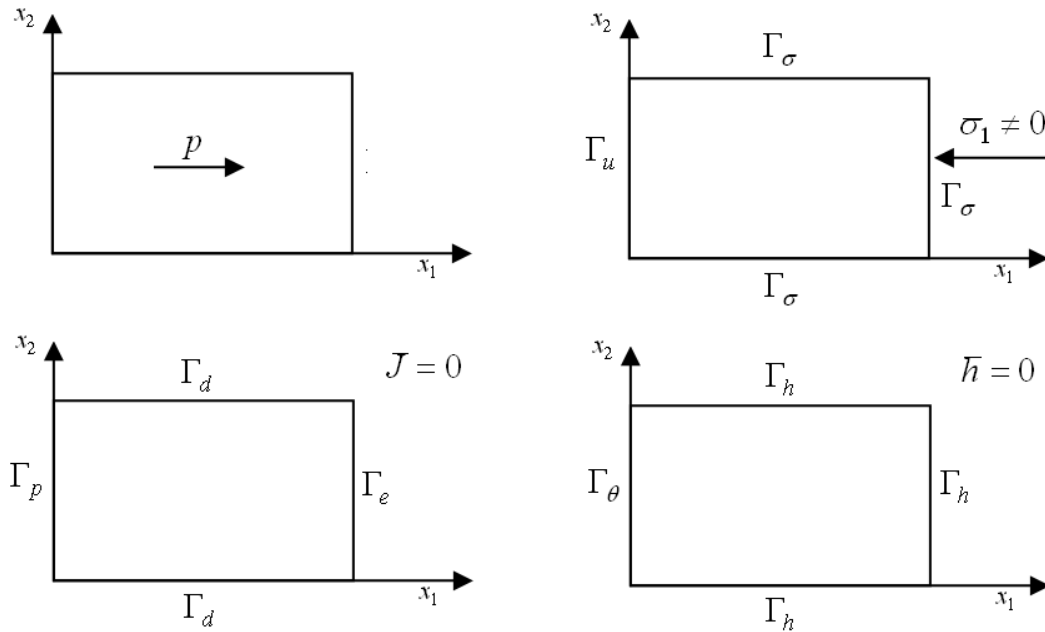


Рис. 3.18. Крайові умови на сторонах пластини з піроелектричними властивостями

Ліва сторона пластинки закріплена, заземлена і підтримується при сталій температурі. До правої сторони буде подаватися імпульс механічного навантаження такого вигляду:

$$\bar{\sigma}(t) = \begin{cases} 5 \cdot 10^6 \text{Н/м}^2, & t \leq 9 \cdot 10^{-7} \text{с} \\ 0 \text{Н/м}^2, & t > 9 \cdot 10^{-7} \text{с} \end{cases} \quad (3.28)$$

Електричний струм та тепловий потік рівні нулю на правій стороні пластини. Верхня і нижня сторони пластини вільні від навантажень будь-якого виду. Початкові умови вибрані таким чином, що пружне зміщення, електричний потенціал та приріст температури мають нульові значення в початковий момент часу.

Надалі ми виокремимо випадки прямокутної пластини та квадратної пластини, оскільки результати експериментів дещо відрізняються у цих випадках за рахунок поперечних хвиль.

Прямокутна пластина Нехай прямокутна пластина має розміри $\Omega = [0, 01 \times 0, 001\text{м}]$. Початкові та крайові умови описані вище. Візьмемо час спостереження $T = 50 \cdot 10^{-7}\text{с}$. Для дискретизації за просторовою змінною візьмемо $N = 128 \times 4$ прямокутних скінченних елементів з білінійними апроксимаціями розв'язку на них. Кількість кроків ОРС візьмемо $N_T = 400$. Профілі розв'язків в момент часу $t = 20 \cdot 10^{-7}\text{с}$ показані на рис. 3.19 та 3.20.

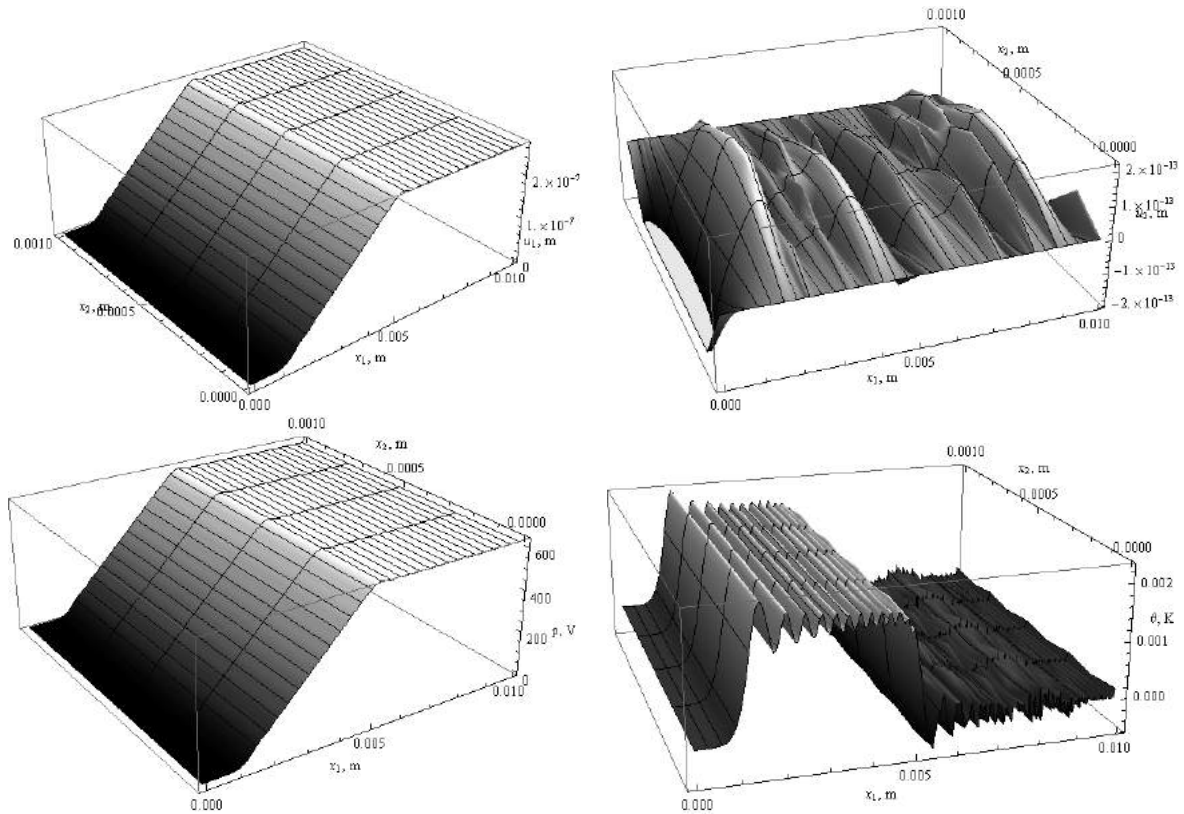


Рис. 3.19. $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $p(x, t)$, $\theta(x, t)$ в момент часу $t = 20 \cdot 10^{-7}\text{с}$

Як і в одновимірному випадку повздовжня ударна хвиля рухається від правої сторони пластини до лівої. Профілі розв'язків $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $p(x, t)$, $\theta(x, t)$ нагадують нам одновимірні, зображені на рис. 3.2 та 3.3. Аналогічно термоелектромеханічні властивості $\sigma_{11}(x, t)$, $J_1(x, t)$, $H_1(x, t)$ також є схожими до отриманих в результаті експерименту з піроелектричним стрижнем.

Розподіл в часі складових повної енергії піроелектрика, зображений на рис. 3.21 також є аналогічним до випадку зі стрижнем. Зокрема, потенціальна, електрична та теплова енергії поведуться подібно, а значення теплової енергії є набагато меншим за інші складові.

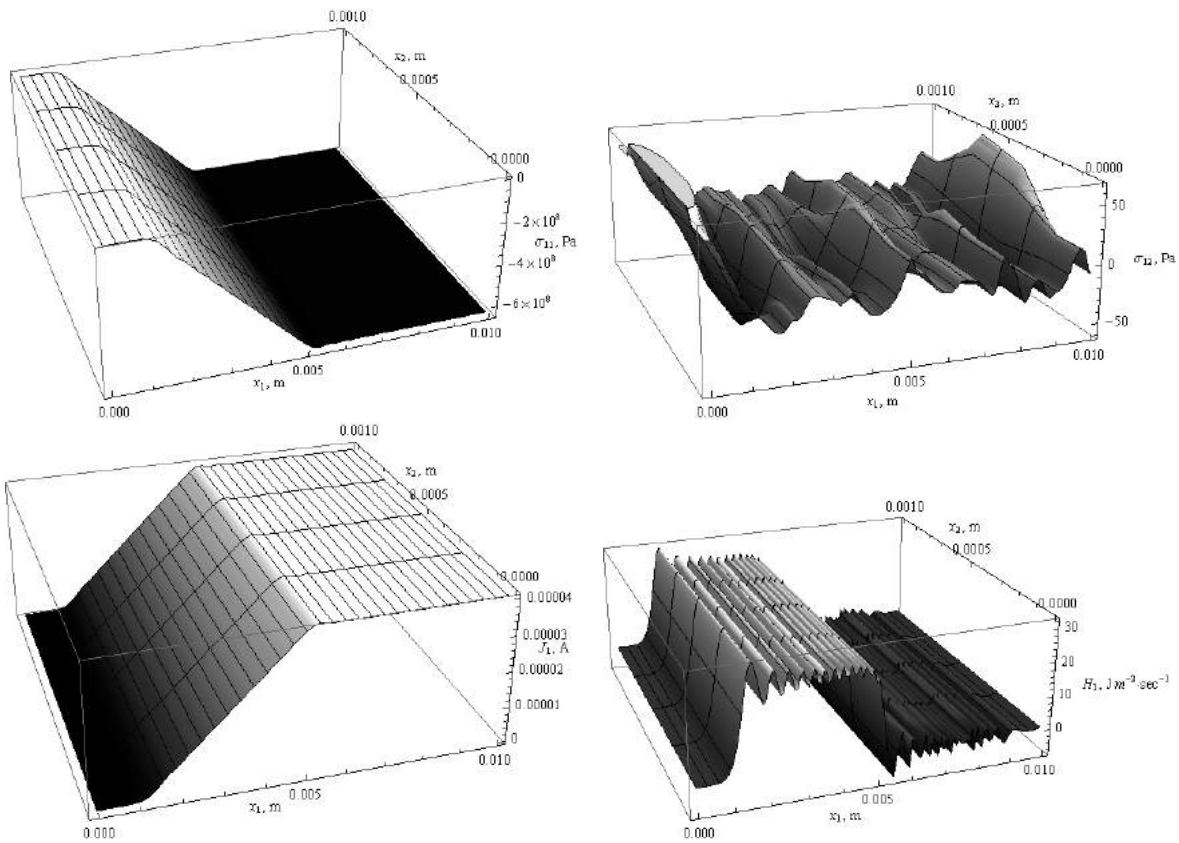


Рис. 3.20. $\sigma_{11}(x, t)$, $\sigma_{12}(x, t)$, $J_1(x, t)$, $H_1(x, t)$ в момент часу $t = 20 \cdot 10^{-7} \text{c}$

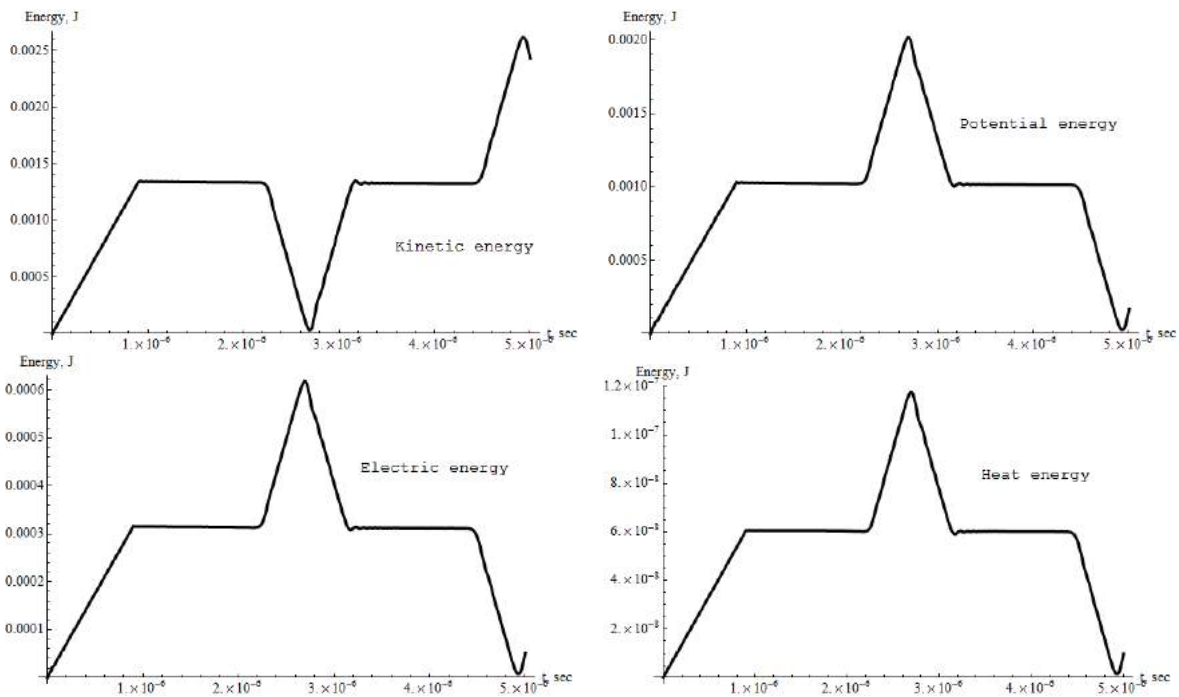


Рис. 3.21. Розподіл в часі складових повної енергії піроелектрика

Квадратна пластина Нехай прямокутна пластина має розміри $\Omega = [0, 01 \times 0, 01\text{м}]$. Початкові та крайові умови описані вище. Візьмемо час спостереження $T = 50 \cdot 10^{-7} \text{c}$. Для дискретизації за просторовою змінною візьмемо

$N = 16 \times 16$ прямокутних скінченних елементів з білінійними апроксимаціями розв'язку на них. Кількість кроків ОРС візьмемо $N_T = 400$. У випадку квадратної пластини на характер розв'язків впливають поперечні хвилі, тому профілі розв'язків в момент часу $t = 20 \cdot 10^{-7}$ с виглядають так як зображено на рис. 3.22 та 3.23:

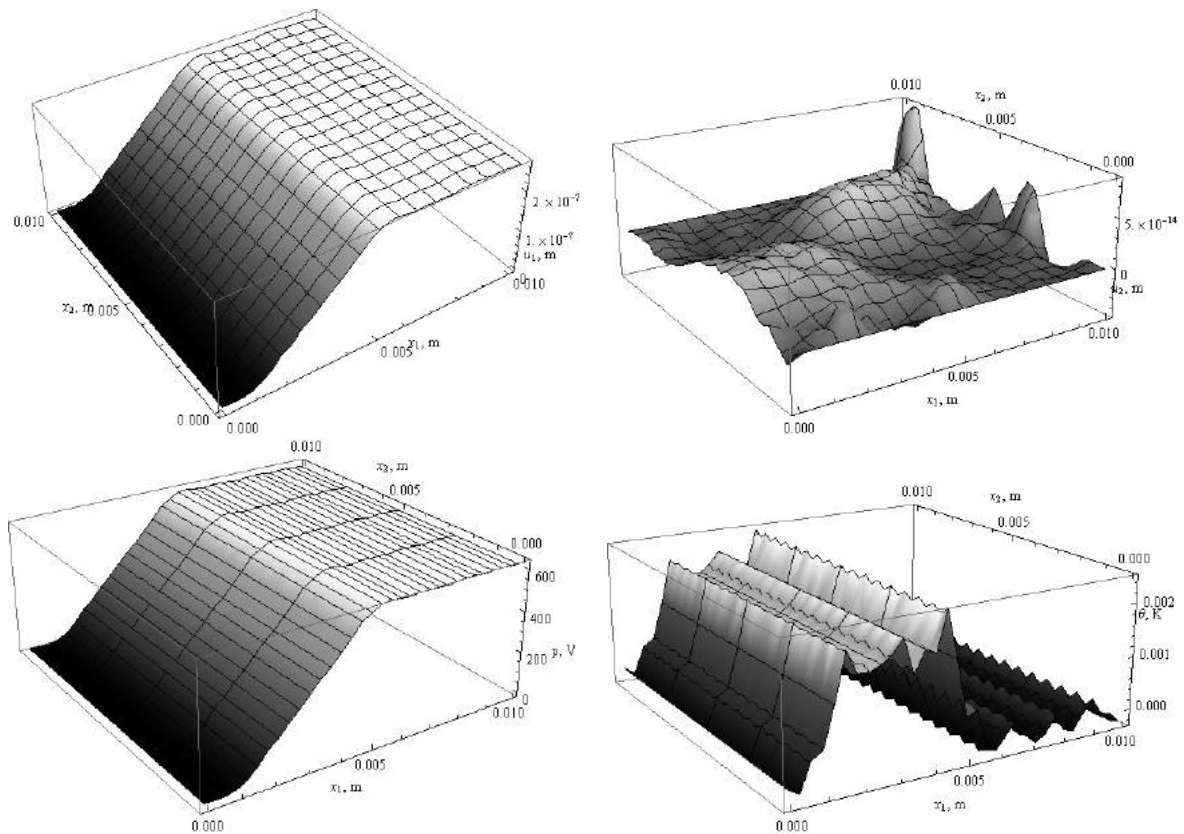


Рис. 3.22. $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $p(x, t)$, $\theta(x, t)$ в момент часу $t = 20 \cdot 10^{-7}$ с

Розподіл в часі складових повної енергії піроелектрика також залишається схожим до випадку з прямокутною пластиною. Але присутність поперечних хвиль чітко виражена осциляціями на рис.3.24 в профілях енергій під час періодів, коли кожна зі складових енергії була сталою у випадку з прямокутною пластиною.

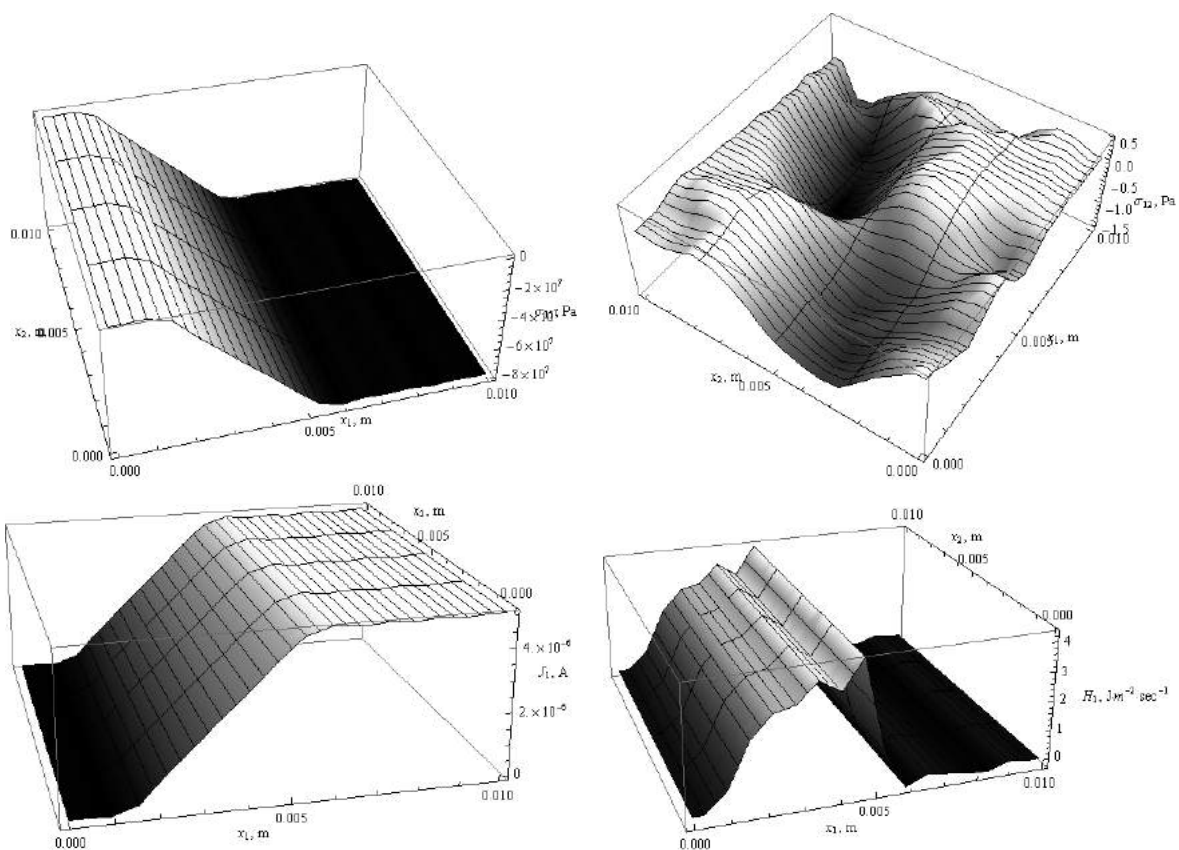


Рис. 3.23. $\sigma_{11}(x, t)$, $\sigma_{12}(x, t)$, $J_1(x, t)$, $H_1(x, t)$ в момент часу $t = 20 \cdot 10^{-7} \text{ c}$

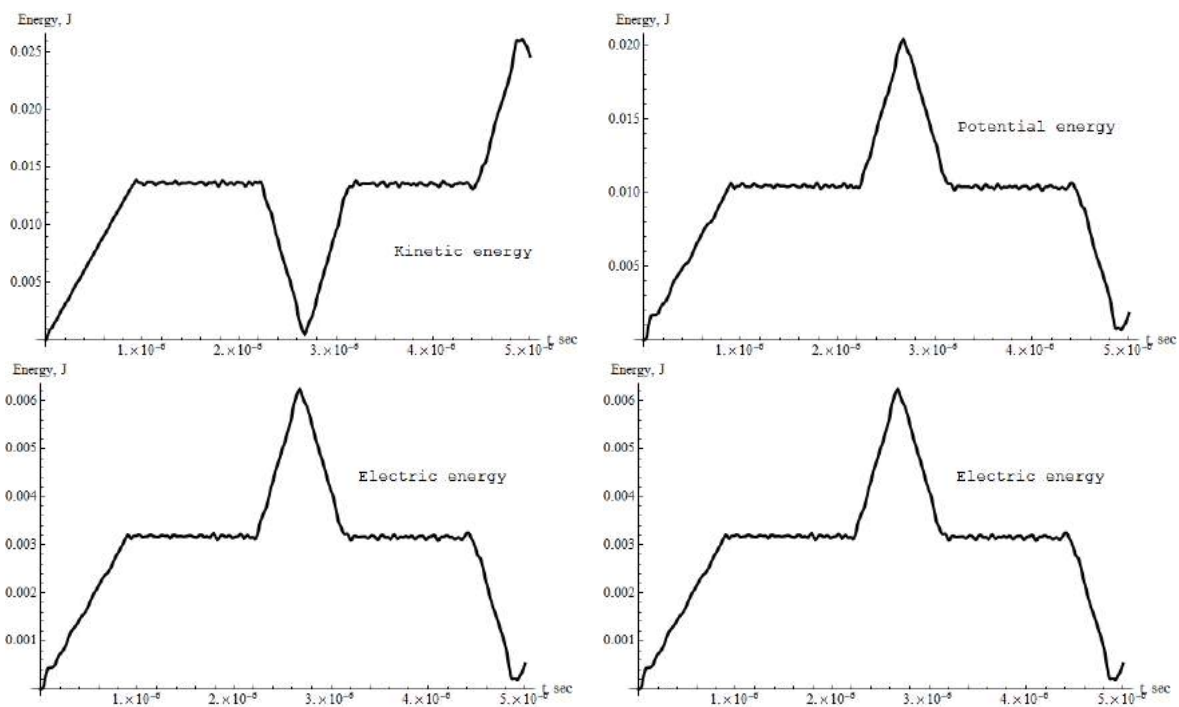


Рис. 3.24. Розподіл в часі складових повної енергії піроелектрика

3.6 Висновки та заключні зауваження

Розглянуто побудову однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі для початково-крайової задачі термоп'єзоелектрики, її стійкість та збіжність. Розроблено програмні засоби для розв'язування цієї задачі в одно- та двовимірних областях. Із застосуванням цих програмних засобів, досліджено процеси поширення хвиль зміщень, потенціалу та приросту температури в піроелектричному стрижні та пластині. Проведено порівняльний аналіз енергетичних характеристик піроелектрика. В двовимірному випадку зроблено порівняння з результатами одновимірної задачі, а також з результатами, наведеними у праці [111]. Крім того, зроблено порівняння розв'язків задачі класичної термоп'єзоелектрики з розв'язками задачі п'єзоелектрики.

РОЗДІЛ 4

АНАЛІЗ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ ЛОРДА-ШУЛЬМАНА

У цьому розділі сформульовано варіаційні задачі для нестационарної задачі та задачі про вимушені гармонійні коливання піроелектрика для випадку моделі Лорда-Шульмана. Доведено коректність цих варіаційних задач. Для випадку вимушених коливань піроелектриків розроблено чисельну схему МСЕ розв'язування цієї задачі і проаналізовано її стійкість та збіжність. Для нестационарної задачі також побудовано чисельну схему розв'язування на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми. Розроблено відповідні програмні засоби та проведено ряд числових експериментів. Зроблено порівняння отриманих результатів з результатами інших дослідників.

4.1 Варіаційна задача термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана

Щоб побудувати варіаційне формулювання задачі ТПЕ-ЛШ, введемо простори допустимих пружних зміщень, електричних потенціалів, пристів температур та теплових потоків відповідно:

$$\begin{aligned} V &= \{v \in [H^1(\Omega)]^d | v = 0 \text{ on } \Gamma_u\}, \\ X &= \{\xi \in H^1(\Omega) | \xi = 0 \text{ on } \Gamma_p, \xi = const \text{ on } \Gamma_e\} \\ Y &= \{\eta \in H^1(\Omega) | \eta = 0 \text{ on } \Gamma_\theta\}, \\ Z &= \{\zeta \in [L^2(\Omega)]^d | \zeta = const \text{ on } \Gamma_q\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

і позначення

$$\Phi = V \times X \times Y \times Z, \quad \Phi_1 = V \times X \times Y, \quad G = L^2(\Omega), \quad H = G^d. \quad (4.2)$$

Тут символ $H^m(\Omega)$ використаний як позначення для стандартних просторів Соболева. Тоді, після застосування принципу віртуальних робіт до задачі

ТПЕ-ЛШ, отримуємо наступну варіаційну задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \psi_0 = (u_0, p_0, \theta_0, q_0) \in \Phi, \quad v_0 \in H \text{ та } (l, r, \mu, 0) \in L^2(0, T; \Phi'); \\ \text{знайти } \psi = (u, p, \theta, q) \in L^2(0, T; \Phi) \text{ такі, що} \\ m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - e(p(t), v) - \gamma(\theta(t), v) = \langle l(t), v \rangle, \\ \chi(p'(t), \xi) + e(\xi, u'(t)) + z(p(t), \xi) + \pi(\theta'(t), \xi) = \langle r(t), \xi \rangle, \\ s(\theta'(t), \eta) + \pi(\eta, p'(t)) + \gamma(\eta, u'(t)) - g(q(t), \eta) = \langle \mu(t), \eta \rangle, \\ \tau b(q'(t), \zeta) + b(q(t), \zeta) + g(\zeta, \theta(t)) = 0 \quad \forall t \in (0, T], \\ m(u'(0) - v_0, v) = 0, \quad c(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V, \\ \chi(p(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall \xi \in X, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in Y, \\ b(q(0) - q_0, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in Z \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Тут введені білінійні форми та лінійні функціонали мають вигляд:

$$\begin{aligned} m(u, v) &:= \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx = \int_{\Omega} \rho u \cdot v dx, \\ a(u, v) &:= \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx, \\ c(u, v) &:= \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx, \\ \langle l, v \rangle &:= \int_{\Omega} \rho f_i v_i dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\sigma}_i v_i d\gamma, \\ \gamma(\xi, v) &:= \int_{\Omega} \xi c_{ijkl} \alpha_{kl} \varepsilon_{ij}(v) dx, \\ e(\xi, v) &:= \int_{\Omega} e_{kij} E_k(\xi) \varepsilon_{ij}(v) dx \quad \forall u, v \in V, \\ \chi(p, \xi) &:= \int_{\Omega} \chi_{km} E_k(p) E_m(\xi) dx, \\ z(p, \xi) &:= \int_{\Omega} z_{km} E_k(p) E_m(\xi) dx, \\ \langle r, \xi \rangle &:= I \xi|_{\Gamma_e} \quad \forall p, \xi \in X, \\ \pi(\eta, \xi) &:= \int_{\Omega} \eta \pi_k E_k(\xi) dx, \\ s(\theta, \eta) &:= \int_{\Omega} \rho c_v T_0^{-1} \theta \eta dx, \\ \langle \mu, \eta \rangle &:= \int_{\Omega} T_0^{-1} \rho \omega \eta dx - \int_{\Gamma_h} T_0^{-1} \hat{h} \eta d\gamma \quad \forall \eta, \theta \in Y, \\ b(q, \zeta) &:= \int_{\Omega} b_{ij} q_i \zeta_j dx, \\ g(\zeta, \eta) &:= \int_{\Omega} T_0^{-1} \zeta_k \eta_{,k} dx \quad \forall q, \zeta \in Z. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2 Задача про вимушені гармонійні коливання

4.2.1 Варіаційна постановка

Якщо припустити, що навантаження на п'єзоелектрик змінюється гармонійно в часі із круговою частотою $\omega > 0$ за законом вигляду

$$\begin{aligned} l(t) &= (l_1 + il_2)e^{-i\omega t}, \\ r(t) &= (r_1 + ir_2)e^{-i\omega t}, \\ \mu(t) &= (\mu_1 + i\mu_2)e^{-i\omega t}, \quad \forall t \in (0, T], \end{aligned} \quad (4.5)$$

то у такому випадку наближені розв'язки задачі (4.3) також шукають у вигляді розвинень:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\cong (u_1 + iu_2)e^{-i\omega t}, \\ p(x, t) &\cong (p_1 + ip_2)e^{-i\omega t}, \\ \theta(x, t) &\cong (\theta_1 + i\theta_2)e^{-i\omega t}, \\ q(x, t) &\cong (q_1 + iq_2)e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де $u_1, u_2, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2$ та q_1, q_2 — невідомі амплітуди механічних зміщень, електричного потенціалу та приросту температури відповідно.

Після підстановки припущення (4.5) та наближення (4.6) у рівняння задачі (4.3) та нехтування її початковими умовами, отримуємо варіаційну задачу про вимушені гармонійні коливання піроелектрика:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \tau > 0, \omega > 0, (l_1, r_1, \mu_1, 0, l_2, r_2, \mu_2, 0) \in W' = \Phi' \times \Phi'; \\ \text{знайти } \psi = (u_1, p_1, \theta_1, q_1, u_2, p_2, \theta_2, q_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ такі, що} \\ \forall w = (v_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, v_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2) \in W \\ -\omega^2 m(u_1, v_2) + \omega a(u_2, v_2) + c(u_1, v_2) - e(p_1, v_2) - \gamma(\theta_1, v_2) = \langle l_1, v_2 \rangle, \\ -\omega^2 m(u_2, v_1) - \omega a(u_1, v_1) + c(u_2, v_1) - e(p_2, v_1) - \gamma(\theta_2, v_1) = \langle l_2, v_1 \rangle, \\ \omega \chi(p_2, \xi_1) + \omega e(\xi_1, u_2) + z(p_1, \xi_1) + \omega \pi(\theta_2, \xi_1) = \langle r_1, \xi_1 \rangle, \\ -\omega \chi(p_1, \xi_2) - \omega e(\xi_2, u_1) + z(p_2, \xi_2) - \omega \pi(\theta_1, \xi_2) = \langle r_2, \xi_2 \rangle, \\ \omega s(\theta_2, \eta_1) + \omega \pi(\eta_1, p_2) + \omega \gamma(\eta_1, u_2) - g(q_1, \eta_1) = \langle \mu_1, \eta_1 \rangle, \\ -\omega s(\theta_1, \eta_2) - \omega \pi(\eta_2, p_1) - \omega \gamma(\eta_2, u_1) - g(q_2, \eta_2) = \langle \mu_2, \eta_2 \rangle, \\ \omega \tau b(q_2, \zeta_1) + b(q_1, \zeta_1) + g(\zeta_1, \theta_1) = 0, \\ -\omega \tau b(q_1, \zeta_2) + b(q_2, \zeta_2) + g(\zeta_2, \theta_2) = 0. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Після додавання всіх рівнянь задачі (4.7) введемо білінійну форму $\Pi_\omega(\cdot, \cdot) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ та лінійний функціонал $\chi_\omega : W \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином:

$$\begin{aligned} \Pi_\omega(\psi, w) = & -\omega^2[m(u_1, v_2) - m(u_2, v_1)] + \omega[a(u_1, v_1) + a(u_2, v_2)] + \\ & + [c(u_1, v_2) - c(u_2, v_1)] + [e(p_2, v_1) - e(p_1, v_2) + e(\xi_1, u_2) - e(\xi_2, u_1)] + \\ & + [\gamma(\theta_2, v_1) - \gamma(\theta_1, v_2) + \gamma(\eta_1, u_2) - \gamma(\eta_2, u_1)] + \\ & + [\pi(\theta_2, \xi_1) - \pi(\theta_1, \xi_2) + \pi(\eta_1, p_2) - \pi(\eta_2, p_1)] + \\ & + [\chi(p_2, \xi_1) - \chi(p_1, \xi_2)] + \omega^{-1}[z(p_1, \xi_1) + z(p_2, \xi_2)] + [s(\theta_2, \eta_1) - s(\theta_1, \eta_2)] + \\ & + \omega^{-1}[g(\zeta_1, \theta_1) + g(\zeta_2, \theta_2) - g(q_1, \eta_1) - g(q_2, \eta_2)] + \\ & + \tau[b(q_2, \zeta_1) - b(q_1, \zeta_2)] + \omega^{-1}[b(q_1, \zeta_1) + b(q_2, \zeta_2)] \\ \forall \psi = & (u_1, p_1, \theta_1, q_1, u_2, p_2, \theta_2, q_2) \in W, \\ \forall w = & (v_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, v_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2,) \in W. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \langle \chi_\omega, w \rangle = & - \langle l_2, v_1 \rangle + \omega^{-1}[\langle r_1, \xi_1 \rangle + \langle \mu_1, \eta_1 \rangle] + \\ & + \langle l_1, v_2 \rangle + \omega^{-1}[\langle r_2, \xi_2 \rangle + \langle \mu_2, \eta_2 \rangle] \\ \forall w = & (v_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, v_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2,) \in W. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тоді варіаційна задача про вимушені гармонійні коливання піроелектрика може бути записана у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \tau > 0, \omega > 0, \chi_\omega \in W' = \Phi' \times \Phi'; \\ \text{знайти } \psi = (u_1, p_1, \theta_1, q_1, u_2, p_2, \theta_2, q_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ такі, що} \\ \Pi_\omega(\psi, w) = \langle \chi_\omega, w \rangle \quad \forall w = (v_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, v_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2,) \in W. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

4.2.2 Коректність варіаційної задачі

Важливу характеристику задачі (4.7) становить наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай білінійна форма $k(\cdot, \cdot)$ визначена наступним чином:*

$$k(\theta, \eta) = \int_{\Omega} T_0^{-1} \lambda_{ij} \theta_{,i} \eta_{,j} dx \quad \forall \theta, \eta \in H^1(\Omega). \quad (4.11)$$

Тоді у випадку задачі про вимушені коливання справедлива рівність:

$$(1 + \omega^2 \tau^2)[b(q_1, q_1) + b(q_2, q_2)] = k(\theta_1, \theta_1) + k(\theta_2, \theta_2), \quad (4.12)$$

де $q_1, q_2, \theta_1, \theta_2$ — шукані в задачах (4.7) та (4.10) амплітуди теплових потоків та приростів температури відповідно.

Доведення. Запишемо модифікований закон Фур'є

$$\tau q_i' + q_i = -\lambda_{ij}\theta_{,j} \quad (4.13)$$

для випадку вимушених коливань:

$$-i\omega\tau(q_i^1 + iq_i^2)e^{-i\omega t} + (q_i^1 + iq_i^2)e^{-i\omega t} = -\lambda_{ij}\theta_{,j}. \quad (4.14)$$

Прирівняємо вирази для дійсної та уявної частин:

$$\begin{aligned} q_i^1 + \omega\tau q_i^2 &= -\lambda_{ij}\theta_{1,j} \mid \cdot T_0^{-1}\theta_{1,i}, \\ q_i^2 - \omega\tau q_i^1 &= -\lambda_{ij}\theta_{2,j} \mid \cdot T_0^{-1}\theta_{2,i}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Після домноження кожного з рівнянь системи (4.15) на $T_0^{-1}\theta_{1,i}$ та $T_0^{-1}\theta_{2,i}$ відповідно і після інтегрування по області Ω , отримуємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} g(q_1 + \omega\tau q_2, \theta_1) &= -k(\theta_1, \theta_1), \\ g(q_2 - \omega\tau q_1, \theta_2) &= -k(\theta_2, \theta_2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Розглянемо останні 2 рівняння варіаційної задачі (4.7) та підставимо у них допустимі функції $\zeta_1 = q_1 + \omega\tau q_2$ і $\zeta_2 = q_2 - \omega\tau q_1$ відповідно:

$$\begin{aligned} \omega\tau b(q_2, \zeta_1) + b(q_1, \zeta_1) + g(\zeta_1, \theta_1) &= 0, \quad \zeta_1 = q_1 + \omega\tau q_2, \\ -\omega\tau b(q_1, \zeta_2) + b(q_2, \zeta_2) + g(\zeta_2, \theta_2) &= 0, \quad \zeta_2 = q_2 - \omega\tau q_1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Після перетворень першого рівняння з (4.17) з врахуванням співвідношень (4.16), отримуємо:

$$\begin{aligned} \omega\tau b(q_2, q_1 + \omega\tau q_2) + b(q_1, q_1 + \omega\tau q_2) + g(q_1 + \omega\tau q_2, \theta_1) &= 0, \\ b(q_1 + \omega\tau q_2, q_1 + \omega\tau q_2) &= k(\theta_1, \theta_1). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Аналогічно, після перетворень другого рівняння з (4.17) з врахуванням співвідношень (4.16), отримуємо:

$$\begin{aligned} -\omega\tau b(q_1, q_2 - \omega\tau q_1) + b(q_2, q_2 - \omega\tau q_1) + g(q_2 - \omega\tau q_1, \theta_2) &= 0, \\ b(q_2 - \omega\tau q_1, q_2 - \omega\tau q_1) &= k(\theta_2, \theta_2) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Останні рівняння з співвідношень (4.18) і (4.19) можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} b(q_1, q_1) + 2\omega\tau b(q_1, q_2) + \omega^2\tau^2 b(q_2, q_2) &= k(\theta_1, \theta_1), \\ \omega^2\tau^2 b(q_1, q_1) - 2\omega\tau b(q_1, q_2) + b(q_2, q_2) &= k(\theta_2, \theta_2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Після їх підсумовування одержимо:

$$(1 + \omega^2 \tau^2)[b(q_1, q_1) + b(q_2, q_2)] = k(\theta_1, \theta_1) + k(\theta_2, \theta_2) \quad (4.21)$$

або

$$b(q_1, q_1) + b(q_2, q_2) = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} [k(\theta_1, \theta_1) + k(\theta_2, \theta_2)]. \quad (4.22)$$

□

Введемо на просторі W скалярний добуток:

$$\begin{aligned} ((y, w)) &= \sum_{i=1}^2 [a(u_i, v_i) + z(p_i, \xi_i) + b(q_i, \zeta_i)] = \\ &= \sum_{i=1}^2 [a(u_i, v_i) + z(p_i, \xi_i) + \frac{1}{2}b(q_i, \zeta_i) + \frac{1}{2(1 + \omega^2 \tau^2)}k(\theta_i, \eta_i)] \quad (4.23) \\ \forall y &= (u_1, p_1, \theta_1, q_1, u_2, p_2, \theta_2, q_2) \in W, \\ \forall w &= (v_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, v_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2) \in W. \end{aligned}$$

Введемо норму, що відповідає скалярному добутку (4.23):

$$|||y|||^2 = ((y, y)) \quad \forall y \in W. \quad (4.24)$$

Тоді легко встановлюються оцінки:

$$\begin{aligned} |\Pi_\omega(y, w)| &\leq M_1(\omega) |||y||| \cdot |||w|||, \\ M_1(\omega) &= C \max\{\omega^{-1}, 1, \omega, \omega^2\}, \quad \forall y, w \in W, \end{aligned} \quad (4.25)$$

та

$$\begin{aligned} | \langle \chi_\omega, w \rangle | &\leq M_2(\omega) \|\chi_\omega\|_* \cdot |||w|||, \\ M_2(\omega) &= C \max\{\omega^{-1}, 1\}, \quad \forall w \in W. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Тут всюди символом C позначено додатні константи, значення яких не залежать від величин, що нас цікавлять.

Безпосередньою підстановкою переконаємося, що білінійна форма $\Pi_\omega(\cdot, \cdot)$ є W -еліптичною, тобто:

$$\Pi_\omega(w, w) \geq \alpha(\omega) \cdot |||w|||^2, \quad \alpha(\omega) = \min\{\omega^{-1}, \omega\} \quad \forall w \in W. \quad (4.27)$$

Оскільки виконуються умови (4.25) - (4.27), то ми перебуваємо в умовах теореми Лакса-Мільграма-Вишика, з якої випливає справедливність наступної теореми:

Теорема 4.2. Для кожних значень параметрів $w > 0$ та $\tau > 0$ варіаційна задача (4.10) має єдиний розв'язок $y \in W$, причому

$$|||y||| \leq \alpha^{-1}(\omega) M_2(\omega) \|\chi_\omega\|_*. \quad (4.28)$$

4.2.3 Дискретизація Гальоркіна. Збіжність апроксимацій МСЕ

У схемі Гальоркіна розв'язок варіаційної задачі (4.7) переноситься з простору $W := \Phi \times \Phi$ до його певного скінченновимірного підпростору $W_h := \Phi_h \times \Phi_h$, $\Phi_h \subset \Phi$, $\dim W_h = N(h) < +\infty$. Тому, дискретизована за Гальоркіним задача (4.10) матиме вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано частоту } \omega > 0, \chi_\omega \in W', \\ \text{простір апроксимацій } W_h \subset W, \dim W_h < +\infty; \\ \text{знайти вектор } \psi_h = (u_{1h}, p_{1h}, \theta_{1h}, q_{1h}, u_{2h}, p_{2h}, \theta_{2h}, q_{2h}) \in W_h \text{ такий, що} \\ \Pi_\omega(\psi_h, \varphi) = \langle \chi_\omega, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in W_h. \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Зважаючи на те, що задача (4.10) є коректно поставленою, то те саме ми можемо стверджувати і щодо дискретизованої задачі (4.29).

Виокремимо в просторі W певний базис $\{w_i\}_{i=1}^\infty$. Для кожного натурального $m \geq 1$, покладемо $h = 1/m$. Нехай W_h - послідовність просторів апроксимацій та $\text{Pr}_h : W \rightarrow W_h$ - послідовність операторів ортогонального проектування побудовані таким чином, що множина $\{w_i\}_{i=1}^m$ утворює базис W_h , а $((\psi - \text{Pr}_h \psi, w)) = 0 \quad \forall \psi \in W, \forall w_h \in W_h$.

Тепер ми можемо замінити варіаційну задачу(4.10) послідовністю наступних задач

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \omega > 0, \chi_\omega \in W' \text{ та } h > 0, W_h \subset W, \dim W_h = m < +\infty; \\ \text{знайти вектор } \psi_h \in W_h \text{ такий, що} \\ \Pi_\omega(\psi_h, w) = \langle \chi_\omega, w \rangle \quad \forall w \in W_h. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

Теорема 4.3. *Нехай $\psi \in W$ - розв'язок задачі (4.10) з параметром $\omega > 0$. Тоді розв'язки задач (4.30) однозначно визначають послідовність апроксимацій Гальоркіна $\{\psi_h\} \subset W$, для якої виконується*

$$|||\psi - \psi_h||| \leq \alpha^{-1} M_1(\omega) \inf_{w \in W_h} |||\psi - w||| \quad \forall h > 0; \quad (4.31)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |||\psi - \psi_h||| = 0. \quad (4.32)$$

Доведення. Справедливість нерівності (4.31) випливає з властивості

$$\Pi_\omega(\psi - \psi_h, w) = 0 \quad \forall w \in W_h,$$

та оцінки

$$\begin{aligned} \alpha \|\psi - \psi_h\|^2 &\leq \Pi_\omega(\psi - \psi_h, \psi - \psi_h) = \Pi_\omega(\psi - \psi_h, \psi - w) \leq \\ &\leq M_1(\omega) \|\psi - \psi_h\| \cdot \|\psi - w\| \quad \forall w \in W_h. \end{aligned}$$

З огляду на щільність послідовності просторів $\{W_h\}$ в сепарабельному просторі W

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|w - Pr_h w\| = 0 \quad \forall w \in W.$$

Тому, з рівності

$$\inf_{w \in W_h} \|\psi - w\| = \|\psi - Pr_h \psi\|$$

та (4.31) можна зробити висновок про коректність (4.32) при $\omega > 0$. □

Теорема 4.4. *про збіжність апроксимацій МСЕ.*

Нехай $\psi \in W$ - розв'язок задачі (4.10), причому існує натуральне $k \geq 1$ таке, що $\psi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(2d+2)}$, і нехай апроксимації ψ_h визначаються розв'язками задачі (4.30) в просторах $W_h \subset W$, які побудовані з допомогою кусково-поліноміальних базисів МСЕ та які володіють властивістю квазіоптимального наближення:

для кожного $\varphi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(2d+2)}$, $k \geq 1$, існують $\varphi_h \in W_h$ та $C = \text{const} > 0$ такі, що $\|\varphi - \varphi_h\|_{m,\Omega} \leq C \cdot h^{k+1-m} \|\varphi\|_{k+1,\Omega}$, $0 \leq m \leq k$, де h - діаметр сітки скінченних елементів та k - максимальний ступінь повного поліному від d змінних, який точно відтворюється базисними функціями з W_h в межах кожного скінченного елемента.

Тоді справедлива така оцінка швидкості збіжності послідовності $\psi_h \subset W$:

$$\|\psi - \psi_h\| \leq C \cdot h^k \alpha^{-1}(\omega) M_1(\omega) \|\psi\|_{k+1,\Omega}, \quad (4.33)$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять.

Доведення. Оцінка (4.33) випливає із нерівності (4.31), еквівалентності норм $\|\cdot\|_W$ та $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ на W та властивостей щільності.

$$\begin{aligned} \|\psi - \psi_h\| &\leq \alpha^{-1}(\omega) M_1(\omega) \inf_{w \in W_h} \|\psi - w\| = \alpha^{-1}(\omega) M_1(\omega) \|\psi - w\|_{1,\Omega} \\ &\leq C \cdot h^k \alpha^{-1}(\omega) M_1(\omega) \|\psi\|_{k+1,\Omega}. \end{aligned}$$

□

4.2.4 Особливості алгоритму та програмної реалізації МСЕ

Приділимо тепер більшу увагу скінченновимірному простору $W_h \subset W$. Згідно з його визначенням, $W_h = V_h \times X_h \times Y_h \times Z_h \times V_h \times X_h \times Y_h \times Z_h$, де

$$\begin{aligned} V_h &\subset V, \quad X_h \subset X, \quad Y_h \subset Y, \quad Z_h \subset Z, \\ \dim V_h &< +\infty, \quad \dim X_h < +\infty, \quad \dim Y_h < +\infty, \quad \dim Z_h < +\infty. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Тоді шукані амплітуди можна записати у вигляді розвинень:

$$\begin{aligned} u_{\alpha h}(x) &\simeq \sum_{i=0}^N U_{\alpha}^i \phi_i^V(x), \\ p_{\alpha h}(x) &\simeq \sum_{i=0}^N P_{\alpha}^i \phi_i^X(x), \\ \theta_{\alpha h}(x) &\simeq \sum_{i=0}^N \Theta_{\alpha}^i \phi_i^Y(x), \\ q_{\alpha h}(x) &\simeq \sum_{i=0}^N Q_{\alpha}^i \phi_i^Z(x), \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

де $\phi_i^V(x), \phi_i^X(x), \phi_i^Y(x), \phi_i^Z(x)$ – базиси скінченновимірних просторів V_h, X_h, Y_h, Z_h відповідно. В результаті приходимо до такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження вузлових значень невідомих амплітуд:

$$\begin{bmatrix} \omega A & -[-\omega^2 M + C] & 0 & E^T & 0 & Y^T & 0 & 0 \\ [-\omega^2 M + C] & \omega A & -E^T & 0 & -Y^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & \omega^{-1} Z & \omega X & 0 & \Pi^T & 0 & 0 \\ -E & 0 & -X & \omega^{-1} Z & -\Pi^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & \Pi & 0 & S & -\omega^{-1} G^T & 0 \\ -Y & 0 & -\Pi & 0 & -S & 0 & 0 & -\omega^{-1} G^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-1} G & 0 & \omega^{-1} B & \tau B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-1} G & -\tau B & \omega^{-1} B \end{bmatrix} \times [U_1, U_2, P_1, P_2, \Theta_1, \Theta_2, Q_1, Q_2]^T = [-L_2, L_1, \omega^{-1} R_1, \omega^{-1} R_2, \omega^{-1} F_1, \omega^{-1} F_2, 0, 0]^T. \quad (4.36)$$

Тут елементи матриць та векторів обчислюються за білінійними формами та лінійними функціоналами (4.4). Матриця одержаної СЛАР несиметрична, але її можна представити у вигляді суми симетричної та кососиметричної матриць. З W -еліптичності білінійної форми Π_{ω} випливає, що матриця одержаної СЛАР є додатньовизначеною, тому можна стверджувати, що ця система має розв'язок.

4.3 Нестационарна задача

4.3.1 Варіаційна постановка

Для нестационарної задачі введемо простори допустимих пружних зміщень, електричних потенціалів, приростів температури (відносно початкової температури T_0) та теплових потоків відповідно:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_u \right\}, \\
 P &= \left\{ r \in H^1(\Omega) : r = 0 \text{ on } \Gamma_p, r = \text{const on } \Gamma_e \right\} \\
 Z &= \left\{ \zeta \in H^1(\Omega) : \zeta = 0 \text{ on } \Gamma_\theta \right\}, \\
 \mathbf{H} &= \left\{ \mathbf{y} \in H(\text{div}; \Omega) : y_i, \text{div } \mathbf{y} \in L^2(\Omega), y_i n_i = 0 \text{ on } \Gamma_q \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Позначимо $\Phi := \mathbf{V} \times P \times Z \times \mathbf{H}$ і спряжений простір $\Phi' := \mathbf{V}' \times P' \times Z' \times \mathbf{H}'$. Тоді, з позначенням всюди параметра часу релаксації $t_0 = \tau$, початково-крайова задача термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана ТПЕ-ЛШ допускає наступне варіаційне формулювання:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{знайти } \psi = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q}) \in L^2(0, T; \Phi) \text{ такі, що} \\
 m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - e(p(t), \mathbf{v}) \\
 - \beta(\theta(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{l}_\sigma(t), \mathbf{v} \rangle, \\
 \chi(p'(t), r) + z(p(t), r) + \pi(\theta'(t), r) + e(r, \mathbf{u}'(t)) = \langle l_e(t), r \rangle, \\
 s(\theta'(t), \zeta) + T_0^{-1}(\text{div} \mathbf{q}(t), \zeta) \\
 + \pi(\zeta, p'(t)) + \beta(\zeta, \mathbf{u}'(t)) = \langle l_\theta(t), \zeta \rangle, \\
 t_0 \kappa(\mathbf{q}'(t), \mathbf{y}) - T_0^{-1}(\text{div} \mathbf{y}, \theta(t)) + \kappa(\mathbf{q}(t), \mathbf{y}) = 0 \quad \forall t \in (0, T], \\
 m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0, \\
 \chi(p(0) - p_0, r) = 0, \quad s(\theta(0) - \theta_0, \zeta) = 0, \\
 \kappa(\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_0, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \varphi = (\mathbf{v}, r, \zeta, \mathbf{y}) \in \Phi,
 \end{array} \right. \tag{4.38}$$

де білінійні та лінійні форми визначаються наступними виразами:

$$\begin{aligned}
m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) dx, \\
c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) dx, \quad e(r, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} e_{kij} E_k(r) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx, \\
z(p, r) &= \int_{\Omega} z_{km} E_k(p) E_m(r) dx, \quad \chi(p, r) = \int_{\Omega} \chi_{km} E_k(p) E_m(r) dx, \\
\beta(\zeta, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} c_{ijkl} \alpha_{kl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \zeta dx, \quad \pi(\zeta, r) = \int_{\Omega} \pi_k E_k(r) \zeta dx, \\
s(\theta, \zeta) &= \int_{\Omega} \rho c_v T_0^{-1} \theta \zeta dx, \quad \kappa(\mathbf{q}, \mathbf{y}) = \int_{\Omega} b_{lm} q_l y_m dx, \\
\langle \mathbf{l}_\sigma, \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} \rho f_i v_i dx + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i v_i d\gamma, \\
\langle l_e, r \rangle &= -I r|_{\Gamma_e}, \quad \langle l_\vartheta, \zeta \rangle = \int_{\Omega} T_0^{-1} \rho w \zeta dx \\
\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall p, r \in P, \forall \zeta \in Z, \forall \mathbf{q}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Тут ми використали символ $\operatorname{div} \mathbf{y} := y_{i,i}$ для кожної вектор-функції $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$, і позначення для скалярного добутку

$$(z, w) = \int_{\Omega} z w dx \quad \forall z, w \in L^2(\Omega).$$

Зауважимо, що білінійні форми в (4.39) мають чітку фізичну інтерпретацію [20] і властивості неперервності та еліптичності деяких з них, дозволяють ввести наступні енергетичні норми:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\|_m^2 &= m(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \|\mathbf{v}\|_c^2 = c(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \|\mathbf{v}\|_a^2 = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\
\|r\|_\chi^2 &= \chi(r, r), \quad \|r\|_z^2 = z(r, r) \quad \forall r \in P, \\
\|\zeta\|_s^2 &= s(\zeta, \zeta) \quad \forall \zeta \in Z, \quad \|\mathbf{y}\|_\kappa^2 = \kappa(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{H}.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

4.3.2 Рівняння енергетичного балансу

Припустимо, що варіаційна задача (4.38) має розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q})$. Підставимо $\varphi = (\mathbf{v}, r, \zeta, \mathbf{y}) = (\mathbf{u}', p, \theta, \mathbf{q})$ в (4.38) і після додавання рівнянь отримаємо наступну тотожність:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(t)\|_\kappa^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_c^2 + \|p(t)\|_\chi^2 + 2\pi(\theta(t), p(t)) + \|\theta(t)\|_s^2] \\
+ [\|\mathbf{u}'(t)\|_a^2 + \|p(t)\|_z^2 + \|\mathbf{q}(t)\|_\kappa^2] = \langle \mathbf{N}(t), \psi(t) \rangle \quad \forall t \in (0, T],
\end{aligned} \tag{4.41}$$

де

$$\langle \mathbf{N}, \varphi \rangle := \langle \mathbf{l}_\sigma, \mathbf{v} \rangle + \langle l_e, r \rangle + \langle l_\vartheta, \zeta \rangle \quad \forall \varphi = (\mathbf{v}, r, \zeta, \mathbf{y}) \in \Phi.$$

Після інтегрування тотожності (4.41) на будь-якому часовому інтервалі $[0, t] \subseteq [0, T]$ одержуємо так зване рівняння балансу енергії:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(t)\|_\kappa^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_c^2 + \|p(t)\|_\chi^2 + 2\pi(\theta(t), p(t)) + \|\theta(t)\|_s^2 \right] + \\ & + \int_0^t \left[\|\mathbf{u}'(s)\|_a^2 + \|p(s)\|_z^2 + \|\mathbf{q}(s)\|_\kappa^2 \right] ds = \\ & = \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}'(0)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(0)\|_\kappa^2 + \|\mathbf{u}(0)\|_c^2 + \|p(0)\|_\chi^2 + 2\pi(\theta(0), p(0)) + \|\theta(0)\|_s^2 \right] + \\ & + \int_0^t \langle \mathbf{N}(s), \psi(s) \rangle ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Варто зауважити, що

$$\mathbf{K}[\psi(t)] \equiv \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(t)\|_\kappa^2 \right] \tag{4.43}$$

визначає кінетичну енергію піроелектрика,

$$\mathbf{E}[\psi(t)] \equiv \frac{1}{2} \|\psi(t)\|_\Phi^2 := \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}(t)\|_c^2 + \|p(t)\|_\chi^2 + 2\pi(\theta(t), p(t)) + \|\theta(t)\|_s^2 \right] \tag{4.44}$$

потенціальну енергію, і

$$|\psi(t)|_\Phi^2 := \|\mathbf{u}'(t)\|_a^2 + \|p(t)\|_z^2 + \|\mathbf{q}(t)\|_\kappa^2 \tag{4.45}$$

дисипацію енергії піроелектрика. Використовуючи вищевведені позначення, тотожність (4.42) може бути записана у коротшій формі:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(t)\|_\kappa^2 + \|\psi(t)\|_\Phi^2 \right] + \int_0^t |\psi(s)|_\Phi^2 ds = \\ & = \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}'(0)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(0)\|_\kappa^2 + \|\psi(0)\|_\Phi^2 \right] + \int_0^t \langle \mathbf{N}(s), \psi(s) \rangle ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{4.46}$$

4.3.3 Априорні енергетичні оцінки

Рівняння енергетичного балансу (4.46) буде базисом для наших подальших оцінок. Тут ми будемо використовувати техніку, подібну до тієї, що описана в [84].

Враховуючи початкові умови задачі (4.38) і використовуючи нерівність Коші-Шварца, отримуємо:

$$\|\mathbf{u}'(0)\|_m \leq \|\mathbf{v}_0\|_m. \tag{4.47}$$

Аналогічно одержуємо:

$$\|\psi(0)\|_{\Phi} \leq \|\psi_0\|_{\Phi}, \quad \|\mathbf{q}(0)\|_{\kappa} \leq \|\mathbf{q}_0\|_{\kappa}, \quad (4.48)$$

де $\psi_0 := (\mathbf{u}_0, p_0, \theta_0, \mathbf{q}_0)$. Знову ж таки, використовуючи нерівність Коші-Шварца, отримуємо:

$$\int_0^t \langle \mathbf{N}(s), \psi(s) \rangle ds \leq \frac{1}{2} \int_0^t [\|\mathbf{N}(s)\|_*^2 + \|\psi(s)\|_{\Phi}^2] ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.49)$$

Підставляємо вищенаведені оцінки (4.47)-(4.49) в (4.46) і отримуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(t)\|_{\kappa}^2 + \|\psi(t)\|_{\Phi}^2] + \int_0^t |\psi(s)|_{\Phi}^2 ds \leq \\ & \leq \frac{1}{2} [\|\mathbf{v}_0\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}_0\|_{\kappa}^2 + \|\psi_0\|_{\Phi}^2] + \frac{1}{2} \int_0^t \|\mathbf{N}(s)\|_*^2 ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \|\psi(s)\|_{\Phi}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Виконавши перетворення та додавши до правої частини нерівності (4.50) невід'ємні доданки, одержуємо:

$$\begin{aligned} & [\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(t)\|_{\kappa}^2 + \|\psi(t)\|_{\Phi}^2] + 2 \int_0^t |\psi(s)|_{\Phi}^2 ds \leq \\ & \leq [\|\mathbf{v}_0\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}_0\|_{\kappa}^2 + \|\psi_0\|_{\Phi}^2] + \int_0^t \|\mathbf{N}(s)\|_*^2 ds + \\ & + \int_0^t [\|\mathbf{u}'(s)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(s)\|_{\kappa}^2 + \|\psi(s)\|_{\Phi}^2 + 2 \int_0^s |\psi(\sigma)|_{\Phi}^2 d\sigma] ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

В подальших дослідженнях використовуватимемо наступну лему [84].

Лема 4.1 (Гронуолла). *Нехай $\rho(t), h(t) \in C[0, T]$, $h(t) \geq 0$, $\rho(t) \geq 0$ і $h(t)$ — неспадна функція від t . Нехай $\rho(t)$ задовольняє нерівність:*

$$\rho(t) \leq C_0 \int_0^t \rho(s) ds + h(t), \quad 0 \leq t \leq T, C_0 = \text{const} > 0. \quad (4.52)$$

Тоді $\exists C_1 = C_1(C_0, T), C_1 = \text{const} > 0$ така, що:

$$\rho(t) \leq C_1 h(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.53)$$

Застосувавши лему Гронуолла до нерівності (4.51), отримуємо:

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(t)\|_{\kappa}^2 + \|\psi(t)\|_{\Phi}^2 + 2 \int_0^t |\psi(s)|_{\Phi}^2 ds \\ & \leq C \left[\|\mathbf{v}_0\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}_0\|_{\kappa}^2 + \|\psi_0\|_{\Phi}^2 + \int_0^t \|\mathbf{N}(s)\|_*^2 ds \right] \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.54)$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежить від шуканих величин.

Зауваження 4.1. Вираз (4.51) показує, що найбільш завершену оцінку динамічної поведінки піроелектрика можна одержати за допомогою наступної (енергетичної) норми:

$$|||\psi(t)|||_{\Phi}^2 := \|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}(t)\|_{\kappa}^2 + \|\psi(t)\|_{\Phi}^2 + 2 \int_0^t |\psi(s)|_{\Phi}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.55)$$

Пропозиція 4.1 (про регулярність вхідних даних динамічної задачі LS-термоп'єзоелектрики та її розв'язку). Оцінка (4.51) має зміст, якщо вхідні дані динамічної задачі LS-термоп'єзоелектрики (4.38) задовольняють наступні умови регулярності:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 \in [L^2(\Omega)]^d, \mathbf{N} \in L^2(0, T; \Phi'), \\ \psi_0 = (\mathbf{u}_0, p_0, \theta_0, \mathbf{q}_0) \in [H^1(\Omega)]^d \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^d. \end{cases} \quad (4.56)$$

Більше того, розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q})$ задачі (4.38), якщо існує, то задовольняє наступні вclusions:

$$\begin{cases} \mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^d) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \quad \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ p \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; P), \quad \theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; Z), \\ \mathbf{q} \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^d) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}), \end{cases} \quad (4.57)$$

та умову стійкості

$$|||\psi(t)|||_{\Phi}^2 \leq C \left[\|\mathbf{v}_0\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}_0\|_{\kappa}^2 + \|\psi_0\|_{\Phi}^2 + \int_0^t \|\mathbf{N}(s)\|_*^2 ds \right] \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.58)$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежить від шуканих величин.

Пропозиція 4.2 (про єдиність розв'язку динамічної задачі LS-термоп'єзоелектрики). Розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q})$ задачі (4.38), якщо існує, то він єдиний.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що існують два різні розв'язки $\psi_1(t)$ та $\psi_2(t)$ задачі (4.38). Тоді їхня різниця $\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t) \neq 0$ задовольняє гомогенні рівняння задачі (4.38). Отже, з Пропозиції 4.1 ми маємо:

$$|||\psi(t)|||_{\Phi}^2 \leq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

що суперечить припущенню, що $\psi(t) \neq 0$. \square

4.3.4 Напівдискретизація методом скінченних елементів

Для того, щоб довести існування розв'язку $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q})$ задачі (4.38) і отримати ефективний чисельний алгоритм його знаходження, будемо використовувати метод скінченних елементів.

Щоб розпочати дискретизацію задачі (4.38), спочатку зробимо триангуляцію області Ω . Нехай \mathfrak{S}_h – регулярна триангуляція області $\bar{\Omega}$, що складається з замкнутих елементів, $\mathfrak{S}_h = \{K\}$. Позначимо через $h_K = |K|^{1/d}$ локальний діаметр кожного елемента K , що перетинає щонайбільше одну електродну поверхню Γ_p чи Γ_e , і нехай $h = \max_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K$. Більше того, ми припускаємо, що ми можемо згенерувати послідовність вкладених сіток $\{\mathfrak{S}_h\}$ при $h \rightarrow 0$, наприклад методом бісекції.

На триангуляції \mathfrak{S}_h визначимо кусково-поліноміальний скінченноелементний підпростір $\Phi_h := \mathbf{V}_h \times P_h \times Z_h \times \mathbf{H}_h \subset \Phi$ з наступними компонентами:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \cap [C(\Omega)]^d : \mathbf{v}|_K \in [P_m(K)]^d \quad \forall K \in \mathfrak{S}_h\}, \\ P_h &= \{r \in P \cap C(\Omega) : r|_K \in P_m(K) \quad \forall K \in \mathfrak{S}_h\}, \\ Z_h &= \{\zeta \in Z \cap C(\Omega) : \zeta|_K \in P_m(K) \quad \forall K \in \mathfrak{S}_h\}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

та

$$\mathbf{H}_h = \{\mathbf{y} \in \mathbf{H} : \mathbf{y}|_K \in RT_{m-1}(K) \quad \forall K \in \mathfrak{S}_h\}, \quad (4.60)$$

де $P_m(K)$ – простір поліномів з найбільшим степенем $m \geq 1$, що визначений на елементі K , і $RT_m(K)$ – це простір поліномів Рав'яра-Тома з такими властивостями:

$$RT_m(K) := [P_m(K)]^d + \mathbf{x}P_m(K), \quad \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_d)^T, \quad (4.61)$$

див. [21] за деталями. Тут і всюди нижче ми припускаємо, що множина просторів $\{\Phi_h\}$ – щільна в сепарабельному просторі Φ та $\Phi_\Delta \subset \Phi_h$ при $\Delta \geq h$.

Тоді для будь-якого $h > 0$ ми визначаємо напівдискретну скінченноелементну апроксимацію ψ_h розв'язку варіаційної задачі (4.38) таким чи-

НОМ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{дано } h > 0, \mathbf{N} = (\mathbf{l}_\sigma, l_e, l_\vartheta) \in \mathbf{V}' \times P' \times Z', \\ (\mathbf{v}_0, \mathbf{u}_0, p_0, \theta_0, \mathbf{q}_0) \in [L^2(\Omega)]^d \times \mathbf{V} \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^d; \\ \text{знайти } \psi_h = (\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \mathbf{q}_h) \in L^2(0, T; \Phi_h) \text{ таке що} \\ m(\mathbf{u}''_h(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'_h(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) - e(p_h(t), \mathbf{v}) \\ - \beta(\theta_h(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{l}_\sigma(t), \mathbf{v} \rangle, \\ \chi(p'_h(t), r) + z(p_h(t), r) + \pi(\theta'_h(t), r) + e(r, \mathbf{u}'_h(t)) = \langle l_e(t), r \rangle, \\ s(\theta'_h(t), \zeta) + T_0^{-1}(\text{div} \mathbf{q}_h(t), \zeta) + \pi(\zeta, p'_h(t)) \\ + \beta(\zeta, \mathbf{u}'_h(t)) = \langle l_\vartheta(t), \zeta \rangle, \\ t_0 \kappa(\mathbf{q}'_h(t), \mathbf{y}) - T_0^{-1}(\text{div} \mathbf{y}, \theta_h(t)) + \kappa(\mathbf{q}_h(t), \mathbf{y}) = 0 \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}'_h(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}_h(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0, \\ \chi(p_h(0) - p_0, r) = 0, \quad s(\theta_h(0) - \theta_0, \zeta) = 0, \\ \kappa(\mathbf{q}_h(0) - \mathbf{q}_0, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \varphi = (\mathbf{v}, r, \zeta, \mathbf{y}) \in \Phi_h. \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Оскільки $\dim \Phi_h < +\infty$, задача (4.62) є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь такого виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} MU''(t) + AU'(t) + CU(t) - E^T P(t) - B^T \theta(t) = L_\sigma(t), \\ XP'(t) + \Pi^T \theta'(t) + ZP(t) + EU'(t) = L_e(t), \\ S\theta'(t) + \Pi P'(t) + W^T F(t) + BU'(t) = L_\vartheta(t), \\ K[Q(t) + t_0 Q'(t)] - W\theta(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T], \end{array} \right. \quad (4.63)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MU'(0) = V^0, \quad CU(0) = U^0, \quad XP(0) = P^0, \\ S\theta(0) = \theta^0, \quad KF(0) = F^0. \end{array} \right. \quad (4.64)$$

Задача Коші (4.63)-(4.64) є невинродженою і завжди має розв'язок, бо матриці M, A, C, X, Z, S, K – додатньо визначені. Більше того, враховуючи Пропозицію 4.1, ми одержуємо наступний результат.

Пропозиція 4.3 (про коректність напівдискретизованої динамічної задачі LS-термоп'єзоелектрики). *Нехай вхідні дані динамічної задачі LS-термоп'єзоелектрики (4.38) задовольняють умови регулярності (4.56). Тоді для кожного $h > 0$ існує єдиний розв'язок $\psi_h = (\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h, \mathbf{q}_h)$ задачі (4.62), такий що*

$$\begin{aligned} \|\psi_h(t)\|_{\Phi}^2 &\leq C \left[\|\mathbf{v}_0\|_m^2 + t_0 \|\mathbf{q}_0\|_\kappa^2 + \|\psi_0\|_{\Phi}^2 \right. \\ &\left. + \int_0^t \|\mathbf{N}(s)\|_*^2 ds \right] \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.65)$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежить від шуканих величин.

Доведення. Існування випливає з вищенаведеної конструктивної процедури. Єдиність випливає з Пропозиції 4.2. \square

4.3.5 Існування розв'язку варіаційної задачі LS-термоп'єзоелектрики

Теорема 4.5 (про коректність варіаційної динамічної задачі LS-термоп'єзоелектрики). *Припустимо, що вхідні дані варіаційної динамічної задачі LS-термоп'єзоелектрики (4.38) характеризуються умовами регулярності (4.56). Тоді варіаційна задача (4.38) має єдиний і стійкий розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q})$, що характеризується умовами регулярності (4.57) і стійкості (4.58).*

Доведення. З виразу (4.65) можна зробити висновок, що при $h \rightarrow 0$, послідовність напівдискретних апроксимацій $\{\psi_h\}$ ($\{\mathbf{u}'_h\}$ відповідно) генерує обмежену множину в $L^2(0, T; \Phi)$ ($L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^d)$ відповідно). Тому, ми можемо вибрати з $\{\psi_h\}$ ($\{\mathbf{u}'_h\}$ відповідно) підпослідовність $\{\psi_\Delta\}$ ($\{\mathbf{u}'_\Delta\}$ відповідно) таку, що $\{\psi_\Delta\}$ ($\{\mathbf{u}'_\Delta\}$ відповідно) *-слабко збігається до ψ (\mathbf{u}' відповідно) в $L^2(0, T; \Phi)$ ($L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^d)$ відповідно).

Тепер покажемо, що ψ – розв'язок задачі (4.38). Введемо простір функцій вигляду:

$$\mathbf{W}_\Delta := \{\varphi = (\mathbf{v}, r, \zeta, \mathbf{y}) \in C^1(0, T; \Phi_\Delta) : \varphi|_{t=T} = 0\}. \quad (4.66)$$

Підставляючи $\varphi \in \mathbf{W}_\Delta$ в рівняння (4.62) і інтегруючи їх на $(0, T)$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T [-m(\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}') + a(\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - e(p_h, \mathbf{v}) - \beta(\theta_h, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{l}_\sigma, \mathbf{v} \rangle] dt \\
& = m(\mathbf{u}'_h(0), \mathbf{v}) = m(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}), \\
& \int_0^T [-\chi(p_h, r') + z(p_h, r) + \pi(\theta'_h, r) + e(r, \mathbf{u}'_h) - \langle l_e, r \rangle] dt \\
& = \chi(p_h(0), r) = \chi(p_0, r), \\
& \int_0^T [-s(\theta_h, \zeta') + T_0^{-1}(\operatorname{div} \mathbf{q}_h, \zeta) + \pi(\zeta, p'_h) + \beta(\zeta, \mathbf{u}'_h) - \langle l_\vartheta, \zeta \rangle] dt \\
& = s(\theta_h(0), \zeta) = s(\theta_0, \zeta), \\
& \int_0^T [-t_0 \kappa(\mathbf{q}_h, \mathbf{y}') - T_0^{-1}(\operatorname{div} \mathbf{y}, \theta_h) + \kappa(\mathbf{q}_h, \mathbf{y})] dt \\
& = t_0 \kappa(\mathbf{q}_h(0), \mathbf{y}) = t_0 \kappa(\mathbf{q}_0, \mathbf{y}) \quad \forall \varphi = (\mathbf{v}, r, \zeta, \mathbf{y}) \in \mathbf{W}_\Delta.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Взявши $h \rightarrow 0$ і знову застосувавши інтегрування частинами, ми отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T [m(\mathbf{u}'', \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - e(p, \mathbf{v}) - \beta(\theta, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{l}_\sigma, \mathbf{v} \rangle] dt \\
& = -m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}), \\
& \int_0^T [\chi(p', r) + z(p, r) + \pi(\theta', r) + e(r, \mathbf{u}') - \langle l_e, r \rangle] dt \\
& = -\chi(p(0) - p_0, r), \\
& \int_0^T [s(\theta', \zeta) + T_0^{-1}(\operatorname{div} \mathbf{q}, \zeta) + \pi(\zeta, p') + \beta(\zeta, \mathbf{u}') - \langle l_\vartheta(t), \zeta \rangle] dt \\
& = -s(\theta(0) - \theta_0, \zeta), \\
& \int_0^T [t_0 \kappa(\mathbf{q}', \mathbf{y}) - T_0^{-1}(\operatorname{div} \mathbf{y}, \theta) + \kappa(\mathbf{q}, \mathbf{y})] dt \\
& = -t_0 \kappa(\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_0, \mathbf{y}) \quad \forall \varphi = (\mathbf{v}, r, \zeta, \mathbf{y}) \in \mathbf{W}_\Delta.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Оскільки Φ_Δ – щільний в просторі Φ , рівняння (4.68) справджуються

для кожного $\varphi \in C^1([0, T]; \Phi)$. Тому, ми можемо зробити висновок, що:

$$\begin{aligned}
& m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - e(p(t), \mathbf{v}) \\
& - \beta(\theta(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{l}_\sigma(t), \mathbf{v} \rangle, \\
& \chi(p'(t), r) + z(p(t), r) + \pi(\theta'(t), r) + e(r, \mathbf{u}'(t)) = \langle l_e(t), r \rangle, \\
& s(\theta'(t), \zeta) + T_0^{-1}(\operatorname{div} \mathbf{q}(t), \zeta) \\
& + \pi(\zeta, p'(t)) + \beta(\zeta, \mathbf{u}'(t)) = \langle l_\vartheta(t), \zeta \rangle, \\
& t_0 \kappa(\mathbf{q}'(t), \mathbf{y}) - T_0^{-1}(\operatorname{div} \mathbf{y}, \theta(t)) + \kappa(\mathbf{q}(t), \mathbf{y}) = 0 \quad \forall t \in (0, T], \\
& m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad \chi(p(0) - p_0, r) = 0, \\
& s(\theta(0) - \theta_0, \zeta) = 0, \quad \kappa(\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_0, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \varphi = (\mathbf{v}, r, \zeta, \mathbf{y}) \in \Phi.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Зрештою, з невикористаної початкової умови з (4.62) отримуємо:

$$c(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}_\Delta(0), \mathbf{v}) \rightarrow c(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

□

4.3.6 Дискретизація в часі. Однокрокова рекурентна схема

Для дискретизації в часі ми будемо використовувати таку саму техніку, як ми застосовували у випадку динамічної задачі класичної термом'єзоелектрики. Розглянемо рівномірний поділ часового інтервалу $[0, T]$ вузлами $t_j = j\Delta t, j = 0, 1, \dots, N_T + 1$, де N_T — деяке фіксоване натуральне число і $T = N_T \Delta t$. Для наближення розв'язку напівдискретизованої задачі (4.63)-(4.64) на кожному часовому інтервалі $[t_j, t_{j+1}]$ ми використовуємо наступні поліноми:

$$\begin{aligned}
U(t) & \simeq [1 - \omega^2(t)]U^j + \Delta t \omega(t)[1 - \omega(t)]\dot{U}^j + \omega^2(t)U^{j+1} = \\
& = U^j + \Delta t \omega(t)\dot{U}^j + \frac{1}{2}[\Delta t \omega(t)]^2 \ddot{U}^{j+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$P(t) \simeq [1 - \omega(t)]P^j + \omega(t)P^{j+1} = P^j + \Delta t \omega(t)\dot{P}^{j+\frac{1}{2}} \tag{4.71}$$

$$\Theta(t) \simeq [1 - \omega(t)]\Theta^j + \omega(t)\Theta^{j+1} = \Theta^j + \Delta t \omega(t)\dot{\Theta}^{j+\frac{1}{2}} \tag{4.72}$$

$$Q(t) \simeq [1 - \omega(t)]Q^j + \omega(t)Q^{j+1} = Q^j + \Delta t \omega(t)\dot{Q}^{j+\frac{1}{2}} \tag{4.73}$$

де $\omega(t) = (t - t_j)/\Delta t$. Тут $U^j, \dot{U}^j, P^j, \Theta^j, Q^j$ — вузлові значення пружного зміщення, його швидкості, електричного потенціалу, приросту температури і теплового потоку відповідно в момент часу $t_j = j\Delta t$. Змінні

$\ddot{U}^{j+1/2}, \dot{P}^{j+1/2}, \dot{\Theta}^{j+1/2}, \dot{Q}^{j+1/2}$ визначають пружне прискорення, швидкість електричного потенціалу, швидкість приросту температури та швидкість теплового потоку відповідно, які за припущенням є сталими величинами на часовому інтервалі $[t_j, t_{j+1}]$.

Підставляючи $t = t_j$ в рівняння (4.70) - (4.73) отримуємо:

$$\begin{aligned} U^{j+1} &= U^j + \Delta t \dot{U}^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{U}^{j+1/2}, \\ P^{j+1} &= P^j + \Delta t \dot{P}^{j+1/2}, \\ \Theta^{j+1} &= \Theta^j + \Delta t \dot{\Theta}^{j+1/2}, \\ Q^{j+1} &= Q^j + \Delta t \dot{Q}^{j+1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, N_T - 1 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Після підстановки виразів (4.70) - (4.73) в задачу Коші (4.63)-(4.64) і виконання деяких спрощень, ми отримуємо наступну СЛАР:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \Delta t > 0, t_0 > 0, 1 \geq \beta \geq \gamma \geq 0, (\dot{U}^j, U^j, P^j, \Theta^j, Q^j); \\ \text{знайти вектор } (\ddot{U}^{j+1/2}, \dot{P}^{j+1/2}, \dot{\Theta}^{j+1/2}, \dot{Q}^{j+1/2}) \text{ такий, що} \\ \left(\begin{array}{cccc} M + \Delta t \gamma A + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta C & -\Delta t \gamma E^T & -\Delta t \gamma B^T & 0 \\ \Delta t \gamma E & X + \Delta t \gamma Z & \Pi^T & 0 \\ \Delta t \gamma B & \Pi & S & \Delta t \gamma W^T \\ 0 & 0 & \Delta t \gamma W & t_0 K + \Delta t \gamma K \end{array} \right) \times \\ \times \left(\begin{array}{c} \ddot{U}^{j+1/2} \\ \dot{P}^{j+1/2} \\ \dot{\Theta}^{j+1/2} \\ \dot{Q}^{j+1/2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} L_{j+1/2} - A \dot{U}^j - C U^j - \Delta t \gamma C \dot{U}^j + E^T P^j + B^T \Theta^j \\ R_{j+1/2} - E \dot{U}^j - Z P^j \\ F_{j+1/2} - B \dot{U}^j - W^T Q^j \\ W \Theta^j - K Q^j \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (4.75)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.75) разом з виразами (4.74) утворюють однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі. Величини $\dot{U}^0, U^0, P^0, \Theta^0$, які необхідні для початку обчислень за схемою (4.74)-(4.75), легко отримуються з початкових умов задачі Коші (4.63)-(4.64).

4.4 Результати числових експериментів

4.4.1 Вимушені гармонійні коливання

Розглянемо п'єзоелектричний стрижень довжиною $L = 10^{-8}$ м з кераміки PZT-4. До правого кінця стрижня прикладається гармонійне теплове на-

вантаження з круговою частотою $\omega = 3 \cdot 10^6$ рад/с, тобто крайові умови для теплового поля мають вигляд:

$$\theta_1(0) = 0K, \theta_1(L) = 273K, \theta_2(0) = 0K, \theta_2(L) = 0K. \quad (4.76)$$

На лівому кінці стрижня крайові умови для механічного та електричного полів є гомогенними умовами типу Діріхле:

$$u_1(0) = 0\text{м}, u_2(0) = 0\text{м}, p_1(0) = 0\text{В}, p_2(0) = 0\text{В}. \quad (4.77)$$

На правому кінці стрижня крайові умови для механічного та електричного полів є гомогенними умовами типу Неймана:

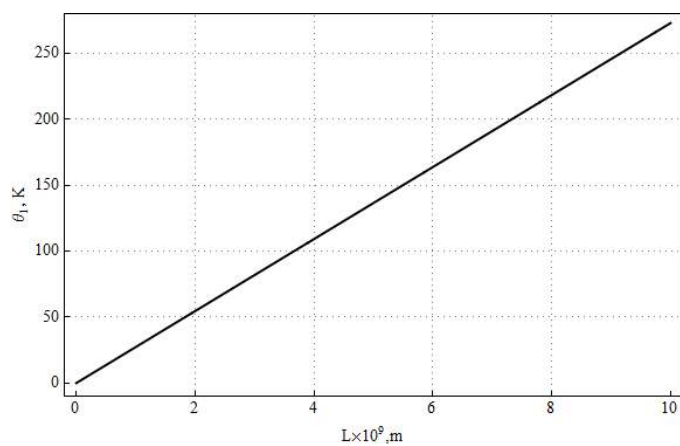
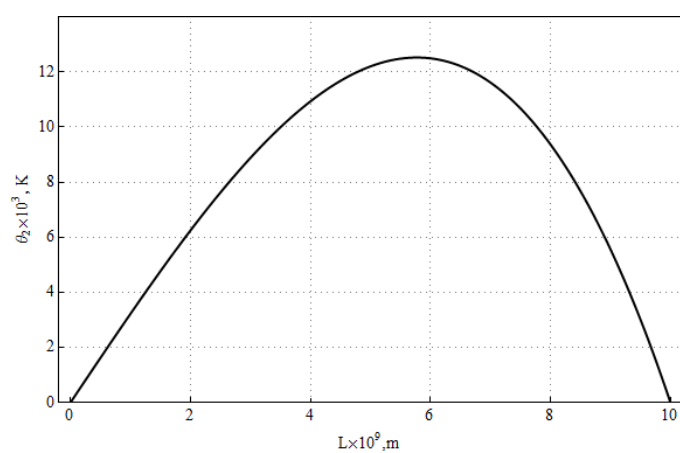
$$\bar{\sigma}_1(L) = 0\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}, \bar{\sigma}_2(L) = 0\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}, \bar{J}_1(L) = 0\text{А}, \bar{J}_2(L) = 0\text{А}. \quad (4.78)$$

Візьмемо такі коефіцієнти п'єзокераміки:

$$\begin{aligned} \rho &= 7500\text{кг/м}^3, & e &= 15.1\text{Кл/м}^2, \\ c_v &= 350\text{Дж/кг} \cdot \text{К}, & \pi &= 2.7 \times 10^{-4}\text{Кл/К} \cdot \text{м}^2, \\ \lambda &= 1.1\text{Вт/м} \cdot \text{К}, & \chi &= 6.46 \times 10^{-9}\text{Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2, \\ c &= 115 \times 10^9\text{Н/м}^2, & \alpha &= 3.13 \times 10^{-5}\text{К}^{-1}. \end{aligned}$$

Також візьмемо $z = 5 \cdot 10^{-12}\text{Ом} \cdot \text{м}^{-1}$, $a = 40\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ і $T_0 = 298\text{К}$. Як вказано в праці [127], точні значення параметру часу релаксації τ є невідомими для більшості матеріалів, включаючи кераміку PZT-4. Однак, експериментально знайдено, що ці значення можуть змінюватися між 10^{-10}с для газів та 10^{-14}с для металів. Тому, в наших чисельних експериментах ми будемо брати послідовно значення $\tau = 10^{-10}, 8 \cdot 10^{-11}, 5 \cdot 10^{-11}, 10^{-11}, 10^{-12}\text{с}$. Для дискретизації за просторовою змінною поділимо інтервал $[0, L]$ на $N = 256$ скінченних елементів з кусково-лінійними апроксимаціями розв'язків на них.

На рис. 4.1 видно, що у випадку таких крайових умов і кругової частоти $\omega = 3 \cdot 10^6$ рад \cdot с $^{-1}$ амплітуда приросту температури θ_1 змінюється лінійно вздовж стрижня, незалежно від значень параметру часу релаксації τ . Рис. 4.2 описує амплітуду приросту температури θ_2 . Вона також не залежить від значень параметру часу релаксації τ .

Рис. 4.1. Амплітуда приросту температури θ_1 Рис. 4.2. Амплітуда приросту температури θ_2

З іншого боку, як видно з рис.4.3, амплітуда теплового потоку q_2 залежна від параметра часу релаксації τ . Варто зазначити, що амплітуда теплового потоку q_2 обчислена при $\tau = 10^{-12} \text{с}$ є фактично ідентичною з амплітудою, обчисленою як розв'язок задачі про вимушені гармонійні коливання у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики.

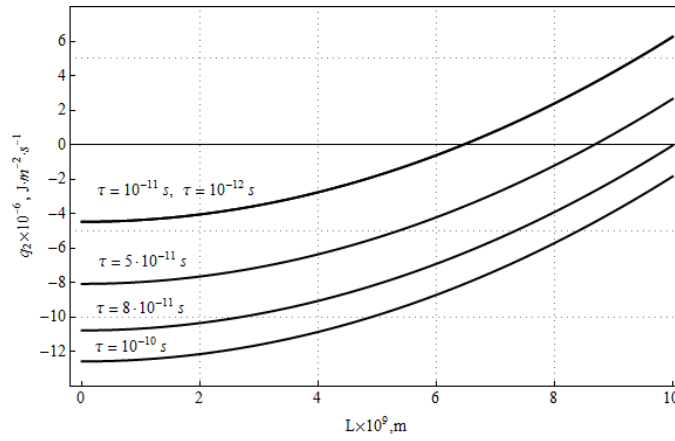


Рис. 4.3. Амплітуда теплового потоку q_2 для значень параметра часу релаксації $\tau = 10^{-10}, 8 \cdot 10^{-11}, 5 \cdot 10^{-11}, 10^{-11}, 10^{-12}$ с.

4.4.2 Нестационарна задача. Порівняння з результатами відомими з літератури

Розглянемо п'єзоелектричний стрижень довжиною L з кераміки PZT-4. Будемо моделювати поведінку п'єзоелектрика протягом часового інтервалу $[0, T]$. Крайові умови для приросту температури θ є наступними:

$$\theta(0, t) = \theta_c \begin{cases} \frac{t}{t_p}, & 0 \leq t \leq t_p \\ 1, & t_p \leq t \leq T \end{cases}, \quad \theta_c = 293K, \quad \theta(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.79)$$

Крайові умови на механічне та електричне поля:

$$\begin{aligned} \sigma = \hat{\sigma} = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma = \{x = 0\} \cup \{x = L\}, \\ (D' + J) = 0 \text{ на } \Gamma_d \times [0, T], \Gamma_d = \{x = 0\} \cup \{x = L\}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Початкові збурення пружного зміщення u , його швидкості u' , електричного потенціалу p та теплового потоку q — нульові. Таким чином, наш експеримент відтворює експеримент Sumi&Ashida, описаний в [127] (спочатку вони розглядають 2D-задачу для циліндра, але потім в результаті спрощень вона зводиться до одновимірної). Sumi&Ashida використовують метод характеристик для розв'язування цієї задачі, ми будемо використовувати однокрокову рекурентну схему і порівнювати отримані результати з їхніми. Отже, візьмемо коефіцієнти PZT-4 як в [127]:

$$\begin{aligned} \rho &= 7500 \text{ кг/м}^3 \\ c_v &= 420 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К} \\ \lambda &= 2.1 \text{ Вт/м} \cdot \text{К} \\ c &= 115 \times 10^9 \text{ Н/м}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= 15.1 \text{ Кл/м}^2 \\ \pi &= -2.12 \times 10^{-4} \text{ Кл/К} \cdot \text{м}^2 \\ \chi &= 5.62 \times 10^{-9} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2 \end{aligned}$$

В [127] в виразі для механічного напруження присутній доданок $\beta\theta$, що відповідає нашому доданку $c\alpha\theta$, і в [127] вони дають значення коефіцієнта $\beta = 3.6 \times 10^6 \text{Н/К} \cdot \text{м}^2$. Щоб мати можливість досягнути того самого кількісного результату, ми візьмемо коефіцієнт теплового розширення так, щоб він задовільняв співвідношення $c\alpha = \beta$, тобто, після обчислень $\alpha = 3.13 \times 10^{-5} \text{К}^{-1}$. Також візьмемо $z = 5 \times 10^{-12} \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $a = 0 \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ і $T_0 = 293 \text{К}$. Довжина стержня $L = 10^{-8} \text{м}$. Час спостереження — $T = 11.2 \times 10^{-12} \text{с}$ і часовий інтервал, протягом якого температура на лівому кінці зростає — $t_p = 10^{-12} \text{с}$. Як вказано в [127], значення коефіцієнта часу запізнення τ для PZT-4 — відсутнє в літературі. Однак, час запізнення τ обчислений для різних типів матеріалів і знаходиться в інтервалі від 10^{-10} для газів до 10^{-14} для металів. Тому, в нашому чисельному експерименті ми будемо брачи значення часу запізнення $\tau = 10^{-11}$, 10^{-12} і 10^{-14}с (так само як в [127]). Для напівдискретизації за просторовою змінною поділимо інтервал $[0, L]$ на $N = 512$ скінченних елементів з кусково-квадратичними апроксимаціями розв'язку на них. Для дискретизації в часі ми рівномірно поділимо часовий інтервал $[0, T]$ на $N_T = 1200$ підінтервалів. Параметри однокрокової рекурентної схеми вибрані $\gamma = 0.5$ і $\beta = 0.6$.

Рис. 4.4 показує зміну в часі приросту температури θ в позиціях $x = 0$, $x = 0.1L$ і $x = 0.3L$ для PZT-4 стержня для значень часу запізнення $\tau = 10^{-11}$, 10^{-12} , 10^{-14}с відповідно. Графіки показують значний вплив часу запізнення τ на поведінку п'єзоелектрика. Також, отримані результати для приросту температури співпадають з результатами, описаними в [127], водночас кількісно і якісно. Однак, в наших результатах, переходи від одного значення приросту температури до іншого є більш стрімкими, ніж в [127].

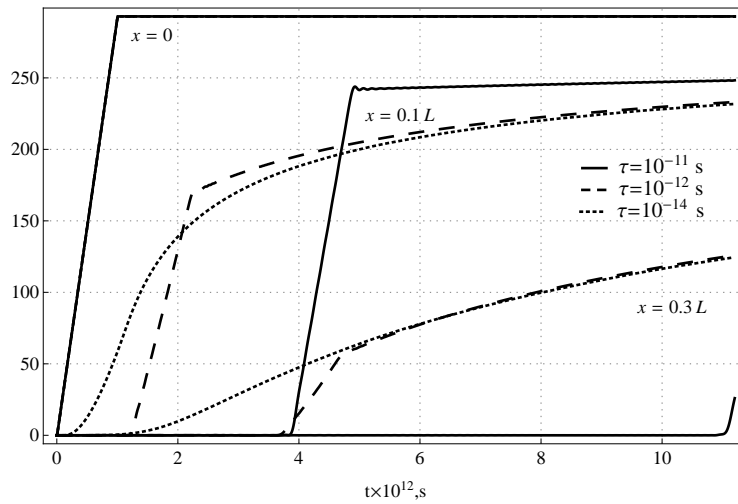


Рис. 4.4. Зміни в часі приросту температури θ в позиціях $x = 0$, $x = 0.1L$ і $x = 0.3L$ для PZT-4 стрижня для значень часу релаксації $\tau = 10^{-11}$, 10^{-12} , 10^{-14} с.

Рис. 4.5 показує зміну в часі механічного напруження σ в позиції $x = 0.3L$ для PZT-4 стрижня для значень часу релаксації $\tau = 10^{-11}$, 10^{-12} , 10^{-14} с. Тут також можемо бачити ефект часу релаксації τ .

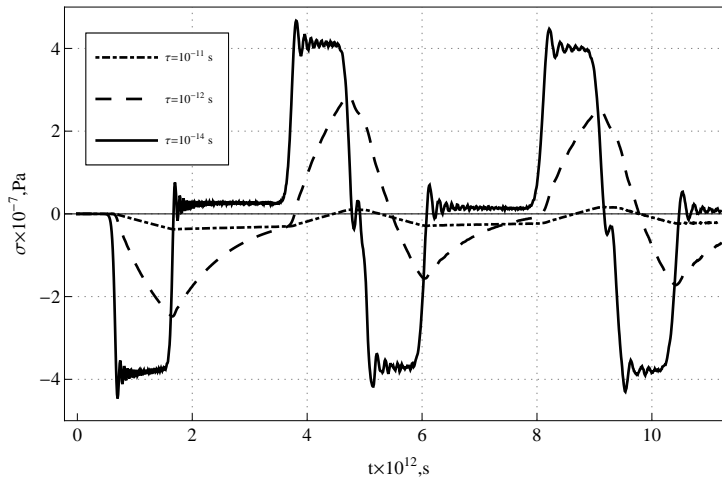


Рис. 4.5. Зміна в часі механічного напруження σ в позиції $x = 0.3L$ для PZT-4 стрижня для значень часу релаксації $\tau = 10^{-11}$, 10^{-12} , 10^{-14} с.

На рис. 4.6 і 4.7 зміни в часі приросту температури та теплового потоку показані в різноманітних позиціях для часу запізнення $\tau = 10^{-12}$ с. Вони також підтверджують результати описані в [127].

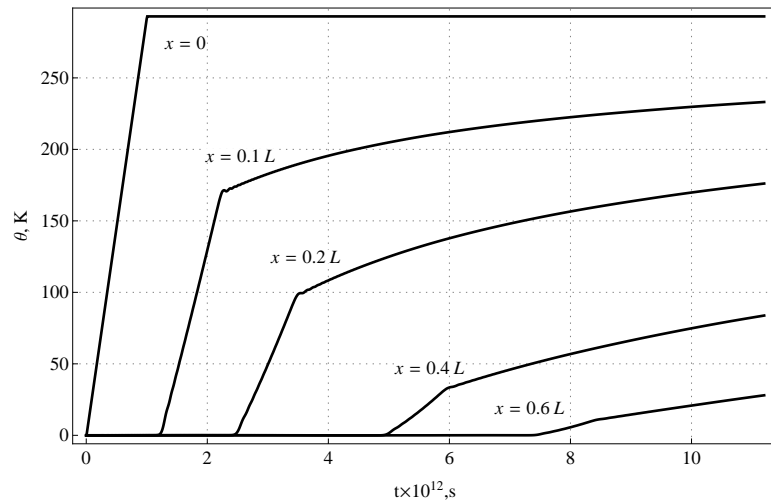


Рис. 4.6. Зміни в часі приросту температури θ в різноманітних позиціях x PZT-4 стрижня для часу релаксації $\tau = 10^{-12}$ с.

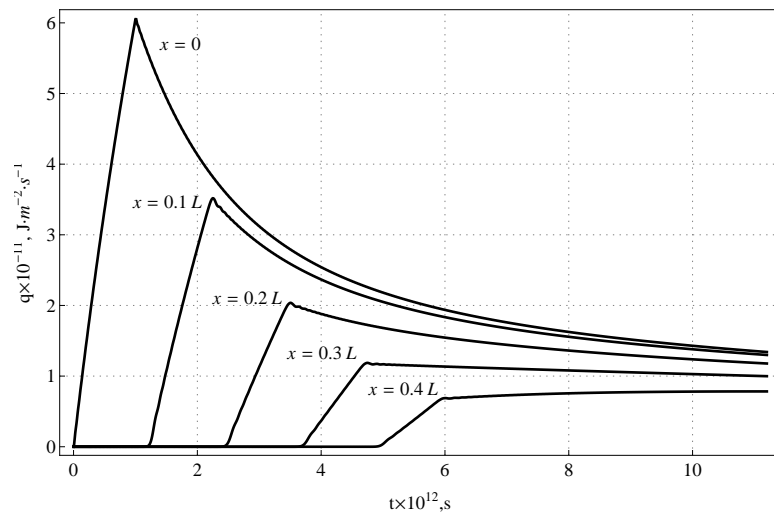


Рис. 4.7. Зміни в часі теплового потоку q в різноманітних позиціях x PZT-4 стрижня для часу релаксації $\tau = 10^{-12}$ с.

4.5 Висновки та заключні зауваження

Сформульовано варіаційні задачі для задач термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. Встановлено коректність варіаційної задачі про вимушені усталені коливання піроелектрика у випадку моделі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. Побудовано чисельну схему на основі МСЕ для розв'язування цієї задачі. Проаналізовано питання стійкості та збіжності цієї схеми. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі у випадку моделі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. Побудовано чисельну схему розв'язування цієї задачі на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми. Розроблено відповідні програмні засоби і проведено аналіз числових

результатів. Для випадку нестационарної задачі отримані числові результати добре корелюють з результатами отриманими іншими дослідниками.

РОЗДІЛ 5

АНАЛІЗ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ ГРІНА-ЛІНДСЕЯ

У цьому розділі сформульовано варіаційні задачі для нестационарної задачі та задачі про вимушені гармонійні коливання піроелектрика для випадку моделі Гріна-Ліндсея. Доведено коректність цих варіаційних задач. Для випадку вимушених коливань піроелектриків розроблено чисельну схему МСЕ розв'язування цієї задачі і проаналізовано її стійкість та збіжність. Для нестационарної задачі також побудовано чисельну схему розв'язування на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми. Розроблено відповідні програмні засоби та проведено ряд числових експериментів.

5.1 Варіаційна задача термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея

Нехай $t_1 \geq t_0 > 0$ — параметри часу запізнення. Варіаційна задача термоп'єзоелектрики за теорією Гріна-Ліндсея виглядає наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } v_0 \in H, u_0 \in V, p_0 \in Q, \theta_0, \theta_{10} \in L^2(\Omega) \text{ та } (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'); \\ \text{знайти трійку } \psi = \{u(x, t), p(x, t), \theta(x, t)\} \in L^2(0, T; \Phi) \text{ таку, що} \\ m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - e(p(t), v) - \\ - \gamma(\theta(t) + t_1 \theta'(t), v) = \langle l(t), v \rangle, \\ g(p'(t), q) + e(q, u'(t)) + z(p(t), q) + \pi(\theta'(t) + t_1 \theta''(t), q) = \langle r(t), q \rangle, \\ s(\theta'(t) + t_0 \theta''(t), \xi) + k(\theta(t), \xi) + \pi(\xi, p'(t)) + \\ + \gamma(\xi, u'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(u'(0) - v_0, v) = 0, \quad c(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V, \\ g(p(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0, \quad s(\theta'(0) - \theta_{10}, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in Z. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Тут використані білінійні форми та лінійні функціонали – ті ж самі, що у випадку варіаційної задачі класичної термоп'єзоелектрики та описані виразами (2.4).

5.2 Задача про вимушені гармонійні коливання

5.2.1 Варіаційна постановка

Якщо припустити, що навантаження на п'єзоелектрик змінюється гармонійно в часі із круговою частотою $\omega > 0$ за законом вигляду

$$\begin{aligned} l(t) &= (l_1 + il_2)e^{-i\omega t}, \\ r(t) &= (r_1 + ir_2)e^{-i\omega t}, \\ \mu(t) &= (\mu_1 + i\mu_2)e^{-i\omega t}, \quad \forall t \in (0, T], \end{aligned} \quad (5.2)$$

то у такому випадку наближені розв'язки задачі (4.3) також шукають у вигляді розвинень:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\cong (u_1 + iu_2)e^{-i\omega t}, \\ p(x, t) &\cong (p_1 + ip_2)e^{-i\omega t}, \\ \theta(x, t) &\cong (\theta_1 + i\theta_2)e^{-i\omega t}, \\ q(x, t) &\cong (q_1 + iq_2)e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

де $u_1, u_2, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2$ та q_1, q_2 — невідомі амплітуди механічних зміщень, електричного потенціалу та приросту температури відповідно.

Після підстановки припущення (5.2) та наближення (5.3) у рівняння задачі (5.1) та нехтування її початковими умовами, отримуємо варіаційну задачу про вимушені гармонійні коливання піроелектрика:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \omega > 0, t_1 \geq t_0 > 0, (l_1, r_1, \mu_1, l_2, r_2, \mu_2) \in W' = \Phi' \times \Phi'; \\ \text{знайти } \psi = (u_1, p_1, \theta_1, u_2, p_2, \theta_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ такі, що} \\ \forall w = (v_1, \xi_1, \eta_1, v_2, \xi_2, \eta_2) \in W = \Phi \times \Phi \\ -\omega^2 m(u_1, v_2) + \omega a(u_2, v_2) + c(u_1, v_2) - e(p_1, v_2) - \\ -\gamma(\theta_1, v_2) - \omega t_1 \gamma(\theta_2, v_2) = \langle l_1, v_2 \rangle, \\ -\omega^2 m(u_2, v_1) - \omega a(u_1, v_1) + c(u_2, v_1) - e(p_2, v_1) - \\ -\gamma(\theta_2, v_1) + \omega t_1 \gamma(\theta_1, v_1) = \langle l_2, v_1 \rangle, \\ \omega \chi(p_2, \xi_1) + \omega e(\xi_1, u_2) + z(p_1, \xi_1) + \omega \pi(\theta_2, \xi_1) - \omega^2 t_1 \pi(\theta_1, \xi_1) = \langle r_1, \xi_1 \rangle, \\ -\omega \chi(p_1, \xi_2) - \omega e(\xi_2, u_1) + z(p_2, \xi_2) - \omega \pi(\theta_1, \xi_2) - \omega^2 t_1 \pi(\theta_2, \xi_2) = \langle r_2, \xi_2 \rangle, \\ \omega s(\theta_2, \eta_1) - \omega^2 t_0 s(\theta_1, \eta_1) + k(\theta_1, \eta_1) + \omega \pi(\eta_1, p_2) + \omega \gamma(\eta_1, u_2) = \langle \mu_1, \eta_1 \rangle, \\ -\omega s(\theta_1, \eta_2) - \omega^2 t_0 s(\theta_2, \eta_2) + k(\theta_2, \eta_2) - \omega \pi(\eta_2, p_1) - \omega \gamma(\eta_2, u_1) = \langle \mu_2, \eta_2 \rangle. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Видозмінімо останні два рівняння задачі (5.4):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{задано } \omega > 0, \quad t_1 \geq t_0 > 0, \quad (l_1, r_1, \mu_1, l_2, r_2, \mu_2) \in W' = \Phi' \times \Phi'; \\
 \text{знайти } \psi = (u_1, p_1, \theta_1, u_2, p_2, \theta_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ такі, що} \\
 \forall w = (v_1, \xi_1, \eta_1, v_2, \xi_2, \eta_2) \in W = \Phi \times \Phi \\
 -\omega^2 m(u_1, v_2) + \omega a(u_2, v_2) + c(u_1, v_2) - e(p_1, v_2) - \\
 -\gamma(\theta_1, v_2) - \omega t_1 \gamma(\theta_2, v_2) = \langle l_1, v_2 \rangle, \\
 -\omega^2 m(u_2, v_1) - \omega a(u_1, v_1) + c(u_2, v_1) - e(p_2, v_1) - \\
 -\gamma(\theta_2, v_1) + \omega t_1 \gamma(\theta_1, v_1) = \langle l_2, v_1 \rangle, \\
 \omega \chi(p_2, \xi_1) + \omega e(\xi_1, u_2) + z(p_1, \xi_1) + \omega \pi(\theta_2, \xi_1) - \omega^2 t_1 \pi(\theta_1, \xi_1) = \langle r_1, \xi_1 \rangle, \\
 -\omega \chi(p_1, \xi_2) - \omega e(\xi_2, u_1) + z(p_2, \xi_2) - \omega \pi(\theta_1, \xi_2) - \omega^2 t_1 \pi(\theta_2, \xi_2) = \langle r_2, \xi_2 \rangle, \\
 \omega s(\theta_2, \eta_1 + \omega t_1 \eta_2) - \omega^2 t_0 s(\theta_1, \eta_1 + \omega t_1 \eta_2) + k(\theta_1, \eta_1 + \omega t_1 \eta_2) + \\
 + \omega \pi(\eta_1 + \omega t_1 \eta_2, p_2) + \omega \gamma(\eta_1 + \omega t_1 \eta_2, u_2) = \langle \mu_1, \eta_1 + \omega t_1 \eta_2 \rangle, \\
 -\omega s(\theta_1, \eta_2 - \omega t_1 \eta_1) - \omega^2 t_0 s(\theta_2, \eta_2 - \omega t_1 \eta_1) + k(\theta_2, \eta_2 - \omega t_1 \eta_1) - \\
 -\omega \pi(\eta_2 - \omega t_1 \eta_1, p_1) - \omega \gamma(\eta_2 - \omega t_1 \eta_1, u_1) = \langle \mu_2, \eta_2 - \omega t_1 \eta_1 \rangle.
 \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Після додавання всіх рівнянь задачі (5.5) введемо білінійну форму $\Pi_\omega(\cdot, \cdot) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ та лінійний функціонал $\chi_\omega : W \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином:

$$\begin{aligned}
 \Pi_\omega(\psi, w) = & -\omega^2 [m(u_1, v_2) - m(u_2, v_1)] + \omega [a(u_1, v_1) + a(u_2, v_2)] + \\
 & + [c(u_1, v_2) - c(u_2, v_1)] + [e(p_2, v_1) - e(p_1, v_2) + e(\xi_1, u_2) - e(\xi_2, u_1)] + \\
 & + [\gamma(\theta_2, v_1) - \gamma(\theta_1, v_2) - \omega t_1 \gamma(\theta_1, v_1) - \omega t_1 \gamma(\theta_2, v_2) + \\
 & + \gamma(\eta_1 + \omega t_1 \eta_2, u_2) - \gamma(\eta_2 - \omega t_1 \eta_1, u_1)] + \\
 & + [\pi(\theta_2, \xi_1) - \omega t_1 \pi(\theta_1, \xi_1) - \pi(\theta_1, \xi_2) - \omega t_1 \pi(\theta_2, \xi_2) + \\
 & + \pi(\eta_1 + \omega t_1 \eta_2, p_2) - \pi(\eta_2 - \omega t_1 \eta_1, p_1)] + \\
 & + [\chi(p_2, \xi_1) - \chi(p_1, \xi_2)] + \omega^{-1} [z(p_1, \xi_1) + z(p_2, \xi_2)] + \\
 & + \omega^{-1} [k(\theta_1, \eta_1 + \omega t_1 \eta_2) + k(\theta_2, \eta_2 - \omega t_1 \eta_1)] + \\
 & + [s(\theta_2, \eta_1 + \omega t_1 \eta_2) - \omega t_0 s(\theta_1, \eta_1 + \omega t_1 \eta_2) - s(\theta_1, \eta_2 - \omega t_1 \eta_1) - \\
 & - \omega t_0 s(\theta_2, \eta_2 - \omega t_1 \eta_1)]
 \end{aligned}$$

$$\forall \psi = (u_1, p_1, \theta_1, u_2, p_2, \theta_2) \in W, \quad \forall w = (v_1, \xi_1, \eta_1, v_2, \xi_2, \eta_2) \in W.$$

(5.6)

$$\begin{aligned}
& \langle \chi_\omega, w \rangle = - \langle l_2, v_1 \rangle + \omega^{-1} [\langle r_1, \xi_1 \rangle + \langle \mu_1, \eta_1 + \omega t_1 \eta_2 \rangle] + \\
& + \langle l_2, v_1 \rangle + \omega^{-1} [\langle r_2, \xi_2 \rangle + \langle \mu_2, \eta_2 - \omega t_1 \eta_1 \rangle] \quad (5.7) \\
& \forall w = (v_1, \xi_1, \eta_1, v_2, \xi_2, \eta_2) \in W.
\end{aligned}$$

Тоді варіаційна задача про вимушені гармонійні коливання піро-електрика може бути записана у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \omega > 0, t_1 \geq t_0 > 0, \chi_\omega \in W' = \Phi' \times \Phi'; \\ \text{знайти } \psi = (u_1, p_1, \theta_1, u_2, p_2, \theta_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ такі, що} \\ \Pi_\omega(\psi, w) = \langle \chi_\omega, w \rangle \quad \forall w = (v_1, \xi_1, \eta_1, v_2, \xi_2, \eta_2) \in W. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

5.2.2 Коректність варіаційної задачі

Введемо на просторі W скалярний добуток:

$$\begin{aligned}
((y, w)) &= \sum_{i=1}^2 [a(u_i, v_i) + z(p_i, \xi_i) + k(\theta_i, \eta_i)] \quad \forall y = (u_1, p_1, \theta_1, u_2, p_2, \theta_2) \in W, \\
&\forall w = (v_1, \xi_1, \eta_1, v_2, \xi_2, \eta_2) \in W. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Введемо норму, що відповідає скалярному добутку (5.9):

$$\|y\|^2 = ((y, y)) \quad \forall y \in W. \quad (5.10)$$

Тоді легко встановлюються оцінки:

$$\begin{aligned}
|\Pi_\omega(y, w)| &\leq M_1(\omega) \|y\| \cdot \|w\|, \\
M_1(\omega) &= C \max\{\omega^{-1}, 1, \omega, \omega^2\} \quad \forall y, w \in W, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
|\langle \chi_\omega, w \rangle| &\leq M_2(\omega) \|\chi_\omega\|_* \cdot \|w\|, \\
M_2(\omega) &= C \max\{\omega^{-1}, 1\} \quad \forall w \in W. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Тут всюди символом C позначено додатні константи, значення яких не залежать від величин, що нас цікавлять.

Безпосередньою підстановкою переконаємося, що білінійна форма $\Pi_\omega(\cdot, \cdot)$ є W -еліптичною:

$$\begin{aligned}
\Pi_\omega(w, w) &= \omega [a(u_1, u_1) + a(u_2, u_2)] + \omega^{-1} [z(p_1, p_1) + z(p_2, p_2)] + \\
&+ \omega^{-1} [k(\theta_1, \theta_1) + k(\theta_2, \theta_2)] + \omega (t_1 - t_0) [s(\theta_1, \theta_1) + s(\theta_2, \theta_2)] \geq \\
&\geq \omega [a(u_1, u_1) + a(u_2, u_2)] + \omega^{-1} [z(p_1, p_1) + z(p_2, p_2)] + \\
&+ \omega^{-1} [k(\theta_1, \theta_1) + k(\theta_2, \theta_2)] \geq \alpha(\omega) \cdot \|w\|^2, \quad (5.13) \\
\alpha(\omega) &= \min\{\omega^{-1}, \omega\} \quad \forall w \in W.
\end{aligned}$$

Оскільки виконуються умови (5.11) - (5.13), то ми перебуваємо в умовах теореми Лакса-Мільграма-Вишика, з якої випливає справедливність наступної теореми:

Теорема 5.1. *Для кожних значень параметрів $w > 0$ та $t_1 \geq t_0 > 0$ варіаційна задача (5.8) має єдиний розв'язок $y \in W$, причому*

$$|||y||| \leq \alpha^{-1}(\omega) M_2(\omega) ||\chi_\omega||_*. \quad (5.14)$$

5.2.3 Дискретизація Гальоркіна. Збіжність апроксимацій МСЕ

У схемі Гальоркіна розв'язок варіаційної задачі (5.4) переноситься з простору $W := \Phi \times \Phi$ до його певного скінченновимірного підпростору $W_h := \Phi_h \times \Phi_h$, $\Phi_h \subset \Phi$, $\dim W_h = N(h) < +\infty$. Тому, дискретизована за Гальоркіним задача (5.8) матиме вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано частоту } \omega > 0, \quad \chi_\omega \in W', \\ \text{простір апроксимацій } W_h \subset W, \quad \dim W_h < +\infty; \\ \text{знайти вектор } \psi_h = (u_{1h}, p_{1h}, \theta_{1h}, u_{2h}, p_{2h}, \theta_{2h}) \in W_h \text{ такий, що} \\ \Pi_\omega(\psi_h, \varphi) = \langle \chi_\omega, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in W_h. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Зважаючи на те, що задача (5.8) є коректно поставленою, то те саме ми можемо стверджувати і щодо дискретизованої задачі (5.15).

Виокремимо в просторі W певний базис $\{w_i\}_{i=1}^\infty$. Для кожного натурального $m \geq 1$, покладемо $h = 1/m$. Нехай W_h - послідовність просторів апроксимацій та $\text{Pr}_h : W \rightarrow W_h$ - послідовність операторів ортогонального проектування побудовані таким чином, що множина $\{w_i\}_{i=1}^m$ утворює базис W_h , а $((\psi - \text{Pr}_h \psi, w)) = 0 \quad \forall \psi \in W, \forall w_h \in W_h$.

Тепер ми можемо замінити варіаційну задачу (5.8) послідовністю наступних задач

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \omega > 0, \quad \chi_\omega \in W' \text{ та } h > 0, \quad W_h \subset W, \quad \dim W_h = m < +\infty; \\ \text{знайти вектор } \psi_h \in W_h \text{ такий, що} \\ \Pi_\omega(\psi_h, w) = \langle \chi_\omega, w \rangle \quad \forall w \in W_h. \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Теорема 5.2. *Нехай $\psi \in W$ - розв'язок задачі (5.8) з параметром $\omega > 0$. Тоді розв'язки задач (5.16) однозначно визначають послідовність апро-*

ксимацій Гальоркіна $\{\psi_h\} \subset W$, для якої виконується

$$|||\psi - \psi_h||| \leq \alpha^{-1} M_1(\omega) \inf_{w \in W_h} |||\psi - w||| \quad \forall h > 0; \quad (5.17)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |||\psi - \psi_h||| = 0. \quad (5.18)$$

Доведення. Аналогічно до випадку теорії Лорда-Шульмана. \square

Теорема 5.3. *про збіжність апроксимацій МСЕ.*

Нехай $\psi \in W$ - розв'язок задачі (5.8), причому існує натуральне $k \geq 1$ таке, що $\psi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(d+2)}$, і нехай апроксимації ψ_h визначаються розв'язками задачі (5.16) в просторах $W_h \subset W$, які побудовані з допомогою кусково-поліноміальних базисів МСЕ, та які володіють властивістю квазіоптимального наближення:

для кожного $\varphi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(d+2)}$, $k \geq 1$, існують $\varphi_h \in W_h$ та $C = \text{const} > 0$ такі, що $\|\varphi - \varphi_h\|_{m,\Omega} \leq C \cdot h^{k+1-m} \|\varphi\|_{k+1,\Omega}$, $0 \leq m \leq k$, де h - діаметр сітки скінченних елементів та k - максимальний степінь повного поліному від d змінних, який точно відтворюється базисними функціями з W_h в межах кожного скінченного елемента.

Тоді справедлива така оцінка швидкості збіжності послідовності $\psi_h \subset W$:

$$|||\psi - \psi_h||| \leq C \cdot h^k \alpha^{-1}(\omega) M_1(\omega) \|\psi\|_{k+1,\Omega}, \quad (5.19)$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять.

Доведення. Аналогічно до випадку теорії Лорда-Шульмана. \square

5.2.4 Особливості алгоритму та програмної реалізації МСЕ

В результаті підстановки розвинень (2.24) та базових функцій скінченно-вимірних підпросторів V_h , Q_h та Z_h у варіаційну задачу (5.5) отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів амплітуд $(U_1, P_1, \Theta_1, U_2, P_2, \Theta_2)$:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \omega A & -[-\omega^2 M + C] & 0 & E^T & -\omega t_1 Y^T & Y^T \\ [-\omega^2 M + C] & \omega A & -E^T & 0 & -Y^T & -\omega t_1 Y^T \\ 0 & E & \omega^{-1} Z & G & -\omega t_1 \Pi^T & \Pi^T \\ -E & 0 & -G & \omega^{-1} Z & -\Pi^T & -\omega t_1 \Pi^T \\ \omega t_1 Y & Y & \omega t_1 \Pi & \Pi & D & -H \\ -Y & \omega t_1 Y & -\Pi & \omega t_1 \Pi & H & D \end{bmatrix} \times \\
& \times [U_1, U_2, P_1, P_2, \Theta_1, \Theta_2]^T = \\
& = [-L_2, L_1, \omega^{-1} R_1, \omega^{-1} R_2, \omega^{-1} F_1 + t_1 F_2, \omega^{-1} F_2 - t_1 F_1]^T, \\
& \text{де } D = \omega^{-1} K + \omega(t_1 - t_0)S, \quad H = -(1 + \omega^2 t_0 t_1)S + t_1 K.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Тут елементи матриць та векторів обчислюються за білінійними формами та лінійними функціоналами (2.4). З W -еліптичності білінійної форми Π_ω випливає, що матриця одержаної СЛАР є додатньовизначеною, тому ця система має розв'язок.

5.3 Нестационарна задача

Для випадку нестационарної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея замість крайових умов (1.19) розглядатимемо наступні крайові умови для теплового поля:

$$\begin{cases} \theta = 0 & \text{на } \Gamma_\theta \times [0, T], \Gamma_\theta \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_\theta) > 0, \\ q_i n_i = 0 & \text{на } \Gamma_q \times [0, T], \Gamma_q := \Gamma \setminus \Gamma_\theta. \end{cases} \tag{5.21}$$

Тобто функціонал $\langle \mu, \xi \rangle$, що використовується у варіаційній задачі (5.1) для моделі Гріна-Ліндсея матиме вигляд:

$$\langle \mu, \xi \rangle := \int_{\Omega} T_0^{-1} w \xi dx. \tag{5.22}$$

Таке припущення дозволяє нам оцінити функціонал за допомогою нерівності Коші-Буняковського-Шварца з використанням норми в просторі $L^2(\Omega)$, тобто:

$$|\langle \mu, \xi \rangle| \leq \|\mu\|_{**} \cdot \|\xi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.23}$$

5.3.1 Рівняння енергетичного балансу

Зауважимо, що білінійні форми в (2.4) мають чітку фізичну інтерпретацію [20] і властивості неперервності та еліптичності деяких з них, дозволяють ввести наступні енергетичні норми:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_m^2 &= m(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \|\mathbf{v}\|_c^2 = c(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \|\mathbf{v}\|_a^2 = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \|q\|_g^2 &= g(q, q), \quad \|q\|_z^2 = z(q, q) \quad \forall q \in Q, \\ \|\zeta\|_k^2 &= k(\zeta, \zeta) \quad \forall \zeta \in Z, \quad \|\zeta\|_s^2 = s(\zeta, \zeta) \quad \forall \zeta \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Припустимо, що варіаційна задача (5.1) має розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta)$. Підставимо $\varphi = (\mathbf{v}, q, \xi) = (\mathbf{u}', p, \theta + t_1\theta')$ в (5.1) і після додавання рівнянь отримаємо наступну тотожність:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_c^2 + \|p(t)\|_g^2 + 2\pi(\theta(t) + t_1\theta'(t), p(t)) + t_1\|\theta(t)\|_k^2] \\ & + [\|\mathbf{u}'(t)\|_a^2 + \|p(t)\|_z^2 + \|\theta(t)\|_k^2 + s(\theta'(t) + t_0\theta''(t), \theta(t) + t_1\theta'(t))] \\ & = \langle l, \mathbf{u}'(t) \rangle + \langle r, p(t) \rangle + \langle \mu, \theta(t) + t_1\theta'(t) \rangle \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Зробимо відповідні перетворення з доданком $s(\theta'(t) + t_0\theta''(t), \theta(t) + t_1\theta'(t))$:

$$\begin{aligned} s(\theta' + t_0\theta'', \theta + t_1\theta') &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta + t_0\theta'\|_s^2 + s(\theta' + t_0\theta'', (t_1 - t_0)\theta') = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta + t_0\theta'\|_s^2 + (t_1 - t_0)\|\theta'\|_s^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (t_1 - t_0)t_0\|\theta'\|_s^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\theta + t_0\theta'\|_s^2 + (t_1 - t_0)t_0\|\theta'\|_s^2] + (t_1 - t_0)\|\theta'\|_s^2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Підставимо (5.26) у рівняння енергетичного балансу (5.25). Отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_c^2 + \|p(t)\|_g^2 + t_1\|\theta(t)\|_k^2 + \|\theta(t) + t_0\theta'(t)\|_s^2 + \\ & + (t_1 - t_0)t_0\|\theta'(t)\|_s^2 + 2\pi(\theta(t) + t_1\theta'(t), p(t))] + \\ & + [\|\mathbf{u}'(t)\|_a^2 + \|p(t)\|_z^2 + \|\theta(t)\|_k^2 + (t_1 - t_0)\|\theta'\|_s^2] = \\ & = \langle l, \mathbf{u}'(t) \rangle + \langle r, p(t) \rangle + \langle \mu, \theta(t) + t_1\theta'(t) \rangle \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Проінтегрувавши (5.27) на часовому інтервалі $[0, t]$ та використавши початкові умови задачі, в результаті отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_c^2 + \|p(t)\|_g^2 + t_1 \|\theta(t)\|_k^2 + \|\theta(t) + t_0 \theta'(t)\|_s^2 + \right. \\
& \left. + (t_1 - t_0)t_0 \|\theta'(t)\|_s^2 + 2\pi(\theta(t) + t_1 \theta'(t), p(t)) \right] + \\
& + \int_0^t \left[\|\mathbf{u}'(\tau)\|_a^2 + \|p(\tau)\|_z^2 + \|\theta(\tau)\|_k^2 + (t_1 - t_0) \|\theta'(\tau)\|_s^2 \right] d\tau = \\
& = \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{v}_0\|_m^2 + \|\mathbf{u}_0\|_c^2 + \|p_0\|_g^2 + t_1 \|\theta_0\|_k^2 + \|\theta_0 + t_0 \theta_{10}\|_s^2 + \right. \\
& \left. + (t_1 - t_0)t_0 \|\theta_{10}\|_s^2 + 2\pi(\theta_0 + t_1 \theta_{10}, p_0) \right] + \\
& + \int_0^t \left[\langle l, \mathbf{u}'(\tau) \rangle + \langle r, p(\tau) \rangle + \langle \mu, \theta(\tau) + t_1 \theta'(\tau) \rangle \right] d\tau \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\|^2 = & \|\mathbf{u}'(t)\|_m^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_c^2 + \|p(t)\|_g^2 + t_1 \|\theta(t)\|_k^2 + \|\theta(t) + t_0 \theta'(t)\|_s^2 + \\
& + (t_1 - t_0)t_0 \|\theta'(t)\|_s^2 + 2\pi(\theta(t) + t_1 \theta'(t), p(t)),
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\|\|\psi(t)\|\|^2 = \|\mathbf{u}'(t)\|_a^2 + \|p(t)\|_z^2 + \|\theta(t)\|_k^2 + (t_1 - t_0) \|\theta'(t)\|_s^2. \tag{5.30}$$

Тоді рівняння енергетичного балансу (5.28) може бути представлене у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\psi(t)\|^2 + \int_0^t \|\|\psi(\tau)\|\|^2 d\tau = \frac{1}{2} \|\psi(0)\|^2 + \\
& + \int_0^t \left[\langle l, \mathbf{u}'(\tau) \rangle + \langle r, p(\tau) \rangle + \langle \mu, \theta(\tau) + t_1 \theta'(\tau) \rangle \right] d\tau \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Доданок $\|\psi(t)\|^2$ визначає повну енергію п'єзоелектрика. Дисипація енергії визначається доданком $\int_0^t \|\|\psi(\tau)\|\|^2 d\tau$.

5.3.2 Априорні енергетичні оцінки

Використовуючи елементарну нерівність

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2 \quad \forall a, b \in R, \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{5.32}$$

та нерівність Коші-Буняковського-Шварца, оцінимо доданки правої частини рівняння енергетичного балансу (5.31). Отже,

$$\int_0^t \langle l, \mathbf{u}'(\tau) \rangle d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^t \left[\|l\|_*^2 + \|\mathbf{u}'(\tau)\|_a^2 \right] d\tau, \tag{5.33}$$

$$\int_0^t \langle r, p(\tau) \rangle d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^t [\|r\|_*^2 + \|p(\tau)\|_z^2] d\tau, \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \mu, \theta(\tau) + t_1 \theta'(\tau) \rangle d\tau &\leq \int_0^t [\|\mu\|_* \|\theta(\tau)\|_k + t_1 \|\mu\|_{**} \|\theta'(\tau)\|_s] d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t [\|\mu\|_*^2 + \|\theta(\tau)\|_k^2] d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{t_1^2}{t_1 - t_0} \|\mu\|_{**}^2 + (t_1 - t_0) \|\theta'(\tau)\|_s^2 \right] d\tau, \end{aligned} \quad (5.35)$$

Тут всюди символом $\|\cdot\|_*$ позначаємо норми в спряжених просторах V' , Q' та Z' , $\|\mu\|_{**}$ – норма функціоналу μ в просторі спряженому до $L^2(\Omega)$. Підставляючи оцінки (5.33)-(5.35) в рівняння енергетичного балансу (5.31) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\psi(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi(\tau)\|^2 d\tau &\leq \frac{1}{2} \|\psi(0)\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t [\|l\|_*^2 + \|\mathbf{u}'(\tau)\|_a^2] d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t [\|r\|_*^2 + \|p(\tau)\|_z^2] d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t [\|\mu\|_*^2 + \|\theta(\tau)\|_k^2] d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{t_1^2}{t_1 - t_0} \|\mu\|_{**}^2 + (t_1 - t_0) \|\theta'(\tau)\|_s^2 \right] d\tau \\ &\forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Враховуючи означення $\|\psi(\tau)\|^2$, після перетворень одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\psi(t)\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t [\|\mathbf{u}'(t)\|_a^2 + \|p(t)\|_z^2 + \|\theta(t)\|_k^2 + (t_1 - t_0) \|\theta'(t)\|_s^2] d\tau &\leq \\ \leq \frac{1}{2} \|\psi(0)\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \left[\|l\|_*^2 + \|r\|_*^2 + \|\mu\|_*^2 + \frac{t_1^2}{t_1 - t_0} \|\mu\|_{**}^2 \right] d\tau &\forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Поділивши на $\frac{1}{2}$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi(\tau)\|^2 d\tau &\leq \\ &\leq \|\psi(0)\|^2 + \int_0^t \left[\|l\|_*^2 + \|r\|_*^2 + \|\mu\|_*^2 + \frac{t_1^2}{t_1 - t_0} \|\mu\|_{**}^2 \right] d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Оцінка (5.38) показує неперервну залежність розв'язку від даних задачі.

Позначимо

$$\|\psi(t)\|_{\Phi}^2 = \|\psi(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi(\tau)\|^2 d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.39)$$

Вираз $|||\psi(t)|||_{\Phi}^2$ визначає так звану енергетичну норму розв'язку варіаційної задачі.

Пропозиція 5.1 (про регулярність вхідних даних динамічної задачі GL-термоп'єзоелектрики та її розв'язку). *Оцінка (5.38) має зміст, якщо вхідні дані динамічної задачі GL-термоп'єзоелектрики (5.1) задовольняють наступні умови регулярності:*

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 \in [L^2(\Omega)]^d, \mathbf{u}_0 \in [H^1(\Omega)]^d, \\ p_0 \in H^1(\Omega), \theta_0 \in L^2(\Omega), \theta_{10} \in L^2(\Omega), \\ (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'). \end{cases} \quad (5.40)$$

Більше того, розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta)$ задачі (5.1), якщо існує, то задовольняє наступні включення:

$$\begin{cases} \mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^d) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \quad \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ p \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; Q), \\ \theta' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; Z), \quad \theta \in L^\infty(0, T; Z) \cap L^2(0, T; Z) \end{cases} \quad (5.41)$$

та умову стійкості

$$|||\psi(t)|||_{\Phi}^2 \leq ||\psi(0)||^2 + \int_0^t \left[||l||_*^2 + ||r||_*^2 + ||\mu||_*^2 + \frac{t_1^2}{t_1 - t_0} ||\mu||_{**}^2 \right] d\tau \quad (5.42)$$

$$\forall t \in [0, T].$$

Пропозиція 5.2 (про єдиність розв'язку динамічної задачі GL-термоп'єзоелектрики). *Розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta)$ задачі (5.1), якщо існує, то він єдиний.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що існують два різні розв'язки $\psi_1(t)$ та $\psi_2(t)$ задачі (5.1). Тоді їхня різниця $\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t) \neq 0$ задовольняє гомогенні рівняння задачі (5.1). Отже, з Пропозиції 5.1 ми маємо:

$$|||\psi(t)|||_{\Phi}^2 \leq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

що суперечить припущенню, що $\psi(t) \neq 0$. □

5.3.3 Напівдискретизація методом скінченних елементів

Виділимо в просторі допустимих функцій $\Phi = V \times Q \times Z$ послідовність скінченновимірних підпросторів апроксимацій $\Phi_h = V_h \times Q_h \times Z_h$, $\dim \Phi_h \rightarrow$

∞ при $h \rightarrow 0$ з такими властивостями щільності

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для кожного вектора } \phi \in \Phi \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{d+2}, k \geq 1, \\ \text{знайдеться вектор } \phi_h \in \Phi_h \text{ і } C = \text{const} > 0 \text{ такі, що} \\ \|\phi - \phi_h\|_{m,\Omega} \leq Ch^{k+1-m} \|\phi\|_{k+1,\Omega}, 0 \leq m \leq k. \end{array} \right. \quad (5.43)$$

Тут і в подальшому символ C позначає різні додатні константи, значення яких не залежать від величин розв'язків нашої задачі. Для кожного фіксованого $h > 0$ розв'язок $\psi_h = (u_h, p_h, \theta_h)$ задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \psi_0 = (u_0, p_0, \theta_0) \in \Phi_h, v_0 \in V_h, \theta_{10} \in Z_h \text{ та } (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'_h); \\ \text{знайти трійку } \psi = \{u_h(x, t), p_h(x, t), \theta_h(x, t)\} \in L^2(0, T; \Phi_h) \text{ таку, що} \\ m(u_h''(t), v) + a(u_h'(t), v) + c(u_h(t), v) - e(p_h(t), v) - \\ - \gamma(\theta_h(t) + t_1 \theta_h'(t), v) = \langle l(t), v \rangle, \\ g(p_h'(t), q) + e(q, u_h'(t)) + z(p_h(t), q) + \pi(\theta_h'(t) + t_1 \theta_h''(t), q) = \langle r(t), q \rangle, \\ s(\theta_h'(t) + t_0 \theta_h''(t), \xi) + k(\theta_h(t), \xi) + \pi(\xi, p_h'(t)) + \\ + \gamma(\xi, u_h'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(u_h'(0) - v_0, v) = 0, \quad c(u_h(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V_h, \\ g(p_h(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q_h, \\ s(\theta_h(0) - \theta_0, \xi) = 0, \quad s(\theta_h'(0) - \theta_{10}, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in Z_h. \end{array} \right. \quad (5.44)$$

будемо називати напівдискретною апроксимацією Гальоркіна розв'язку $\psi = (u, p, \theta)$ задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея (5.1), а сталу h – параметром дискретизації задачі (5.1) за просторовою змінною.

Зафіксуємо деякі базиси $\{v_i\}$, $\{q_i\}$, $\{\xi_i\}$ в просторах апроксимацій V_h , Q_h та Z_h відповідно. Ці базиси будемо вибирати за допомогою методу скінченних елементів. Тоді наші шукані величини можна представити у вигляді розвинень:

$$\begin{aligned} u_h(x, t) &= \sum_{i=1}^{\dim V_h} U_i(t) v_i(x), \\ p_h(x, t) &= \sum_{i=1}^{\dim Q_h} P_i(t) q_i(x), \\ \theta_h(x, t) &= \sum_{i=1}^{\dim Z_h} \Theta_i(t) \xi_i(x). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Далі за допомогою процедури Гальоркіна отримуємо задачу Коші для визначення коефіцієнтів $U(t) = \{U_i(t)\}$, $P(t) = \{P_i(t)\}$ та $\Theta(t) = \{\Theta_i(t)\}$ розвинень компонент напівдискретної апроксимації u_h , p_h та θ_h за цими

базисами. Вищезгадана задача Коші виглядає наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} MU''(t) + AU'(t) + CU(t) - E^T P(t) - Y^T(\Theta(t) + t_1 \Theta'(t)) = L(t), \\ EU'(t) + GP'(t) + \Pi^T(\Theta'(t) + t_1 \Theta''(t)) + ZP(t) = R(t), \\ YU'(t) + \Pi P'(t) + S^T(\Theta'(t) + t_1 \Theta''(t)) + K\Theta(t) = F(t), \\ MU'(0) = V^0, \quad CU(0) = U^0, \\ GP(0) = P^0, \quad S(\Theta(0) + t_0 \Theta'(0)) = \Theta^0 + t_0 \Theta^{10}, \end{array} \right. \quad (5.46)$$

де коефіцієнти матриць, що фігурують в системі розраховуються за відповідними білінійними формами (2.4), а вектори правих частин обчислюються за відповідними лінійними функціоналами згідно виразів

$$L(t) = \{ \langle l(t), v_i \rangle \}, \quad R(t) = \{ \langle r(t), q_i \rangle \}, \quad F(t) = \{ \langle \mu(t), \xi_i \rangle \} \quad (5.47)$$

та

$$\begin{aligned} V^0 &= \{m(v_0, v_i)\}, \quad U^0 = \{c(u_0, v_i)\}, \quad P^0 = \{g(p_0, q_i)\}, \\ \Theta^0 &= \{s(\theta_0, \xi_i)\}, \quad \Theta^{10} = \{s(\theta_{10}, \xi_i)\}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Оскільки матриці M, A, C, G, Z, S, K додатньовизначені для кожного $h > 0$, то задача Коші (5.46) має єдиний розв'язок, який в свою чергу визначає напівдискретну апроксимацію Гальоркіна $\psi_h = (u_h, p_h, \theta_h)$ у вигляді (5.45). Більше того, враховуючи Пропозицію 5.1, ми одержуємо наступний результат.

Пропозиція 5.3 (про коректність напівдискретизованої динамічної задачі GL-термоп'єзоелектрики). *Нехай вхідні дані динамічної задачі GL-термоп'єзоелектрики (5.1) задовольняють умови регулярності (5.40). Тоді для кожного $h > 0$ існує єдиний розв'язок $\psi_h = (\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h)$ задачі (5.44), такий що*

$$\begin{aligned} \|\psi_h(t)\|_{\Phi}^2 &\leq \|\psi_h(0)\|^2 + \int_0^t \left[\|l\|_*^2 + \|r\|_*^2 + \|\mu\|_*^2 + \frac{t_1^2}{t_1 - t_0} \|\mu\|_{**}^2 \right] d\tau \\ \forall t &\in (0, T]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Доведення. Існування випливає з вищенаведеної конструктивної процедури. Єдиність випливає з Пропозиції 5.2. \square

5.3.4 Існування розв'язку варіаційної задачі GL-термоп'єзоелектрики

Теорема 5.4 (про коректність варіаційної динамічної задачі GL-термоп'єзоелектрики). *Припустимо, що вхідні дані варіаційної нестационарної задачі GL-термоп'єзоелектрики (5.1) характеризуються умовами регулярності (5.40). Тоді варіаційна задача (5.1) має єдиний і стійкий розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta)$, що характеризується умовами регулярності (5.41) і стійкості (5.42).*

Доведення. Аналогічно до задачі LS-термоп'єзоелектрики (4.38). \square

5.3.5 Дискретизація в часі. Однокрокова рекурентна схема

Для дискретизації в часі ми будемо використовувати таку саму техніку, як і у випадку нестационарної задачі класичної термоп'єзоелектрики та задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. Розглянемо рівномірний поділ часового інтервалу $[0, T]$ вузлами $t_j = j\Delta t, j = 0, 1, \dots, N_T + 1$, де N_T — деяке фіксоване натуральне число і $T = N_T\Delta t$. Для наближення розв'язку напівдискретизованої задачі (5.46) на кожному часовому інтервалі $[t_j, t_{j+1}]$ ми використовуємо наступні поліноми:

$$\begin{aligned} U(t) &\simeq [1 - \omega^2(t)]U^j + \Delta t\omega(t)[1 - \omega(t)]\dot{U}^j + \omega^2(t)U^{j+1} = \\ &= U^j + \Delta t\omega(t)\dot{U}^j + \frac{1}{2}[\Delta t\omega(t)]^2\ddot{U}^{j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$P(t) \simeq [1 - \omega(t)]P^j + \omega(t)P^{j+1} = P^j + \Delta t\omega(t)\dot{P}^{j+\frac{1}{2}} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \Theta(t) &\simeq [1 - \omega^2(t)]\Theta^j + \Delta t\omega(t)[1 - \omega(t)]\dot{\Theta}^j + \omega^2(t)\Theta^{j+1} = \\ &= \Theta^j + \Delta t\omega(t)\dot{\Theta}^j + \frac{1}{2}[\Delta t\omega(t)]^2\ddot{\Theta}^{j+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.52)$$

де $\omega(t) = (t - t_j)/\Delta t$. Тут $U^j, \dot{U}^j, P^j, \Theta^j, \dot{\Theta}^j$ — вузлові значення пружного зміщення, його швидкості, електричного потенціалу, приросту температури та швидкості приросту температури відповідно в момент часу $t_j = j\Delta t$. Змінні $\ddot{U}^{j+\frac{1}{2}}, \dot{P}^{j+\frac{1}{2}}, \ddot{\Theta}^{j+\frac{1}{2}}$ визначають пружне прискорення, швидкість електричного потенціалу та прискорення приросту температури відповідно, які за припущенням є сталими величинами на часовому інтервалі $[t_j, t_{j+1}]$. Підставляючи $t = t_j$ в рівняння (5.50 - 5.52) отримуємо:

$$\begin{aligned} U^{j+1} &= U^j + \Delta t\dot{U}^j + \frac{1}{2}\Delta t^2\ddot{U}^{j+1/2}, \quad P^{j+1} = P^j + \Delta t\dot{P}^{j+1/2}, \\ \Theta^{j+1} &= \Theta^j + \Delta t\dot{\Theta}^j + \frac{1}{2}\Delta t^2\ddot{\Theta}^{j+1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, N_T - 1. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Після підстановки виразів (5.50 - 5.52) в задачу Коші (5.46) і виконання деяких спрощень, ми отримуємо наступну СЛАР:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \Delta t > 0, t_1 \geq t_0 > 0, 1 \geq \beta \geq \gamma \geq 0, (\dot{U}^j, U^j, P^j, \dot{\Theta}^j, \Theta^j); \\ \text{знайти вектор } (\ddot{U}^{j+1/2}, \dot{P}^{j+1/2}, \ddot{\Theta}^{j+1/2}) \text{ такий, що} \\ \left(\begin{array}{ccc} M + \Delta t \gamma A + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta C & -\Delta t \gamma E^T & -(\Delta t \gamma t_1 + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta) Y^T \\ \Delta t \gamma E & G + \Delta t \gamma Z & (t_1 + \Delta t \gamma) \Pi^T \\ \Delta t \gamma Y & \Pi & (t_0 + \Delta t \gamma) S + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta K \end{array} \right) \times \\ \times \left(\begin{array}{c} \ddot{U}^{j+1/2} \\ \dot{P}^{j+1/2} \\ \ddot{\Theta}^{j+1/2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \tilde{L}_{j+1/2} \\ R_{j+1/2} - E \dot{U}^j - Z P^j - \Pi^T \dot{\Theta}^j \\ F_{j+1/2} - Y \dot{U}^j - S \dot{\Theta}^j - K \Theta^j - \Delta t \gamma K \dot{\Theta}^j \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (5.54)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{j+1/2} = & L_{j+1/2} - A \dot{U}^j - C U^j - \Delta t \gamma C \dot{U}^j + E^T P^j + \\ & + (t_1 + \Delta t \gamma) Y^T \dot{\Theta}^j + Y^T \Theta^j. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (5.54) разом з виразами (5.53) утворюють однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі для задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Величини $\dot{U}^0, U^0, P^0, \dot{\Theta}^0, \Theta^0$, які необхідні для початку обчислень за схемою (5.53)-(5.54), легко отримуються з початкових умов задачі Коші (5.46).

5.4 Результати числових експериментів

Вимушені гармонійні коливання

Розглянемо п'єзоелектричний стрижень довжиною $L = 10^{-8}$ м з кераміки PZT-4. До правого кінця стрижня прикладається гармонійне теплове навантаження з круговою частотою $\omega = 3 \cdot 10^6$ рад/с, тобто крайові умови для теплового поля мають вигляд:

$$\begin{aligned} \theta_1(0) = 0K, \quad \theta_2(0) = 0K, \\ \bar{h}_1(L) = 100 \text{Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}, \quad \bar{h}_2(L) = 0 \text{Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

На лівому кінці стрижня крайові умови для механічного та електричного полів є гомогенними умовами типу Діріхле:

$$u_1(0) = 0\text{м}, u_2(0) = 0\text{м}, p_1(0) = 0\text{В}, p_2(0) = 0\text{В}. \quad (5.57)$$

На правому кінці стрижня крайові умови для механічного та електричного полів є гомогенними умовами типу Неймана:

$$\bar{\sigma}_1(L) = 0\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}, \bar{\sigma}_2(L) = 0\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}, \bar{J}_1(L) = 0\text{А}, \bar{J}_2(L) = 0\text{А}. \quad (5.58)$$

Візьмемо такі коефіцієнти п'єзокераміки:

$$\begin{aligned} \rho &= 7500\text{кг/м}^3, & e &= 15.1\text{Кл/м}^2, \\ c_v &= 350\text{Дж/кг} \cdot \text{К}, & \pi &= 2.7 \times 10^{-4}\text{Кл/К} \cdot \text{м}^2, \\ \lambda &= 1.1\text{Вт/м} \cdot \text{К}, & \chi &= 6.46 \times 10^{-9}\text{Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2, \\ c &= 115 \times 10^9\text{Н/м}^2, & \alpha &= 3.13 \times 10^{-5}\text{К}^{-1}. \end{aligned}$$

Також візьмемо $z = 5 \cdot 10^{-12}\text{Ом} \cdot \text{м}^{-1}$, $a = 40\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ і $T_0 = 298\text{К}$.

На даний момент точні значення параметрів часу релаксації t_0 та t_1 є невідомими для більшості матеріалів, включаючи кераміку PZT-4. Однак, експериментально знайдено, що ці значення можуть змінюватися між 10^{-10}с для газів та 10^{-14}с для металів. Щоб продемонструвати ефект впливу параметрів t_0 та t_1 на розв'язки, виконаємо серію чисельних експериментів з такими парами значень параметрів релаксації:

$$\begin{aligned} t_1 &= 10^{-10}\text{с}, & t_0 &= 10^{-11}\text{с}, \\ t_1 &= 6 \cdot 10^{-11}\text{с}, & t_0 &= 5 \cdot 10^{-11}\text{с}, \\ t_1 &= 3 \cdot 10^{-11}\text{с}, & t_0 &= 2 \cdot 10^{-11}\text{с}, \\ t_1 &= 10^{-11}\text{с}, & t_0 &= 10^{-12}\text{с}. \end{aligned}$$

Для дискретизації за просторовою змінною поділимо інтервал $[0, L]$ на $N = 256$ скінченних елементів з кусково-лінійними апроксимаціями розв'язків на них. Чисельні експерименти показують, що майже всі амплітуди розв'язків не залежать від параметрів часу релаксації t_0 та t_1 і практично співпадають з амплітудами розв'язків задачі про вимушені коливання піроелектрика у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики. Різниця спостерігається тільки у значення амплітуди приросту температури θ_2 і показана на рис.5.1. Щодо рис.5.1, то варто відзначити, що амплітуда приросту температури θ_2 при значеннях параметрів часу релаксації

$t_1 = 10^{-11}$ с та $t_0 = 10^{-12}$ с співпадає з амплітудою розв'язку у випадку класичної задачі термоп'єзоелектрики, і подальше зменшення значень параметра t_1 не впливає на отримувані амплітуди розв'язків.

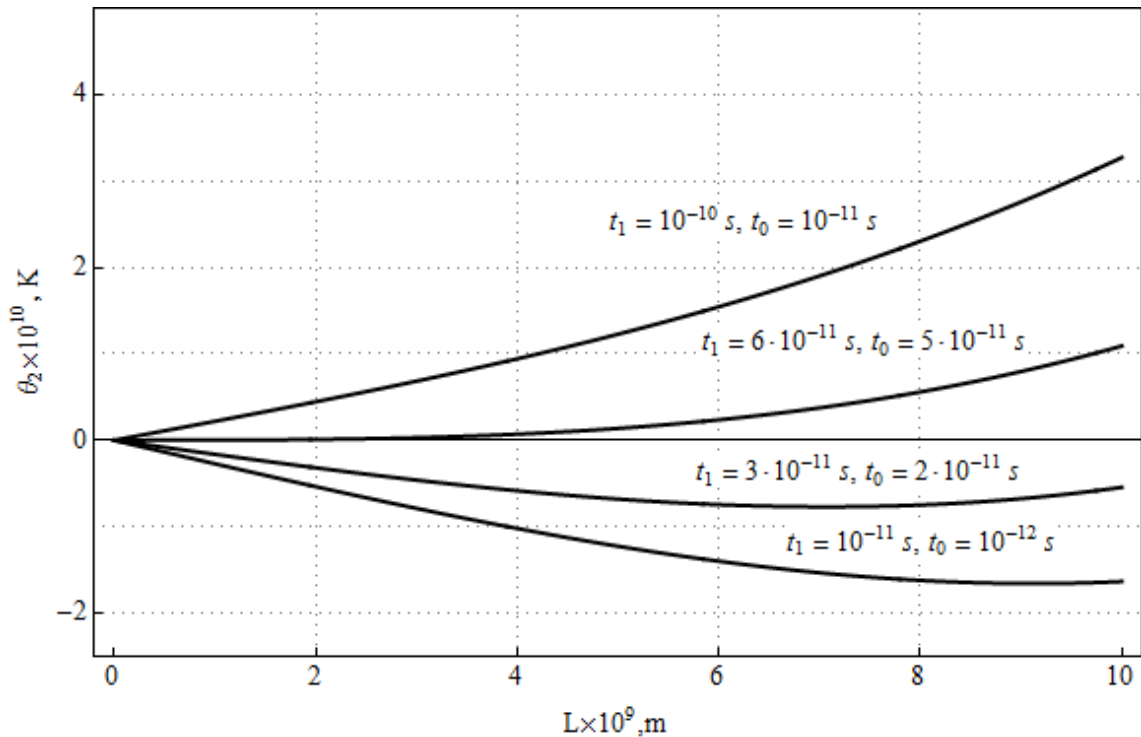


Рис. 5.1. Приріст температури θ_2 в залежності від параметрів t_0 та t_1 .

5.5 Висновки та заключні зауваження

Сформульовано варіаційні задачі для задач термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Встановлено коректність варіаційної задачі про вимушені усталені коливання піроелектрика у випадку моделі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Побудовано чисельну схему на основі МСЕ для розв'язування цієї задачі. Проаналізовано питання стійкості та збіжності цієї схеми. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі у випадку моделі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Побудовано чисельну схему розв'язування цієї задачі на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми. Розроблено відповідні програмні засоби і проведено аналіз числових результатів.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглянуто крайові, початково-крайові та відповідні їм варіаційні задачі термоп'єзоелектрики для класичної моделі, а також моделей Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея. Одержано такі основні результати:

1. Розроблено програмні засоби на основі існуючих проєкційно-сіткових схем для нестационарної задачі класичної термоп'єзоелектрики та задачі про вимушені коливання піроелектриків. Одержані результати числових експериментів добре узгоджуються з розв'язками задачі п'єзоелектрики, а також з результатами одержаними іншими дослідниками.
2. Побудовано h -адаптивну схему МСЕ для задачі про вимушені усталені коливання піроелектриків у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики, що гарантує отримання розв'язку з наперед заданою точністю.
3. Встановлено коректність варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана про вимушені усталені коливання піроелектрика. Побудовано чисельну схему МСЕ та встановлено достатні умови стійкості та збіжності цієї схеми.
4. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. Побудовано проєкційно-сіткову схему розв'язування цієї задачі на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.
5. Встановлено коректність варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея про вимушені усталені коливання піроелектрика. Побудовано чисельну схему МСЕ та встановлено достатні умови стійкості та збіжності цієї схеми.
6. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Побудовано проєкційно-сіткову схему розв'язування цієї задачі на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.
7. Для побудованих чисельних схем для розв'язування задач термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея також розроблено про-

грамні засоби, які використовувалися для проведення чисельних експериментів. В окремих випадках зроблено порівняння отриманих результатів з результатами інших дослідників.

Основні положення та результати теоретичних досліджень підтверджено результатами чисельних експериментів проведених за допомогою розроблених програмних засобів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Література

1. Абрамов Є. Кусково-лінійні апроксимації h -адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. / Є. Абрамов, О. Ліпіна, Г. Шинкаренко, А. Ямелинець. – 2006. – Вип. 11. – С.3-18.
2. Балакирев М. К. Волны в пьезокристаллах / Балакирев М.К., Гишинский И. А. // Новосибирск: Наука –1982. – С. 239.
3. Бурак Я. И. Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории / Бурак Я. И., Чекурин В. Ф. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.
4. Гринченко В. Т. Электромагнитоупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга.– Киев: Наук. думка, 1989. –228с.
5. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. –Киев: Наук. думка, 1978. –264с.
6. Гринченко В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т.3. Равновесие упругих тел канонической формы / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко.–Киев: Наук. думка, 1985. –280с.
7. Григор'єва Л.О. Чисельний аналіз осесиметричного електропружного деформування п'єзокерамічних циліндрів при динамічних збуреннях: Автореф. дис. кандидата фіз.-мат. наук / Інститут механіки ім. Тимошенка НАНУ.-К., 2005. -21 с.
8. Жарий О.Ю. Введение в механику нестационарных колебаний и волн / О.Ю. Жарий, А.Ф. Улитко. – К.:Выща шк., 1989.–184с.
9. Карнаухов В. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. / В. Карнаухов, И. Киричок.–К.:Наук. думка, 1986. –220 с.
10. Карнаухов В. Конечноэлементный метод решения задач термоэлектровязкоупругости для тел вращения при гармоническом нагруже-

- нии/В. Карнаухов, В. Козлов // Прикл.механика. –1986. –Т.22, №7. –С.9-17.
11. Ковалик Т. Числовий аналіз задач піроелектрики методом скінченних елементів / Т. Ковалик, В. Стельмашук, Ф. Чабан, Г. Шинкаренко // XVIII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (м.Львів, ЛНУ, 4-5 жовтня 2012): Матеріали конференції. – Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2012. – С. 92–93.
 12. Короткина М.Р. Электромагнитоупругость / М.Р. Короткина. – М.Изд-во МГУ, 1988. –304 с.
 13. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах/ В. Новацкий.–М.:Мир, 1986. –157с.
 14. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел/ В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. - М.: Наука, 1988. – 471 с.
 15. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно //Киев: Наукова думка, 1976. –311с.
 16. Скальський В.Р. Основи акустичних методів неруйнівного контролю/В.Р. Скальський, Г.Т. Сулим.– Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2010. - 386 с.
 17. Стельмашук В. Числове моделювання динамічних задач піроелектрики методом скінченних елементів / В. Стельмашук, Г. Шинкаренко // XIX Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (м.Львів, ЛНУ, 3-4 жовтня 2013): Матеріали конференції. – Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2013. – С. 121–122.
 18. Стельмашук В. Числове моделювання вимушених гармонійних коливань піроелектриків адаптивним методом скінченних елементів / В. Стельмашук // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання-2014», (Львів, ІП-ПММ, 28-30 травня 2014). – Львів, 2014. Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Stelmashchuk.pdf>

19. Стельмащук В. Чисельне розв'язування задачі термоп'єзоелектрики у випадку моделі Лорда-Шульмана / В. Стельмащук, Г. Шинкаренко // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми термомеханіки», (Львів, ІППММ, 22-24 вересня 2016). – Львів, 2016. – С.129-130.
20. Стельмащук В. Числове моделювання динамічних задач піроелектрики /В. Стельмащук, Г. Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. –2014.– Випуск 22. –с. 92-107.
21. Фундак О. Барицентричне подання базисних функцій просторів апроксимацій Рав'яра-Тома /О.Фундак, Г.Шинкаренко//Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – Випуск 7, 2003. –с. 102-114.
22. Чабан Ф. Апостеріорні оцінювачі похибок скінченноелементних апроксимацій для задачі про вимушені гармонічні коливання п'єзоелектриків /Ф. Чабан, Г. Шинкаренко //Мат. методи та фіз.-мех. поля. –2009.– 22, №4. –с. 88-98.
23. Чабан Ф. Чисельне моделювання взаємодії фізико-механічних полів у п'єзоелектриках: Дис... канд. фіз.-мат. наук:01.01.07 / ЛНУ ім. І.Франка. – Л., 2011. – 154с.
24. Чабан Ф. Побудова числових схем МСЕ для задач теорії піроелектриків / Ф. Чабан, В. Стельмащук // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька, (Дрогобич, ДДПІ, 19-23 вересня 2011). – Дрогобич, 2011. – С.214.
25. Шинкаренко Г. Аппроксимация вариационных задач электровязкоупругости. I. Полудискретизация Галеркина //Вестник Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. –Вып. 35, –1991, –с. 50-56.
26. Шинкаренко Г. Аппроксимация вариационных задач электровязкоупругости. II. Одношаговая схема интегрирования по времени //Вестник Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. –Вып. 35, –1991, –с. 56-62.
27. Шинкаренко Г. Постановка и разрешимость начально-краевых задач электровязкоупругости //Вестник Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. –Вып. 33, –1990, –с. 10-16.

28. Шинкаренко Г. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьезоэлектричества. 1. Постановка задачи и анализ установившихся вынужденных колебаний /Г. Шинкаренко// Дифференц. уравнения. –Т.29, №7, –1993, –с.1252-1260.
29. Шинкаренко Г. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьезоэлектричества. 2. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач /Г. Шинкаренко// Дифференц. уравнения. – Т.39, №2, –1994, –с.317-326.
30. Шульга Н. Колебания пьезоэлектрических тел. / Шульга Н., Болкисев А. // –К.: Наук. думка. –1990. – 228 с.
31. Ainsworth M. A posteriori error estimations in finite element analysis / Ainsworth M., Oden J. T. – New York: Wiley, 2000. – 240 p.
32. Allik H. Finite element method for piezoelectric vibration /Allik H., Hughes T.// Int. J. Numer. Meth. Eng. –Vol.2, №2, –1970, –pp.151-157.
33. Aouadi M. The generalized theory of thermo-magnetoelasticity / M. Aouadi //Technische mechanik. –2007.–Vol. 27, No. 2. –P. 133–146.
34. Aouadi M. Generalized thermoelastic-piezoelectric problem by hybrid Laplace transform-Finite element method / M. Aouadi //Int. J. Comput. Methods in Engng. Science and Mechanics. –2007.–Vol. 8, No. 3. –P. 137–147.
35. Altay G.A. Fundamental variational equations of discontinuous thermopiezoelectric fields /G.A. Altay, M.C. Dokmeci // Int. J. Engng. Sci. –1996. –Vol.34, No.7. –P. 769-782.
36. Ashida F. Response of a piezothermoelastic plate of crystal class 6mm subject to axisymmetric heating /F. Ashida, T.R. Tauchert, N. Noda // Int. J. Engng Sci. –1993. –Vol.31, No.3. –P. 373-384.
37. Ashida F. A finite difference scheme for inverse transient piezothermoelasticity problems /F. Ashida, T.R. Tauchert // J. Thermal Stresses. –1998. –Vol.21. –P. 271-293.

38. Ashida F. A general solution technique for piezothermoelasticity of hexagonal solid of class 6mm in cartesian coordinates /F. Ashida, T.R. Tauchert, N. Noda // Z. angew. Math. Mech. –1994. –Vol.2. –P. 87-95.
39. Ashida F. Transient response of a piezothermoelastic circular disk under axisymmetric heating /F. Ashida, T.R. Tauchert // Acta Mech. –1998. –Vol.128. –P. 1-14.
40. Ashida F. Plane stress problem of a piezothermoelastic plate /F. Ashida, T.R. Tauchert // Acta Mech. –2000. –Vol.145. –P. 127-134.
41. Ashida F. Thermally-induced wave propagation in piezoelectric plate /F. Ashida, T.R. Tauchert // Acta Mech. –2003. –Vol.161. –P. 1-16.
42. Ashida F. Piezothermoelastic response of a circular plate with thermal relaxation /F. Ashida, T.R. Tauchert // J. Thermal Stresses. –2004. –Vol.27. –P. 513-536.
43. Ashida F. Inverse problem of a piezothermoelastic cylinder subject to transient heating /F. Ashida, T.R. Tauchert, S-I. Sakata, Y. Igi // J. Thermal Stresses. –2010. –Vol.33. –P. 706-718.
44. Babuska I. The finite element method and its reliability / Babuska I., Strouboulis T. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 802 p.
45. Becker E.B Finite Elements. An Introduction. / E.B.Becker, G.F.Carey, J.T.Oden. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1981. – Vol.I. –272p.
46. Becker J. Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping / J. Becker, O. Fein, M. Maess, L. Gaul // Computers and Structures –Vol. 84, –2006, –p. 2340–2350.
47. Benjeddou A. A two-dimensional closed-form solution for the free-vibration analysis of piezoelectric sandwich plates/ A. Benjeddou, J-F. Deu//Int. J. Solids and Structures. –2002.–Vol. 39. –P. 1463–1486.
48. Benjeddou A. A thermopiezoelectric mixed variational theorem for smart multilayered composites / Benjeddou A., Andrianarison O. // Computers and Structures. –2005. –Vol. 83. –p. 1266-1276.

49. Buchanan G.R. Galerkin finite element derivation for vibration of a thermopiezoelectric structure/ G.R. Buchanan //J. Sound and Vibration. –2006.–Vol. 294. –P. 362–367.
50. Carslaw H.S. Conduction of Heat in Solids/ H.S.Carslaw , J.C.Jaeger //Clarendon, Oxford. – 1959.–510p.
51. Cattaneo C. A form of heat equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. / C.Cattaneo // Comptes Rendus. – 1950. – Vol.247. – P. 431-433.
52. Chaban F. Constructing of h-adaptive finite element method for piezoelectricity problem / F. Chaban, H. Shynkarenko. –J. Numer. Appl. Math.–2009.– Vol.97, No.1. –P. 1-9.
53. Chaban F. The construction and analysis of a posteriori error estimators for piezoelectricity stationary problems / F. Chaban, H. Shynkarenko. – Operator Theory: Advances and Application.–2009.–Vol.191.–P. 291-304.
54. Chaban F. Numeric modeling of mechanical and electric fields interaction in piezoelectric. / F.Chaban, H.Shynkarenko, V.Stelmashchuk, S.Rosinska // Manufacturing processes. Some problems. – Opole: Politechnika Opolska, 2012. – Vol.1, Ch.9. – P. 107-118.
55. Chandrasekharaiah D. S. A temperature-rate-dependent theory of thermopiezoelectricity / D.S. Chandrasekharaiah //J. Thermal Stresses. –1984.–Vol. 7. –P. 293–306.
56. Chandrasekharaiah D. S. Thermoelasticity with second sound: A review / D.S. Chandrasekharaiah //Appl. Mech. Rev. –1986.–Vol. 39, No.3. –P. 355–376.
57. Chandrasekharaiah D. S. A generalized linear thermoelasticity theory for piezoelectric media / D.J.Chandrasekharaiah //Acta Mechanica.– Springer-Verlag.–Vol. 71, No.1-4, –1988, –p. 39–49.
58. Chandrasekharaiah D. S. Thermoelastic plane waves in a transversely isotropic body / D.S.Chandrasekharaiah, H.R.Keshavan //Acta Mechanica.–Springer-Verlag.–Vol. 87, –1991, –p. 11–22.

59. Chandrasekharaiah D. S. Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature/ D.S. Chandrasekharaiah //Appl. Mech. Rev. –1998.–Vol. 51, No.12. –P. 705–729.
60. Ciarlet P. Handbook of numerical analysis. Volume IV./ P.Ciarlet, J.Lions // Elsevier Science –1996, –974 p.
61. Ciarlet P. Handbook of numerical analysis. Volume II./ P.Ciarlet, J.Lions // Elsevier Science –1991, –928 p.
62. Dokmeci M.C. Piezothermoelasticity: variational principles / M.C. Dokmeci, G. Altay // In: Encyclopedia of thermal stresses (R. Hetnarski ed.). – 2014. – P. 3903-3909.
63. El-Karamany A.S. Propagation of discontinuities in thermopiezoelectric rod / A.S. El-Karamany, M.A. Ezzat //J. Thermal Stresses. –2005.–Vol. 28. –P. 997–1030.
64. El-Karamany A.S. Constitutive laws, uniqueness theorem and Hamilton's principle in linear micropolar thermopiezoelectric/piezomagnetic continuum with relaxation time / A.S. El-Karamany //J. Thermal Stresses. –2007.–Vol. 30. –P. 59–80.
65. Fuenmayor F.J. Error estimation and h-adaptive refinement in the analysis of natural frequencies /F.J. Fuenmayor, J.L. Restrepo, J.E. Tarancon, L. Baeza // Finite Elements in Analysis and Design –Vol. 38 –2001, –p. 137-153.
66. Green A. E. Thermoelasticity / A.E. Green, K.A. Lindsay //J. Elasticity. –1972. –Vol.2, No.1. –P.1-7.
67. He T. Finite element method to a generalized electromagneto-thermoelastic problem with diffusion / T. He, Y. Li, S. Shi //Int. J. Appl. Mech. –2012. –Vol.4, No.4: 1250046.
68. Heidary F. Pyroelectric effect on dynamic response of coupled distributed composite plate / F. Heidary, M.R. Eslami // In: Encyclopedia of thermal stresses (R. Hetnarski ed.). – 2014. – P. 4077-4082.

69. Hetnarski R.B. Generalized thermoelasticity / R.B. Hetnarski, J. Ignaczak //J. Thermal Stresses. –1999. –Vol.22.–P.451-476.
70. Hetnarski R.B. Thermal Stresses – Advanced theory and applications/ R.B. Hetnarski, M.R. Eslami //Springer, 2009. –560p.
71. Ignaczak J. Linear dynamic thermoelasticity – a survey / J. Ignaczak //Shock Vib. Dig. –1980. –Vol.13, No.1. –P.3-8.
72. Ignaczak J. Thermoelasticity with finite wave speeds / J. Ignaczak, M. Ostoja-Starzewski //New York: Oxford University Press Inc., 2010. –412p.
73. Jalili N. Piezoelectric-based vibration control. From macro to micro/nano scale systems /N. Jalili. – New York:Springer, 2010. –517p.
74. Jordan P.M. Thermal stresses in spherical shell under three thermoelastic models / P.M. Jordan, P. Puri, //J. Thermal Stresses. –2001. –Vol.24.– P.47-70.
75. Kaliski S. Wave equations of thermoelectromagnetoelasticity / S. Kaliski. //Proc. Vibr. Probl. –1965. –Vol.6. –P.231-263.
76. Kapuria S. Exact 2D solution and assessment of a 1D zigzag theory for vibration of thermally stressed hybrid beams / S. Kapuria, N. Alam //J. Thermal Stresses. –2005.–Vol. 28. –P. 943–963.
77. Karnaukhov V.G. The influence of dissipative heating on active vibration damping of viscoelastic plates / V.G. Karnaukhov, I.F. Kirichok, M.V. Karnaukhov//J. Eng. Math. –2008.–Vol. 61. –P. 399–411.
78. Kuang Z-B. Variational principles for generalized dynamical theory of thermopiezoelectricity / Z-B. Kuang //Acta Mech. –2009. –Vol.203. –P.1-11.
79. Kuang Z-B. Variational principles for generalized thermodiffusion theory in pyroelectricity / Z-B. Kuang //Acta Mech. –2010. –Vol.214. –P.275-289.
80. Kuang Z-B. Theory of electroelasticity /Z-B. Kuang. – Berlin:Springer-Verlag, 2014. –431p.

81. Lam K.S. Dielectric and pyroelectric properties of lead zirconate titanate/polyurethane composites. / K.S.Lam, Y.W.Wong, L.S.Tai, Y.M.Poon, and F.G.Shin // Journal of Applied Physics. –Vol.96. – N.7. – 1 October 2004. – P.3896-3899.
82. Lang S. B. Pyroelectricity: from ancient curiosity to modern imaging tool / S.B. Lang //Phys. Today. –2005. –Vol.58. –No. 8. –P.31-36.
83. Lebon G. A generalized theory of thermoelasticity / G. Lebon //J. Tech. Phys. –1982.–Vol. 23. –P. 37–46.
84. Lions J. L. Non-homogeneous boundary value problems and applications. Volume I. /J.L. Lions, E. Magenes // Berlin: Springer-Verlag, 1972. – 360 p.
85. Liu G. R. A point interpolation mesh free method for static and frequency analysis of two-dimensional piezoelectric structures / G. R. Liu, K. Y. Dai, K. M. Lim, Y. T. Gu // Computational Mechanics –Vol. 29, –2002, –p. 510–519.
86. Lord H. A generalized dynamical theory of thermoelasticity / H. Lord, Y. Shulman. //J. Mechanics and Physics of Solids. –1967. –Vol.15. –P.299-309.
87. Mark J.E. Physical properties of polymers handbook. Second Edition /J.E. Mark. –Berlin: Springer, 2007. –1038p.
88. Melnik R. Numerical analysis of dynamic characteristics of coupled piezoelectric systems in acoustic media // Mathematics and Computers in Simulation –Vol.61 –2003, –pp. 497–507.
89. Mindlin R.D. On the equations of motion of piezoelectric crystals, problems of continuum / R.D.Mindlin // In: Problems of Continuum Mechanics 70th Birthday Volume (N.I. Muskhelishvili, ed.). – SIAM, Philadelphia, 1961. – P.282-290.
90. Nandy S. Forced thickness vibrations of a thermopiezoelectric layer of monoclinic symmetry / S. Nandy // Czech. J. Phys. B. – 1985. – Vol.35. – P. 494-501.

91. Nowacki W. Foundations of linear piezoelectricity / W. Nowacki // In: Electromagnetic interactions in elastic solids (Parkus H., ed.). – Springer-Verlag, Wien, 1979.
92. Nowacki W. Some general theorems of thermo-piezoelectricity / W. Nowacki // Journal of Thermal Stresses. – 1978. – Vol.1. – P. 171-182.
93. Ootao Y. Transient piezothermoelastic analysis of a cross-ply laminated cylindrical panel bonded to a piezoelectric actuator / Y. Ootao, Y. Tanigawa // Applied Mathematical Modeling. –2005. –Vol. 29. –P. 321-339.
94. Othman M.I.A. Propagation of plane waves in generalized piezothermoelastic medium: comparison of different theories / M.I.A. Othman, S.Y. Atwa, W.M. Hasona, E.A.A. Ahmed // IJIRSET. – 2015. – Vol.4, No.4 – P. 2292-2300.
95. Peshkov V. Second sound in helium II / V. Peshkov // Journal of Physics. – 1944. – Vol.8, No.6. – P. 381.
96. Premount A. Mechatronics. Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems. // Springer. –2006. –215 p.
97. Quin Q-H. Green's function and boundary elements of multifield materials. // Elsevier Science. –2007. –266 p.
98. Schwab C. p- and hp-Finite element methods. Theory and applications to solid and fluid mechanics // – New York: Oxford University Press, 1998. – 392 p.
99. Schwartz M. Encyclopedia of Smart Materials / M. Schwartz. –New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 1073p.
100. Sharma M.D. Propagation of inhomogeneous waves in anisotropic piezothermoelastic media / M.D. Sharma // Acta Mech. – 2010. – Vol.215. – P. 307-318.
101. Shen Y. Piezothermoelasticity with finite wave speeds / Y. Shen, X. Tian // In: Encyclopedia of thermal stresses (R. Hetnarski ed.). – 2014. – P. 3873-3883.

102. Shynkarenko H. Numerical modeling of dynamical pyroelectricity problems / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // VI міжнародна наукова конференція імені академіка І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (5-6.09.2013р.) // Матеріали конференції. – Київ: КНУ, 2013. – С.36-39.
103. Shynkarenko H. Numerical modeling of thermopiezoelectricity problems / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // Manufacturing processes. Actual Problems-2015. – Opole: Pol. Opolska. – 2015. – Vol. 1. – P. 75–87.
104. Shynkarenko H. Solvability and finite element approximation of time-harmonic Lord-Shulman thermopiezoelectricity problem / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // Manufacturing processes. Actual problems - 2016. – Opole: Pol. Opolska. – 2016. – P. 79-92.
105. Shynkarenko H. Thermopiezoelectricity forced vibrations problem solution using adaptive FEM / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // VII Int. Conf. named by I. I. Lyashko “Computational and applied mathematics” (Taras Shevchenko National University of Kyiv, October 9-10, 2014): Short papers. – Kyiv, 2014. – P.136-137.
106. Singh B. On the theory of generalized thermoelasticity for piezoelectric materials / B. Singh // Appl. Math. and Computation. – 2005. – Vol.171. – P. 398-405.
107. Smith I. Programming the Finite Element Method / Smith I., Griffiths D. // Wiley –2004, –646 p.
108. Sladek J. Application of the MLPG to thermo-piezoelectricity / J. Sladek, V. Sladek, Ch. Zhang, P. Solec // CMES. –2007. –Vol. 22, No.3. –P. 217–233.
109. Sladek J. Analysis of thermo-piezoelectricity problems by meshless method / J. Sladek, V. Sladek, P. Solec, S.N. Atluri // Computer Modeling in Engineering & Sciences. –2008. –Vol.34, No.3. –P. 273–300.
110. Sladek J. The MLPG for bending electroelastic plates / J. Sladek, V. Sladek, P. Stanak, E. Pan // CMES. –2010. –Vol. 64, No.3. –P. 267–297.

111. Sladek J. Analysis of thermo-piezoelectricity problems by meshless method/ J. Sladek, V. Sladek, P. Stanak // Acta Mechanica Slovaca. – 2010. –Vol. 14, No.4. –P. 16–27.
112. Sladek J. Analysis of the bending of circular piezoelectric plates with functionally graded material properties by a MLPG method/ J. Sladek, V. Sladek, P. Stanak, Ch. Zhang, M. Wunsche // Engineering Structures. –2013. –Vol.47. –P. 81–89.
113. Sladek J. Bending of porous piezoelectric cylinder under a thermal load/ J. Sladek, V. Sladek, P. Stanak, S. Hrcek // Engineering Analysis with Boundary Elements. –2015. –Vol. 51. –P. 136–145.
114. Stanak P. Meshless MLPG approach for the analysis of piezoelectric sensors under compressive load/ P. Stanak, A. Tadeu, J. Sladek, V. Sladek // Building Research Journal. –2012. –Vol.60, No.3-4. –P. 185–198.
115. Stelmashchuk V. Numerical approximation of pyroelectricity problems using finite element method / V.Stelmashchuk, H.Shynkarenko // International Conference on Modern Problems of Mechanics and Mathematics (Lviv, IAPMM, May 21-25, 2013): Short papers. – Lviv, 2013. – P. 75-77.
116. Stelmashchuk V. Adaptive finite element modeling of pyroelectricity forced vibrations problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // I Міжнародна XX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (ЛНУ ім.І.Франка, 7-9 квітня 2014):Матеріали конференції. – Львів, 2014. – С.31-32.
117. Stelmashchuk V. Numerical modeling of thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem using adaptive Finite Element Method / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko //3rd Polish Congress of Mechanics – 21st International Conference on Computer Methods in Mechanics, (Politechnika Gdanska, September 8-11, 2015):Short papers. – Gdansk, 2015. – P.51-52.
118. Stelmashchuk V. Numerical scheme for Lord-Shulman thermopiezoelectricity problem / V.Stelmashchuk // XXI Всеукраїнська наукова конфе-

ренція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», 24-25.09. 2015 р. – Львів, 2015. – С. 42-45.

119. Stelmashchuk V. Numerical scheme for Green-Lindsay thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem. / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // XXII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», (Львів, ЛНУ, 5-7 жовтня 2016р.). – Львів, 2016. – С.24-25.
120. Stelmashchuk. V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity dynamical problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // 22nd International conference on computer methods in mechanics CMM-2017, (September 13th -16th 2017, Lublin, Poland). – Lublin, 2017. – P.MS03-1-MS03-2.
121. Stelmashchuk V. Numerical modeling of thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem using adaptive finite element method. /V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko. //Advances in mechanics: theoretical, computational and interdisciplinary issues /M. Kleiber, T. Burczynski, K. Wilde, J. Gorski, K. Winkelmann, L. Smakosz eds.– London: CRC Press, 2016. – P. 547-550.
122. Stelmashchuk V. V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity forced vibrations problem. / V.V. Stelmashchuk, H.A. Shynkarenko. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2016. – № 2(122). – С. 106-119.
123. Stelmashchuk V. Finite-element analysis of Green-Lindsay thermopiezoelectricity time-harmonic problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2017. – Вип. 25. – С. 136-147.
124. Stelmashchuk V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity dynamical problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // AIP Conf. Proc. – 2018. – Vol. 1922. – 040006. – P. 1-10.
125. Stelmashchuk V. V. Well-posedness of Lord-Shulman thermopiezoelectricity variational problem / V. V. Stelmashchuk, H. A. Shynkarenko //

- Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – Т.59, № 4. – С. 116-127.
126. Straughan B. Heat waves / B. Straughan // Springer, 2011. –318p.
 127. Sumi N. Solution for thermal and mechanical waves in a piezoelectric plate by the method of characteristics /N. Sumi, F. Ashida // J. Thermal Stresses. –2003. –Vol.26. –P.1113-1123.
 128. Tang Y.Y. Dynamic analysis of a piezothermoelastic laminated plate /Y.Y. Tang, K. Xu // J. Thermal Stresses. –1995. –Vol.18. –P.87-104.
 129. Tauchert T.R. Piezothermoelastic behavior of a laminated plate / T.R. Tauchert // J. Thermal Stresses. –Vol.15. –1992. –P. 25–37.
 130. Tauchert T.R. Plane piezothermoelastic response of a hybrid laminate – a benchmark problem / T.R. Tauchert // Composite Structures. –Vol.39, No.3-4. –1997. –P. 329–336.
 131. Tauchert T.R. Developments in thermopiezoelectricity with relevance to smart composite structures / T.R. Tauchert, F. Ashida, N. Noda, S. Adali, V. Verijenko // Composite Structures. –Vol.48. –2000. –P. 31–38.
 132. Tauchert T.R. Control of transient response in intelligent piezothermoelastic structures / T.R. Tauchert, F. Ashida // J. Thermal Stresses. –Vol.26. –2003. –P. 559–582.
 133. Tichy J. Fundamentals of piezoelectric sensorics. Mechanical, dielectric and thermodynamical properties of piezoelectric materials / J.Tichy, J.Erhart, E.Kittinger, J.Privratska. – Berlin:Springer, 2010. –216p.
 134. Tiersten H. Linear piezoelectric plate vibration./ H. Tiersten //–New-York:Pleanum Press, –1969, –212 p.
 135. Toupin R.A. A dynamic theory of elastic dielectrics. /R.A. Toupin // Int. J. Engng. Sci. –1963. – Vol. 1. –P. 101-126.
 136. Tzou D. Y. The thermal shock phenomena under high-rate response in solids /D.Y. Tzou // Annual Review of Heat Transfer. –Washington DC: Hemi-Sphere,1992. –P. 111-185.

137. Verfurth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques // – Chichester: Wiley-Tubner, 1996. – 128 p.
138. Verfurth R. A posteriori error estimator for convection-diffusion problem / Verfurth R. // Numer. Math. –1998. –Vol. 80. –P. 641-663.
139. Vernotte P. The true heat equation / P.Vernotte // Comptes Rendus. – 1958. – Vol.247. – P. 2103.
140. Wauer J. Free and forced magneto-thermo-elastic vibrations in a conductive plate layer / J. Wauer //J. Thermal Stresses. –1996.–Vol. 19. – P. 671–691.
141. Yang J. An introduction to the theory of piezoelectricity // Springer – 2005, –309 p.
142. Yang J. The Mechanics of Piezoelectric Structures / J.Yang. –Singapore: World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 2006. – 312p.
143. Yang J.S. Free vibrations of a linear thermopiezoelectric body / J.S. Yang, R.C. Batra //J. Thermal Stresses. –1995.–Vol. 18. –P. 247–262.
144. Yang Y-J. Thermo-Piezoelectric Finite Element Modeling for Piezoelectric Transformers / Y-J. Yang, C-C. Chen, C-W. Kuo, C-W. Lee //Japanese Journal of Applied Physics. –2008.–Vol. 47, No.4. –P. 2182–2188.
145. Yuan X. Waves in pyroelectrics /X. Yuan, Z. Kuang // J. Thermal Stresses. –2008. –Vol.31. –P. 1190-1211.
146. Yuan X. The inhomogeneous waves in pyroelectrics /X. Yuan, Z. Kuang // J. Thermal Stresses. –2010. –Vol.33. –P. 172-186.
147. Yuan X. Energy transfer in pyroelectric material / X. Yuan, F. Yang // In: Heat conduction – basic research (Vikhrenko V., ed.). – Rijeka: InTech. – 2011.–P. 229-248.
148. Zhou Z-D. Plane waves in pyroelectrics with viscous effect /Z-D. Zhou, F-P. Yang // Acta Mech. –2014. –Vol.225. –P. 509-521.

149. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals / Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005. – 689 p.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові статті у вітчизняних фахових виданнях:

1. Стельмащук В. Числове моделювання динамічних задач піроелектрики / В.Стельмащук, Г.Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2014. – Вип. 22. – С. 92-107.
2. Stelmashchuk V. V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity forced vibrations problem / V. V. Stelmashchuk, H. A. Shynkarenko // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2016. – №2 (122). – С. 106-119.
3. Stelmashchuk V. V. Well-posedness of Lord-Shulman thermopiezoelectricity variational problem / V. V. Stelmashchuk, H. A. Shynkarenko // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – Т.59, № 4. – С. 116-127.
4. Stelmashchuk V. Finite-element analysis of Green-Lindsay thermopiezoelectricity time-harmonic problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2017. – Вип. 25. – С. 136-147.

Наукові статті у закордонних виданнях:

5. Chaban F. Numeric modeling of mechanical and electric fields interaction in piezoelectrics. / F.Chaban, H.Shynkarenko, V.Stelmashchuk, S.Rosinska // Manufacturing processes. Some problems. – Opole: Pol. Opolska. – 2012. – Vol.1, Ch.9. – P. 107-118.
6. Shynkarenko H. Numerical modeling of thermopiezoelectricity problems / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // Manufacturing processes. Actual Problems-2015. – Opole: Pol. Opolska. – 2015. – Vol. 1. – P. 75–87.
7. Shynkarenko H. Solvability and finite element approximation of time-harmonic Lord-Shulman thermopiezoelectricity problem / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // Manufacturing processes. Actual problems - 2016. – Opole: Pol. Opolska. – 2016. – P. 79-92.

8. Stelmashchuk V. Numerical modeling of thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem using finite element method / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // *Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues*. – Taylor & Francis Group. – 2016. – P. 547–550. DOI: 10.1201/b20057-117.

Матеріали конференцій:

9. Ковалик Т. Числовий аналіз задач піроелектрики методом скінченних елементів / Т. Ковалик, В. Стельмащук, Ф. Чабан, Г. Шинкаренко // XVIII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (м.Львів, ЛНУ, 4-5 жовтня 2012): Матеріали конференції. – Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2012. – С. 92–93.
10. Стельмащук В. Числове моделювання динамічних задач піроелектрики методом скінченних елементів / В. Стельмащук, Г. Шинкаренко // XIX Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (м.Львів, ЛНУ, 3-4 жовтня 2013): Матеріали конференції. – Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2013. – С. 121–122.
11. Стельмащук В. Числове моделювання вимушених гармонійних коливань піроелектриків адаптивним методом скінченних елементів / В. Стельмащук // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання-2014», (Львів, ІППММ, 28-30 травня 2014). – Львів, 2014. Режим доступу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Stelmashchuk.pdf>
12. Стельмащук В. Чисельне розв’язування задачі термоп’єзоелектрики у випадку моделі Лорда-Шульмана / В. Стельмащук, Г. Шинкаренко // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми термомеханіки», (Львів, ІППММ, 22-24 вересня 2016). – Львів, 2016. – С.129-130.
13. Чабан Ф. Побудова числових схем МСЕ для задач теорії піроелектриків / Ф. Чабан, В. Стельмащук // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька, (Дрогобич, ДДПІ, 19-23 вересня 2011). – Дрогобич, 2011. – С.214.
14. Shynkarenko H. Numerical modeling of dynamical pyroelectricity problems / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // VI Int. Conf. named by I. I. Lyashko

- “Computational and applied mathematics” (Taras Shevchenko National University of Kyiv, September 5-6, 2013): Short papers. – Kyiv, 2013. – P.36-39.
15. Shynkarenko H. Thermopiezoelectricity forced vibrations problem solution using adaptive FEM / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // VII Int. Conf. named by I. I. Lyashko “Computational and applied mathematics” (Taras Shevchenko National University of Kyiv, October 9-10, 2014): Short papers. – Kyiv, 2014. – P.136-137.
 16. Stelmashchuk V. Numerical approximation of pyroelectricity problems using finite element method / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // International Conference on Modern Problems of Mechanics and Mathematics (Lviv, IAPMM, May 21-25, 2013): Short papers. – Lviv, 2013. – P. 75-77.
 17. Stelmashchuk V. Adaptive finite element modeling of pyroelectricity forced vibrations problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // I Міжнародна XX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (ЛНУ ім.І.Франка, 7-9 квітня 2014): Матеріали конференції. – Львів, 2014. – С.31-32.
 18. Stelmashchuk V. Numerical modeling of thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem using adaptive Finite Element Method / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // 3rd Polish Congress of Mechanics – 21st International Conference on Computer Methods in Mechanics, (Politechnika Gdanska, September 8-11, 2015): Short papers. – Gdansk, 2015. – P.51-52.
 19. Stelmashchuk V. Numerical scheme for Lord-Shulman thermopiezoelectricity problem / V. Stelmashchuk // XXI Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», 24-25.09. 2015 р. – Львів, 2015. – С. 42-45.
 20. Stelmashchuk V. Numerical scheme for Green-Lindsay thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem. / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // XXII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», (Львів, ЛНУ, 5-7 жовтня 2016р.). – Львів, 2016. – С.24-25.

21. Stelmashchuk. V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity dynamical problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // 22nd International conference on computer methods in mechanics CMM-2017, (September 13th -16th 2017, Lublin, Poland). – Lublin, 2017. – P.MS03-1-MS03-2.
22. Stelmashchuk V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity dynamical problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // AIP Conf. Proc. – 2018. – Vol. 1922. – 040006. – P. 1-10. DOI: 10.1063/1.5019051.