Львівський національний університет імені Івана Франка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Войтович Марія Андріївна

УДК 517.55+517.57

ДИСЕРТАЦІЯ

Асимптотичні властивості субгармонійних та аналітичних функцій в одиничній кулі

01.01.01 – математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії)

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_________ М. А. Войтович

Науковий керівник Чижиков Ігор Ельбертович,
доктор фізико-математичних наук, професор

ЛЬВІВ – 2018

АНОТАЦІЯ

Войтович М. А. Асимптотичні властивості субгармонійних та аналітичних функцій в одиничній кулі. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико - математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 «Математичний аналіз». - Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

Зміст анотації. Основними напрямками досліджень в дисертаційній роботі є опис:

— асимптотичного поводження p-их середніх значень недодатних $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій в одиничній кулі в термінах властивостей міри Рісса μ та межової міри;

— зростання інтегралів Коші-Стілтьєса та Пуассона-Стілтьєса в одиничній кулі;

— зростання спіралеподібних в одиничному крузі функцій.

Напівнеперервна зверху функція $u : D \to [-\infty, +\infty)$ називається субгармонійною в області D, якщо нерівність $u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{it})dt$ виконується для всіх $z \in D$ та достатньо малих r. Одним з узагальнень класу субгармонійних функцій для n-вимірного комплексного простору $\mathbb{C}^n$ є $\mathcal{M}$-субгармонійні функції. Нехай B — одинична куля в $\mathbb{C}^n$, S — межа B. Напівнеперервна зверху функція $u : B \to [-\infty, \infty)$, яка задовольняє умову $u \not\equiv -\infty$, називається $\mathcal{M}$-субгармонійною в B, якщо

$$u(a) \leq \int_S u(\varphi_a(r\xi))d\sigma(\xi)$$

для всіх $a \in B$ та всіх r достатньо малих, де $\varphi_w(z)$ — інволютивний автоморфізм, σ — нормована міра Лебега на S така, що $\sigma(S) = 1$. Поняття та теорія $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій належить Девіду Ульріху ([44]). Зазначимо, що у випадку $n = 1$ класи $\mathcal{M}$-субгармонійних та субгармонійних функцій збігаються. Для класу субгармонійних функцій виконується аналог теореми Рісса про розклад ([42, 44]). Згідно з цією теоремою, $\mathcal{M}$-субгармонійна функція u з рівномірно обмеженою на $[0, 1)$ нормою

$\|u(r\xi)\|_{L^1(S)}$ може бути представлена як різниця $\mathcal{M}$-гармонійної функції та потенціалу Гріна

$$G_\mu(z) = \int_B G(z,w)d\mu(w)$$

невід'ємної міри μ, що задовольняє умову $\int_B (1-|w|^2)^n d\mu(w) < \infty$. Зокрема $-G_\mu$ є $\mathcal{M}$-субгармонійною функцією. Потенціали Гріна мають велике значення у вивченні всього класу $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій. Точну оцінку швидкості зростання $m_p(r, G_\mu)$ для всього класу борелевих мір, які задовольняють умову $\int_B (1-|w|^2)^n d\mu(w) < \infty$ знайшов М. Столл у [40]. У другому розділі дисертаційної роботи описано асимптотичне поводження при $r \to 1-$ середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ, що є узагальненням результату Столла. Також, на основі попередніх результатів, досліджено асимптотичну поведінку $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах властивостей міри Рісса і межової міри породженої граничними значеннями. Одновимірний аналог цього твердження був доведений раніше І. Е. Чижиковим у [6].

Вперше зв'язок між швидкістю зростання похідної аналітичної в одиничному крузі функції $f'(z)$ та її гладкістю у термінах модуля неперервності $\omega^*(t) = \sup_{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|\le t} |f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})|$ функції $f(e^{i\theta}),\ \theta \in \mathbb{R}$ був досліджений Гарді-Літтлвудом у роботі [22]. Необхідною і достатньою умовою для оцінки швидкості зростання похідної функції f стала належність $\omega^*(t)$ до класу Ліпшица порядку α ($\Lambda^*_\alpha,\ 0 < \alpha \le 1$). У випадку багатьох комплексних змінних подібні твердження для радіальної похідної голоморфної в B функції знайдені В. Рудіним у [35].

В дисертаційній роботі описано зростання аналітичних та гармонійних функцій в одиничній кулі, які можуть бути зображені у вигляді інтегралів Коші-Стілтьєса та Пуассона-Стілтьєса. Оцінки доведено в термінах гладкості міри Стілтьєса через модуль неперервності міри μ:

$$\omega(\delta,\mu) = \sup_{z_0\in S} |\mu|(\{\xi \in S : d(\xi, z_0) \le \delta\}),$$

де $|\mu|$ — повна варіація комплекснозначної борелевої міри μ на S, $d(\xi, z) =$

$|1 - \langle \xi, z\rangle|^{1/2}$ — неізотропна метрика на S, де $z, \xi \in \bar{B}$. Деякі результати в цьому напрямку, що стосуються одиничного полікруга, можна знайти в роботах [19], [13], [14]. Зокрема, необхідні та достатні умови зростання інтегралу Пуассона-Стілтьєса

$$\mathcal{P}[\nu](z) = \int_S \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z, \xi\rangle|^{2n}} d\nu(\xi)$$

в термінах міри Стілтьєса в рівномірній метриці в термінах гладкості міри Стілтьєса ν описані в [4] для $n = 1$, та в [9] для довільного $n \in \mathbb{N}$. Зростання $m_p(r, \mathcal{P}[\nu])$ при $n = 1$ та $p \geq 1$ описане в [51].

У вивченні функцій вигляду $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, які є аналітичними і однолистими в одиничному крузі $\mathbb{D}$ природно постає питання вивчення підкласу в якому $f(\mathbb{D})$ має прості геометричні властивості. Для прикладу, якщо f — аналітична в $\mathbb{D}$, $f'(0) \neq 0$ і виконується умова $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$, то f — однолиста в $\mathbb{D}$ та область $f(\mathbb{D})$ — зіркова відносно початку координат. Функції, для яких виконуються такі умови, називають зірковими в $\mathbb{D}$ ([16]). Зіркові області та зіркові функції можуть бути узагальнені, використовуючи логарифмічні спіралі $\gamma_\lambda : t \mapsto \exp(te^{i\lambda})$, $t \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$ замість відрізків. Таким чином виникає поняття λ-спіралеподібної функції. Дюрен у [16] показав, що для того, щоб аналітична функція f була λ-спіралеподібною в $\mathbb{D}$ необхідно і досить, щоб $\operatorname{Re}(e^{-i\lambda} zf'(z)/f(z)) > 0$ для $z \in \mathbb{D}, \quad \lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$.

У роботі [26] Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава довели, що кожна λ-спіралеподібна функція у $\mathbb{D}$ може бути представлена у вигляді

$$f(z) = z \exp\left(-\frac{e^{i\lambda}\cos\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it}z) d\beta(t)\right),$$

де $\beta(t)$ — неспадна дійснозначна функція на $\mathbb{R}$ для якої виконується $\beta(t + 2\pi) = \beta(t) + 2\pi$. Ця теорема є узагальненням результату Поммеренке для зіркових функцій [32, 33]. Гансен у [21] висунув гіпотезу, щодо зростання максимуму модуля спіралеподібних функцій на колі радіуса r:

$$M(r, f) = O\left[(1-r)^{-\frac{1}{\pi}A(f)\cos^2\lambda}\right],$$

де $A(f) = \lim_{R\to\infty} \alpha(R, f)$, $\alpha(R, f)$ — довжина найбільшої дуги, що міститься в множині $\{\zeta \in \partial\mathbb{D} : R\zeta \in f(\mathbb{D})\}$. Гіпотеза рівносильна припущенню, що величина $\delta_f(r)$ у виразі $\log M(r, f) \equiv \frac{1}{\pi} A(f) \cos^2 \lambda \log \frac{1}{1-r} + \delta_f(r)$ обмежена зверху. У [26] Кім та Сугава спростували це твердження, побудувавши приклад, в якому $\delta_f(r)$ може зростати як $\log\log \frac{1}{1-r}$ при $r \to 1-$. У третьому розділі дисертації описано максимальну швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу λ-спіралеподібних в одиничному крузі функцій та доведено оцінку коефіцієнтів з розкладу в ряд Тейлора для функції f.

Ключові слова: інваріантний потенціал Гріна, $\mathcal{M}$-субгармонійна функція, інтеграл Коші-Стілтьєса, інтеграл Пуассона-Стілтьєса, міра Рісса, спіралеподібна функція, лебегові середні, однолисті функції.

Список публікацій в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of spirallike function. Analele Universitatii Oradea Fasc. Matematica **22**(2), 93-–99 (2015).

2. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of the Cauchy-Szegő transform in the unit ball. J. Math. Phys. Anal, Geom. **11**(3), 236–244 (2015).

3. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On asymptotic behavior of the pth means of the Green potential for $0 < p \le 1$. Mat. Stud. **46**(2), 159–170 (2016).

4. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: Growth description of pth means of the Green potential in the unit ball. Complex Variables and Elliptic Equations **62**(7), 899–913 (2017).

5. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On decrease of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. (83), 90–99 (2017).

6. Voitovych, M.: Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions. Mat. Stud. **47**(1), 20–26 (2017).

Список публікацій які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Iurkevych, M.: On the growth of starlike functions. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 17-21, 2012, p. 165-166.

2. Iurkevych, M.: On the growth of spirallike functions. In: Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013, с. 89–90.

3. Voitovych, M.: On the growth of the Cauchy integral. In: Abstracts of the International Conference "Complex Analysis, Potential Theory and Applications", http://www.imath.kiev.ua/~complex/conf_2013/abstracts. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the Taras Shevchenko Kiev National University, Kyiv, August 19-23, 2013.

4. Voitovych, M.: Growth of the Cauchy integral. In: Abstracts of the International Conference "Complex analysis and related topics". Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 23-28, 2013, p. 87.

5. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of starlike functions. In: Abstract book "The 10th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications", GFTA. University of Oradea, Oradea, Romania, August 25-28, 2014, p. 38.

6. Chyzhykov, I., Voitovych, M.:, Growth of the invariant Green potential. In: Abstracts of the International Conference "Complex Analysis and Related Topics". Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, May 30 - June 4 2016, p. 19-20.

7. Voitovych, M.: Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 18-23, 2017, p. 142.

Voitovych M. A. Asymptotic properties of subharmonic and analytic functions in the unit ball. - Qualifying scientific work on the manuscript.

PhD Thesis for a degree in physics and mathematics, speciality 01.01.01 “Mathematical Analysis”. - Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

Annotation. The main fields of research in the PhD Thesis are:

— description of the asymptotic behavior of pth means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball in $\mathbb{C}^n$ in terms of smoothness properties of the Riesz measure μ and boundary measure;

— description of the growth of the Cauchy-Stieltjes and Poisson-Stieltjes integral in the unit ball;

— description of the growth of spirallike functions in the unit disk.

An upper semicontinuous function $u : \mathbb{D} \to [-\infty, +\infty)$ is subharmonic on domain $\mathbb{D}$ if $u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z + re^{it})dt$, for all $z \in \mathbb{D}$ and all r sufficiently small. For the n-dimensional complex space $\mathbb{C}^n$ one of the generalizations of the class of subharmonic functions is $\mathcal{M}$-subharmonic functions. Let B denote the unit ball in $\mathbb{C}^n$ with the boundary S. An upper semicontinuous function $u : B \to [-\infty, \infty)$, with $u \not\equiv -\infty$, is $\mathcal{M}$-subharmonic on B if

$$u(a) \leq \int_S u(\varphi_a(r\xi))d\sigma(\xi)$$

for all $a \in B$ and all r sufficiently small, where $\varphi_w(z)$ is the involutive automorphism and $d\sigma$ is the Lebesgue measure on S normalized so that $\sigma(S) = 1$. The concept and the theory of $\mathcal{M}$-subharmonic functions are due to David Ulrich ([44]). Note that in the case $n = 1$ the classes of $\mathcal{M}$-subharmonic functions and subharmonic functions coincide. For the class of $\mathcal{M}$-subharmonic functions a counterpart of the Riesz decomposition theorem holds (see [42, 44]). Due to this theorem, an $\mathcal{M}$-subharmonic function u with the norm $\|u(r\xi)\|_{L^1(S)}$ uniformly bounded on $[0, 1)$ can be represented as the difference of an $\mathcal{M}$-harmonic function and the Green potential

$$G_\mu(z) = \int_B G(z, w)d\mu(w)$$

of a nonnegative measure μ satisfying $\int_B (1 - |w|^2)^n d\mu(w) < \infty$. In particular, $-G_\mu$ is $\mathcal{M}$-subharmonic. Thus investigations of the Green potentials are very

important in studying the whole class of $\mathcal{M}$-subharmonic functions. The sharp estimates of the growth rate of $m_p(r, G_\mu)$ for the whole class of Borel measures satisfying $\int_B (1-|w|^2)^n d\mu(w) < \infty$ are proved by M. Stoll in [40]. In the second section of the thesis it is described the asymptotic behavior of pth means of the invariant Green potential $m_p(r, G_\mu),\ r \to 1-$ in terms of smoothness properties of the measure μ. It is a generalization of the result due to M. Stoll. Also, based on previous results, it is investigated the asymptotic behavior of $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball in $\mathbb{C}^n$ in terms of smoothness properties of the Riesz measure μ and the boundary measure. In the case $n = 1$, the analog of this statement was proved by I. Chyzhykov in [6].

For the first time, the connection between the growth rate of the derivative of the analytic function $f'(z)$ and its smoothness properties in terms of the modulus of continuity $\omega^*(t) = \sup_{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| \le t} |f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})|,\ \theta \in \mathbb{R}$ in the unit ball was established by Hardy-Littlewood ([22], [15, Chap. 5]). A necessary and sufficient condition for evaluating the growth rate of the derivative function f is that $\omega^*(t)$ satisfies the Lipschitz condition of order α $(\Lambda^*_\alpha,\ 0 < \alpha \le 1)$. Similar statements for the radial derivative of holomorphic functions in B for several complex variables were proved by W. Rudin in [35].

In the thesis, we are interested in description of the growth of analytic and harmonic functions in the unit ball represented by the Cauchy-Stieltjes or Poisson-Stieltjes integral. We find estimates in terms of smoothness of the Stieltjes measure using the modulus of continuity of measure μ

$$\omega(\delta, \mu) = \sup_{z_0 \in S_n} |\mu|(\{\xi \in S_n : d(\xi, z_0) \le \delta\}),$$

where $|\mu|$ is the total variation of a complex-valued Borel measure μ on S and $d(z, \zeta) = \sqrt{|1 - \langle z, \zeta\rangle|},\ z, \zeta \in \overline{B}_n$, the anisotropic metric on S. Some results in this direction that concern the unit polydisk can be found in [19], [13], [14]. In particular, necessary and sufficient conditions of the growth of Poisson-Stieltjes integral

$$\mathcal{P}[\nu](z) = \int_{S_n} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1 - \langle z, \xi\rangle|^{2n}} d\nu(\xi),\ z \in B$$

in terms of smoothness of the Stieltjes measure ν have been described in [4] for

$n = 1$ and in [9] for $n \in \mathbb{N}$. For $n = 1,\ p \geq 1$ the growth of $m_p(r, \mathcal{P}[\nu])$ is described in [51].

In the study of the functions $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ that are analytic and univalent in the unit disk $\mathbb{D}$, certain subclasses in which $f(\mathbb{D})$ has some simple geometric property arise rather naturally. For example, if f is analytic in $\mathbb{D}$, $f'(0) \neq 0$ and $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$ when $z \in \mathbb{D}$ then f is univalent and $f(\mathbb{D})$ is starlike with respect to the origin. Functions that satisfy the previous conditions are called starlike functions in $\mathbb{D}$ ([16]). Starlike functions and starlike domains can be generalized by using λ-spirals $\gamma_\lambda : t \mapsto \exp(te^{i\lambda}),\ t \in \mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$ instead of segments. Thus the concept of λ-spirallike function arises. Duren in [16] showed that an analytic function on $\mathbb{D}$ is λ-spirallike on $\mathbb{D}$ if and only if the condition $\operatorname{Re}(e^{-i\lambda} zf'(z)/f(z)) > 0$ holds for $z \in \mathbb{D}, \quad \lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$.

In the paper [26] Kim and Sugawa showed that each λ-spirallike function in $\mathbb{D}$ has the following representation

$$f(z) = z \exp\left(-\frac{e^{i\lambda} \cos\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it} z) d\beta(t) \right),$$

where $\beta(t)$ is non-descreasing in $t \in \mathbb{R}$ and $\beta(t + 2\pi) = \beta(t) + 2\pi$. The previous theorem is a generalization of a result by Pommerenke ([32]) for starlike functions (see also [30]). Hansen [21] conjectured that for maximum of the modulus of the spirallike function holds $M(r, f) = O[(1-r)^{-\frac{1}{\pi}A(f)\cos^2\lambda}]$, where $A(f) = \lim_{R\to\infty} \alpha(R, f)$, $\alpha(R, f)$ is the length of the largest arc contained in the set $\{\zeta \in \partial\mathbb{D} : R\zeta \in f(\mathbb{D})\}$. Hansen's conjecture is equivalent to the assertion that $\delta_f(r)$ in equality $\log M(r, f) \equiv \frac{1}{\pi} A(f) \cos^2\lambda \log \frac{1}{1-r} + \delta_f(r)$ is bounded from above. It follows from the example of Kim and Sugawa that $\delta_f(r)$ can grow as $\log\log \frac{1}{1-r}$ as $r \to 1-$. In the third section of the dissertation it is described the maximum growth rate $\delta_f(r)$ for the class of λ-spirallike functions in the unit disk. Also the Taylor coefficients function f are estimated.

Key words: invariant Green potential, $\mathcal{M}$-subharmonic function, Cauchy integral, Poisson integral, Riesz measure, spirallike function, univalent functions, pth means.

List of publications:

1. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of spirallike function. Analele Universitatii Oradea Fasc. Matematica **22**(2), 93-–99 (2015).

2. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of the Cauchy-Szegő transform in the unit ball. J. Math. Phys. Anal, Geom. **11**(3), 236–244 (2015).

3. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On asymptotic behavior of the pth means of the Green potential for $0 < p \leq 1$. Mat. Stud. **46**(2), 159–170 (2016).

4. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: Growth description of pth means of the Green potential in the unit ball. Complex Variables and Elliptic Equations **62**(7), 899–913 (2017).

5. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On decrease of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. (83), 90–99 (2017).

6. Voitovych, M.: Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions. Mat. Stud. **47**(1), 20–26 (2017).

List of conference abstracts:

1. Iurkevych, M.: On the growth of starlike functions. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 17-21, 2012, p. 165-166.

2. Iurkevych, M.: On the growth of spirallike functions. In: Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013, с. 89–90.

3. Voitovych, M.: On the growth of the Cauchy integral. In: Abstracts of the International Conference "Complex Analysis, Potential Theory and Applications", http://www.imath.kiev.ua/ complex/conf_2013/abstracts. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the Taras Shevchenko Kiev National University, Kyiv, August 19-23, 2013.

4. Voitovych, M.: Growth of the Cauchy integral. In: Abstracts of the International Conference “Complex analysis and related topics”. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 23-28, 2013, p. 87.

5. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of starlike functions. In: Abstract book “The 10th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications”, GFTA. University of Oradea, Oradea, Romania, August 25-28, 2014, p. 38.

6. Chyzhykov, I., Voitovych, M.:, Growth of the invariant Green potential. In: Abstracts of the International Conference “Complex Analysis and Related Topics”. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, May 30 - June 4 2016, p. 19-20.

7. Voitovych, M.: Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 18-23, 2017, p. 142.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j$ – скалярний добуток, де $z, w \in \mathbb{C}^n$;
- $|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ – норма в $\mathbb{C}^n$;
- $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ – одинична куля в $\mathbb{C}^n$;
- $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ – одинична сфера в $\mathbb{C}^n$;
- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – одиничний круг в $\mathbb{C}$;
- $\mathcal{M}$ – група голоморфних автоморфізмів B;
- $\varphi_w(z) = \frac{w - P_w z - (1-|w|^2)^{1/2} Q_w z}{1 - \langle z, w\rangle}$ – інволютивний автоморфізм одиничної кулі B, де $P_0 z = 0$, $P_w z = \frac{\langle z, w\rangle}{|w|^2} w$, $w \neq 0$ і $Q_w = I - P_w$;
- $\tilde{\Delta} f(a) = \Delta(f \circ \varphi_a)(0)$ – інваріантний лапласіан на B, $f \in C^2(B)$;
- $g(z) := \frac{n+1}{2n} \int_{|z|}^{1} (1-t^2)^{n-1} t^{-2n+1} dt$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in B$;
- $G(z, w) := g(\varphi_w(z))$ – функція Гріна оператора $\tilde{\Delta}$ в B;
- μ – борелева міра на B;
- $G_\mu(z) = \int_B G(z, w) d\mu(w)$ – інваріантний потенціал Гріна міри μ, де $\int_B (1-|w|^2)^n d\mu(w) < \infty$;
- V – міра Лебега на B;
- σ – нормована міра Лебега на S така, що $\sigma(S) = 1$;
- $m_p(r, u) = \left(\int_S |u(r\xi)|^p \, d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$;
- $d(a, b) = |1 - \langle a, b\rangle|^{1/2}$ – неізотропна метрика на S;

- $\mathcal{C}[f](z) = \int_{S_n} \frac{f(\xi)d\sigma(\xi)}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n}$ – інтеграл Коші функції $f \in L_1(S)$;
- $\mathcal{C}[\mu](z) = \int_{S_n} \frac{d\mu(\xi)}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n}$ – інтеграл Коші-Стілтьєса за мірою μ;
- $\mathcal{P}[f](z) = \int_S \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} f(\xi)d\sigma(\xi)$ – інтеграл Пуассона функції $f \in L_1(S)$;
- $\mathcal{P}[\mu](z) = \int_S \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} d\mu(\xi)$ – інтеграл Пуассона-Стілтьєса за мірою μ;
- $\omega(\delta,\mu) = \sup_{z_0\in S} |\mu|(\{\xi \in S : d(\xi, z_0) \leq \delta\}),\ \delta > 0$ – модуль неперервності міри μ;
- $|\mu|$ – повна варіація комплекснозначної борелевої міри μ на S;
- $\omega^*(t) = \sup_{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|\leq t} |f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})|$ – модуль неперервності комплекснозначної функції $f(\zeta)$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$;
- Λ^*_α $(0 < \alpha \leq 1)$ – клас комплекснозначних функцій, для яких $\omega^*(t) = O(t^\alpha)$ при $t \to 0$;
- S – клас однолистих аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій, які задовольняють умови $f(0) = 0$ і $f'(0) = 1$;
- $\mathfrak{F}_\lambda = \{f \in S : \mathrm{Re}(e^{-i\lambda} z f'(z)/f(z)) > 0, \quad z \in \mathbb{D}\}, \quad \lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$;
- $E_k = E_k(z) = \left\{w \in B : \left|1 - \left\langle \frac{z}{|z|}, w\right\rangle\right| < 2^{k+1}(1-|z|)\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$.

Крім наведеного переліку умовних позначень, у відповідних розділах вводимо деякі додаткові позначення.

ВСТУП

Актуальність теми.

Клас субгармонійних функцій в області $D \subset \mathbb{C}$ є узагальненням опуклих на відрізку (a, b) функцій. Основи теорії субгармонійних функцій були закладені Ф. Ріссом. Напівнеперервна зверху функція $u : D \to [-\infty, +\infty)$ називається субгармонійною в області D, якщо виконується нерівність

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})dt,$$

для всіх $z \in D$ та достатньо малих r. Поняття та теорія $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій належить Девіду Ульріху ([44]). Функція $u \in C^2$ є $\mathcal{M}$-субгармонійною тоді і тільки тоді, коли $(\tilde{\Delta} u)(a) \geq 0$ для всіх $a \in B$, де $\tilde{\Delta}$ — інваріантний лапласіан,

$$\tilde{\Delta} f(a) = 4(1 - |a|^2) \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{j,k} - \bar{a}_j \bar{a}_k) \frac{\partial^2 f(a)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k},$$

де $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера. Клас $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій є одним з n-вимірних узагальнень субгармонійних функцій. У випадку $n = 1$ класи $\mathcal{M}$-субгармонійних та субгармонійних функцій збігаються. Зауважимо, що для $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, на відміну від плюрісубгармонійних функцій, виконується аналог теореми Рісса про розклад ([42, 44]), тому велике значення у вивченні всього класу $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій мають потенціали Гріна.

Добре відомо, що властивості аналітичних та субгармонійних функцій тісно пов'язані з їх зростанням. Тому класичними об'єктами вивчення є класи Гарді обмежених аналітичних функцій, класи Неванлінни аналітичних функцій з обмеженою характеристикою, субгармонійних функцій з обмеженими інтегральними середніми та їхні узагальнення, у тому числі і багатовимірні ([52]). Такими задачами в $\mathbb{D}$ займалися І. Привалов, Ф. Рісс, В. Смирнов, М. Цудзі, М. Арсов, О.

Фростман, М. Джрбашян, Ф. Шамоян, Ч. Горовіц, Е. Беллер та інші. У випадку $n > 1$, точну оцінку швидкості зростання

$$m_p(r, G_\mu) = \left(\int_S |G_\mu(r\xi)|^p \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \ p > 0,$$

де G_μ — інваріантний потенціал Гріна, для всього класу борелевих мір, які задовольняють умову $\int_B (1 - |w|^2)^n d\mu(w) < \infty$, багатовимірному аналогу умови Бляшке, знайшов М. Столл у роботі [40]. Зазначимо, що аналогічні результати для потенціалів Гріна в одиничній кулі в $\mathbb{R}^n$ були опубліковані раніше в [38], [18]. Дослідження у випадку дійсної змінної описані Столлом у статті [43]. Також гранична поведінка інваріантних потенціалів Гріна досліджена К. Т. Ханом в [20]. Випадок $n = 1$ вивчений глибше, наприклад у роботах Ліндена [28, 29]. Міри Рісса μ, для яких рівняння Пуассона $\Delta u = \mu, \ u \in L^p(\mathbb{D})$ має розв'язок, описані в [1].

Оцінка, знайдена М. Столлом у [40] не враховує властивостей конкретної міри μ. Тоді, як властивості гладкості повної міри або міри Грішина ([47, 5, 6]) субгармонійної функції дозволяють нам описати зростання відповідного потенціалу. Зокрема у статті [6] для одновимірного комплексного простору І. Е. Чижиковим знайдено необхідні і достатні умови для оцінки зростання p-их середніх субгармонійних функцій в термінах властивостей міри Рісса. Зазначимо, що у випадку $u = \log|B|$, де B — добуток Бляшке, аналогічний результат іншим методом отримали Я. В. Микитюк і Я. В. Васильків [50]. У другому розділі дисертації цей результат узагальнено для багатьох комплексних змінних. Також описано зростання p-х середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ, що узагальнює результати Столла.

Вже майже два століття у математиків не згасає інтерес до такого об'єкту, як інтеграл Пуассона та його узагальнення, через велику кількість застосувань в рівняннях математичної фізики, теорії потенціалу, тощо. У дисертаційній роботі досліджується зростання аналітичних та гармонійних функцій в кулі B, які можна представити в вигляді інтегралу Коші-Стілтьєса та інтегралу Пуассона-Стілтьєса, зокрема знайдено точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стілтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стілтьєса та оцінку зростання інтегралу Пуассона-Стілтьєса. Випадок диференційованих мір (відносно міри σ) є добре відомим (див. [35, розд. 3], [42, розд. 7]). Деякі результати в цьому напрямку, що стосуються одиничного полікруга, можна знайти в роботах [36], [19], [13], [14]. Необхідні та достатні умови зростання інтегралу Пуассона-Стілтьєса при певному способі прямування до межі в термінах міри Стілтьєса описані Чижиковим та Золотою у [4], [13].

У вивченні функцій вигляду $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, які є аналітичними і однолистими в одиничному крузі $\mathbb{D}$ природно постає питання вивчення підкласу в якому $f(\mathbb{D})$ має прості геометричні властивості. Для прикладу, якщо f – аналітична в $\mathbb{D}$, $f'(0) \neq 0$ і виконується умова $Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$, то f – однолиста в $\mathbb{D}$ та область $f(\mathbb{D})$ – зіркова відносно початку координат. Функції, для яких виконуються такі умови, називають зірковими в $\mathbb{D}$ ([16]). Зіркові області та зіркові функції можуть бути узагальнені, використовуючи логарифмічні спіралі $\gamma_\lambda : t \mapsto \exp(te^{i\lambda}),\ t \in \mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$ замість відрізків.

У третьому розділі узагальнено результат Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава [26], які спростували гіпотезу Гансена [21], щодо поведінки максимуму модуля λ-спіралеподібних функцій на колі радіуса r, $\quad 0 < r < 1$. Через $\mathfrak{F}_\lambda$ позначатимемо клас λ-спіралеподібних функцій, таких, що $f'(0) = 1$. Для $R > 0$, нехай $\alpha(R, f)$ позначатиме довжину найбільшої дуги, яка міститься в множині $\{\zeta \in \partial\mathbb{D} : R\zeta \in f(\mathbb{D})\}$. Також позначимо $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ та $q_0 = \frac{1}{\pi} \lim\limits_{R\to+\infty} \alpha(R, f)\cos^2\lambda$.

Гіпотеза Гансена рівносильна припущенню, що величина $\delta_f(r)$ у виразі $\log M(r, f) \equiv q_0 \log\frac{1}{1-r} + \delta_f(r)$ обмежена зверху. З прикладу Кіма та Сугави випливає, що $\delta_f(r)$ може зростати як $\log\log\frac{1}{1-r}$ при

$r \to 1-$ для $f \in \mathfrak{F}_\lambda,\ q_0 = q_0(\lambda)$. В дисертаційній роботі описано максимальну швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу λ-спіралеподібних в одиничному крузі функцій $\mathfrak{F}_\lambda$ та оцінено коефіцієнти з розкладу в ряд Тейлора для функції f.

Зв'язок роботи з науковими програмами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації є складовою частиною держбюджетних тем:
Мг–159 Ф "Методи комплексного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій у банахових просторах"(номер держреєстрації 0113 U 000184),
Мг–145 Ф "Нові комплексно-ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами"(номер держреєстрації 0113 U 003051).

Мета і завдання досліджень. Метою дисертації є:

— описати асимптотичне поводження середніх $m_p(r, G_\mu) = \left(\int_S |G_\mu(r\xi)|^p\, d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}},\ p > 0$ інваріантного потенціалу Гріна $G_\mu(z) = \int_B G(z,w) d\mu(w)$ в термінах властивостей міри μ, де G – функція Гріна інваріантного лапласіану в B;

— описати асимптотичне поводження p-их середніх $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій у термінах гладкості міри Рісса;

— знайти точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стілтьєса та інтегралу Пуассона-Стілтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стілтьєса;

— описати максимальну швидкість зростання доданка $\delta_f(r)$ у тотожності $\log M(r,f) \equiv q_0 \log \frac{1}{1-r} + \delta_f(r),\ 0 < r < 1, q_0 = q_0(\lambda)$ для класу λ-спіралеподібних в одиничному крузі функцій $\mathfrak{F}_\lambda = \{f \in S : \operatorname{Re}(e^{-i\lambda} z f'(z)/f(z)) > 0, \quad z \in \mathbb{D}\}, \quad \lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$, де $M(r,f)$ – максимум модуля функції f на колі радіуса r, та оцінити коефіцієнти Тейлора функції f.

Об'єктом дослідження є інваріантний потенціал Гріна, $\mathcal{M}$-субгармонійні функції, інтеграли Коші-Стілтьєса та Пуассона- Стілтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$, та λ-спіралеподібні функції в одиничному крузі комплексної площини.

Предметом дослідження є асимптотичні оцінки інваріантного потенціалу Гріна, $\mathcal{M}$-субгармонійних функції, інтегралів Коші-Стілтьєса та Пуассона-Стілтьєса, оцінки зростання λ-спіралеподібних функцій.

Методи дослідження. Для розв'язання задач у дисертаційній роботі використовуються методи математичного та комплексного аналізу, а також деякі ідеї та підходи з праць А. Грішина, М. Столла, В. Рудіна, І. Чижикова.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими. У роботі вперше:

— описано асимптотичне поводження середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ;

— описано асимптотичне поводження p-их середніх $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій у термінах гладкості їхньої міри Рісса;

— встановлено точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стільтьєса та оцінку зростання інтегралу Пуассона-Стільтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стільтьєса;

— описано швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу λ-спіралеподібних в одиничному крузі функцій $\mathfrak{F}_\lambda$.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, мають теоретичний характер та можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії потенціалу та теорії функцій багатьох комплексних змінних.

Особистий внесок здобувача. В опублікованих спільно з науковим керівником І. Е. Чижиковим працях співавтору належать постановки задач, загальне керівництво над роботою та обговорення одержаних результатів. Викладені в дисертаційній роботі результати отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях:
— міжнародній науковій математичній конференції присвяченій 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (17-21 вересня 2012 р., Львів);
— всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(25 лютого-3 березня 2013 р., Ворохта);
— міжнародній конференції "Комплексний аналіз, теорія потенціалу та її застосування"(19-23 серпня 2013 р., Київ);
— міжнародній науковій конференції "Complex Analysis and Related Topics"(Lviv, Ukraine, September 23-28, 2013);
— міжнародній науковій конференції "Complex Analysis and Related Topics"(Lviv, Ukraine, May 30-June 4, 2016);
— міжнародній науковій математичній конференції присвяченій 125-річчю з дня народження Стефана Банаха (18-23 вересня 2017 р., Львів).

Результати дисертації доповідалися на:
— львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники $\boxed{\text{проф. А. А. Кондратюк}}$ і проф. О. Б. Скасків);
— семінарі з теорії потенціалу та його застосувань у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (керівники проф. О. Б. Скасків і проф. І. Е. Чижиков);
— семінарі з теорії аналітичних функцій у Дрогобицькому державному педагогічному університеті ім. Івана Франка (керівник проф. Б. В. Винницький).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 6 (з них 1 - одноосібно) статтях у виданнях [11], [9], [10], [8], [45], [12] в яких слід публікувати результати дисертації, зокрема 2 ([8], [11]) — у закордонних виданнях, 3 ([9], [11], [45]) — з бази даних SCOPUS і 7 тезах конференцій різного рівня.

Структура і об'єм дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, 3 розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 52 найменування. Загальний обсяг дисертації — 126 сторінок, обсяг списку використаних джерел — 6 сторінок.

Висловлюю вдячність проф. І. Е. Чижикову за керівництво роботою.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1. Огляд літератури

1.1.1. Інваріантний лапласіан і $\mathcal{M}$-субгармонійні функції

Для $n \in \mathbb{N}$, через $\mathbb{C}^n$ позначимо n-вимірний комплексний простір зі скалярним добутком

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j,\ \ z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Нехай $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ — одинична куля і $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ — одинична сфера, де $|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$.

Для $z, w \in B$, визначимо *інволютивний автоморфізм* φ_w одиничної кулі B

$$\varphi_w(z) = \frac{w - P_w z - (1-|w|^2)^{1/2} Q_w z}{1 - \langle z, w\rangle}$$

де $P_0 z = 0,\ P_w z = \frac{\langle z,w\rangle}{|w|^2} w,\ w \neq 0$ — ортогональна проекція простору $\mathbb{C}^n$ на підпростір породжений вектором w і $Q_w = I - P_w$.

Інваріантним лапласіаном $\tilde{\Delta}$ на B називають оператор

$$\tilde{\Delta} f(a) = \Delta(f \circ \varphi_a)(0),$$

де $f \in C^2(B)$, а $\Delta = 4\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}$ — це звичайний лапласіан. Оператор $\tilde{\Delta}$ можна записати у вигляді

$$\tilde{\Delta} f(a) = 4(1-|a|^2) \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{j,k} - \bar{a}_j \bar{a}_k) \frac{\partial^2 f(a)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k},$$

де $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера. Відомо, що $\tilde{\Delta}$ є інваріантним відносно будь-якого голоморфного автоморфізму B, тобто,

$$\tilde{\Delta}(f \circ \psi) = (\tilde{\Delta} f) \circ \psi$$

для будь-якого $\psi \in \mathcal{M}$, де $\mathcal{M}$ — група голоморфних автоморфізмів B ([35, розд.4], [42], [25]).

Функцією Гріна для інваріантного лапласіану називається

$$G(z, w) = g(\varphi_w(z)),\ z, w \in B$$

де

$$g(z) = \frac{n+1}{2n} \int_{|z|}^{1} (1-t^2)^{n-1} t^{-2n+1} dt$$

([25], [42, розд.6.2]).

Якщо μ — невід'ємна борелева міра на B, функція G_μ визначена інтегралом

$$G_\mu(z) = \int_B G(z, w) d\mu(w)$$

називається *(інваріантним) потенціалом Гріна* міри μ, за умови $G_\mu \not\equiv +\infty$. Відомо ([42, розд.6.4]), що остання умова є рівносильною до

$$\int_B (1 - |w|^2)^n d\mu(w) < \infty. \tag{1.1}$$

Нехай u — вимірна функція локально інтегрована на B. Для $0 < p < \infty$ визначимо

$$m_p(r, u) = \left(\int_S |u(r\xi)|^p \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

де $d\sigma$ — міра Лебега на S нормована таким чином, що $\sigma(S) = 1$.

З поняттям інваріантного лапласіану природним чином пов'язане наступне поняття ([42, 44]).

Напівнеперервна зверху функція $u : B \to [-\infty, \infty)$, яка задовольняє умову $u \not\equiv -\infty$, називається *$\mathcal{M}$-субгармонійною* в B, якщо

$$u(a) \le \int_S u(\varphi_a(r\xi)) d\sigma(\xi) \tag{1.2}$$

для всіх $a \in B$ та всіх r достатньо малих. Неперервна функція u, для якої в (1.2) виконується рівність, називається *$\mathcal{M}$-гармонійною* в B.

Відзначимо, що у випадку $n > 1$ класи гармонійних і $\mathcal{M}$-гармонійних функцій відрізняються, а їхній перетин збігається з класом плюрігармонійних функцій ([35, розд. 4.4.9]).

Поняття та теорія $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій належить Девіду Ульріху ([44]).

Зауважимо, що функція $u \in C^2$ є $\mathcal{M}$-субгармонійною тоді і тільки тоді, коли $(\tilde{\Delta}u)(a) \geq 0$ для всіх $a \in B$, також, подібно, $(\tilde{\Delta}u)(a) = 0$ тоді і тільки тоді, коли u є $\mathcal{M}$-гармонійною функцією в B.

Зокрема, $-G_\mu$ є $\mathcal{M}$-субгармонійною функцією в B. Для класу субгармонійних функцій виконується аналог теореми про розклад Рісса на відміну від класу плюрісубгармонійних функцій ([42, 44]). Згідно цієї теореми, $\mathcal{M}$-субгармонійна функція u з рівномірно обмеженою на $[0, 1)$ нормою $\|u(r\xi)\|_{L^1(S)}$, може бути представлена як різниця $\mathcal{M}$-гармонійної функції та потенціалу Гріна невід'ємної міри, що задовольняє умову (1.1). Потенціали Гріна мають велике значення у вивченні всього класу $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій. Зазначимо, що у випадку $n = 1$ класи $\mathcal{M}$-субгармонійних та субгармонійних функцій збігаються.

Сім'ю двічі неперервно диференційованих функцій з компактним носієм у B позначатимемо $C_0^2(B)$. Для $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій справджується наступна теорема.

Теорема A ([42]). *Якщо u — $\mathcal{M}$-субгармонійна в B, тоді існує єдина борелева міра μ_u на B така, що*

$$\int_B \psi d\mu_u = \int_B u\tilde{\Delta}\psi d\tau \tag{1.3}$$

для всіх $\psi \in C_0^2(B)$, де τ — інваріантна міра на B $\left(d\tau(z) = \frac{dV(z)}{(1-|z|^2)^{n+1}}\right)$, тобто $d\mu_u = \tilde{\Delta}u d\tau$ в сенсі узагальнених функцій.

Якщо u — $\mathcal{M}$-субгармонійна в B, тоді однозначно визначена борелева міра μ_u, яка задовольняє (1.3), називається *мірою Рісса* функції u.

Скажемо, що $\mathcal{M}$-субгармонійна функція u в B має *$\mathcal{M}$-гармонійну мажоранту* в B, якщо існує $\mathcal{M}$-гармонійна функція h в B така, що $u(z) \le h(z)$ для всіх $z \in B$. Крім того, якщо існує $\mathcal{M}$-гармонійна функція H, що задовольняє умову $u(z) \le H(z)$, для всіх $z \in B$, та $H(z) \le h(z)$ для кожної $\mathcal{M}$-гармонійної мажоранти h функції u, тоді H називається *найменшою $\mathcal{M}$-гармонійною мажорантою* функції u, і надалі буде позначатися H_u.

Теорема B. ***(Теорема Рісса про розклад*** *[44, теорема 2.16]) Нехай $u \not\equiv -\infty$ $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B і має $\mathcal{M}$-гармонійну мажоранту в B. Тоді*

$$u(z) = H_u(z) - \int_B G(z,w)d\mu_u(w), \tag{1.4}$$

де μ_u міра Рісса функції u і H_u найменша $\mathcal{M}$-гармонійна мажоранта функції u.

Зауваження 1.1. Якщо $u \le 0,\ u \not\equiv -\infty$ $\mathcal{M}$-субгармонійна в B, то $v \equiv 0$ її $\mathcal{M}$-гармонійна мажоранта. Тоді для H_u у розкладі (1.4), ми отримаємо $H_u(z) \le 0,\ z \in B$. І відповідно до [42, твердж. 5.10] $H_u(z)$ можна зобразити за допомогою інтеграла Пуассона

$$H_u(z) = -\mathcal{P}[\nu](z),\ z \in B,$$

де ν — невід'ємна борелева міра на S.

У випадку $n > 1$, точну оцінку швидкості зростання $m_p(r, G_\mu)$ для всього класу борелевих мір, які задовольняють умову (1.1) знайшов М. Столл у [40].

Теорема C ([40]). *Нехай G_μ – потенціал Гріна на B.*

(1) Якщо $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, то

$$\lim_{r\to 1-}(1-r^2)^{n(1-1/p)} m_p(r, G_\mu) = 0.$$

(2) Якщо $n \ge 2$ і $\frac{2n-1}{2(n-1)} \le p < \frac{2n-1}{2n-3}$, то

$$\liminf_{r\to 1-}(1-r^2)^{n(1-1/p)} m_p(r, G_\mu) = 0. \tag{1.5}$$

Приклади в [40] показують, що оцінки є найкращими в тому сенсі, що показник степеня $(1-r^2)$ не можна замінити меншим, а нижню границю в (1.5) – границею.

Зауваження 1.2. У [40, приклад 2] показано, що для будь-якого $n \ge 2$ існує дискретна міра μ, яка задовольняє умову (1.1) така, що

$$\limsup_{r\to 1-}(1-r^2)^{n(1-1/p)} m_p(r, G_\mu) = \infty$$

для всіх $p \ge \frac{2n-1}{2(n-1)}$.

Зазначимо, що аналогічні результати для потенціалів Гріна в одиничній кулі в $\mathbb{R}^n$ були опубліковані раніше в [38], [18]. Щодо недавніх досліджень у випадку дійсної змінної можемо порекомендувати читачу монографію [43]. Також гранична поведінка інваріантних потенціалів Гріна описана в [20]. Випадок $n = 1$ вивчений глибше. Точні оцінки зростання $m_2(r, \log|B|)$, де $B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k(a_k - z)}{a_k(1-\bar{a}_k z)}$ — добуток Бляшке з нулями a_k, $\sum_k (1-|a_k|) < \infty$, довели Л. Рубел і Дж. Маклейн ще у 1969 році. Для $p > 1$ точні оцінки $m_p(r, \log|f|)$ встановив К. Лінден у [28], [29]. Зазначимо, що $\log|B(z)|$ є частковим випадком інваріантного потенціалу Гріна для $n = 1$ і цілочисельної дискретної міри $\mu(z) = \sum_k \delta(z - a_k)$. Зокрема, М. Столл ([39]) довів, що

$$\liminf_{r\to 1-}(1-r) m_\infty(r, G_\mu) = 0, \text{ коли } n = 1,$$

де $m_\infty(r, G_\mu) = \inf\limits_\theta G_\mu(re^{i\theta})$.

Зауваження 1.3. При додаткових умовах для міри μ оцінки швидкості зростання $m_p(r, G_\mu)$ можуть бути покращені.

Теорема D ([41, теорема 3.2])**.** *Нехай μ – борелева міра на B, яка задовольняє умову*

$$\int_B (1 - |w|^2)^\beta d\mu(w) < \infty$$

для деякого дійсного $\beta \leq n$.

(1) Якщо $1 \leq p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$ і $-n(1 - 1/p) < \beta \leq n$, то

$$\lim_{r \to 1-} (1 - r^2)^{\beta - n/p} m_p(r, G_\mu) = 0.$$

(2) Якщо $n \geq 2$ і $\frac{2n-1}{2(n-1)} \leq p < \frac{2n-1}{2n-3}$ і $-n(1 - 1/p) < \beta \leq n$, то

$$\liminf_{r \to 1-} (1 - r^2)^{\beta - n/p} m_p(r, G_\mu) = 0.$$

Зауваження 1.4. З теореми D випливає твердження теореми C для $\beta = n$.

Зауваження 1.5. Із результатів опублікованих в [44] (див. також [42]) випливає, що

$$m_1(r, G_\mu) = o(1), \quad r \to 1- .$$

Міри Рісса μ, для яких рівняння Пуассона $\Delta u = \mu$, $u \in L^p(\mathbb{D})$ має розв'язок, описані в [1].

Теорема C дає оцінку максимальної швидкості зростання p-го середнього потенціалів Гріна, але не враховує властивостей конкретної міри μ. Для $n = 1$, $p = 2$ необхідні і достатні умови обмеженості $m_2(r, \log|B(z)|)$ встановлені ще Рубелом і Маклейном. Їхній результат узагальнений Я. В. Васильківим та Я. В. Микитюком ([50]) для довільного $p \in [1, \infty)$, використовуючи методи теорії операторів. Впровадження поняття так званої повної міри (міри Грішина [47, 5, 6]) або related measure (див. [17]) субгармонійних функцій дозволяє нам описати не лише зростання потенціалів але й ширших класів субгармонійних функцій. Для функції u субгармонійної та недодатної в $\mathbb{D}$, згідно з теоремою Рісса про розклад ([23]), виконується рівність

$$u(z) = \int_{\mathbb{D}} \log \frac{|z-\zeta|}{|1-z\bar{\zeta}|} d\mu_u(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} d\psi(\zeta),$$

де ψ — додатна борелева міра, μ_u — міра Рісса функції u, для якої виконується $\int_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|)d\mu_u(\zeta) < \infty$. Визначимо міру λ_u борелевої множини $M \subset \bar{\mathbb{D}}$ такої, що $M \cap \partial\mathbb{D}$ — вимірна за Борелем на $\partial\mathbb{D}$ наступним чином

$$\lambda_u(M) = \int_{\mathbb{D}\cap M} (1-|\zeta|)d\mu_u(\zeta) + \psi(M \cap \partial\mathbb{D}).$$

Зауважимо, що у випадку $n = 1$ і $u = -G_\mu$, повна міра $\lambda = \lambda_u$ функції u є мірою Рісса з вагою $d\lambda(z) = (1-|z|)d\mu(z)$. Зокрема в [6] доведено

Теорема E ([6]). *Нехай u – субгармонійна, недодатна функція в $\mathbb{D}$, $\gamma \in (0, 1]$, $p \in (1, \infty)$ і λ – повна міра u. Необхідною і достатньою умовою для*

$$m_p(r, u) = O\left((1-r)^{\gamma-1}\right), \ r \to 1-,$$

є

$$\int_0^{2\pi} \lambda^p(\{\rho e^{i\theta} \in B : \rho \geq 1-\delta, \ |\theta - \varphi| \leq \pi\delta\}) d\varphi = O(\delta^{p\gamma}), \quad 0 < \delta < 1.$$

Аналог цього поняття для $n > 1$ для $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій в B був невідомий.

1.1.2. Інтеграли Пуассона-Стілтьєса і Коші-Стілтьєса

Нехай $z \in B$ і $\xi \in S$, тоді

$$\mathcal{P}(z,\xi) = \left\{ \frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,\xi\rangle|^2} \right\}^n$$

називається *ядром Пуассона* для одиничної кулі B.

Нехай μ — комплексна борелева міра на S і $z \in B$, тоді

$$\mathcal{P}[\mu](z) = \int_S \mathcal{P}(z,\xi)d\mu(\xi)$$

називається *інтегралом Пуассона-Стілтьєса.*

Зауваження 1.6. Відомо, що ([42, твердж. 5.10]) для будь-якої невід'ємної $\mathcal{M}$-гармонійної функції F на B, існує невід'ємна борелева міра ν на S така, що $F(z) = \mathcal{P}[\nu](z)$.

Зростання інтегралу $\mathcal{P}[\nu](z)$ в рівномірній метриці в термінах гладкості міри ν описане в [4] для $n = 1$. Зростання $m_p(r, \mathcal{P}[\nu])$ при $n = 1$ та $p \geq 1$ описане в [51].

Природно очікувати, що аналітична в обмеженій області функція є гладкою на межі області, коли її похідна зростає повільно, та навпаки. Для одиничного круга цей взаємозв'язок досліджений Гарді-Літлевудом ([22], [15, розд. 5]).

Скажемо, що комплекснозначна функція $f(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$ належить класу Λ^*_α $(0 < \alpha \leq 1)$, якщо $\omega^*(t) = O(t^\alpha)$ при $t \to 0$, де $\omega^*(t)$ модуль неперервності $f(e^{i\theta})$, тобто

$$\omega^*(t) = \sup_{|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|\leq t} |f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})|.$$

Теорема F. *([15, теорема 5.1]) Нехай функція $f(z)$ аналітична в $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Тоді $f(z)$ неперервна на $\overline{\mathbb{D}}$ і $f(e^{i\theta}) \in \Lambda^*_\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, тоді і тільки тоді, коли*

$$f'(z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^{1-\alpha}}\right).$$

Для комплекснозначної функції f на S та борелевої міри μ на S *інтегралом Коші* називається

$$\mathcal{C}[f](z) = \int_{S_n} \frac{f(\xi)d\sigma(\xi)}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n},\ z \in B.$$

Інтегралом Коші-Стільтьєса називається

$$\mathcal{C}[\mu](z) = \int_{S_n} \frac{d\mu(\xi)}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n},\ z \in B.$$

Аналогічно, позначимо через

$$\mathcal{P}[f](z) = \int_{S} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} f(\xi)d\sigma(\xi),\ z \in B,$$

інтеграл Пуассона.

Введемо кілька означень ([35]), які будуть необхідні нам далі. Многочлен P в $\mathbb{C}^n$ називають однорідним степеня s, якщо

$$P(\lambda z) = \lambda^s P(z),\ \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n.$$

Нехай функція f зображується кратним степеневим рядом в деякому околі початку координат в $\mathbb{C}^n$, тобто

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c(\alpha)z^\alpha,\ \text{де } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Для $s \in \mathbb{Z}_+$ позначимо через $F_s(z)$ суму членів $c(\alpha)z^\alpha$ степеневого ряду, для яких $|\alpha| = s$. Тоді

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(z)$$

називають розкладом функції f за однорідними поліномами.

Нехай функція f голоморфна в B і $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z)$ — розклад f за однорідними поліномами, тоді

$$(\mathcal{R}f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kF_k(z),\ z \in B$$

називається радіальною похідною функції f. Наступні теореми доведені В. Рудіном у випадку багатьох комплексних змінних.

Теорема G ([35])**.** *Нехай* $0 < \alpha < 1$ *і* f *— вимірна комплекснозначна функція така, що* $|f|$ *інтегрований відносно міри* σ *на* S*. Тоді, якщо виконується нерівність*

$$|f(e^{i\theta}\xi) - f(e^{it}\xi)| \le |e^{i\theta} - e^{it}|^{\alpha},\ \xi \in S,\ \ \theta, t \in \mathbb{R},$$

то

$$|(\mathcal{R}C[f])(z)| \le A_{\alpha}(1 - |z|)^{\alpha - 1},\ z \in B.$$

Теорема H ([35])**.** *Нехай* $0 < \alpha < 1$ *і функція* f *голоморфна в* B*. Тоді, якщо виконується нерівність*

$$|(\mathcal{R}C[f])(z)| \le (1 - |z|)^{\alpha - 1},\ z \in B,$$

то функцію f *можна неперервно продовжити на* $\overline{B}$ *і це продовження задовольнятиме умову Ліпшица порядку* α*.*

Деякі результати в цьому напрямку, що стосуються одиничного полікруга, можна знайти в роботах [19], [13], [14]. Зокрема, необхідні та достатні умови зростання інтегралу Пуассона-Стілтьєса в термінах міри Стілтьєса описані у [4], [13]. Деякі властивості гармонійних функцій, що задовольняють умови Ліпшица [3] та їхні узагальнення описані в [2]. Зокрема, багатовимірний аналог теореми F для функцій гармонійних в B доведений Кранцем у [27]. Зауважимо, що в загальному функції, які можна представити у вигляді інтегралу Пуассона-Стілтьєса чи інтегралу Коші-Стілтьєса, не завжди можуть бути представлені як інтеграл Пуассона та інтеграл Коші, відповідно.

Нас цікавить опис зростання аналітичних та гармонійних функцій в кулі B, які можна представити в вигляді інтегралу Коші-Стілтьєса та інтегралу Пуассона-Стілтьєса. Випадок диференційованих мір (відносно міри σ) є добре відомим (див. [35, розд. 3], [42, розд. 7]).

1.1.3. Зростання зіркових і спіралеподібних функцій

З поняттям зіркових функцій можна ознайомитись в книзі Дюрена [16] чи Поммеренке [33]. Якщо f — аналітична в $\mathbb{D}$, $f'(0) \neq 0$ і виконується умова $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$, то f — однолиста в $\mathbb{D}$ та область $f(\mathbb{D})$ — зіркова відносно початку координат. Функції, для яких виконуються такі умови, називають зірковими в $\mathbb{D}$. Природним узагальненням класу зіркових функцій є клас λ-спіралеподібних функцій ([16]). Нехай λ – дійсне число, яке знаходиться між $-\frac{\pi}{2}$ та $\frac{\pi}{2}$. Крива

$$\gamma_\lambda : t \mapsto \exp(te^{i\lambda}),\ t \in \mathbb{R}$$

та її повороти $e^{i\theta}\gamma_\lambda$, $\theta \in \mathbb{R}$ називаються λ-спіралями. Область Ω така, що $0 \in \Omega$ називається λ-*спіралеподібною* (відносно 0), якщо $\forall \omega \in \Omega :$ $[0, \omega]_\lambda \subset \Omega$, де

$$[0, \omega]_\lambda = \{\omega \exp(te^{i\lambda}) : t \leq 0\} \cup \{0\}.$$

Аналітична функція f в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ така, що $f(0) = 0$ називається λ-*спіралеподібною*, якщо f відображає $\mathbb{D}$ однолисто на λ-спіралеподібну область. Також позначимо ([26])

$$\theta = \arg_\lambda \omega \quad\ \omega \in e^{i\theta}\gamma_\lambda(\mathbb{R}).$$

Нехай S позначатиме клас однолистих аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій, які задовольняють умови $f(0) = 0$ і $f'(0) = 1$,

$$\mathfrak{F}_\lambda = \{f \in S : \operatorname{Re}(e^{-i\lambda} zf'(z)/f(z)) > 0, \ \ z \in \mathbb{D}\}, \quad \lambda \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Зауважимо, що $\mathfrak{F}_\lambda$, $\lambda \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ збігається з класом λ-спіралеподібних функцій, нормованих наступним чином $f'(0) = 1$. Випадок $\lambda = 0$ відповідає класу зіркових функцій.

Для $f \in S$, $R > 0$, нехай $\alpha(R, f)$ позначатиме довжину найбільшої дуги, яка міститься в множині $\{\zeta \in \partial\mathbb{D} : R\zeta \in f(\mathbb{D})\}$. Оскільки функція $\alpha(R, f)$ – незростаюча, коли f – спіралеподібна, то існує наступна границя $A(f) = \lim\limits_{R \to +\infty} \alpha(R, f)$. Позначимо

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

У [26] Кім та Сугава довели, що

$$\overline{\lim_{r\to 1-}} \frac{\log M(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}} = \frac{A(f)\cos^2\lambda}{\pi}$$

для кожної $f \in \mathfrak{F}_\lambda$. Зауважимо, що при $\lambda = 0$ це результат отримав Поммеренке у [32].

Наступна теорема є узагальненням результату Поммеренке ([32]) для зіркових функцій (див. також [30]).

Теорема I ([26])**.** *Нехай $f \in \mathfrak{F}_\lambda$, $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тоді границі*

$$\beta(t) = \lim_{r\to 1-} \arg_\lambda f(re^{it}) \quad i \quad f(e^{it}) = \lim_{r\to 1-} f(re^{it}) \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$$

існують для кожного $t \in \mathbb{R}$ таким чином, що $\beta(t)$ неспадна при $t \in \mathbb{R}$ і $\beta(t+2\pi) = \beta(t) + 2\pi$. Більше того, f можна зобразити у вигляді

$$f(z) = z\exp\left(-\frac{e^{i\lambda}\cos\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} \log(1-e^{-it}z)d\beta(t)\right), \quad z \in \mathbb{D}, \qquad (1.6)$$

де log *означає головне значення Log.*

Навпаки, якщо $\beta(t)$ неспадна дійснознана функція, $t \in \mathbb{R}$, для якої виконується $\beta(t+2\pi) = \beta(t) + 2\pi$, тоді функція f задана (3.1) *є λ-спіралеподібною.*

Гансен висловив припущення ([21]), що

$$M(r,f) = O((1-r)^{-q_0}), \text{ якщо } A(f) \neq 0$$

де $q_0 = \frac{1}{\pi}A(f)\cos^2\lambda$. Також він припускав, що

$$a_n = O(n^{q_0-1}) \quad q_0 > 1.$$

Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава [2] показали, що в загальному випадку це не так.

Теорема J ([26]). *Нехай $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ і $0 < A < 2\pi$. Тоді існує $f \in \mathfrak{F}_\lambda$ така, що $A(f) = A$, але співвідношення*

$$M(r, f) \asymp (1-r)^{-A(f)\cos^2\lambda/\pi}$$

не виконується.

Зауваження 1.7. Також, у лемі 4.3 ([26]) доведено, що

$$M(r, f) \asymp (1-r)^{-q_0} \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^{\beta \cos^2 \lambda}, \ r \to 1- .$$

для довільного вибору $\beta > 0$.

1.2. Огляд основних результатів дисертації

З огляду на результати М. Столла та теорему E, постає питання про опис асимптотичної поведінки при $r \to 1-$ середніх інваріантних потенціалів Гріна та $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій в одиничній кулі.

Наступна теорема є основним результатом підрозділу 2.1. Вона є узагальненням теореми C(1) та теореми D(1).

Для $\xi \in S$ і $\delta > 0$ визначимо множину

$$C(\xi, \delta) = \{z \in B : d(z, \xi) < \delta^{1/2}\}$$

та міру

$$d\lambda(z) = (1 - |z|)^n d\mu(z),$$

де $d(a, b) = |1 - \langle a, b \rangle|^{1/2}$ неізотропна метрика на S ([35, розд.5.1]).

Теорема 2.1. *Нехай $n > 1$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, $0 \le \gamma < 2n$ і нехай μ — борелева міра, яка задовольняє умову (1.1). Тоді*

$$m_p(r, G_\mu) = O\left((1-r)^{\gamma - n}\right), \ r \uparrow 1$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p \left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^{\gamma}\right),\ 0<\delta<1.$$

Як наслідок ми отримали критерій обмеженості інваріантного потенціалу Гріна.

Наслідок 2.1. *Нехай $n>1$, $1\le p<\frac{2n-1}{2(n-1)}$, і нехай μ — борелева міра, яка задовольняє (1.1). Тоді*

$$m_p\left(r,G_\mu\right)=O\left(1\right),\quad 0<r<1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p \left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^{n}\right),\ 0<\delta<1.$$

Встановлено також “o”-аналог теореми 2.1.

Теорема 2.2. *Нехай $n>1$, $1\le p<\frac{2n-1}{2(n-1)}$, $0\le\gamma<2n$, і нехай μ — борелева міра, що задовольняє умову (1.1). Тоді*

$$m_p\left(r,G_\mu\right)=o\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r\to 1-$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p \left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = o\left(\delta^{\gamma}\right),\ \delta\to 0+.$$

Далі розглянемо випадок $0<p<1$. Для цього інтервалу ми можемо отримати аналог твердження необхідності теореми 2.1.

Теорема 2.3. *Нехай $n>1$, $0<p<1$, $0\le\gamma<2n$, і нехай μ — борелева міра, що задовольняє умову* (1.1). *Якщо*

$$m_p\left(r,G_\mu\right)=O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r\uparrow 1$$

то

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right)d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^\gamma\right),\ 0<\delta<1.$$

У протилежному напрямку доведено таку точну оцінку.

Теорема 2.4. *Нехай* $n>1$, $0<p\le 1$, $0\le\gamma<2n$, *і нехай* μ *— борелева міра, що задовольняє умову* (1.1). *Якщо*

$$\int_S \lambda\left(C(\xi,\delta)\right)d\sigma(\xi) = O\left(\delta^\gamma\right),\ 0<\delta<1.$$

то

$$m_p\left(r, G_\mu\right) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r\uparrow 1.$$

Наступне твердження показує точність оцінки в теоремі 2.4.

Твердження 2.3. Для $n>1$, $0<p\le 1$, $n<\gamma<2n$, існує борелева міра μ на B така, що

$$G_\mu(z) = O\left((1-|z|)^{\gamma-n}\right),\ |z|\uparrow 1$$

та

$$\lambda\left(C(\xi,\delta)\right)\ge\delta^\gamma,\ 0<\delta<1.$$

Використовуючи теорему 2.1, ми можемо отримати узагальнення, яке описує зростання p-х середніх субгармонійної функції, яка має представлення вигляду (1.4), у термінах властивостей міри μ.

Введемо такий аналог повної міри Грішина, для підкласу $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій міра λ визначена наступним чином

$$d\lambda(w) = \frac{4n^2}{n+1}d\nu(w) + (1-|w|^2)^n d\mu_u(w)$$

для $w\in\bar{B}$, тобто

$$\lambda(E) = \int_E \frac{4n^2}{n+1}d\nu(w) + \int_E (1-|w|^2)^n d\mu_u(w),$$

де E — борелева підмножина $\bar{B}$ така, що $E \cap S$ — борелева підмножина S.

Теорема 2.5. *Нехай u — недодатня $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B, для якої виконується $u \not\equiv -\infty$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, $0 \le \gamma < 2n$. Тоді*

$$m_p(r,u) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r \uparrow 1$$

виконується тоді та тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^{\gamma}\right),\ 0 < \delta < 1.$$

Для $\mathcal{M}$-гармонійних функцій можна сформулювати такий наслідок.

Наслідок 2.3. *Нехай $u = \mathcal{P}[\nu](z)$ в B, де ν — невід'ємна борелева міра на S, $p > 1$ і $0 \le \gamma < 2n$. Тоді*

$$m_p(r,u) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r \uparrow 1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \nu^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^{\gamma}\right),\ 0 < \delta < 1.$$

Наступна теорема описує асимптотичну поведінку p-их значень $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, використовуючи клас функцій ширший ніж степеневі та охоплює випадок $\gamma = 2n$.

Теорема 2.6. *Нехай u — недодатна $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B, $n \in \mathbb{N}$, $u \not\equiv -\infty$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$. Нехай функція $\Phi\colon [0,2] \to [0,\infty)$ така, що для всіх $t > 1$ і $0 < t\delta < 2$ виконується*

$$\Phi(t\delta) = O\left(\frac{t^{2n}}{\psi(\log(e+t))}\Phi(\delta)\right)$$

для деякої додатної зростаючої функції ψ, *що задовольняє умови*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{\psi(t)} < \infty \quad \text{та} \quad \psi(ct) \asymp \psi(t), \quad c > 1.$$

Тоді

$$m_p(r,u) = O\left(\frac{\Phi(1-r)}{(1-r)^n}\right), \ r \uparrow 1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\Phi(\delta)\right), \ 0 < \delta < 1.$$

Не важко перевірити, що функція

$$\Phi(t) = \frac{t^{2n}}{\log^\beta \frac{e}{t}}, \ t \in (0,2], \ \Phi(0) = 0$$

не задовольняє припущення теореми 2.6 для жодного $\beta \in \mathbb{R}$. Для цього випадку отримаємо таке твердження.

Теорема 2.7. *Нехай* u — *недодатна* $\mathcal{M}$-*субгармонійна функція в* B, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $u \not\equiv -\infty$, $1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$. *Нехай* $\beta > 1$ *і* $\varkappa > 1$. *Якщо*

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^{2n} \log^\beta \frac{e}{\delta}\right), \ 0 < \delta < 2,$$

то

$$m_p(r,u) = O\left((1-r)^n \log^{\beta+\varkappa} \frac{e}{1-r}\right), \ r \uparrow 1.$$

У підрозділі 2.3 ми знаходимо точну оцінку зростання інтеграла Коші в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стільтьєса.

Теорема 2.8. *Нехай* μ — *комплекснозначна борелева міра на* S, $p \in (0,n]$. *Якщо*

$$\exists c > 0: \ \omega(\delta,\mu) \le c\delta^{2(n-p)}, \quad 0 < \delta \le \sqrt{2},$$

то

$$\mathcal{C}[\mu](z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^p}\right), \quad z \in B.$$

В прикладах 2.3-2.5 показано, що ця оцінка непокращувана з точністю до константи. Щоб довести теорему 2.8 ми використаємо стандартний метод з [35]. Той же підхід дозволяє довести критерій для інтеграла Пуассона.

Теорема 2.9. *Нехай μ — додатна борелева міра на S, $p \in (0,n)$. Тоді*

$$\exists c > 0: \ \omega(\delta,\mu) \le c\delta^{2(n-p)}, 0<\delta<1 \Leftrightarrow \mathcal{P}[\mu](z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^p}\right), z \in B.$$

Для $f \in \mathfrak{F}_\lambda$, запишемо

$$\log M(r,f) \equiv q_0 \log \tfrac{1}{1-r} + \delta_f(r), \quad 0<r<1.$$

гіпотеза Хансена рівносильна припущенню, що величина $\delta_f(r)$ обмежена зверху. З прикладу Кіма та Сугави випливає, що $\delta_f(r)$ може зростати як $\log\log \frac{1}{1-r}$ при $r \to 1-$ для $f \in \mathfrak{F}_\lambda$, $q_0 = q_0(\lambda)$.

Природно виникає наступне питання, *яка максимальна швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу $\mathfrak{F}_\lambda$?*

Зауваження 1.8. З означення q_0 випливає, що

$$\delta_f(r) = o\left(\log \frac{1}{1-r}\right), \ r \to 1- .$$

Ми покажемо, що співвідношення не можна покращити.

Наступна теорема є основним результатом третього розділу.

Теорема 3.1. *Нехай* ψ *— необмежена повільно зростаюча функція,* $0 \le A < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$. *Тоді існує функція* $f \in \mathfrak{F}_\lambda$ *така, що* $A(f) = A$ *і константа* $D > 0$ *така, що*

$$\log M(r, f) \ge \frac{A\cos^2\lambda}{\pi} \log \frac{1}{1-r} + \frac{D \log \frac{1}{1-r}}{\psi(\frac{1}{1-r})} + O(1),$$

де $r \in (0, 1)$.

Далі оцінюєм коефіцієнти в розкладі Тейлора для функції f, побудованої в теоремі 3.1. Для цього нам потрібні додаткові умови на гладкість функції ψ.

Твердження 3.1. *Нехай виконуються припущення теореми 3.1 і* $A\cos^2\lambda > \pi$. *Крім того припустимо, що* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ψ *— диференційована та виконується рівність*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\psi'(t) t \log t}{\psi^2(t)} = 0.$$

Тоді існує послідовність натуральних чисел (n_k), $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to \infty)$, *така, що*

$$|a_{n_k}| \ge c n_k^{\alpha(1-\frac{1}{n_k})},$$

де

$$\alpha(r) = q_0 - 1 + \frac{D}{\psi(\frac{1}{1-r})},\ c > 0.$$

РОЗДІЛ 2

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА $\mathcal{M}$-СУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

2.1. Асимптотична поведінка середніх інваріантного потенціалу Гріна в одиничній кулі

Для $n \in \mathbb{N}$ ми будемо позначати через $\mathbb{C}^n$ n-вимірний комплексний простір із скалярним добутком

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j, \ \ z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Нехай $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ – одинична куля і $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ — одинична сфера, де $|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$.

Для $z, w \in B$, визначимо *інволютивний автоморфізм* φ_w одиничної кулі B

$$\varphi_w(z) = \frac{w - P_w z - (1 - |w|^2)^{1/2} Q_w z}{1 - \langle z, w\rangle}$$

де $P_0 z = 0,\ P_w z = \frac{\langle z,w\rangle}{|w|^2} w,\ w \neq 0$ — ортогональна проекція простору $\mathbb{C}^n$ на підпростір породжений вектором w і $Q_w = I - P_w$.

Інваріантним лапласіаном $\tilde{\Delta}$ на B називається оператор

$$\tilde{\Delta} f(a) = \Delta(f \circ \varphi_a)(0),$$

де $f \in C^2(B)$, а Δ — це звичайний лапласіан. Відомо, що $\tilde{\Delta}$ є інваріантним відносно будь-якого голоморфного автоморфізму B, тобто,

$$\tilde{\Delta}(f \circ \psi) = (\tilde{\Delta} f) \circ \psi$$

для будь-якого $\psi \in \mathcal{M}$, групи голоморфних автоморфізмів B ([35, розд.4], [42]).

Функцією Гріна для інваріантного лапласіану називається

$$G(z,w) = g(\varphi_w(z)),$$

де

$$g(z) = \frac{n+1}{2n}\int_{|z|}^{1}(1-t^2)^{n-1}t^{-2n+1}dt \text{ ([42, розд.6.2]).}$$

Якщо μ — невід'ємна борелева міра на B, функція G_μ визначена інтегралом

$$G_\mu(z) = \int_B G(z,w)d\mu(w)$$

називається *(інваріантним) потенціалом Гріна* міри μ, що задовольняє умову $G_\mu \not\equiv +\infty$. Відомо ([42, розд.6.4]), що остання умова є рівносильною до

$$\int_B (1-|w|^2)^n d\mu(w) < \infty. \tag{2.1}$$

Нехай u — вимірна функція локально інтегрована на B. Для $0 < p < \infty$ визначимо

$$m_p(r,u) = \left(\int_S |u(r\xi)|^p \, d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}$$

де $d\sigma$ — міра Лебега на S нормована таким чином, що $\sigma(S) = 1$.

Метою цього розділу є описати зростання (спадання) $m_p(r, G_\mu)$ в темнінах властивостей міри μ. Це тісно пов'язано з питанням А. Зигмунда про критерій обмеженості $m_2(r, \log|B|)$, де B є добутком Бляшке, у випадку $n = 1$, $p = 2$. Г. Маклейн та Л. Рубел у [31] довели необхідні і достатні умови обмеженості $m_2(r, \log|B|)$. Наслідок 2.1 нижче є критерієм обмеженості для $m_p(r,u)$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$.

Теорема 2.1. *Нехай $n > 1$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, $0 \le \gamma < 2n$ і нехай μ — борелева міра, яка задовольняє умову (2.1). Співвідношення*

$$m_p(r, G_\mu) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right), \ r \uparrow 1 \tag{2.2}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^\gamma\right),\ 0<\delta<1. \tag{2.3}$$

Як наслідок ми отримали критерій обмеженості інваріантного потенціалу Гріна.

Наслідок 2.1. *Нехай $n>1$, $1\le p<\frac{2n-1}{2(n-1)}$, і нехай μ — борелева міра, яка задовольняє (2.1). Співвідношення*

$$m_p\left(r,G_\mu\right) = O\left(1\right), \quad 0<r<1$$

виконується, тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^n\right),\ 0<\delta<1. \tag{2.4}$$

Зауваження 2.1. Для $\gamma\in(n,2n)$, теорема 2.1 дає необхідні та достатні умови спадання потенціалу Гріна.

Приклад 2.1. Нехай V — міра Лебега на B. Позначимо

$$d\mu(z) = \frac{dV(z)}{(1-|z|)^n}.$$

Тоді міра λ збігається з V, і

$$\lambda\left(C(\xi,\delta)\right) = O(\delta^{n+1}) \tag{2.5}$$

тобто, припущення (2.3) виконується для $\gamma=n+1$, тоді

$$m_p\left(r,G_\mu\right) = O(1-r) \text{ при } r\to 1- \text{ та } n>1.$$

Оцінка (2.5) випливає з наступного зауваження. По-перше, радіальна проекція $C(\xi,\delta)$ на S має $(2n-1)$-вимірну міру $\sigma_\delta = c\delta^n$ ([35, твердж. 5.1.4]). По-друге, за означенням,

$$C(\xi,\delta)\subset\{z\in B: |z|\ge 1-\delta\}.$$

Доведемо останнє включення. Якщо $z \in C(\xi, \delta)$, то $|1 - \langle z, \xi\rangle| < \delta$. Використовуючи останню нерівність, отримаємо

$$1 - |z| \le 1 - |\langle z, \xi\rangle| < |1 - \langle z, \xi\rangle| < \delta.$$

Далі встановимо "о"-аналог теореми 2.1.

Теорема 2.2. *Нехай $n > 1$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, $0 \le \gamma < 2n$, і нехай μ — борелева міра, що задовольняє умову (2.1). Тоді*

$$m_p\left(r, G_\mu\right) = o\left((1-r)^{\gamma-n}\right), \ r \to 1- \tag{2.6}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi, \delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = o\left(\delta^\gamma\right), \ \delta \to 0+. \tag{2.7}$$

Наступне елементарне твердження дає мінімальну гладкість скінченної міри.

Твердження 2.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, і нехай ν — скінченна борелева міра на B. Тоді*

$$\left(\int_S \nu^p(C(\xi, \delta)) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = o(\delta^{\frac{n}{p}}), \quad \delta \to 0+. \tag{2.8}$$

Зауваження 2.2. Оскільки, для довільної борелевої міри μ на B її показник гладкості $\gamma \ge \frac{n}{p}$, то з теореми 2.2 та твердження 2.1 можна отримати теорему B(1) для потенціалу Гріна як наслідок для $p > 1$:

$$m_p\left(r, G_\mu\right) = o\left((1-r)^{\frac{n}{p}-n}\right), \ r \to 1-.$$

Далі ми покажемо, що з теореми 2.2 і твердження 2.1 також випливає теорема C(1).

Теорема 2.3. *Нехай* $n > 1$, $0 < p \le 1$, $0 \le \gamma < 2n$, *і нехай* μ — *борелева міра, що задовольняє умову* (2.1). *Якщо*

$$\int_S \lambda\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi) = O\left(\delta^\gamma\right),\ 0<\delta<1.$$

то

$$m_p\left(r, G_\mu\right) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r\uparrow 1. \tag{2.9}$$

Зауваження 2.3. Згідно з твердженням 2.1 завжди виконується

$$\int_S \lambda\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi) = o(\delta^n),\ \delta\downarrow 0.$$

Це узгоджується з співвідношенням

$$m_1(r, G_\mu) = o(1),\ r\uparrow 1$$

як це було показано Улріхом [44] (див. також [42]).

2.1.1. Допоміжні твердження

Далі, символом c позначатимемо додатну константу, яка залежить від параметрів вказаних в круглих дужках, $a \asymp b$ означатиме, що існують додатні константи c' і c'' такі, що $c'a < b < c''a$ виконується для всіх можливих a і b.

Наступна лема описує властивості функції

$$g(z) = \frac{n+1}{2n}\int_{|z|}^1 (1-t^2)^{n-1} t^{-2n+1} dt,$$

які будуть нам потрібні пізніше.

Лема А [42].*Нехай* $0 < \delta < \frac{1}{2}$ *фіксоване число,* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді* g *задовольняє наступні нерівності:*

$$g(z) \ge \frac{n+1}{4n^2}(1-|z|^2)^n,\ z\in B, \tag{2.10}$$

$$g(z) \le c(\delta)(1-|z|^2)^n, \ z \in B, |z| \ge \delta, \tag{2.11}$$

де $c(\delta)$ *— додатна стала. Більше того, якщо* $n > 1$, *то*

$$g(z) \asymp |z|^{-2n+2}, \qquad |z| \le \delta. \tag{2.12}$$

Нам потрібне наступне узагальнення леми 1 із [6] для багатьох змінних.

Лема 2.1. *Нехай* ν *— скінченна додатна борелева міра на* S, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, *і* $p \ge 1$. *Тоді*

$$\int_S \nu^{p-1}(D(\xi,\delta))d\nu(\xi) \le \frac{N^p}{\delta^{2n}} \int_S \nu^p(D(\xi,\delta))\, d\sigma(\xi),$$

де N *— додатна стала незалежна від* p *і* δ.

Доведення леми 2.1. Спочатку доведемо твердження для $p = 1$. Оскільки ([35, твердж. 5.1.4]) $\sigma(D(\xi,\delta)) \asymp \delta^{2n}$, ми маємо

$$\int_S d\nu(\xi) \le \frac{c}{\delta^{2n}} \int_S \int_{D(\xi,\delta)} d\sigma(t) d\nu(\xi), \tag{2.13}$$

де c — деяка додатна стала залежна лише від n. Нехай $\Theta\colon \Pi \to S$ — сферичні координати на одиничній сфері, де $\Pi = [0, 2\pi) \times [0, \pi]^{2n-2}$. Формули переходу до сферичних координат $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{2n-1})$ мають вигляд ([48, с.498]):

$$\begin{array}{rlllll}
x_1 = & \cos\varphi_1 & & & & \\
x_2 = & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_2 & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
x_{2n-1} = & \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \cdots & \sin\varphi_{2n-2} & \cos\varphi_{2n-1} \\
x_{2n} = & \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \cdots & \sin\varphi_{2n-2} & \sin\varphi_{2n-1}.
\end{array}$$

Оскільки Θ періодична за кожною змінною, ми розглянемо Θ на $\mathbb{R}^{2n-1}$. Позначимо

$$\Pi' = [-\pi, 3\pi) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]^{2n-2}$$

. Тоді, використовуючи теорему Фубіні та періодичність якобіана

$$\det \Theta' = \sin^{2n-2} \varphi_1 \sin^{2n-3} \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{2n-2},$$

ми отримаємо

$$\int\limits_S \int\limits_{D(\xi,\delta)} d\sigma(t) d\nu(\xi) = \int\limits_\Pi \int\limits_{\substack{d(\Theta(x),\Theta(y))<\delta \\ |x-y|<\frac{\pi}{2}}} |\det \Theta'(y)| dy\, d\nu(\Theta(x)) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Pi'} \int\limits_{\substack{d(\Theta(x),\Theta(y))<\delta \\ |x-y|<\frac{\pi}{2}}} |\det \Theta'(y)| d\nu(\Theta(x))\, dy =$$

$$= 2^{2n-1} \int\limits_\Pi \int\limits_{\substack{d(\Theta(x),\Theta(y))<\delta \\ |x-y|<\frac{\pi}{2}}} |\det \Theta'(y)| d\nu(\Theta(x))\, dy =$$

$$= 2^{2n-1} \int\limits_S \int\limits_{D(t,\delta)} d\nu(\xi)\, d\sigma(t) = 2^{2n-1} \int\limits_S \nu(D(t,\delta)) d\sigma(t).$$

Підставляючи цю оцінку в (2.13), ми отримаємо твердження леми у випадку $p = 1$ з $N = c2^{2n-1}$. Зазначимо, що умова $|x-y| < \frac{\pi}{2}$ забезпечує однозначну відповідність між $\Theta(y)$ і y.

Тепер нехай $p > 1$. Ми визначимо міру ν_1, рівністю

$$d\nu_1(\xi) = \nu^{p-1}(D(\xi,\delta)) d\nu(\xi),\ \xi \in S.$$

Тоді використовуючи твердження леми для $p = 1$ отримаємо

$$\int_S \nu^{p-1}(D(\xi,\delta)) d\nu(\xi) = \int_S d\nu_1(\xi) \leq 2^{2n-1} c \int_S \frac{\nu_1(D(t,\delta))}{\delta^{2n}} d\sigma(t) =$$

$$= \frac{2^{2n-1}c}{\delta^{2n}} \int_S \left(\int_{D(t,\delta)} \nu^{p-1}(D(\xi,\delta)) d\nu(\xi) \right) d\sigma(t) \le$$
$$\le \frac{2^{2n-1}c}{\delta^{2n}} \int_S \nu^{p-1}(D(t,2\delta))\nu(D(t,\delta)) d\sigma(t) \le$$
$$\le \frac{2^{2n-1}c}{\delta^{2n}} \int_S \nu^{p}(D(t,2\delta)) d\sigma(t). \qquad (2.14)$$

Нехай $\{t_1,\ldots,t_N\} \subset S$ — скінченна δ-сітка для $D(e_1,2\delta)$ де $e_1 = (1,0,\ldots,0)$ і N залежить лише від n, тобто

$$\bigcup_{k=1}^{N} D(t_k,\delta) \supset D(e_1,2\delta).$$

Тоді t_k можна записати в вигляді $t_k = \tau_k(e_1)$, де $\tau_k \in U(n)$, $k \in \{1,\ldots,N\}$ — деякі унітарні перетворення $\mathbb{C}^n$. Враховуючи, що міра σ є інваріантною відносно елементів $U(n)$ та використовуючи нерівність Мінковського, вірні наступні нерівності

$$\int\limits_S \nu^p(D(t,2\delta))d\sigma(t) \le \int\limits_S \nu^p\left(\bigcup_{k=1}^{N} D(\tau_k(t),\delta)\right) d\sigma(t) \le$$
$$\le \int\limits_S \left(\sum_{k=1}^{N} \nu(D(\tau_k(t),\delta))\right)^p d\sigma(t) \le N^{p-1}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_S \nu^p\left(D(\tau_k(t),\delta)\right)d\sigma(t) =$$
$$= N^{p-1}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_S \nu^p\left(D(t,\delta)\right)d\sigma(t) = N^p \int\limits_S \nu^p(D(t,\delta))d\sigma(t).$$

Врахувавши (2.14) ми отримаємо твердження леми. □

Визначимо для $a,b \in \bar{B}$ неізотропну метрику на S рівністю ([35, розд.5.1])

$$d(a,b) = |1 - \langle a,b\rangle|^{1/2}.$$

Для $\xi \in S$ і $\delta > 0$ ми позначимо

$$C(\xi,\delta) = \{z \in B : d(z,\xi) < \delta^{1/2}\}, \quad D(\xi,\delta) = \{z \in B : d(z,\xi) < \delta\},$$

і

$$d\lambda(z) = (1-|z|)^n d\mu(z), \text{ тобто } \lambda(E) = \int_E (1-|z|)^n d\mu(z),$$

де E — борелева підмножина B.

Лема 2.2. *Нехай* $p \geq 1,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, *тоді*

$$\int\limits_S \Bigg| \int\limits_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} G(z,w)d\mu(w)\Bigg|^p d\sigma(\xi) \leq$$

$$\leq c(p,n) \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\left(r\eta\right)\right) \int\limits_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}} d\mu(w),$$

де $\tilde{K}(z) := \left\{w \in B : |r-|w|| \leq \frac{2}{3}(1-r), d(\xi,\eta) \leq 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}}\right\}$.

Доведення. За означенням функції $G(z,w)$

$$0 \leq u_1(z) = \int_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} G(z,w)d\mu(w) = \int_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} g(\varphi_w(z))d\mu(w).$$

З (2.12) отримаємо $g(z) \leq c|z|^{-2n+2}$ для $|z| \leq \frac{1}{4}$ і деякої додатної сталої c. Отже,

$$|u_1(z)| \leq c\int_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} |\varphi_w(z)|^{-2n+2} d\mu(w).$$

Нехай $z = r\xi$, де $r = |z|$, $\frac{1}{2} < r < 1$ і $w = |w|\eta,\ \xi,\eta \in S$. Позначимо

$$K(z,\sigma_1,\sigma_2) = \{w \in B : |r-|w|| \leq \sigma_1, d(\xi,\eta) \leq \sigma_2\}.$$

Тепер доведемо включення

$$B^*\left(z,\frac{1}{4}\right) = \left\{w \in B : |\varphi_w(z)| < \frac{1}{4}\right\} \subset K\left(z, c_1(1-r), c_2(1-r)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{2.15}$$

де c_1, c_2 — додатні константи. Оскільки для автоморфізму φ_w виконується рівність ([42, с.11])

$$1 - |\varphi_w(z)|^2 = \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,w\rangle|^2}, \quad w \in B, z \in \bar{B}, \tag{2.16}$$

то для $w \in B^*(z, \frac{1}{4})$

$$\left(1 - \frac{(1-|w|^2)(1-r^2)}{|1-\langle z,w\rangle|^2}\right)^{\frac{1}{2}} = |\varphi_w(z)| < \frac{1}{4}, \tag{2.17}$$

$$A(z) := \Big\{ w \in B : \left(1 - \frac{(1-|w|^2)(1-r^2)}{(1-r|w|)^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{4} \Big\} \supset B^*\Big(z, \frac{1}{4}\Big).$$

Щоб знайти c_1 достатньо перевірити, що

$$\partial A(z) \subset \overline{K}(z, c_1(1-r), c_2(1-r)^{\frac{1}{2}}).$$

Для $w \in \partial A(z)$ виконується рівність

$$\frac{1-r^2-|w|^2+|w|^2r^2}{1-2r|w|+r^2|w|^2} = \frac{15}{16},$$

тобто

$$|w|^2(r^2-16) + |w|30r + 1 - 16r^2 = 0.$$

Звідси

$$|w_1| = \frac{4r+1}{r+4}, \ |w_2| = \frac{4r-1}{4-r}.$$

Тому, враховуючи, що $r \in \big(\frac{1}{2}, 1\big)$,

$$|r-|w_1|| = |w_1| - r = \frac{1+r}{r+4}(1-r) < \frac{2}{5}(1-r),$$
$$|r-|w_2|| = r - |w_2| = \frac{1+r}{4-r}(1-r) < \frac{2}{3}(1-r).$$

Отже,

$$|r-|w|| < \frac{2}{3}(1-r) \ \text{ для } w \in B^*\left(z, \frac{1}{4}\right).$$

Тоді, щоб знайти c_2 ми оцінимо

$$d^2(\xi,\eta) = |1-\langle\xi,\eta\rangle| < \frac{1}{r|w|}|1-r|w|\langle\xi,\eta\rangle| <$$
$$< \frac{1}{r|w|}\left(\frac{16}{15}(1-|w|^2)(1-r^2)\right)^{\frac{1}{2}} <$$
$$< \frac{1}{r\left(-2/3+5r/3\right)}\left(\frac{16}{15}\left(1-\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}r\right)^2\right)(1-r^2)\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}r(5r-2)}\left((5r+1)(1+r)\right)^{\frac{1}{2}}(1-r) < 32(1-r),$$

де $\frac{1}{2} < r < 1$. Отже, (2.15) виконується при $c_1 = \frac{2}{3}$ та $c_2 = 4\sqrt{2}$. Позначимо

$$K(z) := K\left(z, \frac{2}{3}(1-r), 4\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}}\right),$$
$$\tilde{K}(z) := K\left(z, \frac{2}{3}(1-r), 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}}\right).$$

З нерівності Гельдера та включення (2.15) випливає

$$I_1 := \int_S |u_1(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \le$$
$$\le c\int\limits_S \left(\int\limits_{B^*\left(r\xi,\frac{1}{4}\right)} |\varphi_w(r\xi)|^{-2n+2} d\mu(w)\right)^p d\sigma(\xi) \le$$
$$\le c\int\limits_S \int\limits_{B^*\left(r\xi,\frac{1}{4}\right)} |\varphi_w(r\xi)|^{-p(2n-2)} d\mu(w)\mu^{p-1}\left(B^*\left(r\xi,\frac{1}{4}\right)\right) d\sigma(\xi) \le$$
$$\le c\int\limits_S \int\limits_{K(r\xi)} \frac{d\mu(w)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}}\mu^{p-1}\left(K\left(r\xi\right)\right) d\sigma(\xi) \le$$
$$\le c\int\limits_S \int\limits_{K(r\xi)} \frac{\mu^{p-1}\left(\tilde{K}\left(r\eta\right)\right)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}} d\mu(|w|\eta) d\sigma(\xi)$$

де $c = c(p)$. Тоді, застосовуючи теорему Фубіні (як в доведенні леми 2.1) ми отримаємо ($z = r\xi$, $w = |w|\eta$)

$$I_1 \le c(n,p) \int\limits_{\substack{\eta \in S \\ ||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)}} \int\limits_{d(\xi,\eta)<4\sqrt{2}(1-r)^{1/2}} \frac{\mu^{p-1}\left(\tilde{K}\,(r\eta)\right)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}} d\sigma(\xi)\, d\mu(|w|\eta) \le$$

$$\le c(n,p) \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\,(r\eta)\right) \int\limits_{S} \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}} d\mu(w). \qquad (2.18)$$

$\square$

Нам потрібно оцінити p-ті значення функції Гріна для $0 < p \le 1$. Аналогічні оцінки для $p > 1$ опубліковані Столом ([40, лема 5]). Хоча його доведення не працює для $p \le 1$, ми все ж використаємо деякі ідеї та позначення з [40]. Наступне твердження доповнює лему B при $p \le 1$.

Пригадаємо, що

$$B^*\Big(z,\delta\Big) = \Big\{w \in B : |\varphi_w(z)| < \delta\Big\},\ \delta \in (0,1).$$

Для $0 < r < 1$ і $0 < \delta < \frac{1}{2}$ позначимо

$$E(r) = \bigcup_{t \in S} B^*(rt,\delta).$$

Твердження 2.2. *Нехай $0 < p \le 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує $r_0 \in (0,1)$ таке, що для всіх $r \in (r_0,1)$ і $w \in E(r)$*

$$m_p(G(\cdot,w),r) \asymp (1-r^2)^{n/p},$$

якщо $p \in (0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2(n-1)}\right\}$ та

$$m_p(G(\cdot,w),r) = O\left((1-r^2)^{n/p}\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^{1/p}\right),$$

якщо $p = \frac{1}{2(n-1)},\ n > 1$.

Доведення. Нехай $w \in E(r), |w| = \rho$. Оскільки міра σ інваріантна відносно групи унітарних перетворень $\mathbb{C}^n$ та згідно з рівністю (2.16)

$$1 - |\varphi_w(z)|^2 = \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z, w\rangle|^2},$$

отримаємо

$$\int_S g(\varphi_w(rt))^p d\sigma(t) = \int_S g(\varphi_{\rho e}(rt))^p d\sigma(t) = \int_S g(\varphi_{re}(\rho t))^p d\sigma(t),$$

де $e = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$.

Для $0 < r, \rho < 1$ та фіксованого $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, нехай

$$N_r^\rho = \{t \in S : \rho t \in B^*(re, \delta)\}.$$

Для $t \in S \setminus N_r^\rho$, міркуючи так само, як в [40, с.491], ми отримаємо з леми A та рівності (2.16)

$$\int_S g(\varphi_{re}(\rho t))^p d\sigma(t) \le c(\delta) \int_S (1 - |\varphi_{re}(\rho t)|^2)^{pn} d\sigma(t) =$$
$$= c(\delta)(1-r^2)^{pn}(1-\rho^2)^{pn} \int_S |1 - r\rho t_1|^{-2pn} d\sigma(t).$$

З [38, твердж. 2] випливає, що

$$\int_S g(\varphi_{re}(\rho t))^p d\sigma(t) \le c(1-\rho^2)^{pn}(1-r^2)^{-n(p-1)} \le c(1-r^2)^n. \quad (2.19)$$

Для $c > 0$, означимо множини

$$\Omega_r^c = \{se^{i\theta} : 0 < 1 - s < c(1-r^2), |\theta| < c(1-r^2)\}$$

і

$$Q_r^c = \{t = (t_1, \dots, t_n) \in S : t_1 \in \Omega_r^c\}.$$

За означенням N_r^ρ, виконується нерівність $|\varphi_{re}(\rho t)| < \delta$ для $t \in N_r^\rho$. Тому з (2.12) та (2.17) маємо

$$g(\varphi_{re}(\rho t)) \asymp |\varphi_{re}(\rho t)|^{-2(n-1)} = c\frac{|1 - r\rho t_1|^{2(n-1)}}{(|1 - r\rho t_1|^2 - (1 - r^2)(1 - \rho^2))^{n-1}}, \tag{2.20}$$

де $c = c(n)$.

Відомо, що ([40, лема 3]) існує $c_3 = c_3(\delta)$ та $r(\delta)$ такі, що $N_r^\rho \subset Q_r^{c_3}$ для всіх ρ таких, що $\rho e \in B^*(re, \delta)$, і всіх $r > r(\delta)$. Можемо вважати, що $c_3 < \pi$. Більше того, згідно з умовами леми, ми можемо вибрати $r_0 = r_0(\frac{1}{2}) \in (0, 1)$ таке, що включення вірне для всіх $r \in (r_0, 1)$ та $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$.

Справді, з (2.17) випливає, що $\rho t \in B^*(re, \delta)$ тоді і тільки тоді, коли

$$(1 - r^2)(1 - \rho^2) > (1 - \delta^2)|1 - r\rho t_1|^2,$$

тобто,

$$|1 - r\rho t_1|^2 \leq \frac{1}{1 - \delta^2}(1 - r^2)(1 - \rho^2) \leq \frac{4}{3}(1 - r^2)(1 - \rho^2),\ 0 < \delta \leq \frac{1}{2}.$$

Оскільки $t \in N_r^\rho$, використовуючи попередню нерівність та (2.20), отримаємо

$$\int\limits_{N_r^\rho} g(\varphi_{re}(\rho t))^p d\sigma(t) \leq c(1 - r^2)^{p(n-1)}(1 - \rho^2)^{p(n-1)} \times$$
$$\times \int\limits_{Q_r^{c_3}} \left(|1 - r\rho t_1|^2 - (1 - r^2)(1 - \rho^2)\right)^{-p(n-1)} d\sigma(t) =:$$
$$=: c(1 - r^2)^{p(n-1)}(1 - \rho^2)^{p(n-1)} I_r. \tag{2.21}$$

Оскільки ([40, с.488])

$$|1-r\rho s e^{i\theta}|^2-(1-r^2)(1-\rho^2)= \tag{2.22}$$
$$=(\rho-r)^2+2\rho r(1-s)-r^2\rho^2(1-s^2)+4r\rho s\sin^2\frac{\theta}{2}\geq$$
$$\geq(r-\rho)^2+(1-s)(1-r)+\frac{\theta^2}{\pi^2},\quad \min\{\rho r,s\}\geq\frac{1}{2}.$$

Використовуючи формулу ([35])

$$\int\limits_S f(\langle\xi,\eta\rangle)d\sigma(\xi)=\frac{n-1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-s^2)^{n-2}f(se^{i\theta})sdsd\theta,\ \eta\in S, \tag{2.23}$$

для

$$f(se^{i\theta})=\left(|1-r\rho s e^{i\theta}|^2-(1-r^2)(1-\rho^2)\right)^{-p(n-1)},$$

отримаємо

$$I_r=c(n)\iint\limits_{\Omega_r^{c_3}}\frac{(1-s^2)^{n-2}sdsd\theta}{\left(|1-r\rho s e^{i\theta}|^2-(1-r^2)(1-\rho^2)\right)^{p(n-1)}}\leq$$
$$\leq c\int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1}\left[\int\limits_0^{c_3(1-r^2)}\frac{(1-s)^{n-2}}{\left((r-\rho)^2+(1-s)(1-r)+\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)^{p(n-1)}}d\theta\right]ds.$$

Отже,

$$I_r\leq c\int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1}(1-s)^{n-2}\left[\int\limits_0^{\pi\sqrt{(1-s)(1-r)}}\left((1-s)(1-r)+\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)^{-p(n-1)}d\theta+\right.$$
$$\left.+\left|\int\limits_{\pi\sqrt{(1-s)(1-r)}}^{c_3(1-r^2)}\left((1-s)(1-r)+\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)^{-p(n-1)}d\theta\right|\right]ds\leq$$
$$\leq c\int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1}(1-s)^{n-2}\left[\int\limits_0^{\pi\sqrt{(1-s)(1-r)}}((1-s)(1-r))^{-p(n-1)}d\theta+\right.$$

$$+\left|\int\limits_{\pi\sqrt{(1-s)(1-r)}}^{c_3(1-r^2)} \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^{-2p(n-1)} d\theta\right|\Bigg] ds.$$

Розглянемо три випадки. Спочатку, нехай $0 < p < \frac{1}{2(n-1)}$.

Інтегруючи, отримаємо для

$$0 \le 1-s \le c_3(1-r^2),\; p \in (0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2(n-1)}\right\}$$

$$\left|\int\limits_{\pi\sqrt{(1-s)(1-r)}}^{c_3(1-r^2)} \theta^{-2p(n-1)} d\theta\right| = \frac{1}{-2p(n-1)+1}\Big|(c_3(1-r^2))^{-2p(n-1)+1} -$$

$$-(\pi\sqrt{(1-s)(1-r)})^{-2p(n-1)+1}\Big| \le$$

$$\le \frac{(1-r)^{1-2p(n-1)}}{-2p(n-1)+1}\Big((c_3(1+r))^{-2p(n-1)+1} + (\pi(1+r))^{-p(n-1)+1/2}\Big) \le$$

$$\le c(1-r)^{1-2p(n-1)}.$$

Оскільки $0 < 1-s < 2c_2(1-r)$, ми отримаємо

$$I_r \le c \int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1} (1-s)^{n-2}\Big[\pi\left((1-s)(1-r)\right)^{-p(n-1)+1/2} +$$

$$+c(1-r)^{1-2p(n-1)}\Big] ds \le c \int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1} (1-s)^{n-2}(1-r)^{1-2p(n-1)} ds \le$$

$$\le c(1-r^2)^{n-2p(n-1)}.$$

Тепер, нехай $1 > p > \frac{1}{2(n-1)}$. Тоді

$$I_r \le c \int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1} (1-s)^{n-2}\Big[\left((1-s)(1-r)\right)^{-p(n-1)+1/2} +$$

$$+\left|2c_3(1-r)^{1-2p(n-1)} - c\left((1-s)(1-r)\right)^{-p(n-1)+1/2}\right|\Big]ds \le$$

$$\le c \int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1} (1-s)^{n-2}\Big[\left((1-s)(1-r)\right)^{-p(n-1)+1/2} +$$

$$+c(1-r)^{1-2p(n-1)}\Big]ds \le$$

$$\le c \int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1} (1-s)^{n-2}\Big[\left((1-s)(1-r)\right)^{-p(n-1)+\frac{1}{2}} +$$

$$+c(1-r)^{1-2p(n-1)}\Big]ds \le c \int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1} \Big((1-s)^{n-\frac{3}{2}-p(n-1)}(1-r)^{\frac{1}{2}-p(n-1)} +$$

$$+(1-s)^{n-2}(1-r)^{1-2p(n-1)}\Big)ds \le c(1-r^2)^{n-2p(n-1)}.$$

І в останньому випадку, якщо $p = \frac{1}{2(n-1)}$, $n > 1$, то

$$\left|\int\limits_{\pi\sqrt{(1-s)(1-r)}}^{c_3(1-r^2)} \theta^{-2p(n-1)} d\theta\right| = \left|\ln\frac{c_3(1-r^2)}{\pi\sqrt{(1-s)(1-r)}}\right| \le c\left|\ln\frac{1-r}{1-s}\right|.$$

Тому

$$I_r \le c \int\limits_{1-c_3(1-r^2)}^{1} (1-s)^{n-2}\left(1+\left|\ln\frac{1-s}{1-r}\right|\right) ds \le c(1-r^2)^{n-1}\ln\frac{1}{1-r}.$$

Отож, з останніх нерівностей, (2.19) та (2.21) ми отримаємо

$$m_p(G(\cdot,w),r) \le c[(1-r^2)^{p(n-1)}(1-\rho^2)^{p(n-1)}(1-r^2)^{n-2p(n-1)}]^{1/p} =$$
$$= c\frac{(1-\rho^2)^{n-1}}{(1-r^2)^{n-1-n/p}} \le c(n,p)(1-r^2)^{n/p}, \quad p \ne \frac{1}{2(n-1)},$$

і

$$m_p(G(\cdot,w),r) \le c\left(\left((1-r^2)(1-\rho^2)\right)^{\frac{1}{2}}(1-r^2)^{n-1}\ln\frac{1}{1-r}\right)^{1/p} \le$$

$$\leq c(n)(1-r^2)^{n/p}\ln^{1/p}\frac{1}{1-r}, \quad p=\frac{1}{2(n-1)}.$$

Оцінка зверху доведена. Тепер доведемо оцінку знизу. З (2.20) ми маємо

$$\int_S g(\varphi_{re}(\rho t))^p d\sigma(t) \geq c\int_{Q_r^c} |\varphi_{re}(\rho t)|^{-2p(n-1)} d\sigma(t) =$$

$$= c\int_{Q_r^c} \frac{|1-r\rho t_1|^{2p(n-1)}}{\left(|1-r\rho t_1|^2-(1-r^2)(1-\rho^2)\right)^{p(n-1)}} d\sigma(t) \geq$$

$$\geq c\int_{Q_r^c} \frac{(1-r\rho)^{2p(n-1)}}{\left(|1-r\rho t_1|^2-(1-r^2)(1-\rho^2)\right)^{p(n-1)}} d\sigma(t).$$

З рівності (2.22) випливає

$$|1-r\rho s e^{i\theta}|^2-(1-r^2)(1-\rho^2) \leq$$

$$\leq (r-\rho)^2+2r\rho(1-s)-r^2\rho^2(1-s^2)+r\rho s\theta^2=$$

$$=(r-\rho)^2+(1-s)(r\rho-r^2\rho^2+r\rho-r^2\rho^2 s)+\theta^2 \leq$$

$$\leq (r-\rho)^2+2(1-s)(1-r\rho s)+\theta^2 \leq \tilde{c}_2(1-r)^2, \quad se^{i\theta}\in Q_r^c.$$

Користуючись формулою (2.23), отримаємо для $r>r_0$

$$\int_S g(\varphi_{re}(\rho t))^p d\sigma(t) \geq c|1-r\rho|^{2p(n-1)}\times$$

$$\times \int\limits_{1-c(1-r^2)}^{1} \left[\int\limits_0^{c(1-r^2)} \frac{(1-s^2)^{n-2} s d\theta}{\left(|1-r\rho s e^{i\theta}|^2-(1-r^2)(1-\rho^2)\right)^{p(n-1)}}\right] ds \geq$$

$$\geq c(1-r)^{2p(n-1)} \int\limits_{1-c(1-r^2)}^{1} \left[\int\limits_0^{c(1-r^2)} (1-s^2)^{n-2}(1-r)^{-2p(n-1)} s d\theta\right] ds =$$

$$=\frac{c(1-r)}{2(n-1)}\left(1-\left(1-c(1-r^2)\right)^2\right)^{n-1} = c(1-r)^n\left(2-c(1-r^2)\right)^{n-1} >$$

$$> c(1-r)^n.$$

Отже,

$$m_p(G(\cdot,w),r) \geq c(1-r^2)^{n/p}.$$

Доведення твердження завершене. $\square$

2.1.2. Доведення теорем

Доведення теореми 2.1. Достатність. Нехай

$$B^*\Big(z,\frac{1}{4}\Big) = \Big\{w \in B : |\varphi_w(z)| < \frac{1}{4}\Big\}.$$

Оцінимо абсолютні величини

$$u_1(z) := \int\limits_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} G(z,w)d\mu(w) \;\text{ і }\; u_2(z) := \int\limits_{B\setminus B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} G(z,w)d\mu(w).$$

Ми почнемо з u_1.

Далі нам буде потрібна наступна лема, яка доведена в [40].

Лема B. *Нехай* $1 < p < \frac{2n-1}{2n-3}$ *і* $r > r(\delta)$. *Тоді для всіх* $w \in \bigcup_{t\in S} B^*(rt,\delta)$ *виконується*

$$\frac{(1-r^2)^{n-\frac{n}{p}}}{(1-|w|^2)^n} m_p(G(\cdot,w),r) \leq$$

$$\leq \begin{cases} c(n,p,\delta), & 1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}; \\ c(n,p,\delta)\log\left(c(\delta)\frac{1-r^2}{||w|-r|}\right), & p = \frac{2n-1}{2(n-1)}; \\ c(n,p,\delta)\left(\frac{1-r^2}{||w|-r|}\right)^{\beta-1}, & \frac{2n-1}{2(n-1)} < p < \frac{2n-1}{2n-3}, \end{cases} \tag{2.24}$$

де $\beta = \frac{2n-1}{1-1/p}$.

Користуючись почергово (2.17), (2.12) та лемою B ([40]), ми отримаємо, що для $1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$

$$\int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}} = \int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_{r\xi}(w)|^{p(2n-2)}} \le c\int_S g^p(\varphi_{r\xi}(w))d\sigma(\xi) =$$
$$= c(m_p(G(\cdot,w),r))^p \le \frac{c(1-|w|^2)^{np}}{(1-r^2)^{n(p-1)}}, \quad \frac{1}{2} < r < 1.$$

З леми 2.2 та попередньої оцінки інтегралу, маємо

$$I_1 := \int_S |u_1(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \le$$
$$\le c \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\,(r\eta)\right) \int\limits_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}} d\mu(w) \le$$
$$\le c \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \frac{(1-|w|^2)^{np}}{(1-r^2)^{n(p-1)}} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\,(r\eta)\right) d\mu(|w|\eta) \le$$
$$\le c(1-r)^n \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\,(r\eta)\right) d\mu(|w|\eta). \tag{2.25}$$

У випадку $p=1$, послідовно застосовуючи (2.17), (2.12) та твердження 2.1, ми отримаємо

$$\int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_w(r\xi)|^{2n-2}} = \int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_{r\xi}(w)|^{2n-2}}$$
$$\le \int_S g(\varphi_{r\xi}(w))d\sigma(\xi) \le c(1-r^2)^n, \quad \frac{1}{2} < r < 1.$$

З останньої нерівності та леми 2.2, для $p=1$ маємо

$$I_1 \le \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \int\limits_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_w(r\xi)|^{2n-2}} d\mu(w) \le c(1-r)^n \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} d\mu(|w|\eta).$$

Для того щоб отримати остаточну оцінку I_1, для фіксованого $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, ми визначимо міру ν_1 на кулях $\{D(\eta,t) : \eta \in S, t > 0\}$ наступним чином

$$\nu_1(D(\eta,t)) = \lambda\Big(\Big\{\rho\zeta \in B : |\rho - r| < \frac{2}{3}(1-r), d(\zeta,\eta) < t\Big\}\Big).$$

Ця міра може бути продовжена на сім'ю всіх борелевих множин на B стандартним шляхом ([49, с.69]). З означення міри

$$d\lambda(z) = (1-|z|)^n d\mu(z),$$

випливає, що

$$\nu_1(D(\eta,t)) \asymp (1-r)^n \mu\Big(\Big\{\rho\zeta \in B : |\rho - r| < \frac{2}{3}(1-r), d(\zeta,\eta) < t\Big\}\Big).$$

Використовуючи (2.25) та лему 2.1, ми отримаємо

$$\begin{aligned} I_1 \le & \frac{c}{(1-r)^{n(p-1)}} \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \lambda^{p-1}\left(\tilde{K}\left(r\eta\right)\right) d\lambda(|w|\eta) = \\ = & \frac{c}{(1-r)^{n(p-1)}} \int_S \nu_1^{p-1}\left(D(\eta, 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}})\right) d\nu_1(\eta) \le \\ \le & \frac{cN^p}{(128)^n(1-r)^{np}} \int_S \nu_1^{p}\left(D(\eta, 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}})\right) d\sigma(\eta) = \\ = & \frac{c(n,p)}{(1-r)^{np}} \int_S \lambda^p\left(\tilde{K}(r\eta)\right) d\sigma(\eta). \end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо $\rho\zeta \in \tilde{K}(r\eta)$, то

$$|1 - \langle\rho\zeta,\eta\rangle| \le |1-\langle\zeta,\eta\rangle| + (1-\rho)\,|\langle\zeta,\eta\rangle| \le c(1-r). \tag{2.26}$$

Тому, за припущенням теореми,

$$\begin{aligned} I_1 \le c(1-r)^{-np} \int_S \lambda^p\left(C(\eta, c(1-r))\right) d\sigma(\eta) \le \\ \le c(1-r)^{p(\gamma-n)}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Тепер оцінимо

$$u_2(z) = \int_B G(z,w)(1-|w|)^{-n} d\tilde{\lambda}(w)$$

де

$$d\tilde{\lambda}(w) = (1-|w|)^n \chi_{B\setminus B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)}(w) d\mu(w),$$

χ_E – характеристична функція множини E. Оскільки ми доводимо співвідношення для $|z| \uparrow 1$, можемо припустити, що $|z| \geq \frac{1}{2}$.

Визначимо сім'ю множин

$$E_k = E_k(z) = \left\{ w \in B : \left| 1 - \left\langle \frac{z}{|z|}, w \right\rangle \right| < 2^{k+1}(1-|z|) \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки

$$|1 - \langle z, w\rangle| \geq \frac{1}{2} \left| 1 - \left\langle \frac{z}{|z|}, w \right\rangle \right|,$$

для $w \in E_{k+1} \setminus E_k$ виконується нерівність

$$|1 - \langle z, w\rangle| \geq 2^{k-1}(1-|z|).$$

Поєднавши лему А з нерівністю (2.17) для $z \in B$ таких, що $|z| \geq \frac{1}{2}$, ми отримаємо

$$0 \leq G(z,w) \leq c \left(\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z, w\rangle|^2} \right)^n.$$

Тому

$$|u_2(z)| \leq c \int\limits_B \left(\frac{(1+|w|)(1-|z|^2)}{|1-\langle z, w\rangle|^2} \right)^n d\tilde{\lambda}(w) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} c \int\limits_{E_{k+1}\setminus E_k} \left(\frac{(1+|w|)(1-|z|^2)}{2^{2(k-1)}(1-|z|)^2} \right)^n d\tilde{\lambda}(w) +$$

$$+c\int\limits_{E_1}\left(\frac{(1+|w|)(1-|z|^2)}{(1-|z|)^2}\right)^n d\tilde{\lambda}(w)\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{E_{k+1}\setminus E_k}\frac{4^n c}{\left(2^{2(k-1)}(1-|z|)\right)^n}d\tilde{\lambda}(w)+\int\limits_{E_1}\frac{4^n}{(1-|z|)^n}d\tilde{\lambda}(w)\le$$

$$\le\frac{4^n c}{(1-|z|)^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}\left(E_{k+1}\right)}{2^{2n(k-1)}}+\tilde{\lambda}\left(E_1\right)\right)\le\frac{4^n c}{(1-|z|)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}\left(E_k\right)}{2^{2n(k-2)}}. \quad (2.28)$$

У випадку $p=1$ маємо

$$\int\limits_S|u_2(r\xi)|d\sigma(\xi)\le\frac{c}{(1-r)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_S\frac{\tilde{\lambda}\left(E_k(r\xi)\right)}{2^{2n(k-2)}}d\sigma(\xi)=$$

$$=\frac{c}{(1-r)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n(k-2)}}\int\limits_S\tilde{\lambda}\left(C\left(\xi,2^{k+1}(1-r)\right)\right)d\sigma(\xi)\le$$

$$\le\frac{c}{(1-r)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{\gamma(k+1)}(1-r)^{\gamma}}{2^{2n(k-2)}}=\frac{c}{(1-r)^n}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(\gamma-2n)}=$$

$$=\frac{c}{(1-r)^{n-\gamma}}\frac{2^{\gamma-2np}}{1-2^{\gamma-2n}}=\frac{c(n,\gamma)}{(1-r)^{n-\gamma}}.$$

Доведення достатності для $p=1$ завершене.

При $1<p<\frac{2n-1}{2(n-1)}$ зафіксуємо будь-яке число $\alpha\in(\frac{\gamma}{n},2)$. З нерівності Гельдера і (2.28) випливає ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

$$|u_2(z)|^p\le\frac{4^{np}c^p}{(1-|z|)^{np}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k\right)}{2^{\alpha np(k-2)}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(2-\alpha)nq(k-2)}}\right)^{p/q}=$$

$$=\frac{4^{np}c^p}{(1-|z|)^{np}}\frac{2^{4np}}{\left(2^{(2-\alpha)nq}-1\right)^{p/q}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k\right)}{2^{\alpha npk}}=$$

$$=\frac{c(n,p,\alpha)}{(1-|z|)^{np}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k\right)}{2^{\alpha npk}}. \quad (2.29)$$

За припущенням теореми

$$\int_S\tilde{\lambda}^p(C(\xi,2^{k+1}(1-r)))d\sigma(\xi)\le c(2^{k+1}(1-r))^{\gamma p}.$$

Отже, враховуючи вибір α та означення $E_k(z)$, виводимо

$$\int_S |u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \le \frac{c}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_S \frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k(r\xi)\right)}{2^{\alpha npk}} d\sigma(\xi) =$$

$$= \frac{c}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha npk}} \int_S \tilde{\lambda}^p\left(C\left(\xi, 2^{k+1}(1-r)\right)\right) d\sigma(\xi) \le$$

$$\le \frac{c}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{p\gamma(k+1)}(1-r)^{\gamma p}}{2^{\alpha npk}} =$$

$$= \frac{c}{(1-r)^{p(n-\gamma)}} \frac{2^{p\gamma}}{2^{p(\alpha n-\gamma)}-1} = \frac{c(n,p,\gamma)}{(1-r)^{p(n-\gamma)}}.$$

Остання нерівність разом з (2.27) завершує доведення достатності у випадку $p > 1$.

Необхідність. Нехай $p > 0$. З леми A маємо

$$G_\mu(r\xi) = \int_B g(\varphi_w(r\xi)) d\mu(w) \ge \int_B \frac{(n+1)(1-|w|^2)^n(1-r^2)^n}{4n^2|1-\langle r\xi, w\rangle|^{2n}} d\mu(w) \ge$$

$$\ge \int_{C(\xi,1-r)} \frac{(n+1)(1-|w|^2)^n(1-r^2)^n}{4n^2|1-\langle r\xi, w\rangle|^{2n}} d\mu(w) =$$

$$= \int_{C(\xi,1-r)} \frac{(n+1)(1+|w|)^n(1-r^2)^n}{4n^2|1-\langle r\xi, w\rangle|^{2n}} d\lambda(w). \tag{2.30}$$

Оскільки для $w \in C(\xi, 1-r)$ виконується

$$|1-\langle z, w\rangle| \le \left|1-\left\langle \frac{z}{|z|}, w\right\rangle\right| + \left|\left\langle \frac{z}{|z|} - z, w\right\rangle\right| \le 2(1-|z|),$$

то

$$|G_\mu(r\xi)| \ge \frac{n+1}{4^{n+1}n^2} \frac{\lambda(C(\xi,1-r))}{(1-r)^n}. \tag{2.31}$$

З припущення теореми випливає, що

$$\left(\frac{n+1}{2^{2(n+1)}n^2}\right)^p \int_S \frac{\lambda^p(C(\xi,1-r))}{(1-r)^{np}} d\sigma(\xi) \le$$

$$\leq \int_S |G_\mu(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leq c^p (1-r)^{p(\gamma-n)}.$$

Отже,

$$\int_S \lambda^p(C(\xi, 1-r)) d\sigma(\xi) \leq c^p (1-r)^{p\gamma}, \quad 0 < r < 1.$$

$\square$

Доведення теореми 2.2. Доведення *необхідності* дослівно повторює доведення необхідності теореми 2.1. З леми А виводимо (2.30)

$$G_\mu(r\xi) \geq \int_{C(\xi,1-r)} \frac{(n+1)(1+|w|)^n(1-r^2)^n}{4n^2|1-\langle r\xi, w\rangle|^{2n}} d\lambda(w).$$

Використовуючи оцінку (2.31) і припущення теореми, виводимо

$$\left(\frac{n+1}{2^{2(n+1)}n^2}\right)^p \int_S \frac{\lambda^p(C(\xi,1-r))}{(1-r)^{np}} d\sigma(\xi) \leq$$
$$\leq \int_S |G_\mu(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leq o(1)(1-r)^{p(\gamma-n)}.$$

Отже,

$$\int_S \lambda^p(C(\xi, 1-r)) d\sigma(\xi) \leq o(1)(1-r)^{p\gamma}, \quad 0 < r < 1.$$

У *достатності* частина, де оцінюється u_1 є дуже схожою до попереднього доведення, тому ми будемо користуватися позначеннями, введеними в доведенні достатності теореми 2.1.

За лемою 2.3 маємо

$$I_1 \leq c(p,n) \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\left(r\eta\right)\right) \int\limits_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}} d\mu(w).$$

Користуючись почергово (2.17), (2.12) та лемою B, ми отримаємо, що для $1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$

$$\int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}} = \int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_{r\xi}(w)|^{p(2n-2)}} \leq$$
$$\leq \int_S g^p(\varphi_{r\xi}(w))d\sigma(\xi) \leq \frac{c(1-|w|^2)^{np}}{(1-r^2)^{n(p-1)}}, \quad \frac{1}{2} < r < 1.$$

Підставивши оцінку інтегралу в (2.18), маємо

$$I_1 \leq c \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \frac{(1-|w|^2)^{np}}{(1-r^2)^{n(p-1)}} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\left(r\eta\right)\right) d\mu(|w|\eta) \leq$$
$$\leq c(1-r)^n \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\left(r\eta\right)\right) d\mu(|w|\eta). \tag{2.32}$$

Використовуючи (2.32) та лему 2.1, ми отримаємо

$$I_1 \leq \frac{c}{(1-r)^{n(p-1)}} \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \lambda^{p-1}\left(\tilde{K}\left(r\eta\right)\right) d\lambda(|w|\eta) =$$
$$= \frac{c}{(1-r)^{n(p-1)}} \int_S \nu_1^{p-1}\left(D(\eta, 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}})\right) d\nu_1(\eta) \leq$$
$$\leq \frac{cN^p}{(128)^n(1-r)^{np}} \int_S \nu_1^{p}\left(D(\eta, 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}})\right) d\sigma(\eta) =$$
$$= \frac{c(n,p)}{(1-r)^{np}} \int_S \lambda^p\left(\tilde{K}(r\eta)\right) d\sigma(\eta).$$

Тому, за припущенням теореми і (1.2),

$$I_1 \leq c(1-r)^{-np} \int_S \lambda^p\left(C(\eta, c(1-r))\right) d\sigma(\eta)$$
$$\leq o(1)(1-r)^{p(\gamma-n)}. \tag{2.33}$$

Щодо оцінки u_2 зауважимо, що з означення

$$E_k(z) = \left\{ w \in B : \left| 1 - \left\langle \frac{z}{|z|}, w \right\rangle \right| < 2^{k+1}(1-|z|) \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

випливає, що для $w \in E_k(z)$, $1 \le k \le \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-|z|}$

$$1 - |w| \le \left|1 - \left\langle \frac{z}{|z|}, w \right\rangle\right| \le 2^{k+1}(1-|z|) \le 2\sqrt{1-|z|}.$$

Тому з умови (2.7) теореми випливає, що

$$\int\limits_S \lambda^p(C(\xi, 2^{k+1}(1-r)))d\sigma(\xi) = o((1-r)^{\gamma p}),\ \ \delta \to 0+$$

рівномірно за $k \in \left[1, \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-r}\right]$.

Отже, при $r \to 1-$ маємо

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-r}\right]} \int_S \tilde{\lambda}^p\left(E_k(r\xi)\right) d\sigma(\xi) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-r}\right]} \int_S \tilde{\lambda}^p\left(C(\xi, 2^{k+1}(1-r))\right) d\sigma(\xi) =$$

$$= o\Bigg(\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-r}\right]} 2^{p\gamma(k+1)}(1-r)^{\gamma p}\Bigg). \tag{2.34}$$

Зафіксуємо $\alpha \in \left(\frac{\gamma}{n}, 2\right)$. Використавши оцінки (2.29) і (2.34), ми отримаємо

$$\int_S |u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \le$$

$$\le \frac{c(n,p)}{(1-r)^{np}}\Bigg(\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-r}\right]} + \sum_{k=\left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-r}\right]+1}^{\infty}\Bigg)\int_S \frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k(r\xi)\right)}{2^{\alpha npk}}d\sigma(\xi) =$$

$$= \frac{o(1)}{(1-r)^{np-\gamma p}}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-r}\right]} \frac{2^{p\gamma(k+1)}}{2^{\alpha npk}} + \frac{c}{(1-r)^{np-\gamma p}}\sum_{k=\left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-r}\right]+1}^{\infty} \frac{2^{p\gamma(k+1)}}{2^{\alpha npk}} =$$

$$= \frac{o(1)}{(1-r)^{p(n-\gamma)}}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{1-r}\right]} 2^{p(\gamma-\alpha n)} +$$

$$+\frac{c}{(1-r)^{p(n-\gamma)}}\frac{2^{p(\gamma-\alpha n)}2^{p(\gamma-\alpha n)\left(\left[\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{1-r}\right]+1\right)}}{1-2^{p(\gamma-\alpha n)}}=$$

$$=\frac{o(1)}{(1-r)^{p(n-\gamma)}}+\frac{c}{(1-r)^{p(n-\gamma)}}\frac{1}{(1-r)^{\frac{p}{2}(\gamma-\alpha n)}}=\frac{o(1)}{(1-r)^{p(n-\gamma)}},\quad r\uparrow 1.$$

Останнє співвідношення завершує доведення теореми 2.2. □

Доведення твердження 2.1. Нехай $\nu(B)=M>0$. Тоді

$$\int\limits_S \nu^p(C(\xi,\delta))d\sigma(\xi)\le M^{p-1}\int\limits_S \nu(C(\xi,\delta))d\sigma(\xi)=$$

$$=M^{p-1}\int\limits_S\int\limits_{C(\xi,\delta)} d\nu(z)\,d\sigma(\xi).$$

Застосувавши теорему Фубіні та користуючись сферичною системою координат на одиничній сфері $\Theta\colon \Pi\to S$, де $\Pi=[0,2\pi)\times[0,\pi]^{2n-2}$, як у доведенні леми 2.1, ми отримаємо

$$\int\limits_S \nu^p(C(\xi,\delta))d\sigma(\xi)\le M^{p-1}2^{2n-1}\int\limits_{1-\delta\le|z|<1} d\nu(z)\int\limits_{C(z,\delta)} d\sigma(\xi)\le$$

$$\le cM^{p-1}2^{2n-1}\delta^n\int\limits_{1-\delta\le|z|<1} d\nu(z)=o(\delta^n),\quad \delta\downarrow 0.$$

Ми скористалися тим фактом, що залишок збіжного інтегралу прямує до нуля. □

Альтернативне доведення теореми D(1). Припустимо, що виконуються умови теореми D(1). Означимо міру ν рівністю

$$d\nu(w)=(1-|w|)^\beta\,d\mu(w).$$

Тоді

$$\lambda(C(\xi,\delta))=\int_{C(\xi,\delta)}(1-|w|)^n d\mu(w)\le$$

$$\leq C\delta^{n-\beta}\int_{C(\xi,\delta)}(1-|w|)^{\beta}d\mu(w)\leq C\delta^{n-\beta}\nu(C(\xi,\delta)).$$

За припущенням, $\int_B d\nu(w)<\infty$, тому

$$\int_S \nu^p(C(\xi,\delta))d\sigma(\xi)=o(\delta^n),\ \delta\to 0+.$$

Отже,

$$\left(\int_S \lambda^p(C(\xi,\delta))\,d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}=o(\delta^{n-\beta+\frac{n}{p}}),\quad \delta\to 0+.$$

Оскільки $n-\beta+\frac{n}{p}<2n$, за теоремою 2.2 ми отримаємо твердження теореми D(1). □

Далі розглянемо випадок $0<p<1$. Для цього інтервалу значень p ми вже отримали імплікацію (2.2) $\Rightarrow$ (2.3) при доведенні необхідності теореми 2.1.

Теорема 2.4. *Нехай $n>1$, $0<p<1$, $0\leq\gamma<2n$, і нехай μ — борелева міра, що задовольняє умову* (2.1). *Якщо*

$$m_p\left(r,G_\mu\right)=O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r\uparrow 1$$

то

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right)d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}=O\left(\delta^{\gamma}\right),\ 0<\delta<1.$$

Доведемо тепер теорему 2.3.

Доведення теореми 2.3. З опуклості, маємо

$$m_p\left(r,G_\mu\right)\leq m_1\left(r,G_\mu\right),\ 0<p\leq 1,$$

співвідношення (2.9) для $p=1$ доведене в теоремі 2.1. □

Зауваження 2.4. Наступне твердження показує, що оцінка (2.9) є точною для всіх $p \in (0,1]$.

Твердження 2.3. *Для $n > 1$, $0 < p \le 1$, $n < \gamma < 2n$, існує борелева міра μ на B така, що*

$$G_\mu(z) = O\left((1-|z|)^{\gamma-n}\right), \ |z| \uparrow 1$$

та

$$\lambda\left(C(\xi,\delta)\right) \ge \delta^\gamma, \ 0 < \delta < 1. \tag{2.35}$$

Доведення. Визначимо міру μ рівністю

$$d\mu(z) = \frac{dV(z)}{(1-|z|)^{2n+1-\gamma}},$$

де V – міра Лебега в $\mathbb{C}^n$.

Позначимо

$$G_\mu(z) = \int_B G(z,w)d\mu(w) = \int_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} G(z,w)d\mu(w) +$$
$$+ \int_{B\setminus B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} G(z,w)d\mu(w) =: J_1 + J_2.$$

Оскільки, згідно з (2.15), якщо $w \in B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)$, то правильною є нерівність

$$\left|r - |w|\right| \le c(1-r),$$

отже, виконується співвідношення

$$1-|w| \asymp 1-|z| \text{ для } w \in B^*\left(z,\frac{1}{4}\right),$$

тому ми отримаємо

$$J_1 = \int_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} \frac{G(z,w)dV(w)}{(1-|w|)^{2n+1-\gamma}} \le c\int_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} \frac{G(z,w)dV(w)}{(1-|z|)^{2n+1-\gamma}}$$

$$\leq \frac{c}{(1-|z|)^{2n+1-\gamma}} \int_{r-c_4(1-r)}^{r+c_4(1-r)} \int_S G(z,\rho\eta)d\sigma(\eta)\rho^{2n-1}d\rho.$$

Використовуючи твердження 2.2 для $p=1$, ми отримаємо

$$J_1 \leq \frac{c}{(1-|z|)^{2n+1-\gamma}} \int_{r-c_4(1-r)}^{r+c_4(1-r)} (1-\rho)^n \rho^{2n-1}d\rho \leq$$

$$\leq \frac{2c_4(1+c_4)^n c}{(1-|z|)^{2n+1-\gamma}}(1-r)^{n+1}(r+c_4(1-r))^{2n-1} \leq \frac{c}{(1-r)^{n-\gamma}}.$$

Для оцінки J_2 нам потрібне наступне твердження.

Твердження A ([35, с.26]). *Нехай $z \in B$, $c > 0$ та $t > -1$, тоді*

$$\int_B \frac{(1-|w|^2)^t d\nu(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+t+c}} \asymp (1-|z|^2)^{-c},\ |z| \to 1.$$

Для $w \in B \setminus B^*\left(z, \frac{1}{4}\right)$ виконується (див. (2.17))

$$0 \leq G(z,w) \leq c\left(\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,w\rangle|^2}\right)^n.$$

Тоді з останньої нерівності та твердження A для

$$t = -n-1+\gamma > -1,\ c = 2n-\gamma$$

випливає, що

$$J_2 \leq c(1-|z|)^n \int_B \frac{(1-|w|^2)^{-n-1+\gamma}}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}} dV(w)$$

$$\asymp c(1-|z|)^n(1-|z|)^{-2n+\gamma} = c(1-|z|)^{\gamma-n}.$$

Тому

$$m_1(r, G_\mu) = O((1-r)^{\gamma-n}),\ r \uparrow 1.$$

Для довільних фіксованих $\delta \in (0,1)$, $\xi \in S$ позначимо

$$M_1 = C(\xi,\delta) \cap \left\{w : \frac{\delta}{4} \leq 1-|w| \leq \frac{\delta}{2}\right\} =$$

$$= \left\{ w : \frac{\delta}{4} \le 1 - |w| \le \frac{\delta}{2},\ d(\xi, w) < \sqrt{\delta} \right\},$$

$$M_2 = \left\{ |w|\eta : \frac{\delta}{4} \le 1 - |w| \le \frac{\delta}{2},\ d(\xi, \eta) < \sqrt{\frac{\delta}{2}} \right\}.$$

Доведемо, що $M_1 \supset M_2$. Достатньо перевірити, що

$$M_1 \cap S_\rho \supset M_2 \cap S_\rho, \text{ для } \rho \in [1 - \delta/2, 1 - \delta/4], \tag{2.36}$$

де $S_\rho = \{w \in B : |w| = \rho\}$.

Включення (2.36) рівносильне до такого

$$\{\eta \in S : \rho\eta \in M_1 \cap S_\rho\} \supset \{\eta \in S : d(\xi, \eta) < \sqrt{\delta/2}\}. \tag{2.37}$$

Нехай $\zeta = \rho\eta \in \partial C(\xi, \delta) \cap S_\rho$ точка $\partial(M_1 \cap S_\rho)$ як підмножини S_ρ. Зокрема $d(\zeta, \xi) = \sqrt{\delta}$. Тоді

$$d(\xi, \eta) = \sqrt{|1 - \langle \xi, \eta \rangle|} = \sqrt{|1 - \langle \xi, \eta \rangle - \langle \xi, \rho\eta \rangle + \langle \xi, \rho\eta \rangle|} \ge$$

$$\ge \sqrt{|1 - \langle \xi, \rho\eta \rangle - |\langle \xi, \eta \rangle - \rho\langle \xi, \eta \rangle|} = \sqrt{d^2(\zeta, \xi) - (1 - \rho)|\langle \xi, \eta \rangle|} \ge$$

$$\ge \sqrt{\delta - (1 - \rho)} \ge \sqrt{\delta - \delta/2} = \sqrt{\delta/2}.$$

Отже, межа $\partial(M_1 \cap S_\rho)$ лежить поза кругом $\{\eta : d(\xi, \eta) < \sqrt{\delta/2}\}$, відтак включення (2.37) доведено. Це тягне за собою (2.36) і включення $M_1 \supset M_2$.

Далі доведемо (2.35). Маємо

$$d\lambda(w) = \frac{dV(w)}{(1 - |w|)^{n+1-\gamma}}.$$

Тоді

$$\lambda((\xi, \delta)) \ge \int_{E_1} \frac{dV(w)}{(1 - |w|)^{n+1-\gamma}} \ge \int_{E_2} \frac{dV(w)}{(1 - |w|)^{n+1-\gamma}} \ge$$

$$\geq (\delta/2)^{\gamma-n-1} \int\limits_{\substack{1-\delta/2 \leq |w| \leq 1-\delta/4 \\ d(\xi,\eta) \leq \sqrt{\delta/2}}} dV(w) = \frac{\delta^{\gamma-n}}{2^{\gamma-n-1}} \sigma(C(\xi,\delta/2)) \asymp \delta^{\gamma-n}\delta^n = \delta^\gamma.$$

□

2.2. Асимптотична поведінка середніх $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій в одиничній кулі

Мета цього підрозділу — дослідити зростання p-их середніх субгармонійних в одиничній кулі функцій у термінах гладкості міри Рісса μ. Для одновимірного випадку цей зв'язок описаний у [6] та ґрунтується на понятті повної міри Грішина субгармонійної функції (див. [47, 5, 17]).

Використовуючи теорему 2.1, ми отримаємо узагальнення, яке у термінах властивостей міри μ описує зростання p-их середніх субгармонійних функцій, що зображуються у наступному вигляді

$$u(z) = H_u(z) - \int_B G(z,w) d\mu_u(w),$$

де μ_u — міра Рісса функції u і H_u — найменша $\mathcal{M}$-гармонійна мажоранта функції u.

Спочатку пригадаємо необхідні означення та результати. Напівнеперервна зверху функція $u : B \to [-\infty, \infty)$, яка задовольняє умову $u \not\equiv -\infty$, називається *$\mathcal{M}$-субгармонійною* в B, якщо

$$u(a) \leq \int_S u(\varphi_a(r\xi)) d\sigma(\xi) \tag{2.38}$$

для всіх $a \in B$ та всіх r достатньо малих. Неперервна функція u для якої виконується рівність в (2.38) називається *$\mathcal{M}$-гармонійною* в B.

Зауважимо, що функція $u \in C^2$ є $\mathcal{M}$-субгармонійною тоді і тільки тоді, коли $(\tilde{\Delta}u)(a) \geq 0$ для всіх $a \in B$, також, подібно, $(\tilde{\Delta}u)(a) = 0$ тоді і тільки тоді, коли u є $\mathcal{M}$-гармонійною функцією в B.

Сім'ю двічі неперервно диференційованих функцій з компактним носієм у B позначатимемо $C_0^2(B)$. Для $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій виконується наступна теорема.

Теорема A ([42]). *Якщо u — $\mathcal{M}$-субгармонійна в B, тоді існує єдина борелева міра μ_u на B така, що*

$$\int_B \psi d\mu_u = \int_B u\tilde{\Delta}\psi d\tau \tag{2.39}$$

для всіх $\psi \in C_0^2(B)$, де τ — інваріантна міра на B $\left(d\tau(z) = \frac{dV(z)}{(1-|z|^2)^{n+1}}\right)$, тобто $d\mu_u = \tilde{\Delta} u d\tau$ в сенсі узагальнених функцій.

Якщо u — $\mathcal{M}$-субгармонійна в B функція, тоді однозначно визначена борелева міра μ_u, яка задовольняє (2.39), називається *мірою Рісса* функції u.

У одновимірному випадку зростання pих середніх субгармонійних функцій описано в [6].

Теорема D ([6]). *Нехай u — субгармонійна, недодатна функція в $\mathbb{D}$, $\gamma \in (0,1]$, $p \in (1,\infty)$ і λ — повна міра u. Необхідною і достатньою умовою для*

$$m_p(r,u) = O\left((1-r)^{\gamma-1}\right),\ r \to 1-,$$

є

$$\int\limits_0^{2\pi} \lambda^p(\{\rho e^{i\theta} \in B : \rho \geq 1-\delta,\ |\theta-\varphi| \leq \pi\delta\})d\varphi = O(\delta^{p\gamma}), \quad 0<\delta<1.$$

Скажемо, що $\mathcal{M}$-субгармонійна функція u в B має *$\mathcal{M}$-гармонійну мажоранту* в B, якщо існує $\mathcal{M}$-гармонійна функція h в B така, що $u(z) \leq h(z)$ для всіх $z \in B$. Крім того, якщо існує $\mathcal{M}$-гармонійна функція H, що задовольняє умову $u(z) \leq H(z)$, для всіх $z \in B$, та $H(z) \leq h(z)$ для кожної $\mathcal{M}$-гармонійної мажоранти h функції u, тоді

H називається *найменшою $\mathcal{M}$-гармонійною мажорантою* функції u, і надалі буде позначатися H_u.

Теорема E (**Теорема Рісса про розклад** [44, Теорема 2.16]). *Нехай $\mathcal{M}$-субгармонійна в B функція $u \not\equiv -\infty$ має $\mathcal{M}$-гармонійну мажоранту в B. Тоді*

$$u(z) = H_u(z) - \int_B G(z,w)d\mu_u(w), \tag{2.40}$$

де μ_u — міра Рісса функції u і H_u — найменша $\mathcal{M}$-гармонійна мажоранта функції u.

Відомо, що ([42, твердж. 5.10]) для будь-якої (невід'ємної) $\mathcal{M}$-гармонійної функції F на B, існує невід'ємна борелева міра ν на S така, що $F(z) = \mathcal{P}[\nu](z)$.

Зауваження 1.1. Крім того, якщо $u \le 0,\ u \not\equiv -\infty$, $\mathcal{M}$-субгармонійна в B, то $v \equiv 0$ її $\mathcal{M}$-гармонійна мажоранта. Тоді для H_u у розкладі (2.40), ми отримаємо $H_u(z) \le 0,\ z \in B$. Отже,

$$H_u(z) = -\mathcal{P}[\nu](z),\ z \in B, \tag{2.41}$$

де ν — невід'ємна борелева міра на S.

Введемо такий аналог повної міри Грішина для підкласу недодатних $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій в B. Визначимо міру

$$d\lambda(w) = \frac{4n^2}{n+1}d\nu(w) + (1-|w|^2)^n d\mu_u(w) \tag{2.42}$$

для $w \in \bar{B}$, тобто

$$\lambda(E) = \int_E \frac{4n^2}{n+1}d\nu(w) + \int_E (1-|w|^2)^n d\mu_u(w),$$

де E — борелева підмножина $\bar{B}$ така, що $E \cap S$ — борелева множина на S.

Теорема 2.5. *Нехай u — недодатна $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B, для якої виконується $u \not\equiv -\infty$. Нехай $n > 1$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, $0 \le \gamma < 2n$. Співвідношення*

$$m_p(r,u) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right), \ r \uparrow 1 \tag{2.43}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^\gamma\right), \ 0 < \delta < 1. \tag{2.44}$$

Для $\mathcal{M}$-гармонійних функцій отримаємо такий наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай $u = \mathcal{P}[\nu](z)$ в B, де ν — невід'ємна борелева міра на S, $p > 1$ і $0 \le \gamma < 2n$. Тоді*

$$m_p(r,u) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right), \ r \uparrow 1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \nu^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^\gamma\right), \ 0 < \delta < 1.$$

Визначимо ядро

$$K(z,w) = \begin{cases} \frac{G(z,w)}{(1-|w|^2)^n}, & \text{якщо } w \in B, \ z \in B; \\ \frac{n+1}{4n^2}\mathcal{P}(z,\xi), & \text{якщо } w \in S, \ z \in B, \end{cases}$$

де $G(z,w)$ — функція Гріна для оператора $\tilde{\triangle}$, $\mathcal{P}(z,\xi)$ — ядро Пуассона.

Ядро $K(z,w)$ має такі властивості.

Твердження 2.4. *Для $z, w = \rho\xi \in \bar{B}$ наступні твердження є вірними:*

a) Для $z \in B$, $w \in \{w \in \bar{B} : \ |\varphi_w(z)| \ge \frac{1}{4}\}$ нерівність

$$0 \le K(z,w) \le c\frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}, \tag{2.45}$$

виконується для деякого $c > 0$, яке не залежить від z і w.

b)
$$\lim_{\rho\to 1-} \frac{G(z,\rho\xi)}{(1-\rho^2)^n} = \frac{n+1}{4n^2}\mathcal{P}(z,\xi)$$
рівномірно за $\xi \in S$.

c)
$$|K(z,w)| \geq \frac{n+1}{4n^2}\frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}},\ z\in B,\ w\in \bar{B}. \tag{2.46}$$

Доведення. a) З (2.11) отримаємо
$$0 \leq K(z,w) = \frac{g(\varphi_w(z))}{(1-|w|^2)^n} \leq c\frac{(1-|\varphi_w(z)|^2)^n}{(1-|w|^2)^n},$$
де стала c не залежить від z і w. Оскільки ([42])
$$1-|\varphi_w(z)|^2 = \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,w\rangle|^2}, \tag{2.47}$$
то
$$0 \leq K(z,w) \leq c\frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}.$$
b) Нехай $w = \rho\xi,\ \rho\in(0,1),\ \xi\in S$. За означенням функцій $G(z,w)$ і $g(z)$, маємо
$$\lim_{\rho\to 1-} \frac{G(z,\rho\xi)}{(1-\rho^2)^n} = \lim_{\rho\to 1-} \frac{g(\varphi_{\rho\xi}(z))}{(1-\rho^2)^n} =$$
$$= \lim_{\rho\to 1-} \frac{1}{(1-\rho^2)^n}\frac{n+1}{2n}\int_{|\varphi_{\rho\xi}(z)|}^1 (1-t^2)^{n-1}t^{-2n+1}dt$$
Користуючись правилом Лопіталя та рівністю (2.47), ми отримаємо
$$\lim_{\rho\to 1-} \frac{G(z,\rho\xi)}{(1-\rho^2)^n} =$$
$$= \frac{n+1}{2n}\lim_{\rho\to 1-} \frac{(1-|\varphi_{\rho\xi}(z)|^2)^{n-1}|\varphi_{\rho\xi}(z)|^{-2n+1}}{n(1-\rho^2)^{n-1}2\rho}\frac{d}{d\rho}|\varphi_{\rho\xi}(z)| =$$

$$= \frac{n+1}{8n^2} \lim_{\rho\to 1-} \frac{(1-|\varphi_{\rho\xi}(z)|^2)^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-1}} \left(1 - \frac{(1-\rho^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,\rho\xi\rangle|^2}\right)^{-n} \cdot$$

$$\cdot \frac{d}{d\rho}|\varphi_{\rho\xi}(z)|^2 = \frac{n+1}{8n^2} \lim_{\rho\to 1-} \frac{(1-|\varphi_{\rho\xi}(z)|^2)^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-1}} \frac{d}{d\rho}|\varphi_{\rho\xi}(z)|^2 =$$

$$= -\frac{n+1}{8n^2} \lim_{\rho\to 1-} \frac{(1-|z|^2)^{n-1}}{|1-\langle z,\rho\xi\rangle|^{2(n-1)}} \frac{d}{d\rho} \frac{(1-\rho^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,\rho\xi\rangle|^2}$$

Шляхом диференціювання отримаємо

$$\lim_{\rho\to 1-} \frac{G(z,\rho\xi)}{(1-\rho^2)^n} = -\frac{n+1}{8n^2} \lim_{\rho\to 1-} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\rho\xi\rangle|^{2(n-1)}} \times$$

$$\times \lim_{\rho\to 1-} \frac{-2\rho|1-\rho\langle z,\xi\rangle|^2 - (1-\rho^2)(-2\langle z,\xi\rangle + 2\rho|\langle z,\xi\rangle|^2)}{|1-\langle z,\rho\xi\rangle|^4} =$$

$$= \frac{n+1}{4n^2} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}}.$$

c) З (2.10) та (2.47) випливає

$$K(z,\rho\xi) = \frac{g(\varphi_w(z))}{(1-\rho^2)^n} \geq \frac{n+1}{4n^2} \frac{(1-|\varphi_w(z)|^2)^n}{(1-\rho^2)^n} = \frac{n+1}{4n^2} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}.$$

Твердження доведено. □

Таким чином, представлення $\mathcal{M}$-субгармонійної функції (2.40) може бути записане, у вигляді

$$u(z) = -\int_{\bar{B}} K(z,w)d\lambda(w), \tag{2.48}$$

цю рівність отримаємо підставивши (2.41) у розклад Рісса для функції u (2.40)

$$u(z) = -\mathcal{P}[\nu](z) - \int_B G(z,w)d\mu_u(w) = -\int_{\bar{B}} K(z,w)d\lambda(w).$$

Оскільки виконується співвідношення $b)$ з твердження 2.4, ядро $K(z,w)$ неперервне за w при $w \neq z$.

Доведення теореми 2.5. Достатність. Позначимо

$$B^*\Big(z, \frac{1}{4}\Big) = \Big\{w \in B : |\varphi_w(z)| < \frac{1}{4}\Big\}.$$

Далі оцінимо абсолютні величини

$$u_1(z) := \int\limits_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} K(z,w)d\lambda(w) \ \text{ і } \ u_2(z) := \int\limits_{B\setminus B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} K(z,w)d\lambda(w).$$

Почнемо з u_1. В цьому випадку

$$d\lambda(w) = (1-|w|^2)^n d\mu_u(w)$$

і доведення дослівно повторює доведення теореми 2.1, тому виконується

$$\int_S |u_1(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \le c(1-r)^{p(\gamma-n)}. \tag{2.49}$$

Тепер оцінимо

$$u_2(z) = -\int_B K(z,w)d\tilde{\lambda}(w),$$

де

$$d\tilde{\lambda}(w) = \frac{4n^2}{n+1}d\nu(w) + (1-|w|)^n \chi_{B\setminus B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)}(w)d\mu(w),$$

χ_E – характеристична функція множини E. Ми можемо припустити, що $|z| \ge \frac{1}{2}$.

З (2.45) ми отримаємо, що

$$|u_2(z)| \le c\int_B \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}d\tilde{\lambda}(w) \le c\int_B \frac{(1+|w|)^n(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}d\tilde{\lambda}(w).$$

Далі, користуючись тими ж аргументами та позначеннями, що й в доведенні теореми 2.1, отримаємо

$$|u_2(z)| \le \sum_{k=1}^{\left[\log_2 \frac{1}{1-r}\right]} c\int_{E_{k+1}\setminus E_k} \left(\frac{(1+|w|)(1-|z|^2)}{2^{2(k-1)}(1-|z|)^2}\right)^n d\tilde{\lambda}(w) +$$

$$+c\int_{E_1}\left(\frac{(1+|w|)(1-|z|^2)}{(1-|z|)^2}\right)^n d\tilde{\lambda}(w)\leq$$
$$\leq\frac{4^n c}{(1-|z|)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}\left(E_k\right)}{2^{2n(k-2)}},$$

де

$$E_k=\left\{w\in B:\left|1-\left\langle\frac{z}{|z|},w\right\rangle\right|<2^{k+1}(1-|z|)\right\},\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

У випадку $p=1$, маємо

$$\int_S|u_2(r\xi)|d\sigma(\xi)\leq\frac{c}{(1-r)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\int_S\frac{\tilde{\lambda}\left(E_k(r\xi)\right)}{2^{2n(k-2)}}d\sigma(\xi)=$$
$$=\frac{c}{(1-r)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n(k-2)}}\int_S\tilde{\lambda}\left(C\left(\xi,2^{k+1}(1-r)\right)\right)d\sigma(\xi)\leq$$
$$\leq\frac{c}{(1-r)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{\gamma(k+1)}(1-r)^{\gamma}}{2^{2n(k-2)}}=\frac{c}{(1-r)^n}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(\gamma-2n)}=$$
$$=\frac{c(n,\gamma)}{(1-r)^{(n-\gamma)}}.$$

При $1<p<\frac{2n-1}{2(n-1)}$ зафіксуємо будь-яке число $\alpha\in(\frac{\gamma}{n},2)$ і нехай $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. З нерівності Гельдера випливає

$$|u_2(z)|^p\leq\frac{4^{np}c^p}{(1-|z|)^{np}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k\right)}{2^{\alpha np(k-2)}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(2-\alpha)nq(k-2)}}\right)^{p/q}=$$
$$=\frac{c(n,p,\alpha)}{(1-|z|)^{np}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k\right)}{2^{\alpha npk}}.\tag{2.50}$$

За припущенням теореми, маємо

$$\int_S|u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi)\leq\frac{c}{(1-r)^{np}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\alpha npk}}\int_S\tilde{\lambda}^p\left(C\left(\xi,2^{k+1}(1-r)\right)\right)d\sigma(\xi)\leq$$
$$\leq\frac{c}{(1-r)^{np}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{p\gamma(k+1)}(1-r)^{\gamma p}}{2^{\alpha npk}}=\frac{c(n,p,\gamma)}{(1-r)^{p(n-\gamma)}}.$$

Тому
$$\int_S |u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \le \frac{c(n,p,\gamma)}{(1-r)^{p(n-\gamma)}}.$$
Остання нерівність разом з (2.49) закінчує доведення достатності.

Необхідність. З (2.46) випливає
$$|u(z)| \ge \int_B K(z,w)d\lambda(w) \ge \frac{n+1}{4n^2}\int_B \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}d\lambda(w)$$
$$\ge \frac{n+1}{4n^2}\int_{C(\xi,1-r)} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}d\lambda(w).$$
Далі міркуємо як в доведенні теореми 2.1

Оскільки для $w \in C(\xi, 1-r)$ виконується
$$|1-\langle z,w\rangle| \le 2(1-|z|),$$
ми маємо
$$|u(z)| \ge \frac{n+1}{4^{n+1}n^2}\frac{\lambda(C(\xi,1-r))}{(1-r)^n}.$$

З припущення теореми випливає, що
$$\left(\frac{n+1}{2^{2(n+1)}n^2}\right)^p \int_S \frac{\lambda^p(C(\xi,1-r))}{(1-r)^{np}}d\sigma(\xi) \le \int_S |u(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \le c(1-r)^{p(\gamma-n)}.$$

Отже,
$$\int_S \lambda^p(C(\xi,1-r))d\sigma(\xi) \le c(1-r)^{p\gamma}, \quad 0<r<1.$$

Зауваження 2.5. Зауважимо, що припущення $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$ використовується лише для оцінки $u_1(z)$ в лемі B. Для $\mathcal{M}$-гармонійних функцій $u_1 \equiv 0$, тому в наслідку 2.2 умова для p має вигляд $p \ge 1$.

Зауважимо, що у теоремі 2.5 зростання $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, описане за допомогою степеневих функцій, а випадок $\gamma = 2n$ не розглядається. У прикладі з [7] показано, що для $n = 1$ та $\gamma = 2$ з виконання умови

$$\left(\int_S \lambda^p \left(C(\xi, \delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^\gamma\right),\ 0 < \delta < 1$$

не випливає

$$m_p\left(r, u\right) = O\left((1-r)^{\gamma - n}\right),\ r \uparrow 1.$$

Більше того, доведено, що для міри $d\mu(w) = \frac{dV(w)}{1-|w|}$ виконується

$$m_p(r, u) = (1 + o(1)) 2\pi (1 - r) \log \frac{1}{1-r}, \quad r \uparrow 1, \tag{2.51}$$

тоді, як

$$\left(\int_0^{2\pi} \lambda^p(\mathcal{C}(\varphi, \delta))\, d\varphi\right)^{\frac{1}{p}} \asymp \delta^2.$$

Наступна теорема описує асимптотичну поведінку p-их значень $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, використовуючи клас функцій ширший ніж степеневі, та частково охоплює випадок $\gamma = 2n$.

Теорема 2.6. *Нехай u – недодатна $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $u \not\equiv -\infty$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$. Нехай функція $\Phi\colon [0, 2] \to [0, \infty)$ така, що для всіх $t > 1$ і $0 < t\delta < 2$ виконується*

$$\Phi(t\delta) = O\left(\frac{t^{2n}}{\psi(\log(e + t))}\Phi(\delta)\right) \tag{2.52}$$

для деякої додатної зростаючої функції ψ, що задовольняє умови

$$\int_1^\infty \frac{dt}{\psi(t)} < \infty \text{ та } \psi(ct) \asymp \psi(t),\ t \in [1, +\infty),\ c > 1.$$

Тоді

$$m_p(r,u) = O\left(\frac{\Phi(1-r)}{(1-r)^n}\right),\ r \uparrow 1 \tag{2.53}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\Phi(\delta)\right),\ 0<\delta<1. \tag{2.54}$$

Підставивши в теорему 2.6 функцію ψ певного виду, отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 2.3. *Нехай u – недодатна $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B, $u \not\equiv -\infty$, $1<p<\frac{2n-1}{2(n-1)}$. Нехай $\varepsilon>0$ $\Phi\colon [0,2]\to[0,\infty)$ – зростаюча функція така, що для всіх $t>1$ і $0<t\delta\le 2$ виконується*

$$\Phi(t\delta) = O\left(\frac{t^{2n}}{\log^{1+\varepsilon}(e+t)}\Phi(\delta)\right).$$

Тоді

$$m_p(r,u) = O\left(\frac{\Phi(1-r)}{(1-r)^n}\right),\ r \uparrow 1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\Phi(\delta)\right),\ 0<\delta<1.$$

Приклад 2.2. *Функція*

$$\Phi(t) = \frac{t^\alpha}{\log^\beta \frac{e}{t}},\ t\in[0,2],$$

де $\alpha\in(0,2n)$, $\beta\in\mathbb{R}$ задовольняє припущення теореми 2.6.

Доведення прикладу 2.2. Спершу розглянемо випадок $\beta\le 0,\ 0<\alpha<2n$. Оскільки

$$\left(\log\frac{e}{\delta}\right)^\beta < \left(\log\frac{e}{t\delta}\right)^\beta,\ t>1,$$

ми отримаємо

$$\Phi(t\delta) = \frac{t^\alpha \delta^\alpha}{\log^\beta \frac{e}{t\delta}} \leq \frac{\tilde{c} t^{2n}}{\log^k (e+t)} \frac{\delta^\alpha}{\log^\beta \frac{e}{\delta}} = \frac{\tilde{c} t^{2n}}{\log^k (e+t)} \Phi(\delta),$$

де

$$k > 1, \ \tilde{c} = \max_{t \geq 1} \frac{\log^k (e+t)}{t^{2n-\alpha}}.$$

Тепер, нехай $\beta > 0, \ 0 < \alpha < 2n$. Оскільки

$$\frac{(\log \frac{e}{\delta})^\beta}{(\log \frac{e}{t\delta})^\beta} = \left(1 + \frac{\log t}{\log \frac{e}{t\delta}}\right)^\beta \leq \left(1 + \frac{\log t}{\log \frac{e}{2}}\right)^\beta, \ 0 < t\delta \leq 2$$

маємо

$$\Phi(t\delta) = \frac{t^\alpha \delta^\alpha}{\log^\beta \frac{e}{t\delta}} \leq \frac{\tilde{c_1} t^{2n}}{\log^k (e+t)} \Phi(\delta),$$

де

$$k > 1, \ \tilde{c_1} = \max_{t \geq 1} \frac{\left(1 + \frac{\log t}{\log \frac{e}{2}}\right)^\beta \log^k (e+t)}{t^{2n-\alpha}}.$$

Отже, функція $\Phi(t)$ задовольняє нерівність (2.52) при

$$\psi(x) = x^k, \ k > 1.$$

$\square$

Не важко перевірити, що функція

$$\Phi(t) = \frac{t^{2n}}{\log^\beta \frac{e}{t}}, \ t \in (0, 2], \ \Phi(0) = 0$$

не задовольняє (2.52) для жодного $\beta \in \mathbb{R}$. Для цього випадку отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.7. *Нехай u — недодатна $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $u \not\equiv -\infty$, $1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$. Нехай $\beta > 1$ і $\varkappa > 1$. Якщо*

$$\left(\int_S \lambda^p \left(C(\xi, \delta) \right) d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^{2n} \log^\beta \frac{e}{\delta} \right), \ 0 < \delta < 2, \tag{2.55}$$

то

$$m_p\left(r, u\right) = O\left((1-r)^n \log^{\beta+\varkappa} \frac{e}{1-r} \right), \ r \uparrow 1. \tag{2.56}$$

Доведення теореми 2.6. Достатність.

Оскільки, для функції u розклад Рісса (2.40) може бути записаний за допомогою ядра $K(z, w)$, як

$$u(z) = -\int_{\bar{B}} K(z, w) d\lambda(w),$$

достатньо оцінити абсолютні значення

$$u_1(z) := \int\limits_{B^*\left(z, \frac{1}{4}\right)} K(z, w) d\lambda(w) \quad \text{та} \quad u_2(z) := \int\limits_{B \setminus B^*\left(z, \frac{1}{4}\right)} K(z, w) d\lambda(w).$$

Почнемо з u_1. У цьому випадку

$$d\lambda(w) = (1 - |w|^2)^n d\mu_u(w) \quad \text{і} \quad u_1(z) = \int\limits_{B^*\left(z, \frac{1}{4}\right)} G(z, w) d\mu_u(w).$$

Тому ми можемо використати той же метод, що в доведенні теореми 2.1.

Позначимо $z = r\xi$, де $r = |z|$, $\frac{1}{2} < r < 1$ і $w = |w|\eta$, $\xi, \eta \in S$. Нехай як і раніше

$$K(z, \sigma_1, \sigma_2) = \left\{ w \in B : |r - |w|| \leq \sigma_1, d(\xi, \eta) \leq \sigma_2 \right\}.$$

За лемою 2.3

$$I_1 := \int\limits_S |u_1(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leq$$

$$\leq c(n,p) \int\limits_{||w|-r|<2/3(1-r)} \mu^{p-1}(\tilde{K}(r\eta)) \int\limits_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\varphi_w(r\xi)|^{p(2n-2)}} \leq$$

$$\leq c(1-r)^n \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\,(r\eta)\right) d\mu(|w|\eta),$$

де

$$\tilde{K}(z) := K\left(z, \frac{2}{3}(1-r), 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Щоб отримати остаточну оцінку для I_1, при фіксованому $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, визначимо міру ν_1 на кулях $\{D(\eta,t) : \eta \in S, t > 0\}$ наступним чином

$$\nu_1(D(\eta,t)) = \lambda\Big(\Big\{\rho\zeta \in B : |\rho - r| < \frac{2}{3}(1-r), d(\zeta,\eta) < t\Big\}\Big).$$

Вона може бути узагальнена на сім'ю всіх борелевих множин на B стандартним шляхом ([49, c.69]). Згідно з означенням

$$\nu_1(D(\eta,t)) \asymp (1-r)^n \mu\Big(\Big\{\rho\zeta \in B : |\rho - r| < \frac{2}{3}(1-r), d(\zeta,\eta) < t\Big\}\Big).$$

Використовуючи лему 2.1, отримаємо

$$\begin{aligned} I_1 \leq & \frac{c}{(1-r)^{n(p-1)}} \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \lambda^{p-1}\left(\tilde{K}\,(r\eta)\right) d\lambda(|w|\eta) \\ = & \frac{c}{(1-r)^{n(p-1)}} \int_S \nu_1^{p-1}\left(D(\eta, 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}})\right) d\nu_1(\eta) \\ \leq & \frac{cN^p}{(128)^n(1-r)^{np}} \int_S \nu_1^p\left(D(\eta, 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}})\right) d\sigma(\eta) \\ = & \frac{c(n,p)}{(1-r)^{np}} \int_S \lambda^p\left(\tilde{K}(r\eta)\right) d\sigma(\eta). \end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо $\rho\zeta \in \tilde{K}(r\eta)$, то

$$|1 - \langle \rho\zeta, \eta \rangle| \leq |1 - \langle \zeta, \eta \rangle| + (1 - \rho)\, |\langle \zeta, \eta \rangle| \leq c(1 - r).$$

За припущенням теореми

$$I_1 \leq c(1-r)^{-np} \int_S \lambda^p \left(C(\eta, c(1-r)) \right) d\sigma(\eta)$$
$$\leq c(1-r)^{-np} \Phi^p(c(1-r)).$$

Оскільки, для всіх $t > 1$ та $0 < t\delta < 2$ виконується нерівність

$$\Phi(t\delta) \leq \frac{t^{2n}}{\psi(\log(e+t))} \Phi(\delta),$$

ми отримаємо

$$I_1 \leq c(1-r)^{-np} \frac{c^{2np}}{\psi^p(\log c)} \Phi^p(1-r) = c \frac{\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}$$

де ψ – додатна зростаюча функція, що задовольняє умови $\int_1^\infty \frac{dt}{\psi(t)} < \infty$ та $\psi(ct) \asymp \psi(t),\ c > 1$. Отже,

$$\int_S |u_1(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leq c \left(\frac{\Phi(1-r)}{(1-r)^n} \right)^p. \tag{2.57}$$

Тепер оцінимо

$$u_2(z) = -\int_B K(z, w) d\tilde{\lambda}(w),$$

де

$$d\tilde{\lambda}(w) = \frac{4n^2}{n+1} d\nu(w) + (1 - |w|)^n \chi_{B \setminus B^*\left(z, \frac{1}{4}\right)}(w) d\mu(w).$$

Можемо припустити, що $|z| \geq \frac{1}{2}$.

Як в доведенні теореми 2.1, для $w \in E_{k+1} \setminus E_k$ виконується нерівність

$$|1 - \langle z, w \rangle| \geq 2^{k-1}(1 - |z|).$$

З (2.45) отримаємо

$$|u_2(z)| \leq c\int_B \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}} d\tilde{\lambda}(w) \leq c\int_B \frac{(1+|w|)^n(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}} d\tilde{\lambda}(w).$$

Використовуючи ті ж міркування, що в доведенні теореми 2.1, отримаємо

$$|u_2(z)| \leq \frac{4^n c}{(1-|z|)^n} \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{\tilde{\lambda}\left(E_k\right)}{2^{2n(k-2)}}. \tag{2.58}$$

Використовуючи нерівність Гельдера ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), отримаємо

$$\left(\sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{\tilde{\lambda}\left(E_k\right)}{2^{2nk}}\right)^p = \left(\sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{\tilde{\lambda}\left(E_k\right)(\psi(k))^{\frac{1}{q}}}{2^{2nk}(\psi(k))^{\frac{1}{q}}}\right)^p \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k\right)(\psi(k))^{\frac{p}{q}}}{2^{2npk}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\right)^{p/q} \leq C \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k\right)(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}}. \tag{2.59}$$

Тому, використовуючи послідовно (2.59), (2.54), (2.52) та властивості ψ, виводимо з (2.59)

$$\int_S |u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leq \frac{4^{np}c^p}{(1-r)^{np}} \int_S \left(\sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{\tilde{\lambda}\left(E_k(r\xi)\right)}{2^{2n(k-2)}}\right)^p d\sigma(\xi) \leq$$

$$\leq \frac{c}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \int_S \frac{\tilde{\lambda}^p\left(E_k(r\xi)\right)(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}} d\sigma(\xi) =$$

$$= \frac{c}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}} \int_S \tilde{\lambda}^p\left(C\left(\xi, 2^{k+1}(1-r)\right)\right) d\sigma(\xi) \leq$$

$$\leq \frac{c}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}} \Phi^p(2^{k+1}(1-r)) \leq$$

$$\leq \frac{c\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \left(\frac{2^{(k+1)2n}}{\psi(\log(e+2^{k+1}))}\right)^p \frac{(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}} \leq$$

$$\leq \frac{c\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi^{p-1}(k)}{\psi^p(k\log 2)} \leq \frac{c\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \leq$$
$$\leq \frac{c\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}.$$

Отже,

$$\int_S |u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leq \frac{c(n,p,\gamma)\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}.$$

Остання нерівність разом з (2.57) завершують доведення достатності.

Необхідність. З (2.46), маємо

$$|u(z)| \geq \int_B K(z,w)d\lambda(w) \geq \frac{n+1}{4n^2} \int_B \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}} d\lambda(w)$$
$$\geq \frac{n+1}{4n^2} \int_{C(\xi,1-r)} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}} d\lambda(w).$$

Далі, використаємо методи доведення теореми 2.1. Оскільки для $w \in C(\xi, 1-r)$ справджується

$$|1-\langle z,w\rangle| \leq 2(1-|z|),$$

отримаємо

$$|u(z)| \geq \frac{n+1}{4^{n+1}n^2} \frac{\lambda(C(\xi,1-r))}{(1-r)^n}.$$

З припущення теореми випливає

$$\left(\frac{n+1}{2^{2(n+1)}n^2}\right)^p \int_S \frac{\lambda^p(C(\xi,1-r))}{(1-r)^{np}} d\sigma(\xi) \leq \int_S |u(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leq c^p \frac{\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}.$$

Отже,

$$\int_S \lambda^p(C(\xi,1-r)) d\sigma(\xi) \leq c^p \Phi^p(1-r), \quad 0 < r < 1.$$

□

Доведення теореми 2.7. Нехай

$$\psi(x) = x^{\varkappa},\ \varkappa > 1.$$

Повторюючи доведення достатності теореми 2.6 з $\Phi(\delta) = \delta^{2n} \log^{\beta} \frac{e}{\delta}$, ми прийдемо до оцінки

$$\int_S |u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leq$$

$$\leq \frac{c}{(1-r)^{np}} \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{k^{(p-1)\varkappa}}{2^{2npk}} (2^{k+1}(1-r))^{2np} \log^{\beta p} \frac{e}{2^{k+1}(1-r)} =$$

$$= c4^{np}(1-r)^{np} \log^{p(\beta+\varkappa)} \frac{e}{1-r} \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} \frac{k^{(p-1)\varkappa} \log^{\beta p} \frac{e}{2^{k+1}(1-r)}}{(\log \frac{e}{2^{k+1}(1-r)} + \log 2^{k+1})^{p(\beta+\varkappa)}} \leq$$

$$\leq c4^{np}(1-r)^{np} \log^{p(\beta+\varkappa)} \frac{e}{1-r} \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{1-r}]} k^{(p-1)\varkappa} \frac{1}{(\log \frac{e}{2} + \log 2^{k+1})^{p\varkappa}} \leq$$

$$\leq c(1-r)^{np} \log^{p(\beta+\varkappa)} \frac{e}{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\varkappa}} \leq c(1-r)^{np} \log^{p(\beta+\varkappa)} \frac{e}{1-r}.$$

Звідси випливає (2.56). Теорема 2.7 доведена. □

2.3. Зростання інтегралів Коші-Стілтьєса та Пуассона-Стілтьєса

Для комплекснозначної функції f на S та борелевої міри μ на S *інтегралом Коші* називається

$$\mathcal{C}[f](z) = \int_{S_n} \frac{f(\xi) d\sigma(\xi)}{(1 - \langle z, \xi \rangle)^n},\ z \in B,$$

де σ – міра Лебега на S, нормована таким чином, що $\sigma(S)=1$. *Інтегралом Коші-Стілтьєса* називається

$$\mathcal{C}[\mu](z)=\int_{S_n}\frac{d\mu(\xi)}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n},\ z\in B. \tag{2.60}$$

Аналогічно, позначимо через

$$\mathcal{P}[f](z)=\int_S\frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}}f(\xi)d\sigma(\xi),\ z\in B,$$

$$\mathcal{P}[\mu](z)=\int_S\frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}}d\mu(\xi),\ z\in B$$

інтеграл Пуассона та *інтеграл Пуассона-Стілтьєса* відповідно.

У цьому підрозділі ми знайдемо точну оцінку зростання інтеграла Коші в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стільтьєса.

Згідно з теоремою про розклад Жордана комплекснозначної міри μ,

$$\mu=\mu_1-\mu_2+i(\mu_3-\mu_4),$$

де міри $\mu_j,\ j\in\{1,2,3,4\}$ визначені однозначно за μ ([46]), тоді

$$|\mu|(E)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j(E).$$

Модулем неперервності міри μ називаємо

$$\omega(\delta,\mu)=\sup_{z_0\in S}|\mu|(\{\xi\in S: d(\xi,z_0)\le\delta\}),$$

де $|\mu|$ — повна варіація комплекснозначної борелевої міри μ на S, $d(\xi,z)=|1-\langle\xi,z\rangle|^{1/2}$ – анізотропна метрика на S, де $z,\xi\in\bar{B}$.

Теорема 2.8. *Нехай μ – комплекснозначна борелева міра на S, $p\in(0,n]$. Якщо*

$$\exists c>0:\ \omega(\delta,\mu)\le c\delta^{2(n-p)},\quad 0<\delta\le\sqrt{2},$$

то

$$\mathcal{C}[\mu](z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^p}\right), \quad z \in B. \tag{2.61}$$

У прикладах 2.3-2.5 показано, що оцінка (2.61) є непокращуваною з точністю до сталого множника.

Щоб довести теорему 2.8 ми використаємо стандартний метод [35]. Той же підхід дозволяє довести критерій для інтеграла Пуассона.

Теорема 2.9. *Нехай μ — додатна борелева міра на S, $p \in (0, n)$. Оцінка*

$$\exists c > 0 \ \omega(\delta, \mu) \leq c\delta^{2(n-p)}, \ 0 < \delta < 1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}[\mu](z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^p}\right), z \in B.$$

Зауваження 2.6. Теореми 2.8 та 2.9 можна узагальнити для інтегралів з ядрами виду

$$\frac{1}{(1-\langle z, \xi\rangle)^{n+s}}, \ \frac{1}{|1-\langle z, \xi\rangle|^{n+s}}, \ s \in \mathbb{R},$$

відповідно, для довільного вибору p.

Доведення теореми 2.8. Позначимо

$$F_k(z) = \left\{\xi \in S : \left|1 - \left\langle \frac{z}{|z|}, \xi \right\rangle\right| < 2^{k+1}(1-|z|)\right\}$$

для $z \in B \setminus \{0\}$ та $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $(F_{-1}(z) := \varnothing)$. Тоді

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}(F_k(z) \setminus F_{k-1}(z)) = S.$$

Оскільки $\forall k \in \mathbb{N}$ $1 > |z| > \frac{3}{4}$ $\forall \xi \in F_k(z) \setminus F_{k-1}(z)$ $\forall z :$

$$|1 - \langle z, \xi \rangle| \geq ||1 - |z|| - ||z| - \langle z, \xi \rangle|| =$$
$$= |z| \left| 1 - \left\langle \frac{z}{|z|}, \xi \right\rangle \right| - (1 - |z|) \geq$$
$$\geq |z| 2^k (1 - |z|) - (1 - |z|) = (|z| 2^k - 1)(1 - |z|)$$

і

$$\forall \xi \in F_0(z) : \ |1 - \langle z, \xi \rangle| \geq 1 - |\langle z, \xi \rangle| \geq 1 - |z|$$

ми маємо

$$|\mathcal{C}[\mu](z)| = \left| \int_S \frac{d\mu(\xi)}{(1 - \langle z, \xi \rangle)^n} \right| =$$
$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{F_k(z) \setminus F_{k-1}(z)} \frac{d\mu(\xi)}{(1 - \langle z, \xi \rangle)^n} + \int\limits_{F_0(z)} \frac{d\mu(\xi)}{(1 - \langle z, \xi \rangle)^n} \right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{F_k(z) \setminus F_{k-1}(z)} \frac{|d\mu(\xi)|}{(|z| 2^k - 1)^n (1 - |z|)^n} + \int\limits_{F_0(z)} \frac{|d\mu(\xi)|}{(1 - |z|)^n} \leq$$
$$\leq (1 - |z|)^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} (|z| 2^k - 1)^{-n} |\mu|(F_k(z)) + (1 - |z|)^{-n} |\mu|(F_0(z)) \leq$$
$$\leq (1 - |z|)^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\sqrt{2^{k+1}(1 - |z|)}, \mu)}{(|z| 2^k - 1)^n} + (1 - |z|)^{-n} \omega(\sqrt{2(1 - |z|)}, \mu) \leq$$
$$\leq (1 - |z|)^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} 2^k - 1 \right)^{-n} c (2^{k+1}(1 - |z|))^{n-p} + 2^{n-p} c (1 - |z|)^{-p} <$$
$$< \frac{c}{(1 - |z|)^p} \left(2^{n-p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k(n-p)}}{(3 \cdot 2^{k-2} - 1)^n} + 2^{n-p} \right), \ \frac{3}{4} < |z| < 1.$$

Оскільки останній ряд є збіжним, ми отримаємо бажаний результат.

Тепер, нехай $|z| \leq \frac{3}{4}$. Оскільки $d(1, z) \leq \sqrt{2}$ для всіх $z \in B$,

$$|\mu|(S) \leq \omega(\sqrt{2}, \mu) \leq c 2^{n-p}.$$

Тоді

$$|\mathcal{C}[\mu](z)| \le \int\limits_S \frac{d\mu(\xi)}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n} \le \frac{|\mu|(S_n)}{(1-|z|)^n} \le$$
$$\le \frac{c2^{n-p}}{(1-|z|)^p \left(\frac{1}{4}\right)^{n-p}} \le \frac{c8^{n-p}}{(1-|z|)^p}.$$

□

Доведення теореми 2.9. Достатність. Для $\xi \in F_1(z)$

$$|1-\langle z,\xi\rangle| \le \left|1-\left\langle \frac{z}{|z|},\xi\right\rangle\right| + \left|\left\langle \frac{z}{|z|}-z,\xi\right\rangle\right| \le$$
$$\le 4(1-|z|) + \left|\frac{z}{|z|}-z\right| = 5(1-|z|).$$

За припущенням теореми $\exists c>0$ таке, що

$$\frac{c}{(1-|z|)^p} \ge \int\limits_S \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} d\mu(\xi) \ge$$
$$\ge \int\limits_{F_1(z)} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} d\mu(\xi) \ge \frac{(1+|z|)^n}{5^{2n}(1-|z|)^n}\mu(F_1(z)). \tag{2.62}$$

Якщо $d(z,\xi) < \sqrt{3(1-|z|)}$, то

$$\left|1-\left\langle \frac{z}{|z|},\xi\right\rangle\right| \le |1-\langle z,\xi\rangle| + \left|\langle z,\xi\rangle - \left\langle \frac{z}{|z|},\xi\right\rangle\right|$$
$$< 3(1-|z|) + \left|z-\frac{z}{|z|}\right| = 4(1-|z|).$$

Отже, за означенням $F_1(z)$ ми отримаємо

$$F_1(z) \supset \{\xi \in S : d(z,\xi) < \sqrt{3(1-|z|)}\}.$$

З нерівності (2.62) та останнього включення маємо

$$\mu(F_1(z)) \le c_1(1-|z|)^{n-p}, \quad z \in B,$$

$$\omega(\sqrt{3(1-|z|)},\mu) \le c_1(1-|z|)^{n-p}, \quad z \in B,$$
$$\omega(\delta,\mu) \le c_1\delta^{2(n-p)}3^{p-n}, \quad 0<\delta\le\sqrt{3},$$

де $c_1 \ge 5^{2n}c/2^n$.

Необхідність. Використовуючи такий же метод як в доведенні теореми 2.8, ми отримаємо

$$|\mathcal{P}[\mu](z)| = \int\limits_S \frac{(1-|z|^2)^n d\mu(\xi)}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{F_k(z)\setminus F_{k-1}(z)} \frac{(1-|z|^2)^n d\mu(\xi)}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} + \int\limits_{F_0(z)} \frac{(1-|z|^2)^n d\mu(\xi)}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{F_k(z)\setminus F_{k-1}(z)} \frac{(1-|z|^2)^n d\mu(\xi)}{(|z|2^k-1)^{2n}(1-|z|)^{2n}} + \int\limits_{F_0(z)} \frac{(1-|z|^2)^n d\mu(\xi)}{(1-|z|)^n} \le$$
$$\le (1-|z|)^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+|z|)^n\mu(E_k(z))}{(|z|2^k-1)^{2n}} + (1-|z|)^{-n}(1+|z|)^n\mu(E_0(z)) \le$$
$$\le (1-|z|)^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^n\omega(\sqrt{2^{k+1}(1-|z|)},\mu)}{(|z|2^k-1)^{2n}} + \frac{2^n\omega(\sqrt{2(1-|z|)},\mu)}{(1-|z|)^n} \le$$
$$\le (1-|z|)^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}2^k-1\right)^{-2n} 2^n c(2^{k+1}(1-|z|))^{n-p} + \frac{2^{n-p}2^n c}{(1-|z|)^p} \le$$
$$\le \frac{c}{(1-|z|)^p}\left(2^{2n-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k(n-p)}}{(3\cdot 2^{k-2}-1)^{2n}} + 2^{2n-p}\right).$$

Із збіжності останнього ряду випливає бажана нерівність. Якщо $|z| \le \frac{3}{4}$, використовуючи метод з доведення в теореми 2.8, ми отримаємо

$$|\mathcal{P}[\mu](z)| \le \int_S \frac{(1-|z|^2)^n |d\mu(\xi)|}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} \le \frac{2^n|\mu|(S)}{(1-|z|)^n} \le$$
$$\le \frac{c2^{n-p}2^n}{(1-|z|)^p\left(\frac{1}{4}\right)^{n-p}} \le \frac{c2^{4n-3p}}{(1-|z|)^p}.$$

□

Приклад 2.3. Нехай в теоремі 2.8 μ – це міра Лебега σ на S. Зауважимо, що $Q_\delta = \{\xi \in S : d(\xi, z_0) < \delta\}$ це "куля" на S і $\sigma(Q_\delta) \asymp \delta^{2n},\ \delta \to 0$ [35, розд.5]. Оскільки σ інваріантна відносно поворотів сфери, модуль неперервності

$$\omega(\delta, \sigma) = \sup_{z_0 \in S} \sigma(\{\xi \in S : d(\xi, z_0) < \delta\}) \asymp \delta^{2n},\ \delta \to 0,$$

тому [35, твердж. 1.4.10]

$$\int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|1 - \langle z, \xi\rangle|^n} \asymp \ln \frac{1}{1 - |z|},\ |z| \uparrow 1.$$

Отже, твердження теореми 2.8 не вірне у випадку $p = 0$.

Приклад 2.4. Нехай $\mu = \delta_{\xi_0}$, тобто

$$\mu(A) = \begin{cases} c, & A \ni \xi_0; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

де $A \subset S,\ \xi_0 \in S$. Тоді

$$\omega(\delta, \mu) = c \in \mathbb{C},\ p = n$$

і

$$\mathcal{C}[\mu](t\xi_0) = \int_S \frac{d\mu(\xi)}{(1 - \langle t\xi_0, \xi\rangle)^n} = c\frac{1}{(1-t)^n},\ 0 < t < 1.$$

Цей приклад показує точність теореми 2.8 для $p = n$.

Рівність

$$\mathcal{C}[\mu](z) = \int\limits_S \frac{d\mu(\xi)}{(1 - \langle z, \xi\rangle)^n},\ z \in B$$

часто розглядають як оператор Коші-Сеге, який діє з простору $M(S)$ ($M^+(S)$) борелевих (додатних) мір на S в клас аналітичних функцій в B.

Позначимо $H^p_q(B)$, $1 \le p \le \infty$, $q \ge 0$, клас аналітичних функцій f в B з такою нормою

$$\|f\|^p_q = \sup_{0<r<1} (1-r)^q \left(\int_S \|f(r\xi)\|^p d\sigma(\xi) \right)^{1/p},$$

$$\|f\|^\infty_q = \sup_{0<r<1} (1-r)^q \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Також h^p_q позначатиме клас гармонійних функцій в B з такою ж нормою. Відомо, що існують міри $\mu \in M(S)$ такі, що $\mathcal{C}[\mu] \notin H^1_0(B)$ ([52, с.30]). Позначимо через $\Lambda_\alpha(S)$ ($\Lambda^+_\alpha(S)$) клас (додатних) мір на S таких, що

$$\|\mu\|_\alpha = \sup_{0<\delta\le\sqrt{2}} \frac{\omega(\delta,\mu)}{\delta^{2\alpha}} < +\infty.$$

Наслідок 2.4. *Оператори $C[\mu]$ і $P[\mu]$, що діють з $\Lambda_\alpha(S) \subset M(S)$ і $\Lambda^+_\alpha(S) \subset M^+(S)$ в $H^\infty_{n-\alpha}(B)$ і $h^\infty_{n-\alpha}(B)$, відповідно, є обмеженими. Більше того,*

$$\|C\| \le \frac{2^{3n}}{2^p - 1} + 2^{n-p} \text{ та } \|P\| \le \frac{2^{7n}}{2^{n+p} - 1} + 2^{2n-p}.$$

Доведення. Обмеженість операторів $\mathcal{C}[\mu]$ і $\mathcal{P}[\mu]$ випливає з теорем 2.8 та 2.9 відповідно. Доведемо потрібні нерівності,

$$\|C\| = \sup_{|\mu|\ne 0} \frac{\|C\mu\|^\infty_{n-\alpha}}{\|\mu\|_\alpha} \le \max\left\{ 2^{n-p} \sum_{k=1}^\infty \frac{2^{k(n-p)}}{(3\cdot 2^{k-2}-1)^n} + 2^{n-p}, 8^{n-p} \right\}$$

$$\le \max\left\{ 2^{n-p} \sum_{k=1}^\infty \frac{2^{k(n-p)}}{2^{(k-2)n}} + 2^{n-p}, 8^{n-p} \right\}$$

$$\leq \max\left\{\frac{2^{3n}}{2^p-1}+2^{n-p}, 8^{n-p}\right\} = \frac{2^{3n}}{2^p-1}+2^{n-p}.$$

і

$$\|P\| = \sup_{|\mu|\neq 0}\frac{\|P\mu\|^{\infty}_{n-\alpha}}{\|\mu\|_{\alpha}} \leq \max\left\{2^{2n-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k(n-p)}}{(3\cdot 2^{k-2}-1)^{2n}}+2^{2n-p}, 2^{4n-3p}\right\}$$
$$\leq \max\left\{\frac{2^{7n}}{2^{n+p}-1}+2^{2n-p}, 2^{4n-3p}\right\} = \frac{2^{7n}}{2^{n+p}-1}+2^{2n-p}.$$

Наслідок 2.4 доведено. □

Приклад 2.5. Нехай μ – борелева міра на $S = S_2 \subset \mathbb{C}^2$ і

$$\mu(\xi) = \begin{cases} k^{-l}, & \xi = (1-k^{-q}, \sqrt{1-(1-k^{-q})^2}) \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

де $1 < l < 2q+1,\ q > 0,\ k = 0, 1, \ldots$.

Тоді $\omega(\delta, \mu) \asymp \delta^{2\frac{l-1}{q}}$, тобто $\mu \in \Lambda_{\frac{l-1}{q}}$ і

$$\max_{|z|=r}|\mathcal{C}[\mu](z)| \geq \frac{c}{(1-r)^{2-\frac{l-1}{q}}}.$$

Доведення. Виконуються співвідношення

$$\omega(\delta, \mu) = \int\limits_{|1-\xi_1|<\delta^2} d\mu(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k^{-q}<\delta^2} k^{-l} = \sum_{k>\delta^{-\frac{2}{q}}} k^{-l} \asymp \delta^{\frac{2}{q}(l-1)}.$$

Нехай $z = re_1$ де $e_1 = (1, 0) \in S_2,\ r \in (0, 1)$

$$\mathcal{C}[\mu](re_1) = \int\limits_{S_2}\frac{d\mu(\xi)}{(1-r\xi_1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-l}}{(1-r(1-k^{-q}))^2} \geq$$

$$\geq \sum_{k=\left[\frac{1}{(1-r)^{1/q}}\right]}^{2\left[\frac{1}{(1-r)^{1/q}}\right]}\frac{1}{k^l(1-r+\frac{r}{k^q})^2} \geq \sum_{k=\left[\frac{1}{(1-r)^{1/q}}\right]}^{2\left[\frac{1}{(1-r)^{1/q}}\right]}\frac{(1-r)^{\frac{l}{q}}}{2^l}\frac{1}{((1-r)+r(1-r))^2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2(1-r)^{\frac{1}{q}}} \frac{(1-r)^{\frac{l}{q}}}{2^l} \frac{1}{4(1-r)^2} = \frac{1}{2^{l+3}}(1-r)^{\frac{l-1}{q}-2}.$$

$\square$

Приклад 2.5 показує точність наслідку 2.4 для $\alpha = \frac{l-1}{q} \in (0, n)$, $n = 2$.

Висновки до розділу 2

У другому розділі:

— описано асимптотичну поведінку середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ, що узагальнює результати Столла, де оцінено максимальну швидкість зростання $m_p(r, G_\mu)$, для $1 \leq p \leq \frac{2n-1}{2n-3}$, без урахування властивостей конкретної міри μ ([40],[41]).

— знайдено необхідні умови для оцінки зростання $m_p(r, G_\mu)$ у випадку $0 < p < 1$.

— описано асимптотичну поведінку p-их середніх недодатних $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, що зображуються у вигляді

$$u(z) = H_u(z) - \int_B G(z, w) d\mu_u(w),$$

де H_u — найменша $\mathcal{M}$-гармонійна мажоранта функції u, у термінах гладкості міри Рісса μ. Теорема 2.5 узагальнює результат І.Е.Чижикова [6] для субгармонійних функцій в одновимірному комплексному просторі.

— знайдено точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стільтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стільтьєса та оцінку зростання інтегралу Пуассона-Стільтьєса.

РОЗДІЛ 3

ЗРОСТАННЯ λ-СПІРАЛЕПОДІБНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай λ – дійсне число, яке знаходиться між $-\frac{\pi}{2}$ та $\frac{\pi}{2}$. Крива

$$\gamma_\lambda : t \mapsto \exp(te^{i\lambda}),\ t \in \mathbb{R}$$

та її повороти $e^{i\theta}\gamma_\lambda$, $\theta \in \mathbb{R}$ називаються λ-спіралями. Область Ω така, що $0 \in \Omega$ називається λ-*спіралеподібною* (відносно 0), якщо

$$\forall \omega \in \Omega : \ [0, \omega]_\lambda \subset \Omega,$$

де

$$[0, \omega]_\lambda = \{\omega \exp(te^{i\lambda}) : t \le 0\} \cup \{0\}.$$

Аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функція f така, що $f(0) = 0$ називається λ-*спіралеподібною*, якщо f відображає $\mathbb{D}$ однолисто на λ-спіралеподібну область. Також позначимо ([26])

$$\theta = \arg_\lambda \omega \quad \ \omega \in e^{i\theta}\gamma_\lambda(\mathbb{R}).$$

Нехай S позначатиме клас аналітичних та однолистих в $\mathbb{D}$ функцій ([34, с.11]), які задовольняють умови $f(0) = 0$ і $f'(0) = 1$,

$$\mathfrak{F}_\lambda = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\lambda} z f'(z)}{f(z)}\right) > 0, \ \ z \in \mathbb{D} \right\}, \quad \lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Зауважимо, що $\mathfrak{F}_\lambda$, $\lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ збігається з класом λ-спіралеподібних функцій, нормованих наступним чином $f'(0) = 1$.

Для $f \in S$, $R > 0$, нехай $\alpha(R, f)$ позначатиме довжину найбільшої дуги, яка міститься в множині $\{\zeta \in \partial\mathbb{D} : R\zeta \in f(\mathbb{D})\}$. Оскільки функція $\alpha(R, f)$ – незростаюча, коли f – спіралеподібна, то існує границя

$$A(f) = \lim_{R\to+\infty} \alpha(R, f) \ ([26]).$$

Позначимо

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

У [26] Кім та Сугава довели, що

$$\overline{\lim_{r\to 1-}} \frac{\log M(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} = \frac{A(f)\cos^2\lambda}{\pi}$$

для кожної $f \in \mathfrak{F}_\lambda$. Зауважимо, що при $\lambda = 0$ це результат отримав Поммеренке у [32].

Наступна теорема є узагальненням результату Поммеренке ([32]) для зіркових функцій (див. також [30]).

Теорема I ([26]). *Нехай $f \in \mathfrak{F}_\lambda$, $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тоді границі*

$$\beta(t) = \lim_{r\to 1-} \arg_\lambda f(re^{it}) \quad i \quad f(e^{it}) = \lim_{r\to 1-} f(re^{it}) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

існують для кожного $t \in \mathbb{R}$ таким чином, що $\beta(t)$ неспадна при $t \in \mathbb{R}$ і $\beta(t + 2\pi) = \beta(t) + 2\pi$. Більше того, f можна зобразити у вигляді

$$f(z) = z \exp\left(-\frac{e^{i\lambda}\cos\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it}z)d\beta(t)\right), \quad z \in \mathbb{D}, \qquad (3.1)$$

де log *означає головне значення Log.*

Навпаки, якщо $\beta(t)$ неспадна дійснозначна функція, $t \in \mathbb{R}$, для якої виконується $\beta(t + 2\pi) = \beta(t) + 2\pi$, тоді функція f задана (3.1) *є λ-спіралеподібною.*

Гансен висловив припущення [21] що

$$M(r,f) = O((1-r)^{-q_0}) \text{ якщо } \quad A(f) \neq 0 \tag{3.2}$$

де $q_0 = \frac{1}{\pi} A(f) \cos^2 \lambda$. Також він припускав, що

$$a_n = O(n^{q_0 - 1}) \qquad q_0 > 1. \tag{3.3}$$

Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава [26] показали, що в загальному випадку це не так.

Теорема J ([26]). *Нехай* $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ *і* $0 < A < 2\pi$. *Тоді існує* $f \in \mathfrak{F}_\lambda$ *така, що* $A(f) = A$, *але співвідношення*

$$M(r,f) \asymp (1-r)^{-A(f)\cos^2 \lambda/\pi}$$

не виконується.

Доведення цієї теореми ґрунтується на наступній лемі.

Лема 3.1 ([26]). *Нехай*

$$g_0(z) = \frac{1}{1-z} \log \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) z^n, \ z \in \mathbb{D}.$$

Тоді функція g_0 *є зірковою,* $A(g_0) = \pi$ *і крім того виконується*

$$M(r, g_0) \asymp \frac{\log \frac{1}{1-r}}{1-r}, \quad r \to 1- .$$

Зауваження 3.1. Оскільки

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \asymp \log n,$$

це показує, що (3.3) не виконується коли $\lambda = 0$ і $q_0 = 1$.

Для $f \in \mathfrak{F}_\lambda$, запишемо

$$\log M(r,f) \equiv q_0 \log \tfrac{1}{1-r} + \delta_f(r), \quad 0 < r < 1.$$

гіпотеза Гансена рівносильна припущенню, що величина $\delta_f(r)$ обмежена зверху. З прикладу Кіма та Сугави випливає, що $\delta_f(r)$ може зростати як $\log\log \frac{1}{1-r}$ при $r \to 1-$ для $f \in \mathfrak{F}_\lambda$, $q_0 = q_0(\lambda)$.

Природно виникає наступне питання, *яка максимальна швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу $\mathfrak{F}_\lambda$?*

Зауваження 3.2. З означення q_0 випливає, що

$$\delta_f(r) = o\left(\log \frac{1}{1-r}\right), \ r \to 1- .$$

Ми покажемо, що посилити це співвідношення не можна.

Функція $\psi : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ називається повільно зростаючою ([37]), якщо ψ неспадна і

$$\forall c > 0 : \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(cx)}{\psi(x)} = 1.$$

Наступна теорема є основним результатом цього розділу.

Теорема 3.1. *Нехай ψ — додатна необмежена повільно зростаюча функція на $[0,+\infty)$, $0 \le A < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$. Тоді існує функція $f \in \mathfrak{F}_\lambda$ така, що $A(f) = A$ і константа $D > 0$ така, що*

$$\log M(r,f) \ge \frac{A\cos^2\lambda}{\pi} \log\frac{1}{1-r} + \frac{D\log\frac{1}{1-r}}{\psi(\frac{1}{1-r})} + O(1), \quad r \to 1- .$$

Зауваження 3.3. Якщо $\frac{\log x}{\psi(x)} \to +\infty$, то $O(1)$ в оцінці теореми можна відкинути.

Зважаючи на зауваження 3.2, твердження теореми не можна покращити, тому що функція ψ може зростати до нескінченності якзавгодно повільно.

Доведення теореми 3.1. Визначимо функцію $\beta(t)$ на $[-\pi,\pi]$ наступним чином

$$\beta(t) = AH(t) + \beta^*(t),$$

де

$$\beta^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [-\pi, 0]; \\ \frac{B}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}, & \text{якщо } t \in (0, \pi], \end{cases}$$

а $\psi(t)$ і A визначені в припущенні теореми,

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \ t \le 0; \\ 1, & \text{якщо } \ t > 0, \end{cases}$$

та стала B задовольняє рівність $A + \frac{B}{\psi\left(\frac{1}{\pi}\right)} = 2\pi$, тобто

$$B = \psi\left(\frac{1}{\pi}\right)(2\pi - A) > 0.$$

Оскільки функція ψ — неспадна і додатна, то $\beta(t)$ теж неспадна та додатна, крім того, за побудовою функції β, виконується рівність

$$\beta(t + 2\pi) = \beta(t) + 2\pi.$$

Тому для $\beta(t)$ виконуються умови теореми I. Отже, функція

$$f(z) = z \exp\left(-\frac{e^{i\lambda}\cos\lambda}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log(1 - e^{-it}z)d(AH(t) + \beta^*(t))\right) =$$

$$= z\exp\left(-\frac{Ae^{i\lambda}\cos\lambda}{\pi}\log(1-z)-\frac{e^{i\lambda}\cos\lambda}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log(1-e^{-it}z)d\beta^*(t)\right),$$

де $\log(1-w)$, $w\in\mathbb{D}$ — головне значення $\mathrm{Log}(1-w)$, належить до класу $\mathfrak{F}_\lambda$.

Розглянемо

$$\log\left|\frac{f(z)}{z}\right| = -\operatorname{Re}\left\{\frac{Ae^{i\lambda}\cos\lambda}{\pi}\log(1-z)\right\}-$$

$$-\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i\lambda}\cos\lambda}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log(1-e^{-it}z)d\beta^*(t)\right\}=$$

$$=-\frac{A\cos\lambda}{\pi}\operatorname{Re}\left\{e^{i\lambda}\log(1-z)\right\}-\frac{\cos\lambda}{\pi}\operatorname{Re}\left\{e^{i\lambda}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log(1-e^{-it}z)d\beta^*(t)\right\}.$$

Якщо $z=re^{i\varphi},\varphi=0$, то проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\log\frac{|f(r)|}{r}=\frac{A\cos\lambda}{\pi}\log\frac{1}{1-r}-\frac{\cos\lambda}{\pi}\operatorname{Re}\left\{e^{i\lambda}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log(1-e^{-it}r)d\beta^*(t)\right\}=$$

$$=q_0\log\frac{1}{1-r}-\frac{\cos\lambda}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\log(1-e^{-it}r)\beta^*(t)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\right.$$

$$\left.+e^{i\lambda}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{ire^{-it}}{1-re^{-it}}\beta^*(t)dt\right\}=q_0\log\frac{1}{1-r}+\frac{\cos^2\lambda}{\pi}(2\pi-A)\log\frac{1}{1+r}+$$

$$+\frac{r\cos\lambda}{\pi}\operatorname{Re}\left\{e^{i\lambda}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{ie^{-it}}{1-re^{-it}}\beta^*(t)dt\right\}=$$

$$=q_0\log\frac{1}{1-r}+O(1)-\frac{r\cos\lambda}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(\lambda-t)}}{1-re^{-it}}\beta^*(t)dt\right\}.$$

Обчислимо

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i(\lambda-t)}}{1-re^{-it}}\right\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i(\lambda-t)}-re^{i\lambda}}{|1-re^{-it}|^2}\right\}=\frac{\sin(\lambda-t)-r\sin\lambda}{|1-re^{-it}|^2}.$$

Тоді

$$\log\frac{|f(r)|}{r} = q_0\log\frac{1}{1-r} + O(1) + \frac{r\cos\lambda}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{r\sin\lambda - \sin(\lambda - t)}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt =$$

$$= q_0\log\frac{1}{1-r} + O(1) + \frac{r\cos\lambda}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\lambda(r-\cos t) + \cos\lambda\sin t}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt =$$

$$= q_0\log\frac{1}{1-r} + O(1) + \frac{r\sin 2\lambda}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{r-\cos t}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt +$$

$$+\frac{r\cos^2\lambda}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt.$$

Оцінимо перший інтеграл, враховуючи зростання і невід'ємність β^*,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|r-\cos t|}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{1-\cos t + 1 - r}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{1-\cos t}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt +$$

$$+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1-r}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt \le \int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{(1-r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}\beta^*(t)dt +$$

$$+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{2}{1+r^2-2r\cos t}\beta^*(t)dt + \int\limits_{0}^{\pi}\frac{1-r}{|1-re^{-it}|^2}\beta^*(t)dt \le$$

$$\le \int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{r^2\sin^2 t}\beta^*(t)dt + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{2}{1+r^2}\beta^*(t)dt + \pi\beta^*(\pi)\frac{1-r}{1-r^2} \le$$

$$\le \frac{\beta^*(\pi/2)}{r^2} + \frac{\pi\beta^*(\pi)}{1+r^2} + \pi\beta^*(\pi)$$

тут ми використали рівність

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1-r^2}{|1-re^{-it}|^2}dt = 1,$$

парність ядра Пуассона і той факт, що

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\sin^2 t} dt = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \mathrm{tg} \frac{t}{2} \bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\log \frac{|f(r)|}{r} \geq q_0 \log \frac{1}{1-r} + O(1) + \frac{r \cos^2 \lambda}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{|1 - re^{-it}|^2} \beta^*(t) dt.$$

Крім того, для $t \in (1-r, \pi/2)$

$$|1 - re^{-it}|^2 = (1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2} \leq t^2 + 4r \left(\frac{t}{2}\right)^2 \leq 2t^2.$$

Тому, враховуючи цю нерівність та нерівність

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \ \ t \in [0, \pi/2],$$

$$\log \frac{|f(r)|}{r} \geq q_0 \log \frac{1}{1-r} + O(1) + \frac{r \cos^2 \lambda}{\pi} \int\limits_{1-r}^{\pi/2} \frac{\sin t}{|1 - re^{-it}|^2} \beta^*(t) dt \geq$$

$$\geq q_0 \log \frac{1}{1-r} + \frac{r \cos^2 \lambda}{\pi} \beta^*(1-r) \int\limits_{1-r}^{\pi/2} \frac{\sin t}{2t^2} dt + O(1) \geq$$

$$\geq q_0 \log \frac{1}{1-r} + \frac{r \cos^2 \lambda}{\pi} \beta^*(1-r) \int\limits_{1-r}^{\pi/2} \frac{1}{\pi t} dt + O(1) \geq$$

$$\geq q_0 \log \frac{1}{1-r} + \frac{r \cos^2 \lambda}{\pi^2} \frac{B}{\psi(\frac{1}{1-r})} \log \frac{1}{1-r} + O(1).$$

Це завершує доведення теореми, де $0 < D < B \cos^2 \lambda / \pi^2$. □

Далі ми оцінимо коефіцієнти в розкладі Тейлора для функції f, яка була побудована раніше. Для цього потрібні додаткові умови на гладкість функції ψ.

Нагадаємо поняття уточненого порядку ([24]) на $[r_0, 1)$, $r_0 \in [0, 1)$.

Функція $\alpha(r)$, яка задовольняє умови:

i) $\alpha(r)$ додатна та диференційована на $0 \le r_0 < r < 1$;

ii) $\alpha(r) \to \alpha$ при $r \to 1-$, де $0 < \alpha < \infty$;

iii) $\lim_{r\to 1-} \alpha'(r)(1-r)\log(1-r) = 0$

називається *уточненим порядком.*

Твердження 3.1. *Нехай виконуються припущення теореми 3.1 і $A\cos^2\lambda > \pi$. Крім того припустимо, що $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ψ диференційована та виконується рівність*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\psi'(t)t\log t}{\psi^2(t)} = 0.$$

Тоді існує послідовність натуральних чисел (n_k), $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to \infty)$, така, що

$$|a_{n_k}| \ge c n_k^{\alpha\left(1-\frac{1}{n_k}\right)},$$

де

$$\alpha(r) = q_0 - 1 + \frac{D}{\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)},\ c > 0.$$

Приклад 3.1. Нехай $\psi(x) = D\log^{1-p} x$, де $0 < p < 1$, $q_0 > 1$. Тоді

$$\alpha(r) = q_0 - 1 + \frac{1}{\log^{1-p}\frac{1}{1-r}}$$

— уточнений порядок, оскільки $\alpha(r)$ – додатна і диференційована, за означенням, та виконуються співвідношення

$$\lim_{r\to 1-} \alpha(r) = q_0 - 1,$$

$$\lim_{r\to 1-}\alpha'(r)(1-r)\log(1-r)=\lim_{r\to 1-}(1-p)\frac{1}{\log^{1-p}\frac{1}{1-r}}=0.$$

Очевидно, $\psi(x)$ є необмеженою, диференційованою та повільно зростаючою функцією, для якої

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\psi'(t)t\log t}{\psi^2(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-p}{D\log^{1-p}t}=0.$$

Тому з твердження 3.1 випливає

$$|a_{n_k}|\geq cn_k^{q_0-1+\log^{p-1}n_k}\geq cn_k^{q_0-1}e^{\log^p n_k},\ k\to\infty.$$

Приклад 3.2. Нехай

$$\psi(x)=\frac{D\log x}{\beta\log\log x},$$

де $\beta>0$, тоді

$$\alpha(r)=q_0-1+\frac{\beta\log\log\frac{1}{1-r}}{\log\frac{1}{1-r}}.$$

Оскільки функція ψ необмежена, повільно зростаюча та диференційована і

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\psi'(t)t\log t}{\psi^2(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\beta(\log\log t-1)}{D\log t}=0,$$

то вона задовольняє умови твердження 3.1. Отже, виконується співвідношення

$$|a_{n_k}|\geq cn_k^{q_0-1}n_k^{\beta\frac{\log\log n_k}{\log n_k}}=cn_k^{q_0-1}\log^\beta n_k,\ k\to\infty.$$

Для доведення твердження 3.1, нам потрібна наступна елементарна лема. Ймовірно це відомий факт, та для повноти викладу, ми його доведемо.

Лема 3.2. *Нехай функція* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *аналітична у* $\mathbb{D}$, *і* $\alpha(r)$, $r \in (0,1)$ — *уточнений порядок. Тоді*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \le n^{\alpha(1-\frac{1}{n})} \Rightarrow |f(z)| < C(1-|z|)^{-\alpha(|z|)-1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Доведення леми 3.2. Означимо $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n$. Ми можемо написати таку оцінку

$$|f(z)| \le f^\star(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \le \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha(1-\frac{1}{n})} r^n, \quad r = |z|.$$

Далі знайдемо оцінку зверху для максимального члена ряду

$$\mu_{f^\star}(r) = \max\{|a_n| r^n : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Знайдемо центральний індекс. Для цього продиференціюємо логарифм загального члена. З відношення

$$\alpha'\Big(1 - \frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x^2}\log x + \alpha\Big(1 - \frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x} + \log r = 0,$$

ми отримаємо, використовуючи iii), що

$$\left(\alpha\left(1 - \frac{1}{x}\right) + o(1)\right)\frac{1}{x} = -\log r, \ x \to +\infty.$$

Звідки

$$x = \frac{\alpha\left(1 - \frac{1}{x}\right) + o(1)}{-\log r} \sim \frac{\alpha}{-\log r}, \ x \to +\infty.$$

Отже, центральний індекс

$$\nu_{f^\star}(r) = \max\{n : |a_n| r^n = \mu_{f^\star}(r)\}$$

задовольняє рівність

$$\nu_{f^\star}(r) = \frac{\alpha}{1-r}(1 + o(1)), \quad r \to 1- .$$

Тому

$$\mu_f(r) = \left(\frac{\alpha}{1-r}\right)^{\alpha\left(1-\frac{1-r}{\alpha}(1+o(1))\right)} r^{\frac{\alpha}{1-r}(1+o(1))} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{1-r}\right)^{\alpha\left(1-\frac{1-r}{\alpha}(1+o(1))\right)} e^{-\alpha(1+o(1))}. \qquad (3.4)$$

З властивостей уточненого порядку випливає, що функція

$$L(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\alpha(r)-\alpha}$$

повільно зростаюча для $0 < r < 1$ ([24]), тобто

$$L\left(r + \frac{1}{k}(1-r)\right) \sim L(r),\ r \to 1-,\ k \geq k_0 > 1.$$

Якщо ми позначимо

$$\beta(1-r) = 1 - r - \frac{1}{k}(1-r),$$

то

$$\left(\frac{1}{\beta(1-r)}\right)^{\alpha(1-\beta(1-r))-\alpha} = L(1-\beta(1-r)) \sim$$

$$\sim L(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\alpha(r)-\alpha},\ r \to 1- .$$

Вибираючи

$$k = \frac{\alpha}{\alpha-1}(1+o(1)),\ r \to 1-,$$

ми отримаємо, що

$$\beta(1-r) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)(1-r) \sim \frac{\alpha}{1-r}.$$

Отже, з (3.4) виводимо

$$\mu_{f*}(r) \leq (1+o(1))\left(\frac{\alpha}{1-r}\right)^{\alpha(r)} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha},\ r \to 1-.$$

І нарешті,

$$|f(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\frac{1+r}{2}\right)^n \left(\frac{2r}{1+r}\right)^n <$$

$$< \mu_{f^\star}\left(\frac{1+r}{2}\right)\frac{1+r}{1-r} < \frac{c}{(1-r)^{\alpha(r)+1}}.$$

□

Доведення твердження 3.1. З теореми 3.1 ми маємо

$$M(f,r) \ge c(1-r)^{-\alpha(r)-1},$$

де

$$\alpha(r) = q_0 - 1 + D/\psi(\frac{1}{1-r}).$$

Тому для доведення достатньо показати, що $\alpha(r)$ задовольняє три умови з означення уточненого порядку. Очевидно, що перша умова, що функція $\alpha(r)$ диференційована на $0 \le r_0 < r < 1$ виконується. Оскільки

$$\psi(t) \nearrow +\infty \ (t \to +\infty),$$

друга умова $\alpha(r) \to q_0 - 1$ при $r \to 1-$ задовольняється теж.

Також, виконання останньої умови

$$\lim_{r \to 1} \alpha'(r)(1-r)\log(1-r) = 0$$

випливає з другого припущення в твердженні.

Отже, застосовуючи лему 3.2, ми отримаємо

$$M(r,f) \ge \frac{1}{(1-r)^{A\cos^2\lambda/\pi}} \frac{1}{(1-r)^{D/\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)}} \Rightarrow |a_{n_k}| \ge c n_k^{\alpha\left(1-\frac{1}{n_k}\right)}$$

для деякої послідовності натуральних чисел (n_k), $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ і деякого $c > 0$. □

Висновки до розділу 3

Гіпотеза Гансена ([21]) полягає в тому, що величина $\delta_f(r)$ для максимуму модуля нормованої певним чином λ-спіралеподібної функції

$$\log M(r, f) \equiv q_0 \log \frac{1}{1-r} + \delta_f(r)$$

обмежена зверху. Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава довели, що $\delta_f(r)$ може зростати як $\log\log \frac{1}{1-r}$ при $r \to 1-$ для $f \in \mathfrak{F}_\lambda,\ q_0 = q_0(\lambda)$ ([26]). В третьому розділі:

— описано максимальну швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу $\mathfrak{F}_\lambda$, що узагальнює результат Кіма та Сугави;

— оцінено зверху коефіцієнти в розкладі Тейлора для функції f, яка була побудована в цьому розділі.

ВИСНОВКИ

У другому розділі описано зростання середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ, що є узагальненням результату Столла, який знайшов точну оцінку швидкості зростання $m_p(r, G_\mu)$, для $1 \leq p < \frac{2n-1}{2n-3}$, без урахування властивостей конкретної міри μ ([40],[41]). Також знайдено необхідні умови для оцінки зростання $m_p(r, G_\mu)$ у випадку $0 < p < 1$. Досліджено асимптотичну поведінку p-их середніх недодатних $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, що зображуються у вигляді

$$u(z) = H_u(z) - \int_B G(z, w) d\mu_u(w),$$

де H_u — найменша $\mathcal{M}$-гармонійна мажоранта функції u, у термінах гладкості міри Рісса μ. Теорема 2.5 узагальнює результат І.Е.Чижикова [6] для субгармонійних функцій в одновимірному комплексному просторі.

Отримано точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стільтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стільтьєса та оцінку зростання інтегралу Пуассона-Стільтьєса.

В третьому розділі описано узагальнення результату Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава [26], які спростували гіпотезу Гансена [21], щодо поведінки максимуму модуля λ-спіралеподібних функцій на колі радіуса $r, \quad 0 < r < 1$. Гіпотеза рівносильна припущенню, що величина $\delta_f(r)$ у виразі

$$\log M(r, f) \equiv q_0 \log \frac{1}{1-r} + \delta_f(r)$$

обмежена зверху. З прикладу Кіма та Сугави випливає, що $\delta_f(r)$ може зростати як $\log\log\frac{1}{1-r}$ при $r \to 1-$ для $f \in \mathfrak{F}_\lambda,\ q_0 = q_0(\lambda)$. В дисертаційній роботі описано максимальну швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу λ-спіралеподібних в одиничному крузі функцій $\mathfrak{F}_\lambda$ та оцінено коефіцієнти з розкладу в ряд Тейлора для функції f.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bruna, J., Ortega-Cerda, J.: On L^p-solutions of the Laplace equation and zeros of holomopphic functions. Annali della Schola Normale Superiore di Pisa — Classe di Scienze **24**(3), 571–591 (1997).
2. Chen, Sh., Mateljevic, M., Ponnusamy, Wang, X.: Lipschitz type spaces and Landau-Bloch type theorems for harmonic functions and Poisson equations. arXiv preprint arXiv:1407.7179. (2014).
3. Chen, Sh., Rasila, A., Wang, X.: Radial growth, Lipschitz and Dirichlet spaces on solutions to the Yukawa equation. Israel J. Math., 1–22 (2012).
4. Chyzhykov, I.: Growth and representation of analytic and harmonic functions in the unit disc. Ukrainian Math. Bulletin. **3**(1), 31–44 (2006).
5. Chyzhykov, I.: Growth of analytic functions in the unit disc and complete measure in the sense of Grishin. Mat. Stud. **29**(1), 35–44 (2008).
6. Chyzhykov, I.: Growth of pth means of analytic and subharmonic function in the unit disk and angular distribution of zeros. arXiv:1509.02141v2 [math.CV], 1–19 (2015).
7. Chyzhykov, I.: Asymptotic behaviour of pth means of analytic and subharmonic functions in the unit disc and angular distribution of zeros. submitted.
8. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of spirallike function. Analele Universitatii Oradea Fasc. Matematica **22**(2), 93–99 (2015).

9. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of the Cauchy-Szegő transform in the unit ball. J. Math. Phys. Anal, Geom. **11**(3), 236–244 (2015).

10. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On asymptotic behavior of the pth means of the Green potential for $0 < p \leq 1$. Mat. Stud. **46**(2), 159–170 (2016).

11. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: Growth description of pth means of the Green potential in the unit ball. Complex Variables and Elliptic Equations **62**(7), 899–913 (2017).

12. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On decrease of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. (83), 90–99 (2017).

13. Chyzhykov, I., Zolota, O.: Sharp estimates of the growth of the Poisson-Stieltjes integral in the polydisc. Mat. Stud. **34**(2), 193–196 (2010).

14. Chyzhykov, I., Zolota, O.: Growth of the Poisson-Stieltjes integral in the polydisc. J.Math. Phys. Analysis, Geometry. **7**(2), 141–157 (2011).

15. Duren, P. L.: Theory of H^p Spaces. M.: Academic Press. (1970).

16. Duren, P. L.: Univalent functions. Springer-Verlag, New York (1983).

17. Gardiner, S. J.: Representation and growth of subharmonic functions in half-space. Proc. London Math. Soc. 3 **48**, 300–318 (1984).

18. Gardiner, S. J.: Growth properties of pth means of potentials in the unit ball. Proc. Amer. Math. Soc. **103**, 861–869 (1988).

19. Hahn, K.T., Mitchell, J.: Representation of linear functionals in H^p-spaces over bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$. J. Math. Anal. Appl. **56**(22), 379–396 (1976).

20. Hahn, K. T., Singman, D.: Boundary behavior of invariant Green's potentials on the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Trans. Amer. Math. Soc. **309.**, 339–354 (1988).

21. Hansen, L. J.: The Hardy class of a spirallike function. Michigan Math.J. **18**, 279–282 (1971).

22. Hardy, G.H., Littlewood, J. E.: A convergence criterion for Fourier series. Math. Z. **28**(4), 612–634 (1928).

23. Hayman, W. K., Kennedy, P. B.: Subharmonic functions, V.1. Academic press, London-New York-San Francisco (1976).

24. Juneja, O. P., Kapoor, G. P.: Analytic functions – growth aspects. Pitman Publishing inc. Boston-London-Melbourne. (1985).

25. Khan, K. T., Mitchell, J.: Green's function on the classical Cartan domains. MRC Technical Summary Report. 500, (1967).

26. Kim, Yong Chan, Sugawa, Toshiyuki.: Correspondence between spirallike functions and starlike functions. Math. Nachr. **285**(2-3), 322–331 (2012).

27. Kranz, S. G.: Lipschitz spaces, smoothness of functions, and approximation theory. Expo. Math. **3**, 193–260 (1983).

28. Linden, C. N.: Integral logarithmic means for regular functions. Pacific J. of Math. **138**, 119–127 (1989).

29. Linden, C. N.: The characterization of orders for regular functions. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **111**, 299–307 (1992).

30. MacGregor, T. H.: Hull subordination and extremal problems for starlike and spirallike mappings. Trans. Amer. Math. Soc. **183**, 499–510 (1973).

31. MacLane, G. R.: On the growth of the Blaschke products. Canad. J. Math. **21**, 595–600 (1969).

32. Pommerenke, Ch.: On starlike and convex functions. J. London Math. Soc. **37**, 209–224 (1962).

33. Pommerenke, Ch.: On starlike and close-to-convex functions. Proc. London Math. Soc. 3 **13**,290-304 (1963).

34. Pommerenke, Ch.: Univalent functions. Vandenhoedc Ruprecht in Gi-ottingen. Studia Mathematica **25** (1975).

35. Rudin, W.: Theory functions in the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Berlin-Heidelberg, New York: Springer Verlag. (1980).

36. Rudin, W.: Theory functions in the polydisc. New York-Amsterdam: W. A. Benjamin Inc. (1969).

37. Seneta, E.: Regularly Varying Functions. Springer-Verlag, Berlin. (1976).

38. Stoll, M.: On the rate of growth of the means M_p of holomorphic and pluriharmonic functions on the ball. J.Math. Anal. Appl. **93**, 109–127 (1983).

39. Stoll, M.: Boundary limits of subharmonic functions in the disc. Proc. Amer. Math. Soc. **93**, 567–568 (1985).

40. Stoll, M.: Rate of growth of pth means of invariant potentials in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. J. Math. Anal. Appl. **143**, 480–499 (1989).

41. Stoll, M.: Rate of growth of pth means of invariant potentials in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, II. J. Math. Anal. Appl. **165**, 374–398 (1992).

42. Stoll, M.: Invariant Potential Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Cambridge University Press. (1994).

43. Stoll, M.: Harmonic and Subharmonic Function Theory on the Hyperbolic Ball. London Mathematical Society Lecture Note Series. **431**, (2016).

44. Ulrich, D.: Radial limits of M-subharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **292**, 501–518 (1985).

45. Voitovych, M.: Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions. Mat. Stud. **47**, 20–26 (2017).

46. Березанський, Ю. М., Ус, Г. Ф., Шефтель, З. Г.: Функціональний аналіз. Львів: Вид. Чижиков І. Е. (2014).

47. Гришин, А. Ф.: Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. Ч. I. Матем. физика, анализ, геометрия **1**(2), 193–215 (1994).

48. Зорич, В. А.: Математический анализ. Ч. I. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы (1981).

49. Кадець, В. М.: Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів: Вид. Чижиков І. Е. (2012).

50. Микитюк, Я. В., Васильків, Я.В.: Критерії обмеженості інтегральних середніх логарифмів добутків Бляшке. Доп. НАН України **8**, 10–14 (2000).

51. Чижиков, І. Е.: Узагальнення однієї теореми Гарді-Літтлвуда. Мат. методи та фіз.-мех. поля **49**(2), (2006).

52. Шведенко, С. В.: Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре. Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. **23**, 3–124 (1985).

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Список публікацій в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of spirallike function. Analele Universitatii Oradea Fasc. Matematica **22**(2), 93-–99 (2015).
2. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of the Cauchy-Szegő transform in the unit ball. J. Math. Phys. Anal, Geom. **11**(3), 236–244 (2015).
3. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On asymptotic behavior of the pth means of the Green potential for $0 < p \leq 1$. Mat. Stud. **46**(2), 159–170 (2016).
4. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: Growth description of pth means of the Green potential in the unit ball. Complex Variables and Elliptic Equations **62**(7), 899–913 (2017).
5. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On decrease of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. (83), 90–99 (2017).
6. Voitovych, M.: Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions. Mat. Stud. **47**(1), 20–26 (2017).

Список публікацій які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Iurkevych, M.: On the growth of starlike functions. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 17-21, 2012, p. 165-166.

2. Iurkevych, M.: On the growth of spirallike functions. In: Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013, с. 89–90.

3. Voitovych, M.: On the growth of the Cauchy integral. In: Abstracts of the International Conference "Complex Analysis, Potential Theory and Applications", http://www.imath.kiev.ua/complex/conf_2013/abstracts. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the Taras Shevchenko Kiev National University, Kyiv, August 19-23, 2013.

4. Voitovych, M.: Growth of the Cauchy integral. In: Abstracts of the International Conference "Complex analysis and related topics". Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 23-28, 2013, p. 87.

5. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of starlike functions. In: Abstract book "The 10th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications", GFTA. University of Oradea, Oradea, Romania, August 25-28, 2014, p. 38.

6. Chyzhykov, I., Voitovych, M.:, Growth of the invariant Green potential. In: Abstracts of the International Conference “Complex Analysis and Related Topics”. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, May 30 - June 4 2016, p. 19-20.
7. Voitovych, M.: Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 18-23, 2017, p. 142.

Апробація результатів дисертації:

1) львівський міжвузівський семінар з теорії аналітичних функцій (керівники $\boxed{\text{проф. А. А. Кондратюк}}$ і проф. О. Б. Скасків). Львів, 2014, 2017 р.;
2) семінар з теорії потенціалу та його застосувань у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (керівники проф. О. Б. Скасків і проф. І. Е. Чижиков). Львів, 2013, 2014 р.;
3) семінар з теорії аналітичних функцій у Дрогобицькому державному педагогічному університеті ім. Івана Франка (керівник проф. Б. В. Винницький). Дрогобич, 2018 р.;
4) міжнародна наукова математична конференція присвячена 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (17-21 вересня 2012 р., Львів);
5) всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(25 лютого-3 березня 2013 р.,

Ворохта);

6) міжнародна конференція "Комплексний аналіз, теорія потенціалу та її застосування"(19-23 серпня 2013 р., Київ);

7) міжнародна наукова конференція "Complex Analysis and Related Topics"(Lviv, Ukraine, September 23-28, 2013);

8) міжнародна наукова конференція "Complex Analysis and Related Topics"(Lviv, Ukraine, May 30-June 4, 2016);

9) міжнародна наукова математична конференція присвячена 125-річчю з дня народження Стефана Банаха (18-23 вересня 2017 р., Львів).