ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію **Луківської Дзвенислави Володимирівни** *"Властивості узагальнених локсодромних та еліптичних функцій"*, подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01– математичний аналіз.

Теорія еліптичних функцій виникла у працях Н. Абеля і К. Якобі і є класичним розділом комплексного аналізу. Еліптична функція є двоперіодичною функцією, до дозволяє розглядати її як узагальнення періодичної функції дійсної змінної. Водночас добре відомим є факт, що всі (однозначні) мероморфні функції є або неперіодичними, або періодичними, або двоперіодичними.

Ерміт поряд із еліптичними функціями (які він називає подвійно періодичними функціями першого виду (espèce)) розглядає також подвійно періодичні функції другого виду, що визначаються рівностями

$$g(u + w_1) = \nu g(u), \quad g(u + w_2) = pg(u). \tag{1}$$

Термін "espèce" ми перекладаємо словом "вид", хоч, наприклад, у монографії

H. Hancock, *Lectures On The Theory Of Elliptic Functions*, New York, John Wiley Sons, 1910,

розділ 12 якої присвячений розгляду основ теорії таких функцій, використовується англійське "sort". У пізнішій англомовній літературі вживається також термін "kind".

Шарль Ерміт, зокрема, показав, що мероморфна функція, яка задовольняє умову (1), зображається (крім сингулярного випадку Міттаг-Лефлера) у вигляді

$$g(z) = \frac{\sigma(z+\lambda)}{\sigma(z)\sigma(\lambda)}e^{\rho z},$$

де σ є сігма-функцією Вейерштраса.

Іншим класичним результатом є теорема Пікара (1879 р.) про розв'язки диференціального рівняння

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

коефіцієнти якого $a_j(x)$ є подвійно періодичними (еліптичними) функціями. Вона стверджує, що коли всі розв'язки рівняння є функціями, незалежними від шляху, то рівняння має принаймні один розв'язок, який є подвійно періодичною функцією другого виду.

Дослідженнями подвійно періодичних функцій другого виду займалися також М. Басоко, Т. Белл, Д. Сафаров, А. Гаюров та інші математики.

Функціональне рівняння

$$f(qz) = p(z)f(z) \tag{2}$$

Загальна канцелярія
ЛНУ імені Івана Франка
Вхідний № 978
02 10 18

та його узагальнення у просторах аналітичних та мероморфних функцій розглядалося у працях А. Пуанкаре, Г. Валірона, Г. Поліа, Й. Попкена, Г. Віттіха, М. Кучми, І. Канапаті, Д. Вайди, Б. Швейзера, Л. Рубела, К. Ішизакі, Ж. Клуні, Й. Тумури, Г. Вейсенборна, В. Бергвайлера, І. Лайне, В. Г. Гундерсена, Й. Рієппо, А. Кондратюка та багатьох інших математиків. Зокрема, там встановлено форму аналітичних в області розв'язків рівняння (2). І. Хеллегорх використовує мероморфні розв'язки рівняння (2) при сталому p у монографії, присвяченій математиці Ферма-Вайля.

Отже, розглянуті у дисертації задачі активно досліджувалися і досліджуються математичним співтовариством.

Водночас цікавими є перспективи застосування отриманих результатів у навігації, оптиці, електротехніці. Практика показує, що для можливості використання теоретичного математичного результату у прикладних дослідженнях часто є необхідним переформулювання результату у новій, сучаснішій чи зручнішій для використання формі.

З огляду на це обрану тему дисертації вважаю **актуальною**.

Робота складається з чотирьох розділів, пов'язаних між собою тематикою та методами.

Перший розділ присвячений огляду літератури та основних результатів дисертації. Він містить значну частину необхідної для сприймання наступних розділів інформації. Цей розділ є порівняно невеликим, але інформація в ньому викладено чітко і логічно послідовно. Цікавою знахідкою у ньому є перша україномовна стаття В. Левицького з теорії еліптичних функцій.

У дисертації окремо розглядається випадок, коли в умові (1) $\nu = 1$ (такі функції автор називає p-еліптичними), а окремо, коли $|\nu| = |p| = 1$ (такі функції в дисертації називаються квазі-еліптичними). Надалі притримуватимемося термінології автора дисертації. p-еліптичні функції розглядаються тільки як ілюстрація до досліджень p-локсодромних функцій, тобто розв'язків рівняння (2), у якому $p(z) \equiv p$. Автором систематично використовується для дослідження цих функцій апарат функцій Шотткі-Кляйна, що може бути корисним при застосуваннях наведених результатів у прикладних дослідженнях. У цьому ж розділі доводиться, що кожна p-локсодромна функція є Жюліа винятковою і наводиться опис структури множини модуль-локсодромних функцій.

У третьому розділі розглядається функціональне рівняння (2) для випадку, коли p – раціональна функція. В першому підрозділі звернуто увагу на окремі найпростіші випадки раціональних функцій, у наступних розглянуто загальний випадок. Головним результатом розділу є теорема 3.2.5, яка встановлює загальний вигляд мероморфного розв'язку рівняння (2). Також наведено аналог цього результату для голоморфних функцій.

В останньому розділ досліджуються квазі-еліптичні функції. У першому підрозділі наведено основні властивості та побудовано аналоги спеціальних еліптичних функцій і наведено їх основні властивості. У наступному підрозділі розглядаються модуль-еліптичні функції. Його вважаю наоригінальнішою частиною дисертації. Автор доводить Теорему 4.2.3 про зв'язок між класами квазі-еліптичних та модуль-еліптичних функцій

Позитивним моментом дисертації вважаю монографічність її стилю. Наведені міркування легко сприймаються, прослідковується логічний зв'язок між різними частинами дисертації. Хоч фрази типу "Історія локсодроми сягає тих часів, коли мореплавці вперше зрозуміли, що Земля не є плоскою" є більш доречними у популярніших працях, ніж дисертація.

Більшість основних результатів дисертації є **новими** і всі є належно **обгрунтованими**, а їх доведення у багатьох моментах містять досить тонкі викладки.

Робота оформлена акуратно, добре оформлена стилістично. Проте у ній містяться деякі недоліки та описки:

1) недостатньо висвітлено історію розглядуваних в дисертації питань, зокрема подвійно періодичних функцій другого виду, голоморфних та мероморфних розв'язків рівняння (2); відповідно бракує порівняння результатів автора з результатами деяких її попередників (вказаних вище у відгуку);

2) вважаю підрозділ 3.1 у наведеному вигляді недоречним; твердження цього підрозділу краще було б оформити як приклади для наступних;

3) деякі підрозділи і пункти не містять виділених автором тверджень, наприклад підрозділ 2.3; вважаю, що мотивацію досліджень підрозділу 4.1 щодо спеціальних еліптичних функцій варто було б деталізувати;

4) не вказано на вклад С. Ю. Фаворова в дослідження нормальності сімей мероморфних функцій, хоч і є посилання на працю його учениці Л. Радченко;

5) у формулюванні Твердження 2.1.6 слід додати, що розглядаються функції з одним і тим же мультиплікатором q; в доведенні Теореми 3.1.9 слід описати і випадок непарних m;

6) у Теоремі 3.1.7 замість наявної умови на c_j простіше було б вказати, що $c_1 = -aq^{-\nu}$ і $c_m = -1$, $m > 1$;

7) у формулюваннях теорем 3.2.1 та 3.2.2 можна не писати двічі громіздку формулу, а другий раз зіслатися на першу з теорем;

8) у Зауваженні 4.1.3 вказується насправді, що відповідний клас нетривіальний, непорожність можна обгрунтувати і простішою функцією $f \equiv 0$; розвинення функції $\frac{1}{(u-w)^2}$ у степеневий ряд є загальновідомим фактом, не варто посилатися на монографію І. Хеллегорха;

9) вважаю, що фрази "легко бачити" на 47^{12}, "легко перевірити" на 51^2, "легко показати" на 70_9, "немає жодних сумнівівів" на 102_6 слід у дисертації змінити на обгрунтування відповідних тверджень. Всюди у дисертації для цього справді потрібні нескладні, але іноді громіздкі викладки; аналогічне стосується Зауважень 2.1.12-2.1.15.

10) описки на сс. 46^4, 54_{11}, 93_8, 101_4.

Ці зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Зміст автореферату ідентичний до основних положень дисертації, а результати з належною повнотою викладені в опублікованих працях. Список використаних джерел оформлений належним чином.

Висновки здобувача щодо значущості його праці для науки є обґрунтованими, але деякі не зовсім чітко сформульовані.

Дисертація є **завершеною** науковою роботою. У ній розв'язано ряд актуальних задач теорії аналітичних та мероморфних функцій, подано нові підходи та вдосконалено існуючі методи розв'язання таких задач, що в сукупності є суттєвим для розвитку теорії функцій комплексної змінної.

Отже, вважаю, що дисертаційна робота відповідає всім вимогам законодавства України щодо кандидатських дисертацій за спеціальністю 01.01.01– математичний аналіз, а її автор **Луківська Дзвенислава Володимирівна** заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

професор кафедри математики
Дрогобицького державного педагогічного
університету імені Івана Франка,
доктор фізико-математичних
наук, доцент В. М. Дільний

підпис докт. фіз.-мат. наук
Дільного В.М. засвідчую
Вчений секретар Вченої ради М. Д. Галів