Відгук
офіційного опонента на дисертацію
Луківської Дзвенислави Володимирівни
"Властивості узагальнених локсодромних та еліптичних функцій",
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії)
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Актуальність дослідження.

Локсодромні та еліптичні функції як особливі розділи мероморфних функцій відомі ще з XIX століття і знайшли застосування як в різних математичних теоріях, так і в багатьох галузях фізики. Останнім часом дослідженням локсодромних функцій, їх властивостей та застосувань займаються Д. Кровді, С. Кос, Т. Погани, Дж. Маркотт, М. Саломон, А. Христіянин. Значний внесок у розвиток даної теорії зробив А. Кондратюк. Щодо еліптичних функцій, то теж чимало математиків в останні роки досліджують цей об'єкт, зокрема А. Діентсфрей, Дж. Хуанг, Й. Чен, Ж. Ян, М. Вальдшмідт. Тему дисертації вважаю актуальною.

Наукова новизна.

Дисертація Луківської Дз. В. присвячена дослідженню властивостей узагальнених локсодромних та еліптичних (за Вейєрштрассом) функцій. Нагадаємо, що $f(z), z \neq 0$, називається локсодромною ($f \in \mathcal{L}_q$), якщо виконується тотожність

$$f(qz) \equiv f(z),\ z \neq 0,\ q = const \in \mathbb{C},\ 0 < |q| < 1. \tag{1}$$

Досягненням роботи Луківської Д. В. є опис всіх мероморфних розв'язків $f(z), z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ функціонального рівняння

$$f(qz) = R(z)f(z), z \neq 0,\ q = const \in \mathbb{C},\ 0 < |q| < 1, \tag{2}$$

де $R(z)$ – раціональна функція; ці розв'язки автор назвала раціонально-локсодромними.

Дослідження починаються з найпростішого випадку, коли в рівнянні (2) $R(z) = p = const$, $p \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Мероморфні розв'язки такого рівняння породжують клас p-локсодромних функцій $\mathcal{L}_{qp}$. Цей клас виявився нетривіальним розширенням класу локсодромних функцій $\mathcal{L}_q$. р-локсодромні функції частково зберігають властивості класичної локсодромності, але при цьому з'являються нові ефекти. У підрозділі 2.1 доведено теореми:

- про зображення мероморфної та голоморфної p-локсодромної функції (т. 2.1.8, т. 2.1.9);
- про кількість нулів та полюсів p-локсодромної функції $f \in \mathcal{L}_{qp}$ в довільному кільці $\{z : |q|R < |z| \leq R\}$ (т. 2.1.7);
- про Жюліа винятковість функцій з цього класу (т. 2.1.10);

У зауваженнях 2.1.12 – 2.1.15 автор навела ключові відмінності між класами $\mathcal{L}_{qp}$ та $\mathcal{L}_q$:

- клас $\mathcal{L}_q$ утворює поле, а клас $\mathcal{L}_{qp}$ утворює абелеву групу;
- єдиною сталою, що належить $\mathcal{L}_{qp}$ є $f \equiv 0$;
- тільки нулі і полюси функції $f \in \mathcal{L}_{qp}$ мають властивість: $f(z) = 0, \infty \Rightarrow f(q^n z) = 0, \infty$, $n \in \mathbb{Z}$;

- якщо голоморфна функція $f \in \mathcal{L}_{qp} \Rightarrow f \equiv 0 \vee f(z) = cz^k, p = q^k, c = const$ (наслідок 2.1.9).

За допомогою p-локсодромних функцій Луківській Д. В. вдалось повністю описати клас модуль-локсодромних функцій, введений А. Кондратюком (т. 2.2.2).

Відомо, що локсодромні функції тісно пов'язані з еліптичними. В підрозділі 2.3 автор розглянула новий клас $\mathcal{E}_p$ – клас p-еліптичних функцій і показала, що p-локсодромні функції породжують p-еліптичні і навпаки. У підрозділі 4.1 встановлено також зв'язок між p-локсодромними функціями та квазі-еліптичними функціями $\mathcal{QE}$.

Наступним кроком у напрямку узагальнень локсодромних функцій стало дослідження у підрозділі 3.1 випадків $p(z) = \frac{a}{z^m}$ та $p(z) = \frac{a}{(b-z)^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $a, b = const$. Використання результатів цих досліджень (теореми 3.1.1, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.6 - 3.1.14) надало можливість знайти всі мероморфні та голоморфні розв'язки рівняння (2) з

$$R(z) = Cz^m \frac{(a_1 - z)(a_2 - z) \dots (a_k - z)}{(b_1 - z)(b_2 - z) \dots (b_l - z)}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad C = const. \tag{3}$$

Щоб сформулювати центральний результат всієї роботи розглянемо функцію Шотткі-Кляйна

$$P(z) = (1 - z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n z) \left(1 - \frac{q^n}{z}\right),$$

а також функцію

$$H(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n z), \ q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ |q| < 1.$$

Доведена теорема 3.2.2:

Кожен мероморфний в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ розв'язок рівняння (2),(3) *має вигляд*

$$f(z) = \frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2}) \dots H(\frac{z}{b_l})g(z)}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2}) \dots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)}, \ g \in \mathcal{L}_{qp},$$

де $p = C\frac{a_1 a_2 \dots a_k}{b_1 b_2 \dots b_l}$.

З цієї теореми випливає, що рівняння (2),(3) має голоморфні розв'язки лише за умови $R(z) = \frac{M(z)}{z^m (b_1 - z)(b_2 - z) \dots (b_l - z)}$, $m \geq 0$, $M = const$. У теоремі 3.3.2 описано голоморфні раціонально-локсодромні розв'язки рівняння (2),(3).

Функція g, яка фігурує у теоремах 3.2.1 та 3.2.2 є p-локсодромною, отже, за теоремою 2.1.8, може бути вираженою через функції Шотткі-Кляйна. Це дає автору можливість описати вигляд розв'язків рівняння (2),(3) використовуючи лише функції H та P (т. 3.2.5 та 3.3.2).

Другим досягненням роботи Луківської Д. В. є узагальнення теорії Вейєрштрасса еліптичних функцій (розділ 4). Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція g називається квазі-еліптичною, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, такі що $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z + \omega_1) = e^{i\alpha} f(u), \ \ f(z + \omega_2) = e^{i\beta} f(u), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Через $\mathcal{QE} \stackrel{def}{=} \mathcal{QE}_{\alpha\beta}$ позначимо клас квазі-еліптичних функцій. (Якщо $e^{i\alpha} = e^{i\beta} = 1$ ми отримуємо класичну еліптичну функцію.)

В дисертації доведено аналоги деяких класичних теорем теорії еліптичних функцій, зокрема, що кількість нулів функції $f \in \mathcal{QE}$ дорівнює кількості її полюсів в кожному паралелограмі періодів (т. 4.1.5), також доведено, що кожна голоморфна функція $f \in \mathcal{QE}$ є сталою (т. 4.1.4). Побудовано квазі-еліптичну функцію Вейєрштрасса $\wp_{\alpha\beta}$ і знайдено аналоги ζ- та σ-функцій Вейєрштрасса (т. 4.1.6), встановлено зв'язок та співвідношення між цими узагальненнями. Доведено, що клас модуль-еліптичних функцій $|\mathcal{E}|$, введений А. А. Кондратюком, пов'язаний із класами квазі-еліптичних функцій співвідношенням (т. 4.2.2)

$$|\mathcal{E}| = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}} \mathcal{QE}_{\alpha\beta}.$$

Встановлено зв'язок між квазі-еліптичними та p-локсодромними функціями.

Всі отримані у дисертації наукові результати є новими.

Обґрунтованість, достовірність та повнота отриманих результатів.

Наукові положення та висновки, сформульовані в дисертації є достовірними, всебічно обґрунтованими і строго доведеними.

Результати дисертації з належною повнотою опубліковані в 9 статтях (2 з яких – без співавторів) і відображені в 9 тезах конференцій (4 з них – тези міжнародних конференцій). Всі статті опубліковані в наукових фахових виданнях, що задовольняють вимогам, які передбачені законодавством України щодо кандидатських дисертацій. Серед статтей є такі, що входять до міжнародних науково-метричних баз, зокрема Scopus.

Автореферат правильно і повно відображає основні положення і зміст дисертації.

До дисертації є низка зауважень:

- с. $41^{13}, 13^{9}, 42^{3}, 97^{4}$ повинно бути "$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$";
- с. 42^{11} повинно бути "є узагальненнями σ-функції Вейєрштрасса для класу квазі-еліптичних функцій", а не аналогами;
- с. 42^{10} повинно бути "$\sigma_{00}(u) \stackrel{def}{=} u$";
- с. 42^{8} слід дописати "$\omega = m\omega_1 + n\omega_2,\ m, n \in \mathbb{Z}$";
- с. 48_6 повинно бути "$q^{-n} \to +\infty$ при $n \to +\infty$";
- с. 55^6 потрібно "(2.3)" замінити на "(2.12)";
- с. 58_2 має бути "мати $\geq$ одного полюса" а не "мати лише один полюс";
- с. 66_8 має бути "g – голоморфна в $\mathbb{C}^*$";
- с. 71^{11} має бути "$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)}{z} dz = 0$";
- с. 72_2 має бути "для всіх $z \neq (-1)^m q^n,\ n \in \mathbb{Z}$";
- с. 79^1 має бути не "H^m", а "$H^m(\frac{z}{b})$";
- с. 79^3 має бути "якщо f має лише ті самі нулі, що і $H^m(\frac{z}{b})$ і тієї самої кратності, то g не має полюсів";

- с. 86^8 повинно бути

$$f(z) = L\frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2})\dots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2})\dots H(\frac{z}{a_k})}\frac{P(\frac{z}{u_1})P(\frac{z}{u_2})\cdot\ldots\cdot P(\frac{z}{v_n})}{P(\frac{z}{v_1})P(\frac{z}{v_2})\cdot\ldots\cdot P(\frac{z}{v_n})P^m((-1)^m z)}$$

(було пропущено L);

- с. 88^2 повинно бути

$$= \frac{M}{\prod\limits_{i=1}^{l}(b_i - z)}Cz^\nu\prod_{i=1}^{l}H\left(\frac{z}{b_i}\right)\frac{1}{z^m}\prod_{j=1}^{m}P\left(\frac{z}{c_j}\right) = \frac{M}{z^m(b_1-z)(b_2-z)\dots(b_l-z)}f(z).$$

Наведені зауваження не чинять істотного впливу на сприйняття отриманих дисертанткою результатів і жодним чином не зменшують позитивного враження від дисертації.

Висновки.

Дисертація Луківської Д. В. є завершеною науковою працею. Отримані результати носять теоретичний характер і є новим внеском в теорію мероморфних функцій. Вони можуть бути використані як у подальших дослідженнях з теорії функцій, так і у інших розділах сучасної математики. З огляду на вище сказане, вважаю, що дисертація Луківської Д. В. повністю відповідає вимогам Порядку присудження наукових ступенів, а її автор Луківська Дзвенислава Володимирівна заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз.

професор кафедри вищої математики
Інституту прикладної математики та фундаментальних наук
Національного університету "Львівська політехніка
доктор фізико-математичних наук, професор Мохонько А. З.

Підпис Мохонько А.З. засвідчую
Вчений секретар
НУ „Львівська політехніка" Р. Брилинський

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
ЗКПО 02071010