Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Добушовський Маркіян Степанович

УДК 517.53

Асимптотичні властивості інтеграла Лапласа-Стільтьєса

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
(доктора філософії)

Львів – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій та теорії ймовірностей
Львівського національного університету імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Шеремета Мирослав Миколайович,
завідувач кафедри теорії функцій та теорії ймовірностей
Львівського національного університету імені Івана Франка.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Винницький Богдан Васильович,
завідувач кафедри математики
Дрогобицького педагогічного університету імені Івана Франка.

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Сало Тетяна Михайлівна,
доцент кафедри вищої математики
Національного університету "Львівська політехніка";

Захист відбудеться "____" ______________ 2018 р. о "____" год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. ____

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського
національного університету імені Івана Франка за адресою:
м. Львів, вул. Драгоманова, 5 та на сайті: www.lnu.edu/research/scintific-council-on-thesis-deference/phd-thesis

Автореферат розісланий "____" місяця 2018 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради **А. Я. Христіянин**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Починаючи з другої половини XIX століття, після появи формули Коші-Адамара для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду та знаменитих праць Ж. Адамара, почав розвиватись новий напрям у теорії функції: дослідження асимптотичних властивостей аналітичних функцій у залежності від поводження їх тейлорових коефіціїнтів. Величезний вклад у розв'язання цієї проблеми внесли на початку минулого століття А. Віман, Ж. Валірон, Е. Борель, Д. Пойа та інші. Отримані Ж. Адамаром формули для знаходження порядку та типу цілої функції уточнювались багатьма авторами (Е. Ліндельоф, Ж. Валірон, П. Бутру та інші), які вводили уточнені порядки, коливні порядки та подібні до них. Щоб охопити випадки нульового та нескінченного порядку А. Шьонгаге, Г.А. Фрідман та інші використовували (p, q) – логарифмічні порядки та їм подібні, а найзагальнішою є шкала зростання, означена узагальненими порядками М.М. Шеремети. Для аналітичних в одиничному крузі функцій подібна задача у термінах порядку і типу розв'язана Ф. Бойєрманом, М. Фуджіварою та Н.В. Говоровим, а у термінах узагальнених порядків – М.М. Шереметою.

Середньою ланкою у дослідженні зв'язку між зростанням максимуму модуля цілої чи аналітичної в одиничному крузі функції та поводженням її тейлорових коефіцієнтів є максимальний член степеневого розвинення цієї функції. Оцінкам максимуму модуля цілої функції через максимальний член та еквівалентності їх логарифмів присвятили свої праці Е. Борель, А. Віман, Ж. Валірон та інші.

Безпосереднім узагальненням степеневих рядів є ряди Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками λ_n. Роль рядів Діріхле у математичному аналізі та суміжних розділах сучасної математики добре відома, а у другій половині минулого століття інтерес до них зріс, завдяки працям А.Ф. Леонтьєва, М.М. Шеремети, їх учнів та багатьох інших відомих математиків.

Завдяки можливому надзвичайному накопиченню послідовності λ_n ряд Діріхле може бути збіжним у всій комплексній площині і не бути абсолютно збіжним в кожній точці цієї площини. Тому дослідженню збіжності рядів Діріхле присвятили свої праці Е. Каген, В. Шнее, Ж. Валірон, О.М. Мулява та інші.

Зростання цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле переважно характеризують R-порядком та R-типом. Ще у 1928 році Ж. Рітт вказав формули для знаходження цих величин через коефіцієнти цілого ряду Діріхле. У випадку рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності зростання функцій зображених такими рядами у термінах порядку і типу вивчали Е. Дагене та В.С. Бойчук, а у термінах R-порядку та R-типу відповідні формули вказали А.М. Гайсін та М.М. Шеремета і С.І. Фединяк. Як і у випадку аналітичних функцій, зображених степеневими рядами, для дослідження зростання аналітичних функцій, заданих рядами Діріхле, багатьма математиками використовувались різні шкали зростання, а найзагальнішими виявились узагальнені порядки. Зв'язок між зростанням функцій, зображених рядами Діріхле, та поводженням коефіцієнтів цих рядів у термінах узагальнених порядків встановили Я.Д. П'янило та М.М. Шеремета (для цілих рядів Діріхле) і Ю.М. Галь та М.М. Шеремета (для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності).

Започатковані на початку минулого століття К. Сугімурою та Ж. Валіроном дослідження оцінок максимуму модуля $M(\sigma)$, на вертикальній прямій суми ряду Діріхле через максимальний член $\mu(\sigma)$, у залежності від накопичення показників продовжено львівськими математиками М.М. Шеременою, Б.В. Винницьким, О.Б. Скасківим, М.В. Заболоцьким, Я.Я. Притулою, С.І. Фединяком та іншими. Аналоги теорем Е. Бореля та А. Вімана про еквівалентність логарифмів максимуму модуля і максимального члена, а також теорем про еквівалентність логарифмів цих величин тій чи іншій опуклій функції отримали О.Б. Скасків, М.М. Шеремета та їх учні. Одержані ними результати мають в основному критеріальний характер.

Ще в 1903 р. Е. Ліндельоф вказав умови на тейлорові коефіцієнти цілої функції, за яких їх порядок рівний нижньому порядку, а тип рівний нижньому типу. Для випадку цілих функцій експоненціального типу цей результат було перевідкрито М.В. Говоровим і Н.М. Черних[1]. М.В. Заболоцький і М.М. Шеремета[2] , узагальнюючи теорему Ліндельофа, знайшли умови на коефіцієнти і показники ряду Діріхле, за яких $\ln \mu(\sigma, D) \sim \Phi(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$, де Φ - задана на $(-\infty, \sigma_{\mathrm{a}})$ опукла функція. Трохи пізніше М. М. Шеремета і О. М. Сумик вказали умови, за яких $\Phi_1(\sigma) \le \ln \mu(\sigma) \le \Phi_2(\sigma)$, де $\Phi_1(\sigma)$ і $\Phi_2(\sigma)$ - задані опуклі функції.

Дослідження зв'зку між $M(\sigma)$, і $\mu(\sigma)$ у термінах багаточленних асимптотик продовожили Л. Л. Лугова [3] і Ю. В. Стець [4]. Для цього Ю. В. Стець, М. М. Шеремета і О. М. Сумик [5,6] для рядів Діріхле з додатними коефіцієнтами отримали нові оцінки зверху і знизу. Узагальненням таких рядів Діріхле є

[1]Говоров Н.В., Черных Н.М. *О признаках полной регулярности роста некоторых классов целых функций экспоненциального типа, представленных интегралами Бореля, рядами Ньютона, Дирихле и степенными рядами* // Докл. АН СССР. - Т. 249, N 6. - С. 1295-1299.

[2]Заболоцький М.В., Шеремета М.М. *Узагальнення теореми Ліндельофа* // Укр. мат. журн. - 1998. - Т. 50, N 9 - С. 1177-1192.

[3]Шеремета М.М., Лугова Л.Л. *Тричленна степенева асимптотика логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле* // Мат. Студії.-2006.- Т.25, N 2. - С. 149-168.

[4]Стець Ю.В., Шеремета М.М. *Багаточленна степенева асимптотика логарифма максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле* // Вісник Львів. унів., Сер. мех.-мат.- 2015. - Вип. 80. - С. 145-160.

[5]Sheremeta M.M., Stets Yu. V., Sumyk O.M. *Estimates of a sum of Dirichlet series* // Ukr. Math. Bull. - 2013. - V. 10, N 2. - P. 234-253.

[6]Sheremeta M.M., Stets Yu. V., Sumyk O.M. *Estimates of a sum of Dirichlet series* // Journ. of Math. Sci. - 2013. - V. 194, N 5. - P. 557-572.

інтеграли Лапласа-Стілтьєса $I(\sigma) = \int_0^{\infty} f(t)e^{t\sigma}dF(t)$, де F — невід'ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0, +\infty)$ функція, а f – невід'ємна функція. Тому актуальним стало отримання для інтегралу Лапласа-Стілтьєса результатів подібних до наведених в [5-6].

М.М. Шеремета [7],[8] досліджував умови, за яких логарифм максимального члена цілого ряду Діріхле має загальну двочленну асимптотику, типу $\ln \mu(\sigma, D) = \Phi_1(\sigma) + (1+o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$, де Φ_1 є опуклою функцією, а Φ_2 є певним чином підпорядкована функції Φ_1, зводячи цю задачу до подібної задачі для функцій, спряжених за Юнгом. При цьому він поставив два питання, пов'язані з умовою відповідного твердження. Природними стали відповіді на поставлені М. М. Шереметою питання і перенесення та узагальнення його результатів на інтеграл Лапласа- Стільтьєса.

Для цілої функції порядку ϱ і нижнього порядку λ, заданої лакунарним степеневим рядом зі степенями λ_n Дж. Уіттекер довів, що $\lambda \le \varrho\beta$, де $\beta = \varliminf\limits_{n\to+\infty} (\ln \lambda_n)/\ln \lambda_{n+1}$. Л. Сонс[9] намагалася довести, що для аналітичних в одиничному крузі функцій правильна нерівність $\lambda_0 + 1 \le (\varrho_0 + 1)\beta$, де ϱ_0 - порядок і λ_0 - нижній порядок. Як виявилось, міркування Сонс були помилковими і правильним є повний аналог нерівності Уіттекера $\lambda_0 \le \varrho_0\beta$. П.В. Філевич і М.М. Шеремета [10] перенесли ці результати на цілі ряди Діріхле скінченного R-порядку і абсолютно збіжні ряди логарифмічного порядку. Тому актуальною стала проблема отримати аналоги нерівності Уіттекера для інтегралу Лапласа- Стільтьєса.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з нуковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені івана Франка.

Матеріал дисертації є складовою частиною держбюджетної теми Мг-145Ф "Нові комплексно-ймовірносні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами"(номер держреєстрації 0113 U 003051).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної праці є дослідження асимптотичних властивостей інтегралів Лапласа-Стілтьєса.

Об'єктом дослідження є інтеграли Лапласа-Стілтьєса.

Предметом дослідження є асимптотичне поводження інтегралу Лапласа-Стілтьєса.

---

[7]Sheremeta M.M. *Estimates of the maximal term of entire Dirichlet series in terms of two-member asymptotics* // Mat. Stud. - 2000. - V.14, N 2. - P. 159-164.

[8]Sheremeta M.M. *Two-member asymptotics of Young conjugated functions and problems of behaviour of positive sequences* // Mat. Stud. - 2000. - V.14, N 2. - P. 217-220.

[9]Sons L.R. *Regularity of growth and gaps* // J. Math. Anal.Appl. - 1968. - V. 24. - P. 296-306.

[10]Філевич П.В., Шеремета М.М. *Про одну теорему Л. Сонс і асимптотичне поводження рядів Діріхле* // Укр. мат. вісник. - 2006. - Т. 3, N. 2. - С. 187-208.

Основні наукові результати, що виносяться на захист:

1) для інтегралів Лапласа-Стілтьєса з довільною абсцисою збіжності нові оцінки зверху та знизу і застосування одержаних оцінок до встановлення зв'язку між зростанням логарифмів інтегралу Лапласа-Стілтьєса та максимуму його підінтегрального виразу;

2) у термінах загальної двочленної асимптотики встановлення зв'язку між поводженням спряжених за Юнгом функцій і застосування отриманих результатів до дослідження загальної двочленної асимптотики інтегралів Лапласа-Стілтьєса;

3) для інтегралів Лапласа-Стілтьєса аналог теореми Уіттекера про порядок і нижній порядок цілої функції, зображеної лакунарним степеневим рядом;

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи математичного аналізу та результати праць М.М. Шеремети, О.Б. Скасківа, П.В. Філевича, О.М. Сумик і Ю.В. Стець.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати отримані в дисертаційній роботі є новими та оригінальними. У роботі вперше:

1) для інтегралів Лапласа-Стілтьєса з довільною абсцисою збіжності отримано нові оцінки зверху та знизу і встановлено зв'язок між зростанням логарифмів інтегралу Лапласа-Стілтьєса та максимуму його підінтегрального виразу;

2) у термінах загальної двочленної асимптотики встановлено зв'язок між поводженням спряжених за Юнгом функцій і досліджено загальну двочленну асимптотику інтегралів Лапласа-Стілтьєса;

3) для інтегралів Лапласа-Стілтьєса отримано аналоги теореми Уіттекера про порядок і нижній порядок цілої функції, зображеної лакунарним степеневим рядом;

4) показано, що відомі формули для знаходження абсциси збіжності інтегралу Лапласа-Стілтьєса можна довести зведенням його до ряду Діріхле.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і є певним внеском в теорію функцій. Вони можуть бути використані в математичному аналізі, комплексному аналізі та суміжних галузях математики.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані її автором самостійно.

У спільних з М. М. Шереметою публікаціях співавтору належить постановки задач та загальне обговорення отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на таких наукових конференціях :

– міжнародна наукова конференція: "Tarapov Readings". (Харків, Березень 1 – 15, 2016);

– міжнародна наукова конференція: "Complex Analysis and related topics". (Львів, Травень 30 - Червень 4, 2016);

– всеукраїнській науковій конференції: "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". (смт. Ворохта, Івано-Франківська обл, Лютий 22 - 25, 2017);

– наукова конференція: "International Conference of young Mathematicians". (Київ, Червень 7 - 10, 2017);

– XII-та літня школа "Алгебра, топологія, аналіз". (с. Колочава, Закарпатська обл., Липень 10 - 23, 2017);

– міжнародна наукова конференція:: "International Conference dedicated to 125-th anniversary of Stefan Banach". (Львів, Вересень 18 - 23, 2017);

– міжнародна наукова конференція: "International Conference on Complex analysis, Potential theory and Applications". (Dublin, June 11 - 15, 2018).

Доповідалися на семінарах:

– Львівський міжвузівський семінар з теорії аналітичних функцій (Львів, керівник проф. Скасків О. Б.)

– з теорії аналітичних функцій (Дрогобич,керівник — проф. Б. В. Винницький)

Публікації.

Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 12 наукових публікаціях, з яких 5 а саме 5 статтях([1-5]) — у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (1 [2] - без співавторів), 3 ([1,4,5]) — у наукових фахових виданнях, які включено до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus") 5([6,7,9,11,12]) тезах міжнародних конференцій, 1 ([8]) тезах всеукраїнської конференції та 1([10]) тезах літньої школи.

Структура і обсяг дисертації Дисертація складається з анотації (українською та англійською мовами), переліку основних позначень, вступу, 3-ох розділів, висновків та списку літератури. Загальний обсяг роботи – 131 сторінок, обсяг списку використаних джерел налічує 72 найменування і займає 6 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказані мета, завдання та методи досліджень, підкреслено наукову новизну отриманих результатів, наведено форми апробації одержаних результатів, описано особистий внесок здобувача, кількість публікацій, структуру та обсяг дисертації. А також проведено огляд літератури за тематикою дисертації і подано огляд основних результатів, зроблено аналіз літературних джерел, наведено необхідні означення та теореми, пов'язані з тематикою досліджень і висвітлено передумови вибору тематики дисертації.

Перший розділ "Оцінки інтегралів Лапласа-Стільтьєса"дисертації присвячений оцінкам інтегралів Лапласа-Стілтьєса знизу і зверху з наступним застосуванням їх до дослідження зв'язку між зростанням цього інтегралу і максимумом його підінтегрального виразу. Нехай V - клас невід'ємних неспадних необмежених неперервних справа на $[0,+\infty)$ функцій F, а f - невід'ємна функція. Інтегралом Лапласа-Стілтьєса називається[11] інтеграл $I(\sigma) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x)$, масксимум підінтегрального виразу функція $\mu(\sigma, I) = \sup\{f(x)e^{x\sigma} : x \geq 0\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, через σ_μ позначемо абсцису існування $\mu(\sigma, I)$, і нехай $LS_A(F)$ клас інтегралів $I(\sigma)$ таких, що $\sigma_з = A \in (-\infty, +\infty)$. Через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є додатною неперервно диференційовною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$.

У підрозділі 1.1 отримано оцінки $\ln\, I(\sigma)$ зверху. Основним результатом підрозділу є така теорема.

Теорема 1.1. *Нехай* $A = +\infty$ *або* $A = 0$, $I \in LS_A(F)$, $\Phi \in \Omega(A)$ *і* $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ *при* $\sigma \uparrow A$.

Припустимо, що $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *- така неперервна функція, що* $\gamma(x) \uparrow +\infty$ *при* $x \to +\infty$, $\gamma(x)/x$ *незростає на* $[x_0, +\infty)$ *і* $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ *при* $x \to +\infty$.

Якщо $\ln\, f(x) \leq -x\Psi(\varphi(x)), \quad x \geq x_0$, *і*

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\, F(x)}{\gamma(x)} = 0, \tag{1.4}$$

то

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow A} \frac{\ln\, I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \leq 0.$$

Подібні до теореми 1.1 твердження доведено , коли $\Phi \in \Omega(+\infty)$ або має степеневе зростання або $\Phi(\sigma) = \sigma\alpha(\sigma)$, де α - повільно зростаюча функція, а також коли $\Phi \in \Omega(0)$ і зростає повільніше, ніж степенева.

[11] Sheremeta M.M. *Asymptotical behaviour of Laplace-Stiltjes integrals* - Lviv: VNTL Publishers, 2010. - P. 211.

Зауважимо, що у випадку $A = +\infty$ умова $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ $(\sigma \uparrow A)$ не є обмеженням на швидкість зростання функції Φ. Наприклад, цю умову задовольняють функції $\Phi(\sigma) = \sigma \ln \sigma$ $(\sigma \geq \sigma_0)$, $\Phi(\sigma) = \sigma^p$ $(\sigma \geq \sigma_0)$ з $p > 1$ і $\Phi(\sigma) = \exp_k \sigma$ з $k \in \mathbb{N}$, де $\exp_1 x = e^x$ і $\exp_k x = \exp_{k-1} e^x$. У випадку, коли $A = 0$ і $\Phi(\sigma) = B(1/|\sigma|)$ для $\sigma < 0$ наведена вище умова вказує на те, що B не може зростати повільніше, ніж степенева функція (наприклад, функція $B(x) = \ln x\,(x \geq e)$ не задовольняє цю умову).

У підрозділі 1.2 отримано оцінки інтегралів Лапласа-Стілтьєса знизу. Нехай, $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ - така неперервна функція, що $\gamma(x) \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$. Для $q \in (0, 1)$ і $x \geq \gamma(0) + 1$, означимо $\Delta_\gamma(x; q) = \dfrac{1}{x}(\gamma^{-1}(x) - \gamma^{-1}(x - e^{-qx}))$ і будемо вважати, що $F \in V(l)$ якщо якщо $F \in V$ і $F(x) - F(x - 0) \leq l < +\infty$ для всіх $x \geq 0$.

Теорема 1.5. *Нехай* $F \in V(l)$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, $I \in LS_{+\infty}(F)$ *і* $\ln f(x) \geq -x\Psi(\varphi(x))$, $\quad x \geq x_0$. *Припустимо, що невід'ємна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція* γ *така, що* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\ln F(x)}{\gamma(x)} > 1$ *і* $\Delta_\gamma(x; q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \to 0, \quad x \to +\infty$ *для деякого* $q \in (0, 1)$. *Тоді*

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \geq 1 - q > 0.$$

Теорема 1.6. *Нехай* $F \in V(l)$, $\Phi \in \Omega(0)$, $I \in LS_0(F)$ *і виконується умова* $\ln f(x) \geq -x\Psi(\varphi(x))$, *для* $x \geq x_0$.. *Припустимо, що* γ *- невід'ємна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція така, що виконуетъся* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\ln F(x)}{\gamma(x)} > 1$ *і* $\Delta_\gamma(x; q) = O(1)$ *при* $x \to +\infty$, *для деякого* $q \in (0, 1)$. *Тоді*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \frac{\ln I(\sigma) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \geq 1 - q > 0.$$

Використовуючи теореми 1.1, 1.2, 1.5 і 1.6, у підрозділі 1.3 досліджено зв'зок між зростанням $\ln I(\sigma)$ і $\ln \mu(\sigma, I)$. Наприклад, наведено такі твердження.

Твердження 1.1. *Нехай* $F \in V$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$ *і* $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *- така неперервна функція, що* $\gamma(x) \uparrow +\infty$ *при* $x \to +\infty$.

Якщо $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ *при* $\sigma \to +\infty$, *функція* $\gamma(x)/x$ *незростаюча на* $[x_0, +\infty)$ *і* $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x)))$ *при* $x \to +\infty$, *то умова (1.4) є достатньою, а якщо* $F \in V(l)$, *функція* γ *неперервно диферецційовна на* $[0, +\infty)$, $\ln(1/\gamma'(x)) = o(\gamma(x))$ *і* $\ln \varphi(x) = o(\gamma(x))$ *при* $x \to +\infty$, *то умова (1.4) є необхідною для того, щоб для кожного інтегралу* $I \in$

$LS_{+\infty}(F)$ з нерівності $\ln\mu(\sigma,I)\le\Phi(\sigma)$, для $\sigma\ge\sigma_0$, випливала нерівність $\ln I(\sigma)\le\Phi(\sigma)+o(\gamma(\Phi'(\sigma))$, при $\sigma\to+\infty$.

З іншого боку, якщо функція f має регулярну зміну відносно F, то з нерівності $\ln I(\sigma)\le\Phi(\sigma)$, для $\sigma\ge\sigma_0$, випливає нерівність $\ln\mu(\sigma,I)\le\Phi(\sigma)+O(\sigma)$, при $\sigma\to+\infty$.

Твердження 1.7. *Нехай $F\in V$, $\Phi\in\Omega(0)$, а $\gamma:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ - неперервна функція така, що $\gamma(x)\uparrow+\infty$ при $x\to+\infty$. Якщо $\Phi'(\sigma)=O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ при $\sigma\uparrow 0$, функція $\gamma(x)/x$ незростаюча на $[x_0,+\infty)$ і $\gamma(x)=O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$ при $x\to+\infty$, то умова (1.4) є достатньою, а якщо $F\in V(l)$, функція γ неперервно диференційовна на $[0,+\infty)$ і $\ln\gamma'(x)=o(\gamma(x))$ при $x\to+\infty$, то умова (1.4) є необхідною для того, щоб для кожного інтегралу $I\in LS_0(F)$ з нерівності $\ln\mu(\sigma,I)\le\Phi(\sigma)$, для $\sigma\in[\sigma_0,0)$, випливала нерівність $\ln I(\sigma)\le\Phi(\sigma)+o(\gamma(\Phi'(\sigma)))$, при $\sigma\uparrow 0$. З іншого боку, якщо функція f має регулярну зміну відносно F, то з нерівності $\ln I(\sigma)\le\Phi(\sigma)$, для $\sigma\in[\sigma_0,0)$, випливає нерівність $\ln\mu(\sigma,I)\le\Phi(\sigma)+O(1)$, при $\sigma\uparrow 0$.*

Крім цього тут буде наведено умови на функції $\Phi\in\Omega$ і γ, за виконання яких умова (1.4)є достатньою для того, щоб асимптотичні рівності були $\ln I(\sigma)=(1+o(1))\Phi(\sigma)$, $\quad\sigma\uparrow 0$, і $\ln\mu(\sigma,I)=(1+o(1))\Phi(\sigma)$ при $\sigma\uparrow 0$ були рівносильними, де або $A=0$, або $A=+\infty$.

Другий розділ "Загальна двочленна асимптотика"складається з двох підрозділів. В першому з них у термінах загальної двочленної асимптотики досліджено можливе зростання функції $Q(\sigma)=\sup\{P(x)+x\sigma:\,x\ge 0\}$, спряженої за Юнгом з довільною відмінною від $+\infty$ функцію P, відмінною від $+\infty$, а в другому підрозділі отриманий результат застосовано до загальної двочленної асимптотики інтегралу Лапласа-Стілтьєса.

Для $0<a<b<+\infty$ і $\Phi\in\Omega(A)$ приймемо

$$G_1(a,b,\Phi)=\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt,\quad G_2(a,b,\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)\,dt\right),$$

і нехай L^0 - клас додатних неперервно диференційовних на $(0,+\infty)$ функцій l таких, що $xl'(x)=O(l(x))$ при $x\to+\infty$. Як в статтях М. М. Шеремети[7,8] вказано що додатна двічі неперервно диференційовна на $(-\infty,+\infty)$ функція Φ_2 є підпорядкованою функції $\Phi_1\in\Omega(+\infty)$, якщо $\Phi_2''(\sigma)=o(\Phi_1''(\sigma))$, $\Phi_2'(\sigma)=o(\sigma\Phi_1''(\sigma))$ при $\sigma\to+\infty$ і $\Phi_2'(\varphi_1)\in L^0$. М. М. Шеремета отримав такий результат.

Твердження 2.0 *Нехай $\Phi_1\in\Omega(+\infty)$, $\varphi_1'\in L^0$, функція Φ_2 підпорядкована функції Φ_1, $\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, і виконуються умови*

$$\Phi_j'\left(\sigma+O\left(\frac{\Phi_2'(\sigma)}{\Phi_1''(\sigma)}\right)\right)=(1+o(1))\Phi_j'(\sigma)\quad(\sigma\to+\infty),\quad j=1\,2.$$

Припустимо, що з умови

$$G_2(t_n,t_{n+1},\Phi_1)-G_1(t_n,t_{n+1},\Phi_1)=o(\Phi_2(\varphi_1(t_n))),\quad n\to\infty,\qquad(2.2)$$

випливає асимптотична рівність

$$t_{n+1} = (1 + o(1))t_n, \quad n \to \infty. \tag{2.3}$$

Приймемо

$$\varkappa_n(\Phi_1) = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi_1(t)dt, \quad \xi_n = \frac{\Phi_2(\varphi_1(t_{n+1})) - \Phi_2(\varphi_1(t_{n+1}))}{t_{n+1} - t_n}$$

і припустимо, що

$$\xi_n \Phi_1'(\varkappa_n(\Phi_1') + O(\xi_n)) = o(G_2(t_n, t_{n+1}, \Phi_1)), \quad n \to \infty, \tag{2.6}$$

і

$$\Phi_2(\varkappa_n(\Phi_1') + O(\xi_n)) = o(G_2(t_n, t_{n+1}, \Phi_1)), \quad n \to \infty. \tag{2.7}$$

Тоді для того, щоб

$$Q(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + (1 + o(1))\tau\Phi_1(\sigma), \quad \sigma \to +\infty,$$

необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon > 0$:
1) існувало $t_0 = t_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $t \geq t_0$

$$P(t) \leq -t\Psi_1(\varphi_1(t)) + (\tau + \varepsilon)\Phi_2(\varphi_1(t));$$

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_n) така, що

$$P(t_n) \geq -t_n\Psi_1(\varphi_1(t_n)) + (\tau - \varepsilon))\Phi_2(\varphi_1(t_n)), \quad n \to +\infty,$$

і виконується співвідношення (2.2).

Крім цього вінпоставив такі питання:

1) для яких функції $\Phi_1 \in \Omega(+\infty)$ і підпорядкованій її функції Φ_2 співвідношення (2.6) і (2.7) виконуються для кожної послідовності $(t_n) \uparrow +\infty$?

2) для яких функцій $\Phi_1 \in \Omega(+\infty)$ і Φ_2 з умови (2.2) випливає співвідношення (2.3)?

Відповідь на перше питання міститься у наступному твердженні.

Твердження 2.1. *Нехай або $A = 0$, або $A = +\infty$, $\Phi_1 \in \Omega(A)$ і Φ_2 - додатна, двічі неперервно диференційовна і зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функція. Припустимо, що $\Phi_2'(\sigma) = o(\sigma\Phi_1''(\sigma))$, $\sigma\Phi_1'((1 + o(1))\sigma) = O(\Phi_1(\sigma))$ і $\Phi_2((1 + o(1))\sigma) = o(\Phi_1(\sigma))$ при $\sigma \uparrow A$. Тоді співвідношення (2.6) і (2.7) виконуються для кожної послідовності $(t_n) \uparrow +\infty$.*

Щоб дати відповідь на друге питання, через $\Omega^*(A)$ позначимо клас функцій $\Phi \in \Omega(A)$ таких, що з $G_2(t_n, t_{n+1}, \Phi_1) = (1 + o(1))G_1(t_n, t_{n+1}, \Phi_1), \quad n \to \infty$ випливає (2.3). Тоді правильне наступне твердження.

Твердження 2.3. *Нехай або $A = 0$, або $A = +\infty$, $\Phi_1 \in \Omega^*(A)$ і Φ_2 - додатна, двічі неперервно диференційовна і зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функція така, що $\Phi_2(\sigma) = o(\Phi_1(\sigma))$ при $\sigma \uparrow A$. Тоді з (2.2) випливає (2.3).*

У підрозділі 2.0 твердження перенесно з одного боку, на випадок довільного $A \in (-\infty, +\infty]$, а з іншого боку, на випадок слабкої підпорядкованості функції Φ_2 функції Φ_1.

Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$ і $\Phi_1 \in \Omega(A)$. Будемо говорити, що додатна двічі неперервно диференційовна на $(-\infty, A)$ функція Φ_2 слабо підпорядкована функції Φ_1, якщо $\Phi_2''(\sigma) = o(\Phi_1''(\sigma))$ при $\sigma \uparrow A$ і $\Phi_2'(\varphi_1) \in L^0$.

Нехай $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і або $A = 0$, або $A = +\infty$. Припустимо, що $\Phi_1 \in \Omega(A)$, $\varphi_1' \in L^0$ і функція Φ_2 слабо підпорядкована функції Φ_1. Оскільки $\Phi_2''(\sigma) = o(\Phi_1''(\sigma))$ при $\sigma \uparrow A$, то існує функція $\Phi \in \Omega(A)$ така, що

$$\Phi(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + \tau\Phi_2(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0(\tau), A). \tag{2.12}$$

Використовуючи результати підрозділу 2.1, у підрозділі 2.2 у термінах загальної двочленної асимптотики вказано можливе зростання інтеграла Лаплса-Стільтьєса $I(\sigma)$. Основними тут є такі теореми.

Теорема 2.4. *Нехай $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F \in V(l)$ і функція $\Phi_1 \in \Omega^*(+\infty)$ є такою, що $\varphi_1' \in L^0$, $\Phi_1(\sigma + o(1)) = O(\Phi_1(\sigma))$ і виконується умова $\Phi_1'(\sigma) = O\left(\Phi_1'\left(\sigma - \dfrac{(1+o(1))\Phi_1(\sigma)}{\Phi_1'(\sigma))}\right)\right)$ при $\sigma \to +\infty$. Припустимо, що слабо підпорядкована функції Φ_1 функція Φ_2 задовольняє умови $\Phi_2'(\sigma) = o(\sigma\Phi_1''(\sigma))$, $\Phi_2(\sigma) = O(\Phi_1(\Psi_1(\sigma)))$, $\ln \Phi_1''(\sigma) = o(\Phi_2(\sigma))$, $\sigma = o(\Phi_2(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$ і $\Phi_2(\sigma)/\Phi_1'(\sigma) \searrow 0$ при $\sigma_0 \le \sigma \to +\infty$. Припустимо також, що або $\sigma\Phi_1'(\sigma) = O(\Phi_1(\sigma))$, або $\Phi_2'(\sigma) = o(\Phi_1''(\sigma))$ і $\Phi_1'(\sigma) = O(\Phi_1(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$, функція f має регулярну зміну відносно F і виконується умова $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln F(x)}{\Phi_2(\varphi(x))} = 0$.*

Тоді для того, щоб для кожного інтегралу $I \in LS_{+\infty}(F)$ була правильною асимптотична рівність $\ln I(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + \tau(1 + o(1))\Phi_2(\sigma)$, при $\sigma \to +\infty$, необхідно і досить що для кожного $\varepsilon > 0$ виконувались умови:

1) існувало число $t_0 = t_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $t \ge t_0$

$$\ln f(t) \le -t\Psi_1(\varphi_1(t)) + (\tau + \varepsilon)\Phi_2(\varphi_1(t));$$

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_n) така, що

$$\ln f(t_n) \ge -t_n\Psi_1(\varphi_1(t_n)) + (\tau - \varepsilon))\Phi_2(\varphi_1(t_n)), \quad n \to +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_2(t_n, t_{n+1}, \Phi_1) - G_1(t_n, t_{n+1}, \Phi_1)}{\Phi_2(\varphi_1(t_n))} = 0.$$

Теорема 2.5. *Нехай $A = 0$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F \in V(l)$ і функція $\Phi_1 \in \Omega^*(0)$ є такою, що $\varphi_1' \in L^0$ і виконується умова*

$$\Phi_1'(\sigma) = O\left(\Phi_1'\left(\sigma - \frac{(1+o(1))\Phi_1(\sigma)}{\Phi_1'(\sigma)}\right)\right), \quad \sigma \uparrow 0.$$

Припустимо, що слабо підпорядкована функції Φ_1 функція Φ_2 задовольняє умови $\Phi_2'(\sigma) = o(\sigma\Phi_1''(\sigma))$ і $\ln \Phi_1''(\sigma) = o(\Phi_2(\sigma))$ при $\sigma \uparrow 0$ і

$$\Phi_2(\sigma) = O\left(\Phi_1\left(\sigma - \frac{(1+o(1))\Phi_1(\sigma)}{\Phi_1'(\sigma)}\right)\right), \quad \sigma \uparrow 0.$$

Припустимо також, що функція f має регулярну зміну відносно F і виконується умова $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln F(x)}{\Phi_2(\varphi(x))} = 0$.
Тоді для того, щоб для кожного інтегралу $I \in LS_0(F)$ була правильною асимптотична рівність

$$\ln I(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + \tau(1+o(1))\Phi_2(\sigma), \quad \sigma \uparrow 0.$$

необхідно і досить що для кожного $\varepsilon > 0$ виконувались умови 1) і 2) теореми 2.4.

Розділ 3 складається з трьох підрозділів. У першому з них для максимуму підінтегрального виразу $\mu(\sigma, I)$ інтегралу Лапласа-Стілтьєса $I(\sigma)$ і функції $\Phi(\sigma) \in \Omega(A)$ з оцінки $\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)$ за певних умов на Φ отримано оцінки зверху величин

$$\varliminf_{\sigma\uparrow A} \frac{\ln \ln \mu(\sigma, I)}{\ln \Phi(\sigma)}, \quad \varliminf_{\sigma\uparrow A} \frac{\ln \mu(\sigma, I)}{\Phi(\sigma)}.$$

Для цього через L позначено клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $(x_0, +\infty)$ функцій α. Будемо говорити, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{пз}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція.

У підрозділі 3.1 доведено дві теореми про оцінки вказаних величини. Наведемо одну з них, яка стосується випадку $\sigma_\mu = +\infty$.

Теорема 3.1. *Нехай $\sigma_\mu = +\infty$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, $\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$, $X = (x_k)$ - зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, а f - незростаюча додатна функція. Припустимо що виконується одна з умов:*

1) $\ln f(x_k) - \ln f(x_{k+1}) = O(1)$ *при* $k \to \infty$*,*

2) $\ln f(x_k) = (1 + o(1)) \ln f(x_{k+1})$ *при* $k \to \infty$ *і* $\Phi \in L^0$*,*

3) $x_{k+1} - x_k \leq H < +\infty$ *для всіх* $k \geq 0$*,*

4) $x_{k+1} = (1 + o(1))x_k$ *as* $k \to \infty$ *і* $\Phi \in L^0$*,*

Тоді

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\, \mu(\sigma, I)}{\Phi(\sigma)} \leq \varliminf_{k\to\infty} \frac{G_1(x_k, x_{k+1}, \Phi)}{G_2(x_k, x_{k+1}, \Phi)}.$$

2) якщо

$$\ln \sigma + \left(\frac{\Phi(\sigma)\Phi''(\sigma)}{(\Phi'(\sigma))^2} - 1\right) \ln\, \Phi(\sigma) \geq q > -\infty, \quad \sigma \geq \sigma_0,$$

і виконуєтьcя одна з умов

1) $\ln f(x_k) - \ln f(x_{k+1}) = O(1)$ *при* $k \to \infty$*,*

2) $\ln f(x_k) = (1 + o(1)) \ln f(x_{k+1})$ *при* $k \to \infty$ *і* $\ln \Phi \in L^0$*,*

3) $\ln f(x_k) \leq a \ln f(x_{k+1})$ $(0 < a < 1)$ *і* $\ln \Phi \in L_{пз}$*,*

4) $x_{k+1} - x_k \leq H < +\infty$ *для всіх* $k \geq 0$*,*

5) $x_{k+1} = (1 + o(1))x_k$ *при* $k \to \infty$ *і* $\Phi \in L^0$*,*

6) $x_{k+1} \leq bx_k)$ $(b > 1)$ *при* $k \to \infty$ *і* $\ln \Phi \in L_{пз}$*.*

Тоді

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\,\ln\, \mu(\sigma, I)}{\ln\, \Phi(\sigma)} \leq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\, G_1(x_k, x_{k+1}, \Phi)}{\ln\, G_2(x_k, x_{k+1}, \Phi)}.$$

Подібна теорема є правильною, коли $\sigma_\mu = 0$.

У підрозділі 3.2 доведено аналоги теореми Уіттекера.

Найвживанішими характеристиками зростання інтегралів з класу $I \in LS_\infty(F)$ є R-порядок $\varrho_R[I]$, нижній R-порядок $\lambda_R[I]$ і (якщо $\varrho_R[I] \in (0, +\infty)$) R-тип $T_R[I]$, нижній R-тип $t_R[I]$, означено формулами

$$\varrho_R[I] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\,\ln\, I(\sigma)}{\sigma}, \quad \lambda_R[I] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\,\ln\, I(\sigma)}{\sigma},$$

$$T_R[I] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\, I(\sigma)}{\exp\{\sigma\varrho_R[I]\}}, \quad t_R[I] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\, I(\sigma)}{\exp\{\sigma\varrho_R[I]\}}.$$

Теорема 3.3. *Нехай $F \in V$, $\sigma_\mu = +\infty$ і $X = (x_k)$ - зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел. Припустимо, що додатна незростаюча функція f має регулярну зміну відносно F.*
Якщо $\ln F(x)) = O(x)$ *при* $x \to +\infty$ *і* $\ln f(x_k) = (1 + o(1)) \ln f(x_{k+1})$ *при* $k \to \infty$, *то*

$$\lambda_R[I] \le \beta \varrho_R[I], \quad \beta = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln x_k}{\ln x_{k+1}}.$$

Якщо $\ln F(x)) = o(x)$ *при* $x \to +\infty$ *і* $\ln f(x_k) - \ln f(x_{k+1}) = O(1)$ *при* $k \to \infty$, *то*

$$t_R[I] \le T_R[I] \frac{\gamma}{1-\gamma} \exp\left\{1 + \frac{\gamma \ln \gamma}{1-\gamma}\right\} \ln \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma = \varliminf_{k\to\infty} \frac{x_k}{x_{k+1}}.$$

Подібна теорема є правильною, коли $\sigma_\mu = 0$

В останньому підрозділі показано, як тердження 0.1 і 0.2 про абсцису збіжності інтегралу Лапласа-Стілтьєса можна довести, звівши інтеграл до ряду Діріхле.

ВИСНОВКИ

Для інтегралу Лапласа-Стілтьєса $I(\sigma) = \int\limits_0^\infty f(x) e^{x\sigma} dF(x)$ $(\sigma \in \mathbb{R})$ з довільною абсцисою збіжності $A \in (-\infty, +\infty]$, де f - невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція, а функція F невід'ємна неспадна необмежена і неперервна справа на $[0, +\infty)$, знайдемо оцінки знизу і зверху в залежності від асимптотичного поводження функцій f і F. Отримані оцінки застосовано до встановлення зв'язку між зростанням інтегралу $I(\sigma)$ і максимуму підінтегрального виразу $\mu(\sigma, I) = \sup\{f(x)e^{x\sigma} : x \ge 0\}$. Зокрема, для певної додатної опуклої зростаючої до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функції Φ вказано умову на F, за якої при $\sigma \uparrow A$ є еквівалетними асимптотичні рівності $\ln I(\sigma) = (1 + o(1))\Phi(\sigma)$ і $\ln \mu(\sigma, I) = (1 + o(1))\Phi(\sigma)$.

Встановлено умови на функцію P, за яких для спряженої за Юнгом функції $Q(\sigma) = \sup\{P(x) + x\sigma : x \ge 0\}$ правильні двочленні асимптотичні нерівність $Q(\sigma) \le \Phi_1(\sigma) + (1 + o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$, $\sigma \uparrow A$, і рівність $Q(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + (1 + o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$, $\sigma \uparrow A$, для випадків $A = +\infty$ і $A = 0$, де $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Φ_1 є опуклою зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функцією, а функція Φ_2 певним чином підпорядкована функції Φ_1. Використовуючи ці результати та оцінки інтегралу $I(\sigma)$, знайдено умови на функцію f, за яких такі ж двочленні асимптотичні нерівність та рівність є правильними для логарифмів максимуму підінтегрального виразу $\mu(\sigma, I)$ та інтегралу $I(\sigma)$. Отримані результати мають в основному критеріальний характер.

Для максимуму підінтегрального виразу $\mu(\sigma, I)$ інтегралу Лапласа-Стілтьєса $I(\sigma)$ і додатної опуклої зростаючої до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функції Φ за умовм $\ln\mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)$ отримано оцінки зверху для величин $\varliminf\limits_{\sigma\uparrow A}(\ln\mu(\sigma, I))/\Phi(\sigma)$ і $\varliminf\limits_{\sigma\uparrow A}(\ln\ln\mu(\sigma, I))/\ln\Phi(\sigma)$. Застосовуючи ці оцінки, для інтегралу Лапласа-Стілтьєса отримано аналоги теореми Уіттекера про порядок і нижній порядок цілої функції, зображеної лакунарним степеневим рядом. Наприклад, доведено, що якщо інтеграл Лапласа-Стілтьєса збіжний для всіх σ, функція f має регулярну зміну відносно F, а $X = (x_k)$ - зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, то за умов $\ln F(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$ і $\ln f(x_k) = (1 + o(1)) \ln f(x_{k+1})$ при $k \to \infty$ правильна нерівність Уіттекера $\lambda_R[I] \le \varrho_R[I] \varliminf\limits_{k\to\infty} (\ln x_k)/(\ln x_{k+1})$, де $\varrho_R[I] = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} (\ln\ln I(\sigma))/\sigma$ і $\lambda_R[I] = \varliminf\limits_{\sigma\to+\infty} (\ln\ln I(\sigma))/\sigma$.

Показано, як можна отримати формулу для знаходження абсциси збіжності інтегралу Лапласа-Стілтьєса зведенням його до ряду Діріхле.

Отримані в дисертації результати можуть знайти свої застосування в математичному і комплексному аналізах, в теорії інтегральних рівнянь та інших суміжних областях математики. На них слід звернути увагу математиків з Київського, Харківського, Чернівецького, Прикарпатського і Львівського національних університетів, Дрогобицького педагогічного університету та інших вузів України.

Основні результати дисертації є новими і носять завершений характер.

Достовірність результатів дисертації підтверджується чіткими та детальнішими доведеннями, а також тим, що вони опубліковані у фахових журналах і були оприлюднені на багатьох міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1) Добушовський М.С., Шеремета М.М. Оцінки інтегралів Лапласа-Стілтьєса. - Укр. мат. журн. - 2016. - Т. 68, N 11. - С. 1467-1482.

2) Добушовський М.С. Зауваження до збіжності інтегралів Лапласа-Стілтьєса. - Вісник. Львів. ун-ту. Серія мех-мат. - 2016. - Випуск. 81. - С. 117-120.

3) Dobushovskyy M.S., Sheremeta M.M. Analogues of Whittaker's theorem for Laplace-Stieltjes integrals. - Carpatian Math. Publ. - 2016. - V. 8, N 2.- P. 1-12

4) Dobushovskyy M.S.,Sheremeta M.M. On the two-member asymptotic of Young comjugated functions. - Mat. Stud. - 2016. - 46. - P. 178-188.

5) Dobushovskyy M.S.,Sheremeta M.M. Two-member asymptotic of Laplace-Stieltjes integrals. - Mat. Stud. - 2017. - 48. - p. 3-9.

6) Добушовський М.С., Шеремета М.М. Оцінки інтегралів Лапласа-Стілтьєса. В тезах наукової конференції: "Tarapov Readings". (Харків, Березень 1 – 15, 2016).

7) Dobushovskyy M.S.,Sheremeta M.M. A remark to convergence of Laplace-Stieltjes integrals. В тезах наукової конференції: "Complex Analysis and related topics". (Львів, Травень 30 - Червень 4, 2016).

8) Добушовський М.С., Шеремета М.М. Оцінки інтегралів Лапласа-Стілтьєса. В тезах наукової конференції: "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". (смт. Ворохта, Івано-Франківська обл, Лютий 22 - 25, 2017).

9) Dobushovskyy M.S.,Sheremeta M.M. Two-member asymptotic of Laplace-Stieltjes integrals. В тезах наукової конференції: "International Conference of young Mathematicians". (Київ, Червень 7 - 10, 2017).

10) Добушовський М.С., Шеремета М.М. Асимптотика інтегралів Лапласа-Стілтьєса. В тезах XII-та літньої школи "Алгебра, топологія, аналіз". (с. Колочава, Закарпатська обл., Липень 10 - 23, 2017).

11) Dobushovskyy M.S.,Sheremeta M.M. Analogues of Whittaker's theorem for Laplace-Stieltjes integrals. В тезах наукової конференції: "International Conference dedicated to 125-th anniversary of Stefan Banach". (Львів, Вересень 18 - 23, 2017).

12) Dobushovskyy M.S.,Sheremeta M.M. Analogues of Whittaker's theorem for Laplace-Stieltjes integrals. В тезах наукової конференції: "International Conference on Complex analysis, Potential theory and Applications". (Dublin, June 11 - 15, 2018).

АНОТАЦІЯ

Добушовський М. С. Асимптотичні властивості інтеграла Лапласа-Стільтьєса – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

В роботі для інтегралів Лапласа-Стілтьєса з довільною абсцисою збіжності отримано нові оцінки зверху та знизу і одержані оцінки застосовано до встановлення зв'язку між зростанням логарифмів інтегралу Лапласа-Стілтьєса та максимуму його підінтегрального виразу.

У термінах загальної двочленної асимптотики встановлений зв'язок між поводженням спряжених за Юнгом функцій і отримані результати застосовано для дослідження загальної двочленної асимптотики інтегралів Лапласа-Стілтьєса.

Для інтегралів Лапласа-Стілтьєса отримано аналоги теореми Уіттекера про порядок і нижній порядок цілої функції, зображеної лакунарним степеневим рядом.

Показано, як можна отримати формулу для знаходження абсциси збіжності інтегралу Лапласа-Стілтьєса зведенням його до ряду Діріхле.

Ключові слова: інтеграл Лапласа-Стілтьєса, абсциса збіжності, максимум підінтегрального функції, двочленна асимптотика, нерівність Уіттекера, ряд Діріхле.

ABSTRACT

Dobushovskyy. M. S. Asymptotical properties of the Laplace-Stieltjes integral. – On the rights of manuscript.

PhD Thesis for a degree in physics and mathematics, speciality 01.01.01 «Mathematical Analysis». – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

In this PhD thesis Laplace-Stieltjes integrals with an arbitrary abscissa of the convergence,new the lower and upper estimates are obtained. The accumulated results are used to deduce the relationships between the growth of the integral and the maximum of the integrand.

In the terms of two-member asymptotic it is shown a connection between the behavior of Young conjugated functions and used the results for studying two-member asymptotic of Laplace-Stieltjes integral.

For the Laplace-Stieltjes integrals analogues of the Whittaker theorem of order and the lower order of an entire function presented by lacunar series are obtained .

We obtain formulas to find the abscissa of the convergence of the Laplace-Stieltjes integral.

Key words: Laplace-Stieltjes integral, abscissa of convergence, maximum of integrand, two-member asymptotic, Whittaker's inequality, Dirichlet series.

АННОТАЦИЯ

Добушовский М. С. Асимптотические свойства интеграла Лапласа-Стильтьеса – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2018.

Диссертация посвящена исследованию асимптотических свойств интеграла Лапласа-Стильтьеса.

В первом разделе для интегралов Лапласа-Стилтьеса с произвольной абсциссой сходимости найдены новые оценки сверху и снизу, которые применены к установлению связи между ростом интеграла и максимумом подинтегрального выражения.

Во втором разделе в выражениях общей двухчленной асимптотики установлена связь между поведением сопряженных за Юнгом функций и полученные результаты применены к исследованию обобщенной двухчленной асимптотики интегралов Лапласа-Стилтьеса.

В третьем разделе для интегралов Лапласа-Стилтьеса получены аналоги теоремы Уиттекера о порядке и нижнем порядке целой функции, представленной лакунарным рядом. Показано как можно получить формулы для определения абсциссы сходимости интеграла Лапласа-Стилтьеса преоброзавав его к рядам Дирихле.

Ключевые слова: интеграл Лапласа-Стилтьеса, абсцисса сходимости, максимум подинтегральной функции, двухчленная асимптотика, неравенство Уиттекера, ряд Дирихле.

Підписано до друку ??.??.2018 р. Формат $60 \times 90/16$.
Папір офсетний. Умовн. друк. арк. 1,25. Тираж 100. Зам. №____

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000. Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.