МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Пастухова Ірина Степанівна

УДК 515.1

Дітопологічні інверсні напівгрупи

01.01.04 — геометрія і топологія

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
(доктора філософії)

Львів – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі геометрії і топології механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Банах Тарас Онуфрійович,
Львівський національний
університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри геометрії і топології
механіко-математичного факультету.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Карлова Олена Олексіївна,
Чернівецький національний
університет імені Юрія Федьковича,
доцент кафедри математичного аналізу
механіко-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Никифорчин Олег Ростиславович,
Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника,
завідувач кафедри геометрії і топології
механіко-математичного факультету.

Захист відбудеться **2 травня 2019** р. о **15** годині на засіданні
спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18
на механіко-математичному факультеті Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою:
03127, м. Львів, вул. Університетська, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою:
м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий “__” березня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Христіянин А. Я.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У дисертації означується і вивчається новий підклас топологічних інверсних напівгруп, що складається з дітопологічних напівгруп.

Топологічні інверсні напівгрупи утворюють важливий клас у сучасній топологічній алгебрі. Як відомо, симетрії в математиці описуються групами. Причиною винайдення інверсних напівгруп був розвиток різних типів неевклідових геометрій, і, як наслідок, виникнення об'єктів, симетрії яких неможливо описати за допомогою груп. Одним з таких об'єктів були псевдогрупи – узагальнення об'єктів, введених Лі в 1880-х роках, і які є множинами гомеоморфізмів між відкритими підмножинами топологічного простору, замкненими відносно операцій композиції і взяття оберненого.

В результаті пошуку об'єкта, який би описував структуру, що лежить в основі псевдогруп, в 1952 році Вагнером і, незалежно, в 1954 році Престоном було введене поняття інверсної напівгрупи – множини S з визначеною на ній асоціативною операцією, в якій для кожного елемента $x \in S$ існує єдиний обернений до нього $x^{-1} \in S$, тобто $x = xx^{-1}x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Також було отримано основний результат теорії інверсних напівгруп – теорему Вагнера-Престона про вкладення інверсної напівгрупи у симетричну інверсну напівгрупу[1], тобто напівгрупу часткових бієкцій деякої множини. Ця теорема, очевидно, є напівгруповим аналогом теореми Келі для груп.

Важливим підкласом інверсних напівгруп є кліфордові інверсні напівгрупи. Такі напівгрупи є об'єднаннями груп. Структура і властивості кліфордових інверсних напівгруп в значній мірі визначаються підгрупами з яких вони складаються. У 1970-х роках Понізовський довів[2], що кожна кліфордова інверсна напівгрупа є піднапівгрупою добутку нуль-розширень своїх підгруп. Під нуль-розширенням групи ми розуміємо саму групу з приєднаним нулем. Цей факт дозволяє застосовувати результати теорії груп для дослідження кліфордових інверсних напівгруп.

Топологічний аналог теореми Вагнера-Престона доведено Лоусоном для топологічних напівграток – топологічних комутативних напівгруп, кожний елемент яких є ідемпотентом. За теоремою Лоусона[3], кожна компактна напівграткa Лоусона E ваги $w(E) \leq \kappa$ вкладається в тихоновський куб $[0,1]^\kappa$ відрізків з операцією покоординатного мінімуму, а кожна компактна нуль-вимірна напівграткa E ваги $w(E) \leq \kappa$ – в канторів куб $\{0,1\}^\kappa \subset [0,1]^\kappa$.

Для топологічних груп, ще раніше, у 1934 році, Понтрягін показав, що кожна компактна абелева топологічна група ваги $w(E) \leq \kappa$ вкладається в добуток $\mathbb{T}^\kappa$

[1]Lawson, M.: Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries. World Scientific Publishing Co.Pre.Ltd, NJ–Singapore–London (1998).

[2]Понизовский, И.: О гомоморфизмах коммутативных полугрупп. Доклады Академии Наук СССР. **135** (5), 1058–1060 (1960).

[3]Lawson, J.: Topological semilattices with small semilattices. J. London Math. Soc. **2** (1), 719-724 (1969).

кіл $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Задачу отримання аналогу вищезгаданого результату Понізовського для кліфордових топологічних інверсних напівгруп розв'язала О. Гринів[4]. Вона побудувала топологічні вкладення компактних кліфордових інверсних напівгруп в добутки нуль-розширень груп чи конусів над групами.

Усі згадані вище результати були отримані для топологічних кліфордових інверсних напівгруп, які є компактними. У процесі пошуку умов, які б послаблювали компактність і виник клас дітопологічних напівгруп, тобто топологічних інверсних напівгруп з неперервним діленням. Як показано у дисертації, властивість дітопологічності зберігається піднапівгрупами і операціями тихоновського, зведеного і напівпрямого добутків, окрім того, всі топологічні напівгратки, топологічні групи, компактні та уніформізовні топологічні інверсні напівгрупи є дітопологічними.

Наявність структурних теорем для кліфордових топологічних інверсних напівгруп дозволяє розв'язати задачу їх метризовності. Згідно з класичною теоремою Біркгофа-Какутані[5], топологічна група метризовна тоді і лише тоді, коли вона задовольняє першу аксіому зліченності.

Задача метризовності компактних топологічних інверсних напівгруп з метризовними підгрупами та напівгратками була розв'язана Т. Банахом[6] для нульвимірних кліфордових компактних інверсних напівгруп, та Т. Банахом і Б. Бокалом[7] для компактних інверсних напівгруп. Відкритим залишалося питання послаблення умови компактності напівгрупи.

Особливість будови кліфордових інверсних напівгруп сприяє постановці і дослідженню задачі автоматичної неперервності для кліфордових топологічних інверсних напівгруп. В загальному, задача автоматичної неперервності полягає у пошуку умов на функцію $f : X \to Y$ між топологічними просторами X, Y і на самі простори, які б гарантували неперервність цієї функції. Одним з класичних прикладів автоматичної неперервності є теорема С. Банаха про замкнений графік, згідно з якою, необхідною і достатньою умовою неперервності лінійного оператора між банаховими просторами є замкненість його графіка як підмножини добутку цих просторів.

У теорії топологічних груп добре вивчена автоматична неперервність гомоморфізмів між польськими групами. Класичним є результат Петтіса[8], згі-

[4]Hryniv, O.: Universal objects in some classes of Clifford topological inverse semigroups. Semigroup Forum. **75** (3), 683–689 (2007).

[5]Arhangel'skii, A., Tkachenko, M.: Topological groups and related structures. Atlantis Press, Amsterdam–Paris (2008).

[6]Banakh, T.: On cardinal invariants and metrizability of topological inverse Clifford semigroups. Topology and its Applications. **128** (1), 13–48 (2003).

[7]Banakh, T., Bokalo, B.: Cardinal invariants and metrizability of topological inverse semigroups. Topology Appl. **128** (1), 3–12 (2003).

[8]Pettis, B.: On continuity and openness of homomorphisms in topological groups. Ann. of Math. **2** (52), 293—308 (1950).

дно з яким, кожний вимірний за Бером (прообраз відкритої множини якого є множиною з властивістю Бера) гомоморфізм між польськими групами неперервний. Для вимірних гомоморфізмів відомий результат Вейля, який доводить неперервність вимірних гомоморфізмів між локально компактними топологічними групами. Христенсен[9] отримав аналогічний результат, замінивши умову локальної компактності груп на абелевість. Солецький[10] розглянув цю задачу для класу аменабельних в одиниці груп, який містить всі польські групи, що є локально компактними або абелевими. Також відомий результат Нолла[11] про неперервність вимірного за Сусліним гомоморфізму з повної за Чехом топологічної групи в довільну топологічну групу.

Для кліфордових топологічних інверсних напівгруп доцільно розглядати задачу автоматичної неперервності гомоморфізмів $h : X \to Y$ між топологічними кліфордовими інверсними напівгрупами, звуження $h|H$, $h|E$ яких на кожну максимальну підгрупу $H \subset X$ і максимальну напівгратку $E \subset X$ неперервні. Позитивний розв'язок цієї задачі у класі компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп з максимальною напівграткою Лоусона був отриманий Боуманом[12] і, у загальнішому контексті, для компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп Ягером[13], який довів, що гомоморфізм між кліфордовими компактними топологічними інверсними напівгрупами є неперервним, якщо його звуження на кожну підгрупу і кожну піднапівгратку є неперервними. Знов-таки, відкритим питанням залишалося послаблення умови компактності напівгруп. Саме ці питання розглядаються у дисертації і розв'язуються за допомогою поняття дітопологічності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри геометрії і топології механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка в рамках теми МТ-28 Ф "Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці" (номер державної реєстрації 0116U001537).

Метою дисертації є означення і дослідження нового класу топологічних інверсних напівгруп з операцією неперервного ділення – *дітопологічних* напівгруп.

---

[9]Christensen, J.: Borel structures in groups and semigroups. Math. Scand. **28**, 124-–128 (1971) .

[10]Solecki, S.: Amenability, free subgroups, and Haar null sets in non-locally compact groups. Proc. LondonMath. Soc. **93** (3), 693-–722 (2006).

[11]Noll, D.: Souslin measurable homomorphisms of topological groups. Arch. Math. **59**, 294—301 (1992).

[12]Bowman, T.: A construction principle and compact Clifford semigroups. Semigroup Forum. **2** (4), 343–353 (1971). doi:10.1007/BF02572301.

[13]Yeager, D.: On the topology of a compact inverse Clifford semigroup. Trans. Amer. Math. Soc. **215**, 253–267 (1976).

Це передбачає розв'язання наступних задач:

- дослідити збереження дітопологічності основними операціями над топологічними напівгрупами;
- дослідити, які з відомих і добре вивчених класів топологічних напівгруп володіють властивістю дітопологічності;
- побудувати приклад інверсної напівгрупи, що не є дітопологічною;
- побудувати вкладення дітопологічних напівгруп у добутки нуль-розширень груп чи конусів над групами;
- дослідити, за яких умов кліфордова дітопологічна інверсна напівгрупа вкладається в компактну кліфордову топологічну інверсну напівгрупу;
- довести критерій метризовності кліфордових дітопологічних інверсних напівгруп;
- дослідити автоматичну неперервність гомоморфізмів між кліфордовими топологічними інверсними напівгрупами, які не є компактними.

Об'єктом дослідження є дітопологічні інверсні напівгрупи.

Предметом дослідження є властивості дітопологічних інверсних напівгруп.

Методи дослідження: використано методи топологічної алгебри, зокрема, теорії топологічних напівгруп.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані в дисертації результати є новими. У роботі вперше:

- введено поняття дітопологічної напівгрупи;
- побудовано вкладення дітопологічних кліфордових інверсних напівгуп у добутки нуль-розширень і конусів над їх максимальними підгрупами;
- отримано критерій існування вкладення дітопологічної кліфордової інверсної напівгрупи в компактну кліфордову інверсну напівгрупу;
- отримано критерій метризовності дітопологічних кліфордових інверсних напівгруп;
- доведено теорему про автоматичну неперервність гомоморфізмів між дітопологічними інверсними напівгрупами.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при читанні спеціальних курсів, в дослідженнях з теорії топологічних інверсних напівгруп.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати, наведені у роботі, отримані здобувачем самостійно. У спільних статтях співавтору належить постановка задачі, обговорення результатів та загальне керівництво роботою. Використані в дисертації ідеї, положення чи гіпотези інших авторів мають відповідні посилання і використані лише для підкріплення ідей здобувача.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- міжнародній конференції "Geometry in Odesa-2011", Одеса, Україна (23–28 травня, 2011 р.), назва доповіді "Parallel topological inverse Clifford semigroups";
- конференції "Сучасні проблеми механіки та математики", Львів, Україна (5–15 липня, 2011 р.), назва доповіді "Topological and ditopological unoid-semigroups";
- на конференції "Дні Львівського університету у Вроцлавському університеті", Вроцлав, Польща (18–19 травня, 2012 р.), назва доповіді "Parallel Topological Inverse Clifford Semigroups";
- "International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach", Львів, Україна (17–21 вересня, 2012 р.), назва доповіді "Fiber-parallel topological I^{-1}-semigroups";
- "Workshop in topological inverse semigroups", Lodz, Poland (7–13 листопада, 2012 р.), назва доповіді "Ditopological inverse semigroups";
- 9-ій літній школі з алгебри, топології та аналізу, с. Поляниця, Івано-Франківська область (7–18 липня, 2014 р.), назва доповіді "Автоматична неперервність гомоморфізмів між топологічними напівгрупами";
- "Workshop in Topological groups and its applications", Hradec Kralove, Czech Republic (22–27 вересня, 2014 р.), назва доповіді "Ditopological inverse semigroups";
- "VI International Hahn conference dedicated to the 135-th anniversary of Hans Hahn", Чернівці, Україна, (30 червня – 5 липня, 2014 р.), назва доповіді "Automatic continuity of homomorphisms between topological Clifford semigroups".

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 10 працях: 5 статей, з яких 3 опубліковано у наукових періодичних закордонних виданнях і 2 опубліковано у виданнях України, що включені до міжнародних наукометричних баз, та 5 тез у міжнародних конференціях.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 48 найменувань і займає 5 сторінок. Загальний обсяг роботи становить 105 сторінок. Для її оформлення використано видавничу систему LaTeX.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми дисертації, формулюється її мета, завдання та основні задачі, які розв'язуються в роботі, описується наукова новизна отриманих результатів і наводяться форми їх апробації.

У **першому** розділі подається огляд літератури за темою дисертації та формулюються основні результати дисертації в контексті досліджень інших авторів.

У **другому** розділі виписані всі необхідні означення та основні технічні твердження, які потрібні для роботи з дітопологічними інверсними напівгрупами – основними об'єктами роботи.

Непорожню множину S з заданою на ній бінарною асоціативною операцією $\cdot : S \times S \to S$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, називатимемо *напівгрупою*.

Інверсною напівгрупою називатимемо напівгрупу S, в якій для кожного $x \in S$ існує єдиний інверсний елемент $x^{-1} \in S$, тобто $x = xx^{-1}x$ і $x^{-1} = x^{-1}xx^{-1}$.

Напівграткою називатимемо комутативну напівгрупу S, кожний елемент якої є ідемпотентом, тобто $xx = x$, для кожного $x \in S$.

Для кожного елемента x інверсної напівгрупи S, елементи вигляду xx^{-1}, $x^{-1}x$ є ідемпотентами, тобто $(xx^{-1})(xx^{-1}) = xx^{-1}$ і $(x^{-1}x)(x^{-1}x) = x^{-1}x$. Множину ідемпотентів напівгрупи S надалі позначатимемо $E(S)$. Відомо, що ідемпотенти інверсної напівгрупи S комутують[1], тобто $E(S)$ – напівгратка, яку називатимемо *максимальною напівграткою* напівгрупи S. Частковий порядок на напівгратці E позначатимемо через $\leq$, тобто $x \leq y$, якщо $xy = x = yx$, для $x, y \in E$. Для кожної точки x в топологічній напівгратці E, множина $\uparrow x = \{y \in E : x \leq y\}$ називається *верхнім конусом над* x.

Кліфордовою інверсною напівгрупою називатимемо інверсну напівгрупу S, кожний елемент x якої міститься в групі, тобто S є об'єднанням $S = \bigcup_{e \in E(S)} H_e$ своїх максимальних підгруп $H_e = \{x \in S : xx^{-1} = x^{-1}x = e\}$, $e \in E(S)$.

Інверсна напівгрупа S називається *топологічною інверсною напівгрупою*, якщо на ній задана гаусдорфова топологія, відносно якої операції множення $\cdot : S \times S \to S, (x, y) \mapsto xy$, та інверсія $()^{-1} : S \to S, x \mapsto x^{-1}$, є неперервними.

Топологічна напівгратка E називається:

- *напівграткою Лоусона*, якщо існує база топології на E, яка складається з відкритих піднапівграток;
- *U-напівграткою*, якщо для кожної відкритої множини U в E і кожної точки $x \in U$ існує така точка $y \in U$, що $x \in \mathrm{Int}(\uparrow y)$;
- *U_0-напівграткою*, якщо для кожної відкритої множини U в E і кожної точки $x \in U$ існує така точка $y \in U$, що $y \leq x$ і $\mathrm{Int}(\uparrow y) = \uparrow y$;
- *U_2-напівграткою*, якщо для кожної відкритої множини U в E і кожної точки $x \in U$ існують точка $y \in U$ і відкрито-замкнений ідеал $I \subset E$, для яких $x \in E \setminus I \subset \uparrow y$.

Тут через $\mathrm{Int}(A)$ позначається внутрішність множини A у топологічному просторі X.

Топологічна інверсна напівгрупа S називається:

- *U-напівгрупою*, якщо її максимальна напівгратка $E(S)$ є U-напівграткою;
- *U_0-напівгрупою*, якщо її максимальна напівгратка $E(S)$ є U_0-напівграткою;
- *U_2-напівгрупою*, якщо її максимальна напівгратка $E(S)$ є U_2-напівграткою.

Під *зведеним добутком* $X \times_I Y$ напівгруп X і Y за замкненим двостороннім ідеалом $I \subset X$ розумітимемо множину $I \cup ((X \setminus I) \times Y)$, наділену такою найслабшою топологією, що

- відображення $(X \setminus I) \times Y \hookrightarrow X \times_I Y$ є топологічним вкладенням,
- проекція $\pi : X \times_I Y \to X$ неперервна.

Тут

$$\pi(z) = \begin{cases} z, & \text{якщо } z \in I, \\ x, & \text{якщо } z = (x, y) \in (X \setminus I) \times Y, \end{cases}$$

для $z \in X \times_I Y$.

У **третьому** розділі дисертації означується і вивчається клас дітопологічних напівгруп. Основна увага спрямована на дослідження інверсних дітопологічних напівгруп.

Означення 3.9. Топологічна інверсна напівгрупа S називається *дітопологічною,* якщо для довільної точки $x \in S$ та її околу $O_x \subset S$ існують околи $U_x \subset S$ точки x та $W_{xx^{-1}} \subset E(S)$ ідемпотента xx^{-1} такі, що довільна точка $y \in S$ належить околу O_x, якщо $yy^{-1} \in W_{xx^{-1}}$ і $ey \in U_x$, для деякого ідемпотента $e \in W_{xx^{-1}}$.

Зауважимо, що еквівалентним формулюванням вищезгаданого означення є його "симетрична версія":

Означення 3.13. Топологічна інверсна напівгрупа S називається *дітопологічною,* якщо для довільної точки $x \in S$ та її околу $O_x \subset S$ існують околи $U_x \subset S$ точки x та $W_{x^{-1}x} \subset E(S)$ ідемпотента $x^{-1}x$ такі, що довільна точка $y \in S$ належить околу O_x, якщо $y^{-1}y \in W_{x^{-1}x}$ і $ye \in U_x$, для деякого ідемпотента $e \in W_{x^{-1}x}$.

Основні результати розділу описують наступні теореми та твердження:

Теорема 3.26. *Клас дітопологічних інверсних напівгруп містить всі топологічні групи, топологічні напівгратки, а також уніформізовні і компактні топологічні інверсні напівгрупи.*

Твердження 3.30-3.31, Наслідок 3.35, Теореми 3.38-3.40. *Властивість дітопологічності інверсних напівгруп зберігається операціями взяття інверсних піднапівгруп, тихоновського, напівпрямого та зведеного добутків.*

У цьому ж розділі побудовано приклад локально компактної комутативної топологічної інверсної напівгрупи, яка не є дітопологічною.

Четвертий розділ присвячено вивченню класу слабко дітопологічних інверсних напівгруп, в яких дітопологічність є дещо слабшою і які виникатимуть у розділі 6 при розв'язанні задачі про автоматичну неперервність гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами.

Означення 4.1. Топологічна інверсна напівгрупа S називається *слабко дітопологічною*, якщо для довільної точки $x \in S$ і її околу $O_x \subset S$, існують окіл $U_x \subset S$ точки x і околи $W_{xx^{-1}}, W_{x^{-1}x} \subset E(S)$ ідемпотентів $xx^{-1}, x^{-1}x$ такі, що точка $y \in S$ належить околу O_x, якщо $yy^{-1} \in W_{xx^{-1}}$, $y^{-1}y \in W_{x^{-1}x}$ і існує ідемпотент $e \in W_{xx^{-1}}$ такий, що $ey \in U_x$.

Кожна дітопологічна інверсна напівгрупа, очевидно, є слабко дітопологічною.

Властивості слабко дітопологічних інверсних напівгруп описують наступні твердження.

Твердження 4.7-4.10. *Властивість слабкої дітопологічності інверсних напівгруп зберігається операціями взяття інверсних піднапівгруп, тихоновського, напівпрямого та зведеного добутків.*

У підрозділі 4.2 побудовано приклад метризовної слабко дітопологічної інверсної напівгрупи, що не є дітопологічною.

П'ятий розділ розв'язує основну задачу дисертації, яка стала причиною виникнення класу дітопологічних інверсних напівгруп. А саме, задачу побудови вкладень кліфордових топологічних інверсних напівгруп, які не є компактними, в добутки нуль-розширень топологічних груп або конусів над топологічними групами.

Нагадаємо, що *нуль-розширенням* $\dot{G} = G \cup \{0\}$ топологічної групи G є напівгрупа, утворена приєднанням до G ізольованої точки 0, яка є нулем напівгрупи $\dot{G}$, тобто $x0 = 0x = 0$, для всіх $x \in \dot{G}$.

Конусом $\hat{G}$ топологічної групи G називається зведений добуток $[0,1] \times_{\{0\}} G$ топологічної напівгратки $([0,1], \min)$ і топологічної групи G за замкненим ідеалом $\{0\}$ в $[0,1]$.

Основними результатами розділу є наступні наслідки:

Наслідок 5.6. *Нехай S – кліфордова топологічна інверсна U_2-напівгрупа. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) *S вкладається в тихоновський добуток топологічних напівграток та нуль-розширень топологічних груп;*
2) *S вкладається в топологічну кліфордову інверсну напівгрупу $E \times \prod_{e \in E} \dot{H}_e^{w(E)}$;*
3) *S – дітопологічна кліфордова інверсна напівгрупа.*

Наслідок 5.7. *Нехай S – кліфордова топологічна інверсна U-напівгрупа. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) *S вкладається в тихоновський добуток топологічних напівграток та конусів над топологічними групами;*
2) *S вкладається в топологічну кліфордову інверсну напівгрупу $E \times \prod_{e \in E} \hat{H}_e^{w(E)}$;*
3) *S – дітопологічна кліфордова інверсна напівгрупа.*

Отримані теореми є аналогами теорем вкладення, доведених О. Гринів[4] для компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп.

Вищезгадані теореми вкладення дають змогу охарактеризувати топологічні кліфордові інверсні напівгрупи, що вкладаються в компактні кліфордові інверсні напівгрупи.

Теорема 5.10. *Топологічна кліфордова інверсна U-напівгрупа S вкладається в компактну кліфордову інверсну напівгрупу тоді і лише тоді, коли виконуються умови:*

1) *максимальна напівгратка $E = \{e \in S : ee = e\}$ вкладається в компактну напівгратку;*
2) *кожна максимальна підгрупа H_e, $e \in E$, в S вкладається в компактну групу;*
3) *S дітопологічна.*

Окрім того, теореми вкладення дали змогу узагальнити теореми метризовності для компактних топологічних інверсних напівгруп, доведені Т. Банахом[6] та компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп, отримані Т. Банахом та Б. Бокалом [7], а також критерій метризовності субінваріантними метриками компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп, отриманий О. Гринів[4].

Нагадаємо, що метрика d на топологічній напівгрупі S називається *субінваріантною*, якщо

$$d(zx, zy) \leq d(x, y) \text{ і } d(xz, yz) \leq d(x, y),$$

для всіх $x, y, z \in S$.

Якщо топологічна група G метризовна метрикою d, то конус $\hat{G}$ над G метризовний метрикою

$$\hat{d}(x, y) = \min\{t_x + t_y, |t_x - t_y| + d(g_x, g_y)\},$$

де $x = q(t_x, g_x)$, $y = q(t_y, g_y)$ – точки конуса $\hat{G}$, а $q : [0, 1] \times G \to \hat{G}$ – фактор-відображення. Якщо d – інваріантна метрика на G, то $\hat{d}$ – субінваріантна метрика на $\hat{G}$.

Для дітопологічних інверсних кліфордових U-напівгруп справедливий наступний критерій метризовності:

Теорема 5.12. *Нехай S – дітопологічна інверсна кліфордова напівгрупа, максимальна напівгратка якої є сепарабельною U-напівграткою. Топологічна напівгрупа S*

1) *метризовна тоді і лише тоді, коли її максимальна напівгратка та усі максимальні групи метризовні;*
2) *метризовна субінваріантною метрикою тоді і лише тоді, коли її максимальна напівгратка та усі максимальні групи метризовні субінваріантними метриками.*

У **шостому** розділі досліджується задача автоматичної неперервності гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами. Інакше кажучи, розв'язується наступна задача: чи є неперервним гомоморфізм $h : X \to Y$ між кліфордовими топологічними інверсними напівгрупами X та Y, якщо його звуження $h|H$, $h|E$ на кожну підгрупу $H \subset X$ і напівгратку $E \subset X$ неперервні?

Для кліфордових топологічних інверсних напівгруп задача автоматичної неперервності досліджувалась Боуманом[12] для компактних кліфордових інверсних напівгруп з максимальною напівграткою Лоусона та Ягером[13] для компактних кліфордових інверсних напівгруп.

Гомоморфізм $h : X \to Y$ між топологічними інверсними напівгрупами X та Y називатимемо *EH-неперервним*, якщо його звуження $h|H$, $h|E$ на кожну підгрупу $H \subset X$ і піднапівгратку $E \subset X$ неперервні.

У 6 розділі дисертації отримано наступні результати про автоматичну неперервність гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами.

Наслідок 6.7. *Кожний EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ з топологічної інверсної напівгрупи X з нуль-вимірною локально компактною максимальною напівграткою $E(X)$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Наслідок 6.8. *Кожний EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ з топологічної інверсної кліфордової напівгрупи X з локально компактною максимальною напівграткою Лоусона $E(X)$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Оскільки кожна компактна інверсна напівгрупа дітопологічна, а отже, й слабко дітопологічна, то, як наслідок, отримуємо вищезгаданий результат Боумана.

Нагадаємо, що функція $h : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y називається *вимірною за Сусліним*, якщо $h^{-1}(U)$ – вимірна за Сусліним множина в X, для кожної відкритої F_σ-множини $U \subset Y$.

З наслідків 6.7, 6.8 і теореми Нолла[11] про неперервність вимірного за Сусліним гомоморфізму з повної за Чехом топологічної групи в довільну топологічну групу, випливають наступні критерії автоматичної неперервності вимірних за Сусліним гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами.

Наслідок 6.12. *Нехай X – паракомпактна повна за Чехом топологічна інверсна напівгрупа з нуль-вимірною локально компактною максимальною напівграткою $E \subset X$. Довільний гомоморфізм $h : X \to Y$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним тоді і лише тоді, коли h вимірний за Сусліним і звуження $h|E$ неперервне.*

Наслідок 6.13. *Нехай X – паракомпактна повна за Чехом топологічна інверсна напівгрупа, максимальна напівгратка $E \subset X$ якої є локально компактною напівграткою Лоусона. Довільний гомоморфізм $h : X \to Y$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним тоді і лише тоді, коли h вимірний за Сусліним і звуження $h|E$ неперервне.*

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню класу дітопологічних інверсних напівгруп. У дисертації отримано такі основні результати:

- введено поняття дітопологічної напівгрупи;
- доведено, що клас дітопологічних напівгруп містить усі топологічні напівгратки, топологічні групи, а також компактні і уніформізовні напівгрупи;
- доведено, що клас дітопологічних напівгруп є замкненим відносно операцій взяття піднапівгрупи, тихоновського, напівпрямого і зведеного добутків;
- побудовано приклад комутативної топологічної інверсної напівгрупи, яка не є дітопологічною;
- означено клас слабко дітопологічних інверсних напівруп, який містить усі дітопологічні інверсні напівгрупи і є замкненим відносно операцій взяття інверсної піднапівгрупи, а також тихоновських, напівпрямих та зведених добутків;
- побудовано приклад слабко дітопологічної інверсної напівгрупи, яка не є дітопологічною;
- побудовано вкладення дітопологічної кліфордової інверсної U-напівгрупи в тихоновський добуток її максимальної напівгратки і конусів над максимальними групами;
- побудовано вкладення дітопологічної кліфордової інверсної U_2-напівгрупи в тихоновський добуток її максимальної напівгратки і нуль-розширень максимальних підгруп;
- знайдено критерій прекомпактності топологічної кліфордової інверсної U-напівгрупи;
- доведено критерій метризовності дітопологічних кліфордових інверсних напівгруп;
- побудовано приклад топологічної напівгратки, яка є метризовною, але не є метризовною субінваріантною метрикою;
- доведено неперервність гомоморфізмів, звуження яких на максимальні підгрупи і напівгратки є неперервними, з топологічної інверсної напівгрупи в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу;
- доведено теорему про автоматичну неперервність вимірних за Сусліним гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Banakh, T. , Pastukhova, I.: Topological and ditopological unosemigroups. Mat. Stud. **39** (2), 119–133 (2013).

2. Banakh, T., Pastukhova, I.: On topological Clifford semigroups embeddable into products of cones over topological groups. Semigroup Forum. **89** (2), 367-–382 (2014).

3. Banakh, T., Pastukhova, I.: Automatic continuity of homomorphisms between topological semigroups. Semigroup Forum. **90** (2), 280-–295 (2015).

4. Pastukhova, I.: On continuity of homomorphisms between topological Clifford semigroups. Carpathian Math. Publ. **6** (1), 123—129 (2014).

5. Pastukhova, I.: Automatic continuity of homomorphisms between topological inverse semigroups. Topological Algebra and its Applications. **6** (1), 60–66 (2018).

Тези конференцій:

1. Pastukhova I.: Parallel Topological Inverse Clifford Semigroups. In: Abstracts of International Conference "Geometry in Odesa-2011": p. 85. Odesa, May 23-28, 2011.

2. Banakh, T., Pastukhova, I.: Fiber-parallel topological I^{-1}-semigroups. In: Abstracts of the International Conference Dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach: p. 102. niversity of Lviv, Lviv, September 17–21, 2012.

3. Banakh, T., Pastukhova, I.: Topological and ditopological unoid-semigroups. In: Abstracts of the Conference "Modern Problems of Mechanics and Mathematics": p. 206–207. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, May 21–25, 2013.

4. Pastukhova, I.: Automatic continuity of homomorphisms between topological Clifford semigroups. In: Abstracts of the IV International Hanh Conference dedicated to the 135th anniversary of Hans Hanh : Book of Abstract: p. 241–242. Chernivtsi, 2014.

5. Пастухова, І. Автоматична неперервність гомоморфізмів між топологічними напівгрупами. In: Abstracts of the IXth Summer School, Algebra, Topology and Analysis: p. 61, Polianytsia, July 7–18, 2014.

АНОТАЦІЯ

Пастухова І. С. *Дітопологічні інверсні напівгрупи.* – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 «Геометрія і топологія». – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2019.

Дисертаційна робота присвячена вивченню класу дітопологічних інверсних напівгруп. Показано, що властивістю дітопологічності володіють всі топологічні групи, топологічні напівгратки, а також, уніформізовні і компактні топологічні інверсні напівгрупи. В дисертації доведено, що клас дітопологічних інверсних напівгруп є замкненим відносно взяття інверсних піднапівгруп, тихоновських та напівпрямих добутків, а також зведених добутків, зокрема конусів над топологічними групами та нуль-розширень топологічних груп. Окрім цього, побудовано приклад топологічної інверсної напівгрупи, яка не є дітопологічною.

Основною задачею дисертації є узагальнення теорем вкладення компактних кліфордових інверсних напівгруп у добутки нуль-розширень топологічних груп чи конусів над топологічними групами, отриманих О. Гринів, на некомпактний випадок. В результаті, у дисертації побудовано вкладення кліфордових дітопологічних інвесних U_0-напівгруп у добуток топологічних напівграток та нуль-розширень топологічних груп, а кліфордових дітопологічних інвесних U-напівгруп – у добуток топологічних напівграток та конусів над топологічними групами. Наслідком вищезгаданих теорем є критерій існування вкладення кліфордової дітопологічної інверсної U-напівгрупи в компактну топологічну інверсну напівгрупу. У дисертації отримано аналог теорем метризовності компактних кліфордових інверсних напівгруп з метризовними максимальними групами та напівгратками, доведених Т. Банахом, для некомпактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп з метризовними максимальними підгрупами та напівгратками.

Для класу кліфордових інверсних напівгруп у дисертації досліджується задача про автоматичну неперервність гомоморфізмів, звуження яких на всі підгрупи і всі піднапівгратки неперервні. Визначальною умовою при її розв'язанні стала дітопологічність напівгруп. Важливим наслідком з отриманих теорем про автоматичну неперервність гомоморфізмів є неперервність борелівських гомоморфізмів з неперервними звуженнями на піднапівгратки, означених на повних за Чехом локально компактних кліфордових топологічних інверсних U-напівгрупах, зі значеннями у дітопологічних інверсних напівгрупах.

Ключові слова: топологічна інверсна напівгрупа, кліфордова топологічна інверсна напівгрупа, топологічна напівгратка, топологічна група, дітопологічна напівгрупа.

ABSTRACT

Pastukhova I. *Ditopological inverse semigroups.* Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Mathematics (PhD): Speciality 01.01.04 — Geometry and Topology. — Ivan Franko National University of Lviv, the Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2019.

The dissertation focuses on defining and studying a new class of topological inverse semigroups, called ditopological semigroups. Ditopological inverse semigroups form a natural class of topological inverse semigroups, containing all topological groups, topological semilattices, all uniformizable and compact inverse semigroups. Moreover, this class in preserved by taking inverse subsemigroups and operations of Tychonoff, semidirect and reduced products. In addition, an example of a topological inverse semigroup which is not ditopological is constructed in the dissertation.

The main problem of the dissertation was to extend to a non-compact case the embedding theorems obtained by O. Hryniv, who constructed a topological embedding of some Clifford compact inverse semigroups into the products of zero-extensions of topological groups or cones over topological groups. In the dissertation these results are extended to non-compact ditopological Clifford inverse semigroups. In particular, an embedding of a ditopological Clifford inverse U_0-semigroup into the product of maximal semilattice and zero-extensions of maximal groups is constructed. Another result builds an embedding of a ditopological Clifford inverse U-semigroup into the product of maximal semilattice and cones over maximal groups. These embedding theorems have several important implications. One of them provides a criterion of embeddability of a Clifford topological inverse U-semigroup into a compact Clifford inverse semigroup. Besides, the embeddability theorems for ditopological Clifford semigroups are applied to obtain a criterion of metrizability of ditopological Clifford inverse semigroups (by a subinvariant metric) in terms of metrizability of its maximal semilattices and its maximal subgroups.

The structure results for Clifford ditopological inverse semigroups allow us to obtain interesting results on the automatic continuity of homomorphisms between ditopological Clifford inverse semigroups. It is reasonable to consider the following automatic continuity problem for Clifford inverse topological semigroups: is the homomorphism between Clifford topological inverse semigroups continuous provided its restrictions to each subsemilattice and each subgroup are continuous? This problem was solved affirmatively by Bowman for compact Clifford topological inverse semigroups with Lawson maximal semilattice and by Yeager for compact Clifford topological inverse semigroups. In the dissertation analogs of the above automatic continuity theorems for non-compact ditopological inverse semigroups are obtained.

Keywords: topological inverse semigroup, Clifford topological inverse semigroup, topological semilattice, topological group, ditopological semigroup.