Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Пастухова Ірина Степанівна

УДК 515.1

ДИСЕРТАЦІЯ
Дітопологічні інверсні напівгрупи

01.01.04 — Геометрія і топологія
11 Математика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
_____ І. С. Пастухова
(підпис)

Науковий керівник: Банах Тарас Онуфрійович,
доктор фізико-математичних наук, професор

ЛЬВІВ — 2018

Зміст

Анотація

Пастухова І.С. Дітопологічні інверсні напівгрупи. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 «Геометрія і топологія». – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

Дисертаційна робота присвячена вивченню нового класу топологічних інверсних напівгруп – класу дітопологічних напівгруп.

Властивістю дітопологічності володіють багато вже відомих класів топологічних напівгруп, зокрема, всі топологічні групи, топологічні напівгратки, а також, уніформізовні і компактні топологічні інверсні напівгрупи.

В дисертації доведено, що клас дітопологічних інверсних напівгруп є замкненим відносно взяття інверсних піднапівгруп, тихонівських та напівпрямих добутків, а також зведених добутків, зокрема конусів над топологічними групами та нуль-розширень топологічних груп. Окрім цього, побудовано приклад топологічної інверсної напівгрупи, яка не є дітопологічною.

Причиною виникнення класу дітопологічних інверсних напівгруп була проблема опису структури кліфордових топологічних інверсних напівгруп, які не є компактними. Це й стало основною задачею дисертації: узагальнити теореми вкладення компактних кліфордових інверсних напівгруп у добутки нуль-розширень топологічних груп чи конусів над топологічними групами, отримані О. Гринів, на некомпактний випадок. В результаті, у дисертації побудовано вкладення кліфордових дітопологічних інвесних U_0-напівгруп у добуток топологічних напівграток та нуль-розширень топологічних груп, а кліфордових дітопологічних інвесних U-напівгруп – у добуток топологічних напівграток та конусів над топологічними групами.

Одним з важливих наслідків вищезгаданих теорем є критерій існува-

ння вкладення кліфордової дітопологічної інверсної напівгрупи в компактну топологічну інверсну напівгрупу, згідно з яким, кожна кліфордова дітопологічна інверсна U-напівгрупа вкладається в компактну кліфордову топологічну інверсну напівгрупу тоді і лише тоді, коли її максимальна напівгратка вкладається в компактну напівгратку, а кожна максимальна підгрупа вкладається в компактну групу.

Ще однією задачею, яка розглядається у дисертації, є отримання аналогу теорем метризовності компактних кліфордових інверсних напівгруп з метризовними максимальними групами та напівгратками, отриманих Т. Банахом, для некомпактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп з метризовними максимальними підгрупами та напівгратками. Отриманий розв'язок надає необхідні і достатні умови метризовності (субінваріантними) метриками таких напівгруп.

Особливість будови кліфордових інверсних напівгруп сприяє постановці і дослідженню задачі автоматичної неперервності для кліфордових топологічних інверсних напівгруп. Для цього класу напівгруп доцільно розглядати задачу про автоматичну неперервність гомоморфізмів, звуження яких на всі підгрупи і всі піднапівгратки неперервні. Позитивний розв'язок цієї задачі у класі компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп з максимальною напівграткою Лоусона був отриманий Боуманом і, у більш загальному контексті, для компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп Ягером.

Ще одним дослідженням, проведеним у дисертації, є можливість узагальнення вищезгаданих теорем про автоматичну неперервність на випадок некомпактних топологічних інверсних напівгруп. В результаті було знайдено умови, що забезпечують автоматичну неперервність гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами та кліфордовими топологічними інверсними напівгрупами, звуження яких на кожну піднапівгратку і кожну підгрупу неперервне. Визначальною умовою в цих теоремах є дітопологічність напівгруп. Важливим наслідком з отриманих теорем про автоматичну неперервність гомоморфізмів є неперервність борелівських гомоморфізмів з неперервними звуженнями

на піднапівгратки, означених на повних за Чехом локально компактних кліфордових топологічних інверсних U-напівгрупах, зі значеннями у дітопологічних інверсних напівгрупах.

Ключові слова: топологічна інверсна напівгрупа, кліфордова топологічна інверсна напівгрупа, топологічна напівгратка, топологічна група, дітопологічна напівгрупа.

Список публікацій здобувача

1. Banakh T. *Topological and ditopological unosemigroups* / T. Banakh, I. Pastukhova // Mat. Stud. – 2013. –V. 39, no. 2. – P. 119–133. (Здобувачеві належать усі результати, окрім постановки задач.)

2. T.Banakh T. *On topological Clifford semigroups embeddable into products of cones over topological groups* / T. Banakh, I. Pastukhova // Semigroup Forum – 2014. – V. 89, no. 2. – P. 367-–382. (Здобувачеві належать усі результати, окрім постановки задач.)

3. T. Banakh T. *Automatic continuity of homomorphisms between topological semigroups* / T. Banakh, I. Pastukhova // Semigroup Forum – 2015. – V. 90, no. 2. – P. 280-–295. (Здобувачеві належать усі результати, окрім розділу 2.7, який не внесений до дисертації.)

4. I. Pastukhova I. *On continuity of homomorphisms between topological Clifford semigroups* / I. Pastukhova // Carpathian Math. Publ. – 2014. – V. 6, no. 1. – P 123—129.

5. I. Pastukhova I. *Automatic continuity of homomorphisms between topological inverse semigroups* / I. Pastukhova // Topological Algebra and its Applications – 2018. V. 6, no. 1. – P. 60–66.

Апробація результатів

1. Pastukhova I. *Parallel Topological Inverse Clifford Semigroups* / I. Pastukhova // Abstracts of International Conference "Geometry in Odesa-2011". – Odesa, 2011. – P. 85.

2. Banakh T. *Fiber-parallel topological I^{-1}-semigroups* / T. Banakh, I. Pastukhova // International Conference Dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, September 17–21, 2012, Lviv : Book of Abstract. – Lviv, 2012. – P. 102.

3. Banakh T. *Topological and ditopological unoid-semigroups* / T. Banakh, I. Pastukhova // Modern Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics : Book of Abstract. – Lviv, 2013. – V. 3. – P. 206–207.

4. Pastukhova I. *Automatic continuity of homomorphisms between topological Clifford semigroups* / I. Pastukhova // IV International Hanh Conference dedicated to the 135th anniversary of Hans Hanh : Book of Abstract. – Chernivtsi, 2014. – P. 241–242.

5. Пастухова І. *Автоматична неперервність гомоморфізмів між топологічними напівгрупами* / І. Пастухова // IXth Summer School, Algebra, Topology and Analysis, July 7–18, 2014, Polianytsia : Book of Abstract. – Polianytsia, Ukraine 2014. – P. 61.

Abstract

Iryna Pastukhova. Ditopological inverse semigroups. – Qualification scientific paper, manuscript. Thesis for a Candidate Degree in Mathematics (PhD): Speciality 01.01.04 — Geometry and Topology. — Ivan Franko National University of Lviv, the Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2018.

The dissertation focuses on defining and studying a new class of topological inverse semigroups, called ditopological semigroups.

Ditopological inverse semigroups form a natural class of topological inverse semigroups, containing all topological groups, topological semilattices, all uniformizable and compact inverse semigroups. Moreover, this class in preserved by taking inverse subsemigroups and operations of Tychonoff, semidirect and reduced products. In addition, an example of a topological inverse semigroup which is not ditopological is constructed in the dissertation.

The main problem of the dissertation was to extend to a non-compact case the embedding theorems obtained by O. Hryniv, who constructed a topological embedding of some Clifford compact inverse semigroups into the products of zero-extensions of topological groups or cones over topological groups. In the dissertation these results are extended to non-compact ditopological Clifford inverse semigroups. In particular, an embedding of a ditopological Clifford inverse U_0-semigroup into the product of maximal semilattice and zero-extensions of maximal groups is constructed. Another result builts an embedding of a a ditopological Clifford inverse U-semigroup into the product of maximal semilattice and cones over maximal groups.

These embedding theorems have several important implications. One of them provides a criterion of embeddability of a Clifford topological inverse U-semigroup into a compact Clifford inverse semigroup.

Besides, the embeddability theorems for ditopological Clifford semigroups are applied to obtain a criterion of metrizability of ditopological Clifford inverse semigroups (by a subinvariant metric) in terms of metrizability of its

maximal semilattices and its maximal subgroups.

The structure results for Clifford ditopological inverse semigroups allow us to obtain interesting results on the automatic continuity of homomorphisms between ditopological Clifford inverse semigroups. It is reasonable to consider the following automatic continuity problem for Clifford inverse topological semigroups: is the homomorphism between Clifford topological inverse semigroups continuous provided its restrictions to each subsemilattice and each subgroup are continuous? This problem was solved affirmatively by Bowman for compact Clifford topological inverse semigroups with Lawson maximal semilattice and by Yeager for compact Clifford topological inverse semigroups.

The problem considered in the dissertation was to obtain the analogs of the above automatic continuity theorems for non-compact ditopological inverse semigroups.

Key words: topological inverse semigroup, Clifford topological inverse semigroup, topological semilattice, topological group, ditopological semigroup.

Вступ

Актуальність теми. У дисертації означується і вивчається новий підклас топологічних інверсних напівгруп, що складається з дітопологічних напівгруп.

Топологічні інверсні напівгрупи – надзвичайно важливий клас у сучасній топологічній алгебрі. Як відомо, симетрії в математиці описуються групами. Причиною винайдення інверсних напівгруп був розвиток різних типів неевклідових геометрій, і, як наслідок, виникнення об'єктів, симетрії яких неможливо описати за допомогою груп. Одним з таких об'єктів були псевдогрупи – узагальнення об'єктів, введених Лі в 1880-х роках, і які є множинами гомеоморфізмів між відкритими підмножинами топологічного простору, замкненими відносно операцій композиції і взяття оберненого.

В результаті пошуку об'єкта, який би описував структуру, що лежить в основі псевдогруп, в 1952 році Вагнером і, незалежно, в 1954 році Престоном було введене поняття інверсної напівгрупи – множини S з визначеною на ній асоціативною операцією, в якій для кожного елемента $x \in S$ існує єдиний обернений до нього $x^{-1} \in S$, тобто $x = xx^{-1}x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Також було отримано основний результат теорії інверсних напівгруп – теорему Вагнера-Престона про вкладення інверсної напівгрупи у симетричну інверсну напівгрупу [29], тобто напівгрупу часткових бієкцій деякої множини. Ця теорема, очевидно, є напівгруповим аналогом теореми Келі для груп.

Важливим підкласом інверсних напівгруп є кліфордові інверсні напівгрупи. Такі напівгрупи є об'єднанням груп. Структура і властивості кліфордових інверсних напівгруп в значній мірі визначається підгрупами, з яких вони складаються. У 1970-х роках, Понізовський довів [46], що кожна кліфордова інверсна напівгрупа є піднапівгрупою добутку нуль-розширень своїх підгруп. Під нуль-розширенням групи ми розуміємо саму групу з приєднаною точкою – нулем. Цей факт дозволяє застосовувати результати теорії груп для дослідження кліфордових інверсних напівгруп.

Топологічний аналог теореми Вагнера-Престона доведено Лоусоном для топологічних напівграток – топологічних комутативних напівгруп, кожний елемент яких є ідемпотентом. За теоремою Лоусона [28], кожна компактна напівгратка E Лоусона ваги $w(E) \leq \kappa$ вкладається в тихоновський куб $[0,1]^\kappa$ відрізків з операцією покоординатного мінімуму, а кожна компактна нуль-вимірна напівгратка ваги $w(E) \leq \kappa$ – в канторів куб $\{0,1\}^\kappa \subset [0,1]^\kappa$.

Для топологічних груп, ще раніше, у 1934 році, Понтрягін показав, що кожна компактна абелева топологічна група ваги $w(E) \leq \kappa$ вкладається в добуток $\mathbb{T}^\kappa$ кіл $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Задачу отримання аналогу вищезгаданого результату Понізовського для кліфордових топологічних інверсних напівгруп розв'язала О. Гринів [24]. Вона побудувала топологічні вкладення компактних кліфордових інверсних напівгруп в добутки нуль-розширень груп чи конусів над групами.

Всі згадані вище результати були отримані для топологічних кліфордових інверсних напівгруп, які є компактними. У процесі пошуку умов, які б послаблювали компактність і виник клас дітопологічних напівгруп. Як показано у розділі 3, властивість дітопологічності зберігається піднапівгрупами і операціями тихонівського і напівпрямого добутків, окрім того, всі топологічні напівгратки, топологічні групи і компактні напівгрупи є дітопологічними.

Наявність структурних теорем для кліфордових топологічних інверсних напівгруп дозволяє розв'язати задачу їх метризовності. Згідно з класичною теоремою Біркгофа-Какутані [1], топологічна група метризовна тоді і лише тоді, коли вона задовольняє першу аксіому зліченності.

У роботах [2] і [3] досліджувалася проблема метризовності компактних топологічних інверсних напівгруп з метризовними підгрупами та напівгратками. Позитивна відповідь була отримана Т. Банахом [2] для нуль-вимірних кліфордових компактних інверсних напівгруп та Т. Банахом і Б. Бокалом [3] для компактних інверсних напівгруп. Відкритим залишалося питання послаблення умови компактності напівгрупи.

Особливість будови кліфордових інверсних напівгруп сприяє постановці і дослідженню задачі автоматичної неперервності для кліфордових топологічних інверсних напівгруп. В загальному задача автоматичної неперервності полягає у пошуку умов на функцію $f : X \to Y$ між топологічними просторами X, Y і на самі простори, які б гарантували неперервність цієї функції. Одним з класичних прикладів автоматичної неперервності є теорема С. Банаха про замкнений графік, згідно якої необхідною і достатньою умовою неперервності лінійного оператора між банаховими просторами є замкненість його графіка як підмножини добутку цих просторів. У теорії топологічних груп добре вивчена автоматична неперервність гомоморфізмів між польськими групами. Класичним є результат Петтіса [37], згідно з яким, кожний вимірний за Бером (прообраз відкритої множини якого є множиною Бера) гомоморфізм між польськими групами неперервний. Для вимірних гомоморфізмів відомий результат Вейла, який доводить неперервність вимірних гомоморфізмів між локально компактними топологічними групами. Крістенсен [14] отримав аналогічний результат, замінивши умову локально компактності груп на абелевість. Солецький [39] розглянув цю задачу для класу аменабельних в одиниці груп, який містить всі польські групи, що є локально компактними або абелевими.

Також відомий результат Нолла [30] про неперервність вимірного за Сусліним гомоморфізму з повної за Чехом топологічної групи в довільну топологічну групу.

Для кліфордових топологічних інверсних напівгруп доцільно розглядати задачу автоматичної неперервності гомоморфізмів $h : X \to Y$ між топологічними кліфордовими інверсними напівгрупами, звуження $h|H$, $h|E$ яких на кожну максимальну підгрупу $H \subset X$ і максимальну напівгратку $E \subset X$ – неперервні. Позитивний розв'язок цієї задачі у класі компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп з максимальною напівграткою Лоусона був отриманий Боуманом [10] і, у загальнішому контексті, для компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп Ягером [41], який довів, що гомоморфізм між клі-

фордовими компактними топологічними інверсними напівгрупами є неперервним, якщо його звуження на кожну підгрупу і кожну піднапівгратку є неперервними. Знов-таки, відкритим питанням залишалося послаблення умови компактності напівгруп. Саме ці питання розглядаються у дисертації і розв'язуються за допомогою поняття дітопологічності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри геометрії і топології механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка в рамках теми МТ-28Ф "Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці" (номер держреєстрації 0116U001537).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертації є означення і дослідження нового класу топологічних інверсних напівгруп з операцією неперервного діленння – *дітопологічних* напівгруп.

Це передбачає розв'язання наступних задач:

- дослідити збереження дітопологічності при дії основних операцій над топологічними напівгрупами;
- дослідити, які з відомих і добре вивчених класів топологічних напівгруп володіють властивістю дітопологічності;
- побудувати приклад інверсної напівгрупи, що не є дітопологічною;
- побудувати вкладення дітопологічних напівгруп в добутки нуль-розширень груп чи конусів над групами;
- дослідити, за яких умов кліфордова дітопологічна інверсна напівгрупа вкладається в компактну кліфордову топологічну інверсну напівгрупу;
- довести критерій метризовності кліфордових дітопологічних інверсних напівгруп;

- дослідити автоматичну неперервність гомоморфізмів між кліфордовими топологічними інверсними напівгрупами, які не є компактними.

Об'єктом дослідження є дітопологічні інверсні напівгрупи.

Предметом дослідження є властивості дітопологічних інверсних напівгруп.

Методи дослідження: використано методи топологічної алгебри, зокрема, теорії топологічних напівгруп.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані в дисертації результати є новими. У роботі вперше:

- введено поняття дітопологічної напівгрупи;
- побудовано вкладення дітопологічних кліфордових інверсних напівгуп в добутки нуль-розширень і конусів над їх максимальними підгрупами;
- отримано критерій існування вкладення дітопологічної кліфордової інверсної напівгрупи в компактну кліфордову інверсну напівгрупу;
- отримано критерій метризовності дітопологічних кліфордових інверсних напівгруп;
- доведено теорему про автоматичну неперервність гомоморфізмів між дітопологічними інверсними напівгрупами, які не обов'язково є компактними.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати, наведені у роботі, отримані здобувачем самостійно. У спільних статтях співавтору належить постановка задачі, обговорення результатів та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- міжнародній конференції “Geometry in Odesa-2011”, Одеса, Україна (23–28 травня, 2011 р.), назва доповіді “Parallel topological inverse Clifford semigroups”;
- конференції “Сучасні проблеми механіки та математики”, Львів, Україна (5–15 липня, 2011 р.), назва доповіді “Topological and ditopological unoid-semigroups”;
- на конференції “Дні Львівського університету у Вроцлавському університеті”, Вроцлав, Польща (18–19 травня, 2012 р.), назва доповіді “Parallel Topological Inverse Clifford Semigroups”;
- “International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach”, Львів, Україна (17–21 вересня, 2012 р.), назва доповіді “Fiber-parallel topological I^{-1}-semigroups”;
- “Workshop in topological inverse semigroups”, Lodz, Poland (7–13 листопада, 2012 р.), назва доповіді “Ditopological inverse semigroups”;
- 9-ій літній школі з алгебри, топології та аналізу, с. Поляниця, Івано-Франківська область (7–18 липня, 2014 р.), назва доповіді “Автоматична неперервність гомоморфізмів між топологічними напівгрупами”;
- Workshop in Topological groups and its applications, Hradec Kralove, Czech Republic (22–27 вересня, 2014 р.), назва доповіді “Ditopological inverse semigroups”;
- науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М.Фішмана та М.К.Фаге, Чернівці, Україна (1–4 липня, 2015 р.), назва доповіді “Automatic continuity of homomorphisms between topological Clifford semigroups”.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 10 працях: 5 статей, з яких 3 опубліковано у наукових періодичних закордонних виданнях ([8], [9], [35]) і 2 опубліковано у виданнях України, що включені до міжнародних наукометричних баз ([7], [35]), та 5 тез у міжнародних конференціях ([32], [5], [6], [33], [45]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 48 найменувань і займає 5 сторінок.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури і основних результатів дисертації

У дисертації вводиться і вивчається підклас топологічних інверсних напівгруп, що складається з дітопологічних напівгруп. Топологічні інверсні напівгрупи – це топологічні напівгрупи, в яких для кожного елемента $x \in S$ існує єдиний інверсний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $x = xx^{-1}x$ і $x^{-1} = x^{-1}xx^{-1}$ і операція інверсії $x \mapsto x^{-1}$ неперервна.

У 1880-х роках Лі вивчав сім'ї гомеоморфізмів на многовидах, заданих системою диференціальних рівнянь, замкнені стосовно операцій композиції і взяття оберненого – псевдогрупи Лі. Пізніше, дещо загальнішим поняттям стали псевдогрупи – множини гомеоморфізмів відкритих підмножин топологічного простору, замкнені стосовно операцій композиції і оберненого. Саме вони й стали передумовою виникнення класу інверсних напівгруп – як результат означення об'єкта, що лежить в основі псевдогруп.

Це поняття вперше було введене незалежно Вагнером в 1952 р. і Престоном в 1954 р. Зокрема, вони отримали основний результат теорії інверсних напівгруп – теорему про вкладення інверсних напівгруп у симетричну інверсну напівгрупу [29, Theorem 1], яка є аналогом теореми Келі для груп.

Теорема 1.1 (Vagner-Preston)**.** *Нехай S інверсна напівгрупа. Тоді існує ін'єктивний гомоморфізм $\theta : S \to I_S$ в симетричну інверсну напівгрупу I_S.*

Під *симетричною інверсною напівгрупою* I_X множини X розуміємо множину всіх часткових бієкцій множини X.

Якщо кожний елемент x інверсної напівгрупи S комутує з інверсним до себе елементом x^{-1}, то напівгрупа S називається *кліфордовою інверсною напівгрупою.* Кліфордові інверсні напівгрупи особливі своєю структурою – вони є об'єднанням груп, які називаються максимальними підгрупами і надалі позначатимуться H_e, де e – одиниця групи H_e

і ідемпотент напівгрупи. Тобто, кожна кліфордова інверсна напівгрупа є об'єднанням $S = \bigcup_{e \in E(S)} H_e$ максимальних підгруп, параметризованим ідемпотентами з максимальної напівгратки $E(S) \subset S$. Цей факт наштовхує на метод дослідження інверсних кліфордових напівгруп, застосовуючи теорію груп до її складових, тобто породжує задачі такого типу: як властивості підгруп інверсної кліфордової напівгрупи визначають її властивості і структуру. Задачі такого типу розв'язуються у дисертації.

З одного боку, кліфордові інверсні напівгрупи є об'єднанням груп. З іншого, як випливає з теорем, отриманих Понізовським [46] у 1970-их роках для комутативних інверсних напівгруп, – кожна така напівгрупа є піднапівгрупою добутку нуль-розширень своїх максимальних підгруп.

Одним з прикладів інверсних кліфордових напівгруп є напівгратки. Вони є об'єднанням тривіальних груп. Топологічні аналоги теореми 1.1 для напівграток були отримані для класів U-напівграток і напівграток Лоусона.

Нагадаємо, що топологічна напівгратка E називається:

- *U-напівграткою*, якщо для кожної точки $e \in E$ і її відкритого околу $U \subset E$ існує така точка $y \in U$, що $x \in Int(\uparrow y)$, де $Int(\uparrow y)$ – внутрішність верхнього конуса $\uparrow y = \{x \in E : xy = yx = y\}$ точки y;

- *U_0-напівграткою*, якщо для кожної точки $e \in E$ і її відкритого околу $U \subset E$ існує така точка $y \in U$, що $x \in \uparrow y = Int(\uparrow y)$;

- *напівграткою Лоусона*, якщо вона має базу топології, що складається з піднапівграток.

Топологічні U-напівгратки і напівгратки Лоусона є одними з найбільш поширених і добре вивчених типів топологічних напівграток. Для U-напівграток справедлива наступна теорема [13, Theorem 2.11], яку можна вважати аналогом теореми Гана-Банаха про розділення точок локально опуклого простору.

Теорема 1.2. *Якщо E – U-напівгратка, то множина $Hom(E, \mathbb{I}_m)$ неперервних гомоморфізмів з E в напівгратку $[0,1]$ з операцією мінімуму розділяє точки.*

Для U_0 напівграток ця теорема має наступний вигляд:

Теорема 1.3. *Якщо E – U_0-напівгратка, то множина $Hom(E, \{0,1\})$ неперервних гомоморфізмів з E в напівгратку $\{0,1\}$ з операцією мінімуму розділяє точки.*

Згідно з теоремою 2.12 [13], клас U-напівграток містить усі локально компактні напівгратки Лоусона.

Теорема 1.4. *Довільна локально компактна напівгратка Лоусона є U-напівграткою.*

Наслідком цих теорем є наступна теорема.

Теорема 1.5 (Lawson)**.** *Кожна компактна напівгратка Лоусона E ваги $w(E) \leq \kappa$ вкладається в добуток $[0,1]^\kappa$ як топологічну напівгратку з операцією покоординатного мінімуму.*

Згідно з теоремою 3.13 [18], кожна компактна нуль-вимірна топологічна напівгратка є U_0-напівграткою і, як наслідок, напівграткою Лоусона. У класі нуль-вимірних топологічних напівграток попередня теорема має наступний вигляд.

Теорема 1.6 (Hofmann, Mislove, Stralka, 1974)**.** *Кожна компактна нуль-вимірна напівгратка E ваги $w(E) \leq \kappa$ вкладається в добуток $\{0,1\}^\kappa$ як топологічну напівгратку з операцією покоординатного мінімуму.*

Добре дослідженим є й випадок компактних топологічних груп. Зокрема, для комкпатних абелевих груп маємо наступні теореми (Понтрягін, 1934).

Теорема 1.7 (Понтрягін). *Кожна компактна абелева топологічна група G ваги $w(G) \leq \kappa$ вкладається в добуток $\mathbb{T}^\kappa$ кіл $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Теорема 1.8 (Понтрягін). *Кожна нуль-вимірна компактна абелева топологічна група G ваги $\omega(G) \leq \kappa$ вкладається в добуток $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_n^\kappa$ циклічних груп n-го порядку $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.*

Для некомутативних топологічних груп аналогічні теореми були доведені Петером та Вейлем у 1927 [1].

Теорема 1.9 (Peter, Weyl). *Кожна компактна топологічна група G ваги $w(G) \leq \kappa$ вкладається в добуток $\prod_{n\in N} O(n)^\kappa$ ортогональних груп $O(n)$.*

Теорема 1.10 (Peter, Weyl). *Кожна компактна нуль-вимірна топологічна група G ваги $w(G) \leq \kappa$ вкладається в добуток $\prod_{n\in\mathbb{N}} S_n^\kappa$ симетричних груп S_n.*

Вищезгадані теореми для топологічних груп, а також результати, отримані Понізовським, наводять на думку про пошук аналогів цих теорем для топологічних інверсних напівгруп. Це питання досліджувала О. Гринів. Зокрема, у [24] були побудовані універсальні об'єкти в класі кліфордових компактних топологічних напівгруп. Для кліфордових компактних топологічних напівгруп, максимальна напівгратка яких є напівграткою Лоусона, такими об'єктами виявились добутки конусів над максимальними групами, а для кліфордових компактних топологічних напівгруп з нуль-вимірною максимальною напівграткою – добутки нуль-розширень максимальних груп.

Нагадаємо, що *нуль-розширенням* $\dot{G} = G \cup \{0\}$ топологічної групи G є напівгрупа, утворена приєднанням до G ізольованої точки 0, яка є нулем напівгрупи $\dot{G}$, тобто $x0 = 0x = 0$, для всіх $x \in \dot{G}$.

Конусом $\hat{G}$ топологічної групи G є фактор-напівгрупа $\hat{G} = ([0,1] \times G)/(\{0\} \times G)$ добутку $[0,1] \times G$ топологічної напівгратки $\mathbb{I}_m$ і топологі-

чної групи G за замкненим ідеалом $\{0\} \times G$. В усіх точках, окрім вершини $v = \{0\} \times G$, топологія збігається з фактор-топологією. У вершині топологія породжується множинами $\{v\} \cup ((0, \epsilon) \times G)$, $\epsilon \in (0, 1]$.

В термінах вищезгаданих означень, основними результатами [24] є наступні теореми:

Теорема 1.11 (Гринів, 2007). *Компактна кліфордова топологічна інверсна напівгрупа S, максимальна напівгратка E якої є напівграткою Лоусона, вкладається в добуток $\prod_{e \in E} \hat{H}_e^{\omega(S)}$ конусів над максимальними підгрупами напівгрупи S.*

Теорема 1.12 (Гринів, 2007). *Компактна кліфордова топологічна інверсна напівгрупа S з нуль-вимірною максимальною напівграткою E вкладається в добуток $\prod_{e \in E} \dot{H}_e^{\omega(S)}$ нуль-розширень максимальних підгруп напівгрупи S.*

Однією з задач дисертації було отримати аналогічні результати для некомпактних топологічних інверсних кліфордових напівгруп. Як виявилось, це можливо зробити для класу дітопологічних інверсних кліфордових напівгруп.

Означення 1.13. Топологічна інверсна напівгрупа S називається *дітопологічною,* якщо для довільної точки $x \in S$ та її околу $O_x \subset S$ існують околи $U_x \subset S$ точки x та $W_{xx^{-1}} \subset E(S)$ ідемпотента xx^{-1} такі, що довільна точка $y \in S$ належить околу O_x, якщо $yy^{-1} \in W_{xx^{-1}}$ і $ey \in U_x$, для деякого ідемпотента $e \in W_{xx^{-1}}$.

Топологічну інверсну напівгрупу називатимемо *U-напівгрупою (U_0-напівгрупою),* якщо її максимальна напівгратка ідемпотентів є *U-напівграткою (U_0-напівграткою).*

Наступні теореми є наслідками з теорем вкладення, доведених у розділі 4 і опублікованих у [8], і узагальненням результатів, отриманих О. Гринів у [24].

Теорема 1.14. *Нехай S – кліфордова топологічна інверсна U_0-напівгрупа. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) *S вкладається в тихоновський добуток топологічних напівграток та нуль-розширень топологічних груп;*

2) *S вкладається в топологічну кліфордову інверсну напівгрупу $E \times \prod_{e \in E} \dot{H}_e^{w(E)}$;*

3) *S – дітопологічна кліфордова інверсна напівгрупа.*

Теорема 1.15. *Нехай S – кліфордова топологічна інверсна U-напівгрупа. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) *S вкладається в тихоновський добуток топологічних напівграток та конусів над топологічними групами;*

2) *S вкладається в топологічну кліфордову інверсну напівгрупу $E \times \prod_{e \in E} \hat{H}_e^{w(E)}$;*

3) *S – дітопологічна кліфордова інверсна напівгрупа.*

Вищезгадані теореми дають змогу охарактеризувати топологічні кліфордові інверсні напівгрупи, що вкладаються в компактні кліфордові інверсні напівгрупи.

Теорема 1.16. *Топологічна кліфордова інверсна U-напівгрупа S вкладається в компактну кліфордову інверсну напівгрупу тоді і лише тоді, коли:*

1) *максимальна напівгратка $E = \{e \in S : ee = e\}$ вкладається в компактну напівгратку;*

2) *кожна максимальна підгрупа H_e, $e \in E$, в S вкладається в компактну групу;*

3) і S дітопологічна.

Одним з класичних результатів теорії топологічних груп є теорема метризовності Біркгофа-Какутані [1, Theorem 3.3.12].

Теорема 1.17. *Топологічна група G метризовна тоді і лише тоді, коли вона задовольняє першу аксіому зліченності.*

Перша аксіома зліченності на топологічній групі гарантує існування ліво-інваріантної (або право-інваріантної) метрик на ній. Тобто, справедливий наступний наслідок [1, Corollary 3.3.13]:

Теорема 1.18. *Кожна топологічна група G з першою аксіомою зліченності допускає право-інваріантну і ліво-інваріантну метрики, які породжують топологію G.*

Для існування інваріантної метрики на метризовній топологічній групі необхідна додаткова умова на G – *збалансованість*, тобто існування інваріантної бази околів одиниці.

Теорема 1.19. *Метризовна топологічна група G допускає інваріантну метрику, що породжує її топологію, тоді і лише тоді, коли G збалансована.*

Наведені вище результати і особливість структури кліфордових інверсних напівгруп зумовили формулювання наступної задачі: чи є метризовною компактна кліфордова топологічна інверсна напівгрупа, якщо її максимальні групи і напівгратка метризовні?

Це питання було досліджене Т. Банахом [2]. В результаті було доведено критерій метризовності компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп [2, Corollary 3.8].

Теорема 1.20 (Банах, 2003)**.** *Нуль-вимірна компактна кліфордова топологічна інверсна напівгрупа є метризовною тоді і лише тоді, коли максимальна напівгратка і всі максимальні підгрупи метризовні.*

Теорема метризовності для зліченно компактних топологічних інверсних напівгруп була доведена Т. Банахом і Б. Бокалом у [3, Corollary 6]:

Теорема 1.21 (Банах, Бокало, 2003). *Зліченно компактна топологічна інверсна напівгрупа S метризовна, якщо виконується одна з умов:*

1) *максимальна кліфордова піднапівгрупа $C = \{x \in S : xe = ex,$ для всіх $e \in E\}$ метризовна;*

2) *максимальна напівгратка E є метризовною напівграткою Лоусона, а всі максимальні підгрупи метризовні;*

3) *максимальна напівгратка E метризовна, а всі максимальні підгрупи є групами Лі.*

Проблема метризовності топологічних кліфордових напівгруп була досліджена у [4], де була доведена наступна теорема.

Теорема 1.22 (Банах, Гутік, Потятиник, Равський, 2012). *Зліченно компактна кліфордова топологічна напівгрупа S є метризовною тоді і лише тоді, коли множина ідемпотентів $E \subset S$ є G_δ-множиною в S.*

Використовуючи теорему вкладення 1.12 компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп в добутки конусів над групами, у [24] було доведено наступний критерій існування субінваріантної метрики на таких напівгрупах.

Теорема 1.23. *Компактна кліфордова топологічна інверсна напівгрупа S з максимальною напівграткою Лоусона E є метризовною субінваріантною метрикою тоді і лише тоді, коли E і всі максимальні групи $H_e, e \in E$, метризовні.*

Зважаючи на згадані вище теореми, природно постає задача їх поширення на клас некомпактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп. Її розв'язок для класу кліфордових дітопологічних інверсних напівгруп описує наступна теорема (див. Теорема 5.5 розділу 5).

Теорема 1.24. *Нехай S – дітопологічна інверсна кліфордова напівгрупа, максимальна напівгратка E якої є сепарабельною U-напівграткою. Топологічна напівгрупа S*

1) *метризовна тоді і лише тоді, коли її максимальна напівгратка E та усі максимальні групи метризовні;*

2) *метризовна субінваріантною метрикою тоді і лише тоді, коли її максимальна напівгратка та усі максимальні групи метризовні субінваріантними метриками.*

Останній розділ дисертації присвячений дослідженню автоматичної неперервності гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами.

Задача 1.1. *Чи є неперервним гомоморфізм $h : X \to Y$ між кліфордовими топологічними інверсними напівгрупами X та Y, якщо його звуження $h|H$, $h|E$ на кожну підгрупу $H \subset X$ і напівгратку $E \subset X$ неперервні?*

Ця задача є частковим випадком більш загальної задачі пошуку умов на алгебраїчно-топологічні об'єкти і гомоморфізми між ними, які б забезпечили неперервність цих гомоморфізмів. Такі умови називають умовами *автоматичної неперервності.*

Добре вивченою є автоматична неперервність гомоморфізмів між польськими групами – топологічними групами, простір яких польський. Більшість отриманих результатів передбачає накладання додаткових умов, наприклад, вимірності, на гомоморфізм.

Підмножина A топологічного простору X:

- *худа*, якщо вона є зліченним об'єднанням $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ніде не щільних множин, тобто $Int(\bar{A}_n) = \emptyset$, для всіх $n \in \mathbb{N}$;

- *має властивість Бера*, якщо її симетрична різниця $A \triangle U$ з деякою відкритою множиною $U \subset X$ – худа;

- *універсально вимірна*, якщо вона вимірна відносно довільної ймовірнісної борелівської міри μ на X;
- *вимірна за Сусліним*, якщо $A = \bigcup_{s\in\omega^\omega}\bigcap_{n\in\omega} F_{s|n}$, для деякої сім'ї $(F_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ замкнених підмножин в X.

Згідно з теоремою Шпільрайне-Марчевського [43], кожна вимірна за Сусліним множина є універсально вимірною і має властивість Бера.

Функцію $h : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y називатимемо:

- *вимірною за Бером*, якщо $h^{-1}(U)$ має властивість Бера в X, для кожної відкритої множини $U \subset Y$;
- *універсально вимірною*, якщо $h^{-1}(U)$ – універсально вимірна множина в X, для кожної відкритої множини $U \subset Y$;
- *вимірною за Сусліним*, якщо $h^{-1}(U)$ – вимірна за Сусліним множина в X, для кожної відкритої F_σ-множини $U \subset Y$.

Наслідком з класичного результату Петтіса [37] є наступна теорема про автоматичну неперервність.

Теорема 1.25 (Pettis, 1950). *Довільний вимірний за Бером гомоморфізм $h : G \to H$ між польськими групами є неперервним.*

Аналогічний результат для локально компактних польських груп і універсально вимірних гомоморфізмів був отриманий Вейлем [40].

Теорема 1.26 (Weil, 1940 р.). *Довільний універсально вимірний гомоморфізм $h : G \to H$ з локально компактної польської групи G в польську групу H є неперервним.*

Якщо групи абелеві, то в попередній теоремі умовою локально компактності можна знехтувати [14].

Теорема 1.27 (Christensen, 1971). *Довільний універсально вимірний гомоморфізм між польськими абелевими групами є неперервним.*

У [39] Солецький отримав узагальнення попередніх результатів, довівши автоматичну неперервність для аменабельних в одиниці польських груп. Клас аменабельних в одиниці груп містить всі локально компактні групи з другою аксіомою зліченності і всі абелеві польські групи.

Теорема 1.28 (Solecki, 2006). *Довільний універсально вимірний гомоморфізм $h : G \to H$ з аменабельної в одиниці польської групи G в групу з другою аксіомою зліченності H є неперервним.*

Нолл знайшов умови автоматичної неперервності вимірних за Суслiним гомоморфізмів між топологічними групами [30].

Теорема 1.29 (Noll, 1992). *Вимірний за Сусліним гомоморфізм $h : G \to H$ з повної за Чехом топологічної групи G в топологічну групу H є неперервним.*

Для кліфордових топологічних інверсних напівгруп задача автоматичної неперервності досліджувалась Боуманом у [10] та Ягером у [41]. Зокрема, Боуман довів автоматичну неперервність гомоморфізмів для компактних кліфордових інверсних напівгруп з максимальною напівграткою Лоусона [10, Theorem 1.4]:

Теорема 1.30 (Bowman, 1971). *Гомоморфізм $h : X \to Y$ між компактними кліфордовими топологічними інверсними напівгрупами X та Y з максимальними напівгратками Лоусона є неперервним, якщо його звуження $h|H$, $h|E$ на кожну підгрупу $H \subset X$ і піднапівгратку $E \subset X$ є неперервними.*

Ягер узагальнив цей результат, не вимагаючи умови Лоусона на напівгратки [41, Corollary 4.1]:

Теорема 1.31 (Yeager, 1976). *Гомоморфізм $h : X \to Y$ між компактними кліфордовими топологічними інверсними напівгрупами X та*

Y є неперервним, якщо його звуження $h|H$, $h|E$ на кожну підгрупу $H \subset X$ і піднапівгратку $E \subset X$ є неперервними.

Задачею дисертації було отримати аналогічний результат, не вимагаючи компактності напівгруп. При розв'язанні цієї задачі важливу роль відіграли слабко дітопологічні напівгрупи.

Топологічна інверсна напівгрупа S називається *слабко дітопологічною*, якщо для довільної точки $x \in S$ і її околу $O_x \subset S$, існують окіл $U_x \subset S$ точки x і околи $W_{xx^{-1}}, W_{x^{-1}x} \subset E(S)$ ідемпотентів $xx^{-1}, x^{-1}x$ такі, що точка $y \in S$ належить околу O_x, якщо $yy^{-1} \in W_{xx^{-1}}$, $y^{-1}y \in W_{x^{-1}x}$ і існує ідемпотент $e \in W_{xx^{-1}}$ такий, що $ey \in U_x$.

Кожна слабко дітопологічна інверсна напівгрупа, очевидно, є дітопологічною. У прикладі 4.11 ми побудуємо слабко дітопологічну інверсну напівгрупу, яка не є дітопологічною.

Гомоморфізм $h : X \to Y$ між топологічними інверсними напівгрупами X та Y називатимемо *EH-неперервним*, якщо його звуження $h|H$, $h|E$ на кожну підгрупу $H \subset X$ і піднапівгратку $E \subset X$ неперервні.

У розділі 6 доведено наступні теореми про автоматичну неперервність гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами. Ці результати опубліковано у [9], [34], [35].

Теорема 1.32. *Кожний EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ з топологічної інверсної напівгрупи X з нуль-вимірною локально компактною максимальною напівграткою $E(X)$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Теорема 1.33. *Кожний EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ з топологічної інверсної кліфордової напівгрупи X з локально компактною максимальною напівграткою Лоусона $E(X)$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Оскільки кожна компактна напівгрупа дітопологічна, а отже, й слабко дітопологічна, то, як наслідок, отримуємо теорему Боумана 1.30.

З теорем 1.32, 1.33 і 1.29 випливають наступні критерії автоматичної неперервності вимірних за Сусліним гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами, див. [35].

Теорема 1.34. *Нехай X – паракомпактна повна за Чехом топологічна інверсна напівгрупа з нуль-вимірною локально компактною максимальною напівграткою $E \subset X$. Довільний гомоморфізм $h : X \to Y$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним тоді і лише тоді, коли h вимірний за Сусліним і звуження $h|E$ неперервне.*

Теорема 1.35. *Нехай X – паракомпактна повна за Чехом топологічна інверсна напівгрупа, максимальна напівгратка $E \subset X$ якої є локально компактною напівграткою Лоусона. Довільний гомоморфізм $h : X \to Y$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним тоді і лише тоді, коли h вимірний за Сусліним і звуження $h|E$ неперервне.*

РОЗДІЛ 2

Необхідні означення

У цьому розділі ми нагадаємо деякі основні означення і твердження, які використовуватимуться в наступних розділах.

Непорожню множину S з заданою на ній бінарною асоціативною операцією $\cdot : S \times S \to S$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, називатимемо *напівгрупою.*

Елемент x напівгрупи S називається *регулярним*, якщо $x \in xSx$, тобто, існує такий елемент $s \in S$, що $x = xsx$. Напівгрупа S – *регулярна*, якщо кожен її елемент регулярний.

Елемент $x^{-1} \in S$ називається *інверсним до елемента* $x \in S$, якщо виконуються рівності $x = xx^{-1}x$ і $x^{-1} = x^{-1}xx^{-1}$. *Інверсною напівгрупою* називатимемо напівгрупу S, в якій для кожного $x \in S$ існує єдиний інверсний елемент $x^{-1} \in S$.

Ідемпотентом називатимемо такий елемент $e \in S$, що $ee = e$. Зауважимо, що для кожного елемента x інверсної напівгрупи S, елементи вигляду xx^{-1}, $x^{-1}x$ є ідемпотентами. Множину ідемпотентів напівгрупи S надалі позначатимемо $E(S)$. Важливою є наступна характеризація інверсних напівгруп [29, 1.3.3]:

Твердження 2.1. *Напівгрупа S інверсна тоді і лише тоді, коли S регулярна і її ідемпотенти комутують.*

Піднапівгрупою напівгрупи S називається непорожня множина $T \subset S$, яка є напівгрупою стосовно операції, успадкованої з S.

Підгрупою напівгрупи S називатимемо піднапівгрупу $T \subset S$, яка є групою. Зауважимо, що одиниця групи T є ідемпотентом в S, але не обов'язково одиницею напівгрупи S.

Підмножина I напівгрупи S називається *лівим* (*правим*) *ідеалом*, якщо $sa \in I$ ($as \in I$), для всіх $a \in I, s \in S$. *Ідеал* – це множина, що є правим і лівим ідеалом одночасно. Перетин лівих (правих, двосторонніх) ідеалів знову є ідеалом. Зокрема, для кожного елемента $s \in S$ існує найменший лівий (правий, двосторонній) ідеал, що містить s, який

називається *головним*. У випадку інверсної напівгрупи S, множина Ss – лівий головний ідеал, що містить s, sS – правий головний ідеал, що містить s, а sSs – двосторонній головний ідеал, див. [29].

Зауважимо, що якщо $e \in S$ – ідемпотент, то він є одиницею головного ідеала eSe, а отже, eSe містить підгрупу оборотніх елементів $H_e = \{x \in S : \exists y \in S \quad xy = yx = e,\ ex = xe = x\}$, яка називається *максимальною (під)групою* напівгрупи S. Відомо, що для різних ідемпотентів $e, f \in E(S)$ напівгрупи S, максимальні групи H_e, H_f не перетинаються, див. [42].

Зокрема, для інверсної напівгрупи S маємо

$$H_e = \{x \in S : xx^{-1} = x^{-1}x = e\}.$$

Кліфордовою інверсною напівгрупою називатимемо інверсну напівгрупу S, кожний елемент x якої комутує з інверсним до себе елементом x^{-1}, тобто $xx^{-1} = x^{-1}x$. Кліфордова інверсна напівгрупа S є об'єднанням $S = \bigcup_{e \in E(S)} H_e$ своїх максимальних підгруп.

Іншою важливою характеристикою кліфордової інверсної напівгрупи S є те, що її ідемпотенти $E(S)$ комутують зі всіма елементами S, тобто для всіх $s \in S$, $se = es$, див. [29, 5.2].

2.1 Напівгратки

Комутативна напівгрупа, кожний елемент якої є ідемпотентом, називається *напівграткою*. Зауважимо, що ідемпотенти інверсної напівгрупи S утворюють напівгратку $E(S)$, яку надалі називатимемо *максимальною напівграткою* цієї напівгрупи.

Якщо для елементів e, f напівгратки E визначити $e \leq f$ тоді і лише тоді, коли $f = fe = e$, то $\leq$ – частковий порядок на E, який називають *природним частковим порядком* на напівгратці E.

Для напівгратки E і ідемпотента $e \in E$ через

$$\downarrow e = \{x \in E : x \leq e\},\ \uparrow e = \{x \in E : e \leq x\}$$

позначатимемо *нижній* і *верхній конуси* над елементом e відповідно.

Аналогічно, для підмножини $A \subset E$ позначимо

$$\downarrow A = \bigcup_{e \in A} \downarrow e, \ \uparrow A = \bigcup_{e \in A} \uparrow e.$$

Підмножина A топологічної напівгратки E називається *верхньою*, якщо $\uparrow A = A$, і *нижньою*, якщо $\downarrow A = A$, відповідно. Зауважимо, що для довільного $e \in E$ маємо $\downarrow e = eE$ і e є одиницею для $\downarrow e$.

2.2 Топологічні простори

Означення 2.2. Топологічний простір X називатимемо [17]:

- *нуль-вимірним,* якщо X має базу з відкрито-замкнених підмножин;
- *сепарабельним,* якщо він містить зліченну всюди щільну множину;
- *гаусдорфовим,* якщо для кожної пари різних точок $x, y \in X$ існують такі відкриті множини O_x, $O_y \subset X$, що $x \in O_x$, $y \in O_y$ і $O_x \cap O_y = \emptyset$;
- *паракомпактним,* якщо кожне відкрите покриття має локально скінченне відкрите подрібнення;
- *повним за Чехом,* якщо X цілком регулярний і є G_δ-множиною у своїй компактифікації Чеха-Стоуна;
- *польським,* якщо X – сепарабельний повно-метризовний простір.

Означення 2.3. Підмножину A топологічного простору X називатимемо [25]:

- *прекомпактною,* якщо її замикання є компактом;
- *множиною Бера,* якщо $A \triangle U$ є зліченним об'єднанням $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ніде не щільних множин, тобто $Int(\bar{A}_n) = \emptyset$, для всіх $n \in \mathbb{N}$;

- *універсально вимірною,* якщо вона вимірна відносно довільної ймовірнісної борелівської міри μ на X;
- *множиною Сусліна,* якщо $A = \bigcup_{s\in\omega^\omega}\bigcap_{n\in\omega} F_{s|n}$, для деякої сім'ї $(F_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ замкнених підмножин в X.

Означення 2.4. Функцію $h : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y називатимемо:

- *вимірною за Бером,* якщо $h^{-1}(U)$ є множиною Бера в X, для кожної відкритої множини $U \subset Y$;
- *універсально вимірною,* якщо $h^{-1}(U)$ – універсально вимірна множина в X, для кожної відкритої множини $U \subset Y$;
- *вимірною за Сусліним,* якщо $h^{-1}(U)$ – вимірна за Сусліним множина в X, для кожної відкритої F_σ-множини $U \subset Y$.

2.3 Рівномірні простори

У розділі 3 використовуються поняття з теорії рівномірних просторів [17, 8.1].

Рівномірністю на множині X називають таку підсім'ю $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_X$ оточень діагоналі Δ, для якої:

1. Якщо $V \in \mathcal{D}_X$ і $V \subset W \in \mathcal{D}_X$, то $W \in \mathcal{D}_X$;
2. Якщо $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, то й $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$;
3. Для кожного $V \in \mathcal{U}$ існує таке $W \in \mathcal{U}$, що $W \circ W \in V$;
4. $\cap\mathcal{U} = \Delta$.

Рівномірний простір – це пара $(X,\mathcal{U})$, де X – деяка множина, а $\mathcal{U}$ – рівномірність на X. Відомо, що кожна рівномірність $\mathcal{U}$ на X породжує топологію τ, що складається з множин $V \subset X$ таких, що для кожного $x \in V$ існує таке $U \in \mathcal{U}$, що $B(x,U) \subset V$, де $B(x,U) = \{y \in S :$

$(x, y) \in U\}$. Ця топологія τ називається *топологією, породженою рівномірністю.* Топологічний простір називається *уніформізовним*, якщо існує рівномірність, що породжує його топологію.

Відомо, що топологічний простір уніформізовний тоді і лише тоді, коли він є тихоновським [17, Теорема 8.1.2].

2.4 Топологічні напівгрупи

Усі нижче згадані топологічні простори вважатимемо гаусдорфовими.

Топологічною напівгрупою називається напівгрупа S з заданою на ній топологією, відносно якої напівгрупова операція неперервна.

Інверсна напівгрупа S називається *топологічною інверсною напівгрупою*, якщо на ній задана топологія, відносно якої операції множення $\cdot : S \times S \to S, (x, y) \mapsto xy$, та інверсія $()^{-1} : S \to S, x \mapsto x^{-1}$, є неперервними.

2.5 Топологічні напівгратки

Топологічні напівгратки важливі не лише як підклас топологічних інверсних напівгруп, вони також виникають при описі структури топологічних інверсних напівгруп. Зокрема, кожна кліфордова інверсна напівгрупа S є об'єднанням своїх максимальних підгруп $S = \bigcup_{e \in E} H_e$, параметризованих ідемпотентами з максимальної піднапівгратки. У цьому підрозділі ми заглибимося у вивчення різних типів топологічних напівграток і взаємозв'язків між ними.

Спершу нагадаємо деякі означення [13, 2].

Частковий порядок на напівгратці E позначатимемо через $\leq$, тобто $x \leq y$, якщо $xy = x = yx$, для деяких $x, y \in E$.

Для двох точок x, y в топологічній напівгратці E, пишемо $x \ll y$ якщо y належить внутрішності верхнього конуса $\mathrm{Int}(\uparrow x)$ точки x в S. Для точки $x \in E$ розглянемо множини

$$\Uparrow x = \{y \in E : x \ll y\} \text{ і } \Downarrow x = \{y \in E : y \ll x\},$$

і зауважимо, що $\Uparrow x = \mathrm{Int}(\uparrow x)$.

Елемент x топологічної напівгратки E називатимемо *локально мінімальним*, якщо його верхній конус $\uparrow x$ відкритий в E. У цьому випадку $\Uparrow x = \uparrow x$.

Лема 2.5. *Точка $x \in E$ є локально мінімальною тоді і лише тоді, коли вона ізольована в своєму нижньому конусі $\downarrow x$.*

Доведення. Якщо точка x локально мінімальна в E, то множина $\{x\}$ відкрита в нижньому конусі $\downarrow x$ як перетин відкритої в E множини $\uparrow x$ з $\downarrow x$. З іншого боку, якщо $\{x\}$ – відкрита множина, то й $\uparrow x$ відкрита як прообраз $\{x\}$ при неперервному відображенні зсуву $s_x : E \to \downarrow x$, $s_x : e \mapsto xe$. □

Топологічна напівгратка E називається

- $\downarrow$-*локально компактною*, якщо кожна точка $x \in E$ має замкнений окіл $\bar{O}_x \subset E$, перетин якого $\bar{O}_x \cap \downarrow x$ є компактним;
- *напівграткою Лоусона*, якщо існує база топології на E, яка складається з відкритих піднапівграток;
- U-*напівграткою*, якщо для кожної відкритої множини U в E і кожної точки $x \in U$ існує така точка $y \in U$, що $y \ll x$;
- U_0-*напівграткою*, якщо для кожної відкритої множини U в E і кожної точки $x \in U$ існує така локально мінімальна точка $y \in U$, що $y \leq x$;
- U_2-*напівграткою*, якщо для кожної відкритої множини U в E і кожної точки $x \in U$ існують точка $y \in U$ і відкрито-замкнений ідеал $I \subset E$, для яких $x \in E \setminus I \subset \uparrow y$;
- **2**-*розділяючою*, якщо гомоморфізми в дискретну напівгратку $(\{0,1\}, \min)$ розділяють точки напівгратки E;
- $\mathbb{I}$-*розділяючою*, якщо гомоморфізми в напівгратку $([0,1], \min)$ зі звичайною топологією розділяють точки з E;

- **2**-*вкладуваною*, якщо E вкладається в деяку степінь двоелементної напівгратки $(\{0,1\},\min)$, наділеної дискретною топологією;
- $\mathbb{I}$-*вкладуваною*, якщо E вкладається в деяку степінь напівгратки $([0,1],\min)$, наділеної звичайною топологією;
- *прекомпактною*, якщо E вкладається в деяку компактну топологічну напівгратку.

Через $\mathbb{I}$ позначатимемо напівгратку $([0,1],\min)$ зі звичайною топологією на $[0,1]$ і напівгратковою операцією мінімуму $\min$.

Взаємозв'язок між різними властивостями топологічних напівграток описує наступна діаграма:

$$
\begin{tikzcd}
\text{компактна нуль-вимірна} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ddd, Rightarrow] & \text{локально компактна нуль-вимірна} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{локально компактна напівгратка Лоусона} \arrow[d, Rightarrow] & \text{компактна напівгратка Лоусона} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[ddd, Rightarrow] \\
 & \downarrow\text{-локально компактна нуль-вимірна} \arrow[d, Rightarrow] & \downarrow\text{-локально компактна напівгратка Лоусона} \arrow[dd, Rightarrow] & \\
 & U_0\text{-напівгратка} \arrow[d, Rightarrow] & & \\
 & U_2\text{-напівгратка} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & U\text{-напівгратка} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\mathbf{2}\text{-вкладувана} \arrow[r, Rightarrow] & \mathbf{2}\text{-розділяюча} \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{I}\text{-розділяюча} & \mathbb{I}\text{-вкладувана} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & & \text{прекомпактна напівгратка Лоусона}
\end{tikzcd}
$$

Доведемо деякі нетривіальні імплікації з цієї діаграми.

Твердження 2.6. *Нехай E – топологічна напівгратка.*

1. *Якщо E є $\downarrow$-локально компактною і нуль-вимірною, то E є U_0-напівграткою;*

2. *Якщо E є $\downarrow$-локально компактною напівграткою Лоусона, то E є U-напівграткою;*

3. *Якщо E – U-напівгратка, то E є $\mathbb{I}$-розділяючою;*

4. *Якщо E – U_2-напівгратка, то E є $\mathbf{2}$-розділяючою;*

5. *Якщо E є $\mathbf{2}$-вкладуваною U-напівграткою, то E є U_2-напівграткою.*

Доведення. 1. Припустимо, що E $\downarrow$-локально компактна і нуль-вимірна. Щоб показати, що E є U_0-напівграткою, зафіксуємо довільну точку $e \in E$ і її окіл $O_e \subset E$. Оскільки E $\downarrow$-локально компактна, можна вважати, що $\bar{O}_e \cap \downarrow e$ є компактною множиною. Будучи нуль-вимірним, компактний простір $\bar{O}_e \cap \downarrow e$ містить відкрито-замкнений окіл $K_e \subset O_e \cap \downarrow e$ точки e. Тоді, множина $U_e = \{x \in K_e : ex \in K_e\}$ – відкритий компактний окіл точки e в $\downarrow e$, а $L_e = \{x \in \downarrow e : xU_e \subset U_e\} \subset K_e \subset O_e$ – компактна відкрита піднапівгратка в $\downarrow e$. З компактності випливає, що в напівгратці L_e існує найменший елемент $s \in L_e \subset O_e$. Розглянемо ретракцію $r : E \to \downarrow e$, $r(x) = ex$, і зауважимо, що $r^{-1}(L_e)$ є відкритим околом точки s в E, який міститься у верхній множині $\uparrow s$ і доводить рівність $e \in \uparrow s = \Uparrow s$. Отже, E є U_0-напівграткою.

2. Припустимо, що E є $\downarrow$-локально компактною напівграткою Лоусона. Щоб показати, що E є U-напівграткою, зафіксуємо будь-яку точку $e \in E$ і її окіл $O_e \subset E$. Оскільки E $\downarrow$-локально компактна, можна вважати, що множина $\bar{O}_e \cap \downarrow e$ компактна. З регулярності компактного гаусдорфового простору $\bar{O}_e \cap \downarrow e$, точка e має компактний окіл $K_e \subset O_e \cap \downarrow e$. Оскільки топологічна напівгратка E є напівграткою Лоусона, то точка e міститься у відкритій піднапівгратці $L_e \subset O_e$, такій, що $L_e \cap \downarrow e \subset K_e$. Тоді замикання піднапівгратки $L_e \cap \downarrow e$ компактне в E, а отже, містить найменший елемент $s \in K_e \subset O_e$. Аналогічно до попереднього доведення, можна показати, що $e \in \Uparrow s$, тобто E є U-напівграткою.

3. Це твердження доведене в Теоремі 2.11 з [13].

4. Припустимо, що E є U_2-напівграткою. Зафіксуємо дві різні точки $x, y \in E$ і розглянемо їх добуток $xy \in E$. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $y \neq xy$. З того, що $U = \{u \in E : u \neq xu\}$ – відкрита множина, яка містить y, за означенням U_2-напівгратки, існує точка $u \in U$ і відкрито-замкнений ідеал $I \subset E$, такий, що $y \subset E \setminus I \subset \uparrow u$. Тоді, функція $h : E \to \mathbf{2}$, визначена

$$h(e) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } e \in I, \\ 1, & \text{якщо } e \notin I, \end{cases}$$

є неперервним гомоморфізмом таким, що $h(x) = 0$ і $h(y) = 1$. Тоді, E є $\mathbf{2}$-розділяючою.

5. Нехай E – $\mathbf{2}$-вкладувана U-напівгратка. Щоб показати, що E є U_2-напівграткою, зафіксуємо довільну точку $x \in E$ і її відкритий окіл $O_x \subset E$. Оскільки E – U-напівгратка, то існує такий ідемпотент $e \in O_x$, що $x \in \Uparrow e$. З того, що E $\mathbf{2}$-вкладувана, топологія на E породжується передбазою множин вигляду $h^{-1}(t)$, де $t \in \mathbf{2}$, а $h : E \to \mathbf{2}$ – неперервний гомоморфізм. Тому, існують неперервні гомоморфізми $h_1, \ldots, h_n : E \to \mathbf{2}$ і точки $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{2}$, для яких $x \in \bigcap_{i=1}^n h_i^{-1}(t_i) \subset \Uparrow e$. Беручи до уваги те, що $\Uparrow e = \mathrm{Int}(\uparrow e)$ є верхньою множиною в E, робимо висновок, що

$$x \in \bigcap_{i=1}^n h_i^{-1}(t_i) \subset \bigcap_{i=1}^n h_i^{-1}(\{t_i, 1\}) \subset \Uparrow e,$$

а отже, $I = \bigcup_{i=1}^n h_i^{-1}(\mathbf{2} \setminus \{t_i, 1\})$ – шуканий відкрито-замкнений ідеал в E такий, що $x \in E \setminus I \subset \Uparrow e$. $\square$

РОЗДІЛ 3

Дітопологічні унонапівгрупи та їх властивості

Почнемо з означення (лівої, правої) унонапівгрупи.

Нехай S – напівгрупа, тобто, непорожня множина S з заданою на ній асоціативною бінарною операцією $\cdot : S \times S \to S$.

Означення 3.1. Унарну операцію $\lambda : S \to S$ на S називатимемо *операцією лівої одиниці,* якщо $\lambda(x) \cdot x = x$, для всіх $x \in S$.

Означення 3.2. Напівгрупа S з операцією лівої одиниці $\lambda : S \to S$ називається *лівою унонапівгрупою.*

Аналогічно можна означити праві унонапівгрупи.

Означення 3.3. Унарна операція $\rho : S \to S$ на напівгрупі S називається *операцією правої одиниці,* якщо $x \cdot \rho(x) = x$, для всіх $x \in S$.

Означення 3.4. *Правою унонапівгрупою* називається напівгрупа S, наділена операцією правої одиниці $\rho : S \to S$.

Означення 3.5. *Унонапівгрупою* називатимемо напівгрупу S, наділену операціями лівої $\lambda : S \to S$ і правої $\rho : S \to S$ одиниць.

Розглянемо топологічні аналоги вищезгаданих понять.

Означення 3.6. *Топологічною лівою унонапівгрупою* називатимемо топологічну напівгрупу S, наділену неперервною операцією лівої одиниці $\lambda : S \to S$.

Означення 3.7. *Топологічною правою унонапівгрупою* називатимемо топологічну напівгрупу S, наділену неперервною операцією правої одиниці $\rho : S \to S$.

Означення 3.8. *Топологічною унонапівгрупою* називається топологічна напівгрупа S з визначеними на ній неперервними операціями лівої $\lambda : S \to S$ та правої $\rho : S \to S$ одиниць.

Топологічні (праві, ліві) унонапівгрупи є об'єктами категорії, морфізмами якої є неперервні гомоморфізми (правих, лівих) унонапівгруп. Функцію $h : X \to Y$ між топологічними унонапівгрупами (X, λ_X) і (Y, λ_Y) називатимемо *гомоморфізмом лівих унонапівгруп*, якщо h є гомоморфізмом напівгруп, для якого $h(\lambda_X(x)) = \lambda_Y(h(x))$, для всіх $x \in X$. Аналогічно, можна визначити *гомоморфізм правих унонапівгруп* між топологічними правими унонапівгрупами та *гомоморфізм унонапівгруп*.

3.1 Дітопологічні унонапівгрупи

Перш ніж сформулювати означення дітопологічної (правої, лівої) унонапівгрупи, розглянемо два типи ділення на напівгрупі. А саме, для двох елементів a, b напівгрупи S розглянемо множини

$$a \leftthreetimes b = \{x \in S : ax = b\} \quad \text{і} \quad b \rightthreetimes a = \{x \in S : xa = b\},$$

які можна вважати результатами лівого і правого ділення b на a. Відповідно, для двох підмножин $A, B \subset S$, множини

$$A \leftthreetimes B = \bigcup_{(a,b) \in A \times B} a \leftthreetimes b \quad \text{і} \quad B \rightthreetimes A = \bigcup_{(a,b) \in A \times B} b \rightthreetimes a$$

є результатами поточкового лівого і правого ділення B на A.

Означення 3.9. Неперервну операцію лівої одиниці $\lambda : S \to S$ на топологічній унонапівгрупі S називатимемо *дінеперервною* (тобто неперервною відносно ділення) в точці $x \in S$, якщо для кожного околу $O_x \subset S$ точки x існують околи $U_x \subset S$ і $W_{\lambda(x)} \subset \lambda(S)$ точок x і $\lambda(x)$ у S і $\lambda(S)$ відповідно, для яких

$$(W_{\lambda(x)} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(x)}) \subset O_x.$$

Означення 3.10. Операція лівої одиниці $\lambda : S \to S$ *дінеперервна,* якщо вона дінеперервна в кожній точці $x \in S$.

Означення 3.11. Топологічна напівгрупа S, наділена дінеперервною операцією лівої одиниці $\lambda : S \to S$, називається *дітопологічною лівою унонапівгрупою.*

Важливим, хоча й тривіальним, прикладом дітопологічної лівої унонапівгрупи є топологічна ліва унонапівгрупа, всі елементи якої є ідемпотентами. Топологічну ліву унонапівгрупу (S, λ) називатимемо *унонапівгрупою ідемпотентів*, якщо $\lambda(x) = x$, для всіх $x \in S$. У цьому випадку, очевидно, $x = \lambda(x) \cdot x = xx$, тобто S – напівгрупа ідемпотентів.

Твердження 3.12. *Кожна топологічна ліва унонапівгрупа ідемпотентів (S, λ) є дітопологічною.*

Доведення. Для довільної заданої точки $x \in S$ і її околу $O_x \subset S$, покладемо $U_x = W_{\lambda(x)} = O_x$ і зауважимо, що

$$(W_{\lambda(x)} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(x)}) \subset W_{\lambda(x)} = O_x.$$

Звідси випливає дінеперервність операції лівої одиниці λ у точці x, а отже, топологічна ліва унонапівгрупа (S, λ) є дітопологічною. □

Аналогічно можна дати означення правої і двосторонньої версій вищезгаданих понять.

Означення 3.13. Неперервна операція правої одиниці $\rho : S \to S$ на топологічній напівгрупі S називається *дінеперервною,* якщо для кожного її елемента $x \in S$ і кожного околу $O_x \subset S$, що містить x, існують такі околи $U_x \subset S$ і $W_{\rho(x)} \subset \rho(S)$ точок x і $\rho(x)$, що виконується

$$(U_x \rightthreetimes W_{\rho(x)}) \cap \rho^{-1}(W_{\rho(x)}) \subset O_x.$$

Означення 3.14. *Дітопологічна права унонапівгрупа* – це топологічна напівгрупа S з заданою на ній дінеперервною операцією правої одиниці $\rho : S \to S$.

Топологічна права унонапівгрупа (S, ρ) є *унонапівгрупою ідемпотентів*, якщо $\rho(x) = x$, для кожного $x \in X$. Аналогічно до твердження 3.12, можна показати, що:

Твердження 3.15. *Кожна топологічна права унонапівгрупа ідемпотентів (S, ρ) є дітопологічною.*

Означення 3.16. Дітопологічна унонапівгрупа S з визначеними на ній дінеперервними операціями лівої $\lambda : S \to S$ та правої $\rho : S \to S$ одиниць, називається *дітопологічною унонапівгрупою.*

Інакше кажучи, дітопологічна унонапівгрупа одночасно володіє структурами дітопологічної лівої і дітопологічної правої унонапівгруп.

Означення 3.17. Унонапівгрупа S, в якій $\lambda(x) = \rho(x) = x$, для всіх $x \in S$, називається *унонапівгрупою ідемпотентів.*

Тоді, з тверджень 3.12 і 3.15 отримуємо:

Наслідок 3.18. *Кожна топологічна унонапівгрупа ідемпотентів є дітопологічною унонапівгрупою.*

3.2 Уніформізовні топологічні унонапівгрупи

У цьому розділі ми покажемо, що дінеперервність неперервної лівої (правої) операції одиниці на топологічній напівгрупі автоматично випливає з існування правої (лівої) рівномірності на цій напівгрупі.

Топологічну напівгрупу S називатимемо *ліво-уніформізовною* (*право-уніформізовною*, відповідно), якщо топологія на S породжується рівномірністю $\mathcal{U}$ такою, що для кожного оточення діагоналі $U \in \mathcal{U}$ існує оточення $V \in \mathcal{U}$, для якого $x \cdot B(y, V) \subset B(xy, U)$ ($B(x, V) \cdot y \subset B(xy, U)$, відповідно), для всіх точок $x, y \in S$. Тут через $B(x, V) = \{z \in S : (x, z) \in V\}$ позначено V-кулю з центром у точці $x \in S$.

Кожна топологічна група G є ліво-уніформізовною (відповідно, право-уніформізовною) лівою (відповідно, правою) рівномірністю, яка

породжена базою, що складається з оточень $\{(x,y) \in G \times G : y \in xU\}$ ($\{(x,y) \in G \times G : y \in Ux\}$, відповідно), де $U = U^{-1}$ пробігає множину всіх симетричних околів одиниці в G.

Теорема 3.19. *Кожна неперервна операція лівої одиниці $\lambda : S \to S$ на право-уніформізовній топологічній напівгрупі S дінеперервна.*

Доведення. Нехай $\mathcal{U}$ – рівномірність на S, що породжує топологію на S і свідчить, що напівгрупа S є право-уніформізовною. Щоб показати дінеперервність операції лівої одиниці $\lambda : S \to S$, зафіксуємо точку $x \in S$ і її окіл $O_x \subset S$. Рівномірність $\mathcal{U}$ породжує топологію на S, а тому, в околі O_x міститься куля $B(x,U) = \{y \in S : (x,y) \in U\}$ деякого "радіуса" $U \in \mathcal{U}$. Виберемо таке оточення $V \in \mathcal{U}$, що $V \circ V \circ V \subset U$, де $V \circ V \circ V = \{(x,y) \in S \times S : \exists u, v \in S \quad (x,u),(u,v),(v,y) \in V\}$. Оскільки S право-уніформізовна рівномірністю $\mathcal{U}$, для оточення V існує таке оточення $W \in \mathcal{U}$, що $W \subset V$ і $B(s,W) \cdot t \subset B(st,V)$, для всіх $s,t \in S$.

Стверджуємо, що околи $U_x = B(x,W)$ і $W_{\lambda(x)} = B(\lambda(x),W) \cap \lambda(S)$ засвідчують дінеперервність операції лівої одиниці λ у точці x. Справді, для довільної точки $y \in (W_{\lambda(x)} \setminus U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(x)})$, маємо $\lambda(y) \in W_{\lambda(x)}$ і $wy \in U_x$, для деякого $w \in W_{\lambda(x)}$. З того, що $w, \lambda(y) \in W_{\lambda(y)} = B(\lambda(x),W)$ випливає

$$\{wy, y\} = \{wy, \lambda(y)y\} \subset B(\lambda(x),W) \cdot y \subset B(\lambda(x)y,V),$$

а отже, $(wy,y) \in V \circ V$. Звідси,

$$y \in B(wy, V \circ V) \subset B(U_x, V \circ V) = B(B(x,W), V \circ V) \subset$$

$$\subset B(x, V \circ V \circ V) \subset B(x,U) \subset O_x.$$

□

Аналогічно доводиться

Теорема 3.20. *Кожна неперервна операція правої одиниці $\rho : S \to S$, задана на ліво-уніформізовній топологічній напівгрупі S, дінеперервна. Таким чином, кожна ліво-уніформізовна топологічна права унонапівгрупа (S, ρ) є дітопологічною правою унонапівгрупою.*

З теорем 3.19 і 3.20, отримуємо:

Наслідок 3.21. *Топологічна унонапівгрупа (S, λ, ρ) є дітопологічною, якщо топологічна напівгрупа S є одночасно ліво-уніформізовною і право-уніформізовною.*

Для кожного компактного гаусдорфового простору існує єдина рівномірність, що породжує його топологію. З рівномірної неперервності неперервних функцій на компактних гаусдорфових просторах, отримуємо:

Наслідок 3.22. *Кожна компактна гаусдорфова топологічна (права, ліва) унонапівгрупа є дітопологічною.*

З того, що дискретні топологічні напівгрупи є (право і ліво) уніформізовними дискретною рівномірністю і теореми 3.21, випливає:

Наслідок 3.23. *Кожна дискретна топологічна (ліва, права) унонапівгрупа є дітопологічною.*

3.3 Дітопологічні інверсні напівгрупи

На топологічних інверсних напівгрупах існують природні операції лівої та правої одиниць.

А саме, на кожній топологічній інверсній напівгрупі S визначені канонічна неперервна операція лівої одиниці

$$\lambda : S \to S, \quad \lambda : x \mapsto xx^{-1},$$

і канонічна неперервна операція правої одиниці

$$\rho : S \to S, \quad \rho : x \mapsto x^{-1}x,$$

які задають на ній структуру топологічної унонапівгрупи.

Зауважимо, що множини $\lambda(S) = \{xx^{-1} : x \in S\}$ і $\rho(S) = \{x^{-1}x : x \in S\}$ співпадають з множиною $E(S) = \{x \in S : xx = x\}$ ідемпотентів напівгрупи S, яка, як відомо, є комутативною піднапівгрупою інверсної напівгрупи S.

Означення 3.24. Топологічна інверсна напівгрупа S називається *дітопологічною інверсною напівгрупою,* якщо топологічна унонапівгрупа (S, λ, ρ) є дітопологічною унонапівгрупою.

Наступне твердження показує еквівалентність дінеперервності операцій лівої і правої одиниці на топологічній інверсній напівгрупі.

Твердження 3.25. *Нехай S – топологічна інверсна напівгрупа. Операція лівої одиниці $\lambda : S \to S$, $\lambda : x \mapsto xx^{-1}$, дінеперервна в точці $x \in S$ тоді і лише тоді, коли операція правої одиниці $\rho : S \to S$, $\rho : x \mapsto x^{-1}x$, дінеперервна в точці $x^{-1} \in S$.*

Доведення. Припустимо, що операція лівої одиниці λ дінеперервна в точці $x \in X$. Щоб показати, що операція правої одиниці ρ дінеперервна в x^{-1}, зафіксуємо окіл $O_{x^{-1}} \subset S$ точки x^{-1}. Тоді $O_{x^{-1}}^{-1} = \{y^{-1} : y \in O_{x^{-1}}\}$ – окіл точки x в S. З дінеперервності операції лівої одиниці λ на S, для точок x і $\lambda(x) = xx^{-1}$ існують такі околи $U_x \subset S$ і $W_{xx^{-1}} \subset E(S)$, що $(W_{xx^{-1}} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{xx^{-1}}) \subset O_{x^{-1}}^{-1}$. Застосувавши інверсію, отримуємо включення $(U_x^{-1} \rightthreetimes W_{xx^{-1}}^{-1}) \cap \rho^{-1}(W_{xx^{-1}}) \subset O_{x^{-1}}$. Отже, $U_{x^{-1}} = U_x^{-1}$ і $W_{\rho(x^{-1})} = W_{xx^{-1}}^{-1} = W_{xx^{-1}}$ – околи точок x^{-1} і $\rho(x^{-1}) = xx^{-1}$, що забезпечують дінеперервність операції правої одиниці ρ у точці x^{-1}.

Аналогічно доводиться, що з дінеперервності операції правої одиниці ρ в $x^{-1} \in S$ випливає дінеперервність операції λ у точці x. $\square$

Нагадаємо, що під *топологічною напівграткою* ми розуміємо комутативну топологічну напівгрупу S, всі елементи якої є ідемпотентами.

Кожна топологічна напівгратка є топологічною інверсною напівгрупою, в якій $x^{-1} = x$, для кожного елемента $x \in S$.

Теорема 3.26. *Клас дітопологічних інверсних напівгруп містить топологічні групи, топологічні напівгратки, компактні гаусдорфові топологічні інверсні напівгрупи і всі дискретні топологічні інверсні напівгрупи.*

Доведення. Нехай G – топологічна група. У цьому випадку λ і ρ сталі функції, які кожному елементу $x \in G$ ставлять у відповідність єдиний ідемпотент e групи G, тобто $\lambda(G) = \rho(G) = \{e\}$ – одноелементна множина. За твердженням 3.25, щоб довести, що G – дітопологічна інверсна напівгрупа, достатньо перевірити дінеперервність операції лівої одиниці λ в кожній точці $x \in G$. Для довільного заданого околу O_x точки x, покладемо $U_x = O_x$, а $W_{\lambda(x)} = \{e\}$ і зауважимо, що

$$(W_{\lambda(x)} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(x)}) = (\{e\} \leftthreetimes U_x) \cap G = U_x = O_x,$$

звідки випливає дінеперервність операції лівої одиниці λ у точці x. Таким чином, топологічна група G є дітопологічною.

Такий ж результат можна отримати з право-уніформізовності топологічних груп і теореми 3.19.

Кожна топологічна напівгратка є топологічною унонапівгрупою ідемпотентів, а отже, за твердженнями 3.12 і 3.15, є дітопологічною напівгрупою.

З наслідків 3.22 і 3.23 випливає, що клас дітопологічних інверсних напівгруп містить всі компактні гаусдорфові інверсні напівгрупи і всі дискретні топологічні інверсні напівгрупи. □

Розглянемо простий приклад локально компактної комутативної топологічної інверсної напівгрупи, яка не є дітопологічною.

Приклад 3.27. *Існує комутативна топологічна інверсна напівгрупа S з наступними властивостями:*

1) *S зліченна, метризовна і локально компактна;*

2) *напівгратка $E(S)$ в S компактна, а кожна підгрупа в S має потужність ≤ 2;*

3) *операція лівої одиниці $\lambda : S \to S$, $\lambda : x \mapsto xx^{-1}$, не є дінеперервною, а отже, топологічна кліфордова напівгрупа S не є дітопологічною.*

Доведення. Нехай $H = \{e, h\}$ – двоелементна група, а $T = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ – збіжна послідовність, наділена напівгратковою операцією

$$xy = \begin{cases} x, & \text{якщо } x = y, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тоді, добуток $T \times H$ є комутативною інверсною напівгрупою, напівгратка якої співпадає з множиною $E = T \times \{e\}$, де e – ідемпотент групи H. Нехай h – неодиничний елемент групи H.

На інверсній напівгрупі $S = T \times H$ розглянемо топологію τ, яка породжує звичайну компактну метризовну топологію на множині $T \times \{e\}$ і дискретну топологію на $T \times \{h\}$. Легко бачити, що τ метризовна, локально компактна і перетворює S у топологічну інверсну напівгрупу.

Стверджуємо, що операція лівої одиниці $\lambda : S \to S$, $\lambda : x \mapsto xx^{-1}$, не є дінеперервною в точці $x = (0, h) \in T \times H$. Припускаючи протилежне, для околу $O_x = \{x\}$ можемо знайти околи U_x точки x і $W_{\lambda(x)}$ ідемпотента $\lambda(x) = (0, e)$, для яких

$$(W_{\lambda(x)} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(x)}) \subset O_x = \{x\}.$$

Згідно означення топології на S, в околі $W_{\lambda(x)}$ існує елемент $(\frac{1}{n}, e)$, для деякого $n \in \mathbb{N}$. З того, що $(0, e) \cdot (\frac{1}{n}, h) = (0, h) = x \in U_x$ і $\lambda\big((\frac{1}{n}, h)\big) =$

$(\frac{1}{n}, e) \in W_{\lambda(x)}$, маємо

$$(\tfrac{1}{n}, h) \in (W_{\lambda(x)} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(x)}) \subset \{x\} = \{(0, h)\},$$

і отже $\frac{1}{n} = 0$, що й є шуканою суперечністю. $\square$

3.4 Дітопологічні кліфордові напівгрупи

Оскільки кожна кліфордова напівгрупа S є об'єднанням груп, то на ній природним чином визначені операції лівої $\lambda : S \to S$, $\lambda : x \mapsto xx^{-1} = e$ та правої $\rho : S \to S$, $\rho : x \mapsto x^{-1}x = e$ одиниць, які кожному елементу $x \in S$ ставлять у відповідність одиницю $e \in H$ підгрупи $H \subset S$, яка містить елемент x і які, очевидно, співпадають. Надалі операцію одиниці на кліфордовій напівгрупі позначатимемо через π.

Означення 3.28. Топологічна кліфордова напівгрупа S *дітопологічна,* якщо вона є дітопологічною зліва і справа, тобто, для кожного $x \in S$ і кожного околу O_x елемента x існують околи U_x, W_e точок x та $e = xx^{-1} = x^{-1}x$, відповідно, такі, що

$$(W_e \leftthreetimes U_x) \cap \pi^{-1}(W_e) \subset O_x \text{ і}$$

$$(U_x \rightthreetimes W_e) \cap \pi^{-1}(W_e) \subset O_x.$$

Зауважимо, що якщо S – кліфордова топологічна інверсна напівгрупа, то для кожного $x \in S$ і кожного ідемпотента $e \in E(S)$ виконується $xe = ex$, а отже, множини $e \leftthreetimes b = \{x \in S : ex = b\}$ і $b \rightthreetimes e = \{x \in S : xe = b\}$ співпадають. Очевидним є наступне твердження.

Твердження 3.29. *Для кліфордової топологічної інверсної напівгрупи S наступні умови еквівалентні:*

1) S дітопологічна зліва;

2) S дітопологічна справа;

3) S дітопологічна.

3.5 Операції над дітопологічними унонапівгрупами

Як відомо з теореми 3.26, клас дітопологічних унонапівгруп включає всі топологічні групи, всі топологічні напівгратки і всі компактні гаусдорфові топологічні інверсні напівгрупи. У цьому підрозділі ми покажемо, що цей клас зберігається багатьма природними операціями над топологічними напівгрупами.

3.5.1 Підунонапівгрупи топологічних унонапівгруп

Нехай (S, λ) – топологічна ліва унонапівгрупа, а $X \subset S$ – така її піднапівгрупа, що $\lambda(X) \subset X$. Тоді, з неперервності операції лівої одиниці $\lambda|X : X \to X$ на X, випливає, що $(X, \lambda|X)$ є топологічною лівою унонапівгрупою. Такі ліві унонапівгрупи називатимемо *лівими підунонапівгрупами* унонапівгрупи (S, λ).

Аналогічно можна означити *праві підунонапівгрупи* топологічних правих унонапівгруп і *підунонапівгрупи* топологічних унонапівгруп.

Оскільки з дінеперервності операцій лівої чи правої одиниць $u : S \to S$ на топологічній напівгрупі S випливає дінеперервність звуження $u|X$ на будь-яку піднапівгрупу $X \subset S$, для якої $u(X) \subset X$, отримуємо:

Твердження 3.30. *Кожна підунонапівгрупа $X \subset S$ дітопологічної (лівої, правої) унонапівгрупи S є дітопологічною унонапівгрупою.*

3.5.2 Тихоновський добуток топологічних унонапівгруп

Для довільної сім'ї топологічних лівих унонапівгруп $(S_\alpha, \lambda_\alpha)$, $\alpha \in A$, тихоновський добуток $S = \prod_{\alpha \in A} S_\alpha$, наділений операцією лівої одиниці $\lambda : S \to S$, $\lambda : (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto \big(\lambda_\alpha(x_\alpha)\big)_{\alpha \in A}$, зберігає природну структуру топологічної лівої унонапівгрупи. Аналогічно можна визначити тихоновський добуток правих унонапівгруп.

Очевидно, що дінеперервність операцій лівої (правої) одиниці на топологічних напівгрупах S_α, $\alpha \in A$, забезпечує дінеперервність операції лівої (правої) одиниці на їхньому тихоновському добутку, що й доводить наступне просте твердження.

Твердження 3.31. *Тихоновський добуток дітопологічних (лівих, правих) унонапівгруп є дітопологічною (лівою, правою) унонапівгрупою.*

3.5.3 Зведений добуток унонапівгруп

Розглянемо дві топологічні напівгрупи X, Y і нехай $I \subset X$ – замкнений двосторонній ідеал в X.

Означення 3.32. Під *зведеним добутком* $X \times_I Y$ напівгруп X і Y за ідеалом I розумітимемо множину $I \cup ((X \setminus I) \times Y)$, наділену такою найслабшою топологією, що

- відображення $(X \setminus I) \times Y \hookrightarrow X \times_I Y$ є топологічним вкладенням,
- проекція $\pi : X \times_I Y \to X$ неперервна.

Тут

$$\pi(z) = \begin{cases} z, & \text{якщо } z \in I, \\ x, & \text{якщо } z = (x, y) \in (X \setminus I) \times Y, \end{cases}$$

для кожного $z \in X \times_I Y$.

Напівгрупову операцію на $X \times_I Y$ визначаємо як таку єдину бінарну операцію на $X \times_I Y$, що проекція $q : X \times Y \to X \times_I Y$, визначена як

$$q(x, y) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in I, \\ (x, y), & \text{інакше}, \end{cases}$$

є гомоморфізмом напівгруп.

Якщо на напівгрупах X і Y визначені неперервні операції лівої одиниці $\lambda_X : X \to X$ і $\lambda_Y : Y \to Y$ і $\lambda_X(I) \subset I$, то на зведеному добутку

$X \times_I Y$ існує природна операція лівої одиниці $\lambda : X \times_I Y \to X \times_I Y$, визначена формулою:

$$\lambda(z) = \begin{cases} \lambda_X(z), & \text{якщо } z \in I, \\ (\lambda_X(x), \lambda_Y(y)), & \text{якщо } z = (x, y) \in (X \setminus I) \times Y. \end{cases}$$

Ця операція коректно задана, оскільки для кожного $x \in X \setminus I$ з рівності $x = \lambda_X(x) \cdot x \notin I$ випливає $\lambda_X(x) \notin I$.

Напівгрупа $X \times_I Y$, з заданою на ній операцією лівої одиниці λ, є топологічною лівою унонапівгрупою, яку називатимемо *зведеним добутком* топологічних лівих унонапівгруп (X, λ_X) і (Y, λ_Y).

Теорема 3.33. *Якщо топологічні ліві унонапівгрупи* $\mathbf{X} = (X, \lambda_X)$ *і* $\mathbf{Y} = (Y, \lambda_Y)$ *дітопологічні, то їхній зведений добуток* $\mathbf{X} \times_I \mathbf{Y} = (X \times_I Y, \lambda)$ *є дітопологічною лівою унонапівгрупою.*

Доведення. Припустимо, що топологічні ліві унонапівгрупи $\mathbf{X} = (X, \lambda_X)$ і $\mathbf{Y} = (Y, \lambda_Y)$ дітопологічні. Щоб довести дітопологічність лівої унонапівгрупи $X \times_I Y$, зафіксуємо точку $z \in X \times_I Y$ і її окіл $O_z \subset X \times_I Y$ і розглянемо два можливі випадки.

Спершу припустимо, що $z = (x, y) \in (X \setminus I) \times Y$. У цьому випадку можна вважати, що O_z має вигляд $O_z = O_x \times O_y$, для деяких відкритих околів $O_x \subset X \setminus I$ і $O_y \subset Y$ точок $x \in X \setminus I$ і $y \in Y$, відповідно. Оскільки X і Y – дітопологічні ліві унонапівгрупи, то існують відкриті околи $U_x \subset X$ і $W_{\lambda_X(x)} \subset \lambda_X(X)$ точок x і $\lambda_X(x)$ і околи $U_y \subset Y$ і $W_{\lambda_Y(y)} \subset \lambda_Y(Y)$ точок y і $\lambda_Y(y)$, для яких $(W_{\lambda_X(x)} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda_X(x)}) \subset O_x$ і $(W_{\lambda_Y(y)} \leftthreetimes U_y) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda_Y(y)}) \subset O_y$.

З того, що $\lambda(x) \cdot x = x \notin I$ випливає, що $\lambda(x) \notin I$. Отож, можемо припустити, що множини U_x і $W_{\lambda(x)}$ містяться в доповненні $X \setminus I$.

Стверджуємо, що відкриті множини $U_z = U_x \times U_y$ і $W_{\lambda(z)} = W_{\lambda_X(x)} \times W_{\lambda_Y(y)}$ забезпечують дінеперервність операції лівої одиниці λ на $X \times_I Y$ у точці z. Для довільної заданої точки $u \in X \times_I Y$ такої, що $u \in$

$(W_{\lambda(z)} \leftthreetimes U_z) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(z)})$, потрібно показати, що $u \in O_z$. З вищесказаного випливає, що $\lambda(u) \in W_{\lambda(z)}$ і $wu \in U_z$, для деякого $w \in W_{\lambda(z)}$, звідки отримуємо, що $w, u \notin I$ і, отже, $w = (x_w, y_w)$ і $u = (x_u, y_u)$, для деяких точок $x_w, x_u \in X \setminus I$ і $y_w, y_u \in Y$. Оскільки $wu = (x_w x_u, y_w y_u) \in U_z = U_x \times U_y$ і $\lambda(u) = (\lambda_X(x_u), \lambda_Y(y_u)) \in W_{\lambda(z)} = W_{\lambda_X(x)} \times W_{\lambda_Y(y)}$, то $x_w x_u \in U_x, y_w y_u \in U_y$ і $\lambda_X(x_u) \in W_{\lambda_X(x)}, \lambda_Y(y_u) \in W_{\lambda_Y(y)}$. Звідси, $x_u \in (W_{\lambda_X(x)} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda_X^{-1}(W_{\lambda_X(x)}) \subset O_x$ і $y_u \in (W_{\lambda_Y(y)} \leftthreetimes U_y) \cap \lambda_Y^{-1}(W_{\lambda_Y(y)}) \subset O_y$, і, отже, $u \in O_x \times O_y = O_z$.

Якщо ж $z \in I$, за O_z можна взяти окіл вигляду $O_z = \pi^{-1}(O'_z)$, де O'_z – відкритий окіл точки $z \in I$ у лівій унонапівгрупі X. Оскільки λ_X дінеперервна зліва у точці z, то існують такі відкриті околи $U'_z \subset X$ і $W'_{\lambda_X(z)} \subset \lambda_X(X)$ точок $z \in X$ і $\lambda_X(z) \in \lambda_X(X)$, що $(W'_{\lambda_X(z)} \leftthreetimes U'_z) \cap \lambda_X^{-1}(W'_{\lambda_X(z)}) \subset O'_z$. З останнього включення, для околів $U_z = \pi^{-1}(U'_z) \subset X \times_I Y$ і $W_{\lambda(z)} = \lambda(X \times_I Y) \cap \pi^{-1}(W'_{\lambda_X(z)}) \subset \lambda(X \times_I Y)$ точок z і $\lambda(z)$, відповідно, маємо

$$(W_{\lambda(x)} \leftthreetimes U_z) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(z)}) \subset \pi^{-1}\big((W'_{\lambda_X(z)} \leftthreetimes U'_z) \cap \lambda_X^{-1}(W'_{\lambda_X(z)})\big) \subset$$

$$\subset \pi^{-1}(O'_z) = O_z,$$

що й доводить дінеперервність зліва операції лівої одиниці λ на $X \times_I Y$ у точці z. Отже, зведений добуток $\mathbf{X} \times_I \mathbf{Y} = (X \times_I Y, \lambda)$ є дітопологічною лівою унонапівгрупою. $\square$

Аналогічно можна дати означення зведеного добутку топологічних правих унонапівгруп. Зокрема, для двох топологічних правих унонапівгруп $\mathbf{X} = (X, \rho_X)$, $\mathbf{Y} = (Y, \rho_Y)$ і замкненого двостороннього ідеала $I \subset X$, на зведеному добутку $X \times_I Y$ визначена індукована операція правої одиниці $\rho : X \times_I Y \to X \times_I Y$, визначена за правилом:

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_X(z), & \text{якщо } z \in I, \\ (\rho_X(x), \rho_Y(y)), & \text{якщо } z = (x, y) \in (X \setminus I) \times Y. \end{cases}$$

Зведений добуток $X \times_I Y$, наділений цією операцією є топологічною правою унонапівгрупою, яку ми називатимемо *зведеним добутком* топологічних правих унонапівгруп (X, λ_X) і (Y, λ_Y).

Як і в теоремі 3.33, можна довести:

Теорема 3.34. *Якщо топологічні праві унонапівгрупи* $\mathbf{X} = (X, \rho_X)$ *і* $\mathbf{Y} = (Y, \rho_Y)$ *є дітопологічними, то їх зведений добуток* $\mathbf{X} \times_I \mathbf{Y} = (X \times_I Y, \rho)$ *є дітопологічною унонапівгрупою.*

З вищесказаного випливає, що для топологічних унонапівгруп $\mathbf{X} = (X, \lambda_X, \rho_X)$, $\mathbf{Y} = (Y, \lambda_Y, \rho_Y)$ і замкненого ідеала $I \subset X$, для якого $\lambda_X(I) \cup \rho_X(I) \subset I$, трійка $\mathbf{X} \times_I \mathbf{Y} = (X \times_I Y, \lambda, \rho)$ є топологічною унонапівгрупою, яку ми надалі називатимемо *зведеним добутком* топологічних унонапівгруп $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$. З теорем 3.33 і 3.34, отримуємо:

Наслідок 3.35. *Якщо топологічні унонапівгрупи* $\mathbf{X}$ *і* $\mathbf{Y}$ *дітопологічні, то їх зведений добуток* $\mathbf{X} \times_I \mathbf{Y}$ *є дітопологічним.*

Розглянемо деякі важливі приклади зведених добутків.

Приклад 3.36. Нехай G – топологічна група, а $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \min)$ – двоелементна напівгратка, наділена дискретною топологією. За теоремою 3.26, напівгрупи G і $\mathbf{2}$, наділені канонічними операціями лівої і правої одиниць, є дітопологічними інверсними напівгрупами, а тому, за наслідком 3.35, їх зведений добуток $\dot{G} = \mathbf{2} \times_{\{0\}} G$ також є дітопологічною унонапівгрупою, яку надалі називатимемо 0-*розширенням топологічної групи* G.

Приклад 3.37. Нехай G – топологічна група, а $\mathbb{I}$ – інтервал $[0, 1]$ з напівгратковою операцією мінімуму. За теоремою 3.26, напівгрупи G і $\mathbb{I}$, наділені канонічними операціями одиниці, є дітопологічними інверсними унонапівгрупами, а за наслідком 3.35, дітопологічною унонапівгрупою є й їх зведений добуток $\hat{G} = \mathbb{I} \times_{\{0\}} G$, який називатимемо *конусом над* G.

Нуль-розширення і конуси топологічних груп відіграють важливу роль у розділі, присвяченому побудові вкладень кліфордових дітопологічних інверсних напівгруп у тихоновські добутки топологічних напівграток і конусів над групами.

3.5.4 Напівпрямий добуток топологічних унонапівгруп

У цьому підрозділі ми розглядаємо операцію напівпрямого добутку топологічних (лівих, правих) унонапівгруп. Зауважимо, що напівпрямі добутки напівгруп вивчались у розділі 2 монографії [13].

Під *неперервною дією* топологічної напівгрупи F на топологічній напівгрупі S ми розуміємо неперервну функцію $\alpha : F \times S \to S$ з властивостями:

- для кожного $f \in F$ функція $\alpha_f : S \to S$, $\alpha_f : x \mapsto \alpha(f, x)$, – напівгруповий гомоморфізм;
- $\alpha_{fg} = \alpha_f \circ \alpha_g$, для всіх $f, g \in F$.

Дія $\alpha : F \times S \to S$ породжує на добутку $S \times F$ неперервну асоціативну бінарну операцію

$$(s, f) \cdot (t, g) = (s \cdot \alpha_f(t), f \cdot g).$$

Добуток $S \times F$, наділений цією операцією позначатимемо $S \times_\alpha F$ і називатимемо *напівпрямим добутком* топологічних напівгруп S і F.

Кажемо, що дія $\alpha : F \times S \to S$:

- зберігає операцію (лівої, правої) одиниці $u : F \to F$ на F, якщо $\alpha(u(f), s) = s$, для всіх $(f, s) \in F \times S$;
- зберігає операцію (лівої, правої) одиниці $u : S \to S$ на S, якщо $\alpha(f, u(s)) = u(s)$, для всіх $(f, s) \in F \times S$.

Якщо (F, λ_F) і (S, λ_S) – топологічні ліві унонапівгрупи, а неперервна дія $\alpha : F \times S \to S$ напівгрупи F на S зберігає операцію лівої одиниці λ_F, то унарна операція

$$\lambda : S \times_\alpha F \to S \times_\alpha F, \quad \lambda : (s, f) \mapsto (\lambda_S(s), \lambda_F(f)),$$

є неперервною операцією одиниці на напівпрямому добутку $S \times_\alpha F$, що випливає з рівностей

$$(\lambda_S(s), \lambda_F(f)) \cdot (s, f) = (\lambda_S(s) \cdot \alpha(\lambda_F(f), s), \lambda_F(f) \cdot f) =$$

$$= (\lambda_S(s) \cdot s, f) = (s, f),$$

для всіх $(s, f) \in S \times F$.

Таким чином, $\mathbf{S} \times_\alpha \mathbf{F} = (S \times_\alpha F, \lambda)$ – топологічна ліва унонапівгрупа, яку називатимемо *напівпрямим добутком* топологічних лівих унонапівгруп $\mathbf{S} = (S, \lambda_S)$ і $\mathbf{F} = (F, \lambda_F)$.

Теорема 3.38. *Нехай* $\mathbf{S} = (S, \lambda_S)$ *і* $\mathbf{F} = (F, \lambda_F)$ *– топологічні ліві унонапівгрупи, а* $\alpha : F \times S \to F$ *– неперервна дія* F *на* S*, що зберігає операцію лівої одиниці* λ_F *на лівій унонапівгрупі* F*. Топологічна ліва унонапівгрупа* $\mathbf{S} \times_\alpha \mathbf{F}$ *є дітопологічною тоді і лише тоді, коли топологічні ліві унонапівгрупи* $\mathbf{S}$ *і* $\mathbf{F}$ *дітопологічні.*

Доведення. Для доведення достатності, припустимо, що $\mathbf{S} \times_\alpha \mathbf{F}$ – дітопологічна ліва унонапівгрупа і покажемо, що топологічні ліві унонапівгрупи $\mathbf{S}$ і $\mathbf{F}$ дітопологічні.

Щоб довести дінеперервність операції лівої одиниці λ_S, зафіксуємо точку $s \in S$ і її окіл O_s в S. Для довільної точки $f \in F$ розглянемо окіл $O_{(s,f)} = O_s \times F$ точки (s, f) у топологічній напівгрупі $S \times_\alpha F$. Оскільки операція лівої одиниці λ на $S \times_\alpha F$ дінеперервна, існують такі околи $U_{(s,f)} \subset S \times_\alpha F$ і $W_{\lambda(s,f)} \subset \lambda(S \times_\alpha F) = \lambda_S(S) \times \lambda_F(F)$ точок (s, f) і $\lambda(s, f) = (\lambda_S(s), \lambda_F(f))$, відповідно, що $(W_{\lambda(s,f)} \setminus U_{(s,f)}) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(s,f)}) \subset O_{(s,f)}$. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $U_{(s,f)} = U_s \times U_f$, а $W_{\lambda(s,f)} = W_{\lambda_S(s)} \times W_{\lambda_F(f)}$, для деяких відкритих підмножин $U_s \subset S$, $W_{\lambda_S(s)} \subset \lambda_S(S)$, $U_f \subset F$, і $W_{\lambda_F(f)} \subset \lambda_F(F)$.

Стверджуємо, що околи U_s і $W_{\lambda_S(s)}$ забезпечують виконання умови дінеперервності λ_S в точці s. Нехай $t \in (W_{\lambda_S(s)} \setminus U_s) \cap \lambda_S^{-1}(W_{\lambda_S(s)})$.

Звідси, $\lambda_S(t) \in W_{\lambda_S(s)}$ і $wt \in U_s$, для деякого $w \in W_{\lambda_S(s)}$. Тоді, оскільки α зберігає операцію лівої одиниці λ_F, для елементів $(t, f) \in S \times_\alpha F$ і $(w, \lambda_F(f)) \in W_{\lambda(s,f)}$ маємо

$$(w, \lambda_F(f)) \cdot (t, f) = (w \cdot \alpha_{\lambda_F(f)}(t), \lambda_F(f) \cdot f) =$$

$$= (wt, f) \in U_s \times U_f = U_{(s,f)}$$

і

$$\lambda(s, f) = (\lambda_S(s), \lambda_F(f)) \in W_{\lambda_S(s)} \times W_{\lambda_F(f)} = W_{\lambda(s,f)}.$$

З вибору околів $U_{(s,f)}$ і $W_{\lambda(s,f)}$ випливає $(t, f) \in O_{(s,f)}$, і отже, $t \in O_s$.

Щоб перевірити дінеперервність операції лівої одиниці $\lambda_F : F \to F$, розглянемо довільну точку $f \in F$ і її окіл $O_f \subset F$ в F. Зафіксуємо елемент $s \in S$ і розглянемо окіл $O_{(s,f)} = S \times O_f$ точки (s, f) у $S \times_\alpha F$. Оскільки операція лівої одиниці λ на $\mathbf{S} \times_\alpha \mathbf{F}$ дінеперервна, існують такі околи $U_{(s,f)} \subset S \times_\alpha F$ і $W_{\lambda(s,f)} \subset \lambda(S \times_\alpha F)$ точок (s, f) і $\lambda(s, f) = (\lambda_S(s), \lambda_F(f))$, що $(W_{\lambda(s,f)} \leftthreetimes U_{(s,f)}) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(s,f)}) \subset O_{(s,f)}$. Не втрачаючи загальності, припускаємо, що $U_{(s,f)} = U_s \times U_f$, а $W_{\lambda(s,f)} = W_{\lambda_S(s)} \times W_{\lambda_F(f)}$, для деяких відкритих множин $U_s \subset S$, $W_{\lambda_S(s)} \subset \lambda_S(S)$, $U_f \subset F$ і $W_{\lambda_F(f)} \subset \lambda_F(F)$.

Околи U_f і $W_{\lambda_F(f)}$ забезпечують дінеперервність λ_F у точці f. Зауважимо, що для довільної точки $g \in (W_{\lambda_F(f)} \leftthreetimes U_f) \cap \lambda_F^{-1}(W_{\lambda_F(f)})$ виконується $\lambda_F(g) \in W_{\lambda_F(f)}$ і $wg \in U_f$, для деякого $w \in W_{\lambda_F(f)} \subset \lambda_F(F)$. Беручи до уваги те, що α зберігає операцію лівої одиниці λ_F і включення $w \in \lambda_F(F)$, отримуємо $\alpha_w(s) = s$. Тоді, для елементів (s, g) і $(\lambda_S(s), w) \in W_{\lambda_S(s)} \times W_{\lambda_F(f)} = W_{\lambda(s,f)}$, маємо

$$(\lambda_S(s), w) \cdot (s, g) = (\lambda_S(s) \cdot \alpha_w(s), wg) = (\lambda_S(s) \cdot s, wg) = (s, g) \in U_{(s,f)}$$

і $\lambda(s, g) = (\lambda_S(s), \lambda_F(g)) \in W_{\lambda_S(s)} \times W_{\lambda_F(f)} = W_{\lambda(s,f)}$, тобто

$$(s, g) \in (U_{(s,f)} \leftthreetimes W_{\lambda(s,f)}) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(s,f)}) \subset O_{(s,f)} = S \times O_f,$$

а отже, $g \in O_f$.

Щоб довести необхідність, припустимо, що топологічні ліві унонапівгрупи $\mathbf{S}$ і $\mathbf{F}$ дітопологічні. Потрібно показати, що операція лівої одиниці $\lambda : (s, f) \mapsto (\lambda_S(s), \lambda_F(f))$ на $S \times_\alpha F$ дінеперервна в кожній точці $(s, f) \in S \times_\alpha F$. Зафіксуємо довільний відкритий окіл $O_{(s,f)}$ точки (s, f) в $S \times_\alpha F$. Не втрачаючи загальності, беремо базовий окіл $O_{(s,f)} = O_s \times O_f$, де O_s і O_f – відкриті околи точок s і f у напівгрупах S і F, відповідно.

З дінеперервності операції лівої одиниці λ_F у точці f випливає існування таких околів $U_f \subset F$ і $W_{\lambda_F(f)} \subset \lambda_F(F)$ точок f і $\lambda_F(f)$, що $(W_{\lambda_F(f)} \leftthreetimes U_f) \cap \lambda_F^{-1}(W_{\lambda_F(f)}) \subset O_f$. З того, що й операція лівої одиниці λ_S дінеперервна в точці s, випливає існування таких околів $U_s \subset S$ і $W_{\lambda_S(s)} \subset \lambda_S(S)$ точок s і $\lambda_S(s)$, що $(W_{\lambda_S(s)} \leftthreetimes U_s) \cap \lambda_S^{-1}(W_{\lambda_S(s)}) \subset O_s$.

Стверджуємо, що околи $U_{(s,f)} = U_s \times U_f$ і $W_{(s,f)} = W_{\lambda_S(s)} \times W_{\lambda_F(f)}$ точок (s, f) і $\lambda(s, f)$ гарантують дінеперервність операції лівої одиниці λ в точці (s, f). Справді, для заданої пари $(t, g) \in (W_{\lambda(s,f)} \leftthreetimes U_{(s,f)}) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(s,f)})$, треба показати що $(t, g) \in O_{(s,f)}$. За умовою, $(w, h) \cdot (t, g) \in U_{(s,g)}$, для деякої пари $(w, h) \in W_{\lambda(s,f)}$. Оскільки α зберігає операцію лівої одиниці λ_F і $h \in W_{\lambda_F(f)} \subset \lambda_F(F)$, отримуємо що $(w, h) \cdot (t, g) = (w \cdot \alpha_h(t), hg) = (wt, hg)$, а отже, $(wt, hg) \in U_{(s,f)} = U_s \times U_f$ і

$$(t, g) \in \big((W_{\lambda_S(s)} \leftthreetimes U_s) \cap \lambda_S^{-1}(W_{\lambda_S(s)})\big) \times \big((W_{\lambda_F(f)} \leftthreetimes U_f) \cap \lambda_F^{-1}(W_{\lambda_F(f)})\big) \subset$$
$$\subset O_s \times O_f = O_{(s,f)}.$$

□

Маючи дві топологічні праві унонапівгрупи $\mathbf{S} = (S, \rho_S)$, $\mathbf{F} = (F, \rho_F)$ і неперервну дію $\alpha : F \times S \to S$ напівгрупи F на S, на напівпрямому добутку $S \times_\alpha F$ можемо визначити операцію правої одиниці. Це можливо зробити, якщо α є *ρ_S-оборотною*, тобто, якщо для кожного $f \in F$, звуження $\bar{\alpha}_f = \alpha_f | \rho_S(S)$ є бієкцією на $\rho_S(S)$, а відображення

$$\alpha^- : F \times \rho_S(S) \to \rho_S(S), \;\; \alpha^- : (f, s) \mapsto \bar{\alpha}_f^{-1}(s),$$

неперервне.

У цьому випадку, відображення $\rho : S \times_\alpha F \to S \times_\alpha F$, визначене як

$$\rho(s, f) = (\bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)), \rho_F(f)) = (\alpha^-(f, \rho_S(s)), \rho_F(f))$$

є неперервним.

З того, що

$$(s, f) \cdot \rho(s, f) = (s, f) \cdot (\bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)), \rho_F(f)) =$$
$$= (s \cdot \alpha_f \circ \bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)), f \cdot \rho_F(f)) =$$
$$= (s \cdot \bar{\alpha}_f \circ \bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)), f) = (s \cdot \rho_S(s), f) = (s, f),$$

відображення ρ є неперервною операцією правої одиниці на $S \times_\alpha F$. Отже, $\mathbf{S} \times_\alpha \mathbf{F} = (S \times_\alpha F, \rho)$ – топологічна права унонапівгрупа, яку називатимемо *напівпрямим добутком* топологічних правих унонапівгруп $\mathbf{S} = (S, \rho_S)$ і $\mathbf{F} = (F, \rho_F)$.

Зауважимо, що якщо дія α зберігає операцію правої одиниці ρ_S, то для кожного $f \in F$ звуження $\bar{\alpha}_f = \alpha_f|\rho_S(S)$ є тотожнім відображенням множини $\rho_S(S)$, а тому, дія α є ρ_S-оборотною. Більше того, в цьому випадку $\rho(s, f) = (\rho_S(s), \rho_F(f))$, для всіх $(s, f) \in S \times F$.

Наступні твердження допомагають розпізнавати ρ_S-оборотні дії.

Твердження 3.39. *Неперервна дія $\alpha : F \times S \to S$ топологічної правої унонапівгрупи (F, ρ_F) на топологічній правій унонапівгрупі (S, ρ_S) ρ_S-оборотна, якщо*

1) α зберігає операцію правої одиниці ρ_F;

2) $\alpha_f(\rho_S(S)) = \rho_S(S)$, для всіх $f \in F$;

3) існує така неперервна унарна операція $(\,)^{-1} : F \to F$, що $\rho_F(f) = f^{-1}f$, для всіх $f \in F$.

Доведення. Оскільки дія α зберігає операцію правої одиниці $\rho_F : F \to F$, $\rho_F : f \mapsto f^{-1}f$, то для кожних $f \in F$, $s \in S$, маємо

$$s = \alpha(\rho_F(f), s) = \alpha(f^{-1}f, s) = \alpha_{f^{-1}f}(s) = \alpha_{f^{-1}} \circ \alpha_f(s).$$

Звідси, $\alpha_f : S \to S$ – ін'єктивний гомоморфізм, а отже, існує $\alpha_f^{-1} : \alpha_f(S) \to S$. З того, що $\alpha_f(\rho_S(S)) = \rho_S(S)$ випливає, що $\bar{\alpha}_f = \alpha_f|\rho_S(S)$ – бієктивне відображення множини $\rho_S(S)$.

Залишається перевірити неперервність відображення $\alpha^- : F \times \rho_S(S) \to \rho_S(S)$, $\alpha^- : (f, s) \mapsto \bar{\alpha}_f^{-1}(s)$. Для цього зауважимо, що функція α^- співпадає з неперервною функцією $\beta : F \times \rho_S(S) \to \rho_S(S)$, $\beta(f, s) \mapsto \alpha(f^{-1}, s)$. Справді, для довільних заданих $f \in F$ і $s \in \rho_S(S)$ можна знайти єдину точку $x \in \rho_S(S)$, для якої $s = \bar{\alpha}_f(x) = \alpha_f(x)$, і отже,

$$\beta(f, s) = \alpha(f^{-1}, s) = \alpha_{f^{-1}}(s) = \alpha_{f^{-1}} \circ \alpha_f(x) =$$

$$= \alpha_{f^{-1}f}(x) = \alpha_{\rho_F(f)}(x) = x = \bar{\alpha}_f^{-1}(s) = \alpha^-(f, s).$$

□

Далі розглянемо напівпрямий добуток дітопологічних правих унонапівгруп.

Теорема 3.40. *Нехай* $\mathbf{S} = (S, \rho_S)$ *і* $\mathbf{F} = (F, \rho_F)$ *– топологічні праві унонапівгрупи, а* $\alpha : F \times S \to S$ *–* ρ_S*-оборотна неперервна дія* F *на* S*. Напівпрямий добуток* $\mathbf{S} \times_\alpha \mathbf{F}$ *є дітопологічною правою унонапівгрупою тоді і лише тоді, коли топологічні праві унонапівгрупи* $\mathbf{S}$ *і* $\mathbf{F}$ *дітопологічні.*

Доведення. Для доведення достатності, припустимо, що топологічна права унонапівгрупа $\mathbf{S} \times_\alpha \mathbf{F} = (S \times_\alpha F, \rho)$ дітопологічна. Покажемо, що операції правих одиниць ρ_S і ρ_F дінеперервні.

Щоб довести дінеперервність ρ_S, зафіксуємо будь-яку точку $s \in S$ і її окіл $O_s \subset S$. Для довільної точки $f \in \rho_F(F) \subset F$ розглянемо гомоморфізм $\alpha_f : S \to S$, звуження $\bar{\alpha}_f$ якого є бієкцією множини $\rho_S(S)$. Тоді $\bar{\alpha}_f$ – тотожне відображення $\rho_S(S)$. Справді, з того, що $f \in \rho_F(F)$

випливає $f = \rho_F(g)$, для деякого $g \in F$, а з рівності $g = g \cdot \rho_F(g) = gf$ маємо $\bar{\alpha}_g = \bar{\alpha}_g \circ \bar{\alpha}_f$, що можливо лише у тому випадку, коли $\bar{\alpha}_f$ тотожне.

Тепер розглянемо точку $(s, f) \in S \times_\alpha F$ і її окіл $O_{(s,f)} = O_s \times F$. Тоді, $\rho(s, f) = (\bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)), \rho_S(f)) = (\rho_S(s), \rho_F(f))$. Оскільки ρ дінеперервна на $S \times_\alpha F$, то існують околи $U_{(s,f)} \subset S \times_\alpha F$ і $W_{\rho(s,f)} \subset \rho(S \times_\alpha F) = \rho_S(S) \times \rho_F(F)$ точок (s, f) і $\rho(s, f) = (\rho_S(s), \rho_F(f))$, для яких $(U_{(s,f)} \leftthreetimes W_{\rho(s,f)}) \cap \rho^{-1}(W_{\rho(s,f)}) \subset O_{(s,f)}$. Не втрачаючи загальності, припускаємо, що $U_{(s,f)} = U_s \times U_f$ і $W_{\rho(s,f)} = W_{\rho(s)} \times W_{\rho(f)}$, для деяких відкритих підмножин $U_s \subset S$ і $U_f \subset F$.

Стверджуємо, що U_s і $W_{\rho_S(s)}$ задовольняють потрібну нам умову: $(U_s \leftthreetimes W_{\rho_S(s)}) \cap \rho_S^{-1}(W_{\rho_S(s)}) \subset O_s$. Для довільної заданої точки $t \in (U_s \leftthreetimes W_{\rho_S(s)}) \cap \rho_S^{-1}(W_{\rho_S(s)})$, існує така точка $w \in W_{\rho_S(s)} \subset \rho_S(S)$, що $tw \in U_s$. Розглянемо точки $(t, f) \in S \times_\alpha F$ та $(w, \rho_F(f)) \in W_{\rho_S(s)} \times W_{\rho_F(f)} = W_{\rho(s,f)}$ і зауважимо, що

$$(t, f) \cdot (w, \rho_F(f)) = (t \cdot \bar{\alpha}_f(w), f \cdot \rho_F(f)) = (tw, f) \in U_s \times U_f.$$

З того, що

$$\rho(t, f) = (\bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(t)), \rho_F(f)) = (\rho_S(t), \rho_F(f)) \in$$

$$\in W_{\rho_S(s)} \times W_{\rho_F(f)} = W_{\rho(s,f)},$$

отримуємо потрібне включення

$$(t, f) \in (U_{(s,f)} \leftthreetimes W_{\rho(s,f)}) \cap \rho^{-1}(W_{\rho(s,f)}) \subset O_{(s,f)} = O_s \times F,$$

яке й доводить що $t \in O_s$.

Далі, покажемо дінеперервність в кожній точці $f \in F$ операції правої одиниці ρ_F на F. Зафіксуємо довільний окіл O_f точки f в F і довільну точку $s \in S$. Розглянемо пару (s, f) і її окіл $O_{(s,f)} = S \times O_f$ в $S \times_\alpha F$. Оскільки ρ дінеперервна на $S \times_\alpha F$, існують околи $U_{(s,f)} \subset S \times_\alpha F$

і $W_{\rho(s,f)} \subset \rho(S \times_\alpha F) = \rho_S(S) \times \rho_F(F)$ елементів (s,f) і $\rho(s,f)$, для яких $(U_{(s,f)} \leftthreetimes W_{\rho(s,f)}) \cap \rho^{-1}(W_{\rho(s,f)}) \subset O_{(s,f)}$. Зауважимо, що для точки $r = \bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s))$ виконується рівність $\rho(s,f) = (r, \rho_F(f))$. Не втрачаючи загальності, можемо припустити, що $W_{\rho(s,f)} = W_r \times W_{\rho_F(f)}$, а $U_{(s,f)} = U_s \times U_f$, для деяких відкритих множин $W_r \subset \rho_S(S)$, $W_{\rho_F(f)} \subset \rho_F(F)$, $U_s \subset S$ і $U_f \subset F$.

Розглянемо неперервні функції $\beta : F \to \rho_S(S)$, $\beta : g \mapsto \bar{\alpha}_g^{-1}(\rho_S(s)) = \alpha^-(g, \rho_S(s))$, і $\gamma : F \to S$, $\gamma : g \mapsto s \cdot \alpha(g,r)$ і зауважимо, що $\beta(f) = r$ і

$$\gamma(f) = s \cdot \alpha_f(r) = s \cdot \bar{\alpha}_f \circ \bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)) = s \cdot \rho_S(s) = s.$$

Беручи до уваги неперервність функцій β і γ, знайдемо окіл $U'_f \subset U_f$ точки f такий, що $\beta(U'_f) \subset W_r$ і $\gamma(U'_f) \subset U_s$.

Тоді, околи U'_f і $W_{\rho_F(f)}$ володіють потрібною властивістю: $(U'_f \leftthreetimes W_{\rho_F(f)}) \cap \rho_F^{-1}(W_{\rho_F(f)}) \subset O_f$. Щоб переконатися в цьому, для довільної заданої точки $g \in (U'_f \leftthreetimes W_{\rho_F(f)}) \cap \rho_F^{-1}(W_{\rho_F(f)})$, знайдемо таку точку $h \in W_{\rho_F(f)} \subset \rho_F(F)$, що $gh \in U'_f$. Розглянемо точки $(s,g) \in S \times_\alpha F$ і $(r,h) \in W_r \times W_{\rho_F(f)} = W_{\rho(s,f)}$. Оскільки $h \in \rho_F(F)$, то відображення $\bar{\alpha}_h$ є тотожним гомеоморфізмом множини $\rho_S(S)$. Отже, $\alpha_h(r) = r$ і

$$s \cdot \alpha_g(r) = s \cdot \alpha_g(\alpha_h(r)) = s \cdot \alpha_{gh}(r) = \gamma(gh) \in \gamma(U'_f) \subset U_s.$$

А з того, що $\bar{\alpha}_{gh} = \bar{\alpha}_g \circ \bar{\alpha}_h = \bar{\alpha}_g$, отримуємо

$$\rho(s,g) = (\bar{\alpha}_g^{-1}(\rho_S(s)), \rho_F(g)) = (\bar{\alpha}_{gh}^{-1}(\rho_S(s)), \rho_F(g)) =$$

$$= (\beta(gh), \rho_S(s)) \in \beta(U'_f) \times W_{\rho_F(f)} \subset W_r \times W_{\rho_F(f)} = W_{\rho(s,f)}.$$

Оскільки

$$(s,g) \cdot (r,h) = (s \cdot \alpha_g(r), gh) \in U_s \times U'_f \subset U_{(s,f)},$$

маємо

$$(s,g) \in (U_{(s,f)} \leftthreetimes W_{\rho(s,f)}) \cap \rho^{-1}(W_{\rho(s,f)}) \subset O_{(s,f)} = S \times O_f,$$

а отже, $g \in O_f$, що завершує доведення “достатності”.

Для доведення “необхідності”, припустимо, що топологічні праві уно-напівгрупи (S, ρ_S) і (F, ρ_F) дітопологічні. Потрібно показати дінеперервність операції правої одиниці $\rho : S \times_\alpha F \to S \times_\alpha F$, $\rho : (s, f) \mapsto (\bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)), \rho_F(f))$, в кожній точці $(s, f) \in S \times_\alpha F$.

Зафіксуємо довільний окіл $O_{(s,f)}$ точки (s, f) у топологічній напівгрупі $S \times_\alpha F$. Не втрачаючи загальності, беремо базовий окіл $O_{(s,f)} = O_s \times O_f$, де O_s і O_f – відкриті околи точок s і f у напівгрупах S і F, відповідно. Оскільки ρ_S дінеперервна, існують такі околи $U_s \subset S$ і $W_{\rho_S(s)} \subset \rho_S(S)$ точок s і $\rho_S(s)$, що $(U_s \leftthreetimes W_{\rho_S(s)}) \cap \rho_S^{-1}(W_{\rho_S(s)}) \subset O_s$.

Зауважимо, що для точки $r = \bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)) \in \rho_S(S)$ виконуються рівності:

$$\alpha(f, r) = \bar{\alpha}_f(r) = \bar{\alpha}_f \circ \bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)) = \rho_S(s) \in W_{\rho_S(s)}.$$

З неперервності дії $\alpha|(F \times \rho_S(S))$, можемо знайти околи $O'_f \subset O_f$ точки f і $W_r \subset \rho_S(S)$ точки r, для яких $\alpha(O'_f \times W_r) \subset W_{\rho_S(s)}$.

З дінеперервності операції правої одиниці ρ_F в точці f, існують околи $U_f \subset F$ і $W_{\rho_F(f)} \subset \rho_F(F)$ точок f і $\rho_F(f)$ такі, що $(U_f \leftthreetimes W_{\rho_F(f)}) \cap \rho_F^{-1}(W_{\rho_F(f)}) \subset O'_f$.

З ρ_S-оборотності дії α випливає

$$\rho(S \times_\alpha F) = \{(\bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)), \rho_F(f)) : (s, f) \in S \times_\alpha F\} = \rho_S(S) \times \rho_F(F),$$

а тому, добуток $W_{\rho(s,f)} = W_r \times W_{\rho_F(f)}$ є околом точки $\rho(s, f) = (\bar{\alpha}_f^{-1}(\rho_S(s)), \rho_F(f)) = (r, \rho_F(f))$ у $\rho(S \times_\alpha F) = \rho_S(S) \times \rho_F(F)$. Стверджуємо, що околи $U_{(s,f)} = U_s \times U_f$ і $W_{\rho(s,f)} = W_r \times W_{\rho_F(f)}$ мають потрібну властивість: $(U_{(s,f)} \leftthreetimes W_{\rho(s,f)}) \cap \rho^{-1}(W_{\rho(s,f)}) \subset O_{(s,f)}$. Зафіксуємо довільну точку $(t, g) \in (U_{(s,f)} \leftthreetimes W_{\rho(s,f)}) \cap \rho^{-1}(W_{\rho(s,f)})$. Тоді, $(t, g)(w, h) \in U_s \times U_f$, для деякого $(w, h) \in W_{\rho(s,f)}$.

Зауважимо, що з рівностей

$$W_r \times W_{\rho_F(f)} = W_{\rho(s,f)} \ni \rho(t,g) = (\bar{\alpha}_g^{-1}(\rho_S(t)), \rho_F(g))$$

випливає, що $\rho_F(g) \in W_{\rho_F(f)}$ і $\bar{\alpha}_g^{-1}(\rho_S(t)) \in W_r$. А з включення $(w,h) \in W_{\rho(s,f)} = W_r \times W_{\rho_F(f)}$, отримуємо $w \in W_r$ і $h \in W_{\rho_F(f)}$.

З того, що $\rho_F(g), h \in W_{\rho_F(f)}$ і $gh \in U_f$, випливає $g \in O'_f \subset O_f$. Тоді,

$$\rho_S(t) = \bar{\alpha}_g \circ \bar{\alpha}_g^{-1}(\rho_S(t))) = \alpha(g, \bar{\alpha}_g^{-1}(\rho_S(t))) \in \alpha(O'_f \times W_r) \subset W_{\rho_S(s)}.$$

З тих ж міркувань,

$$\alpha_g(w) = \alpha(g,w) \in \alpha(O'_f \times W_r) \subset W_{\rho_S(s)}.$$

Також зауважимо, що з рівностей

$$(t \cdot \alpha_g(w), gh) = (t,g) \cdot (w,h) \in U_{(s,t)} = U_s \times U_f$$

випливає, що $gh \in U_f$ і $t \cdot \alpha_g(w) \in U_s$. З вибору околів U_s і $W_{\rho_S(s)} \supset \{\rho_S(t), \alpha_g(w)\}$ отримуємо, що $t \in O_s$. Звідси, $(t,g) \in O_s \times O_f = O_{(s,f)}$. $\square$

З вищесказаного випливає, що для топологічних унонапівгруп $\mathbf{F} = (F, \lambda_F, \rho_F)$, $\mathbf{S} = (S, \lambda_S, \rho_S)$ і λ_F-зберігаючої, ρ_S-оборотної неперервної дії $\alpha : F \times S \to S$ напівгрупи F на S, трійка $\mathbf{S} \times_\alpha \mathbf{F} = (S \times_\alpha F, \lambda, \rho)$ є топологічною унонапівгрупою. Цю топологічну унонапівгрупу називатимемо *напівпрямим добутком* топологічних унонапівгруп $\mathbf{F}$ і $\mathbf{S}$. За теоремами 3.38, 3.40, топологічна унонапівгрупа $\mathbf{S} \times_\alpha F$ є дітопологічною тоді і лише тоді, коли дітопологічними є й топологічні унонапівгрупи $\mathbf{S}$ і $\mathbf{F}$.

3.5.5 Розширення Гартмана-Мицельського

Для топологічного простору X і кожного $n \in \mathbb{N}$, через $HM_n(X)$ позначимо множину всіх функцій $f : [0,1) \to X$, для яких існує така послідовність $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, що f стала на кожному інтервалі $[a_i, a_{i+1}), 0 \le i < n$. Об'єднання $HM(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} HM_n(X)$ називатимемо *розширенням Гартмана-Мицельського* простору X, див.[20], [11].

Передбазовим околом топології на $HM(X)$ у точці $f \in HM(X)$ є множина $N(a, b, V, \varepsilon)$, де

- $0 \leq a < b \leq 1$, f стала на $[a, b)$, V – окіл точки $f(a)$ в X і $\varepsilon > 0$,
- $g \in N(a, b, V, \varepsilon)$ означає, що $|\{t \in [a, b) : g(t) \notin V\}| < \varepsilon$, де через $|\cdot|$ позначено міру Лебега.

Якщо X – топологічна напівгрупа, то й $HM(X)$ – топологічна напівгрупа відносно операції поточкового множення функцій. Окрім того, для будь-якої неперервної операції лівої (правої) одиниці $u_X : X \to X$ на X, унарна операція $u_{HM(X)} : HM(X) \to HM(X)$, $u_{HM(X)} : f \mapsto u \circ f$, є неперервною операцією лівої (правої) одиниці на $HM(X)$, див.[11, Proposition 2].

Теорема 3.41. *Якщо* $\mathbf{X} = (X, \lambda_X)$ *– дітопологічна права унонапівгрупа, то її розширення Гартмана-Мицельського*

$$HM(\mathbf{X}) = (HM(X), \lambda_{HM(X)})$$

є дітопологічною лівою унонапівгрупою.

Доведення. Надалі, для зручності, писатимемо λ замість $\lambda_{HM(X)}$. Нехай X – дітопологічна ліва унонапівгрупа. Щоб довести, що ліва топологічна унонапівгрупа $HM(X)$ є дітопологічною, зафіксуємо довільний елемент $f \in HM(X)$ і його передбазовий окіл $O_f = N(a, b, O_{f(a)}, \varepsilon)$ такий, що f стала на півінтервалі $[a, b) \subset [0, 1)$, а $O_{f(a)}$ – відкритий окіл точки $f(a)$ в X. Оскільки X – дітопологічна ліва унонапівгрупа, то існують околи $U_x \subset S$ і $W_{\lambda_X(x)} \subset \lambda_X(X)$ точок $x = f(a)$ і $\lambda_X(x) = \lambda_X(f(a))$ такі, що $(W_{\lambda_X(x)} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda_X^{-1}(W_{\lambda_X(x)}) \subset O_x$.

Розглянемо відкриті околи

$$U_f = N(a, b, U_x, \frac{\varepsilon}{3}) \subset HM(X)$$

точки f і

$$W_{\lambda(f)} = \lambda(HM(X)) \cap N(a, b, W_{\lambda_X(x)}, \frac{\varepsilon}{3}) \subset \lambda(HM(X))$$

точки $\lambda(f)$. Стверджуємо, що кожна функція $g \in (W_{\lambda(f)} \leftthreetimes U_f) \cap \lambda^{-1}(W_{\lambda(f)}) \subset HM(X)$ лежить в околі O_f. З включення $\lambda(g) \in W_{\lambda(f)} = N(a, b, W_{\lambda_X(x)}, \frac{\varepsilon}{3})$ випливає, що міра Лебега множини $A = \{t \in [a, b) : \lambda_X(f(t)) \notin W_{\lambda_X(x)}\}$ є меншою, ніж $\frac{\varepsilon}{3}$. З іншого боку, з включення $wg \in U_f = N(a, b, U_x, \frac{\varepsilon}{3})$ отримуємо, що множина $B = \{t \in [a, b) : w(t) \cdot g(t) \notin U_x\}$ має міру Лебега $< \frac{\varepsilon}{3}$. Нарешті, з включення $w \in W_{\lambda(f)}$ випливає, що множина $C = \{t \in [a, b) : w(t) \notin W_{\lambda_X(x)}\}$ має міру Лебега, меншу за $\frac{\varepsilon}{3}$. Тоді, міра Лебега об'єднання $A \cup B \cup C$ є меншою за ε і для кожного $t \in [a, b) \setminus (A \cup B \cup C)$, маємо $\lambda_X(g(t)) \in W_{\lambda_X(x)}$, $w(t) \in W_{\lambda_X(x)}$ і $w(t)g(t) \in U_x$. З вибору околів U_x і $W_{\lambda_X(x)}$ випливає $g(t) \in O_x = O_{f(a)}$, а отже, $g \in N(a, b, O_{f(a)}, \varepsilon) = O_f$. $\square$

Аналогічно доводиться:

Теорема 3.42. *Якщо* $\mathbf{X} = (X, \rho_X)$ *– дітопологічна права унонапівгрупа, то її розширення Гартмана-Мицельського*

$$HM(\mathbf{X}) = (HM(X), \rho_{HM(X)})$$

є дітопологічною правою унонапівгрупою.

З теорем 3.41 і 3.42 випливає:

Теорема 3.43. *Якщо* $\mathbf{X} = (X, \lambda_X, \rho_X)$ *– дітопологічна унонапівгрупа, то її розширення Гартмана-Мицельського*

$$HM(\mathbf{X}) = (HM(X), \lambda_{HM(X)}, \rho_{HM(X)})$$

є дітопологічною унонапівгрупою.

Оскільки простір Гартмана-Мицельського $HM(X)$ стягуваний [20], то з теорем 3.41–3.43, отримуємо:

Наслідок 3.44. *Кожна топологічна (ліва, права) унонапівгрупа топологічно ізоморфна (лівій, правій) підунонапівгрупі стягуваної топологічної (лівої, правої) унонапівгрупи.*

3.6 Висновки до розділу 3

У цьому розділі дисертації:

1. Введено поняття топологічної унонапівгрупи і дітопологічної напівгрупи.

2. Доведено, що клас дітопологічних напівгруп містить всі топологічні напівгратки, топологічні групи, компактні і уніформізовні напівгрупи.

3. Доведено, що клас дітопологічних напівгруп є замкненим відносно операцій взяття піднапівгрупи, тихоновського, напівпрямого і зведеного добутків.

4. Побудовано приклад комутативної топологічної інверсної напівгрупи, яка не є дітопологічною.

РОЗДІЛ 4

Слабко дітопологічні напівгрупи та їх властивості

У цьому розділі вивчаються слабко дітопологічні інверсні напівгрупи – підклас топологічних інверсних напівгруп з дещо слабшою властивістю дітопологічності, який містить в собі клас дітопологічних інверсних напівгруп.

4.1 Слабко дітопологічні інверсні напівгрупи

Означення 4.1. Топологічну інверсну напівгрупу S називатимемо *слабко дітопологічною*, якщо для неї виконується одна з наступних еквівалентних умов*:*

- для довільної точки $x \in S$ і її околу $O_x \subset S$, існують окіл $U_x \subset S$ точки x і околи $W_{xx^{-1}}, W_{x^{-1}x} \subset E_S$ ідемпотентів $xx^{-1}, x^{-1}x$, для яких виконується
$$(W_{xx^{-1}} \rightthreetimes U_x) \cap \lambda_S^{-1}(W_{xx^{-1}}) \cap \rho_S^{-1}(W_{x^{-1}x}) \subset O_x;$$
- для довільної точки $x \in S$ і її околу $O_x \subset S$, існують окіл $U_x \subset S$ точки x і околи $W_{xx^{-1}}, W_{x^{-1}x} \subset E_S$ ідемпотентів $xx^{-1}, x^{-1}x$, для яких виконується
$$(U_x \leftthreetimes W_{x^{-1}x}) \cap \lambda_S^{-1}(W_{xx^{-1}}) \cap \rho_S^{-1}(W_{x^{-1}x}) \subset O_x.$$

Еквівалентність умов випливає з неперервності інверсії на топологічній інверсній напівгрупі.

З означення очевидно, що кожна дітопологічна інверсна напівгрупа S є слабко дітопологічною. У прикладі 4.11 ми побудуємо слабко дітопологічну інверсну напівгрупу, яка не є дітопологічною.

Для випадку кліфордової топологічної інверсної напівгрупи S виконується $\lambda_S = \rho_S$ і $A \rightthreetimes B = B \leftthreetimes A$, для довільних підмножин $A \subset E(S)$ і $B \subset S$, звідки отримуємо наступний критерій.

Твердження 4.2. *Топологічна кліфордова інверсна напівгрупа S є слабко дітопологічною тоді і лише тоді, коли S є дітопологічною.*

З означення 4.1 і того факту, що кожна дітопологічна інверсна напівгрупа є слабко дітопологічною, випливають наступні властивості слабко дітопологічних інверсних напівгруп.

Твердження 4.3. *Кожна топологічна напівгрупа ідемпотентів є слабко дітопологічною напівгрупою.*

Твердження 4.4. *Кожна компактна гаусдорфова інверсна напівгрупа є слабко дітопологічною.*

Твердження 4.5. *Кожна дискретна топологічна інверсна напівгрупа є слабко дітопологічною.*

Твердження 4.6. *Кожна топологічна група є слабко дітопологічною інверсною напівгрупою.*

З означення 4.1 випливають наступні твердження.

Твердження 4.7. *Інверсна піднапівгрупа слабко дітопологічної інверсної напівгрупи є слабко дітопологічною напівгрупою.*

Твердження 4.8. *Тихоновський добуток слабко дітопологічних інверсних напівгруп є слабко дітопологічною інверсною напівгрупою.*

Твердження 4.9. *Зведений добуток $X \times_I Y$ слабко дітопологічних інверсних напівгруп X і Y є слабко дітопологічною інверсною напівгрупою.*

Доведення. Припустимо, що топологічні інверсні напівгрупи X, Y слабко дітопологічні. Щоб довести, що топологічна напівгрупа $X \times_I Y$ є слабко дітопологічною, зафіксуємо точку $z \in X \times_I Y$ і її окіл $O_z \subset X \times_I Y$. Можливі два випадки.

Спершу припустимо, що $z = (x, y) \in (X \setminus I) \times Y$. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що окіл $O_z = O_x \times O_y$, для деяких околів $O_x \subset X \setminus I, O_y \subset Y$ точок $x \in X \setminus I$ і $y \in Y$, відповідно. Оскільки X і Y слабко дітопологічні інверсні напівгрупи, то існують відкриті околи $U_x \subset X$, $W_{xx^{-1}} \subset E(X)$, $W_{x^{-1}x} \subset E(X)$ точок x, xx^{-1}, $x^{-1}x$ і околи $U_y \subset Y$, $W_{yy^{-1}} \subset E(Y)$, $W_{y^{-1}y} \subset E(Y)$ точок y, yy^{-1} і $y^{-1}y$, для яких

$$(W_{xx^{-1}} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{xx^{-1}}) \cap \rho^{-1}(W_{x^{-1}x}) \subset O_x,$$

$$(W_{yy^{-1}} \leftthreetimes U_y) \cap \lambda^{-1}(W_{yy^{-1}}) \cap \rho^{-1}(W_{y^{-1}y}) \subset O_y.$$

З того, що $\lambda(x)x = x \notin I$ і $x\rho(x) = x \notin I$, випливає $\lambda(x) \notin I$ і $\rho(x) \notin I$. Отже, можемо припустити, що околи U_x, $W_{xx^{-1}}$ і $W_{x^{-1}x}$ містяться в доповненні $X \setminus I$.

Стверджуємо, що відкриті множини $U_z = U_x \times U_y$, $W_{zz^{-1}} = W_{xx^{-1}} \times W_{yy^{-1}}$, $W_{z^{-1}z} = W_{x^{-1}x} \times W_{y^{-1}y}$ забезпечують слабку дітопологічність інверсної напівгрупи $X \times_I Y$ у точці z. Для довільної заданої точки $u \in X \times_I Y$ такої, що $u \in (W_{zz^{-1}} \leftthreetimes U_z) \cap \lambda^{-1}(W_{zz^{-1}}) \cap \rho^{-1}(W_{z^{-1}z})$, потрібно показати, що $u \in O_z$. З вибору околів випливає, що $\lambda(z) = zz^{-1} \in W_{zz^{-1}}$, $\rho(z) = z^{-1}z \in W_{z^{-1}z}$ і $wz \in U_z$, для деякого $w \in W_{zz^{-1}}$, звідки отримуємо, що $u, w \notin I$ і, отже, $w = (x_w, y_w)$, $u = (x_u, y_u)$, для деяких точок $x_w, x_u \in X \setminus I$, $y_w, y_u \in Y$. Оскільки $wu = (x_w x_u, y_w y_u) \in U_z = U_x \times U_y$ і $uu^{-1} = (x_u x_u^{-1}, y_u y_u^{-1}) \in W_{zz^{-1}} = W_{xx^{-1}x} \times W_{yy^{-1}}$, $u^{-1}u = (x_u^{-1}x_u, y_u^{-1}y_u) \in W_{z^{-1}z} = W_{x^{-1}x} \times W_{y^{-1}y}$, то $x_w x_u \in U_x$, $y_w y_u \in U_y$, $x_u x_u^{-1} \in W_{xx^{-1}}$, $x_u^{-1}x_u \in W_{x^{-1}x}$ і $y_u y_u^{-1} \in W_{yy^{-1}}$, $y_u^{-1}y_u \in W_{y^{-1}y}$. Звідси,

$$x_u \in (W_{xx^{-1}} \leftthreetimes U_x) \cap \lambda^{-1}(W_{xx^{-1}}) \cap \rho^{-1}(W_{x^{-1}x}) \subset O_x,$$

$$y_u \in (W_{yy^{-1}} \leftthreetimes U_y) \cap \lambda^{-1}(W_{yy^{-1}}) \cap \rho^{-1}(W_{y^{-1}y}) \subset O_y,$$

а отже, $u \in O_x \times O_y = O_z$.

У випадку, коли $z \in I$, за O_z можна взяти окіл вигляду $O_z = \pi^{-1}(O'_z)$, де O'_z – відкритий окіл точки $z \in I$ в напівгрупі X. З слабкої дінеперервності напівгрупи X у точці z, існують околи $U'_z \subset X$, $W'_{zz^{-1}} \subset \lambda(X)$ і $W'_{z^{-1}z} \subset \rho(X)$ точок z, zz^{-1} і $z^{-1}z$, для яких $(W_{zz^{-1}} \leftthreetimes U_z) \cap \lambda^{-1}(W_{zz^{-1}}) \cap \rho^{-1}(W_{z^{-1}z}) \subset O'_z$. Тоді, для околів $U_z = \pi^{-1}(U'_z) \subset X \times_I Y$, $W_{zz^{-1}} = \pi^{-1}(W'_{zz^{-1}}) \subset E(X \times_I Y)$ і $W_{z^{-1}z} = \pi^{-1}(W'_{z^{-1}z}) \subset E(X \times_I Y)$, маємо

$$(W_{zz^{-1}} \leftthreetimes U_z) \cap \lambda^{-1}(W_{zz^{-1}}) \cap \rho^{-1}(W_{z^{-1}z}) \subset$$

$$\pi^{-1}((W'_{zz^{-1}} \leftthreetimes U'_z) \cap \lambda^{-1}(W'_{zz^{-1}}) \cap \rho^{-1}(W'_{z^{-1}z})) \subset$$

$$\subset \pi^{-1}(O'_z) = O_z,$$

що й доводить слабку дінеперервність напівгрупи $X \times_I Y$ у точці z. $\square$

Перш, ніж доводити наступне твердження, зауважимо, що для топологічних інверсних напівгруп S, F і неперервної дії $\alpha : S \times F \to S$, напівпрямий добуток $S \times_\alpha F$ є топологічною інверсною напівгрупою з інверсією, визначеною як $(s, f)^{-1} = (\alpha_{f^{-1}}(s^{-1}), f^{-1})$, для довільного елемента $(s, f) \in S \times_\alpha F$.

З того, що

$$(s, f)(s, f)^{-1} = (s, f)(\alpha_{f^{-1}}(s^{-1}), f^{-1}) =$$

$$= (s \cdot \alpha_{ff^{-1}}(s^{-1}), ff^{-1}) = (ss^{-1}, ff^{-1}),$$

робимо висновок, що α зберігає операцію лівої одиниці на F.

З того, що

$$(s, f)^{-1}(s, f) = (\alpha_{f^{-1}}(s^{-1}), f^{-1})(s, f) = (\alpha_{f^{-1}}(s^{-1}s), f^{-1}f) =$$

$$= (s^{-1}s, f^{-1}f),$$

робимо висновок, що α зберігає операцію правої одиниці на S.

Твердження 4.10. *Нехай S, F – топологічні інверсні напівгрупи, а $\alpha : S \times F \to S$ – неперервна дія F на S. Тоді $S \times_\alpha F$ є слабко дітопологічною тоді і лише тоді, коли S і F слабко дітопологічні.*

Доведення. Припустимо спершу, що топологічні інверсні напівгрупи S і F слабко дітопологічні і для довільної точки $(s, f) \in S \times_\alpha F$ зафіксуємо окіл $O_{(s,f)} \subset S \times_\alpha F$. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $O_{(s,f)} = O_s \times O_f$, де $O_s \subset S$, $O_f \subset F$ – деякі околи точок s і f відповідно.

З того, що S – слабко дітопологічна напівгрупа, для околу O_s існують околи U_s, $W_{ss^{-1}}$, $V_{s^{-1}s}$ точок s, ss^{-1}, $s^{-1}s$, відповідно, для яких виконується включення

$$(W_{ss^{-1}} \leftthreetimes U_s) \cap \lambda^{-1}(W_{ss^{-1}}) \cap \rho^{-1}(V_{s^{-1}s}) \subset O_s.$$

Аналогічно, з слабкої дітопологічності напівгрупи F випливає існування околів U_f, $W_{ff^{-1}}$, $V_{f^{-1}f}$ точок f, ff^{-1}, $f^{-1}f$, відповідно, для яких виконується включення

$$(W_{ff^{-1}} \leftthreetimes U_f) \cap \lambda^{-1}(W_{ff^{-1}}) \cap \rho^{-1}(V_{f^{-1}f}) \subset O_f.$$

Стверджуємо, що околи $U_{(s,f)} = U_s \times U_f$, $W_{(s,f)} = W_{ss^{-1}} \times W_{ff^{-1}}$, $V_{(s,f)} = V_{s^{-1}s} \times V_{f^{-1}f}$ забезпечують слабку дітопологічність напівгрупи $S \times_\alpha F$ у точці (s, f). Нехай $(t, g) \in (W_{(s,f)} \leftthreetimes U_{(s,f)}) \cap \lambda^{-1}(W_{(s,f)}) \cap \rho^{-1}(V_{(s,f)})$. Тоді, з вибору околів маємо $\lambda((t, g)) = (tt^{-1}, gg^{-1}) \in W_{(s,f)}$, $\rho((t, g)) \in V_{(s,f)}$ і $(w, h)(t, g) \in U_{(s,f)}$, для деякого елемента $(w, h) \in W_{(s,f)}$. З того, що $(w, h) \in W_{(s,f)} \subset E(S) \times E(F)$, маємо $(w, h)(t, g) = (w \cdot \alpha_h(t), hg) = (wt, hg) \in U_{(s,f)} = U_s \times U_f$, тобто $wt \in O_s$, $hg \in O_f$, а отже, $(t, g) \in O_{(s,f)}$.

Тепер припустимо, що напівпрямий добуток $S \times_\alpha F$ є слабко дітопологічною напівгрупою. Щоб довести слабку дітопологічність напівгрупи S, зафіксуємо довільну точку $s \in S$ і її окіл $O_s \subset S$. Розглянемо відкритий окіл $O = O_s \times F \subset S \times_\alpha F$. Тоді, для довільного елемента $f \in F$, точка (s, f) міститься в O. З слабкої дітопологічності напівгрупи $S \times_\alpha F$ випливає існування околів $U_{(s,f)}$, $W_{(s,f)}$, $V_{(s,f)}$ точок (s, f),

$\lambda((s,f)) = (ss^{-1}, ff^{-1})$ і $\rho((s,f)) = (s^{-1}s, f^{-1}f)$, відповідно, для яких виконується включення

$$(W_{(s,f)} \leftthreetimes U_{(s,f)}) \cap \lambda^{-1}(W_{(s,f)}) \cap \rho^{-1}(V_{(s,f)}) \subset O.$$

Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що ці околи мають вигляд добутків $U_{(s,f)} = U_s \times U_f$, $W_{(s,f)} = W_{ss^{-1}} \times W_{ff^{-1}}$, $V_{(s,f)} = V_{ss^{-1}} \times V_{ff^{-1}}$ відповідних околів точок s, ss^{-1}, $s^{-1}s$ і f, ff^{-1}, $f^{-1}f$ в напівгрупах S і F.

Стверджуємо, що околи U_s, $W_{ss^{-1}}$, $V_{s^{-1}s}$ забезпечують виконання умови слабкої дітопологічності на напівгрупі S. Нехай $t \in (W_{ss^{-1}} \leftthreetimes U_s) \cap \lambda^{-1}(W_{ss^{-1}}) \cap \rho^{-1}(V_{s^{-1}s})$. Тоді існує $w \in W_{ss^{-1}}$ такий, що $wt \in U_s$. Розглянемо точку $(t,f) \in S \times_\alpha F$ і зауважимо, що

$$(w, ff^{-1})(t,f) = (w \cdot \alpha_{ff^{-1}}(t), ff^{-1}f) = (wt, f) \in U_s \times U_f = U_s.$$

Беручи до уваги включення $tt^{-1} \in W_{ss^{-1}}$ і $t^{-1}t \in V_{s^{-1}s}$, маємо $\lambda((t,f)) = (tt^{-1}, ff^{-1}) \in W_{ss^{-1}} \times W_{ff^{-1}} = W_{(s,f)}$, $\rho((t,f)) = (t^{-1}t, f^{-1}f) \in V_{s^{-1}s} \times V_{f^{-1}f} = V_{(s,f)}$, звідки отримуємо $(t,f) \in O_{(s,f)} = O_s \times O_f$, а отже, $t \in O_s$, що й доводить слабку дітопологічність напівгрупи S.

Аналогічними міркуваннями можна показати, що з слабкої дітопологічності напівпрямого добутку $S \times_\alpha F$ випливає слабка дітопологічність напівгрупи F. □

4.2 Приклад слабко дітопологічної не дітопологічної інверсної напівгрупи

Приклад 4.11. *Існує метризовна топологічна напівгрупа S, яка є слабко дітопологічною, але не є дітопологічною.*

Доведення. Напівгрупа S є інверсною піднапівгрупою інверсної напівгрупи $HI_k(\mathbb{R})$ гомеоморфізмів $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{ran}(f)$ між компактними

підмножинами $\mathrm{dom}(f)$ і $\mathrm{ran}(f)$ дійсної прямої. Для елементів $f, g \in HI_k(\mathbb{R})$, композиція $f \circ g$ є гомеоморфізмом з $\mathrm{dom}(f \circ g) = g^{-1}(\mathrm{dom}(f))$ в $\mathrm{ran}(f \circ g) = f(\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{ran}(g))$, визначеним як $f \circ g(x) = f(g(x))$, для $x \in \mathrm{dom}(f \circ g)$. Кожний гомеоморфізм $f \in HI_k(\mathbb{R})$ будемо ототожнювати з його графіком $\{(x, f(x)) : x \in \mathrm{dom}(f)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а напівгрупу $HI_k(\mathbb{R})$ наділимо топологією Вієторіса, яка породжується передбазою множин $\{f \in HI_k(\mathbb{R}) : f \subset U\}$ і $\{f \in HI_k(\mathbb{R}) : f \cap U \neq \emptyset\}$, де U пробігає всі відкриті підмножини площини $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Відомо (див. [17, 4.5.23]), що топологія Вієторіса на $HI_k(\mathbb{R})$ метризовна.

Нехай $C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i} : (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \right\} \subset [0,1]$ – стандартна канторова множина. Для кожного $n \in \omega$ розглянемо відкрито-замкнену підмножину $C_n = \{x \in C : x < 1 - \frac{1}{3^n}\}$ множини Кантора C і нехай $f_n : C \to \mathbb{R}$ – відображення, визначене формулою

$$f_n(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{якщо } x \in C_n, \\ x + n + 2, & \text{якщо } x \in C \setminus C_n. \end{cases}$$

Нехай S – інверсна піднапівгрупа напівгрупи $HI_k(\mathbb{R})$, породжена множиною $\{f_n : n \in \omega\}$. Зауважимо, що для будь-яких $n, m \in \omega$, композиція відображень $f_n \circ f_m$ є порожнім гомеоморфізмом (бо $\mathrm{ran}(f_n) \cap \mathrm{dom}(f_m) = \emptyset$). Також зауважимо, що $f_n^{-1} f_n$ – одиничний гомеоморфізм e_ω на C. Якщо $n \neq m$, то $f_n^{-1} f_m$ співпадає з тотожним гомеоморфізмом $e_k : C_k \to C_k$ множини C_k, де $k = \min\{n, m\}$. Звідси отримуємо, що

$$S = \left\{ e_k, f_n e_k, e_k f_m^{-1}, f_n e_k f_m^{-1} : n, m \in \omega,\ k \in \omega \cup \{\omega\} \right\}.$$

Далі, зауважимо, що для $n \geq k$ виконується $f_n e_k = f_0 e_k$ і $e_k f_n^{-1} = e_k f_0^{-1}$. А тому,

$$S = \left\{ e_k, f_n e_k, e_k f_m^{-1}, f_n e_k f_m^{-1} : n, m \leq k \leq \omega \right\}.$$

Легко бачити, що послідовність ідемпотентів $(e_k)_{k\in\omega}$ збігається до ідемпотента e_ω в просторі S. Окрім того, для кожних $n, m \in \omega$, послідовності $(f_n e_k)_{k\in\omega}$, $(e_k f_m^{-1})_{k\in\omega}$, $(f_n e_k f_m^{-1})_{k\in\omega}$ збігаються до f_n, f_m^{-1}, $f_n f_m^{-1}$, відповідно. Беручи до уваги всі ці факти, можна показати, що S – топологічна інверсна напівгрупа.

Напівгрупа S не є дітопологічною, оскільки послідовність $(f_n)_{n\in\omega}$ не збігається до f_0, але при цьому $f_n^{-1} f_n = e_\omega = \lim_{n\to\infty} e_n$ і $f_n e_n = f_0 e_n \to f_0$, при $n \to \infty$.

Щоб довести, що S слабко дітопологічна, достатньо показати, що послідовність $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset S$ містить підпослідовність, збіжну до точки $x \in S$, якщо $\lim_{n\to\infty} x_n x_n^{-1} = xx^{-1}$, $\lim_{n\to\infty} x_n^{-1} x_n = x^{-1}x$ і $\lim_{n\to\infty} z_n x_n = x$, для деякої послідовності ідемпотентів $(z_n)_{n\in\omega}$, збіжної до xx^{-1}. Замінивши $(x_n)_{n\in\omega}$ відповідною підпослідовністю, можна припускати, що вона міститься в одній з множин $\{e_k : k \in \omega\}$, $\{f_n e_k : n \le k\}$, $\{e_k f_m^{-1} : m \le k\}$, $\{f_n e_k f_m^{-1} : n, m \le k\}$. Якщо ідемпотент xx^{-1} є ізольованою точкою в S, тоді $z_n = xx^{-1} = x_n x_n^{-1}$, для всіх достатньо великих n, а тому, $x_n = x_n x_n^{-1} x_n = z_n x_n \to x$, при $n \to \infty$. Таким чином, вважаємо, що ідемпотент xx^{-1} не є ізольованою точкою. А отже, $xx^{-1} = e_\omega$ або $xx^{-1} = f_m f_m^{-1}$, для деякого $m \in \omega$.

Якщо $xx^{-1} = e_\omega$, тоді $x = e_\omega$ або $x = f_m^{-1}$, для деякого $m \in \omega$. Якщо $x = e_\omega$, тоді з $\lim_{n\to\infty} x_n x_n^{-1} = xx^{-1} = e_\omega$ і $\lim_{n\to\infty} x_n^{-1} x_n = x^{-1}x = e_\omega$ випливає, що $x_n \in \{e_k : k \in \omega\}$, для всіх достатньо великих $n \in \omega$. Тоді $x_n = x_n x_n^{-1} \to xx^{-1} = x$, при $n \to \infty$.

Якщо $x = f_m^{-1}$, для деякого $m \in \omega$, то з $\lim_{n\to\infty} x_n x_n^{-1} = xx^{-1} = f_m^{-1} f_m = e_\omega$ і $\lim_{n\to\infty} x_n^{-1} x_n = x^{-1}x = f_m f_m^{-1}$ випливає, що $x_n \in \{e_k f_m^{-1} : k \in \omega\}$, для всіх достатньо великих $n \in \omega$. Тоді $x_n = e_{k_n} f_m^{-1} \to f_m^{-1} = x$, при $n \to \infty$.

Припустимо нарешті, що $xx^{-1} = f_m f_m^{-1}$, для деякого $m \in \omega$. Тоді $x =$

f_m або $x = f_m f_l^{-1}$, для деякого $l \in \omega$. Якщо $x = f_m$, то з $\lim_{n\to\infty} x_n x_n^{-1} = xx^{-1} = f_m f_m^{-1}$ і $\lim_{n\to\infty} x_n^{-1} x_n = x^{-1}x = f_m^{-1} f_m$ випливає, що $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset \{f_m e_k : k \leq \omega\}$, для всіх достатньо великих n. Тоді $x_n = f_m e_{k_n} \to f_m = x$, при $n \to \infty$.

Отже, $x = f_m f_l^{-1}$, для деякого $l \in \omega$. У цьому випадку, зі збіжності послідовностей $\lim_{n\to\infty} x_n x_n^{-1} = xx^{-1} = f_m f_m^{-1}$ і $\lim_{n\to\infty} x_n^{-1} x_n = x^{-1}x = f_l f_l^{-1}$ маємо, що $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset \{f_m e_k f_l^{-1} : k \leq \omega\}$, для всіх достатньо великих n. Тоді $x_n = f_m e_{k_n} f_l^{-1} \to f_m f_l^{-1} = x$, при $n \to \infty$. $\square$

4.3 Висновки до розділу 4

У цьому розділі дисертації:

1. Означено клас слабко дітопологічних інверсних напівгруп, який містить всі топологічні напівгратки, топологічні групи, компактні і уніформізовні топологічні інверсні напівгрупи і є замкненим відносно операцій взяття інверсної піднапівгрупи і тихоновського добутку.

2. Доведено, що клас слабко дітопологічних напівгруп є замкненим відносно операцій напівпрямого і зведеного добутків.

3. Побудовано приклад слабко дітопологічної інверсної напівгрупи, яка не є дітопологічною.

РОЗДІЛ 5

Теореми вкладення

У цьому розділі ми вивчаємо топологічні кліфордові напівгрупи, які вкладаються в тихоновські добутоки топологічних напівграток і конусів над групами.

Мотивацією досліджень, описаних у даному розділі, була задача розпізнавання кліфордових топологічних інверсних напівгруп, які можна вкласти в компактні кліфордові топологічні інверсні напівгрупи. Ми розв'язуємо цю задачу для кліфордових топологічних інверсних U-напівгруп (тобто тих кліфордових топологічних інверсних напівгруп, максимальна напівгратка E яких є U-напівграткою). У Теоремі 5.10 доводиться, що кліфордова топологічна інверсна U-напівгрупа S вкладається в компактну кліфордову топологічну інверсну напівгрупу тоді і лише тоді, коли S є дітопологічною напівгрупою, максимальна напівгратка E якої вкладається в компактну топологічну напівгратку, а кожна максимальна підгрупа H_e, $e \in E$, в S вкладається в компактну топологічну групу. Основним результатом цього розділу є теорема 5.5 вкладення дітопологічної кліфордової топологічної інверсної U-напівгрупи S у тихоновський добуток топологічної напівгратки і конусів над максимальними підгрупами H_e, $e \in E$, в S.

5.1 Прекомпактні кліфордові топологічні інверсні напівгрупи

Нагадаємо, що для кліфордової топологічної інверсної напівгрупи S, відображення $\pi : S \to E$, $\pi : x \mapsto xx^{-1} = x^{-1}x$, є напівгруповим гомоморфізмом, а прообраз $\pi^{-1}(e)$ кожного ідемпотента $e \in E$ співпадає з максимальною підгрупою $H_e = \{x \in S : xx^{-1} = e = x^{-1}x\}$ в S, що містить ідемпотент e.

Твердження 5.1. *Компактна топологічна напівгрупа S є кліфордо-*

вою інверсною тоді і лише тоді, коли S містить щільну кліфордову інверсну піднапівгрупу.

Доведення. Нехай $X \subset S$ – щільна кліфордова інверсна піднапівгрупа в S і нехай $E(S) = \{e \in S : ee = e\}$ – множина ідемпотентів в S, а $E(X) = X \cap E(S)$. З комутативності напівгрупи $E(X)$ і неперервності напівгрупової операції $* : S \times S \to S$, замикання $\overline{E(X)}$ множини $E(X)$ в S є напівграткою.

З того, що X кліфордова інверсnf напівгрупа, випливає, що для кожного $x \in X$ існує єдиний елемент $x^{-1} \in X$, для якого $xx^{-1}x = x$, $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ і $xx^{-1} = x^{-1}x$. Розглянемо множину $D_X = \{(x, x^{-1}) : x \in X\}$ і її замикання $\bar{D}_X$ в $S \times S$, для якого маємо $\bar{D}_X \subset \{(x, y) \in S \times S : xyx = x, \quad yxy = y, \quad xy = yx\}$. З неперервності напівгрупової операції $* : S \times S \to S$ і включення $*(D_X) \subset E(X)$, отримуємо $*(\bar{D}_X) \subset \overline{E(X)}$.

Позначимо через $\mathrm{pr}_1 : S \times S \to S$, $\mathrm{pr}_1 : (x, y) \mapsto x$, проекцію на першу координату. Оскільки проекція $\mathrm{pr}_1(\bar{D}_X) \supset X$ є щільною замкненою підмножиною в S, то вона співпадає з S. А отже, для кожної точки $x \in S$ існує така точка $x^\star \in S$, що $(x, x^\star) \in \bar{D}_X$, а тому, $xx^\star x = x$, $x^\star xx^\star = x^\star$ і $xx^\star = x^\star x$. Тобто, напівгрупа S – регулярна.

Стверджуємо, що $E(S) = \overline{E(X)}$. Для заданого ідемпотента $e \in E(S)$, візьмемо такий елемент $e^\star \in S$, що $(e, e^\star) \in \bar{D}_X$. Беручи до уваги, що $ee^\star e = e$, $e^\star ee^\star = e^\star$ і $ee^\star = e^\star e$, отримуємо $e = ee = (ee^\star e)(ee^\star e) = (eee^\star)(eee^\star) = (ee^\star)(ee^\star) = ee^\star \in *(\bar{D}_X) \subset \overline{E(X)}$. Отже, $E(S) = \overline{E(X)}$ – комутативна напівгрупа. Оскільки S регулярна напівгрупа, ідемпотенти якої комутують, то вона інверсна. Щоб довести, що S кліфордова, достатньо показати, що множина $E(S) = \overline{E(X)}$ міститься в центрі $Z(S) = \{z \in S : \forall x \in S \quad xz = zx\}$ напівгрупи S. Зауважимо, що для кожного $x \in X$, множина $Z_x = \{z \in S : zx = xz\}$ замкнена в S і містить

множину $E(X)$. Тоді $E(S) = \overline{E(X)} \subset Z_x$, для всіх $x \in X$. Окрім того, для кожного $e \in E(S)$ множина $Z_e = \{x \in X : xe = ex\}$ замкнена і містить щільну підмножину X в S. Таким чином, $Z_e = S$ для всіх $e \in E(S)$, а отже, $E(S)$ міститься в центрі напівгрупи S. За [36, II.2.6], інверсна напівгрупа S – кліфордова. □

Кажемо, що топологічна напівгрупа X *вкладається* в топологічну напівгрупу Y, якщо існує гомоморфізм напівгруп $h : X \to Y$, що є топологічним вкладенням. У цьому випадку писатимемо $X \hookrightarrow Y$.

Нагадаємо, що топологічна напівгрупа S називається *прекомпактною*, якщо S вкладається в компактну топологічну напівгрупу.

Твердження 5.2. *Топологічна кліфордова інверсна напівгрупа S прекомпактна тоді і лише тоді, коли S вкладається в компактну топологічну кліфордову інверсну напівгрупу K ваги $w(K) = w(S)$.*

Доведення. Достатність умови очевидна. Щоб довести необхідність, припустимо, що S прекомпактна, а отже, вкладається в компактну топологічну напівгрупу K. Не втрачаючи загальності, припускаємо, що $S \subset K$. За теоремою 2.29 [12], компактна топологічна напівгрупа K вкладається в тихоновський добуток $\prod_{\alpha \in A} K_\alpha$ метризовних топологічних напівгруп K_α, $\alpha \in A$. Стандартними міркуваннями можна показати, що існує підмножина $B \subset A$ потужності $|B| \leq w(S)$ така, що проекція $\mathrm{pr}_B : S \to \prod_{\alpha \in B} K_\alpha$ є топологічним вкладенням. Тоді, $K_B = \prod_{\alpha \in B} K_\alpha$ – компактна топологічна напівгрупа ваги $w(K_B) \leq |B| \leq w(S)$, що містить топологічну копію S. Не втрачаючи загальності, можемо припустити, що $S \subset K_B$. За твердженням 5.1, замикання $\bar{S}$ напівгрупи S в K_B є кліфордовою інверсною напівгрупою. За теоремою Koch-Wallace-Kruming [26], [27], інверсія $(\,)^{-1} : \bar{S} \to \bar{S}$ неперервна, а тому, $\bar{S}$ – компактна топологічна кліфордова інверсна напівгрупа. □

Нехай X, Y – топологічні напівгрупи. Через $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ми позначатимемо множину всіх неперервних напівгрупових гомоморфізмів з X в Y. Кажемо, що X є Y-*віддільною* (Y-*вкладуваною*, відповідно), якщо *канонічний гомоморфізм*

$$X \to Y^{\mathrm{Hom}(X,Y)}, \quad x \mapsto (h(x))_{h \in \mathrm{Hom}(X,Y)},$$

ін'єктивний (топологічне вкладення, відповідно).

Якщо топологічна напівгрупа Y прекомпактна, то такою є й кожна Y-вкладувана напівгрупа X.

Підмножину A топологічної напівгратки E називатимемо U-*щільною в* E, якщо для кожної точки $x \in E$ і її околу $O_x \subset E$ існує такий ідемпотент $e \in O_x \cap A$, що $e \ll x$. Очевидно, що топологічна напівгратка E є U-напівграткою тоді і лише тоді, коли множина E є U-щільною в E.

Топологічну напівгратку E, що містить зліченну U-щільну підмножину $A \subset E$, називають U-*сепарабельною*.

Твердження 5.3. *Кожна U-напівгратка E з другою аксіомою зліченності є U-сепарабельною.*

Доведення. Зафіксуємо зліченну базу $\mathcal{B}$ топології на просторі E. Для кожного елемента бази $B \in \mathcal{B}$ потрібно побудувати таку зліченну множину $A_B \subset B$, що для кожної точки $x \in B$ існує така точка $a \in A_B$, що $x \in \Uparrow a$.

Оскільки E є U-напівграткою, то для кожної точки $x \in B$, існує така $a_x \in B$, що $x \in \Uparrow a_x$ і базовий окіл $U_x \in \mathcal{B}$ точки x, для яких $U_x \subset \Uparrow a_x$. Сім'я $\mathcal{U}_B = \{U_x : x \in B\} \subset \mathcal{B}$ зліченна, а отже її можна занумерувати $\mathcal{U}_B = \{V_n : n \in \omega\}$. Для кожного натурального $n \in \omega$ знайдемо точку $x_n \in B$ таку, що $V_n = U_{x_n}$ і зауважимо, що $A_B = \{a_{x_n} : n \in \omega\}$ – зліченна множина з потрібною властивістю: для кожної точки $x \in B$ існує така точка $a = a_{x_n} \in A_B$, що $x \in U_x = V_n = U_{x_n} \subset \Uparrow a$.

Тоді зліченне об'єднання $A = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} A_B$ є зліченною U-щільною підмножиною в E, звідки випливає, що напівгратка E є U-сепарабельною.

$\square$

5.2 Дві теореми вкладення

Нище ми доведемо дві теореми вкладення для дітопологічних кліфордових інверсних U-напівгруп. Для компактних кліфордових топологічних інверсних напівгруп ці теореми були доведені О. Гринів [24].

Нагадаємо, що *кліфордовою топологічною інверсною U-напівгрупою* ми називаємо кліфордову топологічну інверсну напівгрупу S, максимальна напівгратка E якої є U-напівграткою. Відображення $\pi : S \to E$, $\pi : x \mapsto xx^{-1} = x^{-1}x$, є проекцією S на її максимальну напівгратку E. Прообраз $\pi^{-1}(e)$ кожного ідемпотента $e \in E$ співпадає з максимальною підгрупою H_e в S, що містить ідемпотент e.

5.2.1 Перша теорема вкладення

Нехай S – топологічна кліфордова інверсна U-напівгрупа і E – максимальна напівгратка в S. Для довільного ідемпотента $e \in E$, розглянемо ідеал $I_e = E \setminus \Uparrow e = E \setminus \mathrm{Int}(\uparrow e)$ в E і зведений добуток $E \times_{I_e} H_e$. Через $\pi_e : E \times_{I_e} H_e \to E$ позначимо природну проекцію.

Розглянемо неперервний напівгруповий гомоморфізм $h_e : S \to E \times_{I_e} H_e$, заданий формулою:

$$h_e(x) = \begin{cases} \big(\pi(x), xe\big), & \text{якщо } \pi(x) \in \Uparrow e, \\ \pi(x), & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для будь-якої підмножини $A \subset E$, гомоморфізми h_e, $e \in A$, утворюють неперервний гомоморфізм

$$h_A = (h_e)_{e\in A} : S \to \prod_{e\in A} E \times_{I_e} H_e, \quad h_A : x \mapsto (h_e(x))_{e\in A}.$$

Теорема 5.4. *Якщо S – кліфордова дітопологічна інверсна U-напівгрупа, то для кожної U-щільної підмножини $A \subset E$ гомоморфізм*

$$h_A : S \to \prod_{e \in A} E \times_{I_e} H_e$$

є топологічним вкладенням.

Доведення. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що S непорожня. У цьому випадку напівгратка E і U-щільна підмножина A в E також непорожні. Відображення h_A – неперервний гомоморфізм, як діагональний добуток неперервних гомоморфізмів $h_a, a \in A$.

Спершу, покажемо, що гомоморфізм h_A – ін'єктивний. Візьмемо дві різні точки $x, y \in S$ і розглянемо їхні проекції $\pi(x), \pi(y)$ на максимальну напівгратку E.

Якщо $\pi(x) \neq \pi(y)$, то, очевидно, що $h_a(x) \neq h_a(y)$, для всіх $a \in A$, а тому, $h_A(x) \neq h_A(y)$.

Якщо $\pi(x) = \pi(y)$, тоді відкрита множина $V = \{e \in E : xe \neq ye\} \subset E$ є околом ідемпотента $e = \pi(x) = \pi(y)$. З U-щільності множини A в E випливає існування такого елемента $a \in A \cap V$, що $e \in \Uparrow a$. Для цього елемента a маємо $h_a(x) = (e, xa) \neq (e, ya) = h_a(y)$, звідки випливає, що h_a розділяє точки $x, y \in S$. Отже, h_A ін'єктивне.

Доведемо неперервність оберненого відображення $h_A^{-1} : h_A(S) \to S$. Для заданого елемента $x \in S$ і його відкритого околу $O_x \subset S$, треба знайти такий окіл $O_{h_A(x)} \subset h_A(S)$ точки $h_A(x)$, що $h_A^{-1}(O_{h_A(x)}) \subset O_x$.

Оскільки кліфордова топологічна інверсна напівгрупа S є дітопологічною, то існують околи U_x і $W_e \subset E$ точок x і $e = \pi(x)$, для яких $(U_x \leftthreetimes W_e) \cap \pi^{-1}(W_e) \subset O_x$. З того, що $xe = x \in U_x$ і неперервності множення випливає існування такого околу $W'_e \subset W_e$ ідемпотента e, що $xW'_e \subset U_x$.

З U-щільності множини A в E випливає існування точки $a \in A \cap W'_e$ такої, що $e \in \Uparrow a$. Розглянемо окіл $W = W'_e \cap \Uparrow a$ ідемпотента e і відкриту множину $U = U_x \cap H_a$ у максимальній групі H_a. Зауважимо, що $W \times U$ – відкритий окіл точки $h_a(x)$ в $E \times_{I_a} H_a$, а отже, $O_{h_A(x)} = \mathrm{pr}_a^{-1}(W \times U)$ є відкритим околом точки $h_A(x)$ у тихоновському добутку $\prod_{a \in A} E \times_{I_a} H_a$. Тут через $\mathrm{pr}_a : \prod_{b \in A} E \times_{I_b} H_b \to E \times_{I_a} H_a$ позначено проекцію на a-ту координату.

Для доведення неперервності h_A^{-1} в точці $h_A(x)$, достатньо перевірити, що $h_A^{-1}(O_{h_A(x)}) \subset O_x$. Візьмемо довільну точку $y \in S$, для якої $h_A(y) \in O_{h_A(x)}$. З означення $O_{h_A(x)}$ маємо $h_a(y) = \mathrm{pr}_a(h_A(y)) \in W \times U$, а отже, $\pi(y) \in W \subset W'_e \subset W_e$ і $ya \in U \subset U_x$, тобто $y \in (U_x \leftthreetimes W_e) \cap \pi^{-1}(W_e) \subset O_x$. $\square$

5.2.2 Друга теорема вкладення

У цьому підрозділі ми використаємо вкладення h_A, побудоване в теоремі 5.4, для узагальнення результатів попереднього підрозділу і побудови вкладення кліфордової топологічної інверсної U-напівгрупи S в тихоновський добуток максимальної напівгратки E і конусів $\widehat{H}_e$, $e \in E$, над максимальними підгрупами в S.

Позначимо через $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{I})$ множину всіх неперервних гомоморфізмів максимальної напівгратки $E \subset S$ в min-інтервал $\mathbb{I}$. Множина $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{I})$ містить підмножину $\mathrm{Hom}(E, \mathbf{2})$ всіх гомоморфізмів з напівгратки E в двоелементну напівгратку $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. Для двох ідемпотентів $e, a \in E$, покладемо

$$\mathrm{Hom}_e^a(E, \mathbb{I}) = \big\{h \in \mathrm{Hom}(E, \mathbb{I}) : h(a) = 1 \ \text{ і } \ h(I_e) \subset \{0\}\big\} \ \text{ і}$$
$$\mathrm{Hom}_e^a(E, \mathbf{2}) = \mathrm{Hom}_e^a(E, \mathbb{I}) \cap \mathrm{Hom}(E, \mathbf{2}).$$

За лемою 2.10 в [13], для довільних ідемпотентів $e \ll a$ в E, множина $\mathrm{Hom}_e^a(E, \mathbb{I})$ непорожня. Якщо E є U_2-напівграткою, тоді множина $\mathrm{Hom}_e^a(E, \mathbf{2})$ є непорожньою.

Для довільних ідемпотентів $e \ll a$, зафіксуємо неперервний гомоморфізм $h_e^a \in \mathrm{Hom}_e^a(E, \mathbb{I})$ такий, що $h_e^a \in \mathrm{Hom}_e^a(E, \mathbf{2})$, якщо $\mathrm{Hom}_e^a(E, \mathbf{2})$ непорожня. Остання умова виконується, якщо E є U_2-напівграткою. Гомоморфізм $h_e^a : E \to \mathbb{I}$ індукує неперервний гомоморфізм $\hat{h}_e^a : S \to \widehat{H}_e$, визначений формулою:

$$\hat{h}_e^a(x) = \begin{cases} (h_e^a \circ \pi(x), xe), & \text{якщо } h_e^a \circ \pi(x) > 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Якщо $h_e^a \in \mathrm{Hom}(E, \mathbf{2})$, то $\hat{h}_e^a(S) \subset \dot{H}_e \subset \widehat{H}_e$.

Для кожної підмножини $A \subset E$, композиція гомоморфізмів $\hat{h}_e^a$, де $e \in A$, $a \in A \cap \Uparrow e$, є неперервним гомоморфізмом

$$\hat{h}_A^A : S \to \prod_{e \in A} \widehat{H}_e^{A \cap \Uparrow e}, \quad \hat{h}_A^A : x \mapsto \big((\hat{h}_e^a(x))_{a \in A \cap \Uparrow e}\big)_{e \in A}.$$

Утворивши діагональний добуток $\hat{h}_A^A$ з природною проекцією $\pi : S \to E$, отримуємо неперервний гомоморфізм

$$\pi\hat{h}_A^A : S \to E \times \prod_{e \in A} \widehat{H}_e^{A \cap \Uparrow e}, \quad \pi\hat{h}_A^A : x \mapsto \big(\pi(x), \hat{h}_A^A(x)\big).$$

Теорема 5.5. *Якщо S – дітопологічна кліфордова інверсна U-напівгрупа, то для кожної U-щільної підмножини A в E, гомоморфізм*

$$\pi\hat{h}_A^A : S \to E \times \prod_{e \in A} \widehat{H}_e^{A \cap \Uparrow e}$$

є топологічним вкладенням. Якщо E – U_2-напівгратка, то

$$\pi\hat{h}_A^A(S) \subset E \times \prod_{e \in A} \dot{H}_e^{A \cap \Uparrow e}.$$

Доведення. З означення відображення $\pi\hat{h}_A^A$ випливає його неперервність. Окрім того, $\pi\hat{h}_A^A$, очевидно, є гомоморфізмом. Щоб довести його ін'єктивність, для довільних різних точок $x, y \in S$ розглянемо проекції $\pi(x), \pi(y)$ на максимальну напівгратку E.

Якщо $\pi(x) \neq \pi(y)$, то

$$\pi\hat{h}_A^A(x) = (\pi(x), \hat{h}_A^A(x)) \neq (\pi(y), \hat{h}_A^A(y)) = \pi\hat{h}_A^A(y).$$

Якщо ж $\pi(x) = \pi(y)$, тоді відкрита множина $V = \{e \in E : xe \neq ye\} \subset E$ є околом ідемпотента $e = \pi(x) = \pi(y)$. Оскільки множина A є U-щільною в E, то існує елемент $a \in A \cap V$, для якого $e \in \Uparrow a$, і елемент $b \in A \cap V \cap \Uparrow a$, для якого $e \in \Uparrow b$. Тоді, $1 = h_a^b(b) = h_a^b(e)$, звідки легко бачити, що $\hat{h}_a^b(x) = (h_a^b(e), ax) = (1, ax) \neq (1, ay) = (h_a^b(e), ay) = \hat{h}_a^b(y)$, а тому $\pi\hat{h}_A^A(x) \neq \pi\hat{h}_A^A(y)$.

Залишається показати неперервність функції $(\pi\hat{h}_A^A)^{-1} : \pi\hat{h}_A^A(S) \to S$. Для кожного елемента $x \in S$ і його відкритого околу $O_x \subset S$, треба знайти такий окіл $O_y \subset E \times \prod_{e \in A} \widehat{H}_e^{A \cap \Uparrow e}$ точки $y = \pi\hat{h}_A^A(x)$, що $(\pi\hat{h}_A^A)^{-1}(O_y) \subset O_x$.

Оскільки топологічна кліфордова інверсна напівгрупа S є дітопологічною, існують околи $U_x \subset S$ і $W_e \subset E$ точки x і ідемпотента $e = \pi(x)$, відповідно, для яких $(U_x \leftthreetimes W_e) \cap \pi^{-1}(W_e) \subset O_x$. З того, що $xe = x \in U_x$ і неперервності множення випливає існування такого околу $W'_e \subset W_e$, що $xW'_e \subset U_x$.

U-щільність множини A в E гарантує існування такої точки $a \in A \cap W'_e$, що $e \in \Uparrow a$ і такої точки $b \in A \cap W'_e \cap \Uparrow a$, що $e \in \Uparrow b$. Тоді, $W = W'_e \cap \Uparrow b$ – відкритий окіл ідемпотента $e = \pi(x)$.

Зауважимо, що $h_a^b(e) = h_a^b(b) = 1$, а отже, $\hat{h}_a^b(x) = (1, xa)$. Тоді $U' = (0, 1] \times (U_x \cap H_a)$ – відкритий окіл точки $\hat{h}_a^b(x)$ в $\widehat{H}_a$, а його прообраз $U = \mathrm{pr}_a^{-1}(\mathrm{pr}_b^{-1}(U'))$ є відкритим околом точки $\hat{h}_A^A(x)$ в тихоновському добутку $\prod_{c \in A} \widehat{H}_c^{A \cap \Uparrow c}$. Тут через $pr_a : \prod_{c \in A} \widehat{H}_c^{A \cap \Uparrow c} \to \widehat{H}_a^{A \cap \Uparrow a}$ і $pr_b : \widehat{H}_a^{A \cap \Uparrow a} \to \widehat{H}_a$ позначено координатні проекції.

Стверджуємо, що окіл $O_y = W \times U$ елемента $y = \pi\hat{h}_A^A(x)$ забезпечує неперервність $(\pi\hat{h}_A^A)^{-1}$ в y. Для довільної точки $z \in S$, проекція якої $\pi\hat{h}_A^A(z) \in O_y = W \times U$, достатньо перевірити включення $z \in O_x$. З попереднього випливає, що $\pi(z) \in W = W'_e \cap \Uparrow b \subset W_e$ і $(h_a^b(\pi(z)), za) = \hat{h}_a^b(z) \in U' = (0, 1] \times (U_x \cap H_a)$. Отже, $z \in (U_x \leftthreetimes W_e) \cap \pi^{-1}(W_e) \subset O_x$, що

й завершує доведення. □

5.3 Наслідки з теорем вкладення

У цьому розділі ми сформулюємо деякі наслідки теореми вкладення 5.5.

Наслідок 5.6. *Нехай S – кліфордова топологічна інверсна U-напівгрупа, A – U-щільна підмножина в E. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) S вкладається в тихоновський добуток топологічних напівграток і конусів над топологічними групами;

2) S вкладається в топологічну кліфордову інверсну напівгрупу $E \times \prod_{e \in A} \widehat{H}_e^{\Uparrow e \cap A}$;

3) S – дітопологічна кліфордова інверсна напівгрупа.

Доведення. Імплікація (3) $\Rightarrow$ (2) випливає з теореми 5.5, (2) $\Rightarrow$ (1) – тривіальна, а (1) $\Rightarrow$ (3) випливає з властивості збереження дітопологічності різними операціями над напівгрупами. □

Аналогічно, з теореми 5.5, отримуємо:

Наслідок 5.7. *Нехай S – кліфордова топологічна інверсна напівгрупа з максимальною U_2-напівграткою E і A – U-щільна підмножина в E. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) S вкладається в тихоновський добуток топологічних напівграток і 0-розширень топологічних груп;

2) S вкладається в топологічну кліфордову інверсну напівгрупу $E \times \prod_{e \in A} \dot{H}_e^{\Uparrow e \cap A}$;

3) S – дітопологічна кліфордова інверсна напівгрупа.

Нагадаємо, що для двох заданих топологічних напівгруп X, Y кажемо, що X є *Y-вкладуваною*, якщо канонічний гомоморфізм $X \to Y^{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ є топологічним вкладенням. Легко бачити, що X є Y-вкладуваною тоді і лише тоді, коли X вкладається в Y^{κ} для деякого κ. У цьому випадку пишемо $X \hookrightarrow Y^{\kappa}$.

Наслідок 5.8. *Нехай S – топологічна кліфордова інверсна U-напівгрупа з максимальною напівграткою E, а $H = \prod_{e\in E} H_e$ – тихоновський добуток її максимальних груп. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) S вкладається в тихоновський добуток конусів над топологічними групами;

2) S є $\widehat{H}$-вкладуваною;

3) S – дітопологічна і E є $\mathbb{I}$-вкладуваною.

Доведення. Імплікація (2) $\Rightarrow$ (1) тривіальна, а (1) $\Rightarrow$ (3) випливає зі збереження дітопологічності конусами над групами і тихоновськими добутками.

(3) $\Rightarrow$ (1) Припустимо, що топологічна кліфордова U-напівгрупа S є дітопологічною, а її максимальна напівгратка E є $\mathbb{I}$-вкладуваною. Тоді,

$$E \hookrightarrow \mathbb{I}^{\mathrm{Hom}(E,\mathbb{I})} \hookrightarrow \widehat{H}^{\mathrm{Hom}(E,\mathbb{I})}.$$

За теоремою 5.5, S вкладається в тихоновський добуток $E \times \prod_{e\in E} \widehat{H}_e^E$, який, в свою чергу, вкладається в добуток $\widehat{H}^{\mathrm{Hom}(E,\mathbb{I})} \times \widehat{H}^{E\times E}$, а отже, S є $\widehat{H}$-вкладуваною. $\square$

Аналогічно, з теореми 5.5 отримуємо:

Наслідок 5.9. *Нехай S – топологічна кліфордова інверсна U-напівгрупа з максимальною напівграткою E, а $H = \prod_{e\in E} H_e$ –*

тихоновський добуток її максимальних груп. Тоді наступні умови еквівалентні:

1) *S вкладається в тихоновський добуток 0-розширень топологічних груп;*

2) *S – $\dot{H}$-вкладувана;*

3) *S – дітопологічна і E є $\mathbf{2}$-вкладуваною.*

5.4 Характеризація прекомпактних топологічних кліфордових інверсних U-напівгруп

У цьому розділі ми застосуємо вищезгадані результати для доведення теореми компактифікації для топологічних кліфордових інверсних U-напівгруп. Нагадаємо, що топологічна напівгрупа S називається *прекомпактною*, якщо S вкладається в компактну топологічну напівгрупу.

Як відомо (див. [1, 3.7.16]), топологічна група G прекомпактна тоді і лише тоді, коли G *цілком обмежена*, тобто для кожної непорожньої відкритої множини $U \subset G$ існує така скінченна підмножина $F \subset G$, що $FU = G = UF$.

З теореми 5.5 отримуємо наступну харатеризацію прекомпактних топологічних кліфордових інверсних U-напівгруп.

Теорема 5.10. *Топологічна кліфордова інверсна U-напівгрупа S прекомпактна тоді і лише тоді, коли:*

1) *максимальна напівгратка $E = \{e \in S : ee = e\}$ прекомпактна,*

2) *кожна максимальна підгрупа H_e, $e \in E$, в S прекомпактна, і*

3) *S дітопологічна.*

5.5 Метризовність топологічних кліфордових інверсних U-напівгруп

Тепер застосуємо теорему вкладення 5.5 для побудови субінваріантних метрик на топологічних кліфордових інверсних U-напівгрупах.

Метрику d на кліфордовій напівгрупі S називатимемо

- *лівосубінваріантною*, якщо $d(zx, zy) \leq d(x, y)$, для будь-яких точок $x, y, z \in S$;
- *правосубінваріантною*, якщо $d(xz, yz) \leq d(x, y)$, для будь-яких точок $x, y, z \in S$;
- *субінваріатною*, якщо $\max\{d(zx, zy), d(xz, yz)\} \leq d(x, y) = d(x^{-1}, y^{-1})$, для будь-яких точок $x, y, z \in S$.

Зауважимо, що метрика d на топологічній групі G є (ліво-, право-) субінваріантною тоді і лише тоді, коли d – (ліво-, право-) інваріантна.

Кажемо, що топологічна кліфордова напівгрупа S *метризовна* (*субінваріантною метрикою*), якщо її топологія породжується деякою (субінваріантною) метрикою.

За теоремою Біркгофа-Какутані [1, 3.3.12], топологічна група G метризовна лівоінваріантною метрикою тоді і лише тоді, коли G задовольняє першу аксіому зліченності. За [1, 3.3.14], топологічна група G метризовна інваріантною метрикою тоді і лише тоді, коли G задовольняє першу аксіому зліченності і є *збалансованою*. Останнє означає, що для кожного околу $U \subset G$ єдиного ідемпотента e з G, існує такий окіл $V \subset G$, $e \in V$, що $xVx^{-1} = V$, для всіх $x \in G$. Прикладом метризовної не збалансованої, а отже, й не метризовної інваріантною метрикою топологічної групи, є група Лі $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ афінних перетворень дійсної прямої.

Теорема 5.11. *Кожна топологічна прекомпакна кліфордова інверсна напівгрупа S з другою аксіомою зліченності метризовна субінваріантною метрикою.*

Доведення. За твердженням 5.2, S вкладається в компактну топологічну кліфордову інверсну напівгрупу K з другою аксіомою зліченності, метризовну деякою метрикою d. З неперервності напівгрупової операції і інверсії на компактному просторі K випливає, що

$$\rho(x,y) = \max_{z\in K} \max\left\{d(zx,zy), d(xz,yz), d(zx^{-1},zy^{-1}), d(x^{-1}z,y^{-1}z)\right\}$$

– неперервна субінваріантна метрика на K. Оскільки K компактний простір, то ρ породжує топологію K, а її звуження $\rho|S\times S$ є субінваріантною метрикою, що породжує топологію на S. □

Повертаючись до задачі метризації дітопологічних кліфордових інверсних U-напівгруп, бачимо, що завдяки теоремі вкладення 5.5, вона зводиться до доволі простої задачі метризації напівграток і конусів над топологічними групами. Припустимо, що топологічна група H метризовна метрикою d. Тоді конус $\widehat{H}$ над H метризується метрикою

$$\hat{d}(x,y) = \min\{t_x + t_y, |t_x - t_y| + d(h_x,h_y)\}, \quad x,y\in\widehat{H},$$

де $(t_x,x),(t_y,y)\in[0,1]\times H$ – довільні пари точок такі, що $x = q(t_x,x)$ і $y = q(t_y,y)$. Тут $q:[0,1]\times H\to\widehat{H}$ – канонічна проекція. Якщо метрика d є (ліво-, право-) субінваріантною на H, то такою ж є й $\hat{d}$ на $\widehat{H}$.

Поєднуючи цей факт з Теоремою 5.5, отримуємо наступну теорему, яка узагальнює деякі результати доведені в [2].

Теорема 5.12. *Припустимо, що S дітопологічна кліфордова інверсна U-напівгрупа і A – зліченна U-щільна підмножина в S. Тоді*

1) *S метризовна тоді і лише тоді, коли максимальна напівгратка E метризовна, а всі максимальні підгрупи H_e, $e\in A$, в S задовольняють першу аксіому зліченності;*

2) *S метризовна лівосубінваріантною метрикою тоді і лише тоді, коли максимальна напівгратка E метризовна субінваріантною*

метрикою, а всі максимальні підгрупи H_e, $e \in A$, в S задовольняють першу аксіому зліченності;

3) *S метризовна субінваріантною метрикою тоді і лише тоді, коли максимальна напівгратка E метризовна субінваріантною метрикою, а всі максимальні підгрупи H_e, $e \in A$, в S задовольняють першу аксіому зліченності і збалансовані.*

Зауважимо, що за твердженням 5.3, кожна U-напівгратка з другою аксіомою зліченності містить зліченну U-щільну підмножину $A \subset E$.

Теорема 5.12 зводить задачу (субінваріатної) метризовності топологічної кліфордової інверсної U-напівгрупи S до задачі (субінваріатної) метризовності максимальної напівгратки $E \subset S$. Як виявилось, ця задача не є тривіальною, що показує наступний приклад.

Приклад 5.13. *Існує топологічна напівгратка E з наступними властивостями:*

1) *E зліченна і локально компактна;*

2) *E напівгратка Лоусона;*

3) *E метризовна;*

4) *E не метризовна субінваріантною метрикою;*

5) *E не прекомпактна.*

Доведення. Розглянемо напівгратку $E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ з операцією мінімуму. Очевидно, що E з топологією τ, в якій кожна ненульова точка ізольована, а множини вигляду $B_n = \{0\} \cup \{\frac{1}{2k}\}_{k\geqslant n}$, $n \in \mathbb{N}$ – околи нуля, задовольняє умови (1)–(3) прикладу 5.13 і є топологічною напівграткою.

Припустимо, що E метризовна субінваріантною метрикою d. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ і відповідних точок $x = 0$, $y = \frac{1}{2n}$, $z = \frac{1}{2n+1}$, маємо

$$d(0, \tfrac{1}{2n+1}) = d(zx, zy) \leq d(x, y) = d(0, \tfrac{1}{2n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

тобто послідовність $\frac{1}{2n+1}$ прямує до нуля, що суперечить вибору топології на E. Отже, E не може бути метризовною субінваріантною метрикою. За теоремою 5.11, топологічна напівгратка E з другою аксіомою зліченності не є прекомпактною. $\square$

5.6 Висновки до розділу 5

У цьому розділі досліджувалась задача узагальнення результатів про побудову універсальних об'єктів, отриманих у [24] для компактних топологічних інверсних кліфордових напівгруп. Таким чином, отримано наступні результати:

1. Побудовано вкладення дітопологічної кліфордової інверсної U-напівгрупи в тихоновський добуток її максимальної напівгратки і конусів над максимальними групами (див. Теорема 5.5).

2. Побудовано вкладення дітопологічної кліфордової інверсної U_2-напівгрупи в тихоновський добуток її максимальної напівгратки і 0-розширень максимальних підгруп (див. Теорема 5.5).

3. Знайдено критерій прекомпактності топологічної кліфордової інверсної U-напівгрупи (див. Теорема 5.10).

4. Доведено критерій метризовності дітопологічних кліфордових інверсних напівгруп(див. Теорема 5.12), який узагальнює результати [24].

5. Побудовано приклад 5.13 топологічної напівгратки, яка є метризовною, але не є метризовною субінваріантною метрикою.

РОЗДІЛ 6

Автоматична неперервність гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами

Мотивацією досліджень, проведених у цьому розділі, стали теореми автоматичної неперервності для кліфордових топологічних інверсних напівгруп, отримані у статтях [10] Боуманом та [41] Ягером. Розв'язувана задача передбачала, що звуження гомоморфізмів на кожну максимальну підгрупу і кожну максимальну напівгратку неперервні. Для зручності, введемо наступне означення:

Означення 6.1. Гомоморфізм $h : X \to Y$ топологічних напівгруп називатимемо *EH-неперервним,* якщо

- звуження $h|E(X)$ на множину ідемпотентів в X неперервне;
- для кожної підгрупи $H \subset X$, звуження $h|H$ неперервне.

У 1971 році Боуман (див. [10]) довів неперервність EH-неперервних гомоморфізмів для компактних топологічних кліфордових інверсних напівгруп з максимальною напівграткою Лоусона $E(X) = \{x \in X : xx = x\}$.

Теорема 6.2 (Bowman, 1971)**.** *Кожен EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ між компактними кліфордовими топологічними інверсними напівгрупами X та Y з максимальними напівгратками Лоусона є неперервним.*

Узагальненням теореми Боумана [10, Theorem 1.4] для випадку топологічних кліфордових інверсних U-напівгруп є наслідок 6.6 з основної теореми 6.4, який доводить неперервність EH-неперервного гомоморфізму $h : X \to Y$ між кліфордовою топологічною інверсною U-напівгрупою X і кліфордовою дітопологічною інверсною напівгрупою Y.

Ягер узагальнив цей результат, не вимагаючи умови Лоусона для напівгратки [41, Corollary 4.1]:

Теорема 6.3 (Yeager, 1976). *Кожен EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ між компактними кліфордовими топологічними інверсними напівгрупами X та Y є неперервним.*

Ми отримали аналогічні результати в ширшому, ніж компактні кліфордові інверсні, класі топологічних напівгруп.

Нагадаємо, що топологічна інверсна напівгрупа S називається

- *U-напівгрупою*, якщо її максимальна напівгратка $E(S)$ є U-напівграткою;
- *U_0-напівгрупою*, якщо її максимальна напівгратка $E(S)$ є U_0-напівграткою;
- *U_0^*-напівгрупою*, якщо для кожного ідемпотента $x \in E(S)$ і кожного його околу $U \subset E(S)$ існує такий ідемпотент $e \in U$, що $x \in \Uparrow e$ і e локально мінімальний у свому класі спряженості $e^S = \{f \in E(S) : \exists s \in S\ f = ses^{-1},\ e = s^{-1}fs\}$, тобто, для деякого околу $V_e \subset E(S)$ точки e, маємо $V_e \cap e^S \subset \uparrow e$.

Очевидно, що для кожної топологічної інверсної напівгрупи S справедливі імплікації

$$U_0\text{-напівгрупа} \Rightarrow U_0^*\text{-напівгрупа} \Rightarrow U\text{-напівгрупа},$$

а топологічна кліфордова інверсна напівгрупа S є U_0^*-напіврупою тоді і лише тоді, коли вона є U-напівгрупою. Це випливає з того, що для довільного ідемпотента $e \in E(S)$ клас спряженості e^S – одноточковий $\{e\}$ (оскільки e в кліфордовій інверсній напівгрупі комутує зі всіма елементами з S).

Нище ми доведемо основний результат цього розділу і виведемо деякі його наслідки.

Теорема 6.4. *Кожен EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ з топологічної інверсної U_0^*-напівгрупи X у слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Доведення. Для будь-якої точки $x \in X$ і околу $O_y \subset Y$ точки $y = h(x)$, треба знайти такий окіл $O_x \subset X$ точки x, що $h(O_x) \subset O_y$. Оскільки топологічна інверсна напівгрупа Y є слабко дітопологічною, то існують окіл $V_y \subset Y$ точки y і околи $V_{yy^{-1}}, V_{y^{-1}y} \subset E(Y)$ ідемпотентів $yy^{-1}, y^{-1}y$, такі, що

$$(V_y \leftthreetimes V_{y^{-1}y}) \cap \lambda_Y^{-1}(V_{yy^{-1}}) \cap \rho_Y^{-1}(V_{y^{-1}y}) \subset O_y.$$

Застосувавши означення слабко дітопологічної інверсної напівгрупи ще раз, можемо знайти відкриті околи $W_y \subset V_y$ точки y, $W_{yy^{-1}} \subset V_{yy^{-1}}$ і $W_{y^{-1}y} \subset V_{y^{-1}y}$ ідемпотентів $yy^{-1}, y^{-1}y$, для яких

$$(W_{yy^{-1}} \rightthreetimes W_y) \cap \lambda_Y^{-1}(W_{yy^{-1}}) \cap \rho_Y^{-1}(W_{y^{-1}y}) \subset V_y.$$

Зменшивши, при потребі, окіл $W_{yy^{-1}}$, можна додатково припускати, що $W_{yy^{-1}}y \subset W_y$.

З неперервності звуження $h|E(X)$ випливає існування таких відкритих околів $W_{xx^{-1}}, W_{x^{-1}x} \subset E(X)$ ідемпотентів $xx^{-1}, x^{-1}x$, що $h(W_{xx^{-1}}) \subset W_{yy^{-1}}$ і $h(W_{x^{-1}x}) \subset W_{y^{-1}y}$.

Оскільки X – інверсна U_0^*-напівгрупа, то існує такий ідемпотент $e \in W_{xx^{-1}}$, що $xx^{-1} \in \Uparrow e$ і e локально мінімальний в своєму класі спряженості e^X. Отже, e має відкритий окіл $V_e \subset X$ такий, що $V_e \cap e^X \subset \uparrow e$.

З цього випливає, що елемент ex міститься у зсуві $H_e x$ максимальної підгрупи H_e. З вибору околу $W_{yy^{-1}}$ випливає, що $h(ex) = h(e)y \in W_{yy^{-1}}y \subset W_y$.

Оскільки відображення $H_e \to H_e x$, $z \mapsto zx$, – гомеоморфізм (з оберненим $H_e x \to H_e$, $z \mapsto zx^{-1}$), то з неперервності звуження $h|H_e$ випливає неперервність звуження $h|H_e x$. Тоді, існує такий відкритий окіл

$W_{ex} \subset X$ точки ex, що $h(W_{ex} \cap H_e x) \subset W_y$. Стверджуємо, що відкритий окіл

$$O_x = \{z \in X : \ zz^{-1} \in W_{xx^{-1}}, \ z^{-1}z \in W_{x^{-1}x}, \ ezx^{-1}x \in W_{ex},$$

$$\lambda_X(zx^{-1}x) \in W_{xx^{-1}}, \ \rho_S(zx^{-1}x) \in W_{x^{-1}x}, zx^{-1}, \ xz^{-1} \in \Uparrow e$$

$$xz^{-1}zx^{-1} \in \Uparrow e, \ xz^{-1}ezx^{-1} \in V_e, \ zx^{-1}exz^{-1} \in V_e\}$$

точки x задовольняє потрібну умову: $h(O_x) \subset O_y$.

Зафіксуємо довільний елемент $z \in O_x$. Стверджуємо, що елемент вигляду ezx^{-1} належить максимальній групі H_e. Справді, $ezx^{-1}(ezx^{-1})^{-1} = ezx^{-1}xz^{-1}e = e$, оскільки $zx^{-1}xz^{-1} \in \Uparrow e$. Отже, ідемпотент $(ezx^{-1})^{-1}ezx^{-1} = xz^{-1}ezx^{-1}$ спряжений до e, а з вибору околу V_e маємо, що $xz^{-1}ezx^{-1} \in V_e \cap e^X \subset \uparrow e$. Таким чином, $e \leq xz^{-1}ezx^{-1}$. Аналогічно доводиться, що $e \leq zx^{-1}exz^{-1}$, а отже, $xz^{-1}ezx^{-1} \leq xz^{-1}z(x^{-1}exz^{-1})zx^{-1} = e$ (бо $xz^{-1}zx^{-1} \in \Uparrow e$). З нерівностей $e \leq xz^{-1}ezx^{-1} \leq e$ випливає, що $(ezx^{-1})^{-1}ezx^{-1} = xz^{-1}ezx^{-1} = e$, а тому, $ezx^{-1} \in H_e$. Тоді $ezx^{-1}x \in H_e x \cap W_{ex}$, а отже, $h(ezx^{-1}x) \in h(H_e x \cap W_{ex}) \subset W_y$.

З означення околу $O_x \ni z$ маємо, що $\lambda_X(zx^{-1}x) \in W_{xx^{-1}}$ і $\rho_X(zx^{-1}x) \in W_{x^{-1}x}$. Тоді, $\lambda_Y(h(zx^{-1}x)) = h(\lambda_X(zx^{-1}x)) \in h(W_{xx^{-1}}) \subset W_{yy^{-1}}$ і $\rho_Y(h(zx^{-1}x)) = h(\rho_X(zx^{-1}x)) \in h(W_{x^{-1}x}) \subset W_{y^{-1}y}$. Беручи до уваги, що $h(e) \in h(W_{xx^{-1}}) \subset W_{yy^{-1}}$ і $h(e)h(zx^{-1}x) = h(ezx^{-1}x) \in W_y$, отримуємо, що

$$h(zx^{-1}x) \in (W_{yy^{-1}} \succ W_y) \cap \lambda_Y^{-1}(W_{yy^{-1}}) \cap \rho_Y^{-1}(W_{y^{-1}y}) \subset V_y.$$

З означення околу O_x маємо, що $\lambda_X(z) \in W_{xx^{-1}}$ і $\rho_X(z) \in W_{x^{-1}x}$, звідки $\lambda_Y(h(z)) \in h(W_{xx^{-1}}) \subset W_{yy^{-1}} \subset V_{yy^{-1}}$ і $\lambda_Y(h(z)) \in h(W_{x^{-1}x}) \subset W_{y^{-1}y} \subset V_{y^{-1}y}$. Зважаючи на рівність $h(z)y^{-1}y = h(zx^{-1}x) \in V_y$, отримуємо, що

$$h(z) \in (V_y \prec V_{y^{-1}y}) \cap \lambda_Y(V_{yy^{-1}}) \cap \rho_Y(V_{y^{-1}y}) \subset O_y.$$

□

Оскільки топологічні інверсні U_0-напівгрупи і топологічні інверсні кліфордові U-напівгрупи є U_0^*-напівгрупами, то з теореми 6.4 отримуємо наступні наслідки.

Наслідок 6.5. *Кожен EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ з топологічної інверсної U_0-напівгрупи X в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Наслідок 6.6. *Кожен EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ з топологічної інверсної кліфордової U-напівгрупи X в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Оскільки кожна локально компактна топологічна напівгратка Лоусона є U-напівграткою [13, 2.12], а кожна локально компактна нульвимірна топологічна напівгратка є U_0-напівграткою [13, 2.6], то з наслідків 6.5, 6.6 отримуємо два інші наслідки, що узагальнюють наслідки 6.3 і 7.2 з [9].

Наслідок 6.7. *Кожен EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ з топологічної інверсної напівгрупи X з нуль-вимірною локально компактною напівграткою $E(X)$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Наслідок 6.8. *Кожен EH-неперервний гомоморфізм $h : X \to Y$ з топологічної інверсної кліфордової напівгрупи X з локально компактною напівграткою Лоусона $E(X)$ в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Беручи до уваги, що кожна дітопологічна інверсна напівгрупа, очевидно, є слабко дітопологічною напівгрупою, а кожна компактна інверсна напівгрупа є дітопологічною, то з попередніх наслідків отримуємо узагальнення результату Боумана.

Наслідок 6.9. *Якщо максимальна напівгратка $E(X)$ топологічної інверсної напівгрупи X локально компактна і нуль-вимірна, то кожний гомоморфізм $h : X \to Y$ в компактну інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

Наслідок 6.10. *Якщо максимальна напівгратка $E(X)$ топологічної кліфордової інверсної напівгрупи X локально компактна і є напівграткою Лоусона, то кожний гомоморфізм $h : X \to Y$ в компактну кліфордову інверсну напівгрупу Y є неперервним.*

6.1 Неперервність вимірних за Сусліним гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами

У цьому підрозділі ми застосуємо теорему 6.4 для доведення неперервності вимірних за Сусліним гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами.

Нагадаємо, що функція $f : X \to Y$ між топологічними просторами називається *вимірною за Сусліним,* якщо для кожної відкритої F_σ-множини $U \subset Y$ прообраз $f^{-1}(U)$ є множиною Сусліна в просторі X. Підмножина A топологічного простору X є *множиною Сусліна*, якщо $A = \bigcup_{s\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} F_{s|n}$, для деякої сім'ї $(F_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ замкнених підмножин в X. Як відомо [15], кожна борелівська підмножина метризовного простору є множиною Сусліна.

Наступна теорема про автоматичну неперервність гомоморфізмів між топологічними групами була доведена в [30].

Теорема 6.11 (Noll)**.** *Кожен вимірний за Сусліним гомоморфізм $h : X \to Y$ з паракомпактної повної за Чехом топологічної групи X в топологічну групу Y є неперервним.*

Поєднуючи теореми 6.4 і 6.11, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 6.12. *Гомоморфізм $h : X \to Y$ з паракомпактної повної за Чехом топологічної інверсної U_0^*-напівгрупи X в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним тоді і лише тоді, коли h вимірний за Сусліним, а звуження $h|E(X)$ неперервне.*

Оскільки кожна кліфордова топологічна інверсна U-напівгрупа є топологічною U_0^*-напівгрупою, то з попереднього наслідку отримуємо наступний

Наслідок 6.13. *Гомоморфізм $h : X \to Y$ з паракомпактної повної за Чехом кліфордової топологічної інверсної U-напівгрупи X в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу Y є неперервним тоді і лише тоді, коли h вимірний за Сусліним, а звуження $h|E(X)$ неперервне.*

6.2 Висновки до розділу 6

У 6-му розділі дисертації доведено неперервність гомоморфізмів, звуження яких на максимальні підгрупи і напівгратки є неперервними, з топологічної інверсної напівгрупи в слабко дітопологічну інверсну напівгрупу. Важливими наслідками є неперервність таких гомоморфізмів на топологічних інверсних U-напівгрупах, максимальні напівгратки яких є напівгратками Лоусона та на топологічних інверсних U_0-напівгрупах з нуль-вимірними максимальними напівгратками. Отримані результати узагальнюють і розширюють результати Ягера [41] та Бовмана [10]. Також з теореми 6.4 випливає неперервність вимірних за Сусліним гомоморфізмів між паракомпактною повною за Чехом топологічною кліфордовою інверсною напівгрупою та слабко дітопологічною інверсною U-напівгрупою, за умови неперервності їх звужень на максимальну напівгратку (див. 6.12 та 6.13).

РОЗДІЛ 7

Загальні висновки

Предметом дослідження дисертації є дітопологічні напівгрупи і їх властивості. Дітопологічні напівгрупи – це клас напівгруп з певним чином визначеним на них неперервним правим і (або) лівим діленням. Зокрема, в класі топологічних інверсних напівгруп, поняття правої і лівої дітопологічності еквівалентні.

Клас дітопологічних інверсних напівгруп містить всі топологічні напівгратки, топологічні групи, компактні і уніформізовні топологічні інверсні напівгрупи. Також показано, що цей клас напівгруп замкнений відносно операцій тихоновського, зведеного і напівпрямого добутків і зберігається інверсними піднапівгрупами.

Не зважаючи на наявність властивості дітопологічності в багатьох класах топологічних напівгруп, існує і досить простий приклад топологічної напівгрупи, яка не є дітопологічною. Клас дітопологічних інверсних напівгруп є підкласом слабко дітопологічних інверсних напівгруп, які відіграли важливу роль для розв'язання задач останнього 6 розділу дисертації.

Дітопологічні напівгрупи дали змогу краще зрозуміти структуру топологічних інверсних кліфордових напівгруп, які не є компактними. Зокрема, були побудовані вкладення дітопологічних інверсних кліфордових напівгруп з максимальними нуль-вимірними напівгратками у добутки нуль-розширень топологічних груп, а дітопологічних інверсних кліфордових напівгруп з максимальними напівгратками Лоусона – у добутки конусів над топологічними групами. Нуль-розширення і конуси топологічних груп, а також їх добутки, очевидно, є простішими і більш зрозумілими об'єктами для вивчення.

Останній розділ дисертації присвячений дослідженню неперервності гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами за умови неперервності звужень цих гомоморфізмів на максимальні підгрупи і максимальні піднапівгратки. Наслідками основної теореми, доведеної у

цьому розділі, є вже відомі результати для компактних інверсних кліфордових напівгруп, отримані Боуманом у [10]. Іншим важливим наслідком з цієї теореми є критерій автоматичної неперервності вимірних за Сусліним гомоморфізмів між топологічними інверсними напівгрупами.

Список використаних джерел

1. Arhangel'skii A. *Topological groups and related structures*, / A. Arhangel'skii, M. Tkachenko. – Amsterdam–Paris : Atlantis Press, 2008. – 781 p.

2. Banakh T. *On cardinal invariants and metrizability of topological inverse Clifford semigroups* / T. Banakh // Topology and its Applications – 2003. – V. 128, no. 1. – P. 13–48.

3. Banakh T. *Cardinal invariants and metrizability of topological inverse semigroups* / T. Banakh, B. Bokalo // Topology Appl. – 2003. – V. 128, no. 1. – P. 3–12.

4. Banakh T. *Metrizability of Clifford topological semigroups* / T. Banakh, O. Gutik, O. Potiatynyk, A. Ravsky // Semigroup Forum – 2012. – V. 84, no. 2. – P. 301–307.

5. Banakh T. *Fiber-parallel topological I^{-1}-semigroups* / T. Banakh, I. Pastukhova // International Conference Dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, September 17–21, 2012, Lviv : Book of Abstract. – Lviv, 2012. – P. 102.

6. Banakh T. *Topological and ditopological unoid-semigroups* / T. Banakh, I. Pastukhova // Modern Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics : Book of Abstract. – Lviv, 2013. – V. 3. – P. 206–207.

7. Banakh T. *Topological and ditopological unosemigroups* / T. Banakh, I. Pastukhova // Mat. Stud. – 2013. –V. 39, no. 2. – P. 119–133.

8. Banakh T. *On topological Clifford semigroups embeddable into products of cones over topological groups* / T. Banakh, I. Pastukhova // Semigroup Forum – 2014. – V. 89, no. 2. – P. 367-–382. https://doi.org/10.1007/s00233-014-9570-7.

9. Banakh T. *Automatic continuity of homomorphisms between topological semigroups* / T. Banakh, I. Pastukhova // Semigroup Forum – 2015. – V. 90, no. 2. – P. 280-–295.

10. Bowman T. *A construction principle and compact Clifford semigroups* / T. Bowman // Semigroup Forum – 1971. – V. 2, no. 4. – P. 343–353. doi:10.1007/BF02572301.

11. Brown R. *Embeddings in contractible or compact objects* / R. Brown, S. Morris // Colloq. Math – 1977–1978. – V.38, no. 2. – P. 213-–222.

12. Carruth J. H. *The theory of topological semigroups* / J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, R. J. Koch. – New York : Marcel Dekker, Inc., 1983. – V. 1 – 244 p.

13. Carruth J. H. *The theory of topological semigroups* / J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, R. J. Koch. – New York : Marcel Dekker, Inc., 1983. – V. 2 – 195 p.

14. Christensen J. P. R. *Borel structures in groups and semigroups* / J.P.R. Christensen // Math. Scand. – 1971. V. 28. – P. 124-–128.

15. Choquet G. *Ensembles K-analytiques et K-sousliniens. Cas general et cas metrique* / G. Choquet // Ann. Inst. Fourier – 1959. – V. 9. – P. 77—81.

16. Clifford A. H. *The Algebraic Theory of Semigroups* / A. H. Clifford, G. B. Preston. – Providence, Rhode Island : I, II. Amer. Math. Soc., 1977. – 422 p.

17. Engelking R. *General Topology* / R. Engelking. – Warszawa : PWN, 1985. – 752 p.

18. Gierrz G. *Continuous Lattices and Domains* / G. Gierrz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, D. S. Scott // Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, S?o Paulo : Cambridge University Press, 2003. – 591 p.

19. Grillet P. A. *Semigroups: an introduction to the structure theory* / P.A. Grillet. – New York : Marcel Dekker, Inc., 1995. – 408 p.

20. Hartman S. *On the embedding of topological groups into connected topological groups* / S. Hartman, J. Mycielski // Colloq. Math. –1958. –V. 5. – P. 167—169.

21. Hewitt E. *Abstract harmonic analysis* / E. Hewitt, K. Ross. – New York - Berlin - Heidelberg - London -Paris - Tokyo - Hong Kong - Barcelona - Budapest : Springer-Verlag, 1979. – V. 1. – 519 p.

22. Hofmann K. *The structure of compact groups* / K. H. Hofmann, S. A. Morris. – Berlin - New York : Walter de Gruyter, 2006. – 58 p.

23. Howie J. M. *Fundamentals of semigroup theory* / J.M. Howie. – Oxford : Oxford University Press, 1995. – 368 p.

24. Hryniv O. *Universal objects in some classes of Clifford topological inverse semigroups* / O. Hryniv // Semigroup Forum – 2007. – V. 75, no. 3. – P. 683–689.

25. Kechris A. *Classical descriptive set theory* / A. S. Kechris. – New York - Berlin - Heidelberg - London -Paris - Tokyo - Hong Kong - Barcelona - Budapest : Springer-Verlag, 1994. – 404 p.

26. Koch R. G. *Notes on inverse semigroups* / R.J. Koch, A.D. Wallace // Rev. Roumaine Math. Pures Appl – 1964. – V. 9. –P. 19–24.

27. Kruming P. D. *Lattice-ordered semigroups* / P.D. Kruming // Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika – 1964. V. 43, no. 6. – P. 78–87.

28. Lawson J. D. *Topological semilattices with small semilattices* / J.D. Lawson // J. London Math. Soc. – 1969. – V. 2, no. 1. – P. 719-724.

29. Lawson M. V. *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries* / M. V Lawson. – NJ–Singapore–London : World Scientific Publishing Co.Pre.Ltd – 1998. – 411 p.

30. Noll D. *Souslin measurable homomorphisms of topological groups* / D. Noll // Arch. Math. – 1992. – V. 59. – P. 294—301.

31. Paalman-de-Miranda A. *Topological semigroups* / A. B. Paalman-de-Miranda. Amsterdam : Mathematisch Centrum Amsterdam, 1964. – 169 p.

32. Pastukhova I. *Parallel Topological Inverse Clifford Semigroups* /I. Pastukhova // Abstracts of International Conference "Geometry in Odesa-2011". – Odesa, 2011. – P. 85.

33. Pastukhova I. *Automatic continuity of homomorphisms between topological Clifford semigroups* / I. Pastukhova // IV International Hanh Conference dedicated to the 135th anniversary of Hans Hanh : Book of Abstract. – Chernivtsi, 2014. – P. 241–242.

34. Pastukhova I. *On continuity of homomorphisms between topological Clifford semigroups* / I. Pastukhova // Carpathian Math. Publ. – 2014. – V. 6, no. 1. – P 123—129. doi:10.15330/cmp.6.1.123-129.

35. Pastukhova I. *Automatic continuity of homomorphisms between topological inverse semigroups* / I. Pastukhova // Topological Algebra and its Applications – 2018. V. 6, no. 1. – P. 60–66.

36. Petrich M. *Inverse semigroups* / M. Petrich. – New York : Wiley-Intersci. Publ. John Wiley & Sons Inc., 1984. – 674 p.

37. Pettis B. J. *On continuity and openness of homomorphisms in topological groups* / B. J. Pettis // Ann. of Math. – 1950. –V. 2, no. 52. – P. 293—308.

38. Rosendal C.*Automatic Continuity of Group Homomorphisms* / C. Rosendal // The Bulletin of Symbolic Logic. – 2009. – V. 15, no. 2. – P. 184–214.

39. Solecki S. *Amenability, free subgroups, and Haar null sets in non-locally compact groups* / S. Solecki // Proc. LondonMath. Soc. – 2006, –V. 93, no. 3. – P. 693-–722.

40. Weil. A. *L'integration dans les groupes topologiques et ses applications* / A. Weil // Actualit?s Scientifiques et Industrielles. – Paris, 1940, no. 869. – p. 140-146.

41. Yeager D. P. *On the topology of a compact inverse Clifford semigroup* / Yeager D. P. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1976. V. 215. –P. 253–267. doi:10.1090/S0002-9947-1976-0412331-0.

42. Клиффорд А. *Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2* / А. Клиффорд, Г. Престон. – Москва : Мир, 1972. – 422 с.

43. Куратовский К. *Топология, I* / К. Куратовский. – Москва : Мир, 1966. – 504 с.

44. Куратовский К. *Топология, II* / К. Куратовский. – Москва : Мир, 1969. – 623 с.

45. Пастухова І. *Автоматична неперервність гомоморфізмів між топологічними напівгрупами* / І. Пастухова // IXth Summer School, Algebra, Topology and Analysis, July 7–18, 2014, Polianytsia : Book of Abstract. – Polianytsia, Ukraine 2014. – P. 61.

46. Понизовский И. С. *О гомоморфизмах коммутативных полугрупп* / И. С. Понизовский // Доклады Академии Наук СССР. – 1960. – Т. 135, № 5. – С. 1058–1060.

47. Понизовский И. С. *Замечание о коммутативных полугруппах* / И. С. Понизовский // Доклады Академии Наук СССР. – 1962. – Т. 142, № 6. – С. 1258–1260.

48. Понтрягин Л.С. *Непрерывные группы* / Л. С. Понтрягин – Москва : Наука, 1984. – 527 с.