ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук
Радула Тараса Миколайовича
на дисертаційну роботу Глушак Інни Дмитрівни
"Апроксимації неадитивних мір",
подану на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук (доктора філософії)
за спеціальністю 01.01.04 — геометрія і топологія

Неадитивні міри (ємності) є узагальненням звичних адитивних (зліченно адитивних) мір, важливим для застосувань, зокрема, у математичній економіці, теорії прийняття рішень, теорії оптимізації, математичній фізиці та інших прикладних галузях математики. Наприклад, останнім часом інтенсивно досліджуються ігри, функції виплат у яких визначено як інтеграли за неадитивними мірами (Зарічний, Кожан та інші). Простори таких мір та їх відображення мають особливості порівняно з просторами та відображеннями адитивних, зокрема, ймовірнісних мір (Федорчук, Банах, Дітор, Ейфлер), оскільки мають спільні риси з просторами гіперпросторів включення. Крім того, для них природніша не опукла структура, визначена вкладенням у векторний топологічний простір, а так звана ідемпотентна опукла структура (Колокольцов, Маслов, Зарічний). Однак метрики на просторах неадитивних мір вивчені недостатньо, як і наближення щодо них довільних мір мірами з вужчих класів. Отже, тема дисертації є актуальною.

Перший розділ дисертації є оглядовим. Автор наводить відомості з теорії неадитивних мір та теорії категорій, які є базовими для теоретичних досліджень даної проблематики. Цей розділ викладено стисло і лаконічно, включаючи тільки необхідні матеріали із публікацій попередників. Вся допоміжна термінологія винесена в останній розділ у вигляді додатку, що полегшує розуміння тексту.

Другий розділ містить інформацію про метрики на множинах неадитивних мір та властивості деяких їх відображень, яка є важливою для розв'язання апроксимаційних задач у всіх наступних розділах. Розглянуто дві метрики на множині регулярних ємностей на метричному компакті – в стилі Успенського та Прохорова. Показано (теорема 2.1.2), що остання має інтегральне представлення через інтеграл Сугено, властивий саме для неадитивних мір, і обґрунтовано доцільність її застосування як "геометрично природнішої" метрики Прохорова. Крім того, вона може бути застосовна на некомпактних метричних просторах, щоправда, із деяким звуженням класу ємностей, регулярних щодо ємностей, до класу ємностей регулярних щодо метрики. Показано (теорема 2.3.1), що відображення двоїстості є ізометрією простору нормованих ємностей на метричному компакті, що в подальшому суттєво спрощує розв'язання деяких задач наближення неадитивних мір ємностями із двоїстих класів, зокрема мір достатності та між можливості.

Третій розділ є основним. Він присвячений розробці ефективних методів наближення довільної регулярної неадитивної міри c , яка визначена на метричному просторі X, мірами з певних класів, які характеризуються властивостями, шо забезпечують відносну простоту обчислень. На прикладі наближення ємностями із класу $M_q X$ ліпшицевих щодо метрики Гаусдорфа ємностей показано, що існують деякі відмінності методів побудови оптимальних наближень для ємностей на компактних та некомпактних метричних просторах. У компактному випадку всі ємності, що є ε-близькими до даної ємності для ε, що визначає відстань до відповідного класу, і будуть оптимальними наближеннями. У некомпактному випадку цього не достатньо (приклад 3.1.7). Враховуючи цю особливість, зрозуміло, чому більшість результатів отримано для ємностей, які визначені на метричних компактах. Зокрема, представлено зручний для програмної реалізації метод наближення неадитивної міри на метричному компакті адитивною мірою, визначеною на скінченному підпросторі простору X. Цікавими є результати про наближення довільної нормованої неадитивної міри ємностями із класів мір можливості та мір необхідності. Отримано характеризації (теорема 3.3.3 та теорема 3.3.4) ємностей із цих класів, які зводять побудову оптимальних наближень до побудови відповідних підмножин простору, на якому визначена вихідна ємність. Крім того, показано (теорема 3.3.5), що для ємностей із цих класів властива двоїстість, тому побудова оптимального наближення мірою необхідності зводиться до побудови двоїстої до неї міри достатності.

Четвертий розділ є доречним продовженням третього розділу, оскільки в ньому автор дає відповідь на природне питання: чи будуть такі наближення неперервними? Наведено приклади 4.1.1 і 4.1.2 просторів та класів ємностей на них, для яких неможливо побудувати неперервні оптимальні наближення. Проте корисним є той факт (теорема 4.4.2), що можливо побудувати "близькі до оптимальних" неперервні наближення довільної субнормованої ємності, ємностями із довільного класу ємностей, що є замкненою I-опуклою множиною компактного гаусдорфового лоусонового I-напівмодуля, оскільки простір субнормованих ємностей є саме таким напівмодулем.

П'ятий розділ є досить актуальним, оскільки в ньому представлено спосіб апроксимації довільної субнормованої ємності на нескінченному метричному компакті, ємністю простого вигляду, яка визначається скінченною множиною значень заданої ємності на деякій сім'ї підмножин. Для оцінки потужності цієї сім'ї запропоновано фрактальні виміри, які є аналогами вимірів Мінковського та Гаусдорфа. Обчислення цих вимірів зводиться до обчислення аналогічних вимірів гіперпросторів включення. Для підтвердження ефективності методу здійснено спробу оцінити введені фрактальні виміри Мінковського (теореми 5.4.6, 5.4.7 та 5.4.11) для самоподібних гіперпросторів включення та нормованих ємностей, визначених на компактних підмножинах простору $\mathbb{R}^n$.

Підсумовуючи, можна сказати, що дисертаційна робота І.Д. Глушак є цілісною і завершеною науковою працею. Всі основні результати є новими і належно обгрунтованими. Структура і оформлення роботи відповідають чинним вимогам. Водночас мушу зауважити деякі недоліки, вказані нижче:

(1) Формула на с. 33 є надто громіздкою і виходить за межі полів
(2) При доведенні теореми 2.2.1 на с.37 немає потреби нумерувати всі нерівності (2.2.1) – (2.2.4)
(3) 54_4: словосполучення "так само"варто замінити на "аналогічно"
(4) 61^2: не зовсім зрозуміло, які дві наступні формули є рівносильними
(5) 80_1: вживається "опуклої комбінації" замість "I-опуклої комбінації"
(6) У формулюванні Теореми 5.4.7 (120^3) слід уточнити, що "виконуються нерівності"

Вказані зауваження мають виключно редакційний характер, не змінюють загального позитивного висновку про подану до захисту роботу і не ставлять під сумнів її положення. Дисертація є завершеною науковою працею, у якій отримано нові науково обґрунтовані результати, які в сукупності є суттєвими для розвитку теорії неадитивних мір. Основні положення роботи нові, самостійно отримані, належно обґрунтовані і повністю опубліковані в 17 наукових роботах, зокрема, у 8 статтях, три з яких — статті у фахових журналах, включених до міжнародних наукометричних баз, з них 1 – у закордонному науковому періодичному виданні, 5 статтях – у вітчизняних фахових виданнях, 5 тезах виступів на міжнародних наукових конференціях. Робота належно оформлена, автореферат адекватно відображає зміст дисертації.

Робота має теоретичну і практичну цінність і може бути основою для наступних досліджень. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані у Львівському, Київському, Прикарпатському національних університетах, Інституті математики та Інституті прикладних проблем механіки та математики НАНУ.

Вважаю, що дисертаційна робота І.Д. Глушак задовольняє вимоги пп. 9, 11, 12 "Положення про присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 24.07.2013 №567 (зі змінами), а дисертант заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 — геометрія і топологія.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук
професор кафедри геометрії та топології
Львівського національного університету
імені Івана Франка Т.М. Радул

Підпис Радула Т.М.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ імені ІВАНА ФРАНКА