ВІДГУК
офіційного опонента
доктора фізико-математичних наук, професора
Савченка Олександра Григоровича
на дисертаційну роботу Глушак Інни Дмитрівни
«Апроксимації неадитивних мір»,
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії)
за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія

Дисертація присвячена дослідженню неадитивних регулярних мір на метричних просторах. Щодо таких мір в роботі вживається термін «ємності», оскільки так їх початково було названо Шоке (1953). Неадитивні міри є природним узагальненням адитивних мір, проте їх властивості неможливо механічно «перенести» на випадок неадитивних мір. Ємності потребують інших підходів, основні з яких запропоновані Сугено (1974), Денненбергом (1994), Зарічним та Никифорчином (2008).

Неадитивність – це та властивість ємностей, яка забезпечує їх гнучкість, проте є причиною «непередбачуваної» природи ємностей. Тому в більшості випадків доводиться оперувати значеннями ємностей на всіх підмножинах простору, що суттєво ускладнює дослідження цих мір, особливо, коли вони визначені на нескінченних просторах. В працях Грабіша та Міранди (2005), Вебстера (2006) були спроби розв'язати цю проблему шляхом звуження множини всіх неадитивних мір до певних їх класів, проте заздалегідь невідомо, наскільки точно довільну ємність можна наблизити мірою з відповідного класу. Якихось загальних методів апроксимації досі не запропоновано. Отже, актуальність даної тематики є безсумнівною.

Робота складається із анотації, вступу і п'яти розділів. У першому розділі коротко, але ґрунтовно представлено основні поняття і результати, що стосуються неадитивних мір. Автор притримується термінології Зарічного, прийнятій у дослідженнях ємностей методами теорії топологічних функторів. Наведено основні властивості регулярних неадитивних мір на компактних та тихоновських просторах. Відзначено, що для регулярних неадитивних мір, аналогічно до адитивних, властивим є інтегральне представлення у вигляді інтегралів Шоке та Сугено. Описано можливі способи задання топологій на множинах таких мір. Оскільки в роботі основна увага зосереджена на мірах, які визначені на метричних просторах, то в наступному розділі детально досліджено можливість метризації відповідної топології.

Другий розділ є своєрідною базою для подальших досліджень і містить необхідні факти, які стосуються метричних властивостей ємностей на метричних, як компактних, так і некомпактних просторах. Доведені в роботі теореми 2.1.2 та 2.3.1 доповнюють результати Зарічного та Никифорчина, і описують корисні властивості метрики Прохорова на просторі ємностей на метричному компакті. Також визначено умови, при яких метрика Прохорова може коректно застосовуватись для вимірювання відстані між ємностями у некомпактному випадку.

Найбільш інформативним є третій розділ дисертації. В ньому описано ефективні способи апроксимації неадитивних регулярних мір на метричних просторах ємностями із деяких класів, що мають просту будову, яка полегшує обчислення значень цих ємностей. Ці результати є важливими з практичної точки зору, оскільки вони є тим засобом, який може подолати «надмірну» складність обчислень, породжену неадитивною природою ємності. У роботі виділено кілька класів «гарних» ємностей: ліпшицевих щодо метрики Гаусдорфа ємностей, адитивних мір із скінченним носієм, мір необхідності та достатності, нормованих ємностей, зосереджених на замкненому підпросторі. Слід зауважити, що автор не тільки визначив умови існування найближчого до даної ємності наближення із кожного класу зокрема, а й намагався побудувати всі можливі такі наближення, розробивши зручні методи, представлені в теоремах 3.1.8, 3.4.4 та 3.5.5.

Наступним кроком дослідження оптимальних наближень стала перевірка неперервності відображення, аргументом якого є задана ємність, а значенням – відповідна найближча ємність. Незважаючи на те, що у загальному випадку отримано негативну відповідь на це питання, доведено існування та отримано спосіб побудови (теорема 4.4.2) неперервних «майже оптимальних» наближень в тому розумінні, що вони як завгодно близькі до оптимальних.

Останній розділ дисертації присвячено пошуку загального методу, який би дозволив довільну ємність на нескінченному метричному просторів наблизити певним «скінченним» способом. Запропоновано один із можливих таких способів для довільної субнормованої ємності на нескінченному метричному компакті. Він полягає в тому, що вихідну ємність можна представити у вигляді її наближення ємністю, яка задається скінченною сукупністю значень вихідної ємності на всіх об'єднаннях елементів деякої скінченної сім'ї підмножин простору, на якому визначена дана ємність. Таку сім'ю множин доречно названо основою ємності. Отже, надалі задача зводиться до оцінки найменшої потужності можливої основи ємності засобами фрактальної геометрії. Означено фрактальні виміри, що є аналогами виміру Гаусдорфа, верхнього та нижнього виміру Мінковського. Описано методи обчислення та оцінки цих вимірів для деяких «пробних» ємностей через оцінки відповідних фрактальних вимірів певних гіперпросторів включення.

Дисертаційна робота належно оформлена і добре вичитана, тому кількість виявлених описок та стилістичних неточностей є незначною. Зауваження щодо роботи є наступними:

- можливо, варто було б використати інші позначення замість $\overline{M}X$ для усіх дійснозначних ємностей та субнормованих ємностей $\underline{M}X$, оскільки їх легко сплутати;
- на с.21 вживаються різні назви того ж терміну «вгнута ємність» та «увігнута ємність»;
- на с.22 для позначення значення функціонала інтеграла Шоке щодо ємності c для функції f використовується позначення $i_c(f)$, а на с. 61 – позначення $c(f)$;
- для зручності читання на с.27_5 варто вказати номер «наведеної вище теореми», оскільки її формулювання наведено за кілька сторінок до цього;
- на с.46 зауваження 3.1.5 доречніше оформити у вигляді наслідку теореми 3.1.4;
- у розділі 3.2 запропоновано алгоритм побудови найближчої адитивної міри, але не прокоментовано можливість її характеризації;
- на с.62_1 невдало сформульовано речення «Звідси (1) і (2) рівносильні»;
- на с.98_7 замість «рівної загальної довжини» слід вжити «однакових загальних довжин»;
- у розділі 5.3 та ж літера S, але у трьох різних шрифтах вживається у трьох різних змістах, що ускладнює читання;
- надто громіздку формулу на с.116_9 можна було б записати у компактнішому вигляді.

Висловлені вище зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації.

Всі отримані в дисертації результати є новими. Наукові положення та висновки, які сформульовані в дисертаційній роботі, є достатньо обґрунтованими і достовірними. Основні результати опубліковано у 8 наукових працях, серед яких 5 статей у фахових виданнях з переліку, затвердженого МОН України, 3 у виданнях, що включено до міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of Science Core Collection, а також у 9 тезах конференцій (5 з яких – тези міжнародних конференцій).

Автореферат правильно і повно відображає основні положення і зміст дисертації. Дисертація є завершеною науковою роботою, у якій розв'язано актуальні задачі теорії неадитивних мір.

Вважаю, що дисертаційна робота І.Д.Глушак «Апроксимації неадитивних мір» відповідає всім вимогам «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року та № 1159 від 30 грудня 2015 року), щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор – Глушак Інна Дмитрівна заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент
професор кафедри прикладної математики
та економічної кібернетики
ДВНЗ «Херсонський державний аграрний університет»
доктор фізико-математичних наук,
професор

О.Г.Савченко

Підпис професора
Савченко О.
засвідчую нач. від. кадрів [illegible] о.в.

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад «Херсонський державний аграрний університет»
Відділ кадрів