

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

БОРАЧОК ІГОР ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 519.63

ДИСЕРТАЦІЯ

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ТРИВИМІРНИХ ДВОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

01.01.07 – обчислювальна математика

Математика і статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і
текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ (І.В. Борачок)

Науковий керівник
Халко Роман Степанович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Львів–2019

АНОТАЦІЯ

Борачок І.В. *Чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях.* – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2019.

Дисертаційна робота присвячена чисельному розв'язуванню задачі реконструкції даних Коші гармонійної функції в тривимірній двозв'язній області. В роботі показано, що вихідна задача належать до класу некоректних задач, в сенсі відсутності стійкості за вхідними даними. Тому, для того щоб отримати стійкий чисельний розв'язок, розглядається клас регуляризованих методів. Зроблено короткий огляд існуючих регуляризованих чисельних методів для розв'язування некоректних задач, зокрема, двовимірної чи тривимірної задачі Коші для рівняння Лапласа з коротким аналізом переваг або недоліків. Також наведено короткий опис функціональних просторів, потрібних для теоретичних досліджень.

Для чисельного розв'язування вихідної задачі розглянуто прямий регуляризований метод Тіхонова і два ітераційні методи: альтернуючий метод і узагальнений метод Ландвебера.

У випадку методу Тіхонова, задача Коші редукована до некоректної системи двовимірних інтегральних рівнянь за допомогою теорії потенціалу і за допомогою формули Гріна. В обох варіантах наведено інтегральне подання розв'язку, відповідну некоректну систему інтегральних рівнянь, а також вигляд шуканих даних Коші на внутрішній границі. Для двох систем інтегральних рівнянь досліджено можливість застосування регуляризованих методів Тіхонова. Здійснено параметризацію одержаних систем інтегральних рівнянь і виділено слабкі особливості в ядрах. За допомогою дискретного проєкцій-

ного методу Гальоркіна повністю дискретизовано одержані параметризовані системи інтегральних рівнянь, причому невідомі густини апроксимовано лінійною комбінацією сферичних гармонік, а інтеграли наближено обчислено за допомогою відповідних кубатурних формул, які володіють супералгебраїчним порядком збіжності для аналітичних підінтегральних функцій. В результаті розв'язування вихідних систем інтегральних рівнянь зведено до пошуку невідомих коефіцієнтів в апроксимаціях невідомих густин, причому шукані коефіцієнти є розв'язком систем лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаних після застосування методу Гальоркіна. Показано, як оптимізувати процес формування коефіцієнтів систем лінійних рівнянь для зменшення кількості обчислень і як використати отримані результати при формуванні дискретної апроксимації даних Коші.

До одержаних систем лінійних рівнянь застосовано метод регуляризації Тіхонова, причому параметр регуляризації вибрано за допомогою методу L-кривих. Наведено формули для знаходження наближеного розв'язку в області і для знаходження наближених значень даних Коші на внутрішній границі області для обох підходів методу інтегральних рівнянь, здійснено короткий порівняльний аналіз обох підходів.

Також в роботі використано ітераційні регуляризуючі методи для чисельного розв'язування некоректної тривимірної задачі Коші для рівняння Лапласа. Спочатку наведено алгоритм альтернуючого методу. Даний ітераційний метод був запропонований В. Козловим і В. Мазьє для некоректних задач з самоспряженим оператором і був використаний в деяких роботах для чисельного розв'язування двовимірної задачі Коші. В даній роботі ідея методу поширена на випадок тривимірних областей. Наведено алгоритм ітераційного методу, який складається з послідовного розв'язування двох коректних мішаних задач Неймана-Діріхле і Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа. Досліджено збіжність і стійкість даного методу.

Класичним ітераційним регуляризуючим методом є метод Ландвебера і

як відомо для даного методу необхідним є вигляд спряженого оператора. В роботі побудовано дві модифікації узагальненого методу Ландвебера, для яких не потрібен спряжений оператор. Наведено алгоритми даних ітераційних процедур, на кожному кроці яких потрібно розв'язати задачу Діріхле і Робіна або мішані задачі Діріхле-Неймана і Неймана-Діріхле для рівняння Лапласа з відповідними вхідними даними. Досліджено збіжність і стійкість отриманих ітераційних методів.

Оскільки, на кожному кроці усіх ітераційних процесів потрібно розв'язувати одну з коректних тривимірних задач Неймана-Діріхле, Діріхле-Неймана, Діріхле або Робіна для рівняння Лапласа, то в роботі також розглянуто алгоритми для їх чисельного розв'язування за допомогою непрямого методу інтегральних рівнянь. Усі коректні задачі зведені до системи двовимірних інтегральних рівнянь, досліджено коректність отриманих систем у відповідних просторах, виділено слабкі особливості в ядрах. Розглянуто дискретний проєкційний метод Гальоркіна для дискретизації одержаних систем інтегральних рівнянь, досліджено збіжність даного методу та встановлено оцінки похибок методу. Враховано специфіку тривимірних областей, а також, наведено оптимізацію обчислень.

Для усіх регуляризуючих методів для розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа наведено декілька чисельних експериментів для різних конфігурацій областей і різних вхідних даних, а також для даних із шумом, які підтверджують стійкість і збіжність розглянутих методів: побудовані таблиці зміни значень похибок шуканих даних Коші і наведені відповідні графіки. Для розглянутих коректних граничних задач показано декілька чисельних експериментів, які показують високу ефективність методу інтегральних рівнянь у випадку коректних задач.

Ключові слова: задача Коші, рівняння Лапласа, тривимірна область, метод Тіхонова, альтернуючий метод, узагальнений метод Ландвебера, метод L-кривих, метод інтегральних рівнянь, метод Вінерта.

Borachok I. V. *Numerical solution of the Cauchy problem for the Laplace equation in three dimensional double connected domains.* – On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.07 – Computational mathematics. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2019.

The thesis is devoted to the numerical solution of the problem of reconstructing the Cauchy data of a harmonic function in a three-dimensional double connected domain. In the paper, it is shown that the initial problem belongs to a class of ill-posed problems, in the sense of lack of stability on the input data. Therefore, in order to obtain a stable numerical solution, a class of regularization methods is considered. A brief overview of existing regularization numerical methods is made for solving incorrect problems, in particular, a two-dimensional or three-dimensional Cauchy problem for the Laplace equation with a brief analysis of advantages or disadvantages. Also, a brief description of the functional spaces required for theoretical studies is given.

For a numerical solution of the initial problem, the direct Tikhonov regularization method and two iterative methods (the alternating method and the generalized Landveber method) are considered.

In the case of Tikhonov's method, the Cauchy problem is reduced to an ill-posed system of two-dimensional integral equations by means of the theory of potential and using the Green's formula. In both variants, the integral representation of the solution, the corresponding ill-posed system of integral equations, as well as the appearance of the desired Cauchy data on the internal boundary is given. For two systems of integral equations, the possibility of applying Tikhonov's regularization method has been investigated. The parametrization of the received systems of integral equations and the weak singularity in the kernel are investigated. By means of the discrete Galerkin projection method, the parametrized systems of integral equations are completely discretized, moreover unknown

densities are approximated by a linear combination of spherical harmonics, and the integrals are approximated by means of corresponding cubature rules with superalgebraic order of convergence for analytic integral functions. As a result, the solutions of the systems of the integral equations are reduced to the search for unknown coefficients in the approximations of unknown densities, and the sought-after coefficients are the solution of the systems of linear algebraic equations obtained after the application of the Galerkin method. It is shown how to optimize the process of forming coefficients of systems of linear equations to reduce the number of calculations and how to use the obtained results in the formation of discrete Cauchy data approximation.

To the obtained systems of linear equations, the Tikhonov regularization method was used, and the regularization parameter was chosen using the L-curve method. The formulas for finding an approximate solution in the domain and for finding approximate values of the Cauchy data on the inner boundary of the domain for both approaches of the method of integral equations are given, and a brief comparative analysis of both approaches is presented.

Also, iterative regularizing methods for numerical solving of an ill-posed three-dimensional Cauchy problem for the Laplace equation are used in the thesis. First, the algorithm of the alternating method is given. This iteration method was proposed by V. Kozlov and V. Maz'ya for ill-posed problems with a self-adjoint operator and was used in some papers for numerical solving of a two-dimensional Cauchy problem. In this thesis, the idea of the method is extended to the case of three-dimensional domains. An algorithm for an iterative method is presented, which consists of sequential solving of two well-posed mixed Neumann-Dirichlet and Dirichlet-Neumann problems for the Laplace equation. The convergence and stability of this method are investigated.

The classic iterative regularizing method is the Landveber method, and as is known for the iteration procedure, the form of the adjoint operator is necessary. Two modifications of the generalized Landveber method for which no adjoint

operator is required are constructed in the work. The algorithms of data of iterative procedures are presented, at each step of which it is necessary to solve the Dirichlet and Robin problem or the mixed Dirichlet-Neumann and Neumann-Dirichlet problems for the Laplace equation with the corresponding input data. The convergence and stability of the obtained iterative methods are investigated.

Since at every step of all iterative processes one needs to solve one of the well-posed three-dimensional Neumann-Dirichlet, Dirichlet-Neumann, Dirichlet or Robin problems for the Laplace equation, then the algorithms for their numerical solving by an indirect method of integral equations are considered. All well-posed problems are reduced to a system of two-dimensional integral equations, the well-posedness of the received systems in the corresponding spaces is studied, a weak singularity in the kernel are singled out. A discrete Galerkin projection method is considered for the discretization of the obtained systems of integral equations, the convergence of this method is investigated and the estimations of errors of the method are established. The specificity of three-dimensional areas is taken into account, as well as optimization of calculations.

For all regularization methods for solving the Cauchy problem for the Laplace equation, several numerical experiments are presented for various domain configurations and different input data, as well as for noise data, which prove the stability and convergence of the methods under consideration: the tables of changes of the errors of the desired Cauchy data and the corresponding graphs are given. For the considered correct boundary problems, several numerical experiments are shown which show the high efficiency of the method of integral equations in the case of well-posed problems.

Key words: Cauchy problem, Laplace equation, three-dimensional domain, Tikhonov method, alternating method, generalized Landveber method, L-curve method, integral equations method, Wienert method.

Наукові статті у вітчизняних фахових виданнях:

1. Борачок І. Про чисельне розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях. / І. Борачок, Р. Хапко // Вісник Львівського університету, серія прикладна математика та інформатика. – 2015. Т. 18.
2. Borachok I. An iterative method for the Cauchy problem for the Laplace equation in three-dimensional domains. / I. Borachok // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2017. Т.126 – С.3-15.

Наукові статті у закордонних виданнях:

3. Borachok I. Numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in 3-dimensional domains by integral equations. / I. Borachok, R. Chapko, T. Johansson // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2016. – Vol.24 – P. 1550-1568.
4. Borachok I. Numerical solution of an elliptic 3-dimensional Cauchy problem by the alternating method and boundary integral equations. / I. Borachok, R. Chapko, T. Johansson // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2016. – Vol.24 – P. 711-725.
5. Baravdish G. An iterative method for the Cauchy problem for second-order elliptic equations. / G. Baravdish, I. Borachok, R. Chapko, T. Johansson, M. Slodička // International Journal of Mechanical Sciences. – 2018. – Vol.142 – P. 216-223.

Матеріали конференцій:

6. Борачок І. Про чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях методом інтегральних рівнянь. / І. Борачок, Р. Хапко // Матеріали ІІІ конференції “Обчислю-

вальні методи і системи перетворення інформації”, Львів: фізико-математичний інститут імені Г.В. Карпенка – 2014.

7. Борачок І. Про чисельне розв’язування задачі Коші для рівняння Лапласа у тривимірних двозв’язних областях альтернуючим методом. / І. Борачок, Р. Хапко // Матеріали XXI Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Львів: ЛНУ імені Івана Франка – 2015.
8. Борачок І. Чисельне розв’язування задачі Коші для рівняння Лапласа у тривимірних двозв’язних областях методом граничних інтегральних рівнянь. / І. Борачок // Матеріали міжнародної наукової конференції УСАМ, Львів: ЛНУ імені Івана Франка – 2017.
9. Борачок І. Чисельне розв’язування задачі Коші для рівняння Лапласа у тривимірних двозв’язних областях прямим методом інтегральних рівнянь. / І. Борачок // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції АРАМС, Львів: ЛНУ імені Івана Франка – 2018.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ	2
ВСТУП	12
РОЗДІЛ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ КОШІ ТА ОГЛЯД МЕТОДІВ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	20
1.1. Функціональні простори	20
1.2. Постановка задачі Коші та її некоректність	22
1.3. Чисельні методи для задачі Коші	26
Висновки до розділу 1	34
РОЗДІЛ 2. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РЕГУЛЯРИЗАЦІЄЮ ТІХОНОВА	36
2.1. Зведення до системи граничних інтегральних рівнянь через теорію потенціалу	36
2.2. Зведення до системи граничних інтегральних рівнянь через формулу Гріна	40
2.3. Параметризація системи граничних інтегральних рівнянь	45
2.4. Дискретний проєкційний метод	47
2.5. Регуляризація Тіхонова для системи лінійних рівнянь і формування розв'язку задачі Коші	54
2.6. Оптимізація обчислень	61
2.7. Чисельні експерименти	69
Висновки до розділу 2	83

РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ІТЕРАЦІЙНИМИ РЕГУЛЯРИЗУЮЧИМИ МЕТОДАМИ НА ОСНОВІ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	84
3.1. Альтернуючий метод	85
3.2. Узагальнений метод Ландвебера	89
3.3. Чисельне розв'язування прямих граничних задач	95
3.3.1. Чисельне розв'язування мішаних задач	96
3.3.2. Чисельне розв'язування задачі Діріхле	101
3.3.3. Чисельне розв'язування задачі Робіна	104
3.4. Чисельні експерименти	106
Висновки до розділу 3	119
ВИСНОВКИ	120
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	121
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА	136

ВСТУП

Актуальність теми. У сучасній обчислювальній та прикладній математиці обернені задачі для диференціальних рівнянь в часткових похідних відіграють важливе значення. Ще в 1976р, Келлер [90] започаткував означення оберненої задачі: "дві задачі є оберненими одна до іншої, якщо розв'язок однієї з них (або частина розв'язку) є вхідними даними для іншої задачі". Означення є доволі абстрактним і не дає однозначної відповіді на питання, яка задача є прямою, а яка – оберненою. Проте, зазвичай дані задачі не виникали одночасно, одна з них була сформульована раніше і відповідно раніше проаналізована, вивчена, різноманітні методи уже отримані для знаходження точного або наближеного розв'язку, а інша – є менш досліджена, не розроблені методи для знаходження розв'язку і т.д. Задачу, яку досліджено краще, прийнято називати прямою задачею, а відповідно другу задачу – оберненою [90,91]. Більше того, є ще одна велика відмінність між цими задачами – їхня коректність [91]. Обернена задача зазвичай є некоректно поставленою за Адамаром [25,69]. Згідно означення коректності задачі, має існувати єдиний розв'язок, який неперервно залежить від вхідних даних (розв'язок стійкий). Для обернених задач навіть якщо існування або єдиність вдається довести, то виявляється, що не виконується умова стійкості. Математичні моделі багатьох фізичних процесів є некоректно поставленими і менш дослідженими, а для їхнього чисельного розв'язування потрібно використовувати відповідні методи [29,36,40,62].

Задача Коші для еліптичного рівняння в областях $D \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$ є класичним прикладом некоректної задачі через відсутність стійкості за вхідними даними (приклад Адамара [69]). Характерною особливістю задачі є перевизначені умови на частині границі області ∂D і необхідність відшукування невідомих даних на іншій частині границі. Дану задачу можна трактувати

як обернену задачу до класичних задач Діріхле чи Неймана, які є більш дослідженими і коректними (при накладанні певних умов, коли потрібно, див., напр., [97]).

Задача Коші для рівняння Лапласа є об'єктом досліджень науковців протягом багатьох років, бо має широкий спектр застосування, як математична модель або проміжна задача, яка виникає під час чисельного розв'язування інших математичних задач, що описують такі фізичні проблеми:

- задачу визначення напруги і/або сили струму на недоступній границі об'єкту за відомими вимірами напруги і сили струму на доступній частині границі [62];
- проблему виявлення корозії на недоступній частині границі [40];
- задачі електростатики для реконструкції недоступних об'єктів [36];
- задачу визначення геофізичних параметрів структури ядра Землі [64];
- задачу реконструкції температури на недоступній частині границі [84, 85];
- задачі неруйнівного тестування, для визначення характеристик недоступної частини границі [29];
- задачі фізики плазми [66]

і інші, див., наприклад, [46].

Точний розв'язок задачі Коші для рівняння Лапласа можна знайти лише для певних конкретних областей і вхідних даних, див., наприклад, [18]. Виникає потреба в розробці ефективного чисельного алгоритму для знаходження наближеного розв'язку поставленої задачі. Відсутність стійкості приводить нас до розв'язування цікавої і нетривіальної проблеми, оскільки неможливим є застосування класичних чисельних методів для наближеного розв'язування крайових задач для рівняння Лапласа, див., наприклад, [4, 13, 97].

Для чисельного розв'язування некоректних задач розробляється клас регуляризуючих методів, які дозволяють отримати наближений стійкий розв'язок задачі. Ідея цих методів полягає в наближенні вихідної задачі деякою іншою коректною задачею, розв'язок якої збігається до розв'язку вихідної задачі, див., наприклад, [35, 65, 91, 97]. Такі методи розглядалися у працях авторів С. Солодкий [23, 24, 108, 109], А. Тіхонов [15, 65], Р. Хапко [1, 43–48, 50], В. Вавричук [2, 3, 5], R. Kress [83, 95, 97, 98], О. Ivanyshyn [43, 81–83], Т. Johansson [32, 44, 45, 48–50, 74, 75, 86], А. Kirsch [68, 91], Н. Engl [54, 55, 57, 59], М. Lavrentiev [100, 114], V. Morozov [21, 106], М. Hanke [58, 70, 72], V. Isakov [80] та інших.

Незважаючи на велику кількість публікацій, що містять алгоритми розв'язування різноманітних некоректних задач, задача Коші для рівняння Лапласа в тривимірних областях є менш дослідженою. Це зумовлено в першу чергу розмірністю області задачі. Для випадку двовимірних областей вже є розроблені досить ефективні регуляризуючі методи для чисельного розв'язування оберненої задачі. Метод регуляризації Тіхонова, альтернуючий метод, метод Ландвебера, градієнтний метод і інші методи є імплементовані для чисельного розв'язування двовимірної задачі Коші, див., наприклад, [47, 75, 76, 110, 111].

Проте, випадок тривимірних областей є менш дослідженим. Уже були розроблені чисельні алгоритми для напівбезмежних областей [46], або методи для двозв'язних областей [60], які не дають достатньо ефективного наближення до точного розв'язку. Тому виникає потреба в розробці ефективного регуляризуючого алгоритму, який дозволить знайти наближений розв'язок задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних областях при точних чи збурених вхідних даних. В даній роботі зосередимось на розробці чисельних методів для випадку тривимірних двозв'язних областей, проте, нескладними зусиллями дані алгоритми можна реалізувати і для напівбезмежних чи однозв'язних областей. Більше того, для деяких регуляризуючих алгоритмів потрібно мати ефективний чисельний метод для знаходження наближеного розв'язку прямої задачі, який враховує специфіку тривимірних областей, що

також буде розглянуто.

Зазвичай для отримання чисельного розв'язку різних диференціальних задач використовувались методи, що базуються на скінченних елементах. Проте, в даній роботі таким базовим методом буде метод граничних інтегральних рівнянь, див. наприклад, [97], який володіє деякими беззаперечними перевагами:

- пониження розмірності задачі (що важливо для тривимірної задачі);
- застосовність до необмежених областей;
- супералгебраїчний порядок збіжності наближеного розв'язку коректного інтегрального рівняння (важливо для прямих задач).

Проте, потрібно враховувати специфіку конфігурації тривимірної області.

Отже, чисельне розв'язування тривимірної задачі Коші для рівняння Лапласа є нетривіальною і мало дослідженою задачею, яка становить практичний і теоретичний інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота була виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка на кафедрі обчислювальної математики у рамках науково-дослідницької теми “Методи обчислювальної математики для прямих та обернених задач” (державний реєстраційний номер 0113U001901).

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є розробка, застосування та обґрунтування ефективних чисельних методів для розв'язування лінійних обернених задач реконструкції даних Коші на недоступній границі області, а також апробація створених чисельних схем на модельних прикладах. Для досягнення цієї мети використовуються прямі та ітераційні регуляризуючі методи, основані на розв'язуванні двовимірних граничних інтегральних рівнянь з слабкими особливостями в ядрі. Реалізація такого підходу вимагає розв'язування таких задач:

- мішані задачі, задачі Діріхле і Робіна для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях (прямі коректні задачі);
- задача Коші для рівняння Лапласа в тривимірних областях (обернена некоректна задача).

Об'єктом дослідження є прямі та обернені задачі для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях.

Предметом дослідження є чисельні методи для наближеного розв'язування прямих і обернених задач.

Методами досліджень є прямий і непрямий методи інтегральних рівнянь, метод Вінерта, метод Гальоркіна, метод Тіхонова, метод L-кривих, альтернуючий метод, узагальнений метод Ландвебера.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

1. Розроблено алгоритм зведення прямих задач для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях, з граничними поверхнями ізоморфними одиничній сфері, до системи інтегральних рівнянь. Досліджено коректність отриманих систем інтегральних рівнянь у відповідних просторах, виділено слабкі особливості в ядрах.
2. Запропоновано чисельне розв'язування коректних інтегральних рівнянь за допомогою дискретного проєкційного методу Гальоркіна з використанням спеціальних кубатурних формул (метод Вінерта). Досліджено збіжність та встановлено оцінки похибок методу. Здійснено оптимізацію кількості обчислень одержаного алгоритму. Виконано чисельні експерименти, які підтверджують отримані оцінки похибок.
3. Розроблено алгоритм для чисельного розв'язування поставленої оберненої тривимірної задачі методом регуляризації Тіхонова в поєднанні з прямим і непрямим методами інтегральних рівнянь. Доведено коректність застосування методу Тіхонова у випадку двох підходів подання

розв'язку задачі. Виділено слабкі особливості в ядрах отриманих систем інтегральних рівнянь. Двовимірні інтегральні рівняння дискретизовані за допомогою методу Вінерта. Здійснено оптимізацію кількості обчислень. Реалізовано метод L-кривих для вибору параметра регуляризації. Проведено чисельні експерименти для двох модифікацій методу інтегральних рівнянь для точних і збурених вхідних даних, які підтверджують стійкість запропонованого методу.

4. Реалізовано ітераційний альтернуючий метод для чисельного розв'язування задачі Коші. Встановлено регуляризуючі властивості методу, запропоновано критерій зупинки ітераційного методу та показано його збіжність і стійкість. Використано метод граничних інтегральних рівнянь для розв'язування коректних тривимірних мішаних задач. Наведено результати чисельних експериментів, які підтверджують стійкість методу.
5. Запропоновано дві модифікації узагальненого методу Ландвебера для чисельного розв'язування оберненої задачі. Встановлено регуляризуючі властивості методів, показано їх збіжність і стійкість. Застосовано метод інтегральних рівнянь для чисельного розв'язування мішаних задач, задачі Діріхле і Робіна в тривимірних областях для рівняння Лапласа. Виконано чисельні експерименти, які підтверджують стійкість даних методів.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані в дисертації, мають теоретичний і практичний характер. Вони є певним внеском у розробку ефективних алгоритмів для регуляризації лінійних обернених тривимірних задач для еліптичних рівнянь.

Дані результати мають широке прикладне застосування в електростатиці, геофізиці, неруйнівному тестуванні і т.д.

Отримані результати увійшли в звіти НДЧ Львівського національного університету імені Івана Франка (2015-2018 рр.).

Особистий внесок здобувача. Результати, які виносяться на захист, отримані автором дисертації самостійно. У публікаціях [7, 33, 38, 39] Р. Хап-ку належить постановка задачі, загальні підходи регуляризації некоректної задачі, ідеї використання методу інтегральних рівнянь. У працях [33, 38, 39] Т. Johansson відповідав за коретність усіх теоретичних досліджень, аналіз доведень, побудову алгоритмів, формування кінцевих версій робіт. У праці [33] авторам G. Baravdish і M. Slodička належить доведення певної частини теореми про збіжність узагальненого методу Ландвебера і формування ітераційного алгоритму. У публікаціях [7, 33, 38, 39] здобувачеві належить використання методу інтегральних рівнянь для зведення диференціальної задачі до системи інтегральних рівнянь, параметризація одержаної системи, виділення слабких особливостей в ядрах інтегральних операторів, застосування дискретного методу Гальоркіна з відповідними кубатурними формулами та побудова апроксимації розв'язку, оптимізація обчислень для формування коефіцієнтів матриць, застосування методу Тіхонова, а також методу L-кривих, реалізація усіх ітераційних алгоритмів і проведення усіх чисельних експериментів для тривимірних областей. Стаття [37] написана здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на наукових семінарах кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка протягом 2015-2019рр., на III конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації” в Фізико-механічному інституті імені Г.В. Карпенка НАН України в 2014р., на XXI Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” в Львівському національному університеті імені Івана Франка в 2015р., на Міжнародній науковій конференції USAM у Львівському національному університеті імені Івана Франка в 2017р., на Всеукраїнській науковій конференції APAMCS в Львівському

національному університеті імені Івана Франка в 2018р.

Публікації. Результати дисертації опубліковано в двох статтях [7, 37] у фахових виданнях із переліку, затвердженого ДАК України, у трьох статтях [33, 38, 39] у закордонних фахових журналах. Статті [33, 38, 39] входять до наукометричної бази даних Scopus, а [37] – до Web of Science. У матеріалах наукових конференцій опубліковано чотири тези [6, 8, 10, 11].

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з таких структурних елементів: вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку із списком публікацій здобувача. Загальний обсяг роботи становить 137 сторінок, містить 12 таблиць, 31 рисунків, 115 найменувань у списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ КОШІ ТА ОГЛЯД МЕТОДІВ
ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

У цьому розділі буде розглянуто постановку задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях і досліджено питання коректності сформульованої задачі. Також зробимо короткий огляд існуючих чисельних методів для розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних областях та наведемо означення деяких функціональних просторів, які використовуватимуться для теоретичних досліджень поставленої задачі.

1.1. Функціональні простори

Наведемо означення стандартних функціональних просторів. Основні відомості взяті на основі робіт [91, 97, 102].

Нехай D – обмежена область в R^3 .

Означення 1.1.1. Простір функцій $L_p(D)$ – це банахів простір функцій, які при піднесенні до степеня $p, p \geq 1$ є інтегрованими за Лебегом, причому норма визначається так:

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \forall f \in L_p(D).$$

Зауваження 1.1.2. Простір $L_2(D)$ є гільбертовим простором.

Означення 1.1.3. Простір Соболева $W_p^k(D)$ порядку $k \geq 1$, при $1 \leq p < \infty$ – це банахів простір функцій з простору $L_p(D)$, які мають узагальнені похідні порядку k з простору $L_p(D)$. Норма визначається так:

$$\|f\|_{W_p^k(D)} = \left(\sum_{i=0}^k \|\nabla^i f\|_{L_p(D)}^p \right)^{1/p}, \quad \forall f \in W_p^k(D),$$

де $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$.

Зауваження 1.1.4. Для випадку $p = 2$, простір $W_p^k(D)$ є гільбертовим простором, який прийнято позначати $H^k(D)$. Скалярний добуток має вигляд:

$$(f, g)_{H^k(D)} = \sum_{i=0}^k (\nabla^i f, \nabla^i g)_{L_2(D)}, \quad \forall f, g \in H^k(D).$$

Простори Соболева $H^k(D)$ можна визначити також за допомогою перетворення Фур'є [97]. Важливим простором для досліджень є простір функцій $H^1(D)$.

Зауваження 1.1.5. Норма в просторі $H^1(D)$ задається так:

$$\|f\|_{H^1(D)} = \left(\|f\|_{L_2(D)}^2 + \|\nabla f\|_{L_2(D)}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall f \in H^1(D).$$

Теорема 1.1.6. Нехай область D – це обмежена область з ліпшицевою границею ∂D . Тоді існує лінійний обмежений оператор $T : W_p^1(D) \rightarrow L_p(\partial D)$, при $1 \leq p < \infty$, для якого виконується наступна рівність:

$$\forall f \in C(\bar{D}) \cap W_p^1(D) : \quad Tf = f|_{\partial D}.$$

Оператор T називається оператором сліду.

Зауваження 1.1.7. Доведення теореми і властивості даного оператора див., наприклад, [28].

Зауваження 1.1.8. Простір слідів функцій з $H^1(D)$ на ∂D позначається $H^{1/2}(\partial D)$. Норма в просторі слідів визначена наступним чином:

$$\|f\|_{H^{1/2}(\partial D)} = \left(\|f\|_{L_2(\partial D)}^2 + \int_{\partial D} \int_{\partial D} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} ds(x) ds(y) \right)^{1/2}, \quad \forall f \in H^{1/2}(\partial D).$$

Зауваження 1.1.9. Вважатимемо, що $H^{-1/2}(\partial D) = (H^{1/2}(\partial D))^*$.

Означення 1.1.10. Простір Гьольдера $C^{0,\alpha}(D)$, $\alpha > 0$ – це банахів простір рівномірно неперервних за Гьольдером функцій в D , для яких норма визначається так:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(D)} = \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x,y \in D, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

1.2. Постановка задачі Коші та її некоректність

Нехай $D_2 \subset \mathbb{R}^3$ однозв'язна обмежена область з границею Γ_2 і $D_1 \subset D_2$ однозв'язна обмежена область з границею Γ_1 . Границі Γ_1 і Γ_2 – це ізоморфні одиничній сфері поверхні Ляпунова. Позначимо $D = D_2 \setminus \overline{D_1}$, а $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^\top$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до границі області D : $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Приклад області D зображено на рис. 1.1.

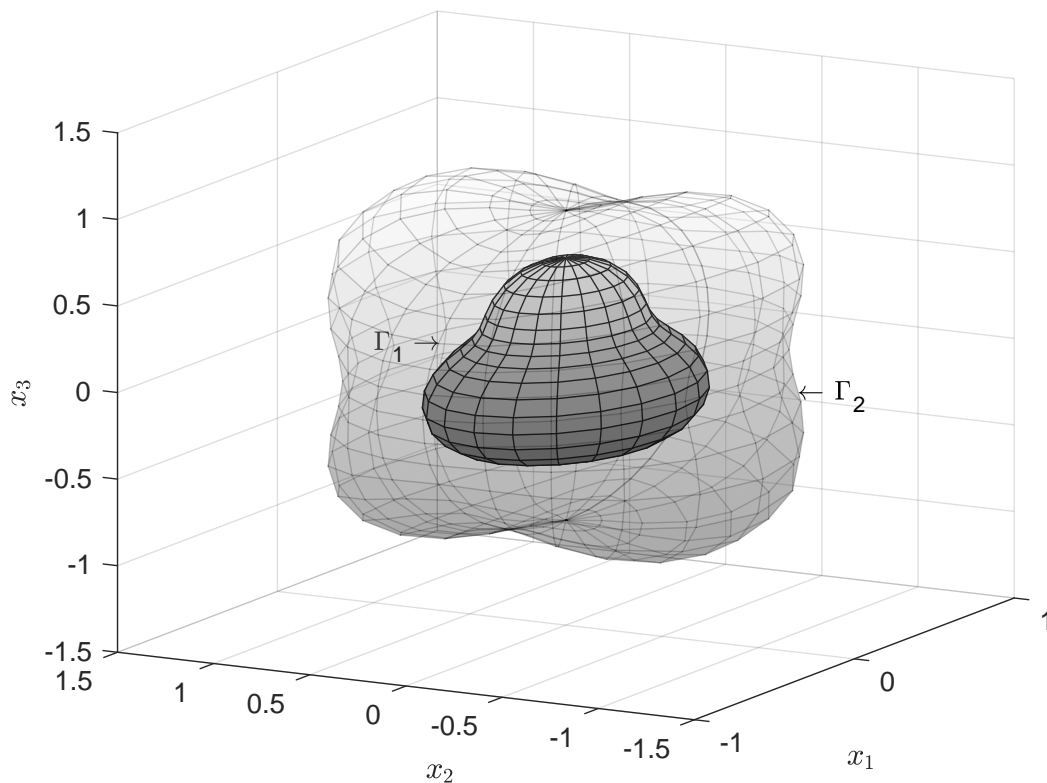


Рис. 1.1: Приклад області D .

Означення 1.2.1. *Задача Коші для рівняння Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D \quad (1.2.1)$$

полягає у знаходженні такого класичного розв'язку $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, що задовольняє граничні умови:

$$u = f_2 \quad \text{на } \Gamma_2 \quad \text{і} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad (1.2.2)$$

для заданих функцій $f_2, g_2 \in C(\Gamma_2)$.

Отож, потрібно знайти значення функції u в області D , а також реконструювати значення функції u і нормальної похідної $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ на внутрішній границі області Γ_1 .

Означення 1.2.2. *Функцію u і її нормальну похідну $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, заданими на границі Γ , називатимемо даними Коші.*

Зауваження 1.2.3. *Границя Γ з означення 1.2.2 – це одна з поверхонь Γ_1 або Γ_2 .*

Зауваження 1.2.4. *Дані Коші $\left(u, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)$ на Γ_1 – невідомі, а $\left(u, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)$ на Γ_2 це задана пара функцій (f_2, g_2) .*

Зауваження 1.2.5. *Відомі дані Коші можуть бути задані лише на частині поверхні (як результат певних вимірів). Розглядатиметься випадок, коли дані Коші є повністю визначені на поверхні Γ_2 , проте алгоритми, які будуть запропоновані в наступних розділах, для чисельного розв'язування поставленої задачі, можна легко реалізувати для випадку частково визначених даних Коші.*

На практиці дані Коші визначені в природніх просторах Соболева. Тому розглянемо слабке формулювання поставленої задачі.

Означення 1.2.6. Слабким розв'язком задачі Коші для рівняння Лапласа є функція $u \in H^1(D)$, для якої $u|_{\Gamma_2} = f_2$ і яка задовольняє варіаційне формулювання задачі:

$$\int_D \nabla u(x) \nabla \phi(x) dx = \int_{\Gamma_2} g_2(x) \phi(x) ds(x), \quad \forall \phi \in H^1(\bar{D}),$$

де $f_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, $g_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$.

Дуже важливим питанням є дослідження коректності поставленої задачі. Ж. Адамар у [69] сформулював означення коректності задачі математичної фізики. Для того, щоб задача була коректною, потрібно, щоб виконувались наступні три умови:

- розв'язок існує;
- розв'язок єдиний;
- розв'язок неперервно залежить від вхідних даних.

Розглянемо, чи виконуються дані умови для задачі Коші. Не існує результатів про коректність без накладання додаткових умов на вхідні дані. Перші результати досліджень є наведені в теоремі Коші-Ковалевської.

Теорема 1.2.7. Для аналітичних даних Коші існує єдиний розв'язок задачі Коші для рівняння Лапласа, аналітичний в \bar{D} .

Доведення. Див., наприклад, [112]. □

Проте, дані Коші на практиці є результатом вимірів певних приладів, тому не можна гарантувати їх аналітичність. Розглянемо загальніші теореми пов'язані із дослідженнями коректності задачі Коші для рівняння Лапласа.

Теорема 1.2.8 (Єдиність). *Задача Коші (1.2.1)–(1.2.2) має не більше одного розв'язку.*

Доведення. Впливає із теореми Кальдерона про єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння, див. [41]. \square

Теорема 1.2.9 (Існування). *Розв'язок задачі (1.2.1)–(1.2.2) існує, якщо дані Коші (f_2, g_2) є узгодженими.*

Доведення. Відомо, що якщо дані Коші існують (визначені) в просторах слідів, тобто

$$\|f_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} + \|g_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \leq E, \quad E > 0, \quad f_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2), \quad g_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_2),$$

тоді існує розв'язок задачі $u \in H^1(D)$. Див., наприклад, у [26, 30, 75].

У роботі [12] наведено загальну умову узгодженості даних Коші для існування розв'язку. \square

Теорема 1.2.10 (Стійкість). *Розв'язок задачі (1.2.1)–(1.2.2) не залежить неперервно від вхідних даних.*

Доведення. Ж. Адамаром, див. [69], було розглянуто контрприклад вхідних даних для задачі Коші для рівняння Лапласа у напівбезмежній двовимірній області, для яких задача є нестійкою. \square

Зауваження 1.2.11. *Стійкість відстуня навіть у випадку аналітичних заданих даних Коші.*

Зауваження 1.2.12. *Будемо вважати, що вхідні дані (f_2, g_2) є узгодженими, а некоректність проявляється тільки у відсутності стійкості.*

Задача Коші для рівняння Лапласа є класичним прикладом лінійної оберненої задачі.

Означення 1.2.13. *Задача називається оберненою до іншої задачі (прямої задачі), якщо вхідні дані для оберненої задачі включають розв'язок (або частковий розв'язок) прямої задачі.*

Задачу, яка краще досліджена і простіше розв'язується зазвичай називають прямою. Обернені задачі складніше розв'язуються і майже завжди некоректні за Адамаром. Прикладом прямої і оберненої задачі може бути інтегрування і диференціювання.

Зауваження 1.2.14. *Оскільки на зовнішній границі задані надлишкові дані: значення функції і нормальної похідної, і потрібно реконструювати невідомі (недоступні) значення функції і нормальної похідної на внутрішній границі області, то вважатимемо, що сформульована задача Коші це обернена задача до деякої граничної задачі. Прямою задачею для задачі Коші можуть бути коректні мішані задачі або задача Діріхле (Неймана, Робіна) для рівняння Лапласа.*

1.3. Чисельні методи для задачі Коші

В попередньому розділі було сформульовано постановку тривимірної задачі Коші для рівняння Лапласа, а також отримано інформацію про її некоректність. Нехай вхідні дані з (1.2.1)–(1.2.2) задані з певною похибкою. Позначимо збурені вхідні дані як $f_2^\delta, g_2^\delta \in C(\Gamma_2)$. Для них виконується наступна оцінка:

$$\|f_2 - f_2^\delta\|_{L_2(\Gamma_2)} < \delta, \quad \|g_2 - g_2^\delta\|_{L_2(\Gamma_2)} < \delta, \quad (1.3.1)$$

$\delta > 0$ - називають рівнем похибки або шуму.

Означення 1.3.1. *Стійким розв'язком задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) є функція $u^\delta \in H^1(D)$, яка в певному сенсі апроксимує розв'язок задачі Коші і неперервно залежить від вхідних даних f_2^δ, g_2^δ .*

Для того, щоб чисельно отримати стійкий розв'язок некоректної задачі, потрібно застосовувати спеціальні регуляризуючі методи, див., наприклад, [89, 91]. Дані методи полягають у заміні некоректної задачі деякою близькою коректною задачею або множиною коректних задач, залежних від

певного параметра (або функції). Даний параметр (або числові значення функції) називають параметром регуляризації. Розв'язок регуляризованої задачі повинен в певному сенсі апроксимувати розв'язок вихідної некоректної задачі.

Зауваження 1.3.2. *Задачу Коші (1.2.1)–(1.2.2) можна звести до еквівалентного операторного рівняння*

$$Kh = G(f_2^\delta, g_2^\delta), \quad (1.3.2)$$

де K – відомий лінійний компактний оператор у відповідних просторах, G – відомий лінійний оператор.

Подання (1.3.2) краще підходить для застосування різних чисельних методів, коли вихідна задача описана як операторне рівняння першого роду з компактним оператором (очевидно, що воно є некоректною задачею). Конкретний вигляд операторів K і G залежить від того, яким способом відбувається перехід від диференціальної задачі до операторного рівняння.

Пригадаємо означення методу регуляризації, див. [91].

Означення 1.3.3. *Нехай $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ – сімейство ін'єктивних неперервних операторів у відповідних просторах. Пара $(\{R_\lambda\}_{\lambda>0}, \tilde{\lambda})$ називається методом регуляризації задачі Коші для рівняння Лапласа, якщо виконується наступна умова:*

$$\sup_{f_2^\delta, g_2^\delta} \{ \|K^{-1}G(f_2^\delta, g_2^\delta) - R_{\tilde{\lambda}}G(f_2^\delta, g_2^\delta)\|_{C(\Gamma_1)}, f_2^\delta, g_2^\delta : (1.3.1) \} \rightarrow 0, \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Число $\tilde{\lambda}$ називають параметром регуляризації.

Існує величезна кількість наукових робіт по дослідженню задачі Коші і по її чисельному розв'язуванні. Зробимо короткий огляд існуючих чисельних методів і розглянемо їхні переваги або недоліки.

В загальному усі регуляризуючі чисельні методи можна поділити на дві великі групи методів: прямі і ітераційні. Почнемо огляд з **прямих методів**.

Регуляризація Тіхонова. В [65] А. Тіхоновим було запропоновано замінити вихідну некоректну задачу, еквівалентною задачею мінімізації функціоналу. Для задачі Коші, записаної у формі (1.3.2), він матиме вигляд: $J_\lambda(h) = \|Kh - G(f_2^\delta, g_2^\delta)\|^2 + \lambda\|h\|^2$. Відомо (див., наприклад, [15]), що при певних умовах, функціонал має єдину точку мінімуму, яка є розв'язком наступного коректного лінійного рівняння:

$$(K^*K + \lambda I)h_\lambda^\delta = K^*G(f_2^\delta, g_2^\delta), \quad (1.3.3)$$

де K^* – спряжений до K оператор, а $\lambda > 0$ – вибраний параметер регуляризації.

Регуляризацію Тіхонова можна застосовувати на різних кроках перетворень вихідної задачі.

Р. Хапко і Т. Johansson у своїх роботах за допомогою **методу інтегральних рівнянь** (див., [97]) зводять задачу Коші до розв'язування некоректної системи лінійних алгебраїчних рівнянь і до отриманої системи застосовують метод Тіхонова, див., наприклад, [46, 50]. У цьому випадку оператором регуляризованої задачі є матриця, що дозволяє дуже легко побудувати регуляризаційне рівняння (1.3.3). У розділі 2 буде розширено даний підхід чисельного розв'язування задачі Коші для тривимірних областей.

Sun Yao у своїх роботах задачу Коші у двовимірних областях зводить до системи інтегральних рівнянь, а потім застосовує регуляризацію Тіхонова. Проте виникають ще додаткові інтеграли в рівнянні Тіхонова (1.3.3), оскільки спряжений оператор до інтегрального оператора – це також інтегральний оператор. В кінцевому результаті це приводить до додаткової обчислювальної складності. Одержані чисельні результати не показують переваги над попереднім підходом, а знаходяться на тому ж рівні, див., наприклад [111].

У працях S. Takemi і L. Marin, див., наприклад, [101, 110] задачу Коші

також для двовимірних областей редукують до системи лінійних рівнянь за допомогою **методу фундаментальних розв'язків** [60]. Регуляризація Тіхонова в цьому випадку застосовується до одержаної системи. Ідея методу фундаментальних розв'язків є дуже простою і полягає в тому, що розв'язок задачі (1.2.1)–(1.2.2) подають як лінійну комбінацію звужень фундаментального розв'язку [27], тобто:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \Phi(x, y_i), \quad x \in D,$$

де c_i – невідомі коефіцієнти, $y_i \notin \bar{D}$ – деякі фіксовані точки, $\Phi(x, y)$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа. На основі граничних умов задачі (1.2.1)–(1.2.2) будують СЛАР для знаходження невідомих коефіцієнтів. Далі застосовують до отриманої системи рівнянь метод Тіхонова. Маючи, невідомі коефіцієнти c_i , використовуючи подання розв'язку, можна обчислити дані Коші на внутрішній границі області. Перевагою цього методу є його проста реалізація, проте великим недоліком є невражаючі результати чисельних експериментів і повільна збіжність.

Не до будь-якої некоректної задачі можна застосувати метод Тіхонова. Відомо, що розв'язок, отриманий за методом Тіхонова, збігається до точного розв'язку задачі при $\delta \rightarrow 0$, якщо оператор задачі (у випадку задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) – оператор K) ін'єктивний і має щільний ранг, див., наприклад, [15, 65].

Регуляризація Лаврентьєва. Регуляризованим розв'язком некоректної задачі (1.3.2) за даним методом, є розв'язок рівняння другого роду:

$$(K + \lambda I)h_\lambda^\delta = G(f_2^\delta, g_2^\delta).$$

Це один з перших чисельних методів для розв'язування некоректних задач, запропонований у 1956р. у С. Лаврентьєвом, див., наприклад, [19]. Проте, даний метод повільно збіжний до розв'язку задачі.

Окремою підзадачею є алгоритм вибору параметра регуляризації $\lambda > 0$. Одним із способів вибору параметра регуляризації $\lambda = \lambda(\delta)$ є **принцип нев'язки Морозова**, див., наприклад, [21, 107]. Тоді оптимальний параметер регуляризації вибирають з умови:

$$\|Kh_\lambda^\delta - G(f_2^\delta, g_2^\delta)\| \leq \tau\delta,$$

де $\tau \geq 1$ - фіксований параметр. Для коректної оцінки, потрібно мати апріорну інформацію про рівень шуму δ , але для реальних вхідних даних рівень шуму не є відомим.

Іншим методом вибору параметра регуляризації є метод **L-кривих**. Ідея даного методу полягає в тому, що для певного вибраного набору значень параметра регуляризації λ , будують криву в логарифмічних координатах $(\lg \|Kh_\lambda^\delta - G(f_2^\delta, g_2^\delta)\|, \lg \|h_\lambda^\delta\|)$ і шукають точку з максимальною кривизною. Шуканим параметром регуляризації, буде значення λ , яке відповідає даній точці, див., наприклад, [42, 56, 73, 91]. Перевага даного методу полягає в тому, що він не залежить від вхідної інформації про рівень шуму, на відміну від методу нев'язки Морозова. Проте, не існує теоретичних доведень, що одержаний параметр регуляризації є оптимальним. Метод L-кривих вибору параметра регуляризації для задачі Коші використано, наприклад, у роботах [47, 50]. У розділі 2 буде використано даний алгоритм для пошуку параметра регуляризації. Існує подібний метод вибору параметра регуляризації, але який будує криву у формі літери U. Такий метод називається методом **U-кривих**, див., наприклад, [94].

Більше дослідженими є **ітераційні методи регуляризації**. Розглянемо означення ітераційних регуляризуючих методів.

Означення 1.3.4. *Ітераційний метод $h_{k+1}^\delta = R_k(h_k^\delta, \dots, h_0^\delta, G(f_2^\delta, g_2^\delta))$ разом з критерієм зупинки $N(\delta)$ називається ітераційним регуляризуючим методом для задачі Коші (1.3.2), якщо для довільного початкового наближення h_0 виконуються наступні умови:*

- *коректність ітераційної формули: значення h_k^δ є повністю визначені для $k = 1, \dots, k^*$, $k^* < \infty$ і $\delta > 0$;*
- *збіжність для точних вхідних даних ($\delta = 0$):*

$$\exists k^* = N(\delta) < \infty : \quad Kh_{k^*}^\delta = G(f_2^\delta, g_2^\delta)$$

або $k^* = \infty$ і

$$\sup \|K^{-1}G(f_2^\delta, g_2^\delta) - R_k(h_k^\delta, \dots, h_0^\delta, G(f_2^\delta, g_2^\delta))\|_{C(\Gamma_1)} \rightarrow 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty;$$

- *збіжність для збурених вхідних даних ($\delta > 0$):*

$$\sup \|K^{-1}G(f_2^\delta, g_2^\delta) - R_k(h_k^\delta, \dots, h_0^\delta, G(f_2^\delta, g_2^\delta))\|_{C(\Gamma_1)} \rightarrow 0, \quad \text{при } \delta \rightarrow 0,$$

для будь-яких f_2^δ і g_2^δ , для яких виконується умова (1.3.1).

Зауваження 1.3.5. У випадку ітераційних регуляризуючих методів, параметром регуляризації є кількість ітерацій.

Зауваження 1.3.6. Критерієм зупинки ітераційного процесу може бути принцип нев'язки Морозова, тобто знайти k_δ^* :

$$\|Kh_{k_\delta^*}^\delta - G(f_2^\delta, g_2^\delta)\| \leq \tau\delta,$$

де $\tau \geq 1$.

L. Landweber [99] і В. Фридман [20] запропонували переписати рівняння (1.3.2) в такій формі $h = (I - \gamma K^*K)h + \gamma K^*G(f_2^\delta, g_2^\delta)$, де $\gamma > 0$ – деякий фіксований параметр. Використовуючи метод простої ітерації, будемо ітераційний процес:

$$h_0 = 0, \quad h_{m+1} = h_m - \gamma K^*(Kh_m - G(f_2^\delta, g_2^\delta)), \quad m \geq 0.$$

Даний ітераційний процес прийнято називати **методом Ландвебера** і його можна інтерпретувати як метод найшвидшого спуску, застосованим до мінімізації функціоналу $J_0(h) = \|Kh - G(f_2^\delta, g_2^\delta)\|^2$. У роботі [50] показано використання методу Ландвебера для регуляризації задачі Коші в двовимірних

областях. В розділі 3 застосуємо даний підхід для чисельного розв'язування задачі Коші в тривимірних областях. Більше того, побудуємо узагальнений метод Ландвебера, в якому не потрібно використовувати спряжений оператор. Недоліком ітераційного методу Ландвебера (як і більшості ітераційних методів) є його повільна збіжність.

Альтернуючий метод. В. Козлов і В. Мазья, див., наприклад, [22], запропонували фундаментальний ітераційний метод для чисельного розв'язування задачі Коші для деяких рівнянь з еліптичним оператором. Ідея методу полягає в тому, що на кожному кроці ітераційного процесу потрібно розв'язати дві коректні прямі мішані задачі. Вхідними даними для кожної із задач є частковий розв'язок іншої мішаної задачі. Критерієм зупинки є принцип нев'язки Морозова. Метод показав хороші чисельні результати для двовимірної задачі Коші, див. [50]. Альтернуючий метод для чисельного розв'язування поставленої задачі (1.2.1)–(1.2.2) буде реалізовано в розділі 3.

В роботі [26] запропоновано метод **мінімізації енергетичного функціоналу** на основі альтернуючого алгоритму, також для чисельного розв'язування двовимірної задачі Коші.

Ще одним з можливих ітераційних методів є відомий **метод спряжених градієнтів**, застосований до мінімізації функціоналу, побудованого на основі задачі Коші для рівняння Лапласа. Наприклад, у роботах [71, 76, 77, 113] показано використання даного методу для регуляризації двовимірної задачі Коші.

Можливим способом для чисельного розв'язування задачі Коші (1.3.2) є комбінація різних регуляризуючих методів. Наприклад, розглянути мінімізацію функціоналу Тихонова ітераційним методом. Або розв'язати задачу Коші прямим регуляризуючим методом, а отриманий наближений розв'язок використати в ролі початкового наближення для ітераційного методу. Після чого виконати лише декілька ітерацій для уточнення розв'язку.

У роботах [52, 53] наведені **генетичні алгоритми** для регуляризації не-

коректних задач в загальному випадку, де одним з прикладів застосування є розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа. Ідея даних методів полягає в тому, що вихідну задачу зводять до задачі мінімізації певного функціоналу, а пошук мінімуму сформованого функціоналу шукають за допомогою ідеї природного відбору, див., наприклад, [105]. Алгоритм пошуку мінімуму є дуже простим: за певним правилом формують початкову популяцію, за допомогою операторів мутації і схрещення формують нову популяцію, використовуючи функцію відбору, формують нове покоління. Операції з отриманням нового покоління повторюють доти, доки критерій зупинки на основі функції відбору не буде досягнуто.

Перевага генетичних алгоритмів полягає в тому, що за допомогою даних алгоритмів можна знайти глобальний мінімум функціоналу (ймовірно глобальний) і для цього не потрібно мати жодної додаткової інформації, такої як, градієнт функціоналу, який потрібен, наприклад, для методу спряжених градієнтів, див. [113].

Проте, чисельні експерименти з [52, 53] показують більшу похибку, порівняно з іншими алгоритмами. Рекомендується застосовувати генетичні алгоритми у поєднанні із іншими методами регуляризації, що наведено, наприклад, у роботі [52]. Більше того застосування генетичних алгоритмів краще підходить для регуляризації нелінійних обернених некоректних задач, коли мінімізуючий функціонал має складне представлення і декілька локальних точок мінімуму.

Активно розробляються алгоритми для чисельного розв'язування задачі Коші для параболічного рівняння, див., наприклад, [3, 9, 87, 92].

На основі актуальності і великої кількості робіт помітно, що задача Коші для рівняння Лапласа активно досліджується. Проте, більшість робіт є прив'язані до двовимірних областей, тому розробка ефективного алгоритму для тривимірної задачі є актуальною темою.

Під час розв'язування задачі Коші деяким регуляризуючим методом ви-

никає необхідність розв'язування мішаних задач або дискретизації задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2). Ефективним підходом для їх чисельного розв'язування є **метод інтегральних рівнянь**. В залежності від того, як ми подаємо розв'язок задачі, методи інтегральних рівнянь поділяються на прямі і не-прямі, див. [97]. Метод інтегральних рівнянь має велику кількість переваг, наприклад, застосовність до частково необмежених областей, зменшення розмірності вихідної задачі та інші. Редукована система інтегральних рівнянь складатиметься з інтегральних рівнянь першого або другого роду. Дані рівняння можна дискретизувати за методом квадратур чи Нистрьома, див. [97]. В тривимірному випадку використовується дискретний проєкційний метод Гальоркіна, запропонований у роботі [115]. Метод інтегральних рівнянь показав високу ефективність і експоненційний порядок збіжності при достатньо гладких вхідних даних для двовимірних областей, що показують чисельні експерименти у роботах [47, 50, 111]. Тому логічно використати його і під час розв'язування тривимірної задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2). Проте, можна використовувати і інші чисельні методи, такі як метод сіток, див. [61], чи метод фундаментальних розв'язків, див. [101, 110] та інші, кожен з яких має свої переваги, недоліки і область застосування.

Висновки до розділу 1

В даному розділі було зроблено короткий огляд деяких фундаментальних функціональних просторів, які використовуватимуться для теоретичних досліджень.

Сформовано класичну і слабку постановки задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях. Розглянуто питання коректності даної задачі і з'ясовано її некоректність, яка проявляється у відсутності стійкості за вхідними даними. Класифіковано дану задачу до класу лінійних обернених задач.

Розглянуто означення прямих і ітераційних регуляризуючих методів для

отримання стійкого чисельного розв'язку. Зроблено короткий огляд існуючих регуляризованих методів для розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в двовимірних і тривимірних областях. Надано короткий аналіз переваг або недоліків пропонованих методів.

На основі актуальності даної задачі і невеликого списку досліджень випадку тривимірних областей, виникає необхідність в розробці алгоритму для чисельного розв'язування тривимірної задачі Коші для рівняння Лапласа, що і буде метою досліджень, наведених в наступних розділах.

Будуть розглянуті прямі і ітераційні регуляризовані методи для чисельного розв'язування задачі Коші. В розділі 2 буде розглянуто класичний прямий регуляризований метод Тіхонова, а в розділі 3 – розглянуто два ітераційні методи: альтернуючий метод і узагальнений метод Ландвебера. В обох розділах метод інтегральних рівнянь буде використано, як алгоритм для розв'язування проміжних коректних мішаних задач або для дискретизації задачі Коші.

РОЗДІЛ 2

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РЕГУЛЯРИЗАЦІЄЮ ТІХОНОВА

В даному розділі розглянемо регуляризуючий метод Тіхонова для чисельного розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях (1.2.1)–(1.2.2). У підрозділах 2.1-2.2 будуть наведені прямий і непрямий методи інтегральних рівнянь для зведення вихідної диференціальної задачі до системи лінійних некоректних інтегральних рівнянь. У підрозділах 2.3-2.4 буде проведена повна дискретизація одержаних систем інтегральних рівнянь за допомогою дискретного проєкційного методу Гальоркіна. Метод Тіхонова буде застосований до системи лінійних алгебраїчних рівнянь у підрозділі 2.5 разом з методом L-кривих для вибору параметра регуляризації. Також в підрозділі 2.6 буде наведемо оптимізацію обчислень запропонованого алгоритму. Чисельні експерименти для різних областей, різних вхідних даних (точних і збурених) наведені у підрозділі 2.7.

2.1. Зведення до системи граничних інтегральних рівнянь через теорію потенціалу

Для зведення задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) до системи інтегральних рівнянь використаємо теорію потенціалів, див., наприклад, [97]. Даний підхід був застосований для задачі Коші в двовимірному випадку, див. [47, 50]. В даному розділі буде розширено даний підхід на випадок тривимірної задачі (1.2.1)–(1.2.2).

Пригадаємо деякі фундаментальні означення.

Означення 2.1.1. Функція $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ є фундаментальним розв'язком

рівняння Лапласа, якщо

$$\Delta\Phi(x, y) = \delta(x, y),$$

де $\delta(x, y)$ – це дельта-функція Дірака [27].

Зауваження 2.1.2. Функція виду

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}, \quad x \neq y, \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1.1)$$

є фундаментальним розв'язком для рівняння Лапласа в \mathbb{R}^3 , а $|x|$ – це евклідова норма елемента $x \in \mathbb{R}^3$.

Зауваження 2.1.3. Легко бачити, що нормальна похідна від фундаментального розв'язку має вигляд:

$$\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(x)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{(x - y)^\top \nu(x)}{|x - y|^3}, \quad x \neq y, \quad x, y \in \mathbb{R}^3. \quad (2.1.2)$$

Для одержання системи інтегральних рівнянь, введемо означення деяких інтегральних операторів. Властивості розглядуваних операторів досліджені, наприклад, у [14, 17, 97].

Означення 2.1.4. Граничні інтегральні оператори $S_{\ell j} : L_2(\Gamma_j) \rightarrow L_2(\Gamma_\ell)$ і $K_{\ell j} : L_2(\Gamma_j) \rightarrow L_2(\Gamma_\ell)$ мають вигляд:

$$(S_{\ell j}\mu)(x) = \int_{\Gamma_j} \mu(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \Gamma_\ell$$

і

$$(K_{\ell j}\mu)(x) = \int_{\Gamma_j} \mu(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(x)} ds(y), \quad x \in \Gamma_\ell,$$

де $\mu \in L_2(\Gamma_j)$, $\ell, j = 1, 2$.

Зауваження 2.1.5. Інтеграли в поданні операторів $S_{\ell\ell}$, $K_{\ell\ell}$, $\ell = 1, 2$ існують як невластні.

Зауваження 2.1.6. Інтегральний оператор $S_{\ell j}$ – це потенціал простого шару, див. [97], а $K_{\ell j}$ – це нормальна похідна від потенціалу простого шару, $\ell = 1, 2$.

Теорема 2.1.7. *Сума потенціалів простого шару*

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \phi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \phi_2(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D \quad (2.1.3)$$

є розв'язком задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2), якщо невідомі густини $\phi_1 \in L_2(\Gamma_1)$ і $\phi_2 \in L_2(\Gamma_2)$ є розв'язками лінійної системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} S_{21}\phi_1 + S_{22}\phi_2 = f_2 & \text{на } \Gamma_2 \\ K_{21}\phi_1 + \left(\frac{1}{2}I + K_{22}\right)\phi_2 = g_2 & \text{на } \Gamma_2 \end{cases}, \quad (2.1.4)$$

де I – це одиничний оператор.

Доведення. Використовуючи означення фундаментального розв'язку, змінюючи порядок інтегрування і диференціювання, бачимо, що подання функції u у (2.1.3) задовольняє рівняння Лапласа (1.2.1). Спрямовуючи точку $x \in D$ у (2.1.3) на границі області Γ_1, Γ_2 , використовуючи теореми про властивості потенціалу простого шару [97] і граничні умови (1.2.2), отримаємо, систему інтегральних рівнянь (2.1.4) для знаходження невідомих густин ϕ_1, ϕ_2 . \square

Наслідок 2.1.8. *Якщо розв'язок задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) подається у вигляді (2.1.3), тоді невідомі дані Коші на внутрішній границі області Γ_1 мають таке подання:*

$$\begin{cases} u = S_{11}\phi_1 + S_{12}\phi_2 & \text{на } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \left(-\frac{1}{2}I + K_{11}\right)\phi_1 + K_{12}\phi_2 & \text{на } \Gamma_1. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Доведення. Впливає із подання розв'язку (2.1.3) і теорем про стрибки потенціалу простого шару [97]. \square

Для аналізу системи інтегральних рівнянь (2.1.4) введемо наступний оператор.

Означення 2.1.9. *Оператор $W : L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_2) \rightarrow L_2(\Gamma_2) \times L_2(\Gamma_2)$ задається наступним чином:*

$$W = \begin{pmatrix} S_{21} & S_{22} \\ K_{21} & \frac{1}{2}I + K_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Оскільки вихідна задача (1.2.1)–(1.2.2) є нестійкою, то і система інтегральних рівнянь (2.1.4) теж буде нестійкою. Для того, щоб одержати стійкий розв'язок, застосуємо регуляризаційний метод Тіхонова. Законність застосування базується на певних властивостях оператора задачі. Дослідимо властивості оператора W (2.1.6), який описує систему (2.1.4).

Теорема 2.1.10. *Оператор W з (2.1.6) – ін'єктивний і має щільний ранг.*

Доведення. Нехай $W\phi = 0$, де $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_2)$. Функція u (2.1.3) є розв'язком рівняння Лапласа (1.2.1), тоді існує звуження розв'язку і нормальної похідної на Γ_2 , див. [103]. Функція u має нульові дані Коші на зовнішній границі Γ_2 і за теоремою Гольмгрена [78] $u \equiv 0$ в \bar{D} . Функція u є також розв'язком зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Оскільки задача Діріхле має єдиний розв'язок (клас функцій, для яких $u(x) = O(|x|^{-1})$, $|x| \rightarrow \infty$), то функція u – це нуль-функція ззовні Γ_2 . Враховуючи теорему про стрибок нормальної похідної потенціалу простого шару [97] і те, що нормальна похідна це нуль-функція, отримаємо, що $\phi_2 = 0$. Оскільки, $u = 0$ і $\phi_2 = 0$ і існують обернені оператори до S_{ij}, K_{ij} , див., наприклад, [97], то $\phi_1 = 0$. Отже, оператор W – ін'єктивний.

Для того, щоб показати, що оператор W має щільний ранг, покажемо, що спряжений оператор W^* ін'єктивний. Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_2)$. На основі вигляду матричного інтегрального оператора W , очевидно, що виконується наступна рівність:

$$(W\phi, \xi)_{L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_2)} = (\phi, W^*\xi)_{L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_2)},$$

де

$$W^* = \begin{pmatrix} S_{12} & Z_{12} \\ S_{22} & \frac{1}{2}I + Z_{22} \end{pmatrix},$$

а оператор $Z_{\ell j}$ (потенціал подвійного шару, див. [97]) має вигляд:

$$(Z_{\ell j}\mu)(x) = \int_{\Gamma_j} \mu(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \Gamma_\ell. \quad (2.1.7)$$

Нехай $W^*\xi = 0$, тоді маємо:

$$\begin{cases} S_{12}\xi_1 + Z_{12}\xi_2 = 0 & \text{на } \Gamma_1 \\ S_{22}\xi_1 + \left(\frac{1}{2}I + Z_{22}\right)\xi_2 = 0 & \text{на } \Gamma_2 \end{cases}. \quad (2.1.8)$$

Визначимо функцію

$$v(x) = \int_{\Gamma_2} \xi_1(y)\Phi(x, y)ds(y) + \int_{\Gamma_2} \xi_2(y)\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)}ds(y), \quad x \in D.$$

Тоді, аналогічно до доведення ін'єктивності W , можна показати, що з системи лінійних інтегральних рівнянь (2.1.8) випливає, що $v \equiv 0$ в \bar{D} (враховуючи властивості задач Діріхле для рівняння Лапласа). Отримаємо $\xi_1 = 0$ і $\xi_2 = 0$. Отже, оператор W^* ін'єктивний. \square

Зауваження 2.1.11. Можна розглядати і інші простори для оператора W , наприклад, простори слідів. Отримані властивості теж виконуватимуться, див. [38]. Оскільки, для побудови проекційного методу Гальоркіна використовується скалярний добуток, тому розглядаються гільбертові простори, наприклад, $L_2(D)$ або $H^1(D)$.

Зауваження 2.1.12. Оператор $A : X \rightarrow Y$ має щільний ранг, якщо множина значень оператора є щільною в Y , тобто $\overline{R(A)} = Y$.

Наслідок 2.1.13. Метод регуляризації Тихонова може бути застосований до системи (2.1.4).

Доведення. Див., наприклад, [65], з врахуванням того, що оператор W , який описує систему інтегральних рівнянь (2.1.4), ін'єктивний і має щільний ранг. \square

2.2. Зведення до системи граничних інтегральних рівнянь через формулу Гріна

В попередньому підрозділі було розглянуто непрямий підхід зведення задачі Коші до системи інтегральних рівнянь. Розглянемо інший підхід отри-

мання системи інтегральних рівнянь, а саме за допомогою формули Гріна. Даний підхід називають прямим методом інтегральних рівнянь, див., [97].

Теорема 2.2.1. *Нехай границя області ∂D належить класу C^1 і $u \in C^2(\bar{D})$ – гармонійна в D , а вектор одиничної нормалі ν направлений ззовні області. Тоді*

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) \right\} ds(y), \quad x \in D. \quad (2.2.1)$$

Доведення. Отримано із формул Гріна, див., наприклад, [97]. □

Наслідок 2.2.2. *Функція*

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \left\{ f_1(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) - g_1(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y) + \int_{\Gamma_2} \left\{ g_2(y) \Phi(x, y) - f_2(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) \right\} ds(y), \quad x \in D \quad (2.2.2)$$

є розв'язком задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2), якщо невідомі функції $f_1(y) \stackrel{\text{def}}{=} u(y)$, $g_1(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)$, $y \in \Gamma_1$ є розв'язком системи лінійних інтегральних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_1} \left\{ f_1(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) - g_1(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y) = \\ \quad \frac{1}{2} f_2(x) - \int_{\Gamma_2} \left\{ g_2(y) \Phi(x, y) - f_2(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) \right\} ds(y) \quad \text{на } \Gamma_2, \\ \frac{1}{2} f_1(x) - \int_{\Gamma_1} \left\{ f_1(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) - g_1(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y) = \\ \quad \int_{\Gamma_2} \left\{ g_2(y) \Phi(x, y) - f_2(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) \right\} ds(y) \quad \text{на } \Gamma_1. \end{array} \right. \quad (2.2.3)$$

Доведення. Границя області ∂D має вигляд $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ і враховуючи те, що зовнішня одинична нормаль до поверхні Γ_1 напрямлена всередину області

D , за теоремою 2.2.1 отримаємо:

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y) + \int_{\Gamma_2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, y) \right\} ds(y), \quad x \in D. \quad (2.2.4)$$

Спрямовуючи точку $x \in D$ в поданні розв'язку (2.2.2) на границі Γ_1 і Γ_2 , враховуючи властивості потенціалів простого і подвійного шарів [97], а також вигляд даних Коші $\left(u, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)$ на границях Γ_1 і Γ_2 , отримаємо систему лінійних інтегральних рівнянь (2.2.3), для знаходження невідомих f_1, g_1 , які одночасно являють собою шукані дані Коші. \square

Запишемо систему інтегральних рівнянь (2.2.3) у операторному вигляді. Для цього використаємо інтегральні оператори S_{ij} і Z_{ij} , визначені у підрозділі 2.1.

Наслідок 2.2.3. У операторному вигляді система (2.2.3) є такою:

$$\begin{cases} -S_{21}g_1 + Z_{21}f_1 = \frac{1}{2}f_2 - S_{22}g_2 + Z_{22}f_2 & \text{на } \Gamma_2, \\ S_{11}g_1 + \left(\frac{1}{2}I - Z_{11}\right)f_1 = S_{12}g_2 - Z_{12}f_2 & \text{на } \Gamma_1. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Доведення. Випливає із подання інтегральних операторів S_{ij} і Z_{ij} . \square

Для аналізу системи інтегральних рівнянь (2.2.5), як і в підрозділі 2.1, введемо наступний матричний оператор.

Означення 2.2.4. Оператор $\widetilde{W} : L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_1) \rightarrow L_2(\Gamma_2) \times L_2(\Gamma_1)$ задається таким чином:

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} -S_{21} & Z_{21} \\ S_{11} & \frac{1}{2}I - Z_{11} \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

Теорема 2.2.5. Оператор \widetilde{W} – ін'єктивний і має щільний ранг.

Доведення. Схема доведення аналогічно до доведення теореми 2.1.10 у підрозділі 2.1.

Покажемо, що оператор \widetilde{W} – ін’єктивний. Нехай

$$\widetilde{W}\widetilde{\phi} = 0, \quad (2.2.7)$$

де $\widetilde{\phi} = (\widehat{f}_1, \widehat{g}_1) \in L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_1)$. Дана рівність є еквівалентною до наступних інтегральних рівнянь:

$$\int_{\Gamma_1} \widehat{f}_1(y) \Phi(x, y) ds(y) - \int_{\Gamma_1} \widehat{g}_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad (2.2.8)$$

$$\int_{\Gamma_1} \widehat{f}_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \frac{1}{2} \widehat{g}_1(x) - \int_{\Gamma_1} \widehat{g}_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = 0, \quad x \in \Gamma_1. \quad (2.2.9)$$

Розглянемо функцію

$$\widehat{v}(x) = \int_{\Gamma_1} \widehat{f}_1(y) \Phi(x, y) ds(y) - \int_{\Gamma_1} \widehat{g}_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in D.$$

Функція \widehat{v} є розв’язком зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа для області D_2 (клас функцій, що $\widehat{v}(x) = O(|x|^{-1})$, $|x| \rightarrow \infty$). Враховуючи (2.2.8), отримаємо, що \widehat{v} на Γ_2 дорівнює нулю. Тоді $\widehat{v} = 0$ ззовні області D_2 . Оскільки функція \widehat{v} є неперервною через Γ_2 , маємо, що $\widehat{v} = 0$ в D , на основі аналітичного продовження (\widehat{v} є розв’язком рівняння Лапласа в D). Також, функція \widehat{v} є розв’язком внутрішньої задачі Діріхле для області D_1 з нульовою умовою на Γ_1 (на основі теореми про стрибок потенціалу подвійного шару і (2.2.9)). Тоді $\widehat{v} = 0$ в D_1 . Отже, функція $v = 0$ в \overline{D}_1 , тому $v \equiv 0$ в \mathbb{R}^3 . На основі теорем про стрибки потенціалів отримуємо, що $\widehat{f}_1 = \widehat{g}_1 = 0$. Отже, оператор \widetilde{W} ін’єктивний.

Покажемо, що оператор \widetilde{W} має щільний ранг. Розглянемо спряжений оператор $\widetilde{W}^* : L_2(\Gamma_2) \times L_2(\Gamma_1) \rightarrow L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_1)$. Нехай $\xi = (\xi_2, \xi_1) \in L_2(\Gamma_2) \times L_2(\Gamma_1)$, тоді рівність

$$\left(\widetilde{W}\phi, \xi \right)_{L_2(\Gamma_2) \times L_2(\Gamma_1)} = \left(\phi, \widetilde{W}^*\xi \right)_{L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_1)}$$

виконується, якщо

$$\widetilde{W}^* = \begin{pmatrix} -S_{12} & S_{11} \\ K_{12} & \frac{1}{2}I - K_{11} \end{pmatrix}.$$

Попереднє твердження випливає із властивостей векторного скалярного добутку і подання спряжених інтегральних операторів. Нехай $\widetilde{W}^*\xi = 0$, тоді виконується:

$$\begin{cases} -S_{12}\xi_2 + S_{11}\xi_1 = 0 & \text{на } \Gamma_1 \\ K_{12}\xi_2 + \left(\frac{1}{2}I - K_{11}\right)\xi_1 = 0 & \text{на } \Gamma_1 \end{cases}. \quad (2.2.10)$$

Розглянемо функцію:

$$v(x) = \int_{\Gamma_2} \xi_2 \Phi(x, y) ds(y) - \int_{\Gamma_1} \xi_1 \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D.$$

Тоді, на основі системи (2.2.10) і властивостей потенціалу простого шару [97] маємо, що

$$\begin{cases} v = 0 & \text{на } \Gamma_1 \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Gamma_1 \end{cases}.$$

Функція v має нульові дані Коші на границі області Γ_1 , тоді за теоремою Гольмгрена [78] $v \equiv 0$ в \overline{D} . Функція v є також розв'язком зовнішньої задачі Діріхле для області \overline{D}_2 (з необхідною асимптотикою на нескінченості для гарантування існування розв'язку). Враховуючи те, що потенціал простого шару є непервною функцією через Γ_2 , маємо, що $v = 0$ наближаючись ззовні до Γ_2 . Тоді за принципом міні-максу, v – це нуль-функція ззовні Γ_2 . За теоремою про стрибок нормальної похідної потенціалу простого шару, див. [97], і того, що нормальна похідна – це нуль-функція, отримаємо, що $\xi_2 = 0$ на Γ_2 . Тоді з (2.2.10) випливає, що $\xi_1 = 0$ на Γ_1 . Отже, оператор \widetilde{W}^* – ін'єктивний і, враховуючи властивості спряжених операторів, маємо, що оператор \widetilde{W} має щільний ранг. \square

Наслідок 2.2.6. *Метод регуляризації Тихонова може бути застосованим для регуляризації некоректної задачі (2.2.5).*

Доведення. Впливає із [65] з врахуванням властивостей оператора \widetilde{W} . \square

2.3. Параметризація системи граничних інтегральних рівнянь

В попередніх підрозділах 2.1–2.2 тривимірну задачу Коші було зведено до систем інтегральних рівнянь (2.1.4) і (2.2.5). Для повної дискретизації даних систем, використаємо дискретний проєкційний метод Гальоркіна. Для наближеного обчислення поверхневих інтегралів у (2.1.4) або (2.2.5) використаємо відповідні кубатурні формули, які будуть наведені в наступному підрозділі.

Кубатурні формули дають змогу наближено обчислити значення поверхневих інтегралів у випадку, коли поверхня інтегрування це одинична сфера \mathbb{S}^2 . Тому, щоб мати змогу застосувати їх, перепишемо (параметризуємо) поверхневі інтеграли у системах (2.1.4), (2.2.5).

Теорема 2.3.1. *Нехай границі Γ_1 і Γ_2 є неперервні і можуть бути бієктивно відображені на одиничну сферу \mathbb{S}^2 . Тоді існують взаємнооднозначні відображення q_1, q_2 :*

$$q_1 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Gamma_1, \quad q_2 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Gamma_2,$$

для яких визначені яacobіани переходу J_{q_1}, J_{q_2} .

Доведення. Див., оригінальну роботу по отриманню кубатурних формул [115] або [31]. \square

Визначимо допоміжні параметризовані інтегральні оператори.

Теорема 2.3.2. *Параметризовані оператори $\widetilde{S}_{\ell_j} : L_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^2)$, $\widetilde{K}_{\ell_j} : L_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^2)$ і $\widetilde{Z}_{\ell_j} : L_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^2)$ мають наступний вигляд:*

$$(\widetilde{S}_{\ell_j}\phi)(\widehat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \phi(\widehat{y}) L_{\ell_j}(\widehat{x}, \widehat{y}) ds(\widehat{y}), \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^2, \quad (2.3.1)$$

$$(\widetilde{K}_{\ell_j}\phi)(\widehat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \phi(\widehat{y}) M_{\ell_j}(\widehat{x}, \widehat{y}) ds(\widehat{y}), \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^2 \quad (2.3.2)$$

i

$$(\tilde{Z}_{\ell j}\phi)(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \phi(\hat{y}) \tilde{M}_{\ell j}(\hat{x}, \hat{y}) ds(\hat{y}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2, \quad (2.3.3)$$

де ядра є такими:

$$L_{\ell j}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} \Phi(q_\ell(\hat{x}), q_j(\hat{y})) J_{q_j}(\hat{y}), & \ell \neq j \\ \frac{R_\ell(\hat{x}, \hat{y})}{|\hat{x} - \hat{y}|}, & \ell = j \end{cases}, \quad (2.3.4)$$

$$M_{\ell j}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} -\frac{(q_\ell(\hat{x}) - q_j(\hat{y}))^\top \nu(q_\ell(\hat{x}))}{4\pi |q_\ell(\hat{x}) - q_j(\hat{y})|^3} J_{q_j}(\hat{y}), & \ell \neq j \\ \frac{\tilde{R}_\ell(\hat{x}, \hat{y}, \hat{x})}{|\hat{x} - \hat{y}|}, & \ell = j \end{cases} \quad (2.3.5)$$

i

$$\tilde{M}_{\ell j}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} \frac{(q_\ell(\hat{x}) - q_j(\hat{y}))^\top \nu(q_\ell(\hat{y}))}{4\pi |q_\ell(\hat{x}) - q_j(\hat{y})|^3} J_{q_j}(\hat{y}), & \ell \neq j \\ -\frac{\tilde{R}_\ell(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y})}{|\hat{x} - \hat{y}|}, & \ell = j \end{cases}, \quad (2.3.6)$$

де

$$R_\ell(\hat{x}, \hat{y}) = J_{q_\ell}(\hat{y}) \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{|\hat{x} - \hat{y}|}{|q_\ell(\hat{x}) - q_\ell(\hat{y})|}, & \hat{x} \neq \hat{y} \\ \frac{1}{4\pi J_{q_\ell}(\hat{x})}, & \hat{x} = \hat{y} \end{cases}, \quad (2.3.7)$$

i

$$\tilde{R}_\ell(\hat{x}, \hat{y}, \hat{xy}) = -R_\ell(\hat{x}, \hat{y}) \begin{cases} \frac{(q_\ell(\hat{x}) - q_\ell(\hat{y}))^\top \nu(q_\ell(\hat{xy}))}{|q_\ell(\hat{x}) - q_\ell(\hat{y})|^2}, & \hat{x} \neq \hat{y} \\ \frac{(q_\ell''(\hat{x}))^\top \nu(q_\ell(\hat{x}))}{2(q_\ell'(\hat{x}))^\top q_\ell'(\hat{x})}, & \hat{x} = \hat{y} \end{cases}, \quad (2.3.8)$$

$\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{S}^2$, $\hat{xy} \in \{\hat{x}, \hat{y}\}$, $\ell, j = 1, 2$.

Доведення. Впливає із параметризації інтегральних операторів S, K (2.1.4) і Z (2.1.7), використовуючи функції переходу q_1, q_2 . Також, при побудові ядер L, M і \tilde{M} враховано, що $\lim_{\hat{y} \rightarrow \hat{x}} \frac{|\hat{x} - \hat{y}|}{|q_\ell(\hat{x}) - q_j(\hat{y})|} = \frac{1}{J_{q_\ell}(\hat{x})}$. \square

Наслідок 2.3.3. *Параметризовані системи інтегральних рівнянь (2.1.4) і (2.2.5) мають вигляд:*

$$\begin{cases} \tilde{S}_{21}\psi_1 + \tilde{S}_{22}\psi_2 = \tilde{f}_2 & \text{на } \mathbb{S}^2 \\ \tilde{K}_{21}\psi_1 + \left(\frac{1}{2}I + \tilde{K}_{22}\right)\psi_2 = \tilde{g}_2 & \text{на } \mathbb{S}^2 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

i

$$\begin{cases} -\tilde{S}_{21}\tilde{g}_1 + \tilde{Z}_{21}\tilde{f}_1 = \frac{1}{2}\tilde{f}_2 - \tilde{S}_{22}\tilde{g}_2 + \tilde{Z}_{22}\tilde{f}_2 & \text{на } \mathbb{S}^2 \\ \tilde{S}_{11}\tilde{g}_1 + \left(\frac{1}{2}I - \tilde{Z}_{11}\right)\tilde{f}_1 = \tilde{S}_{12}\tilde{g}_2 - \tilde{Z}_{12}\tilde{f}_2 & \text{на } \mathbb{S}^2 \end{cases}, \quad (2.3.10)$$

де $\psi_\ell(\hat{x}) = \phi(q_\ell(\hat{x}))$, $\ell = 1, 2$, $\tilde{f}_2(\hat{x}) = f_2(q_2(\hat{x}))$, $\tilde{g}_2(\hat{x}) = g_2(q_2(\hat{x}))$, $\tilde{f}_1(\hat{x}) = f_1(q_1(\hat{x}))$, $\tilde{g}_1(\hat{x}) = g_1(q_1(\hat{x}))$, $\forall \hat{x} \in \mathbb{S}^2$.

Доведення. Впливає із параметризації початкових систем інтегральних рівнянь (2.1.4) і (2.2.5) за допомогою функцій переходу q_1, q_2 , з врахуванням побудованих параметризованих операторів. \square

Для непрямого підходу методу інтегральних рівнянь (підрозділ 2.1) також потрібно параметризувати дані Коші на внутрішній границі області, задані формулою (2.1.5).

Наслідок 2.3.4. *Параметризовані дані Коші, отримані непрямим методом інтегральних рівнянь, на внутрішній границі області мають вигляд:*

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{S}_{11}\psi_1 + \tilde{S}_{12}\psi_2 & \text{на } \mathbb{S}^2 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = \left(-\frac{1}{2}I + \tilde{K}_{11}\right)\psi_1 + \tilde{K}_{12}\psi_2 & \text{на } \mathbb{S}^2 \end{cases}. \quad (2.3.11)$$

У випадку прямого методу інтегральних рівнянь (підрозділ 2.2), невідомі значення даних Коші це параметризовані функції \tilde{f}_1 і \tilde{g}_1 , визначені у наслідку 2.3.3.

2.4. Дискретний проєкційний метод

Для дискретизації систем лінійних інтегральних рівнянь (2.3.9) і (2.3.10), використаємо метод Вінерта, див. [115]. Даний метод є дискретним проєкцій-

ним методом Гальоркіна, застосованим до системи інтегральних рівнянь у \mathbb{R}^3 з конкретним вибором базисних функцій.

Це не єдиний метод для чисельного розв'язування системи інтегральних рівнянь, наприклад, у роботі [46] наведено метод квадратур для дискретизації системи інтегральних рівнянь, сформованої для задачі Коші у напівбездименсійній тривимірній області. Проте, в даній роботі буде використано метод Вінерта.

Отож, невідомі густини з лінійних систем інтегральних рівнянь (2.3.9) і (2.3.10), апроксимуємо лінійною комбінацією дійснозначних сферичних гармонік $Y_{k,m}^R$, див. [27] (відомо, що вони утворюють у просторі $L_2(\mathbb{S}^2)$ повну ортонормовану систему).

Означення 2.4.1. Функції $\tilde{\psi}_\ell$

$$\psi_\ell(\hat{x}) \approx \tilde{\psi}_\ell(\hat{x}) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \psi_{k,m}^\ell Y_{k,m}^R(\hat{x}), \quad \ell = 1, 2, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2, \quad (2.4.1)$$

де $\ell = 1, 2$, а $\psi_{k,m}^\ell \in \mathbb{R}$ – невідомі коефіцієнти, є наближенням (проекцією) до невідомих густин ψ_ℓ в підпросторі сферичних гармонік.

Аналогічно, запишемо апроксимацію (проекцію) невідомих функцій \tilde{f}_1, \tilde{g}_1 із системи, отриманої прямим методом інтегральних рівнянь (2.3.10).

Означення 2.4.2. Апроксимації невідомих \tilde{f}_1, \tilde{g}_1 мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_1(\hat{x}) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \tilde{f}_{1k,m} Y_{k,m}^R(\hat{x}), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2 \\ \tilde{g}_1(\hat{x}) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \tilde{g}_{1k,m} Y_{k,m}^R(\hat{x}), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2 \end{array} \right., \quad (2.4.2)$$

де $\tilde{f}_{1k,m} \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}_{1k,m} \in \mathbb{R}$ – невідомі коефіцієнти.

Тепер розв'язування задачі Коші зводиться до пошуку невідомих коефіцієнтів у апроксимації невідомих густин, визначених у попередніх означеннях.

За методом Гальоркіна для побудови слабкого формулювання потрібно визначити скалярний добуток в підпросторі сферичних гармонік.

Розглянемо кубатурні формули, для наближеного обчислення поверхневих інтегралів без особливостей і з сингулярною особливістю в ядрі, а також побудуємо скалярний добуток.

Кубатурні формули

Вінертом були запропоновані кубатурні формули для наближеного обчислення поверхневих інтегралів без особливості і з слабкою особливістю в ядрі, див. [115]. Ідея отримання формул полягає в заміні підінтегральної функції комбінацією сферичних гармонік [27], з подальшим точним інтегруванням, використовуючи квадратурну формулу Гауса-Лежандра, див., наприклад, [96].

Одинична сфера в \mathbb{R}^3 має таке параметричне подання:

$$\mathbb{S}^2 = \{p(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}. \quad (2.4.3)$$

Розглянемо розподіл точок на сфері \mathbb{S}^2 :

$$\tilde{y}_{s'\rho'} = p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'}), \quad (2.4.4)$$

де $\theta_{s'} = \arccos \tilde{t}_{s'}$, $s' = 1, \dots, n' + 1$, $\varphi_{\rho'} = \frac{\pi\rho'}{n' + 1}$, $\rho' = 0, \dots, 2n' + 1$, $n' \in \mathbb{N}_0$.

На рис. 2.1 наведено розподіл точок у випадку $n' = 8$.

Вінертом були доведені наступні теореми для наближеного обчислення поверхневих інтегралів.

Теорема 2.4.3. *Для будь-якої $f \in C(\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\})$ справедливою є наступна кубатурна формула для наближеного обчислення інтегралу по сфері:*

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{y}) ds(\hat{y}) \approx Q_{n'}(f) = \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} f(\tilde{y}_{s'\rho'}), \quad n' \in \mathbb{N}_0, \quad (2.4.5)$$

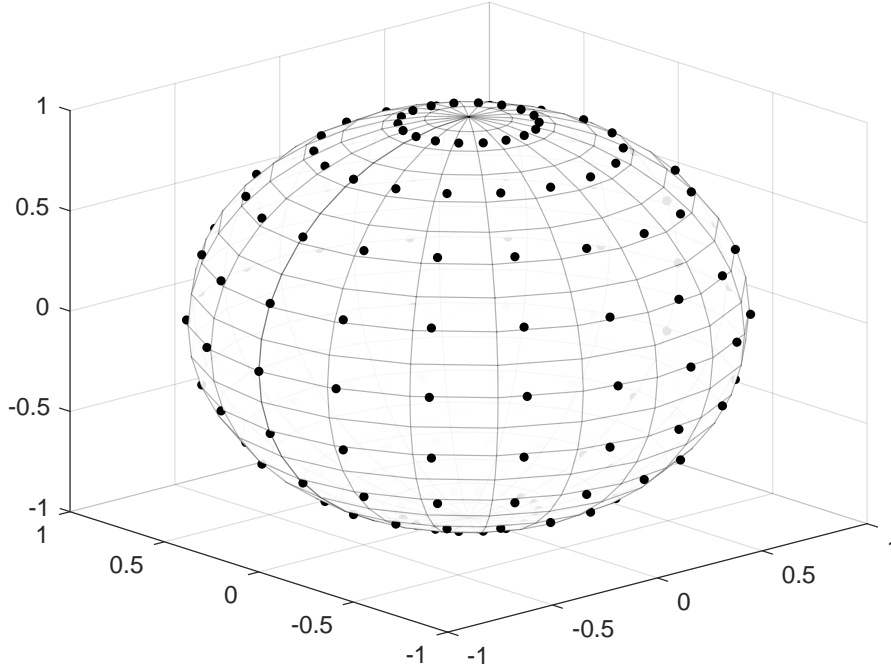


Рис. 2.1: Розподіл кубатурних вузлів при $n' = 8$.

де вузли $\tilde{y}_{s'\rho'} = p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})$ задані формулою (2.4.4), $\tilde{\alpha}_{s'} = \frac{2(1 - \tilde{t}_{s'}^2)}{[(n' + 1)P_{n'}(\tilde{t}_{s'})]^2}$ – ваги квадратурної формули Гауса-Лежандра, $P_{n'}$ – поліном Лежандра [27], $\tilde{t}_{s'}$ – нулі полінома Лежандра $P_{n'+1}$, а $\tilde{\mu}_{\rho'} = \frac{\pi}{n' + 1}$, $n' \in \mathbb{N}_0$.

Доведення. Див. [115]. □

Теорема 2.4.4. Для будь-якої $f \in C(\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\})$ справедливою є така кубатурна формула для наближеного обчислення інтегралу по сфері зі слабкою особливістю у ядрі:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{f(\hat{y})}{|\hat{x} - \hat{y}|} ds(\hat{y}) \approx \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} f(T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2, n' \in \mathbb{N}_0, \quad (2.4.6)$$

де $\tilde{\beta}_{s'} = \tilde{\alpha}_{s'} \sum_{k=0}^{n'} P_{n'}(\tilde{t}_{s'})$, $s' = 1, \dots, n' + 1$. Ваги $\tilde{\alpha}_{s'}$, $\tilde{\mu}_{\rho'}$ – задані у (2.4.5), $P_{n'}$ – поліном Лежандра степеня n' [27], $\tilde{y}_{s'\rho'}$ – вузли, згенеровані за формулою (2.4.4), $T_{\hat{x}}$ – відповідний ортогональний оператор.

Доведення. Див. [115]. □

Зауваження 2.4.5. Для ортогонального оператора $T_{\hat{x}} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, для довільної точки $\hat{x} = p(\theta, \varphi) \in \mathbb{S}^2$ повинна виконуватись умова:

$$T_{\hat{x}}\hat{x} = \hat{n} = (0, 0, 1), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \quad (2.4.7)$$

Дана умова була використана при побудові кубатурної формули (2.4.6).

Наслідок 2.4.6. Ортогональний оператор $T_{\hat{x}} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, для якого виконується умова (2.4.7) задається наступним чином:

$$T_{\hat{x}} = D_P(\varphi)D_T(\theta)D_P(-\varphi), \quad (2.4.8)$$

де

$$D_P(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_T(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Вінертом була доведена наступна теорема про збіжність кубатурних формул.

Теорема 2.4.7. Для аналітичних функцій $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\exists C > 0$ і $\sigma > 0$, залежні від f :

$$\left| \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{y}) ds(\hat{y}) - Q_{n'}(f) \right| \leq C e^{-(n'+1)\sigma}, \quad \forall n' \in \mathbb{N}_0.$$

Доведення. Див. [115]. □

Зауваження 2.4.8. Аналогічна теорема справедлива і для кубатурної формули із сингулярною особливістю у ядрі (2.4.6).

Зауваження 2.4.9. Кубатурні формули (2.4.5), (2.4.6) є точними для сферичних гармонік [27] порядку меншого за $2n' + 1$.

Кубатурні формули (2.4.5), (2.4.6) будуть далі застосовні для повної дискретизації системи, отриманої методом Гальоркіна.

Розглянемо означення дискретного скалярного добутку.

Означення 2.4.10. *Дискретний скалярний добуток в підпросторі сферичних гармонік має вигляд:*

$$(v, w) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} \alpha_s v(\hat{y}_{s\rho}) w(\hat{y}_{s\rho}), \quad v, w \in C(\mathbb{S}^2), \quad (2.4.9)$$

де ваги μ_{ρ}, α_s згенеровані аналогічним способом як для кубатурної формули (2.4.5), вузли $\hat{y}_{s\rho} = p(\theta_s, \varphi_{\rho})$ задані формулою (2.4.4), але ваги і вузли залежать від параметра дискретизації $n \in \mathbb{N}_0$.

Легко переконатись, що для (2.4.9) виконуються аксіоми скалярного добутку.

Повернемося до дискретизації системи інтегральних рівнянь, заданих у (2.3.9) і (2.3.10), методом Гальоркіна. Для відшукування невідомих коефіцієнтів в наближеному поданні невідомих густин (2.4.1) і (2.4.2), домножимо скалярно (2.4.9) систему інтегральних рівнянь (2.3.9) і (2.3.10) на базисні функції $Y_{k,m}^R$, $k = 0, \dots, n$, $m = -k, \dots, k$. Крім того, для наближеного обчислення інтегралів без особливостей і з слабкою особливістю в ядрі в системах інтегральних рівнянь використаємо кубатурні формули (2.4.5), (2.4.6). Дані міркування доводять наступну теорему.

Теорема 2.4.11. *Невідомі коефіцієнти $\psi_{k,m}^{\ell}$, $\ell = 1, 2$, $\tilde{f}_{1k,m}$, $\tilde{g}_{1k,m}$, $k = 0, \dots, n$, $m = -k, \dots, k$ в апроксимації невідомих густин, є розв'язками таких систем алгебраїчних рівнянь розміром $2(n+1)^2 \times 2(n+1)^2$:*

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(\psi_{k,m}^1 \hat{A}_{kk'mm'}^{21} + \psi_{k,m}^2 \hat{A}_{kk'mm'}^{22} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} \alpha_s \tilde{f}_2(\hat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \\ \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(\psi_{k,m}^1 \tilde{A}_{kk'mm'}^{21} + \psi_{k,m}^2 \tilde{A}_{kk'mm'}^{22} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} \alpha_s \tilde{g}_2(\hat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \end{cases}, \quad (2.4.10)$$

$$k' = 0, \dots, n, \quad m' = -k', \dots, k' \quad i$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(-\tilde{g}_{1k,m} \widehat{A}_{kk'mm'}^{21} + \tilde{f}_{1k,m} \widehat{A}_{kk'mm'}^2 \right) = \widehat{B}_{k',m'} \\ \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(\tilde{g}_{1k,m} \widetilde{A}_{kk'mm'}^{11} - \tilde{f}_{1k,m} \widetilde{A}_{kk'mm'}^1 \right) = \widetilde{B}_{k',m'} \end{cases}, \quad (2.4.11)$$

$k' = 0, \dots, n, \quad m' = -k', \dots, k'$. Причому коефіцієнти даних систем визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{kk'mm'}^{\ell j} &= \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \mu_{\rho} \alpha_s Y_{k',m'}^R(\widehat{x}_{s\rho}) \\ &\times \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'} L_{\ell j}(\widehat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) Y_{k,m}^R(\tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell \neq j \\ \tilde{\beta}_{s'} R_{\ell}(\widehat{x}_{s\rho}, \widehat{y}_{sp}^{s'p'}) Y_{k,m}^R(\widehat{y}_{sp}^{s'p'}), & \ell = j \end{cases}, \quad (2.4.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{kk'mm'}^{\ell j} &= \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} \alpha_s Y_{k',m'}^R(\widehat{x}_{s\rho}) \left(\begin{cases} 0, & \ell \neq j \\ \frac{1}{2} (-1)^{\ell} Y_{k,m}^R(\widehat{x}_{s\rho}), & \ell = j \end{cases} + \right. \\ &+ \left. \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'} M_{\ell j}(\widehat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) Y_{k,m}^R(\tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell \neq j \\ \tilde{\beta}_{s'} \widetilde{R}_{\ell}(\widehat{x}_{s\rho}, \widehat{y}_{sp}^{s'p'}, \widehat{x}_{s\rho}) Y_{k,m}^R(\widehat{y}_{sp}^{s'p'}), & \ell = j \end{cases} \right) \quad (2.4.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{kk'mm'}^{\ell} &= \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} \alpha_s Y_{k',m'}^R(\widehat{x}_{s\rho}) \left(\begin{cases} 0, & \ell = 2 \\ -\frac{1}{2} Y_{k,m}^R(\widehat{x}_{s\rho}), & \ell = 1 \end{cases} + \right. \\ &+ \left. \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'} M_{\ell 1}(\widehat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) Y_{k,m}^R(\tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell = 2 \\ -\tilde{\beta}_{s'} \widetilde{R}_{\ell}(\widehat{x}_{s\rho}, \widehat{y}_{sp}^{s'p'}, \widehat{y}_{sp}^{s'p'}) Y_{k,m}^R(\widehat{y}_{sp}^{s'p'}), & \ell = 1 \end{cases} \right) \quad (2.4.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{k'm'} &= \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} \alpha_s Y_{k',m'}^R(\widehat{x}_{s\rho}) \times \\ &\times \left(\frac{1}{2} \tilde{f}_2(\widehat{x}_{s\rho}) - \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} \left\{ \widetilde{R}_2(\widehat{x}_{s\rho}, \widehat{y}_{sp}^{s'p'}, \widehat{y}_{sp}^{s'p'}) \tilde{f}_2(\widehat{y}_{sp}^{s'p'}) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. R_2(\widehat{x}_{s\rho}, \widehat{y}_{sp}^{s'p'}) \tilde{g}_2(\widehat{y}_{sp}^{s'p'}) \right\} \right) \quad (2.4.15) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{k'm'} &= \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \mu_{\rho} \alpha_s \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \times \\ &\times \left\{ L_{12}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{g}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) - \tilde{M}_{12}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{f}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) \right\}, \quad (2.4.16) \end{aligned}$$

$\ell, j = 1, 2, k' = 0, \dots, n, m' = -k', \dots, k'$ і $\tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'} = T_{\hat{x}_{s\rho}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}$.

Зауваження 2.4.12. Ортогональний оператор $T_{\hat{x}}$ – визначений у (2.4.8), вузли $\tilde{y}_{s'\rho'}$ – згенеровані як у (2.4.5), $\hat{x}_{s\rho}$ – згенеровані як у (2.4.9). Ваги $\mu_{\rho}, \tilde{\mu}_{\rho'}$, $\alpha_s, \tilde{\alpha}_{s'}, \tilde{\beta}_{s'}$ – задані у (2.4.5), (2.4.6), (2.4.9). Функції $L_{\ell j}, M_{\ell j}, \tilde{M}_{\ell j}, R_{\ell}, \tilde{R}_{\ell}$ задані у (2.3.4)–(2.3.8), вигляд сферичних гармонік $Y_{k,m}^R$ задано у [27].

2.5. Регуляризація Тіхонова для системи лінійних рівнянь і формування розв'язку задачі Коші

У підпункті 2.4 було отримано дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.4.10) і (2.4.11). Розв'язавши систему (2.4.10) можна знайти невідомі коефіцієнти $\psi_{k,m}^{\ell}$ з подання густин (2.4.1). Аналогічно, з системи (2.4.11) знайдемо невідомі коефіцієнти $\tilde{f}_{1k,m}, \tilde{g}_{1k,m}$ з подання густин (2.4.2). Але, оскільки задача Коші (1.2.1)–(1.2.2) є некоректно поставленою за Адамаром (що було наведено у підрозділі 1.2), тому відповідні системи інтегральних рівнянь і системи алгебраїчних рівнянь також є некоректними, а, отже, для отримання стійкого розв'язку потрібно застосувати до систем (2.4.10) і (2.4.11) регуляризуючий метод.

Розглянемо регуляризуючу процедуру для лінійної системи (2.4.10), отриманої непрямым методом інтегральних рівнянь. Для системи (2.4.11) вона формується аналогічним чином, тільки з використанням іншої матриці і правої частини.

Лінійна система рівнянь (2.4.10) у компактному вигляді задається так:

$$A\psi = B, \quad (2.5.1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \left\{ \widehat{A}_{kk'mm'}^{21} \right\}_{k=0, k'=0, m=-k, m'=-k'}^{n, n', k, k'} & \left\{ \widehat{A}_{kk'mm'}^{22} \right\}_{k=0, k'=0, m=-k, m'=-k'}^{n, n', k, k'} \\ \left\{ \widetilde{A}_{kk'mm'}^{21} \right\}_{k=0, k'=0, m=-k, m'=-k'}^{n, n', k, k'} & \left\{ \widetilde{A}_{kk'mm'}^{22} \right\}_{k=0, k'=0, m=-k, m'=-k'}^{n, n', k, k'} \end{pmatrix},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \left\{ \psi_{k,m}^1 \right\}_{k=0, m=-k}^{n, k} \\ \left\{ \psi_{k,m}^2 \right\}_{k=0, m=-k}^{n, k} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \left\{ \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} \alpha_s \widetilde{f}_2(\widehat{x}_{s\rho}) Y_{k', m'}^R(\widehat{x}_{s\rho}) \right\}_{k'=0, m=-k'}^{n, k'} \\ \left\{ \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} \alpha_s \widetilde{g}_2(\widehat{x}_{s\rho}) Y_{k', m'}^R(\widehat{x}_{s\rho}) \right\}_{k'=0, m=-k'}^{n, k'} \end{pmatrix}.$$

В методі Тіхонова, див., наприклад, [65], регуляризованим розв'язком системи (2.5.1) є елемент ψ_{λ} , який мінімізує наступний функціонал:

$$\psi_{\lambda} = \arg \min \left\{ \Psi_{\lambda}(\psi_{\lambda}) = \|A\psi_{\lambda} - B\|_2^2 + \lambda \|\psi_{\lambda}\|_2^2 \right\}, \quad \lambda > 0.$$

Теорема 2.5.1. Для лінійної системи рівнянь (2.5.1) і заданого параметра регуляризації λ існує єдиний мінімум функціоналу Ψ_{λ} і він є розв'язком такої системи:

$$(A^*A + \lambda I) \psi_{\lambda} = A^*B, \quad (2.5.2)$$

де A^* – спряжений до A оператор, I – одинична матриця, а λ – параметр регуляризації.

Доведення. Див. [65]. □

Зауваження 2.5.2. Оскільки оператор A з (2.5.2) – матриця, то $A^* = A^{\top}$.

Теорема 2.5.3. *Нехай $A : X \rightarrow Y$ – обмежений лінійний оператор зі щільним рангом. Нехай $f \in A(X)$ і $\rho \geq \|A^{-1}f\|$, а також $\psi^\delta : \|A\psi^\delta - f\| = \inf_{\|\psi \leq \rho\|} \|A\psi - f\|$. Тоді для $f^\delta \in Y : \|f^\delta - f\| \leq \delta$ справедливою є збіжність:*

$$\psi^\delta \rightarrow A^{-1}f, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Причому виконується така оцінка збіжності:

$$\|\psi^\delta - A^{-1}f\| = O(\delta^{1/2}), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Доведення. Наведено у [97]. □

Наслідок 2.5.4. *Наближений розв’язок задачі Коші, отриманий за методом Тихонова (2.5.2), при заданому рівні шуму $\delta \rightarrow 0$ збігається до розв’язку задачі (2.5.1).*

Доведення. Оператор W , який описує систему інтегральних рівнянь, ін’єктивний і має щільний ранг (що було показано в підпункті 2.1), то і лінійний оператор A в (2.5.1) володіє тими ж властивостями. Далі твердження наслідку отримуємо із застосування теореми 2.5.3. □

Метод L-кривих

Для того, щоб отримати регуляризований розв’язок задачі за методом Тихонова (2.5.2), потрібно вибрати параметер регуляризації. Це є окремою складною задачею. Найпростішим способом вибору параметру, є спосіб перебору. Оптимальним способом вибору є принцип нев’язки Морозова [21]. Проте, він вимагає апріорної інформації про рівень шуму δ . В даній роботі способом вибору параметра регуляризації є метод L-кривих.

Отож, параметер регуляризації λ знаходимо за методом L-кривих (опис методу наведено, наприклад, у [42, 73]). Ідея методу полягає у побудові для набору значень параметра регуляризації λ кривої в логарифмічних координатах ($\lg \|A\psi_\lambda - B\|_2, \lg \|\psi_\lambda\|_2$) і пошуку точки з максимальною кривизною. Побудований для некоректної задачі в логарифмічних координатах, графік

набуває характерної L форми з добре виділеним кутом, який розділяє вертикальну і горизонтальну частини кривої. Вертикальна частина кривої відповідає розв'язкам, в яких величина $\|\psi_\lambda\|_2$ найбільш чутлива до зміни параметра регуляризації. Горизонтальна частина відповідає розв'язкам, в яких норма нев'язки $\|A\psi_\lambda - B\|_2$ більше залежить від зміни λ .

Однією з головних властивостей L -кривої є те, що шукане значення параметра регуляризації завжди знаходиться поблизу кута кривої, за розташуванням якого можна знайти параметр регуляризації, який є найкращим балансом між нормою нев'язки і нормою розв'язку. Вибір цієї точки можна робити візуально, або автоматично, обчислюючи максимальну кривизну сплайна, який побудований на основі знайдених наборів значень. Приклад L -кривої зображено на рис. 2.2.

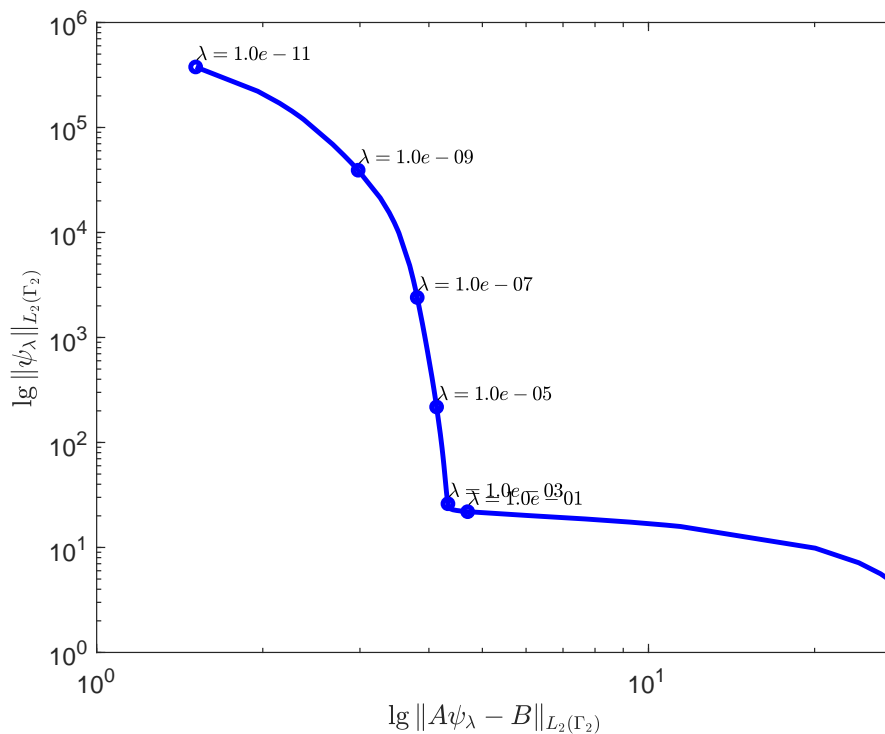


Рис. 2.2: Приклад L -кривої.

Розв'язавши регуляризовану лінійну систему (2.5.2), отримаємо невідомі коефіцієнти в апроксимаційному поданні густин у (2.4.1). Маючи подання густин, за (2.1.3) знайдемо найближчий розв'язок задачі Коші в області D .

Проте, отриманий розв'язок не є повністю дискретним. Дискретизуємо подання розв'язку.

Наслідок 2.5.5. *Наближений розв'язок задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) в області D має наступний вигляд:*

$$u(x) \approx u_n(x) = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_{\ell}(\tilde{y}_{s'\rho'}) \Phi(x, q_{\ell}(\tilde{y}_{s'\rho'})) J_{q_{\ell}}(\tilde{y}_{s'\rho'}), \quad x \in D. \quad (2.5.3)$$

Доведення. Впливає із застосування кубатурної формули (2.4.5) до подання (2.1.3). □

Наслідок 2.5.6. *Наближені значення даних Коші на внутрішній границі Γ_1 можна знайти за наступними формулами:*

$$u_n(q_1(\hat{x})) = \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \left(\tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} \tilde{\psi}_1(T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) R_1(\hat{x}, T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) + \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) L_{12}(\hat{x}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \right), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \quad (2.5.4)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(q_1(\hat{x})) = \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \left(\tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} \tilde{\psi}_1(T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{R}_1(\hat{x}, T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}, \hat{x}) + \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) M_{12}(\hat{x}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \right) - \frac{1}{2} \tilde{\psi}_1(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \quad (2.5.5)$$

Доведення. Впливає із застосування кубатурних формул (2.4.5), (2.4.6) до параметризованих даних Коші (2.3.11) і з врахуванням апроксимаційного подання густин u (2.4.1). □

Тепер регуляризацію Тіхонова застосуємо і для системи (2.4.11), отриманої прямим методом інтегральних рівнянь.

Наслідок 2.5.7. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.4.11) також може бути записана у формі (2.5.1), тоді матриця A і вектори ψ, B матимуть такий вигляд:*

$$A = \begin{pmatrix} \left\{ -\widehat{A}_{kk'mm'}^{21} \right\}_{k=0, k'=0, m=-k, m'=-k'}^{n, n', k, k'} & \left\{ \ddot{A}_{kk'mm'}^2 \right\}_{k=0, k'=0, m=-k, m'=-k'}^{n, n', k, k'} \\ \left\{ \widetilde{A}_{kk'mm'}^{11} \right\}_{k=0, k'=0, m=-k, m'=-k'}^{n, n', k, k'} & \left\{ -\ddot{A}_{kk'mm'}^1 \right\}_{k=0, k'=0, m=-k, m'=-k'}^{n, n', k, k'} \end{pmatrix},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \left\{ \widetilde{g}_{1k,m} \right\}_{k=0, m=-k}^{n, k} \\ \left\{ \widetilde{f}_{1k,m} \right\}_{k=0, m=-k}^{n, k} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \left\{ \widehat{B}_{k,m} \right\}_{k=0, m=-k}^{n, k} \\ \left\{ \widetilde{B}_{k,m} \right\}_{k=0, m=-k}^{n, k} \end{pmatrix}.$$

Наслідок 2.5.8. *Наближений розв'язок, отриманий за методом Тихонова (2.5.2) для системи, отриманої прямим методом інтегральних рівнянь, при $\delta \rightarrow 0$ збігається до розв'язку задачі (2.5.1).*

Доведення. Аналогічно до відповідного наслідку для непрямого методу інтегральних рівнянь і з врахуванням того, що оператор \widetilde{W} , який описує систему інтегральних рівнянь, ін'єктивний і має щільний ранг (що було показано в підпункті 2.2). \square

Розв'язавши регуляризовану лінійну систему (2.5.2), де параметр регуляризації також вибрано за методом L-кривих, отримаємо невідомі коефіцієнти $\widetilde{f}_{1k,m}$ і $\widetilde{g}_{1k,m}$ з апроксимаційного подання параметризованих густин у (2.4.2).

Наслідок 2.5.9. *Наближений розв'язок задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) в області*

D за прямим методом інтегральних рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned}
 u(x) \approx u_n(x) = & \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \left(\left\{ \tilde{g}_1(\tilde{y}_{s'\rho'}) \Phi(x, q_1(\tilde{y}_{s'\rho'})) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \tilde{f}_1(\tilde{y}_{s'\rho'}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, q_1(\tilde{y}_{s'\rho'})) \right\} J_{q_1}(\tilde{y}_{s'\rho'}) + \left\{ \tilde{g}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) \Phi(x, q_2(\tilde{y}_{s'\rho'})) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \tilde{f}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(x, q_2(\tilde{y}_{s'\rho'})) \right\} J_{q_2}(\tilde{y}_{s'\rho'}) \right), \quad x \in D. \quad (2.5.6)
 \end{aligned}$$

Доведення. Аналогічне до доведення наслідку 2.5.5. Тобто, маючи подання густин (2.4.2), знайдемо подання розв'язку за (2.2.1) і для повної дискретизації застосуємо кубатурну формулу (2.4.5), тоді отримаємо подання (2.5.6). \square

Наслідок 2.5.10. *Апроксимаційне подання даних Коші на внутрішній границі області Γ_1 за прямим методом інтегральних рівнянь є таким:*

$$u_n(q_1(\hat{x})) = \tilde{f}_1(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2, \quad (2.5.7)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(q_1(\hat{x})) = \tilde{g}_1(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2, \quad (2.5.8)$$

де функції \tilde{f}_1 і \tilde{g}_1 мають вигляд (2.4.2).

Доведення. Відповідно до підпункту 2.2 густини f_1, g_1 і є шуканими даними Коші на внутрішній границі області. Тоді функції \tilde{f}_1 і \tilde{g}_1 , задані у (2.4.2), є наближенням до параметризованих даних Коші на внутрішній границі області Γ_1 . \square

Зауваження 2.5.11. *Перевагою прямого методу інтегральних рівнянь є те, що не потрібно додатково обчислювати значення даних Коші, як це було у випадку непрямого методу за формулами (2.5.4), (2.5.5). Проте, виникають додаткові наближені обчислення у правих частинах, які вносять додаткові похибки.*

2.6. Оптимізація обчислень

В підрозділах 2.1 – 2.5 було показано, як від диференціальної задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2), за допомогою прямого і непрямого методів інтегральних рівнянь, перейти до розв’язування СЛАР, отриманої з використанням регуляризації Тіхонова і як, з використанням розв’язків цих систем рівнянь, побудувати шукані дані Коші на внутрішній границі області Γ_1 .

Але, матриці системи рівнянь будуються на основі коефіцієнтів, для обчислення яких потрібно виконати велику кількість операцій, наприклад, $\widehat{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$ (2.4.12), $\widetilde{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$ (2.4.13), $\ddot{A}_{kk'mm'}^{\ell}$ (2.4.14). В загальному, для формування матриці системи (2.5.1) потрібно $O((n+1)^6 \times (n'+1)^2)$ операцій.

Для ефективної реалізації запропонованого алгоритму потрібно оптимізувати формули для обчислення коефіцієнтів $\widehat{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$, $\widetilde{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$, $\ddot{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$, які використовуються у лінійних системах. Ідея оптимізації полягає в обчисленні додаткових матриць менших розмірностей і використання їх в обчисленні коефіцієнтів. Даний підхід був використаний, наприклад, у випадку задач дифракції [63, 67, 83].

Покажемо, як це можна зробити для коефіцієнтів $\widehat{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$.

Означення 2.6.1. Дійснозначні сферичні гармоніки $Y_{k,m}^R$ [27] мають вигляд:

$$Y_{k,m}^R(\theta, \varphi) = c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta) \begin{cases} \cos(|m|\varphi), & m < 0 \\ 1, & m = 0 \\ \sin(|m|\varphi), & m > 0 \end{cases}, \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R}. \quad (2.6.1)$$

Для обчислення значень сферичних гармонік у точках $\widehat{y}_{sp}^{s'p'}$ використаємо поворот гармонік, який був отриманий у [63].

Означення 2.6.2. Поворот дійснозначних сферичних гармонік має вигляд:

$$Y_{k,m}^R(\widehat{y}_{sp}^{s'p'}) = \sum_{|\tilde{m}| \leq k} Y_{k,\tilde{m}}(\widehat{y}_{s'p'}) e^{-i\tilde{m}\varphi_p} \begin{cases} \frac{1}{2i} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 0), & m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, & m = 0 \\ \frac{1}{2} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 1), & m < 0 \end{cases}. \quad (2.6.2)$$

В означені 2.6.2 використано $Y_{k,\tilde{m}}$ – сферичні гармоніки, які мають таке подання, див. [27]:

$$Y_{k,m}(p(\theta, \varphi)) = N_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi),$$

$$N_k^m = \left\{ \frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|m|)!}{(k+|m|)!} \right\}^{1/2}, \quad P_k^m - \text{приєднані функції Лежандра [27].}$$

Точки $\tilde{y}_{s'\rho'} = p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})$ згенеровані як у (2.4.5).

Функції $F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, j)$:

$$F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, j) = \left(F_{sk\tilde{m}m} e^{i|m|\varphi_p} - (-1)^{|m|+j} F_{sk\tilde{m}-m} e^{-i|m|\varphi_p} \right) \quad (2.6.3)$$

і

$$F_{sk\tilde{m}m} = e^{i(m-\tilde{m})\frac{\pi}{2}} \sum_{|l|\leq k} d_{\tilde{m}l}^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) d_{ml}^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{il\theta_s}, \quad (2.6.4)$$

$$d_{ml}^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^m \sqrt{\frac{(k+m)!(k-m)!}{(k+l)!(k-l)!}} P_{k+m}^{(l-m, -l-m)}(0),$$

де $P_n^{(\alpha, \beta)}$ нормалізований поліном Якобі:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(0) = 2^{-n} \sum_{t=0}^n (-1)^t \binom{n+a}{n-t} \binom{n+b}{t}, \quad a \geq 0, b \geq 0.$$

Зауваження 2.6.3. Числа $l - m$ і $-l - m$ в означені $d_{ml}^{(k)}$ повинні бути невід'ємними. Якщо $l - m < 0$, $-l - m < 0$, то можна використати властивість:

$$d_{ml}^{(k)}(\varphi) = (-1)^{m-l} d_{lm}^{(k)}(\varphi) = d_{-l-m}^{(k)}(\varphi) = d_{ml}^{(k)}(-\varphi).$$

Наслідок 2.6.4. Коефіцієнти $\hat{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$ задані за (2.4.12) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{kk'mm'}^{\ell j} &= \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s c_{k'}^{m'} P_{k'}^{|m'|}(\cos \theta_s) \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \begin{cases} \cos(|m'|\varphi_\rho), & m' < 0 \\ 1, & m' = 0 \\ \sin(|m'|\varphi_\rho), & m' > 0 \end{cases} \\ &\times \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \sum_{s'=1}^{n'+1} \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'} L_{\ell j}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell \neq j \\ \tilde{\beta}_{s'} R_\ell(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{s'\rho'}), & \ell = j \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \begin{array}{l} c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta_{s'}) \begin{cases} \cos(|m|\varphi_{\rho'}), & m < 0 \\ 1, & m = 0, \ell \neq j \\ \sin(|m|\varphi_{\rho'}), & m > 0 \end{cases} \\ \sum_{\tilde{m} \leq k} c_k^{\tilde{m}} P_k^{\tilde{m}}(\cos \theta_{s'}) e^{i\tilde{m}(\varphi_{\rho'} - \varphi_{\rho})}, & \ell = j \end{array} \right. \\
& \times \left\{ \begin{array}{l} 1, & \ell \neq j \\ \begin{cases} \frac{1}{2i} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 0), & m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, & m = 0, \ell = j \\ \frac{1}{2} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 1), & m < 0 \end{cases} \end{array} \right. . \quad (2.6.5)
\end{aligned}$$

Доведення. Даний вираз отримаємо з врахуванням подання дійснозначних сферичних гармонік (2.6.1) і повороту дійснозначних сферичних гармонік (2.6.2) у формулі (2.4.12). \square

Зауваження 2.6.5. Формула (2.6.5) це більш детальний запис коефіцієнтів $\widehat{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$.

Для зменшення кількості обчислень при обчисленні $\widehat{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$ (2.6.5), значення даних коефіцієнтів будемо знаходити через послідовне обчислення наступних матриць:

$$H_{mp} = \begin{cases} \cos(|m|\varphi_{\rho}), & m < 0 \\ 1, & m = 0, \\ \sin(|m|\varphi_{\rho}), & m > 0 \end{cases}$$

$$\tilde{H}_{mp} = \begin{cases} \cos(|m|\tilde{\varphi}_{\rho}), & m < 0 \\ 1, & m = 0, \\ \sin(|m|\tilde{\varphi}_{\rho}), & m > 0 \end{cases}$$

$$G_{kms} = c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta_s),$$

$$\tilde{G}_{kms} = c_k^m P_k^{|m|}(\cos \tilde{\theta}_s),$$

$$\begin{aligned}
E_{spm s'}^{\ell j} &= \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \begin{cases} \tilde{H}_{m\rho'} L_{\ell j}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell \neq j \\ e^{im\tilde{\varphi}_{\rho'}} R_{\ell}(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp'}^{s'\rho'}), & \ell = j \end{cases}, \\
D_{kspm}^{\ell j} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{G}_{kms'} E_{spm s'}^{\ell j} &\begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'}, & \ell \neq j \\ \tilde{\beta}_{s'}, & \ell = j \end{cases}, \\
C_{kms\rho}^{\ell j} &= \begin{cases} D_{kspm}^{\ell j}, & \ell \neq j \\ \sum_{|\tilde{m}| \leq k} e^{-i\tilde{m}\varphi_{\rho}} D_{ksp\tilde{m}}^{\ell j} \begin{cases} \frac{1}{2i} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 0), & m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, & m = 0 \\ \frac{1}{2} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 1), & m < 0 \end{cases}, & \ell = j \end{cases}, \\
B_{kmm's}^{\ell j} &= \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} H_{m'\rho} C_{kms\rho}^{\ell j}, \\
\tilde{A}_{kk'mm'}^{\ell j} &= \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s G_{k'm's} B_{kmm's}^{\ell j}, \tag{2.6.6}
\end{aligned}$$

де точки θ_s, φ_{ρ} і $\tilde{\theta}'_s, \tilde{\varphi}'_{\rho}$ згенеровані з алгоритму параметризації сфери (2.4.4), відповідно до параметрів n (2.4.9) і n' із (2.4.5)–(2.4.6).

Зауваження 2.6.6. Після проведення оптимізації кількість операцій для обчислення коефіцієнтів зменшується до $O((n+1)^3 \times (n'+1)^2)$.

Аналогічні обчислення можна провести і для обчислення $\tilde{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$, визначених у (2.4.13), $\tilde{A}_{kk'mm'}^{\ell}$ (2.4.14), а також і для правих частин у системах (2.4.10), (2.4.11).

Запишемо коефіцієнти в розгорнутому вигляді.

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{kk'mm'}^{\ell j} &= \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s c_{k'}^{m'} P_{k'}^{|m'|}(\cos \theta_s) \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \begin{cases} \cos(|m'|\varphi_\rho), & m' < 0 \\ 1, & m' = 0 \\ \sin(|m'|\varphi_\rho), & m' > 0 \end{cases} \\
&\times \begin{pmatrix} \begin{cases} 0, & \ell \neq j \\ \frac{1}{2}(-1)^\ell c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta_s) \begin{cases} \cos(|m|\varphi_\rho), & m < 0 \\ 1, & m = 0 \\ \sin(|m|\varphi_\rho), & m > 0 \end{cases}, & \ell = j \end{cases} \\ + \\ \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \sum_{s'=1}^{n'+1} \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'} M_{\ell j}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell \neq j \\ \tilde{\beta}_{s'} \tilde{R}_\ell(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{s'\rho'}, \hat{x}_{s\rho}), & \ell = j \end{cases} \\ \times \begin{cases} c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta_{s'}) \begin{cases} \cos(|m|\varphi_{\rho'}), & m < 0 \\ 1, & m = 0 \\ \sin(|m|\varphi_{\rho'}), & m > 0 \end{cases}, & \ell \neq j \\ \sum_{\tilde{m} \leq k} c_k^{\tilde{m}} P_k^{\tilde{m}}(\cos \theta_{s'}) e^{i\tilde{m}(\varphi_{\rho'} - \varphi_\rho)}, & \ell = j \end{cases} \\ \times \begin{pmatrix} 1, & \ell \neq j \\ \begin{cases} \frac{1}{2i} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 0), & m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, & m = 0 \\ \frac{1}{2} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 1), & m < 0 \end{cases}, & \ell = j \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_{kk'mm'}^\ell &= \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s c_{k'}^{m'} P_{k'}^{|m'|}(\cos \theta_s) \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \begin{cases} \cos(|m'|\varphi_\rho), & m' < 0 \\ 1, & m' = 0 \\ \sin(|m'|\varphi_\rho), & m' > 0 \end{cases} \\
&\times \begin{pmatrix} \begin{cases} 0, & \ell = 2 \\ -\frac{1}{2} c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta_s) \begin{cases} \cos(|m|\varphi_\rho), & m < 0 \\ 1, & m = 0 \\ \sin(|m|\varphi_\rho), & m > 0 \end{cases}, & \ell = 1 \end{cases} \\ + \\ \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \sum_{s'=1}^{n'+1} \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'} M_{\ell 1}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell = 2 \\ -\tilde{\beta}_{s'} \tilde{R}_\ell(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp}^{s'p'}, \hat{y}_{sp}^{s'p'}), & \ell = 1 \end{cases} \\ \times \\ \begin{cases} c_k^m P_k^{|m|}(\cos \theta_{s'}) \begin{cases} \cos(|m|\varphi_{\rho'}), & m < 0 \\ 1, & m = 0 \\ \sin(|m|\varphi_{\rho'}), & m > 0 \end{cases}, & \ell = 2 \\ \sum_{\tilde{m} \leq k} c_k^{\tilde{m}} P_k^{\tilde{m}}(\cos \theta_{s'}) e^{i\tilde{m}(\varphi_{\rho'} - \varphi_\rho)}, & \ell = 1 \end{cases} \\ \times \\ \begin{pmatrix} 1, & \ell = 2 \\ \begin{cases} \frac{1}{2i} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 0), & m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, & m = 0 \\ \frac{1}{2} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 1), & m < 0 \end{cases}, & \ell = 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_{k'm'} &= \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s c_{k'}^{m'} P_{k'}^{|m'|}(\cos \theta_s) \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \begin{cases} \cos(|m'|\varphi_\rho), & m' < 0 \\ 1, & m' = 0 \\ \sin(|m'|\varphi_\rho), & m' > 0 \end{cases} \\
&\times \left(\frac{1}{2} \tilde{f}_2(\hat{x}_{s\rho}) - \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\beta}_{s'} \left\{ \tilde{R}_2(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp}^{s'p'}, \hat{y}_{sp}^{s'p'}) \tilde{f}_2(\hat{y}_{sp}^{s'p'}) + \right. \right. \\
&+ \left. \left. R_2(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp}^{s'p'}) \tilde{g}_2(\hat{y}_{sp}^{s'p'}) \right\} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{k'm'} &= \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s c_{k'}^{m'} P_{k'}^{|m'|}(\cos \theta_s) \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \begin{cases} \cos(|m'|\varphi_\rho), & m' < 0 \\ 1, & m' = 0 \\ \sin(|m'|\varphi_\rho), & m' > 0 \end{cases} \\ &\times \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\alpha}_{s'} \left\{ L_{12}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{g}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) - \right. \\ &\left. - \tilde{M}_{12}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{f}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) \right\}. \end{aligned}$$

Обчислимо розглянуті коефіцієнти за допомогою послідовного знаходження проміжних матриць, аналогічно до обчислення $\hat{A}_{kk'mm'}^{\ell j}$.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{sps's'}^{\ell j} &= \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \begin{cases} \tilde{H}_{m\rho'} M_{\ell j}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell \neq j \\ e^{im\tilde{\varphi}_{\rho'}} \tilde{R}_\ell(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp}^{s'\rho'}, \hat{x}_{s\rho}), & \ell = j \end{cases}, \\ \tilde{D}_{kspm}^{\ell j} &= \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{G}_{kms'} \tilde{E}_{sps's'}^{\ell j} \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'}, & \ell \neq j \\ \tilde{\beta}_{s'}, & \ell = j \end{cases}, \\ \tilde{C}_{kms\rho}^{\ell j} &= \begin{cases} \tilde{D}_{kspm}^{\ell j}, & \ell \neq j \\ \sum_{|\tilde{m}| \leq k} e^{-i\tilde{m}\varphi_\rho} \tilde{D}_{ksp\tilde{m}}^{\ell j} \begin{cases} \frac{1}{2i} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 0), & m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, & m = 0 \\ \frac{1}{2} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 1), & m < 0 \end{cases}, & \ell = j \end{cases}, \\ \check{B}_{kmm's}^{\ell j} &= \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho H_{m'\rho} \left(\tilde{C}_{kms\rho}^{\ell j} + \begin{cases} 0, & \ell \neq j \\ \frac{1}{2} (-1)^\ell G_{kms} H_{m\rho}, & \ell = j \end{cases} \right), \\ \check{A}_{kk'mm'}^{\ell j} &= \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s G_{k'm's} \check{B}_{kmm's}^{\ell j}, \tag{2.6.7} \\ \check{E}_{sps's'}^{\ell} &= \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \begin{cases} \tilde{H}_{m\rho'} M_{\ell 1}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell = 2 \\ e^{im\tilde{\varphi}_{\rho'}} \tilde{R}_\ell(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp}^{s'\rho'}, \hat{y}_{sp}^{s'\rho'}), & \ell = 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\ddot{D}_{kspm}^\ell = \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{G}_{kms'} \ddot{E}_{spms'}^\ell \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'}, & \ell = 2 \\ -\tilde{\beta}_{s'}, & \ell = 1 \end{cases},$$

$$\ddot{C}_{kmsp}^\ell = \begin{cases} \ddot{D}_{kspm}^\ell, & \ell = 2 \\ \sum_{|\tilde{m}| \leq k} e^{-i\tilde{m}\varphi_\rho} \ddot{D}_{ksp\tilde{m}}^\ell \begin{cases} \frac{1}{2i} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 0), & m > 0 \\ F_{sk\tilde{m}|m|}, & m = 0 \\ \frac{1}{2} F_R(s, k, m, \tilde{m}, p, 1), & m < 0 \end{cases}, & \ell = 1 \end{cases},$$

$$\ddot{B}_{kmm's}^\ell = \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho H_{m'\rho} \left(\ddot{C}_{kmsp}^\ell + \begin{cases} 0, & \ell = 2 \\ -\frac{1}{2} G_{kms} H_{m\rho}, & \ell = 1 \end{cases} \right),$$

$$\ddot{A}_{kk'mm'}^\ell = \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s G_{k'm's} \ddot{B}_{kmm's}^\ell, \quad (2.6.8)$$

$$\dot{E}_{sps'} = \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \left\{ \tilde{R}_2(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp}^{s'\rho'}, \hat{y}_{sp}^{s'\rho'}) \tilde{f}_2(\hat{y}_{sp}^{s'\rho'}) + R_2(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp}^{s'\rho'}) \tilde{g}_2(\hat{y}_{sp}^{s'\rho'}) \right\},$$

$$\dot{D}_{s\rho} = \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\beta}_{s'} \dot{E}_{sps'},$$

$$\dot{C}_{m's} = \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho H_{m'\rho} \left(\frac{1}{2} \tilde{f}_2(\hat{x}_{s\rho}) - \dot{D}_{s\rho} \right),$$

$$\hat{B}_{k'm'} = \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s G_{k'm's} \dot{C}_{m's}, \quad (2.6.9)$$

$$\bar{E}_{sps'} = \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \left\{ L_{12}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{g}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) - \tilde{M}_{12}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{f}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) \right\},$$

$$\bar{D}_{s\rho} = \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\alpha}_{s'} \bar{E}_{sps'},$$

$$\bar{C}_{m's} = \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho H_{m'\rho} \bar{D}_{s\rho},$$

$$\tilde{B}_{k'm'} = \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s G_{k'm's} \bar{C}_{m's}. \quad (2.6.10)$$

Отримані проміжні матриці можна використати і на етапі побудови розв'язку.

Наслідок 2.6.7. У випадку непрямого методу інтегральних рівнянь, при $n = n'$ значення функції і нормальної похідної на внутрішній границі (2.3.11) знайдемо за формулою:

$$u(q_1(\hat{x}_{s\rho})) \approx \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \psi_{k,m}^j C_{kms\rho}^{1j}, \quad (2.6.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(q_1(\hat{x}_{s\rho})) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(-\frac{1}{2} G_{kms} H_{m\rho} + \sum_{j=1}^2 \psi_{k,m}^j \tilde{C}_{kms\rho}^{1j} \right), \quad (2.6.12)$$

де $\hat{x}_{s\rho} \in \mathbb{S}^2$ і $\{\psi_{k,m}^j\} \in \mathbb{R}^{(n+1)^2}$, $j = 1, 2$ – розв'язок лінійної регуляризованої системи (2.5.2).

2.7. Чисельні експерименти

В цьому підрозділі розглянемо чисельні результати реконструкції гармонійної функції і її нормальної похідної на внутрішній границі, за відомими даними Коші на зовнішній границі. Розглянемо випадки точних і збурених даних. У випадку збурених даних, випадкові значення похибок додані до значень функції g_2 , оскільки на практиці значення функції f_2 є точно заданими, а значення функції g_2 є результатом вимірювання певних показників. Нехай виконується оцінка:

$$\|g_2 - g_2^\delta\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq \delta,$$

де $\delta > 0$ – рівень шуму. Випадкові значення похибок задані за таким правилом:

$$g_2^\delta = g_2 + \delta \frac{\tilde{r} \|g_2\|_{L_2(\Gamma_2)}}{\|\tilde{r}\|_{L_2(\Gamma_2)}}, \quad (2.7.1)$$

де \tilde{r} – функція генерації випадкових чисел, норма $\|\cdot\|_{L_2(\Gamma_2)} = \sqrt{(\cdot, \cdot)_{L_2(\Gamma_2)}}$ наближено обчислена за допомогою формули знаходження дискретного скалярного добутку (2.4.9) для вибраного параметра n .

Використано n' для позначення параметру дискретизації у кубатурних формулах (2.4.5), (2.4.6), а n для позначення степеня сферичних гармонік в

апроксимації невідомих густин (2.4.1) і (2.4.2). Не обмежуючи загальності, розглянемо випадок чисельних експериментів, коли $n = n'$.

В прикладах 1–2 покажемо чисельні результати, отримані, використовуючи непрямий метод інтегральних рівнянь і регуляризацію Тіхонова, а в прикладі 3 – чисельні результати, отримані, використовуючи прямий метод інтегральних рівнянь і регуляризацію Тіхонова. Параметр регуляризації в обох підходах буде вибрано за методом L-кривих.

Приклад 1

Нехай внутрішня границя області Γ_1 – це поверхня, яка має параметричне подання:

$$\Gamma_1 = \{\xi(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi)(\sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

де

$$r(\theta, \varphi) = \frac{1}{(2\sqrt{1 + \sqrt{2}})\sqrt{\cos(2\theta) + \sqrt{2 - \sin^2(2\theta)}}},$$

а зовнішня Γ_2 – це поверхня з параметричним поданням:

$$\Gamma_2 = \{\xi(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi)(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

де

$$r(\theta, \varphi) = \sqrt{0.8 + 0.2(\cos(2\varphi) - 1)(\cos(4\theta) - 1)}.$$

Вигляд області наведено на рис. 2.3.

В ролі точного розв'язку рівняння Лапласа (1.2.1) виберемо функцію:

$$u(x) = x_2^2 - x_3^2 + x_1, x \in D.$$

Тоді, відомими даними Коші на зовнішній границі будуть функції:

$$f_2(x) = x_2^2 - x_3^2 + x_1, x \in \Gamma_2,$$

$$g_2(x) = (1, 2x_2, -2x_3)\nu(x), x \in \Gamma_2.$$

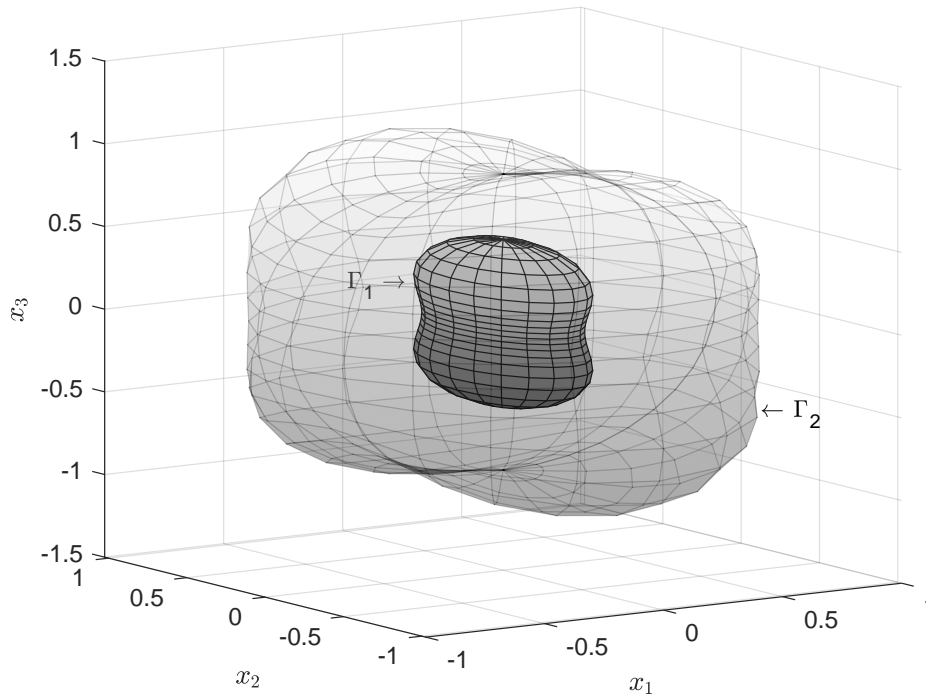


Рис. 2.3: Вигляд області для прикладу 1.

Результати реконструкції даних Коші на внутрішній границі області для точних і 3% збурених вхідних даних наведені в таблицях 2.1, 2.2 відповідно. Також в таблиці 2.3 наведено значення даних Коші на внутрішній границі області залежно від параметра регуляризації у випадку точних вхідних даних. Бачимо, що найкращий результат співпадає із значеннями, знайденими за методом L-кривих.

На рис. 2.4 показано, вигляд точних значень вхідної функції g_2 і збурених значень функції g_2^δ , згенерованих за правилом (2.7.1). Крім того, на рис. 2.5 наведено графіки точних значень функції і отриманих значень, у випадку точних вхідних даних, на рис. 2.6 відповідні графіки для нормальної похідної, а на рис. 2.7, рис. 2.8 – аналогічні графіки для збурених вхідних даних. Графік L-кривої вибору параметра регуляризації зображено на рис. 2.9.

$n = n'$	λ	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_1)}$
2	1.00E-00	2.91E-01	1.30E-00
4	1.00E-01	2.13E-01	7.00E-01
6	1.00E-03	5.14E-02	1.17E-01
8	1.00E-04	7.61E-03	3.32E-02

Табл. 2.1: L_2 похибки значень даних Коші на внутрішній границі області у випадку точних вхідних даних для прикладу 1.

$n = n'$	λ	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_1)}$
2	1.00E-00	2.93E-01	1.29E-00
4	1.00E-01	2.14E-01	6.93E-01
6	1.00E-03	8.69E-02	3.33E-01
8	1.00E-02	4.11E-02	1.28E-01

Табл. 2.2: L_2 похибки значень даних Коші на внутрішній границі області у випадку 3% збурених вхідних даних для прикладу 1.

Приклад 2

Нехай внутрішня границя області Γ_1 – це поверхня, яка має параметричне подання:

$$\Gamma_1 = \{ \xi(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \},$$

де

$$r(\theta, \varphi) = 0.2 \left(0.6 + \sqrt{4.25 + 2 \cos 3\theta} \right),$$

а зовнішня Γ_2 – це сфера:

$$\Gamma_2 = \{ \xi(\theta, \varphi) = 1.5 (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}.$$

Вигляд області наведено на рис. 2.10.

λ	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_1)}$
1.00E-01	1.51E-01	7.06E-01
1.00E-02	4.84E-02	1.63E-01
1.00E-03	1.54E-02	6.36E-02
1.00E-04 (за L-кр.)	7.61E-03	3.32E-02
1.00E-05	1.58E-02	1.61E-01
1.00E-06	3.97E-02	4.48E-01

Табл. 2.3: L_2 похибки значень даних Коші на внутрішній границі області у випадку точних вхідних даних для різних значень параметру регуляризації для $n = n' = 8$ для прикладу 1.

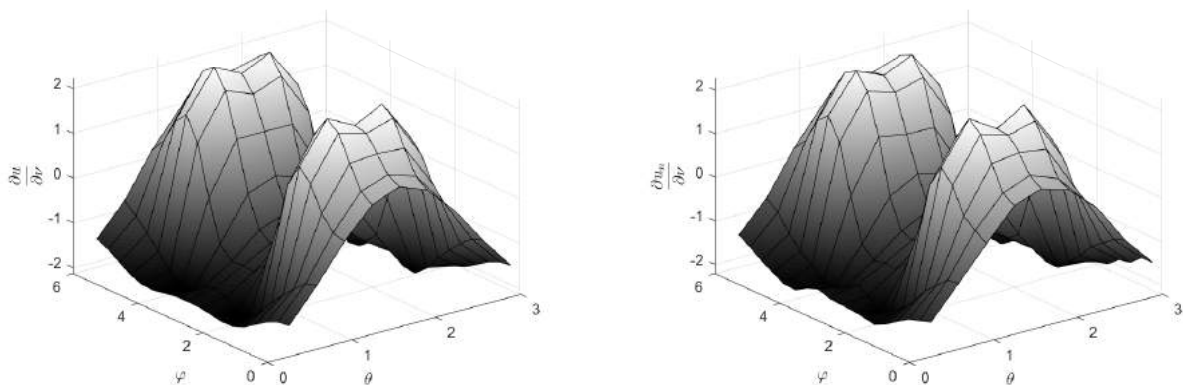


Рис. 2.4: Точні і згенеровані значення нормальної похідної від функції на зовнішній границі Γ_1 , при 3% збурених даних, для прикладу 1.

Точним розв'язком рівняння Лапласа (1.2.1) є функція:

$$u(x) = e^{x_2} \cos x_1 - e^{x_1} \sin x_2, \quad x \in D.$$

Очевидно, що відомими даними Коші на зовнішній границі будуть функції:

$$f_2(x) = e^{x_2} \cos x_1 - e^{x_1} \sin x_2, \quad x \in \Gamma_2,$$

$$g_2(x) = (-e^{x_2} \sin x_1 - e^{x_1} \sin x_2, e^{x_2} \cos x_1 - e^{x_1} \cos x_2, 0)\nu(x), \quad x \in \Gamma_2.$$

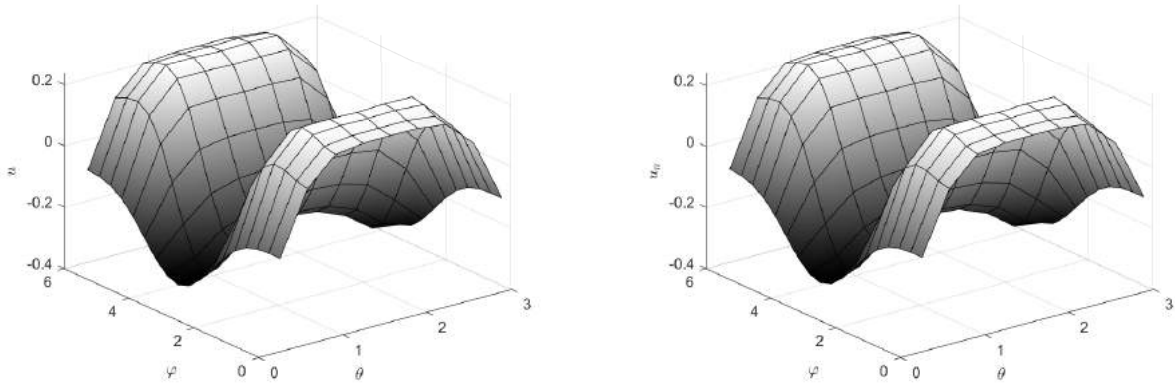


Рис. 2.5: Точні і наближені значення функції на внутрішній границі Γ_1 для точних даних, для прикладу 1.

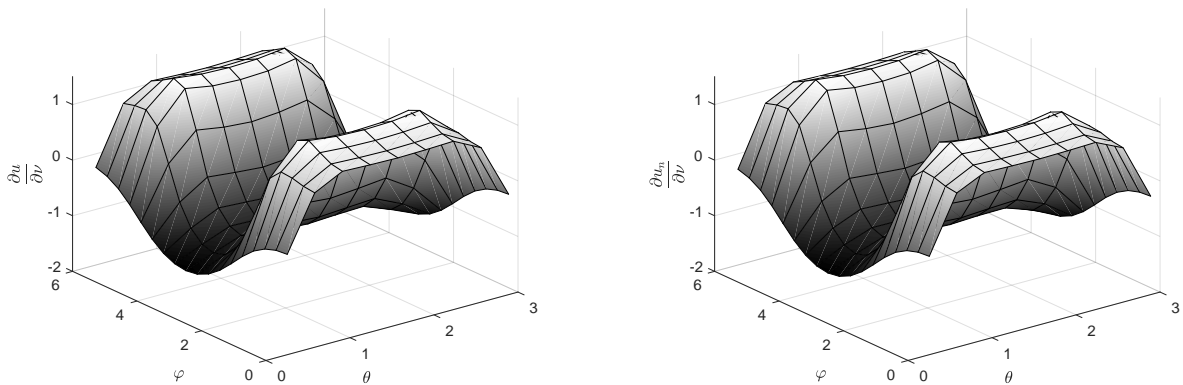


Рис. 2.6: Точні і наближені значення нормальної похідної від функції на внутрішній границі Γ_1 для точних даних, для прикладу 1.

Результати реконструкції даних Коші на внутрішній границі області для точних і 3% збурених вхідних даних наведені в таблицях 2.4, 2.5 відповідно. Крім того, на рис. 2.11 і рис. 2.12 наведено графіки точних значень і отриманих значень функції і нормальної похідної на внутрішній границі області, у випадку збурених вхідних даних. На рис. 2.13 зображено графік L-кривої вибору параметра регуляризації.

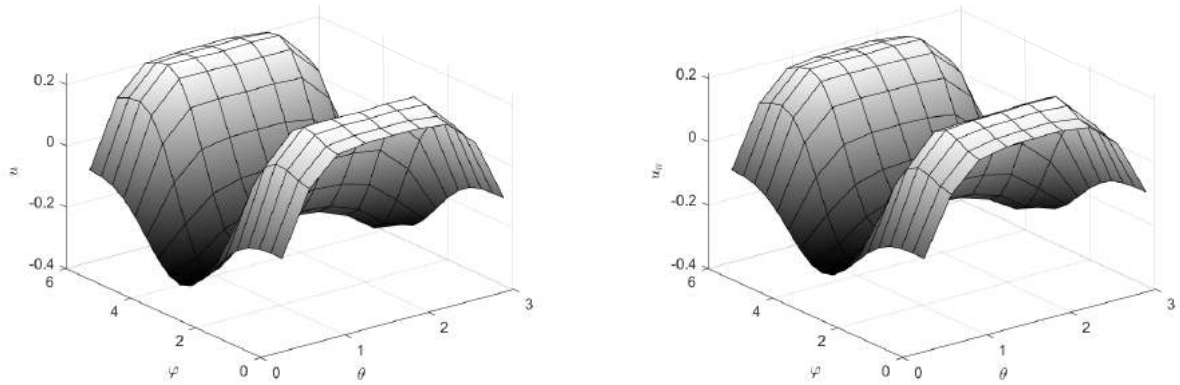


Рис. 2.7: Точні і наближені значення функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3% збурених даних, для прикладу 1.

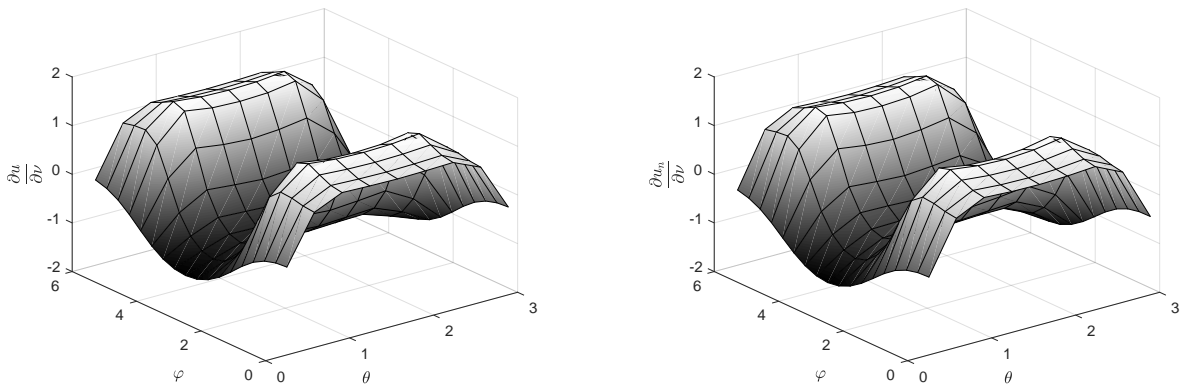


Рис. 2.8: Точні і наближені значення нормальної похідної від функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3% збурених даних, для прикладу 1.

Приклад 3

Побудуємо даний приклад на основі прикладу 2, тобто конфігурація області і відомі дані Коші $f_2(x), g_2(x), x \in \Gamma_2$ задані в прикладі 2. Результати реконструкції даних Коші на внутрішній границі області для точних і 3% збурених вхідних даних, використовуючи прямий метод інтегральних рівнянь, наведені в таблицях 2.6, 2.7 відповідно. В таблиці 2.8 наведено знайдені значення функції на внутрішній границі області використовуючи прямий і непрямий методи інтегральних рівнянь.

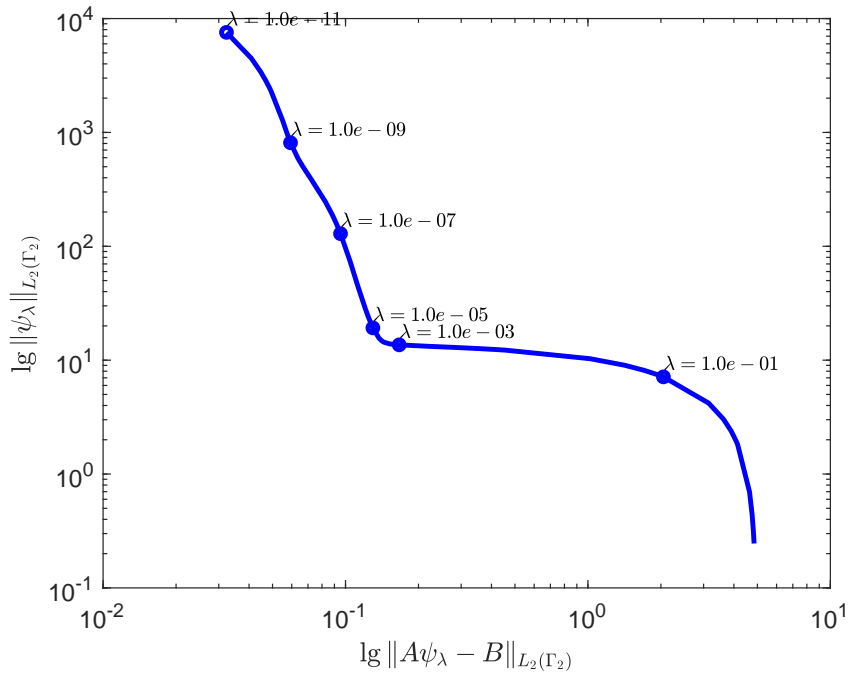


Рис. 2.9: L-крива для 3% збурених вхідних даних, при $n = 8$ для прикладу 1.

$n = n'$	λ	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_1)}$
2	1.00E-02	1.11E-01	3.77E-01
4	1.00E-04	2.66E-03	1.64E-02
6	1.00E-06	6.32E-04	5.37E-03
8	1.00E-08	6.95E-05	1.04E-03

Табл. 2.4: L_2 похибки значень даних Коші на внутрішній границі області у випадку точних вхідних даних для прикладу 2.

Крім того, на рис. 2.14 і рис. 2.15 наведено графіки точних значень і отриманих значень функції і нормальної похідної на внутрішній границі області, у випадку збурених вхідних даних. На рис. 2.16 зображено графік L-кривої вибору параметра регуляризації.

Зауваження 2.7.1. З таблиці 2.8 бачимо, що у випадку точних вхідних даних результати отримані, використовуючи непрямий метод інтеграль-

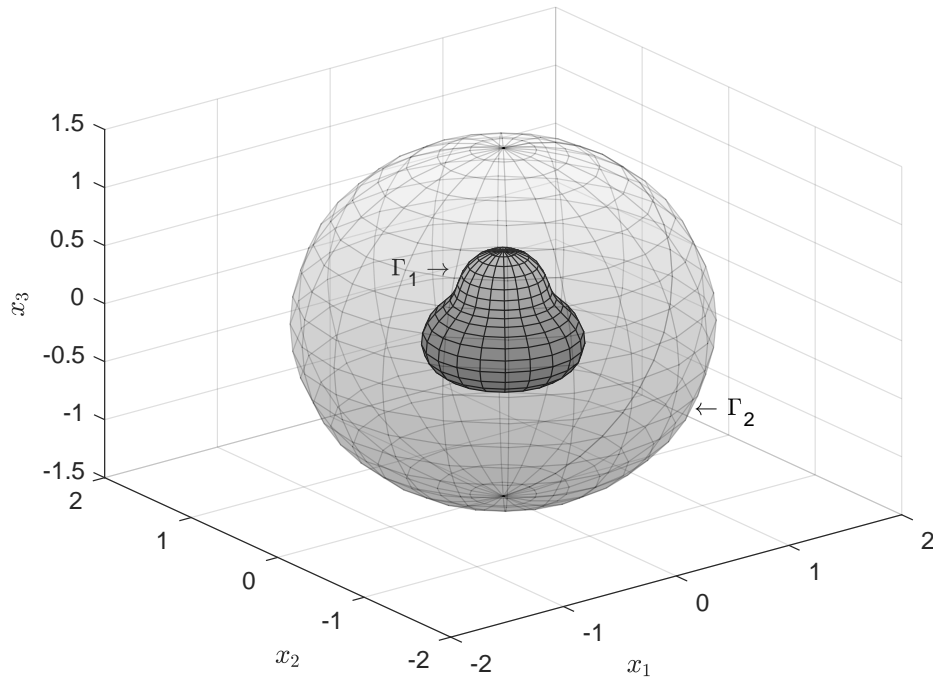


Рис. 2.10: Вигляд області для прикладу 2.

$n = n'$	λ	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_1)}$
2	1.00E-01	1.44E-01	5.76E-01
4	1.00E-01	1.42E-01	5.37E-01
6	1.00E-02	5.58E-02	1.80E-01
8	1.00E-02	4.29E-02	1.00E-01

Табл. 2.5: L_2 похибки значень даних Коші на внутрішній границі області у випадку 3% збурених вхідних даних для прикладу 2.

них рівнянь є кращими, а у випадку збурених вхідних даних майже однаковими. Такі результати є прогнозованими, оскільки для прямого методу інтегральних рівнянь права частина системи алгебраїчних рівнянь обчислена наближено, використовуючи кубатурні формули, що вносить збурення. Тому навіть для точних вхідних даних ми маємо збурення в правій частині, що приводить до гірших результатів.

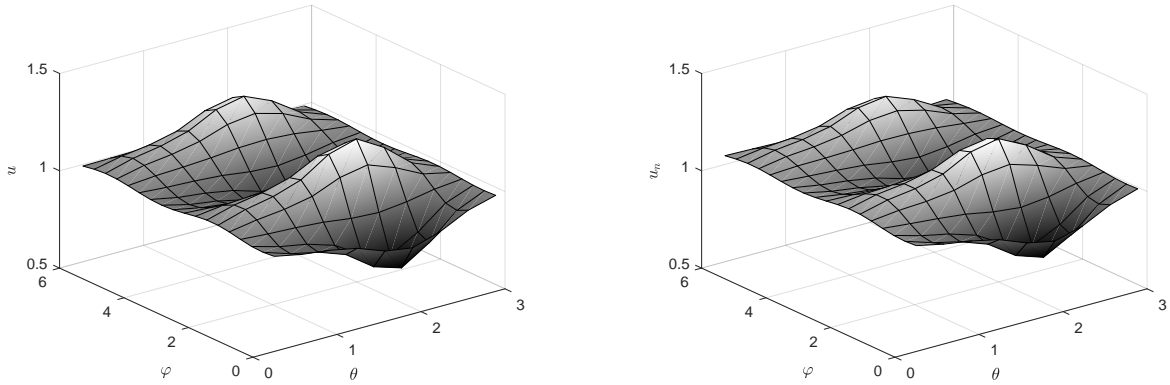


Рис. 2.11: Точні і наближені значення функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3% збурених даних, для прикладу 2.

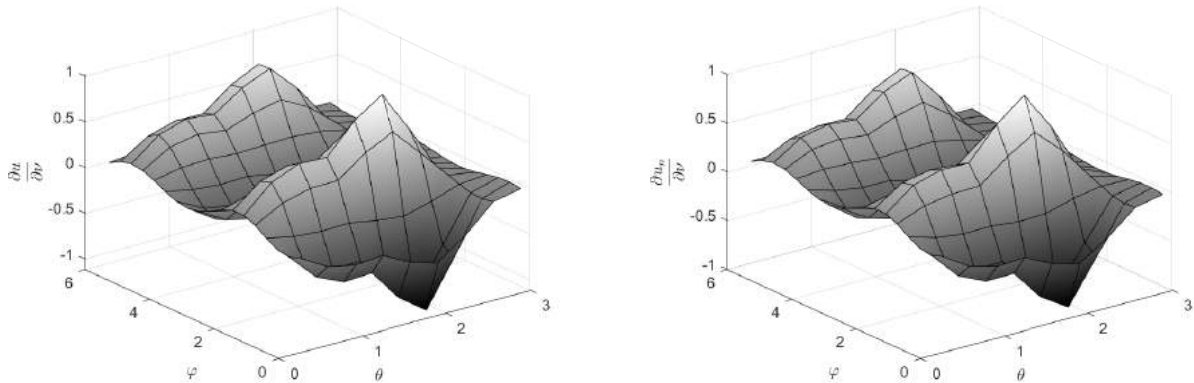


Рис. 2.12: Точні і наближені значення нормальної похідної від функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3% збурених даних, для прикладу 2.

Для точних вхідних даних оптимальніше використовувати непрямий метод інтегральних рівнянь, а для збурених вхідних даних – можна використовувати обидва методи. Перевагою прямого методу інтегральних рівнянь є те, що розв’язавши систему алгебраїчних рівнянь відразу можна обчислити наближені шукані значення даних Коші, проте є додаткові обчислення в правій частині системи. Для непрямого методу інтегральних рівнянь потрібно здійснити додаткові дії для знаходження невідомих даних Коші.

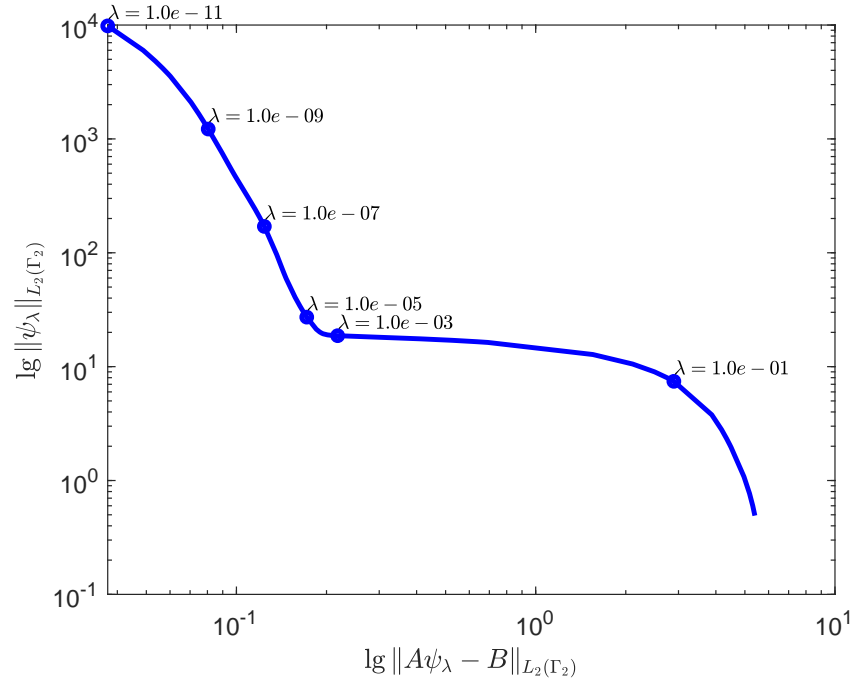


Рис. 2.13: L-крива для 3% збурених вхідних даних, при $n = 8$ для прикладу 2.

$n = n'$	λ	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_1)}$
2	1.00E-03	1.58E-01	4.99E-01
4	1.00E-05	7.44E-02	4.67E-01
6	1.00E-07	1.58E-02	1.91E-01
8	1.00E-09	5.88E-03	8.60E-02

Табл. 2.6: L_2 похибки значень даних Коші на внутрішній границі області у випадку точних вхідних даних для прикладу 3.

$n = n'$	λ	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_1)}$
2	1.00E-03	1.85E-01	9.08E-01
4	1.00E-03	1.09E-01	7.54E-01
6	1.00E-07	2.45E-02	1.94E-01
8	1.00E-09	2.43E-02	9.19E-02

Табл. 2.7: L_2 похибки значень даних Коші на внутрішній границі області у випадку 3% збурених вхідних даних для прикладу 3.

$n = n'$	$\ u - u_i\ _{L_2}$	$\ u - u_d\ _{L_2}$
$\delta = 0\%$		
2	1.11E-01	1.58E-01
4	2.66E-03	7.44E-02
6	6.32E-04	1.58E-02
8	6.95E-05	5.88E-03
$\delta = 3\%$		
2	1.44E-01	1.85E-01
4	1.42E-01	1.09E-01
6	5.58E-02	2.45E-02
8	4.29E-02	2.43E-02

Табл. 2.8: Похибки знайдених значень функції на внутрішній границі області, використовуючи прямий (u_d) і непрямий (u_i) методи IP для точних і збурених даних.

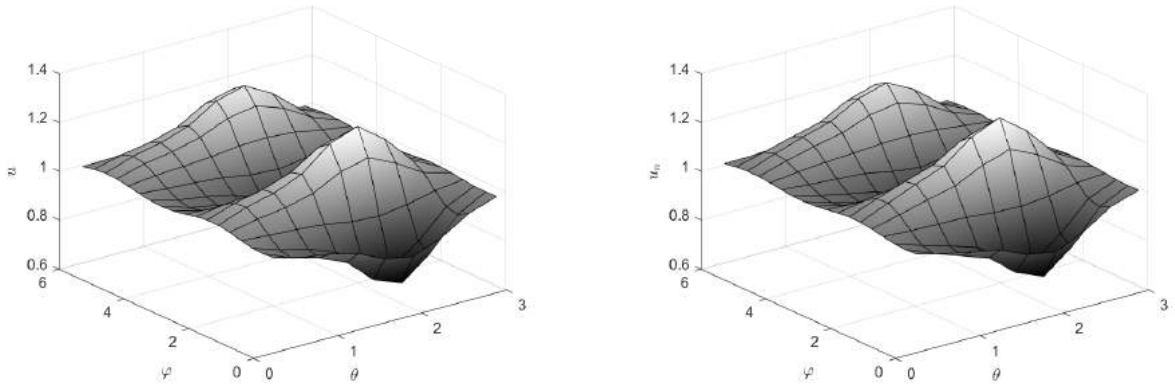


Рис. 2.14: Точні і наближені значення функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3% збурених даних, для прикладу 3.

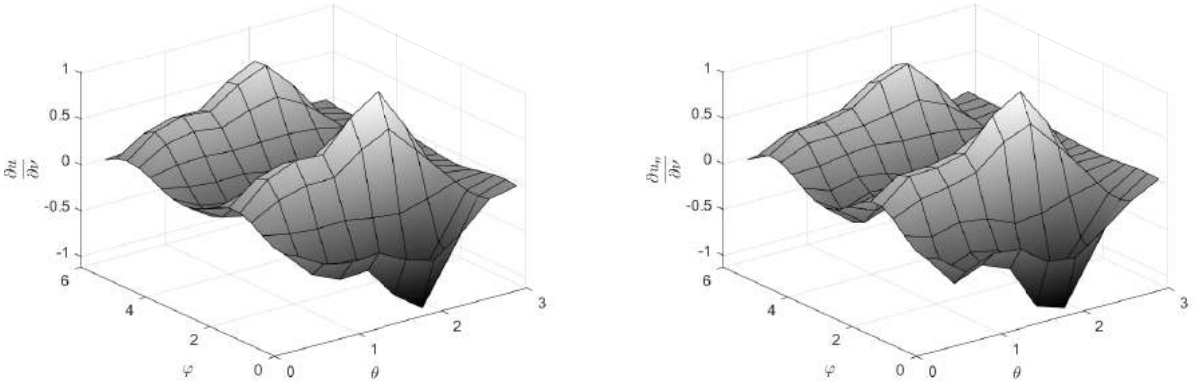


Рис. 2.15: Точні і наближені значення нормальної похідної від функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3% збурених даних, для прикладу 3.

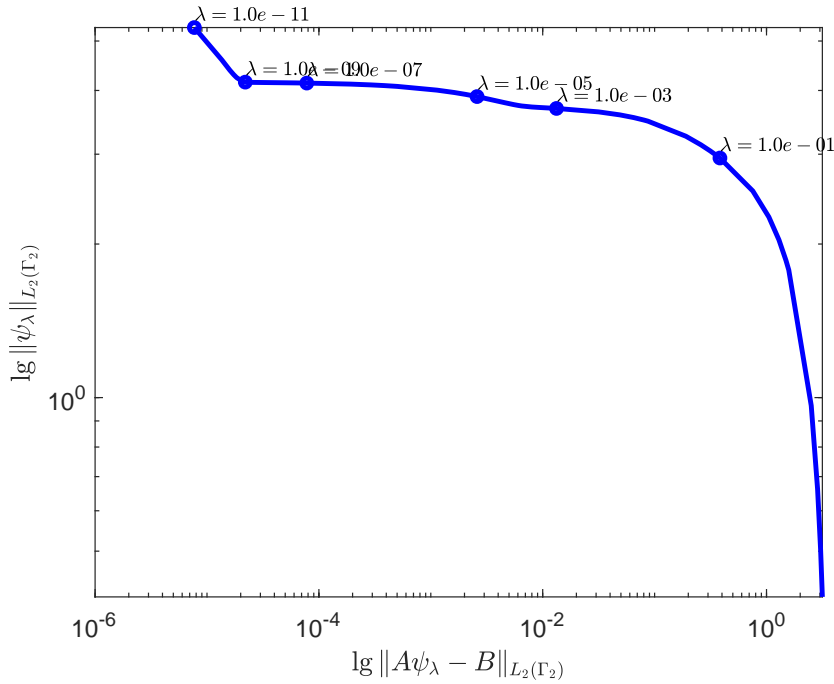


Рис. 2.16: L-крива для 3% збурених вхідних даних, при $n = 8$ для прикладу 3.

Наведені чисельні експерименти показують, що застосування методу інтегральних рівнянь разом з регуляризацією Тіхонова для чисельного розв'язування некоректної тривимірної задачі Коші дозволяє отримати стійкий розв'язок, що підтверджує теоретичні дослідження. Стійкий розв'язок задачі отримано в обох випадках, коли вхідні дані задано точно і коли у вхідні дані внесені певні збурення.

Розглянуто декілька прикладів з різними конфігураціями областей та різними даними Коші на зовнішній границі, результати яких підтверджують можливість застосування розглянутого підходу для областей, обмежених ізоморфними одиничній сфері поверхнями, а також з відомими даними Коші з відповідних просторів. Отримано зменшення похибки при збільшенні параметру дискретизації n , а також співпадіння кращого значення параметру регуляризації з параметром, знайденим за методом L-кривих. Проаналізовано результати отримані у випадку прямого і непрямого методів інтегральних

рівнянь.

Висновки до розділу 2

В даному розділі було розглянуто регуляризацію Тіхонова для тривимірної задачі Коші для рівняння Лапласа. Зведено вихідну задачу до системи інтегральних рівнянь двома способами: прямим і непрямим методами інтегральних рівнянь. Використано дискретний проєкційний метод Гальоркіна для повної дискретизації отриманих систем інтегральних рівнянь, причому, апроксимувавши розв'язок систем інтегральних рівнянь лінійною комбінацією сферичних гармонік. Враховано специфіку розглянутих областей, що вплинуло на параметризацію поверхневих інтегралів. Виділено особливості в підінтегральних функціях для ефективного застосування кубатурних формул для наближеного обчислення поверхневих інтегралів.

Для двох підходів інтегральних рівнянь застосовано метод регуляризації Тіхонова до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а параметр регуляризації вибрано за методом L-кривих. Причому, наведено законність застосування методу Тіхонова.

Знайдено наближене значення розв'язку в області, а також наближене значення невідомих даних Коші на внутрішній границі області для двох підходів.

Показано, як оптимізувати процес формування коефіцієнтів системи лінійних рівнянь, для зменшення кількості обчислень і як використати отримані результати при формуванні дискретної апроксимації даних Коші.

Продемонструвано декілька чисельних експериментів, які показують застосовність і ефективність, а також стійкість розглянутих методів для чисельного розв'язування лінійної оберненої некоректної задачі. Зроблено аналіз прямого і непрямого методу інтегральних рівнянь для дискретизації тривимірної задачі Коші.

Отримані результати опубліковані у [38].

РОЗДІЛ 3

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ІТЕРАЦІЙНИМИ РЕГУЛЯРИЗУЮЧИМИ МЕТОДАМИ НА ОСНОВІ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Іншим підходом для регуляризації задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) є використання ітераційних методів. Ітераційні методи дозволяють побудувати послідовність наближених функцій u_k , $k = 1, 2, \dots$, яка повинна збігатись до точного розв'язку задачі Коші при $k \rightarrow \infty$. Наявність збіжності і її швидкість залежать від конкретного методу. Очевидним є те, що в ітераційних методах параметром регуляризації λ з означення 1.3.3 буде виконана кількість ітерацій $k^* < \infty$.

Для дослідження коректності ітераційного методу розглянемо означення.

Означення 3.0.1. *Ітераційний метод $u_{k+1}^\delta = R_k(u_k^\delta, \dots, u_1^\delta, u_0, f_2^\delta, g_2^\delta)$, $k = 0, 1, \dots$ із заданим критерієм зупинки є ітераційним регуляризуючим методом для задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2), якщо має місце властивість:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{k+1}^\delta - u\|_{H^1(D)} = 0,$$

де u – це точний розв'язок задачі Коші для рівняння Лапласа в D , а оператор R_k залежить від конкретного методу.

Зауваження 3.0.2. *Оскільки задача Коші (1.2.1)–(1.2.2) є лінійною оберненою задачею, то початкове наближення для усіх ітераційних регуляризуючих методів можна вибрати довільним, що не вплине на збіжність методу.*

Класичним ітераційним регуляризуючим методом є метод Ландвебера, див., наприклад, [50, 91, 99]. Відомо, що даний метод є повільно збіжним і

вимагає інформації про спряжений оператор до оператора задачі Коші. В підрозділі 3.2 розглянемо узагальнений метод Ландвебера, для якого не потрібен спряжений оператор.

В підрозділі 3.1 наведемо ітераційний альтернуючий метод, див., наприклад [22, 50], який використовують для регуляризації задач з строго еліптичним оператором.

Є й інші методи регуляризації некоректних задач, наприклад, метод спряжених градієнтів, див. [91], проте дослідження будуть зосереджені тільки на застосуванні двох попередніх методів для чисельного розв'язування задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2).

Отож, в підрозділах 3.1–3.2 розглянемо регуляризаційні ітераційні методи. В підрозділі 3.3 побудуємо алгоритм на основі методу інтегральних рівнянь для чисельного розв'язування прямих коректних мішаних задач для рівняння Лапласа, які виникають в ітераційних методах. В підрозділі 3.4 покажемо чисельні результати застосувань ітераційних методів для розв'язування задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) для різних вхідних даних і конфігурацій областей.

Отримані результати використання альтернуючого методу і різних модифікацій узагальненого методу Ландвебера є опублікованими у [39] і [33, 37] відповідно.

3.1. Альтернуючий метод

Альтернуючий ітераційний метод був запропонований в 1989р В. Козловим і В. Мазя для чисельного розв'язування деяких некоректних задач з самоспряженим строго еліптичним оператором, а особливо для задачі Коші, див. [22]. Даний метод був застосований для чисельного розв'язування двовимірної задачі Коші, див. [32, 50]. Даний підхід буде розширено для тривимірних областей.

Приведемо формулювання деяких мішаних задач.

Означення 3.1.1. *Задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа (1.2.1) полягає у знаходженні такої гармонійної функції u , яка задовольняє граничні умови:*

$$u = f \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (3.1.1)$$

де f, g – задані функції.

Означення 3.1.2. *Задача Неймана-Діріхле для рівняння Лапласа (1.2.1) полягає у знаходженні такої гармонійної функції u , яка задовольняє граничні умови:*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \tilde{g} \quad \text{на } \Gamma_2, \quad u = \tilde{f} \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (3.1.2)$$

де \tilde{f}, \tilde{g} – задані функції.

Теорема 3.1.3. *Мішані задачі Діріхле-Неймана і Неймана-Діріхле для рівняння Лапласа є коректно поставлені за Адамаром.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли вхідні дані з просторів Соболева. Відомо, що якщо $\tilde{f} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ і $\tilde{g} \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$, тоді задача Неймана-Діріхле має єдиний розв'язок $u \in H^1(D)$, див., наприклад, [51]. Крім того нормальна похідна від u на Γ_1 є визначена в $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ (що потрібно для ітераційної процедури).

Аналогічні твердження є відомими для задачі Діріхле-Неймана. □

Розглянемо випадок, коли в мішаних задачах функції $f = f_2$ і $\tilde{g} = g_2$ – це відомі дані Коші на зовнішній границі, а $\tilde{f} = h_1$ і $g = h$ – деякі неперервні функції. Отримаємо:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D, \quad (3.1.3)$$

$$u = f_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (3.1.4)$$

і

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad u = h_1 \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (3.1.6)$$

Алгоритм 3.1.4. Альтернуючий метод, для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) складається з таких кроків:

- Першу апроксимацію розв'язку u_0 задачі (1.2.1)–(1.2.2) отримуємо з задачі Діріхле-Неймана (3.1.3)–(3.1.4), при $h = h_0$, де h_0 – довільна функція.
- Для обчисленої функції u_{2k} , обчислюємо u_{2k+1} – як розв'язок задачі Неймана-Діріхле (3.1.5)–(3.1.6), при $h_1 = u_{2k}|_{\Gamma_1}$.
- Тоді обчислюємо u_{2k+2} – розв'язуючи задачу Діріхле-Неймана (3.1.3)–(3.1.4), при $h = \left. \frac{\partial u_{2k+1}}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_1}$.

Зауваження 3.1.5. Ітераційна процедура складається з послідовного виконання двох останніх кроків алгоритму 3.1.4.

Теорема 3.1.6. Нехай u_k – це k -те наближення до розв'язку задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2), отримане альтернуючим методом 3.1.4, тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{H^1(D)} = 0,$$

для довільного початкового наближення $h \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$.

Доведення. Ідея доведення взята з оригінальної роботи В. Козлова і В. Маз'я, див. [22, 93]. Подібний процес доведення розглянуто в роботі [45], в якій наведено алгоритм чисельного розв'язування двовимірної задачі Коші для напівбезмежної області альтернуючим методом.

Визначимо лінійний оператор $B : H^{-1/2}(\Gamma_1) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_1)$:

$$B\tilde{h} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu},$$

де u_1 – це розв'язок другої задачі (3.1.5)–(3.1.6), при $g_2 = 0$, а $h_1 = u_0|_{\Gamma_1}$, де u_0 – розв'язок задачі (3.1.3)–(3.1.4), при $h = \tilde{h}$. Розв'язки мішаних задач в просторах Соболева існують і єдині, за теоремою 3.1.3.

Тоді задача Коші (1.2.1)–(1.2.2) еквівалентна такому рівнянню:

$$Bh + G(f_2, g_2) = h, \quad (3.1.7)$$

де $G(f_2, g_2) = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1}$, де \tilde{u}_1 – функція, отримана аналогічно до u_1 , при $h = 0$. Бачимо, що альтернуючий метод – це ітераційний алгоритм з фіксованою точкою для (3.1.7). З подання (3.1.7) бачимо, що ітераційний процес буде збіжним до точного розв’язку, якщо він є збіжним для тривіальних відомих даних Коші, тобто $f_2 = 0$ і $g_2 = 0$ на Γ_2 .

Розглянемо скалярний добуток:

$$(f, g) = \int_D \nabla u \nabla v dx,$$

де u – розв’язок (3.1.3)–(3.1.4), при $h = f$, $f_2 = 0$, а v – розв’язок (3.1.3)–(3.1.4), при $h = g$, $f_2 = 0$. На основі формул Гріна, див., наприклад, [97], можна показати, що оператор B – додатній, сапоспряжений, незростаючий ($\|B\| \leq 1$, де $\|\cdot\|$ породжена введеним скалярним добутком) і 1 не є власним числом, див. [45].

Нехай u_2 – це розв’язок задачі (3.1.3)–(3.1.4), при $h = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1}$. Тоді

$$(Bh, Bh) = \int_D \nabla u_2 \nabla u_2 dx.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\int_D \nabla u_{2k} \nabla u_{2k} dx = (B^k h_0, B^k h_0).$$

Тоді, на основі властивостей оператора B , $u_{2k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Оскільки $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}$ на Γ_1 , то

$$\int_D \nabla u_1 \nabla u_2 dx = \int_D \nabla u_2 \nabla u_2 dx.$$

Тоді отримаємо, що

$$\int_D \nabla(u_{2k+1} - u_{2k}) \nabla(u_{2k+1} - u_{2k}) dx = \int_D \nabla u_{2k} \nabla u_{2k} dx - \int_D \nabla u_{2k+1} \nabla u_{2k+1} dx.$$

Остання формула доводить, що $u_{2k+1} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, що в свою чергу доводить теорему для точних вхідних даних.

Для випадку збурених даних, припустимо, що нам задані f_2^δ і g_2^δ , $\delta > 0$.

Тоді

$$\|G(f_2^\delta, g_2^\delta) - G(f_2, g_2)\| \leq \delta.$$

Оскільки оператор B самоспряжений, додатний і незростаючий, то принцип нев'язки Морозова можна застосувати як критерій зупинки ітераційного процесу, див., наприклад, [16, 21]. Тоді, якщо $k = k(\delta)$ найменше значення для якого:

$$\|h_{k+1}^\delta - h_k^\delta\| \leq \tau\delta,$$

де $\tau > 1$, тоді $h_{k(\delta)}^\delta$ збігається до точного розв'язку при $\delta \rightarrow 0$.

Отже, альтернуючий метод є регуляризуючою процедурою. \square

Альтернуючий метод зводиться до послідовного розв'язування двох коректних мішаних задач на кожному кроці ітераційного процесу. Дані задачі будуть чисельно розв'язані методом інтегральних рівнянь, що буде наведено в підрозділі 3.3.

3.2. Узагальнений метод Ландвебера

Для некоректних задач з несамоспряженим оператором були запропоновані інші ітераційні методи, наприклад, метод спряжених градієнтів [76, 91] чи метод Ландвебера [34, 91]. Для кожної з цих ітераційних процедур потрібен вигляд спряженого оператора. Наприклад, ітераційний процес методу Ландвебера для задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) виглядає так:

$$u_{k+1} = u_k - \gamma K^* (K u_k - f_2), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де K – це відомий оператор, див. [50], K^* – спряжений до K оператор, див. [50], $0 \leq \gamma \leq 1/\|K\|^2$ (за інформацією про збіжність даного методу, див., наприклад [91]).

З фізичної точки зору альтернуючий метод є природним, оскільки не вимагає додаткової інформації про спряжений оператор. В даному підрозділі розглянемо узагальнений ітераційний метод Ландвебера для задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2), для якого також не потрібна інформація про спряжений оператор. Більше того, даний підхід може бути застосований до інших еліптичних рівнянь 2-го порядку, див. [33].

Зауваження 3.2.1. На кожному кроці ітераційного методу будуть розв'язані мішані задачі для рівняння Лапласа з попереднього підрозділу, див. означення 3.1.1, 3.1.2.

Алгоритм 3.2.2. Ітераційний метод, для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) складається з таких кроків:

- Вибрати довільне початкове наближення η_0 на внутрішній границі області Γ_1 .
- Перша апроксимація u_0 – це є розв'язок задачі Неймана-Діріхле з граничними умовами:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = g_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad u_0 = \eta_0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

- Знаходимо функцію v_0 – як розв'язок задачі Діріхле-Неймана з граничними умовами:

$$v_0 = f_2 - u_0 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

- Для відомих u_{k-1} і v_{k-1} обчислюємо наступне наближення u_k , яке є розв'язком задачі Неймана-Діріхле з такими граничними умовами:

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu} = g_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad u_k = \eta_k \quad \text{на } \Gamma_1,$$

3

$$\eta_k = \eta_{k-1} + \gamma v_{k-1}|_{\Gamma_1},$$

де $\gamma > 0$ - параметр релаксації.

- Обчислюємо функцію v_k , розв'язуючи задачу Діріхле-Неймана з граничними умовами:

$$v_k = f_2 - u_k \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \frac{\partial v_k}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Зауваження 3.2.3. Ітераційний процес складається з виконання двох останніх кроків алгоритму з певним критерієм зупинки.

Зауваження 3.2.4. В оригінальному методі Ландвебера функція η обчислюється з врахування нормальної похідної розв'язку спряженої задачі, див., наприклад, [34, 86].

Теорема 3.2.5. Нехай u_k - це k -те наближення до розв'язку задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2), отримане за алгоритмом 3.2.2, $0 \leq \gamma \leq 1/(\|T\|\|K\|)$, де TK - додатний оператор, тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{H^1(D)} = 0,$$

для довільного початкового наближення $\eta_0 \in H^1(\Gamma_1)$.

Доведення. Введемо оператор $K : H^{1/2}(\Gamma_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_2) :$

$$K\eta = u|_{\Gamma_2}, \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma_1),$$

де функція u є розв'язком задачі Неймана-Діріхле з граничними умовами:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad u = \eta \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Також визначимо оператор $G : H^{-1/2}(\Gamma_2) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_2) :$

$$Gg = w|_{\Gamma_2}, \quad \forall g \in H^{-1/2}(\Gamma_2),$$

де функція w є розв'язком задачі Неймана-Діріхле з граничними умовами:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = g \quad \text{на } \Gamma_2, \quad w = 0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Тоді задача Коші (1.2.1)–(1.2.2) еквівалентна до задачі пошуку функції $\eta \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ такої, що:

$$K\eta = f_2 - Gg_2. \quad (3.2.1)$$

Обидва оператори K і G є визначені і обмежені за рахунок коректності мішаних задач в просторах Соболева, див. теорему 3.1.3.

Покажемо, що оператор K – ін'єктивний. Нехай виконується $K\eta = 0$. Тоді функція u є розв'язком рівняння Лапласа з нульовими даними Коші на зовнішній границі Γ_2 . Оскільки існує єдиний розв'язок задачі Коші, за теоремою Гольмгрена $u \equiv 0$ в \bar{D} , тоді $0 = u|_{\Gamma_1} = \eta$. Отже, оператор K – ін'єктивний.

Визначимо допоміжний оператор T , що є відображенням протилежного напрямку до оператора K , тобто $T : H^{1/2}(\Gamma_2) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$:

$$Th = v|_{\Gamma_1}, \quad \forall h \in H^{1/2}(\Gamma_2),$$

де функція v є розв'язком задачі Неймана-Діріхле з граничними умовами:

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad v = h \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Очевидно, що оператор T володіє такими властивостями, як оператор K , тобто T – визначений, обмежений і ін'єктивний.

Композиція операторів TK є додатним оператором, див. [33].

Нехай u_k – це k -те наближення, отримане за алгоритмом 3.2.2, тоді

$$\begin{aligned} \eta_k &= u_{k-1}|_{\Gamma_1} + \gamma v_{k-1}|_{\Gamma_1} = \eta_{k-1}|_{\Gamma_1} - \gamma T(u_{k-1}|_{\Gamma_2} - f_2) \\ &= \eta_{k-1}|_{\Gamma_1} - \gamma T(K\eta_{k-1} - (f_2 - Gg_2)). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Остання формула, є узагальненим методом Ландвебера для розв'язування рівняння (3.2.1), див. [104]. Далі доведення теореми впливає з загальної теорії по узагальненому методу Ландвебера, див. [104], з врахуванням властивостей операторів T і K . □

Зауваження 3.2.6. Нехай задані збурені входні дані f_2^δ, g_2^δ , для яких виконується оцінка:

$$\|f_2 - f_2^\delta\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} + \|G(g_2 - g_2^\delta)\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \leq \delta,$$

u_k^δ – це k -те наближення до розв'язку задачі, отримане за алгоритмом 3.2.2. Тоді критерієм зупинки ітераційного процесу 3.2.2 є умова:

$$\|f_2^\delta - u_k^\delta\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \leq \tau\delta,$$

де $\tau > 1$.

Доведення. Впливає із застосування принципу нев'язки Морозова [21]. \square

Вибір операторів T і K не є єдиним чином заданий. Можна побудувати оператори на основі інших мішаних задач і отримати іншу ітераційну процедуру типу узагальненого методу Ландвебера, в якій не потрібно мати вигляд спряженого оператора. Розглянемо інший ітераційний алгоритм.

Спочатку наведемо формулювання ще двох задач для рівняння Лапласа, які використовуватимуться в ітераційному процесі.

Означення 3.2.7. Задача Діріхле для рівняння Лапласа (1.2.1) полягає у знаходженні такої гармонійної функції u , яка задовольняє граничні умови:

$$u = f \quad \text{на } \Gamma_2, \quad u = \tilde{f} \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (3.2.3)$$

де f, \tilde{f} – задані функції.

Означення 3.2.8. Задача Робіна для рівняння Лапласа (1.2.1) полягає у знаходженні такої гармонійної функції u , яка задовольняє граничні умови:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \mu u = g \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \mu u = \tilde{g} \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (3.2.4)$$

де g, \tilde{g} – задані функції, константа $\mu > 0$.

Зауваження 3.2.9. По аналогії із задачею Неймана-Діріхле, див. теорему 3.1.3, можна показати, що задачі Діріхле і Робіна для рівняння Лапласа є коректними за Адамаром.

Алгоритм 3.2.10. Ітераційний метод, знаходження наближеного розв'язку задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2) складається з таких кроків:

- Вибрати довільне початкове наближення η_0 на внутрішній границі області Γ_1 .
- Перша апроксимація u_0 – це є розв'язок задачі Діріхле з граничними умовами:

$$u_0 = f_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad u_0 = \eta_0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

- Знаходимо функцію v_0 – як розв'язок задачі Робіна з граничними умовами:

$$\frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \mu v_0 = g_2 - \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \mu v_0 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

- Для відомих u_{k-1} і v_{k-1} обчислюємо наступне наближення u_k , яке є розв'язком задачі Діріхле з такими граничними умовами:

$$u_k = f_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad u_k = \eta_k \quad \text{на } \Gamma_1,$$

з

$$\eta_k = \eta_{k-1} + \gamma v_{k-1}|_{\Gamma_1},$$

де $\gamma > 0$ - параметр релаксації.

- Обчислюємо функцію v_k , розв'язуючи задачу Робіна з граничними умовами:

$$\frac{\partial v_k}{\partial \nu} + \mu v_k = g_2 - \frac{\partial u_k}{\partial \nu} \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \frac{\partial v_k}{\partial \nu} + \mu v_k = 0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Зауваження 3.2.11. *Аналіз збіжності ітераційного процесу 3.2.10 можна провести аналогічно до теореми 3.2.5, з іншим означенням операторів T і K . Критерієм зупинки алгоритму також є принцип нев'язки Морозова.*

Зауваження 3.2.12. *В алгоритмі 3.2.2 змінювали (альтернували) умови Діріхле і Неймана послідовно на різних границях області. В алгоритмі 3.2.10 по черзі розв'язуємо задачу Діріхле, потім Робіна, потім знову Діріхле і т.д.*

Зауваження 3.2.13. *Не можна в ролі однієї з проміжних коректних задач для рівняння Лапласа, які використовуються в ітераційному методі типу Ландвебера, вибрати задачу Неймана, оскільки для неї немає єдиного розв'язку.*

3.3. Чисельне розв'язування прямих граничних задач

В попередніх підрозділах було розглянуто два типи ітераційних регуляризованих алгоритмів для чисельного розв'язування задачі Коші (1.2.1)–(1.2.2). На кожному кроці ітераційного процесу потрібно розв'язувати прямі коректні граничні задачі для рівняння Лапласа (за інформацією про коректність див. теорему 3.1.3). Для альтернуючого методу потрібно мати алгоритм для чисельного розв'язування мішаних задач Неймана-Діріхле і Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа, а для двох модифікацій узагальненого методу Ландвебера – алгоритм для чисельного розв'язування задач Неймана-Діріхле, Діріхле-Неймана, Робіна і Діріхле для рівняння Лапласа, див. означення 3.1.1, 3.1.2, 3.2.7, 3.2.8.

Для чисельного розв'язування коректних граничних задач для рівняння Лапласа існують класичні методи, такі як метод сіток чи метод скінченних елементів, див., наприклад, [88]. Проте, в роботі буде використано метод інтегральних рівнянь, використання якого дозволяє зменшити розмірність задачі, що є актуальним для тривимірних задач. Метод інтегральних рівнянь

був застосований для розв'язування багатьох граничних задач в двовимірних і тривимірних областях, див., наприклад, [48, 49, 97]. Також використовувався метод інтегральних рівнянь разом з регуляризацією Тіхонова для чисельного розв'язування задачі Коші, див. підрозділи 2.1, 2.2.

В цьому підрозділі буде розглянуто алгоритми для чисельного розв'язування граничних задач для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях, які використовують непрямий метод інтегральних рівнянь.

3.3.1 Чисельне розв'язування мішаних задач

Як вже було сказано, мішані задачі Діріхле-Неймана 3.1.1 і Неймана-Діріхле 3.1.2 будемо розв'язувати непрямим методом інтегральних рівнянь, див., наприклад, [97]. Пригадаємо означення допоміжних інтегральних операторів S і K , введених в підрозділі 2.1:

Зауваження 3.3.1. *Граничні інтегральні оператори $S_{\ell j}$ і $K_{\ell j}$ мають вигляд:*

$$(S_{\ell j}\mu)(x) = \int_{\Gamma_j} \mu(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \Gamma_\ell$$

і

$$(K_{\ell j}\mu)(x) = \int_{\Gamma_j} \mu(y)\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(x)}ds(y), \quad x \in \Gamma_\ell,$$

де $\mu \in C(\Gamma_j)$, $\ell, j = 1, 2$, $\Phi(x, y)$, $x \neq y$ – фундаментальний розв'язок для рівняння Лапласа в R^3 (2.1.2).

Теорема 3.3.2. *Сума потенціалів простого шару*

$$u(x) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_j} \phi_j(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in D \tag{3.3.1}$$

є розв'язком мішаних задач Діріхле-Неймана і Неймана-Діріхле, якщо невідомі густини $\phi_1 \in C(\Gamma_1)$ і $\phi_2 \in C(\Gamma_2)$ є розв'язками системи лінійних

інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} S_{21}\phi_1 + S_{22}\phi_2 = f & \text{на } \Gamma_2 \\ \left(-\frac{1}{2}I + K_{11}\right)\phi_1 + K_{12}\phi_2 = g & \text{на } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

i

$$\begin{cases} K_{21}\phi_1 + \left(\frac{1}{2}I + K_{22}\right)\phi_2 = \tilde{g} & \text{на } \Gamma_2 \\ S_{11}\phi_1 + S_{12}\phi_2 = \tilde{f} & \text{на } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

відповідно.

Доведення. Аналогічне до доведення теореми 2.1.7, враховуючи теореми про стрибки потенціалів простого шару, див. [97]. \square

Теорема 3.3.3. Системи інтегральних рівнянь (3.3.2) і (3.3.3) мають єдиний розв'язок, який неперервно залежить від вхідних даних.

Доведення. Доведення коректності в просторах слідів Соболева наведено, наприклад, в [79, 103], а в банахових просторах Гьольдера – [97]. \square

Вважаємо, що існують функції відображення q_1, q_2 , які відображають граничні поверхні в одиничну сферу:

$$q_j : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Gamma_j, \quad j = 1, 2.$$

Пригадаємо означення параметризованих інтегральних операторів \tilde{S} і \tilde{K} , введених в підрозділі 2.3:

Зауваження 3.3.4. Оператори $\tilde{S}_{\ell_j}, \tilde{K}_{\ell_j}$ мають наступний вигляд:

$$(\tilde{S}_{\ell_j}\phi)(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \phi(\hat{y})L_{\ell_j}(\hat{x}, \hat{y})ds(\hat{y}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2$$

i

$$(\tilde{K}_{\ell_j}\phi)(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \phi(\hat{y})M_{\ell_j}(\hat{x}, \hat{y})ds(\hat{y}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2,$$

де $\phi \in C(\Gamma_j)$, $j = 1, 2$, а ядра інтегральних операторів задані в (2.3.4), (2.3.5).

Наслідок 3.3.5. Системи інтегральних рівнянь (3.3.2) і (3.3.3) є еквівалентними таким системам параметризованих інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \tilde{S}_{21}\psi_1 + \tilde{S}_{22}\psi_2 = f_p & \text{на } \mathbb{S}^2 \\ \left(-\frac{1}{2}I + \tilde{K}_{11}\right)\psi_1 + \tilde{K}_{12}\psi_2 = g_p & \text{на } \mathbb{S}^2 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

$$i \quad \begin{cases} \tilde{K}_{21}\psi_1 + \left(\frac{1}{2}I + \tilde{K}_{22}\right)\psi_2 = \tilde{g}_p & \text{на } \mathbb{S}^2 \\ \tilde{S}_{11}\psi_1 + \tilde{S}_{12}\psi_2 = \tilde{f}_p & \text{на } \mathbb{S}^2 \end{cases}, \quad (3.3.5)$$

де $\psi_\ell(\hat{x}) = \phi(q_\ell(\hat{x}))$, $\ell = 1, 2$, $f_p(\hat{x}) = f(q_2(\hat{x}))$, $g_p(\hat{x}) = g(q_1(\hat{x}))$, $\tilde{f}_p(\hat{x}) = \tilde{f}(q_1(\hat{x}))$, $\tilde{g}_p(\hat{x}) = \tilde{g}(q_2(\hat{x}))$, $\forall \hat{x} \in \mathbb{S}^2$.

Доведення. На основі застосувань біективних функцій відображень q_1, q_2 з врахуванням вигляду операторів \tilde{S}, \tilde{K} . \square

Для повної дискретизації систем (3.3.4) і (3.3.5), як і в підрозділі 2.4, використаємо метод Вінерта. Пригадаємо вигляд матриць \hat{A} і \tilde{A} , введених в підрозділі 2.4:

Зауваження 3.3.6. Матриці $\hat{A}^{\ell j}$, $\tilde{A}^{\ell j}$, $\ell, j = 1, 2$ мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{kk'mm'}^{\ell j} &= \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \mu_{\rho} \alpha_s Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \\ &\times \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'} L_{\ell j}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) Y_{k,m}^R(\tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell \neq j \\ \tilde{\beta}_{s'} R_{\ell}(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp'}^{s'\rho'}) Y_{k,m}^R(\hat{y}_{sp'}^{s'\rho'}), & \ell = j \end{cases}, \quad (3.3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{kk'mm'}^{\ell j} &= \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} \alpha_s Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \left(\begin{cases} 0, & \ell \neq j \\ \frac{1}{2}(-1)^{\ell} Y_{k,m}^R(\hat{x}_{s\rho}), & \ell = j \end{cases} + \right. \\ &+ \left. \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \begin{cases} \tilde{\alpha}_{s'} M_{\ell j}(\hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}) Y_{k,m}^R(\tilde{y}_{s'\rho'}), & \ell \neq j \\ \tilde{\beta}_{s'} \tilde{R}_{\ell}(\hat{x}_{s\rho}, \hat{y}_{sp'}^{s'\rho'}, \hat{x}_{s\rho}) Y_{k,m}^R(\hat{y}_{sp'}^{s'\rho'}), & \ell = j \end{cases} \right) \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

де функції $L_{\ell j}$ (2.3.4), $M_{\ell j}$ (2.3.5), R_{ℓ} (2.3.7), \tilde{R}_{ℓ} (2.3.8), задані в підрозділі 2.3, $\mu_{\rho}, \alpha_s, \tilde{\mu}_{\rho'}, \tilde{\alpha}_{s'}, \tilde{\beta}_{s'}, \hat{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s'\rho'}, \hat{y}_{sp'}^{s'\rho'}$ – ваги і вузли кубатурних формул і

дискретного скалярного добутку, заданих в (2.4.5), (2.4.6), (2.4.9), а $Y_{k,m}^R$ – дійснозначні сферичні гармоніки (2.6.1).

Теорема 3.3.7. Функції $\tilde{\psi}_\ell$, $\ell = 1, 2$:

$$\tilde{\psi}_\ell(\hat{x}) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \psi_{k,m}^\ell Y_{k,m}^R(\hat{x}), \quad \ell = 1, 2, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2 \quad (3.3.8)$$

є наближенням розв'язком систем інтегральних рівнянь (3.3.4) і (3.3.5), якщо невідомі коефіцієнти $\psi_{k,m}^\ell \in \mathbb{R}$ є розв'язком наступних систем алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(\psi_{k,m}^1 \hat{A}_{kk'mm'}^{21} + \psi_{k,m}^2 \hat{A}_{kk'mm'}^{22} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \alpha_s f_p(\hat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \\ \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(\psi_{k,m}^1 \tilde{A}_{kk'mm'}^{11} + \psi_{k,m}^2 \tilde{A}_{kk'mm'}^{12} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \alpha_s g_p(\hat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \end{cases}, \quad (3.3.9)$$

$k' = 0, \dots, n$, $m' = -k', \dots, k'$ і

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(\psi_{k,m}^1 \tilde{A}_{kk'mm'}^{21} + \psi_{k,m}^2 \tilde{A}_{kk'mm'}^{22} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \alpha_s \tilde{g}_p(\hat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \\ \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(\psi_{k,m}^1 \hat{A}_{kk'mm'}^{11} + \psi_{k,m}^2 \hat{A}_{kk'mm'}^{12} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \alpha_s \tilde{f}_p(\hat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \end{cases}, \quad (3.3.10)$$

$k' = 0, \dots, n$, $m' = -k', \dots, k'$ відповідно. Причому для $f, \tilde{g} \in C^r(\Gamma_2)$, $g, \tilde{f} \in C^r(\Gamma_1)$, $r > 0$ виконується оцінка:

$$\|\psi_\ell - \tilde{\psi}_\ell\|_{C(\Gamma_\ell)} \leq C n^{-r}, \quad \ell = 1, 2, \quad (3.3.11)$$

де константа $C = C(\|\psi_\ell\|_{C^r(\Gamma_\ell)})$.

Доведення. Системи алгебраїчних рівнянь (3.3.9) і (3.3.10) отримані в результаті застосування методу Вінерта [115] до систем інтегральних рівнянь (3.3.4) і (3.3.5). Тобто, після наближеного обчислення інтегралів в системах інтегральних рівнянь за формулами (2.4.5), (2.4.6), апроксимації невідомих густин лінійною комбінацією дійснозначних сферичних гармонік (3.3.8), засто-

сування скалярного добутку (2.4.9) з дійснозначними сферичними гармоніками $Y_{k',m'}^R$ до систем інтегральних рівнянь, отримуємо системи алгебраїчних рівнянь (3.3.9) і (3.3.10).

Оцінка (3.3.11) отримана на основі роботи I. Sloan і I. Graham [67] по чисельному розв'язуванню задачі дифракції (про чисельне розв'язування інтегрального рівняння другого роду для рівняння Гельмгольца в тривимірних областях). \square

Зауваження 3.3.8. Знаходження коефіцієнтів $\hat{A}^{\ell j}$, $\tilde{A}^{\ell j}$, $\ell, j = 1, 2$ вимагає великої кількості операцій, для зменшення їхньої кількості потрібно виконати додаткову оптимізацію, за рахунок обчислення проміжних матриць, яка для даних коефіцієнтів наведена в підрозділі 2.6.

Наслідок 3.3.9. Функція $u_{nn'}$:

$$u_{nn'}(x) = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_{\ell}(\tilde{y}_{s'\rho'}) \Phi(x, q_{\ell}(\tilde{y}_{s'\rho'})) J_{q_{\ell}}(\tilde{y}_{s'\rho'}), \quad x \in D,$$

де густина $\tilde{\psi}_{\ell}$ має вигляд (3.3.8), є наближенням розв'язком мішаних задач Неймана-Діріхле 3.1.2 і Діріхле-Неймана 3.1.1.

Доведення. Дана формула є результатом параметризації інтегралів в поданні розв'язку (3.3.1) і застосуванні кубатурної формули (2.4.5) для наближеного обчислення поверхневих інтегралів без особливості в ядрі. \square

Під час виконання кроків ітераційних регуляризуючих процесів потрібно обчислити значення функції або нормальної похідної на одній з границь, то потрібно мати також відповідні розрахункові формули.

Наслідок 3.3.10. Нехай функція $u_{nn'}$ – є наближенням розв'язком задачі Неймана-Діріхле, де густини $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ мають вигляд (3.3.8). Тоді

$$\begin{aligned} u_{nn'}(q_2(\hat{x})) = & \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \left(\tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_1(\tilde{y}_{s'\rho'}) L_{21}(\hat{x}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \right. \\ & \left. + \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} \tilde{\psi}_2(T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) R_2(\hat{x}, T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) \right), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nn'}}{\partial \nu}(q_1(\hat{x})) &= \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \left(\tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} \tilde{\psi}_1(T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{R}_1(\hat{x}, T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}, \hat{x}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) M_{12}(\hat{x}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \right) - \frac{1}{2} \tilde{\psi}_1(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Доведення. На основі властивостей потенціалу простого шару, див. [97], з подання функції в області D (3.3.8) отримаємо подання функції на зовнішній поверхні Γ_2 і нормальної похідної на внутрішній поверхні Γ_1 . Доведення отримуємо після параметризації даних формул із наступним застосуванням кубатурних формул (2.4.5), (2.4.6). \square

Наслідок 3.3.11. *Нехай функція $u_{nn'}$ є наближенням розв'язком задачі Діріхле-Неймана, де густини $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ мають вигляд (3.3.8). Тоді*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nn'}}{\partial \nu}(q_2(\hat{x})) &= \frac{1}{2} \tilde{\psi}_2(\hat{x}) + \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \left(\tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_1(\tilde{y}_{s'\rho'}) M_{21}(\hat{x}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} \tilde{\psi}_2(T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{R}_2(\hat{x}, T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}, \hat{x}) \right), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

$$\begin{aligned} u_{nn'}(q_1(\hat{x})) &= \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \left(\tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} \tilde{\psi}_1(T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) R_1(\hat{x}, T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) L_{12}(\hat{x}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \right), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Доведення. Аналогічно до доведення наслідку 3.3.10. \square

3.3.2 Чисельне розв'язування задачі Діріхле

Тривимірну задачу Діріхле для рівняння Лапласа, див. озн. 3.2.7, розв'язуватимемо аналогічно до мішаних задачі Діріхле-Неймана і Неймана-Діріхле.

Теорема 3.3.12. *Сума потенціалів простого шару*

$$u(x) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_j} \phi_j(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D \quad (3.3.16)$$

є розв'язком задачі Діріхле, якщо невідомі густини $\phi_1 \in C(\Gamma_1)$ і $\phi_2 \in C(\Gamma_2)$ є розв'язком системи лінійних інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} S_{21}\phi_1 + S_{22}\phi_2 = f & \text{на } \Gamma_2 \\ S_{11}\phi_1 + S_{12}\phi_2 = \tilde{f} & \text{на } \Gamma_1 \end{cases}. \quad (3.3.17)$$

Доведення. Аналогічне до теореми 2.1.7, враховуючи неперервність потенціалу простого шару при переході через границю, див. [97]. \square

Теорема 3.3.13. Система інтегральних рівнянь (3.3.17) має єдиний розв'язок $\phi_j \in C^{0,\alpha}(\Gamma_j)$, $j = 1, 2$, який неперервно залежить від вхідних даних, якщо $f \in C^{0,\alpha}(\Gamma_2)$ і $\tilde{f} \in C^{0,\alpha}(\Gamma_1)$.

Доведення. Див., наприклад, [97]. \square

Знову вважаємо, що існують функції відображення q_1, q_2 :

$$q_j : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Gamma_j, \quad j = 1, 2.$$

Наслідок 3.3.14. Система інтегральних рівнянь (3.3.17) є еквівалентною наступній системі параметризованих інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \tilde{S}_{21}\psi_1 + \tilde{S}_{22}\psi_2 = f_p & \text{на } \mathbb{S}^2 \\ \tilde{S}_{11}\psi_1 + \tilde{S}_{12}\psi_2 = \tilde{f}_p & \text{на } \mathbb{S}^2 \end{cases}, \quad (3.3.18)$$

де $\psi_\ell(\hat{x}) = \phi(q_\ell(\hat{x}))$, $\ell = 1, 2$, $f_p(\hat{x}) = f(q_2(\hat{x}))$, $\tilde{f}_p(\hat{x}) = \tilde{f}(q_1(\hat{x}))$, $\forall \hat{x} \in \mathbb{S}^2$.

Доведення. На основі застосування бієктивних функцій відображень q_1, q_2 з врахуванням вигляду оператора \tilde{S} . \square

Для повної дискретизації системи (3.3.18), аналогічно випадку мішаних задач, використаємо метод Вінерта [115].

Теорема 3.3.15. Функції $\tilde{\psi}_\ell$, $\ell = 1, 2$:

$$\tilde{\psi}_\ell(\hat{x}) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \psi_{k,m}^\ell Y_{k,m}^R(\hat{x}), \quad \ell = 1, 2, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2 \quad (3.3.19)$$

є наближенням розв'язком системи інтегральних рівнянь (3.3.18), якщо невідомі коефіцієнти $\psi_{k,m}^\ell \in \mathbb{R}$ є розв'язком наступної системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(\psi_{k,m}^1 \widehat{A}_{kk'mm'}^{21} + \psi_{k,m}^2 \widehat{A}_{kk'mm'}^{22} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \alpha_s f_p(\widehat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\widehat{x}_{s\rho}) \\ \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \left(\psi_{k,m}^1 \widehat{A}_{kk'mm'}^{11} + \psi_{k,m}^2 \widehat{A}_{kk'mm'}^{12} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \alpha_s \widetilde{f}_p(\widehat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\widehat{x}_{s\rho}) \end{cases}, \quad (3.3.20)$$

$k' = 0, \dots, n$, $m' = -k', \dots, k'$. Причому для $f \in C^r(\Gamma_2)$, $\widetilde{f} \in C^r(\Gamma_1)$, $r > 0$ виконується оцінка:

$$\|\psi_\ell - \widetilde{\psi}_\ell\|_{C(\Gamma_\ell)} \leq Cn^{-r}, \quad \ell = 1, 2, \quad (3.3.21)$$

де константа $C = C(\|\psi_\ell\|_{C^r(\Gamma_\ell)})$.

Доведення. Аналогічно до доведення відповідної теореми для мішаних задач 3.3.7. □

Зауваження 3.3.16. Знаходження коефіцієнтів $\widehat{A}^{\ell j}$ вимагає великої кількості операцій, для зменшення їхньої кількості потрібно виконати додаткову оптимізацію, яка наведена в підрозділі 2.6.

Наслідок 3.3.17. Функція $u_{nn'}$:

$$u_{nn'}(x) = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \widetilde{\mu}_{\rho'} \widetilde{\alpha}_{s'} \widetilde{\psi}_\ell(\widetilde{y}_{s'\rho'}) \Phi(x, q_\ell(\widetilde{y}_{s'\rho'})) J_{q_\ell}(\widetilde{y}_{s'\rho'}), \quad x \in D,$$

де густина $\widetilde{\psi}_\ell$ має вигляд (3.3.19), є наближенням розв'язком задачі Діріхле для рівняння Лапласа 3.2.7.

Доведення. Аналогічне до доведення наслідку 3.3.9. □

Для узагальненого методу Ландвебера потрібно обчислити значення нормальної похідної на зовнішній границі Γ_2 .

Наслідок 3.3.18. *Нехай функція $u_{nn'}$ є наближеним розв'язком задачі Діріхле, де густини $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ мають вигляд (3.3.19). Тоді наближене значення нормальної похідної від розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа на зовнішній границі Γ_2 має вигляд:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nn'}}{\partial \nu}(q_2(\hat{x})) &= \frac{1}{2}\tilde{\psi}_2(\hat{x}) + \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \left(\tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_1(\tilde{y}_{s'\rho'}) M_{21}(\hat{x}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} \tilde{\psi}_2(T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{R}_2(\hat{x}, T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}, \hat{x}) \right), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Доведення. Аналогічно до доведення наслідку 3.3.10. □

3.3.3 Чисельне розв'язування задачі Робіна

Розглянемо алгоритм для чисельного розв'язування задачі Робіна 3.2.8. Дану задачу будемо також розв'язувати непрямым методом інтегральних рівнянь.

Теорема 3.3.19. *Сума потенціалів простого шару*

$$u(x) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_j} \phi_j(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D \quad (3.3.23)$$

є розв'язком задачі Робіна, якщо невідомі густини $\phi_1 \in C(\Gamma_1)$ і $\phi_2 \in C(\Gamma_2)$ є розв'язками системи лінійних інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} K_{21}\phi_1 + \left(\frac{1}{2}I + K_{22}\right)\phi_2 + \mu(S_{21}\phi_1 + S_{22}\phi_2) = g & \text{на } \Gamma_2 \\ \left(-\frac{1}{2}I + K_{11}\right)\phi_1 + K_{12}\phi_2 + \mu(S_{11}\phi_1 + S_{12}\phi_2) = \tilde{g} & \text{на } \Gamma_1 \end{cases}. \quad (3.3.24)$$

Доведення. Аналогічне до доведення теореми 2.1.7, враховуючи теореми про стрибки потенціалів простого шару, див. [97]. □

Теорема 3.3.20. *Система інтегральних рівнянь (3.3.24) має єдиний розв'язок $\phi_j \in C(\Gamma_j)$, $j = 1, 2$, який неперервно залежить від вхідних даних, якщо $g \in C(\Gamma_2)$ і $\tilde{g} \in C(\Gamma_1)$.*

Доведення. Див., наприклад, [97]. \square

Вважаємо, що існують функції відображення q_1, q_2 :

$$q_j : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Gamma_j, j = 1, 2.$$

Наслідок 3.3.21. Система інтегральних рівнянь (3.3.24) є еквівалентною наступній системі параметризованих інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \tilde{K}_{21}\psi_1 + \left(\frac{1}{2}I + \tilde{K}_{22}\right)\psi_2 + \mu(\tilde{S}_{21}\psi_1 + \tilde{S}_{22}\psi_2) = g_p & \text{на } \mathbb{S}^2 \\ \left(-\frac{1}{2}I + \tilde{K}_{11}\right)\psi_1 + \tilde{K}_{12}\psi_2 + \mu(\tilde{S}_{11}\psi_1 + \tilde{S}_{12}\psi_2) = \tilde{g}_p & \text{на } \mathbb{S}^2 \end{cases}, \quad (3.3.25)$$

де $\psi_\ell(\hat{x}) = \phi(q_\ell(\hat{x}))$, $\ell = 1, 2$, $g_p(\hat{x}) = g(q_2(\hat{x}))$, $\tilde{g}_p(\hat{x}) = \tilde{g}(q_1(\hat{x}))$, $\forall \hat{x} \in \mathbb{S}^2$.

Доведення. На основі застосувань бієктивних функцій відображень q_1, q_2 з врахуванням вигляду операторів \tilde{S}, \tilde{K} . \square

Для повної дискретизації системи (3.3.25), аналогічно до мішаних задач і задачі Діріхле, використаємо метод Вінерта.

Теорема 3.3.22. Функції $\tilde{\psi}_\ell$, $\ell = 1, 2$:

$$\tilde{\psi}_\ell(\hat{x}) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \psi_{k,m}^\ell Y_{k,m}^R(\hat{x}), \ell = 1, 2, n \in \mathbb{N}_0, \hat{x} \in \mathbb{S}^2 \quad (3.3.26)$$

є наближеним розв'язком систем інтегральних рівнянь (3.3.25), якщо невідомі коефіцієнти $\psi_{k,m}^\ell \in \mathbb{R}$ є розв'язком системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \sum_{j=1}^2 \psi_{k,m}^j \left(\tilde{A}_{kk'mm'}^{2j} + \mu \hat{A}_{kk'mm'}^{2j} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \alpha_s g_p(\hat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \\ \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k \sum_{j=1}^2 \psi_{k,m}^j \left(\tilde{A}_{kk'mm'}^{1j} + \mu \hat{A}_{kk'mm'}^{1j} \right) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \alpha_s \tilde{g}_p(\hat{x}_{s\rho}) Y_{k',m'}^R(\hat{x}_{s\rho}) \end{cases}, \quad (3.3.27)$$

$k' = 0, \dots, n$, $m' = -k', \dots, k'$. Причому для $g \in C^r(\Gamma_2), \tilde{g} \in C^r(\Gamma_1)$, $r > 0$ виконується оцінка:

$$\|\psi_\ell - \tilde{\psi}_\ell\|_{C(\Gamma_\ell)} \leq Cn^{-r}, \ell = 1, 2, \quad (3.3.28)$$

де константа $C = C(\|\psi_\ell\|_{C^r(\Gamma_\ell)})$.

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 3.3.7. □

Наслідок 3.3.23. *Функція $u_{nn'}$:*

$$u_{nn'}(x) = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_{\ell}(\tilde{y}_{s'\rho'}) \Phi(x, q_{\ell}(\tilde{y}_{s'\rho'})) J_{q_{\ell}}(\tilde{y}_{s'\rho'}), \quad x \in D,$$

де густина $\tilde{\psi}_{\ell}$ має вигляд (3.3.26), є наближеним розв'язком задачі Робіна 3.2.8.

Доведення. Аналогічне до доведення наслідку 3.3.9. □

Для узагальненого методу Ландвебера потрібно обчислити значення розв'язку задачі Робіна на внутрішній границі Γ_1 .

Наслідок 3.3.24. *Нехай функція $u_{nn'}$ – є наближеним розв'язком задачі Робіна, де густини $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ мають вигляд (3.3.26). Тоді*

$$u_{nn'}(q_1(\hat{x})) = \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \left(\tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\beta}_{s'} \tilde{\psi}_1(T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) R_1(\hat{x}, T_{\hat{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) + \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{\alpha}_{s'} \tilde{\psi}_2(\tilde{y}_{s'\rho'}) L_{12}(\hat{x}, \tilde{y}_{s'\rho'}) \right), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \quad (3.3.29)$$

Доведення. Аналогічно до доведення наслідку 3.3.10. □

Отже, в даному підрозділі було розглянуто алгоритми для чисельного розв'язування усіх тривимірних граничних задач для рівняння Лапласа, потрібних для регуляризованих ітераційних алгоритмів.

3.4. Чисельні експерименти

В цьому підрозділі розглянемо чисельні результати знаходження розв'язків тривимірних граничних задач для рівняння Лапласа, які виникають, як додаткові задачі в ітераційних процесах. Потім наведемо приклади реконструкції даних Коші на внутрішній границі, за відомими значеннями даними Коші на зовнішній границі.

Розглянемо випадки точних і збурених даних. Випадковим чином задані значення шуму внесені у значення нормальної похідної на зовнішній границі g_2 , причому виконується оцінка:

$$\|g_2 - g_2^\delta\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq \delta,$$

де $\delta > 0$ – рівень шуму. Збурення задаються за формулою (2.7.1).

В прикладі 1 розглянемо результати чисельного розв'язування прямих задач для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях методом інтегральних рівнянь. В прикладі 2 наведемо застосування альтернуючого методу для чисельного розв'язування задачі Коші, а в прикладі 3 – чисельні результати, отримані після апробації двох модифікацій узагальненого методу Ландвебера для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші.

Приклад 1

Нехай внутрішня границя області Γ_1 – це поверхня, яка має параметричне подання:

$$\Gamma_1 = \{\xi(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi)(\sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

де

$$r(\theta, \varphi) = \frac{1}{(2\sqrt{1+\sqrt{2}})\sqrt{\cos(2\theta) + \sqrt{2 - \sin^2(2\theta)}}},$$

а зовнішня Γ_2 – це поверхня з параметричним поданням:

$$\Gamma_2 = \{\xi(\theta, \varphi) = 1.5(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Вигляд області наведено на рис. 3.1.

В ролі точного розв'язку рівняння Лапласа (1.2.1) виберемо функцію:

$$u_{ex}(x) = \sin x_1 \sinh x_2, x \in D.$$

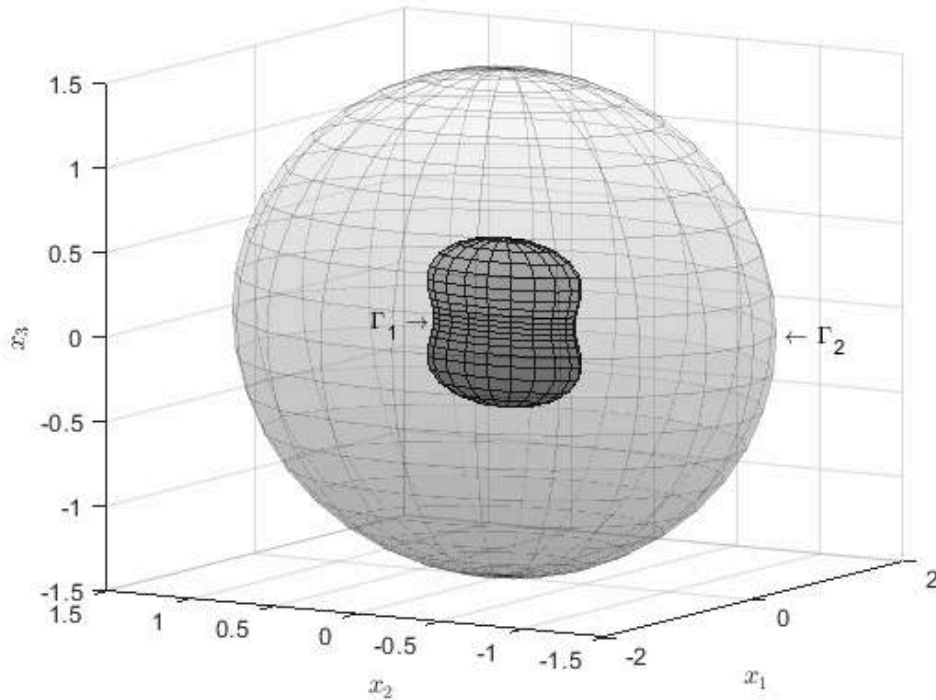


Рис. 3.1: Вигляд області для прикладу 1.

В таблицях 3.1, 3.2 наведено значення похибок чисельних розв'язків задач Неймана-Діріхле, Діріхле-Неймана, Діріхле і Робіна з граничними функціями, згенерованими з вигляду точного розв'язку u_{ex} , тобто:

$$u_{ex}(x) = \sin x_1 \sinh x_2, \quad x \in \Gamma_j, j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial \nu}(x) = (\cos x_1 \sinh x_2, \sin x_1 \cosh x_2, 0)\nu(x), \quad x \in \Gamma_j, j = 1, 2$$

і $\mu = 1$ – для генерації даних для задачі Робіна.

Результати, наведені в таблицях, підтверджують супералгебраїчний порядок збіжності методу інтегральних рівнянь для чисельного розв'язування прямих коректних задач для рівняння Лапласа для аналітичних вхідних даних. Подібні результати можна отримати для іншої конфігурації області і інших достатньо гладких вхідних даних.

	задача Неймана-Діріхле	задача Діріхле-Неймана
$n = n'$	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_2)}$	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$
2	5.30E-01	2.08E-02
4	1.84E-02	2.48E-04
6	4.54E-04	2.67E-06
8	8.09E-06	1.74E-08

Табл. 3.1: L_2 похибки розв'язків мішаних задач для рівняння Лапласа для прикладу 1.

	задача Діріхле	задача Робіна
$n = n'$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_2)}$	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$
2	7.68E-01	3.32E-01
4	5.07E-02	2.27E-02
6	1.86E-03	2.74E-04
8	4.40E-05	1.05E-06

Табл. 3.2: L_2 похибки розв'язків прямих задач для рівняння Лапласа для прикладу 1.

Приклад 2

В даному прикладі розглянемо чисельні результати реконструкції невідомих даних Коші, використовуючи альтернуючий метод.

Нехай внутрішня границя області Γ_1 – це поверхня, яка має параметричне подання:

$$\Gamma_1 = \{ \xi(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi)(\sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \},$$

де

$$r(\theta, \varphi) = \frac{1}{(2\sqrt{1 + \sqrt{2}})\sqrt{\cos(2\theta) + \sqrt{2 - \sin^2(2\theta)}}},$$

а зовнішня Γ_2 – це поверхня з параметричним поданням:

$$\Gamma_2 = \{\xi(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi)(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

де

$$r(\theta, \varphi) = \sqrt{0.8 + 0.2(\cos(2\varphi) - 1)(\cos(4\theta) - 1)}.$$

Вигляд області наведено на рис. 3.2.

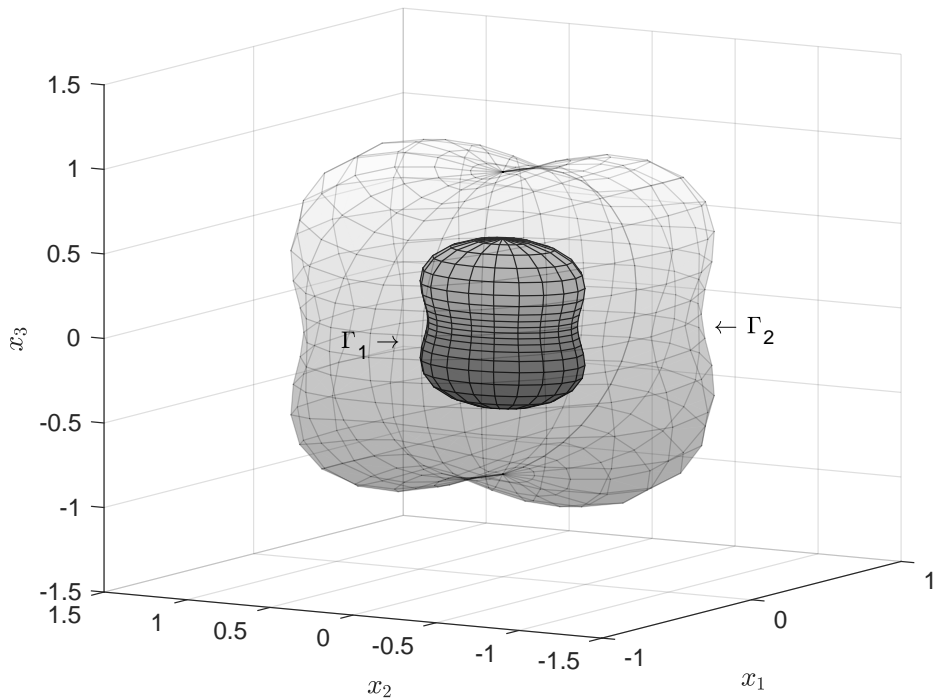


Рис. 3.2: Вигляд області для прикладу 2.

В ролі точного розв'язку рівняння Лапласа (1.2.1) виберемо функцію:

$$u(x) = x_2^2 - x_3^2 + x_1, x \in D.$$

Тоді, відомими даними Коші на зовнішній границі будуть функції:

$$f_2(x) = x_2^2 - x_3^2 + x_1, x \in \Gamma_2,$$

$$g_2(x) = (1, 2x_2, -2x_3)\nu(x), x \in \Gamma_2.$$

Результати реконструкції даних Коші на внутрішній границі області для точних і 3% збурених вхідних даних наведені в таблиці 3.3 (збурені дані згенеровані за правилом (2.7.1)) при $n = n' = 8$.

На рис. 3.3 наведено графіки точних значень функції і отриманих значень функції за альтернуючим методом, у випадку точних вхідних даних, а на рис. 3.5 – відповідні графіки для збурених вхідних даних. Аналогічні графіки для значень нормальної похідної наведені на рис. 3.4, рис. 3.6. Графіки змін L_2 похибок значень функції, залежно від кількості ітерацій, наведено на рис. 3.7.

Максимальна кількість ітерацій для точних даних рівна 700, а для збурених – 250.

δ	k^*	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	$\left\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\ _{L_2(\Gamma_1)}$
0%	64	1.92E-02	1.84E-01
3%	17	3.85E-02	3.10E-01

Табл. 3.3: L_2 похибки значень даних Коші на внутрішній границі області у випадку точних і збурених вхідних даних для прикладу 2.

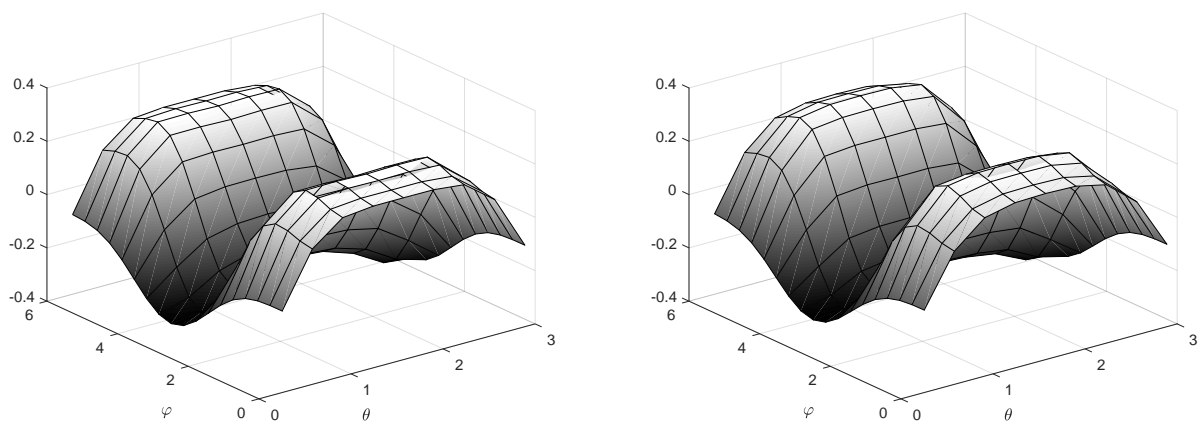


Рис. 3.3: Точні і наближені значення функції на внутрішній границі Γ_1 , при точних даних, для прикладу 2.

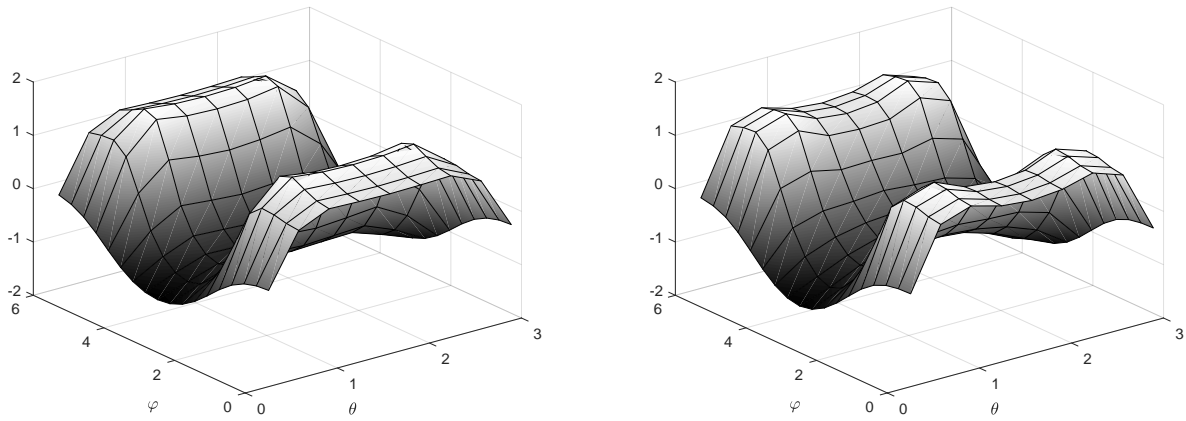


Рис. 3.4: Точні і наближені значення нормальної похідної від функції на внутрішній границі Γ_1 , при точних даних, для прикладу 2.

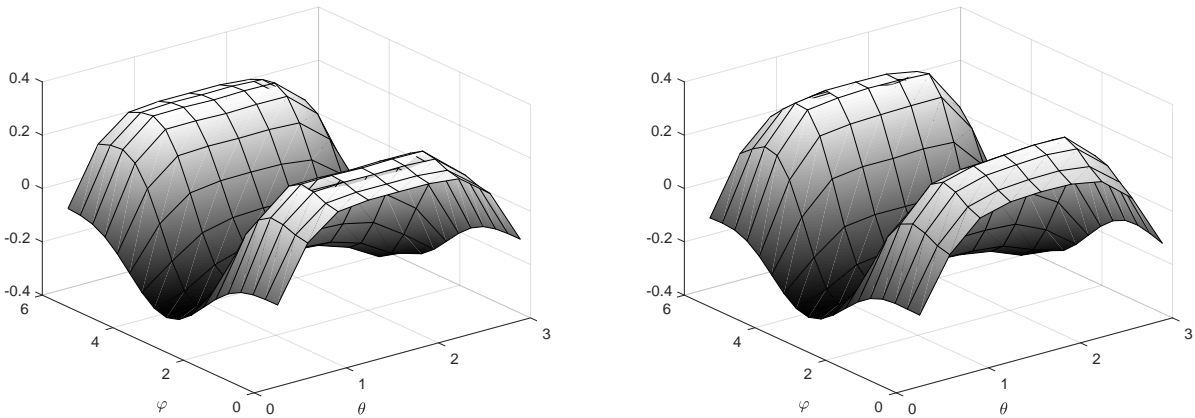


Рис. 3.5: Точні і наближені значення функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3% збурених даних, для прикладу 2.

Приклад 3

В даному прикладі розглянемо чисельні результати реконструкції невідомих даних Коші, використовуючи узагальнений метод Ландвебера.

Нехай внутрішня границя області Γ_1 – це поверхня, яка має параметричне подання:

$$\Gamma_1 = \{ \xi(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \},$$

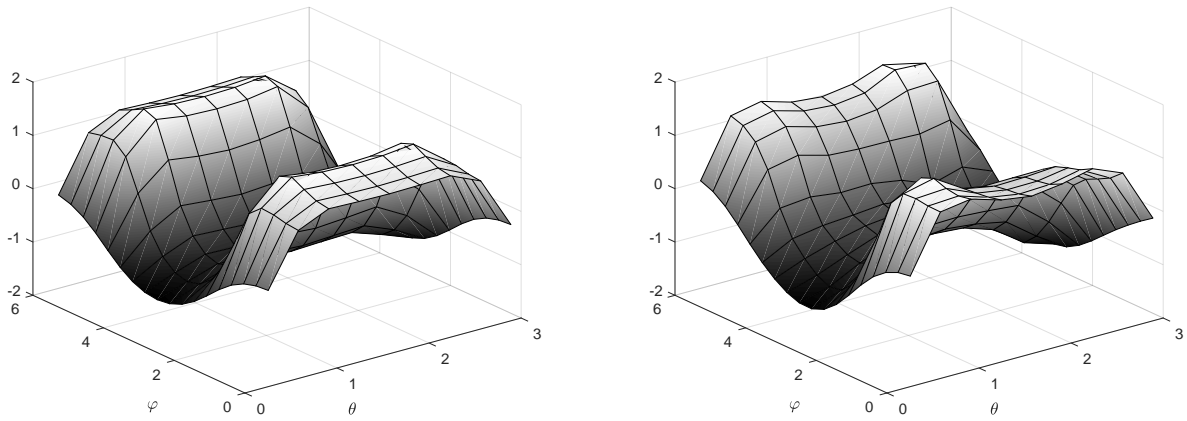


Рис. 3.6: Точні і наближені значення нормальної похідної від функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3% збурених даних, для прикладу 2.

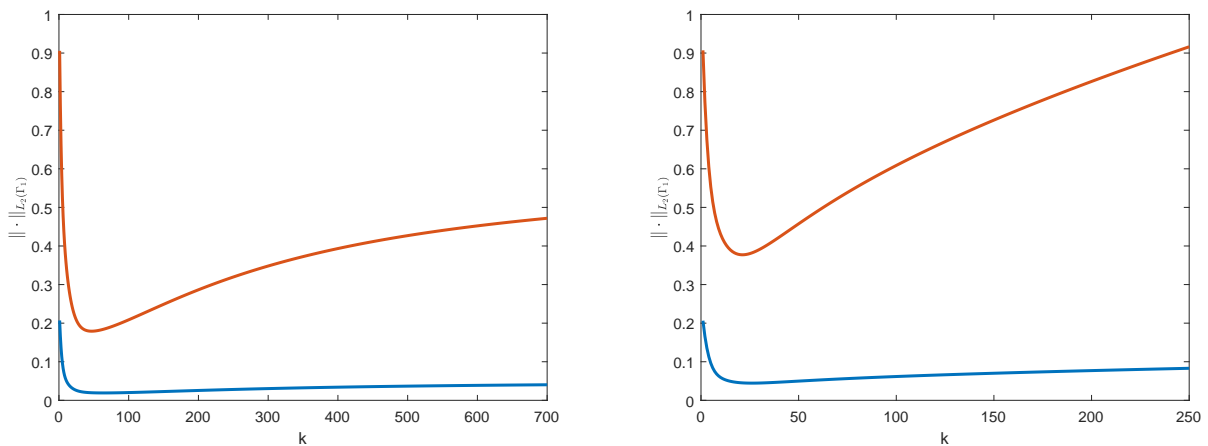


Рис. 3.7: L_2 похибки значень функції при точних і 3 % збурених даних для прикладу 2 (верхній графік, це графік змін похибок нормальної похідної).

де

$$r(\theta, \varphi) = 0.2 \left(0.6 + \sqrt{4.25 + 2 \cos 3\theta} \right),$$

а зовнішня Γ_2 – це поверхня з параметричним поданням:

$$\Gamma_2 = \{ \xi(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, 1.5 \sin \theta \sin \varphi, 1.5 \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}.$$

Вигляд області наведено на рис. 3.8.

В ролі точного розв'язку рівняння Лапласа (1.2.1) виберемо функцію:

$$u(x) = x_2^2 - x_3^2 + x_1, x \in D.$$

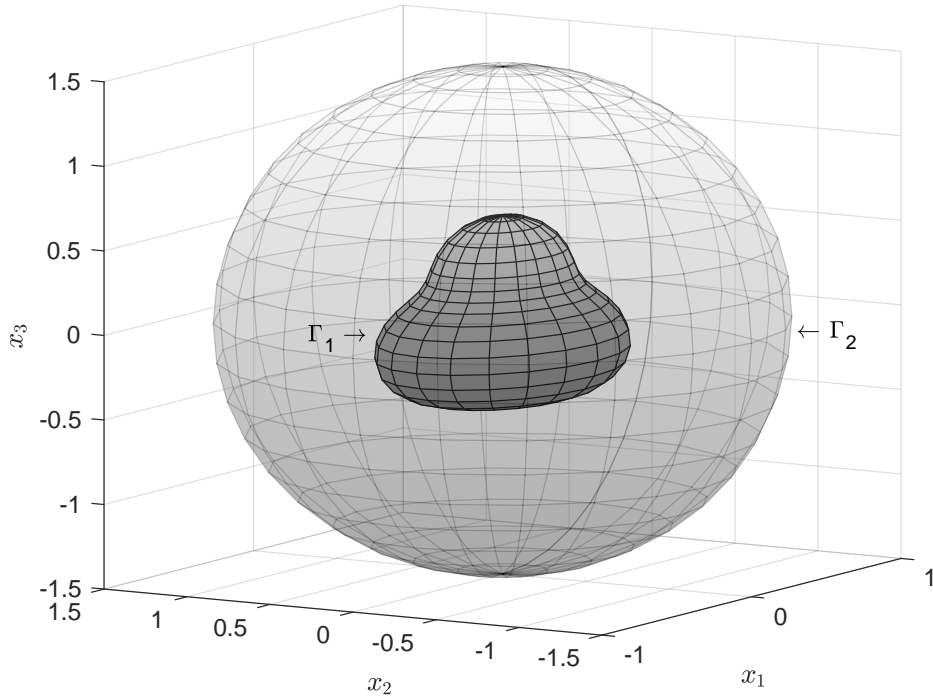


Рис. 3.8: Вигляд області для прикладу 3.

Тоді, відомими даними Коші на зовнішній границі будуть функції:

$$f_2(x) = x_2^2 - x_3^2 + x_1, \quad x \in \Gamma_2,$$

$$g_2(x) = (1, 2x_2, -2x_3)\nu(x), \quad x \in \Gamma_2.$$

Результати реконструкції даних Коші на внутрішній границі області для точних і 3% збурених вхідних даних наведені в таблиці 3.4 (збурені дані згенеровані за правилом (2.7.1)) при $n = n' = 8$.

На рис. 3.9 наведено графіки точних значень функції і отриманих за узагальненим методом Ландвебера (3.2.2) значень функції, у випадку точних вхідних даних, а на рис. 3.10 – відповідні графіки для збурених вхідних даних. Графіки змін L_2 похибок значень функції, залежно від кількості ітерацій, наведено на рис. 3.11.

Також на рис. 3.12, рис. 3.13, рис. 3.14 наведено відповідні графіки, отриманих в результаті тестування іншої модифікації узагальненого методу Ландвебера (3.2.10).

У випадку двох алгоритмів параметр релаксації $\gamma = 0.5$, а для задачі Робіна параметр $\mu = 1$. Максимальна кількість ітерацій для точних даних рівна 700, а для збурених – 250.

		алгоритм 3.2.2		алгоритм 3.2.10	
δ	k^*	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	k^*	$\ u - u_n\ _{L_2(\Gamma_1)}$	
0%	700	1.97E-02	700	2.46E-02	
3%	91	9.17E-02	119	8.83E-02	

Табл. 3.4: L_2 похибки значень даних Коші на внутрішній границі області у випадку точних і збурених вхідних даних для прикладу 3.

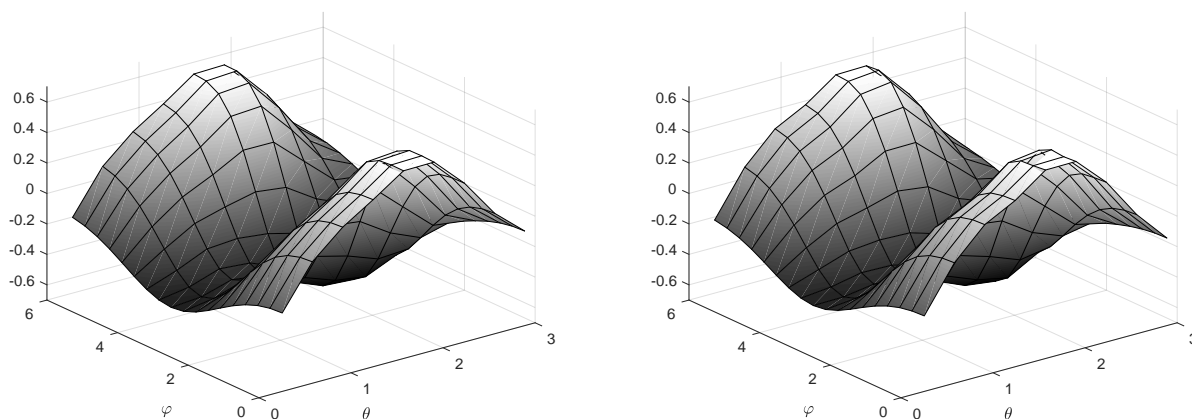


Рис. 3.9: Точні і згенеровані за алгоритмом 3.2.2 значення функції на внутрішній границі Γ_1 , при точних даних, для прикладу 3.

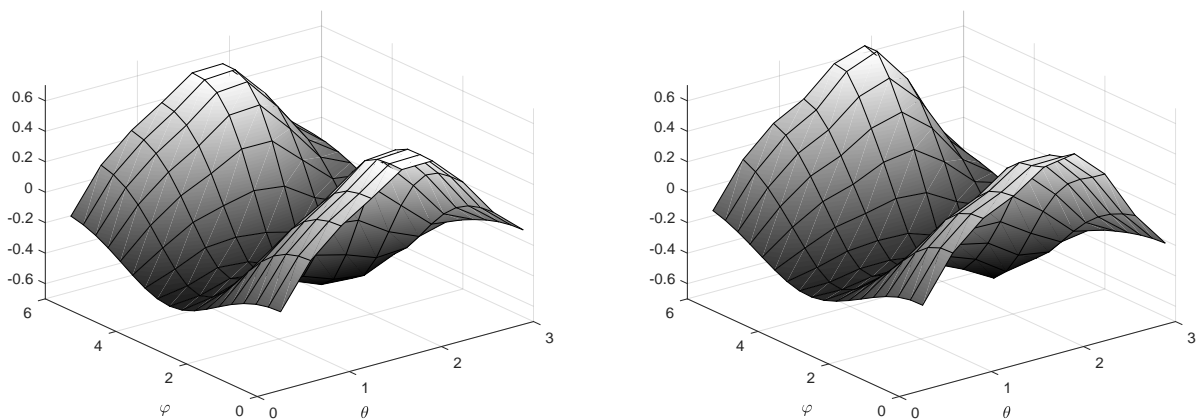


Рис. 3.10: Точні і згенеровані за алгоритмом 3.2.2 значення функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3 % збурених даних, для прикладу 3.

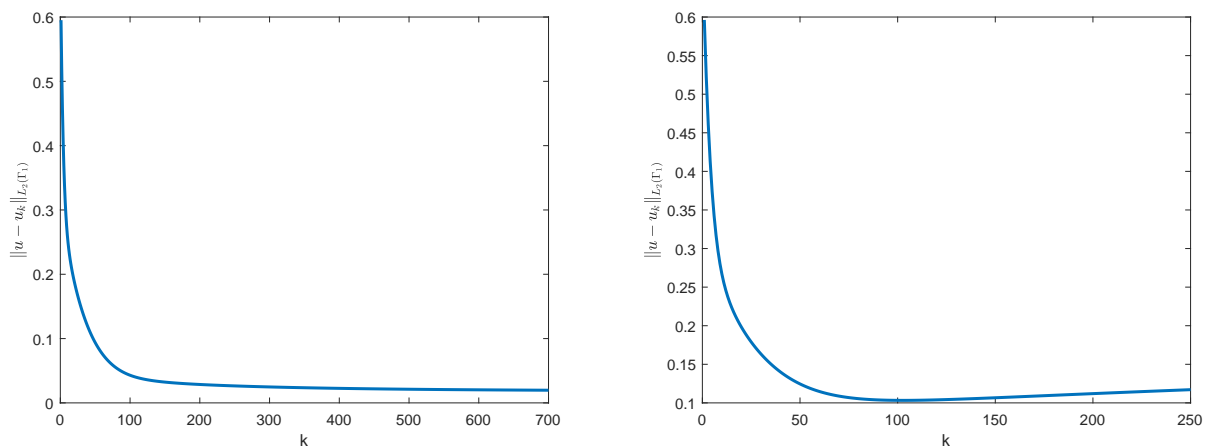


Рис. 3.11: L_2 похибки значень функції, при точних і 3 % збурених даних за алгоритмом 3.2.2, для прикладу 3.

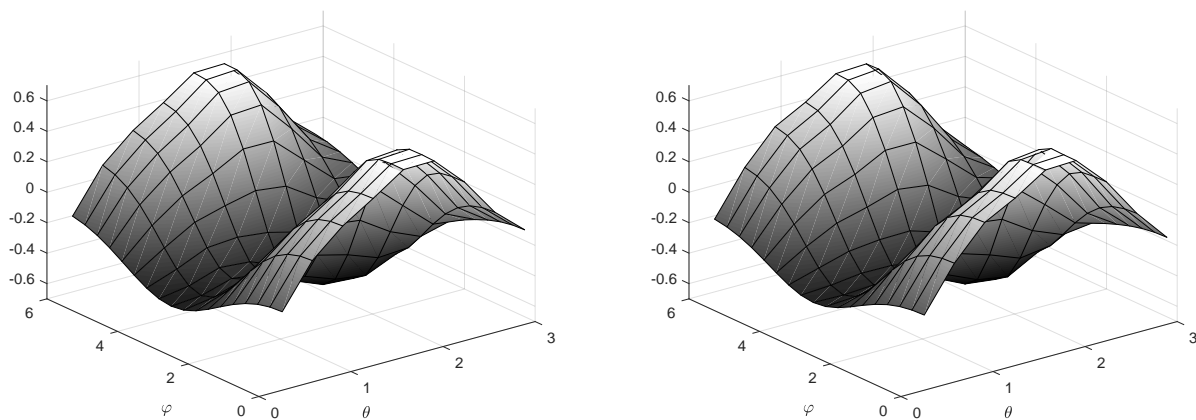


Рис. 3.12: Точні і згенеровані за алгоритмом 3.2.10 значення функції на внутрішній границі Γ_1 , при точних даних, для прикладу 3.

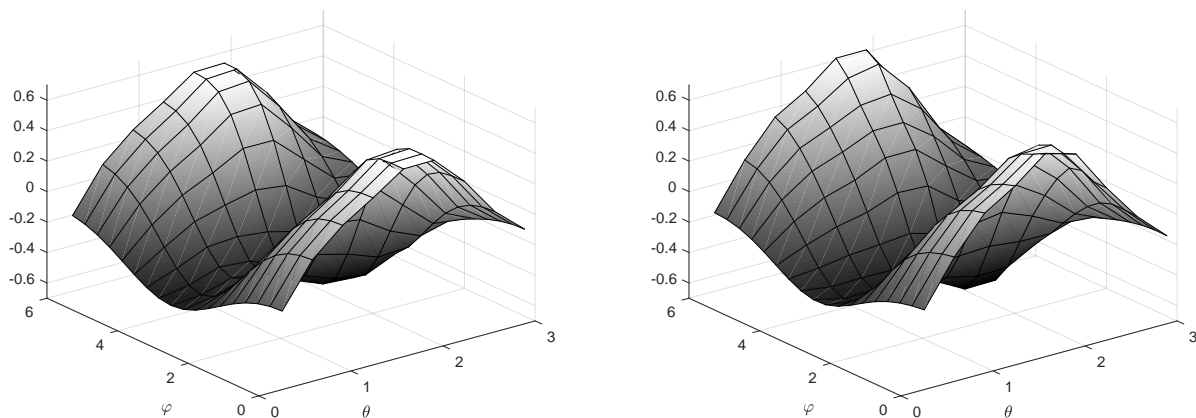


Рис. 3.13: Точні і згенеровані за алгоритмом 3.2.10 значення функції на внутрішній границі Γ_1 , при 3 % збурених даних, для прикладу 3.

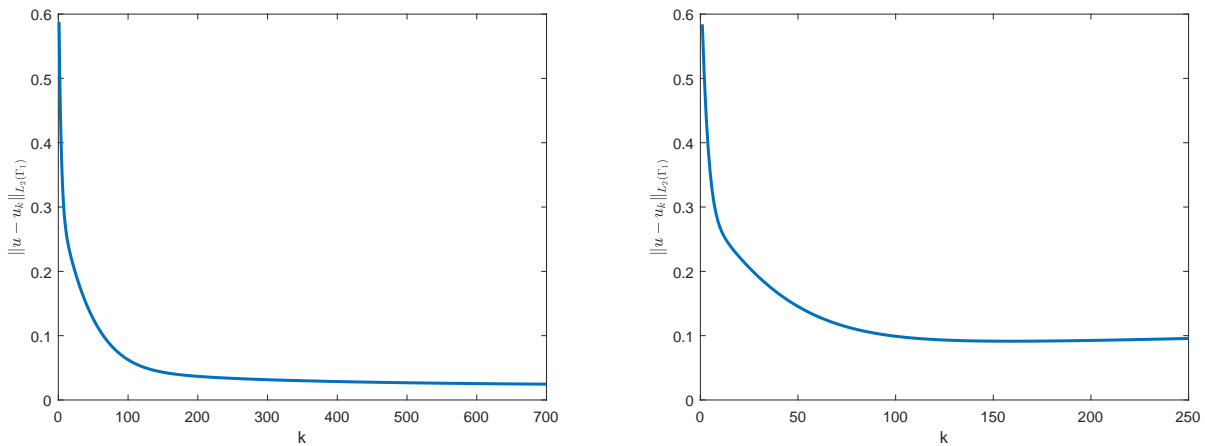


Рис. 3.14: L_2 похибки значень функції, при точних і 3 % збурених даних за алгоритмом 3.2.10, для прикладу 3.

Наведені чисельні експерименти показують, що застосування ітераційних методів регуляризації для чисельного розв'язування некоректної тривимірної задачі Коші дозволяє отримати стійкий розв'язок. Наближений розв'язок збігається до точного розв'язку при точно заданих вхідних даних, а для випадку збурених даних – похибка різниці між точним і наближеним значеннями зменшується до певного значення, що й було прогнозовано теоретичними дослідженнями.

Розглянуто декілька прикладів з різними конфігураціями областей та різними відомими даними Коші, в усіх випадках отримано стійкий наближений розв'язок, що підтверджує теоретичні дослідження і демонструє широку область застосування методів.

Також наведено чисельні експерименти розв'язування прямих задач. Для розглянутих прикладів отримано супералгебраїчну збіжність при збільшенні параметру дискретизації, що підтверджує теоретичні дослідження для достатньо гладких функцій і відповідних областей.

Висновки до розділу 3

В даному розділі було розглянуто ітераційні регуляризуючі алгоритми для чисельного розв'язування тривимірної задачі Коші для рівняння Лапласа. Спочатку в роботі показали алгоритм альтернуючого методу, довели збіжність даного процесу і довели, що даний метод володіє регуляризуючими властивостями. Потім показали алгоритми двох модифікацій узагальненого методу Ландвебера, незалежних від вигляду спряженого оператора. Для даних алгоритмів також довели збіжність і володіння властивостями регуляризації.

Оскільки “будівельними” елементами усіх ітераційних алгоритмів є розв'язування прямих тривимірних граничних задач для рівняння Лапласа, то в даному розділі також розглянули алгоритми для чисельного розв'язування тривимірних задач Неймана-Діріхле, Діріхле-Неймана, Діріхле і Робіна для рівняння Лапласа. Граничні задачі розв'язували, використовуючи непрямий метод інтегральних рівнянь, використали метод Вінерта для дискретизації отриманих систем інтегральних рівнянь. Для даних граничних задач показали декілька чисельних експериментів, які показують високу ефективність методу інтегральних рівнянь у випадку коректних задач.

Продемонстрували декілька чисельних експериментів для чисельного розв'язування задачі Коші, використовуючи усі ітераційні алгоритми. Побачили збіжність і стійкість розглянутих ітераційних методів для чисельного розв'язування некоректної задачі Коші.

Отримані результати для альтернуючого методу і чисельного розв'язування мішаних задачах опубліковані у [39], для двох модифікацій узагальненого методу Ландвебера і задачі Робіна опубліковані у [33, 37], а для чисельного розв'язування задачі Діріхле у [7].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі було розроблено, застосовано і обґрунтовано ефективні чисельні методи для наближеного розв'язування тривимірної задачі Коші для рівняння Лапласа в двозв'язних областях.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

1. Розроблено алгоритм зведення прямих задач для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях, з граничними поверхнями ізоморфними одиничній сфері, до системи інтегральних рівнянь. Досліджено коректність отриманих систем інтегральних рівнянь у відповідних просторах, виділено слабкі особливості в ядрах.
2. Запропоновано чисельне розв'язування коректних інтегральних рівнянь за допомогою дискретного проєкційного методу Гальоркіна з використанням спеціальних кубатурних формул (метод Вінерта). Досліджено збіжність та встановлено оцінки похибок методу. Здійснено оптимізацію кількості обчислень одержаного алгоритму. Виконано чисельні експерименти, які підтверджують отримані оцінки похибок.
3. Розроблено алгоритм для чисельного розв'язування поставленої оберненої тривимірної задачі методом регуляризації Тіхонова в поєднанні з прямим і непрямым методами інтегральних рівнянь. Доведено коректність застосування методу Тіхонова у випадку двох підходів подання розв'язку задачі. Виділено слабкі особливості в ядрах отриманих систем інтегральних рівнянь. Двовимірні інтегральні рівняння дискретизовані за допомогою методу Вінерта. Здійснено оптимізацію кількості обчислень. Реалізовано метод L-кривих для вибору параметра регуляризації. Проведено чисельні експерименти для двох модифікацій методу інтегральних рівнянь для точних і збурених вхідних даних, які підтвер-

джують стійкість запропонованого методу.

4. Реалізовано ітераційний альтернуючий метод для чисельного розв'язування задачі Коші. Встановлено регуляризуючі властивості методу, запропоновано критерій зупинки ітераційного методу та показано його збіжність і стійкість. Використано метод граничних інтегральних рівнянь для розв'язування коректних тривимірних мішаних задач. Наведено результати чисельних експериментів, які підтверджують стійкість методу.
5. Запропоновано дві модифікації узагальненого методу Ландвебера для чисельного розв'язування оберненої задачі. Встановлено регуляризуючі властивості методів, показано їх збіжність і стійкість. Застосовано метод інтегральних рівнянь для чисельного розв'язування мішаних задач, задачі Діріхле і Робіна в тривимірних областях для рівняння Лапласа. Виконано чисельні експерименти, які підтверджують стійкість даних методів.

Усі теоретичні дослідження для запропонованих алгоритмів підтверджено результатами різних чисельних експериментів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Вінтоняк Н., Хапко Р. Про методи Ландвебера та інтегральних рівнянь для оберненої граничної задачі нестационарної теплопровідності в частково необмеженій області // Вісник Львівського університету, серія прикладна математика та інформатика. — 2004. — Т. 8. — С. 77–90.
- [2] Вавричук В., Хапко Р. Про чисельне розв'язування параболічної задачі Коші у нерегулярній області // Вісник Одеського національного університету. — 2011. — Т. 16, № 16. — С. 30–41.
- [3] Вавричук В., Хапко Р. Про чисельне розв'язування параболічної задачі Коші в області з розрізом // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, № 2. — С. 209–218.
- [4] Бабенко К., Хапко Р. Про чисельне розв'язування однієї прямої задачі ЕІТ методом граничних інтегральних рівнянь // Вісник Львівського університету, серія прикладна математика та інформатика. — 2012. — Т. 18. — С. 21–29.
- [5] Вавричук В., Хапко Р. Про чисельне розв'язування параболічної задачі Коші за допомогою інтегральних рівнянь // Сучасні проблеми механіки та математики, том 3, Львів: ІППМ ім. Я.С.Підстригача НАН України. — 2013. — С. 18–20.
- [6] Борачок І., Хапко Р. Про чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях методом інтегральних рівнянь // Матеріали III конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, Львів: Фізико-механічний інститут імені Г.В. Карпенка. — 2014.
- [7] Борачок І., Хапко Р. Про чисельне розв'язування задачі Діріхле для

- рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях // Вісник Львівського університету, серія прикладна математика та інформатика. — 2015. — Т. 18.
- [8] Борачок І., Хапко Р. Про чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях альтернуючим методом // Матеріали XXI Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Львів: ЛНУ імені Івана Франка. — 2015.
- [9] Лебеденко Н., Хапко Р. Про метод теплових потенціалів для наближеного розв'язування параболічної задачі Коші // Вісник Львівського університету: серія прикладна математика та інформатика. — 2017. — Т. 25. — С. 9–17.
- [10] Борачок І. Чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях методом граничних інтегральних рівнянь // Матеріали міжнародної наукової конференції USAM, Львів: ЛНУ імені Івана Франка. — 2017.
- [11] Борачок І. Чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях прямим методом інтегральних рівнянь // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції АРАМС, Львів: ЛНУ імені Івана Франка. — 2018.
- [12] Кошляков Н., Глинер Э., Смирнов М. Уравнения в частных производных математической физики. — Москва : Высшая школа, 1970.
- [13] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. — Москва : Мир, 1987.
- [14] Ладыженская О., Уральцева Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — Москва : Наука, 1973.

- [15] Тихонов А., Арсенин В. Методы решения некорректных задач. — Москва : Наука, 1979.
- [16] Вайникко Г., Веретенников А. Итерационные процедуры в некорректных задачах. — Москва : Наука, 1986.
- [17] Манжиров А., Полянин А. Справочник по интегральным уравнениям. — Москва : Факториал пресс, 2000.
- [18] Тихонов А., Самарский А. Уравнения математической физики. — Москва, 1997.
- [19] Лаврентьев М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // АН СССР. Сер. матем. — 1956. — Т. 20. — С. 819–842.
- [20] Фридман В. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода // Успехи математических наук. — 1956. — Т. 11. — С. 233–234.
- [21] Морозов В. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1966. — Т. 6. — С. 242–251.
- [22] Козлов В., Мазья В. О сохраняющих дифференциальные уравнения итерационных процедурах решения некорректных краевых задач // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1. — С. 144–170.
- [23] Солодкий С. Сложность проекционных методов решения некорректных задач // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. — 1996. — Т. 138. — С. 146–180.
- [24] Переверзев С., Солодкий С. Оптимальная дискретизация некорректных

- задач // Український математичний журнал. — 2000. — Т. 52, № 1. — С. 106–121.
- [25] Лаврентьев М., Романов В., Шишатский С. Некорректные задачи математической физики и анализа. — Москва : Наука, 1980.
- [26] Abda A., Andrieux S., Baranger T. Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional // Inverse Problems. — 2006. — Vol. 22. — P. 115–133.
- [27] Abramowitz M., Stegun I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. — New York : Dover Publications, 1972.
- [28] Adams R., Fournier J. Sobolev spaces // Pure and Applied Mathematics. — 2003. — Vol. 140. — P. 1–305.
- [29] Alessandrini A. Stable determination of a crack from boundary measurements // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A. — 1993. — Vol. 123, no. 3. — P. 497–516.
- [30] Alessandrini G., Rondi L., Rosset E., Vessella S. The stability for the Cauchy problem for elliptic equations. // Inverse Problems. — 2009. — Vol. 25. — P. 123004.
- [31] Atkinson K. The numerical solution of integral equations of the second kind. — Cambridge : Cambridge University Press, 1996.
- [32] Baranger T., Johansson T., Rischette R. On the alternating method for Cauchy problems and its finite element discretisation // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2013. — P. 183–197.
- [33] Baravdish G., Borachok I., Chapko R. et al. An iterative method for the

Cauchy problem for second-order elliptic equations // International Journal of Mechanical Sciences. — 2018. — Vol. 142. — P. 216–223.

- [34] Bastay G., Kozlov V., Turesson B. Iterative methods for an inverse heat conduction problem // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2001. — Vol. 9. — P. 375–388.
- [35] Baumeister J. Stable solution of inverse problems. — Berlin : Springer, 1987.
- [36] Berkel C., Lionheart W. Reconstruction of a grounded object in an electrostatic halfspace with an indicator function // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2007. — Vol. 15, no. 6. — P. 585–600.
- [37] Borachok I. An iterative method for the Cauchy problem for the Laplace equation in three-dimensional domains // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 126. — P. 3–15.
- [38] Borachok I., Chapko R., Johansson T. Numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in 3-dimensional domains by integral equations. // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2016. — Vol. 24. — P. 1550–1568.
- [39] Borachok I., Chapko R., Johansson T. Numerical solution of an elliptic 3-dimensional Cauchy problem by the alternating method and boundary integral equations // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2016. — Vol. 24. — P. 711–725.
- [40] Cakoni F., Kress R., Schuft C. Integral equations for shape and impedance reconstruction in corrosion detection // Inverse Problems. — 2010. — Vol. 29, no. 9. — P. 095012.
- [41] Calderón A. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. // American Journal of Mathematics. — 1958. — Vol. 80. — P. 16–36.

- [42] Calvetti D., Morigi S. Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 123. — P. 423–446.
- [43] Chapko R., Ivanyshyn O. On the numerical methods based on integral equations for inverse parabolic problems // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2003. — Vol. 88. — P. 4–16.
- [44] Chapko R., Johansson B.T., Shkolyk M. On a boundary integral equation method for elastostatic Cauchy problems in annular planar domains // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 3. — P. 16–33.
- [45] Chapko R., Johansson T. An alternating boundary integral based method for a cauchy problem for the Laplace equation in semi-infinite regions // Inverse Problems and Imaging. — 2008. — Vol. 2. — P. 317–333.
- [46] Chapko R., Johansson T. A direct integral equation method for a Cauchy problem for the Laplace equation in 3-dimensional semi-infinite domains // Computer Modeling in Engineering and Sciences. — 2012. — Vol. 85. — P. 105–128.
- [47] Chapko R., Johansson T. On the numerical solution of a Cauchy problem for the Laplace equation via a direct integral equation approach // Inverse Problems and Imaging. — 2012. — Vol. 6. — P. 25–36.
- [48] Chapko R., Johansson T., Protsyuk O. On an indirect integral equation approach for stationary heat transfer in semi-infinite layered domains in R^3 with cavities // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 105. — P. 4–18.
- [49] Chapko R., Johansson T., Protsyuk O. A direct boundary integral equation method for the numerical construction of harmonic functions in three-

dimensional layered domains containing a cavity // International Journal of Computer Mathematics. — 2012. — Vol. 89. — P. 1448–1462.

- [50] Chapko R., Johansson T., Savka Y. On the use of an integral equation approach for the numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in a doubly connected planar domain // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2014. — Vol. 22. — P. 130–149.
- [51] Elliott L., Ingham D., Heggs P. et al. An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated to the Helmholtz equation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2003. — Vol. 192. — P. 709–722.
- [52] Elliott L., Ingham D., Mera N. On the use of genetic algorithms for solving ill-posed problems // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2003. — Vol. 11, no. 2. — P. 105–121.
- [53] Elliott L., Ingham D., Mera N. A multi-population genetic algorithm approach for solving ill-posed problems // Computational Mechanics. — 2004. — Vol. 33. — P. 254–262.
- [54] Engl H. Discrepancy principles for Tikhonov regularization of illposed problems leading to optimal convergence rates // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1987. — Vol. 52. — P. 209–215.
- [55] Engl H., Gfrerer H. A posteriori parameter choice for general regularization methods for solving linear ill-posed problems // Applied Numerical Mathematics. — 1988. — Vol. 4. — P. 395–417.
- [56] Engl H., Grever C. Using the L-curve for determining optimal regularization parameters // Numerische Mathematik. — 1994. — Vol. 69. — P. 25–31.

- [57] Engl H., Groetsch C. Inverse and Ill-Posed Problems // Academic Press. — 1987.
- [58] Engl H., Hanke M. An optimal stopping rule for the v-method for solving ill-posed problems using Christoffel functions // Journal of Approximation Theory. — 1994. — Vol. 79. — P. 89–108.
- [59] Engl H., Leitao A. A mann iterative regularization method for elliptic Cauchy problem // Numerical Function Analysis and Optimization. — 2001. — Vol. 22. — P. 861–884.
- [60] Fairweather G., Karageorghis A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems // Advances in Computational Mathematics. — 1998. — Vol. 9. — P. 69–95.
- [61] Ferrari R., Silvester P. Finite elements for electrical engineers. — Cambridge : Cambridge University Press, 2003.
- [62] Franzone P., Magenes E. On the inverse potential problem of electrocardiology // Calcolo. — 1979. — Vol. 16. — P. 459–538.
- [63] Ganesh M., Graham I. A high-order algorithm for obstacle scattering in three dimensions // Journal of Computational Physics. — 2004. — Vol. 198. — P. 211–242.
- [64] Glasko V. On the unique determination of the earth's core structure from Rayleigh surface waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1971. — Vol. 11, no. 6. — P. 173–188.
- [65] Goncharky A., Stepanov V., Tikhonov A., Yagola A. Numerical methods for the solution of ill-posed problems. — Kluwer Academic : Dordrecht, 1995.
- [66] Gorenflo R. Funktionentheoretische bestimmung des aussenfeldes zueiner

zweidimensionalen magnetohydrostatischen konfiguration // Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik. — 1965. — Bd. 16, H. 2. — S. 279–290.

- [67] Graham I., Sloan I. Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in R^3 // Numerische Mathematik. — 2002. — Vol. 92. — P. 289–323.
- [68] Grinberg N., Kirsch A. The factorization method for inverse problems. — Oxford : Oxford University Press, 2008.
- [69] Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. — New Haven : Yale University Press, 1923.
- [70] Hanke M. Accelerated Landweber iterations for the solution of ill-posed equations // Numerische Mathematik. — 1991. — Vol. 60. — P. 341–373.
- [71] Hanke M. Conjugate gradient type methods for ill-posed problems. — Longman : Chapman and Hall/CRC, 1995.
- [72] Hanke M., Hansen C. Regularization methods for large-scale problems // A Survey of Industrial Mathematics. — 1993. — Vol. 3. — P. 253–315.
- [73] Hansen P. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems // Computational Inverse Problems in Electrocardiology. — 2000. — Vol. 18. — P. 119–142.
- [74] Helsing J., Johansson B.T. Fast reconstruction of harmonic function from Cauchy data using integral equation techniques // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2010. — Vol. 18. — P. 381–399.
- [75] Hào D., Johansson T., Lesnic D. A variational method and approximations of a Cauchy problem for elliptic equations. // Journal of Algorithms & Computational Technology. — 2010. — Vol. 4. — P. 89–120.

- [76] Háo D., Lesnic D. The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method. // IMA Journal of Applied Mathematics. — 1958. — Vol. 65. — P. 199–217.
- [77] Hào D., Lesnic D., Marin L. Conjugate gradient–boundary element method for the Cauchy problem in elasticity // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 2002. — Vol. 55. — P. 227–247.
- [78] Holmgren E. Über systeme von linearen partiellen differentialgleichungen // Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Academien Förhandlingar. — 1901. — Bd. 58. — S. 91–103.
- [79] Hsiao G., Wendland W. Boundary integral equations. — Berlin : Springer, 2008.
- [80] Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. — Berlin : Springer, 2006.
- [81] Ivanyshyn O. Nonlinear boundary integral equations in inverse scattering : Ph. D. thesis / O. Ivanyshyn ; University of Gottingen. — 2007.
- [82] Ivanyshyn O., Kress R. Inverse scattering for surface impedance from phaseless far field data // Computational Physics. — 2000. — Vol. 230. — P. 3443–3452.
- [83] Ivanyshyn O., Kress R. Identification of sound-soft 3D obstacles from phaseless data // Inverse Problems and Imaging. — 2010. — Vol. 4. — P. 131–149.
- [84] Johansson B.T. Determining the temperature from Cauchy data in corner domains // International Journal of Computing Science and Mathematics. — 2010. — Vol. 3. — P. 122–131.
- [85] Johansson B.T., Marin L. A procedure for the temperature reconstruction in

corner domains from Cauchy data // Inverse Problems. — 2007. — Vol. 23. — P. 357–372.

- [86] Johansson T. An iterative procedure for solving a Cauchy problem for second order elliptic equations // Mathematische Nachrichten. — 2004. — Vol. 272. — P. 46–54.
- [87] Johansson T. An iterative method for a Cauchy problem for the heat equation // IMA Journal of Applied Mathematics. — 2005. — Vol. 71. — P. 262–286.
- [88] Johnson C. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. — Mineola : Dover Publications, 2009.
- [89] Kabanikhin S. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // Inverse Ill-posed Problems. — 2008. — Vol. 16. — P. 317–357.
- [90] Keller J. Inverse problems // The American Mathematical Monthly. — 1976. — Vol. 83. — P. 107–118.
- [91] Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. — Berlin : Springer, 2011.
- [92] Kozlov V. Coefficients in the asymptotic solutions of the Cauchy boundary-value parabolic problems in domains with a conical point // Siberian Mathematical Journal. — 1988. — Vol. 29. — P. 222–233.
- [93] Kozlov V., Maz'ya V., Fomin A. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1991. — Vol. 31. — P. 45–52.
- [94] Krawczyk-Stando D., Rudnicki M. Regularization parameter selection in discrete ill-posed problems — the use of the U-curve // International Jour-

- nal of Applied Mathematics and Computer Science. — 2007. — Vol. 19. — P. 157–164.
- [95] Kress R. Inverse scattering from an open arc // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 1995. — Vol. 18. — P. 267–293.
- [96] Kress R. *Numerical analysis*. — Berlin : Springer, 1998.
- [97] Kress R. *Linear integral equations*, 2nd. ed. — Berlin : Springer, 1999.
- [98] Kress R., Tran T. Inverse scattering for a locally perturbed half-plane // *Inverse Problems*. — 2000. — Vol. 16. — P. 1541–1559.
- [99] Landweber L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind // *American Journal of Mathematics*. — 1951. — Vol. 73. — P. 615–624.
- [100] Lavrentiev M., Reznitskaya K., Yakhov V. *Onedimensional inverse problems of mathematical physics*. — American Mathematical Society Translations, Series 2, 1986.
- [101] Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for Cauchy problem associated with two-dimensional Helmholtz equations // *Computers and Structures*. — 2005. — Vol. 83. — P. 267–278.
- [102] Maz'ja V. *Sobolev Spaces*. — Berlin : Springer, 1985.
- [103] McLean W. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
- [104] Melicher V., Slodička M. An iterative algorithm for a Cauchy problem in eddy-current modelling // *Applied Mathematics and Computation*. — 2010. — Vol. 217. — P. 237–346.

- [105] Michalewicz Z. Genetic algorithms + data structures = evolution programs. — Berlin : Springer, 1996.
- [106] Morozov V. The error principle in the solution of operational equations by the regularization method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1968. — Vol. 8. — P. 63–87.
- [107] Morozov V. Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1987. — Vol. 52. — P. 209–215.
- [108] Myleiko G., Solodky S. On optimal selection of Galerkin's information for solving severely ill-posed problems // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 2. — P. 92–106.
- [109] Semenova E., Solodky S. About minimal informational efforts by solving exponentially ill-posed problems // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 2. — P. 90–101.
- [110] Shigeta T., Young D. Method of fundamental solutions with optimal regularization techniques for the Cauchy problem of the Laplace equation with singular points // Journal of Computational Physics. — 2008. — Vol. 228. — P. 1903–1915.
- [111] Sun Y. Indirect boundary integral equation method for the Cauchy problem of the Laplace equation // Journal of Scientific Computing. — 2017. — Vol. 71. — P. 469–498.
- [112] Tutschke W. Solution of initial value problems in classes of generalized analytic functions. — Berlin : Springer, 1989.
- [113] Vasil'ev1 V., Kardashevsky A., Popov V., Prokopev G. Iterative solution of the inverse Cauchy problem for an elliptic equation by the conjugate

gradient method // AIP Conference Proceedings. — 2017. — Vol. 1895. — P. 110009.

- [114] Vasiliev V., Lavrentiev M., Romanov V. Multidimensional inverse problems for differential equations // Springer Lecture Notes. — 1970. — Vol. 167.
- [115] Wienert L. Die numerische approximation von randintegraloperatoren für die helmholtzgleichung im R^3 : Diss. Ph. D. / L. Wienert ; University of Göttingen. — 1990.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові статті у вітчизняних фахових виданнях:

1. Борачок І. Про чисельне розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях. / І. Борачок, Р. Хапко // Вісник Львівського університету, серія прикладна математика та інформатика. – 2015. Т. 18.
2. Borachok I. An iterative method for the Cauchy problem for the Laplace equation in three-dimensional domains. / I. Borachok // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2017. Т.126 – С.3-15.

Наукові статті у закордонних виданнях:

3. Borachok I. Numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in 3-dimensional domains by integral equations. / I. Borachok, R. Chapko, T. Johansson // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2016. – Vol.24 – P. 1550-1568.
4. Borachok I. Numerical solution of an elliptic 3-dimensional Cauchy problem by the alternating method and boundary integral equations. / I. Borachok, R. Chapko, T. Johansson // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2016. – Vol.24 – P. 711-725.
5. Baravdish G. An iterative method for the Cauchy problem for second-order elliptic equations. / G. Baravdish, I. Borachok, R. Chapko, T. Johansson, M. Slodička // International Journal of Mechanical Sciences. – 2018. – Vol.142 – P. 216-223.

Матеріали конференцій:

6. Борачок І. Про чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях методом інтегральних рівнянь. / І. Борачок, Р. Хапко // Матеріали III конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, Львів: фізико-математичний інститут імені Г.В. Карпенка – 2014.
7. Борачок І. Про чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях альтернуючим методом. / І. Борачок, Р. Хапко // Матеріали XXI Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Львів: ЛНУ імені Івана Франка – 2015.
8. Борачок І. Чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях методом граничних інтегральних рівнянь. / І. Борачок // Матеріали міжнародної наукової конференції УСАМ, Львів: ЛНУ імені Івана Франка – 2017.
9. Борачок І. Чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа у тривимірних двозв'язних областях прямим методом інтегральних рівнянь. / І. Борачок // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції АРАМС, Львів: ЛНУ імені Івана Франка – 2018.