ВІДГУК

на дисертаційну роботу
Борачка Ігора Володимировича «Чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях»,
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.07 – обчислювальна математика

Дисертаційна робота Борачка І.В. присвячена проблемі ефективного розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних областях. Як відомо, розв'язок такої задачі є єдиним, але нестійким. Таким чином, порушується третя (і найбільш суттєва) умова коректності за Адамаром. Згадуючи історію досліджень, слід зазначити, що поняття коректної (і некоректної) задачі вперше було сформульовано Жаком Адамаром ще на початку минулого сторіччя, а за приклад некоректної задачі їм була обрана саме задача Коші для рівняння Лапласа. При цьому довгий час серед фахівців панувала думка про неприродність некоректних задач, а через це вважалося, що розв'язування таких задач позбавлено практичної цінності. Тому цілком природно, що перші дослідження в цієї галузі полягали у знаходженні умов, при виконанні яких розглядувана задача була б коректною. Так, зокрема, встановлено, що для забезпечення коректності задачі Коші для рівняння Лапласа необхідно звузити клас розв'язків рівняння Лапласа. За приклад такого звуження можна взяти клас рівномірно обмежених розв'язків. У протилежному випадку цю задачу можна розв'язувати тільки у разі точно відомих вхідних даних, не використовуючи при цьому жодних наближень. Очевидно, що така вимога суттєво обмежує можливості практичного застосування вказаного підходу.

Справжня революція в дослідженнях некоректних задач відбулася лише в середині минулого століття внаслідок того, що в роботах А.М.Тіхонова та М.М.Лаврент'єва були сформульовані основні принципи теорії некоректних задач. Однією з найсуттєвіших переваг цієї теорії є те, що вона дозволяє будувати стійкі наближення при будь-яких, без винятку, малих збуреннях у вхідних даних. Саме завдяки цієї теорії ми маємо зараз можливість створювати ефективні чисельні методи розв'язування нестійких задач. Під ефективним методом тут прийнято розуміти такий алгоритм, який не лише дозволяє знаходити стійкі наближення, що збігаються до шуканого розв'язку, але і гарантує необхідну точність їх обчислення. Останнім часом до цих вимог все частіше додається ще одна, суть якої полягає в розробці економічних обчислювальних процедур, що забезпечують скорочення обсягу задіяних машинних ресурсів без втрати точності наближення. Виконання всіх вказаних умов і характеризує ефективні чисельні методи. Підкреслю, що саме такі методи вивчаються в дисертації Борачка І.В.

Слід також зазначити, що задача Коші для рівняння Лапласа традиційно привертає значну увагу фахівців. Достатньо сказати, що в базі даних

Американського математичного товариства (AMS) на сьогодні налічується понад 1250 наукових робіт, присвячених цієї тематиці. З іншого боку випадок тривимірної області дотепер залишається слабо вивченим через технічні труднощі дослідження таких задач. Тому сукупність усіх згаданих вище факторів безперечно свідчить про актуальність досліджень дисертанта.

Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків і списку використаних джерел (115 найменувань). Загальний обсяг роботи становить 137 сторінок, вона містить 12 таблиць та 31 рисунків.

У **вступі** автором сформульовано постановку задач, що досліджуються, обґрунтовано їх актуальність та новизну, приведено історичну довідку щодо результатів попередників, відзначені основні завдання роботи, особистий внесок здобувача і апробація результатів дисертації.

У **першому розділі** дисертації міститься історичний огляд існуючих підходів щодо стійкого розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа, а також наведені усі необхідні означення, що разом складають математичний інструментарій для проведення подальших досліджень. Зокрема, тут вводяться поняття функціональних просторів Соболєва і Гьольдера, прямих та обернених задач, стійкого розв'язку, методу регуляризації, правила зупинки тощо. До цього додаються відповідні приклади. У пункті 1.2 сформульовано постановку задачі Коші для тривимірної області та досліджена її коректність. Пункт 1.3 містить короткий огляд відомих раніше чисельних методів розв'язування задач, що розглядаються, на випадок областей меншої розмірності.

Другий розділ дисертаційної роботи, який складається з семи підрозділів, присвячений розв'язанню задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях за допомогою регуляризуючого метода Тіхонова. Спочатку (підрозділи 2.1-2.2) вводяться у розгляд два варіанти методу (прямий і непрямий) інтегральних рівнянь, що дозволяють звести вихідну задачу до системи лінійних некоректних інтегральних рівнянь, а потім (підрозділи 2.3-2.4), за допомогою проекційного методу Гальоркіна, здійснюється повна дискретизація одержаних в такий спосіб систем інтегральних рівнянь. В підрозділі 2.5 наведено означення методу L –кривих, який береться за правило зупинки, а також досліджено поведінку наближеного розв'язку при такому виборі параметра регуляризації. Наступний підрозділ присвячений підвищенню ефективності обчислень шляхом скорочення кількості операцій в межах побудованих алгоритмів. Ідея скорочення полягає у застосуванні додаткових матриць менших розмірностей, ніж основна матриця методу. Такий підхід дозволяє зменшити обсяг обчислювань вдвічі за порядком. Останній підрозділ другого розділу містить чисельні експерименти, що демонструють високу ефективність побудованих алгоритмів на випадок різних областей.

Об'єктом досліджень **третього розділу** залишаються задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних областях, але розв'язування цих задач відбувається в інший спосіб, а саме, за допомогою альтернуючого методу (див. пункт 3.1) та модифікацій узагальненого методу Ландвебера (див. пункт 3.2). Суть вказаних підходів полягає в реалізації ітераційних процедур, на кожному кроці яких відбувається розв'язування однієї (або двох) коректної мішаної задачі (задач), наприклад, задачі Неймана-Діріхле, Робіна тощо. Ще однією відмінністю третього розділу від попереднього є те, що цього разу за правило зупинки обрано принцип нев'язки Морозова, а збіжність ітераційних процесів оцінюється в соболєвському просторі H^1. Для обох підходів встановлено факт їх стійкості і збіжності. В підрозділі 3.3, на базі цих підходів, розроблено відповідні алгоритми, а в підрозділі 3.4 наведені результати чисельних експериментів, які підтверджують високу точність та економічність побудованих алгоритмів.

Зауважень принципового характеру щодо даного дисертаційного дослідження не маю. Проте є кілька описок і огріхів щодо оформлення роботи, посилань на роботи попередників, а також деякі побажання.

1. Стор.56, Теорема 2.5.3. При формулюванні результатів R. Kress [97] автор припустився помилки: відповідно до Теореми 16.14 [97] оцінка збіжності
$$\|\psi^{\delta} - A^{-1}f\| = O(\delta^{1/2}), \delta \to 0,$$
має місце лише у разі $f \in AA^{*}(Y)$, тобто для $A^{-1}f \in A^{*}(Y)$, а не для всіх $f \in A(X)$, як це стверджується в дисертації.
2. В дисертації нема посилання на роботу M.Azaiez, F. Ben Belgacem, H. El Fekih “On Cauchy's problem: II. Completion, regularization and approximation”. *Inverse Problems* **22 (2006), no.4,** 1307-1336, де обговорювалась можливість застосування методу L-кривих до чисельного розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа у випадку дво- та тривимірних областей.
3. Відомо, що застосування методу L-кривих не дозволяє знайти оцінку похибки, якщо шум у вхідних даних є детермінованим, теж саме відбувається і для квазіоптимального методу. Нещодавно у роботі S.Kindermann, S.Pereverzyev Jr., A.Pilipenko «The quasi-optimality criterion in the linear functional strategy”. *Inverse Problems* **34 (2018), no. 7,** 075001 було встановлено, що у разі гаусівського (нормального) шуму при застосуванні квазіоптимального методу вдається знайти

оцінку похибки. Було б цікавим з'ясувати, чи має місце подібний факт і для методу L-кривих.

4. У розділі 3 факт збіжності побудованих наближень до точного розв'язку задачі встановлюється в метриці соболєвського простору $H^1(D)$. При цьому вважається, що рівень збурення вхідних даних заданий у просторі слідів $H^{1/2}(\Gamma_2)$. У зв'язку з цим постає питання про можливість узагальнення отриманих у дисертації результатів на всю шкалу просторів $\{H^k(D)\}$.
5. У третьому розділі за правило зупинки обрано принцип нев'язки Морозова. Добре відомо, що цей принцип, на відміну від методу L-кривих, дозволяє встановлювати оцінки похибки, що є оптимальними за порядком. Вважаю, що знаходження подібних оцінок сприятиме підвищенню рівня відповідних результатів.
6. Стор.93, Зауваження 3.2.6. Невірно виписаний принцип нев'язки Морозова

$$\left\| f_2^\delta - u_k^\delta \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \leq \tau\delta \,.$$

Очевидно, що перед розв'язком u_k^δ має стояти оператор задачі.

Вказані зауваження не є істотними і суттєво не впливають на загальну високу позитивну оцінку роботи, яка оформлена якісно, добре структурована і логічно вибудувана.

Оцінюючи в цілому дисертаційну роботу Борачка І.В., слід підкреслити, що вона є самостійною завершеною науковою працею, виконаною на високому теоретичному рівні на актуальну тему для обчислювальної математики та суміжних з нею областей. В дисертації автором встановлено ряд нових науково обґрунтованих результатів стосовно ефективності чисельних методів розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа, які можуть знайти своє подальше застосування і розвиток у чисельному аналізі, теорії некоректних задач, загальній теорії оптимальних алгоритмів тощо. Отримані дисертантом результати повністю опубліковані в дев'яти фахових роботах, серед яких 4 статті в журналах, що входять у міжнародні наукометричні бази даних Scopus та Web of Science. Всі основні результати, що виносяться на захист, належать автору дисертації і апробовані на ряді семінарів і математичних конференцій.

Одержані результати є новими, достовірними і строго обґрунтованими, мають високий науковий рівень, майстерно викладені автором у роботі, що свідчить про значну математичну культуру і підготовку дисертанта. Автореферат повністю відповідає змісту дисертації.

Враховуючи все вище сказане, вважаю, що за обсягом проведених наукових досліджень, актуальністю, науковою новизною та значимістю отриманих результатів, а також за кількістю і якістю публікацій, дисертаційна робота Борачка І.В. «Чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях», задовольняє вимоги, які висуваються до кандидатських дисертацій та відповідає пп. 9, 11, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника» (постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор – Борачок Ігор Володимирович заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук,
завідувач лабораторією
Інституту математики НАН України
С.Г.Солодкий

Національна академія наук України
Інститут математики
Ідентифікаційний код 05417207
м. Київ

Вчений секретар
Інституту математики НАН України
І.В.Соколенко
І. Соколенко

«1» жовтня 2019 р.