

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Дреботія Романа Григоровича «Побудова та аналіз hp -адаптивних схем методу скінченних елементів для задач дифузії-конвекції-реакції», подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика.

Починаючи з фундаментальних робіт I. Babuška та W. C. Rheinboldt, схеми адаптування стали невід'ємною складовою у застосуваннях методу скінченних елементів. Конструктивно, найбільш загальними є схеми hp -адаптування, оскільки вони допускають варіювання як геометричних характеристик сітки, так і степенів апроксимуючих поліномів, що використовуються на окремих скінченних елементах. Такі схеми привабливі з точки зору ефективності, оскільки Ch. Schwab показав, що використання hp -апроксимацій потенційно дає змогу отримати послідовність наближень до розв'язку задачі, похибки яких спадають експоненційно стосовно кількості невідомих. Незважаючи на наявність низки систематичних досліджень, можна стверджувати, що на даний момент немає цілісної та завершеної теорії hp -адаптивних алгоритмів методу скінченних елементів (МСЕ). Навіть більше, немає готових індустріальних продуктів (комерційних), що побудовані на їх основі. Окремо слід відзначити алгоритми на основі контрольного розв'язку, що запропоновані і розвинуті у роботах L. Demkowicz та P. Söln. Ці алгоритми є дуже загальними і дають можливість розв'язувати практично будь-які крайові задачі, проте відсутність строгого математичного обґрунтування їх обчислювальної ефективності гальмує розвиток і створення надійних комерційних пакетів програм на їх основі. Більше того, теоретичні дослідження інших алгоритмів hp -адаптування проведено для вузьких класів задач і тому алгоритми, що є теоретично обґрунтованими мають обмежене коло застосувань.

Виходячи із наведених фактів, розробка нових схем hp -адаптування до цього часу є актуальною проблемою обчислювальної математики.

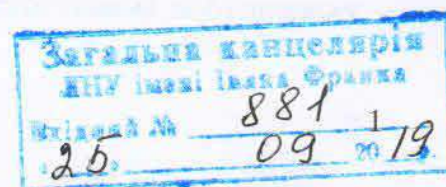
У дисертації Дреботія Р. Г. побудовано специфічні оцінки похибок та на їх основі розроблено новий алгоритм hp -адаптування. Додатково обґрунтовано можливість поелементної декомпозиції оцінювача на основі контрольного розв'язку. На основі побудованих алгоритмів автором розроблено програмне забезпечення і з його використанням проведено серію обчислювальних експериментів та проаналізовано отримані результати. Вищеописане свідчить про важливість та актуальність теми цього дослідження.

Дисертаційна робота та автореферат оформлені згідно вимог МОН України.

Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 56 найменувань та двох додатків. Загальний обсяг дисертації становить 147 сторінок.

Дисертаційна робота тісно пов'язана з основними напрямками наукових досліджень кафедри інформаційних систем Львівського національного університету імені Івана Франка, зокрема, з держбюджетної тематики.

Достовірність та обґрунтованість результатів дисертаційної роботи забезпечується строгими і акуратними доведеннями основних тверджень, які з достатньою повнотою наведені в дисертації. Теоретичне обґрунтування розроблених методів підтверджується обчислювальними експериментами



У **вступній** частині роботи проаналізовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету та подано перелік основних поставлених завдань, висвітлено наукову новизну та практичне значення результатів роботи.

У **першому** розділі розглянуто фундаментальні співвідношення, що описують процеси дифузії, конвекції та реакції у суцільному середовищі та сформульовано відповідну крайову задачу. Проаналізовано арсенал наявних числових та аналітичних методів розв'язування одержаної крайової задачі. Побудовано відповідну варіаційну задачу та доведено теорему про її коректність. Виокремлено клас сингулярно збурених задач, у яких конвективна та реактивна складові значно переважають над дифузійною складовою процесу перенесення домішки. Подано класифікацію алгоритмів адаптування. Розглянуто 4 типи схем: h -, r -, p -, hp -адаптивні. Детально проведено огляд та порівняння відомих hp -адаптивних алгоритмів.

У **другому** розділі автором побудовано апостеріорні оцінювачі похибки для апроксимацій довільних порядків. Сконструйовано спеціальний явний оцінювач, що безпосередньо враховує порядок апроксимації на скінченному елементі. Доведено його ефективність та надійність. Побудовано варіаційну задачу про похибку. Базуючись на ній, отримано неявний оцінювач на основі фундаментальних розв'язків. Додатково, сконструйовано ще два неявні оцінювачі Діріхле, що дають змогу оцінити похибку при поділі скінченного елемента навпіл, або при збільшенні його порядку. Досліджено питання ефективного обчислення оцінювача на основі контрольного розв'язку та доведено теорему про його поелементну декомпозицію.

У **третьому** розділі розроблено нову стратегію hp -адаптування на основі порівнянь норм різних наближень до похибки. Побудовану схему теоретично обґрунтовано для симетричних задач. Розглянуто алгоритм на основі контрольного розв'язку та аспекти його ефективною реалізації. Для обчислення компонент глобальної системи лінійних рівнянь методу скінченних елементів використано квадратурні формули Гаусса високих порядків. Для побудови останніх запропоновано комбінування алгоритму Голуба-Уелша та QL -алгоритму з специфічним вибором зсувів. Для розв'язування системи рівнянь, в обох алгоритмах hp -адаптування запропоновано та обґрунтовано використання методу статичної конденсації внутрішніх параметрів.

У **четвертому** розділі міститься опис розроблених програм, що реалізують алгоритми, що побудовані у розділі 3, а також подано результати обчислювальних експериментів та їх аналіз для сингулярно збурених крайових задач дифузії-конвекції-реакції. Зокрема, для порівняння, розглянуто розроблений алгоритм адаптування поряд із алгоритмом на основі контрольного розв'язку, а також розроблений алгоритм і типову h -адаптивну схему. Наведено порівняння різних оцінювачів та стратегій вибору способу перебудови скінченного елемента. Результати числових експериментів підтверджують ефективність побудованих схем.

Основними результатами дисертації є:

- доведення можливості поелементної декомпозиції оцінювача на основі контрольного розв'язку;
- побудова явного та неявних апостеріорних оцінювачів похибок для поліноміальних апроксимацій довільних порядків;
- побудова методу hp -адаптування на основі порівняння норм різних наближень до похибки;
- проведення обчислювальних експериментів із застосування побудованих алгоритмів МСЕ до сингулярно збурених задач.

Більшість теоретичних положень дисертації доповнено результатами числових експериментів проведених з допомогою авторських програмних засобів.

Вищенаведені факти дозволяють зробити висновок, що основні результати даного дисертаційного дослідження є новими та обґрунтованими, робота носить завершений характер.

Основні результати дисертації опубліковано у 5-ох наукових працях: чотири у наукових фахових виданнях з переліку, затвердженого МОН України, та одна у закордонному виданні. Одна праця входить у базу Web of Science. Також одна стаття є розділом у монографії. У матеріалах наукових конференцій опубліковано 12 тез та матеріалів доповідей.

Зміст автореферату правильно відображає основні положення дисертації. В авторефераті та дисертації чітко зазначено особистий внесок здобувача у кожній опублікованій статті за тематикою роботи.

До роботи можна висловити такі **зауваження та побажання**:

1. У розділі 2 було б добре в повній мірі дослідити ефективність і надійність оцінювача на основі фундаментальних розв'язків.
2. У розділі 3 авторську версію алгоритму генерування квадратур варто деталізувати більш чітко, додавши повний опис QL -алгоритму із зсувами за Уїлкінсоном.
3. У розділі 3 для другого способу симетризації було добре дослідити можливість комбінування алгоритму адаптування та отриманої ітераційної процедури.
4. У розділі 4 було б добре розглянути також алгоритми p -адаптування.
5. На дрібні описки з розділовими знаками у формулах та стилістичні помилки автору вказано особисто.

Однак, наведені зауваження та побажання не знижують цінності дисертаційної роботи і не впливають на її позитивну оцінку в цілому.

За актуальністю теми, обсягом проведених досліджень, науковою новизною, теоретичною та практичною цінністю отриманих результатів дисертаційна робота Дреботія Романа Григоровича «Побудова та аналіз hp -адаптивних схем методу скінченних елементів для задач дифузії-конвекції-реакції» є завершеною науковою працею і повністю задовольняє чинні вимоги МОН України до кандидатських дисертацій, а її автор заслуговує присвоєння вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика.

Офіційний опонент:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент
кафедри математичного та
комп'ютерного моделювання
Одеського національного університету
імені І.І. Мечникова



В.В. Вербіцький

Підпис В.В. Вербіцького засвідчую
кандидат хімічних наук, доцент,
Вчений секретар
Одеського національного університету
імені І.І. Мечникова



С.В. Курандо