МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

ДМИТРИШИН Мар'ян Іванович

УДК 517.98+517.5

АПРОКСИМАЦІЙНІ ПРОСТОРИ, АСОЦІЙОВАНІ З ЦІЛИМИ ВЕКТОРАМИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

01.01.01 — математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

ЛЬВІВ – 2020

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЛОПУШАНСЬКИЙ Олег Васильович,
Жешувський університет, Польща,
завідувач кафедри функціонального аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
СКАСКІВ Олег Богданович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
САВЧУК Віктор Васильович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук, професор
ПЛІЧКО Анатолій Миколайович,
Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка,
професор кафедри прикладної математики, статистики та економіки.

Захист відбудеться 19 березня 2020 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитися у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий 7 лютого 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Христіянин А. Я.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Однією з основних проблем теорії апроксимації функцій є характеризація різних класів функцій в термінах їх найкращих наближень алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу. Отримані в цьому напрямку результати формулюються у вигляді так званих прямих і обернених теорем (нерівностей Джексона і Бернштейна) теорії апроксимації функцій.

В абстрактному випадку маємо відповідну проблему наближення елементів простору аналітичними, цілими та цілими експоненціального типу векторами, асоційованими з необмеженими операторами. На основі таких класів векторів можна розвинути операторний підхід до отримання нерівностей типу Джексона і Бернштейна, які дають оцінки найкращих наближень різними класами гладких векторів, асоційованих з даним оператором. Використовуючи поняття апроксимаційного простору, можна описати певні аналогії між просторами послідовностей, функцій і операторів, що дозволяє, зокрема, отримати фундаментальні теореми представлення, трасформації, вкладення, композиції, а також отримати низку результатів про розподіл коефіцієнтів Фур'є і власних значень операторів.

Дослідженню проблем теорії апроксимації функцій, пов'язаних, зокрема, з використанням різних класів аналітичних векторів, асоційованих з необмеженими операторами, присвячено праці таких відомих вітчизняних та зарубіжних вчених як: Н. І. Ахієзер, Ю. М. Березанський, С. Н. Бернштейн, О. В. Бєсов, М. Л. Горбачук, Р. Гудман, Д. Джексон, С. Джіуліні, М. Г. Крейн, С. Г. Крейн, О. В. Лопушанський, Ю. І. Любіч, В. І. Мацаєв, Е. Нельсон, С. М. Нікольський, Г. В. Радзієвський, Я. В. Радино, В. В. Савчук, О. Б. Скасків, С. Л. Соболєв, С. Б. Стєчкін, А. Ф. Тіман, П. Л. Ульянов та ін.

Незважаючи на значні досягнення у напрямку розвитку теорії апроксимації функцій, ця тематика й надалі залишається однією з найважливіших. При цьому можна відзначити безумовний науковий інтерес до розвитку теорії спектральних апроксимацій, пов'язаних з необмеженими операторами в абстрактному випадку і операторами диференціювання в теорії функцій.

Апроксимаційні простори досі не розглядалися в контексті їх взаємозв'язку з інтерполяційними шкалами інваріантних підпросторів цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів, що дозволяє, зокрема, характеризувати спектральні апроксимації у банахових просторах, оскільки для операторів з точковим спектром підпростір цілих векторів експоненціального типу замкненого необмеженого оператора співпадає з лінійною оболонкою його спектральних підпросторів. Вищезазначене обумовило актуальність теми дисертаційної роботи, її мету та задачі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках науково-дослідних держбюджетних тем "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер державної реєстрації 0113U000184) і "Проблеми нелінійного аналізу щодо продовження відображень, які належать до різних функціональних класів на топологічних і топологічних векторних просторах" (номер державної реєстрації 0118U000097) кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника".

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка теорії апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів, у контексті спектральних апроксимацій та характеризації різних класів функцій в термінах їх найкращих наближень цілими функціями експоненціального типу.

Для досягнення цієї мети у дисертації поставлені та вирішені такі задачі:

– ввести і описати нові класи апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів;

– встановити нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів, що характеризують наближення цілими векторами експоненціального типу та спектральні апроксимації у випадку операторів з точковим спектром;

– визначити нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого необмеженого оператора у банаховому просторі та описати їх основні властивості;

– розвинути теорію інтерполяції просторів цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів;

– описати апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами у банахових просторах, та встановити їх інтерполяційні властивості;

– описати апроксимаційні простори, асоційовані з еліптичними операторами у просторах функцій, та встановити нерівності типу Бернштейна і Джексона, що характеризують наближення цілими функціями експоненціального типу;

– розвинути теорію тензорних добутків просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів у банахових просторах;

– розвинути теорію тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами, та встановити нерівності типу Бернштейна і Джексона на тензорних добутках апроксимаційних просторів.

Об'єктом дослідження є апроксимаційні простори та цілі вектори експоненціального типу, асоційовані з необмеженими операторами, що діють у нормованих просторах.

Предметом дослідження є структура і властивості апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами, їх зв'язок із інтерполяційними просторами і спектральними апроксимаціями.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використано методи теорії функцій, функціонального аналізу, теорію інтерполяції просторів, спектральну теорію операторів, теорію топологічних тензорних добутків, теорію регулярних і вироджених еліптичних диференціальних операторів.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі сформульовано новий напрям наукових досліджень апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів. У ході дослідження вперше отримано такі наукові результати:

– введено і описано нові класи апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів в нормованих просторах та цілими функціями експоненціального типу для операторів диференціювання у функціональних просторах;

– доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів з точними значеннями констант, які дають аналітичні оцінки найкращих наближень цілими векторами експоненціального типу необмеженого оператора, зокрема, спектральних апроксимацій у випадку оператора з точковим спектром, а у випадку оператора диференціювання — відповідні оцінки наближення функцій алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу;

– визначено і описано нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого необмеженого оператора у банаховому просторі;

– описано інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів, породжені дійсними і комплексним методами інтерполяції, зокрема, позитивних операторів, а також цілих функцій експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях і на компактних многовидах, вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), узагальнених диференціальних операторів Лежандра;

– описано апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами у банахових просторах, та встановлено їх інтерполяційні властивості;

– описано апроксимаційні простори, асоційовані з регулярно еліптичними диференціальними операторами, виродженими еліптичними диференціальними операторами і узагальненими диференціальними операторами Лежандра, та встановлено відповідні нерівності типу Бернштейна і Джексона, що характеризують наближення цілими функціями експоненціального типу та кореневими функціями в просторах Лебега;

– визначено тензорні добутки просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів у банахових просторах, доведено інтерполяційні теореми для цих просторів;

– визначено тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами, зокрема, позитивними операторами, регулярно еліптичними диференціальними операторами і узагальненими диференціальними операторами Лежандра, та встановлено їх інтерполяційні властивості;

– доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона на тензорних добутках апроксимаційних просторів типу Бєсова з явним виглядом залежності констант від параметрів таких просторів.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при розв'язуванні прикладних задач спектральної теорії диференціальних операторів, а також як методи аналізу сигналів і розпізнавання образів.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є самостійною завершеною науковою працею, що містить новий напрям наукових досліджень апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів, та цілими функціями експоненціального типу для операторів диференціювання, в межах якого описано структуру і властивості цих просторів та отримано оцінки найкращих спектральних апроксимацій в абстрактних просторах та просторах функцій. Наукові положення і висновки, які виносяться на захист, здобуто автором особисто та викладено в його наукових публікаціях. У працях, які написано в співавторстві, О.В. Лопушанському належить постановка задач, аналіз отриманих результатів та участь у підготовці робіт до друку.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

– VIII Білоруській математичній конференції (Мінськ, Білорусь, 19-24 червня 2000 р.);

– Міжнародній конференції з функціонального аналізу (Київ, 22-26 серпня 2001 р.);

– Міжнародній конференції з функціонального аналізу і його застосувань, присвяченій 110-річчю з дня народження Стефана Банаха (Львів, 28-31 травня 2001 р.);

– III Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9-12 вересня 2003 р.);

– Конференції молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-26 травня 2004 р.);

– Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 27 вересня-1 жовтня 2004 р.);

– Конференції молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-27 травня 2005 р.);

– XI Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 18-20 травня 2006 р.);

– Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 11-14 жовтня 2006 р.);

– Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 24-28 вересня 2007 р.);

– XII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2008 р.);

– Міжнародній конференції з аналізу і топології (Львів, 27 травня-7 червня 2008 р.);

– IV Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 10-12 вересня 2008 р.);

– Міжнародній науковій конференції "Нескінченновимірний аналіз і топологія" (Івано-Франківськ, 27 травня-1 червня 2009 р.);

– Міжнародній конференції до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (Чернівці, 8-13 червня 2009 р.);

– Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 90-річчю з дня народження В.Е. Лянце (Львів, 17-21 листопада 2010 р.);

– Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 19-23 вересня 2011 р.);

– XIV Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012 р.);

– Міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (Львів, 17-21 вересня 2012 р.);

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013 р.);

– V Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013 р.);

– XV Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014 р.);

– IV Міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня-5 липня 2014 р.);

– Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1-4 липня 2015 р.);

– Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 р.);

– XVII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 р.);

– Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22 лютого-25 лютого 2017 р.);

– Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях” (Чернівці, 17-19 вересня 2018 р.);

– київському семінарі з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (Київ, 1 квітня 2015 р., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. М. Л. Горбачук, д.ф.-м.н., проф. Ю. С. Самойленко у 2015 р., тепер: д.ф.-м.н., ст.н.сп. А. Н. Кочубей, д.ф.-м.н., проф. Ю. С. Самойленко);

– науковому семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” (Івано-Франківськ, 4 вересня 2019 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. В. Загороднюк);

– науковому семінарі кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Ю. Федьковича (Чернівці, 24 вересня 2019 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. В. К. Маслюченко);

– науковому семінарі з теорії аналітичних функцій в Львівському національному університеті імені Івана Франка (Львів, 14 листопада 2019 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. О. Б. Скасків).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у 58 друкованих наукових працях, з яких: 29 статей [1–3, 5–30] у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях, з них 12 — у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science Core Collection [7, 14, 16, 19, 20, 22–25, 27, 29, 30], 28 публікацій — за матеріалами конференцій [31–58], 1 — частина колективної монографії [4].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Повний обсяг роботи становить 335 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел складається з 206 найменувань і займає 21 сторінку. Додатки займають 11 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету, завдання, об’єкт і предмет дослідження, висвітлено наукову новизну отриманих результатів.

У **першому розділі** розглянуто суть операторного підходу до проблем теорії наближень функцій, в рамках якої, зокрема, розв’язується задача найкращого наближення заданої функції алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу. В абстрактному випадку

маємо відповідну задачу наближення елементів простору аналітичними, цілими та цілими експоненціального типу векторами, асоційованими з необмеженими операторами.

Розглянуто основні елементи теорії апроксимаційних просторів та напрямки їх сучасних узагальнень.

Представлено деякі необхідні відомості з теорії інтерполяції просторів та теорії класичних просторів Бєсова, а також розглянуто зв'язок теорії апроксимаційних просторів з теорією інтерполяції просторів.

У **другому розділі** введено і описано нові класи апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів в банахових просторах, доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм таких просторів з точними значеннями констант, які дають аналітичні оцінки найкращих наближень цілими векторами експоненціального типу.

У комплексному банаховому просторі $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ розглядаємо замкнений необмежений оператор $A\colon \mathcal{C}^1(A) \subset \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ з щільною областю визначення $\mathcal{C}^1(A)$. Позначимо $\mathcal{C}^{k+1}(A) = \big\{x \in \mathcal{C}^k(A)\colon A^k x \in \mathcal{C}^1(A)\big\}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{C}^\infty(A) = \bigcap \big\{\mathcal{C}^k(A)\colon k \in \mathbb{N}_0\big\}$.

Нехай $0 < \nu < \infty$ і $1 \le p \le \infty$. Визначимо нормовані простори

$$\mathcal{E}_p^\nu(A) := \mathcal{E}_p^\nu(A, \mathfrak{X}) := \Big\{x \in \mathcal{C}^\infty(A)\colon \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)} < \infty\Big\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k x\big\|^p\Big)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k x\big\|, & p = \infty. \end{cases}$$

Елементи просторів $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ називають *цілими векторами експоненціального типу* оператора A і наступна теорема встановлює деякі властивості таких просторів.

Теорема 2.1. (i) *Виконуються неперервні вкладення*

$$\mathcal{E}_p^\nu(A) \subset \mathcal{E}_p^\tau(A) \subset \mathcal{E}_\infty^\tau(A) \subset \mathfrak{X} \text{ для } \tau > \nu.$$

(ii) *Простір $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ інваріантний відносно оператора A і звуження $A_\nu := A|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)}$ є обмежений оператор в $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ з нормою $\|A_\nu\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \nu$.*

(iii) *Спектр оператора A має властивість $\sigma\big(A_\nu\big) \subset \sigma(A)$.*

(iv) *Простір $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ повний.*

Розглянемо послідовність $\{x_{k,\nu} := (A/\nu)^k x\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ і нехай $\{x_{k,\nu}^*\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність, яка складається з тих самих елементів, розміщених в порядку незростання норм $\|x_{0,\nu}^*\| \ge \|x_{1,\nu}^*\| \ge \ldots \ge \|x_{k,\nu}^*\| \ge \ldots$.

Для довільних чисел $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$ визначимо нормовані простори

$$\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A) := \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A, \mathfrak{X}) := \left\{ x \in \mathcal{C}^{\infty}(A) \colon \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)} < \infty \right\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\|^p k^{\frac{p}{q}-1} \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\| k^{\frac{1}{q}}, & p = \infty. \end{cases}$$

Простори $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ назвемо *просторами типу Лоренца цілих векторів експоненціального типу оператора* A. При $q = p$ отримуємо простори $\mathcal{E}^{\nu}_{p,p}(A) := \mathcal{E}^{\nu}_{p}(A)$. Якщо $q = p = 1$ або $q = p = \infty$, то покладемо $\mathcal{E}^{\nu}_{1,1}(A) := \mathcal{E}^{\nu}_{1}(A)$ або $\mathcal{E}^{\nu}_{\infty,\infty}(A) := \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)$, відповідно. В такому сенсі кажемо, що простори $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ визначені для індексів $1 \le q, p \le \infty$.

Для пари квазінормованих просторів $(X_0, |\cdot|_{X_0})$, $(X_1, |\cdot|_{X_1})$ і $0 < \theta < 1$, $1 \le q < \infty$ інтерполяційний простір, породжений K-функціоналом визначається як

$$(X_0, X_1)_{\theta,q} = \left\{ x \in X_0 + X_1 \colon |x|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}} < \infty \right\},$$

де $|x|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^{\infty} \left[t^{-\theta} K(t, x; X_0, X_1) \right]^q dt/t \right)^{1/q}$ і K-функціонал визначається як $K(t, x; X_0, X_1) = \inf\limits_{x = x^0 + x^1} \left(|x^0|_{X_0} + t\,|x^1|_{X_1} \right)$ для всіх $x^0 \in X_0$, $x^1 \in X_1$ і $t > 0$.

Теорема 2.2. (i) *Якщо* $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$, *то виконується рівність*

$$(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A))_{1-1/q,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A).$$

Як наслідок, $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A) \subset \mathcal{E}^{\tau}_{q,p}(A)$ *для всіх* $\tau > \nu$ *і виконується неперервне вкладення* $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A) \subset \mathfrak{X}$.

(ii) *Простір* $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ *повний і звуження* $A|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}}$ *є обмежений оператор в* $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ *з нормою* $\left\| A|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}} \right\| \le \nu$.

Оператор A називається оператором з точковим спектром, якщо спектр $\sigma(A)$ складається із ізольованих точок $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, що є власними значеннями, з можливою єдиною точкою скупчення на нескінченності.

Позначимо через $\mathcal{P}^{\nu}(\mathfrak{X})$ лінійну оболонку всіх $\left\{ P_{\lambda_j}(\mathfrak{X}) \colon |\lambda_j| < \nu \right\}$, де $P_{\lambda_j} = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_j} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$ — проектор Ріса і γ_j — така замкнена крива, що охоплює власне значення $\lambda_j \in \sigma(A_\nu)$ і не охоплює інші точки спектру $\sigma(A)$.

Теорема 2.3. *Нехай* A *— оператор з точковим спектром. Тоді для будь-яких чисел* $\nu > 0$ *і* p $(1 \le p < \infty)$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}^{\nu}_{p}(A) = \mathcal{P}^{\nu}(\mathfrak{X}).$$

Нехай A — оператор з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень λ_j, які є полюсами резольвенти $R_\lambda(A)$, $\mathcal{R}^\nu(A)$ — лінійна оболонка всіх кореневих підпросторів $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) = \{x \in \mathcal{C}^\infty(A) : (A - \lambda_j I)^{r_j} x = 0\}$, для яких $|\lambda_j| < \nu$ (r_j — порядок λ_j як полюса резольвенти $R_\lambda(A)$). Тоді для будь-яких чисел $\nu > 0$ і p $(1 \le p < \infty)$ виконується рівність

$$\mathcal{E}_p^\nu(A) = \mathcal{R}^\nu(A). \tag{1}$$

На підпросторі $\mathcal{E}_{q,p}(A) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_{q,p}^\nu(A)$ визначимо квазінорму

$$|x|_{\mathcal{E}_{q,p}(A)} := \|x\| + \inf\left\{\nu > 0 \colon x \in \mathcal{E}_{q,p}^\nu(A)\right\},$$

в якій простір $\mathcal{E}_{q,p}(A)$ повний. Розглянемо функціонал вигляду

$$E_{q,p}(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}) = \inf\left\{\|x - x^0\| \colon x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}(A),\ |x^0|_{\mathcal{E}_{q,p}(A)} \le t\right\},\ x \in \mathfrak{X}.$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \le \infty\}$ або $\{0 \le s < \infty, \tau = \infty\}$ визначимо шкалу просторів

$$\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A) := \mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathfrak{X} :\ |x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)} < \infty\right\},$$

$$|x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^s E_{q,p}(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X})\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E_{q,p}(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}), & \tau = \infty. \end{cases}$$

Простір $\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)$, наділений квазінормою $|\cdot|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s}$, назвемо *апроксимаційним простором типу Бєсова-Лоренца*, асоційованим з оператором A. При $q = p$ отримуємо *апроксимаційні простори типу Бєсова* $\mathcal{B}_{p,\tau}^s(A)$.

Наступна теорема встановлює деякі інтерполяційні властивості визначених апроксимаційних просторів.

Теорема 2.4. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)]^\vartheta$ *— простір* $\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)$, *наділений квазінормою* $|x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s}^\vartheta$, $x \in \mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)$, *то*

$$[\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)]^\vartheta = (\mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,g}, \quad \vartheta = 1/(s+1), \quad \tau = g\vartheta.$$

(ii) *Простори* $\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0 < \tau < \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ *і* $s_0 \ne s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}_{q,p,\tau_0}^{s_0}(A),\, \mathcal{B}_{q,p,\tau_1}^{s_1}(A)\right)_{\vartheta,\tau} = \mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)$$

та існують постійні c_1,c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)} \le c_1 |x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau_0}^{s_0}(A)}^{1-\vartheta} |x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau_1}^{s_1}(A)}^\vartheta, \quad x \in \mathcal{B}_{q,p,\tau_0}^{s_0}(A) \cap \mathcal{B}_{q,p,\tau_1}^{s_1}(A),$$

$$K\left(t, x; \mathcal{B}_{q,p,\tau_0}^{s_0}(A), \mathcal{B}_{q,p,\tau_1}^{s_1}(A)\right) \le c_2 t^\vartheta\, |x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A)},\ x \in \mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A),\ t > 0.$$

(iv) *Якщо* $0 < \tau \le \varrho < \infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}_{q,p,\tau}^s(A) \subset \mathcal{B}_{q,p,\varrho}^s(A).$$

У підрозділі 2.3 досліджено проблему наближення заданого елемента банахового простору $\mathfrak{X}$ елементами A-інваріантних підпросторів $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ цілих векторів експоненціального типу з фіксованими індексами q і p. Отримані результати представлено у вигляді нерівностей типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів. При цьому отримано явну залежність констант від параметрів апроксимаційних просторів.

Теорема 2.5. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)} \le c_{s,\tau}\, |x|^s_{\mathcal{E}_{q,p}(A)} \|x\|,\ x \in \mathcal{E}_{q,p}(A), \tag{2}$$

$$t^s E(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(A),\mathfrak{X}) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)},\ x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A), \tag{3}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \left(\tau s^{-1}(s+1)^2\right)^{1/\tau}.$$

Крім того, для фіксованого s маємо

$$\liminf_{\tau\to\infty} \kappa_{s,\tau} = \limsup_{\tau\to\infty} \kappa^{-1}_{s,\tau} = 1.$$

Визначимо об'єднання $\mathcal{R}(A) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{R}^{\nu}(A)$ із квазінормою $|x|_{\mathcal{R}(A)} = \|x\| + \inf\{\nu > 0 \colon x \in \mathcal{R}^{\nu}(A)\}$. В силу рівності (1) маємо

$$\mathcal{E}_p(A) = \mathcal{R}(A), \quad |x|_{\mathcal{E}_p(A)} = |x|_{\mathcal{R}(A)}, \quad x \in \mathcal{E}_p(A).$$

Як наслідок, нерівності (2) і (3) можна переписати у вигляді:

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)} \le c_{s,\tau}\, |x|^s_{\mathcal{R}(A)} \|x\|,\ x \in \mathcal{R}(A),$$
$$t^s E(t,x;\mathcal{R}(A),\mathfrak{X}) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)},\ x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A).$$

Нехай $\mathcal{S}_{\lambda_j}(A) = \{x \in \mathcal{C}^{\infty}(A) : (A - \lambda_j I)x = 0\}$ — підпростір власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda_j \in \sigma(A)$, $\mathcal{S}^{\nu}(A)$ — лінійна оболонка всіх $\mathcal{S}_{\lambda_j}(A)$ таких, що $|\lambda_j| = \nu$, $\lambda_j \in \sigma(A)$, $\mathcal{R}^{\nu}(A)$ — лінійна оболонка всіх кореневих підпросторів $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$, для яких $|\lambda_j| < \nu$ і $\mathcal{Q}^{\nu}(A) = \mathcal{R}^{\nu}(A) \oplus \mathcal{S}^{\nu}(A)$.

Теорема 2.6. *Нехай A — оператор з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень, які є полюсами резольвенти $R_{\lambda}(A)$. Тоді виконуються такі оцінки:*

$$\inf\left\{\|x - x^0\| \colon x^0 \in \mathcal{R}^{\nu}(A)\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)},$$
$$\inf\left\{\|x - x^0\| \colon x^0 \in (\mathcal{R}^{\nu}(A), \mathcal{Q}^{\nu}(A))_{1-1/q,p}\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)}.$$

У підрозділі 2.4 показано застосування наведених вище абстрактних результатів до отримання нових результатів в класичній теорії апроксимації функцій. Нехай $A = D_q$, де D_q — замикання в $\mathfrak{X} = L_q(\mathbb{R})$ $(1 < q \leq \infty)$ оператора диференціювання. У цьому випадку маємо

$$\mathcal{E}_\infty^\nu(D_q) = \left\{u \in \mathcal{C}^\infty(D_q) \colon \|u\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)} < \infty\right\},$$

де $\|u\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(D_q/\nu)^k u\right\|_{L_q(\mathbb{R})}$, $\mathcal{E}_\infty(D_q) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)$.

Розглянемо простір $\mathcal{M}_q^\nu$ цілих комплексних функцій $U \colon \mathbb{C} \ni \xi + i\eta \longrightarrow U(\xi + i\eta)$ експоненціального типу $\nu > 0$, що належать $L_q(\mathbb{R})$ при $\eta = 0$. Позначимо $\mathcal{M}_q = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{M}_q^\nu$. Визначимо на $\mathcal{M}_q$ квазінорму

$$|u|_{\mathcal{M}_q} = \|u\|_{L_q(\mathbb{R})} + \sup\left\{|\zeta| \colon \zeta \in \operatorname{supp} Fu\right\}, \quad u \in \mathcal{M}_q,$$

де $\operatorname{supp} Fu$ — носій перетворення Фур'є Fu функції $u \in \mathcal{M}_q$.

Для чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \leq \infty\}$ або $\{0 \leq s < \infty, \tau = \infty\}$ і $1 < q \leq \infty$ позначимо через $B_{q,\tau}^s(\mathbb{R})$ класичний простір Бєсова з нормою $\|\cdot\|_{B_{q,\tau}^s(\mathbb{R})}$.

Теорема 2.7. *Виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{B_{q,\tau}^s(\mathbb{R})} \leq c_{s,\tau}\, |u|_{\mathcal{M}_q}^s\, \|u\|_{L_q(\mathbb{R})}, \quad u \in \mathcal{M}_q,$$
$$d_\infty(\nu, u) \leq 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, \|u\|_{B_{q,\tau}^s(\mathbb{R})}, \quad u \in B_{q,\tau}^s(\mathbb{R}),$$

де $d_\infty(\nu, u) = \inf\left\{\|u - v\|_{L_q(\mathbb{R})} \colon v \in \mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)\right\} = \inf\left\{\|u - v\|_{L_q(\mathbb{R})} \colon v \in \mathcal{M}_q^\nu\right\}$, *а постійні* $c_{s,\tau}$ *і* $C_{s,\tau}$ *з теореми 2.5.*

У **третьому розділі** розвинено теорію інтерполяції просторів цілих векторів експоненціального типу, асоційованих з необмеженими операторами у банахових просторах, у контексті її застосувань в теорії наближень функцій, зокрема, спектральних апроксимацій різними класами функцій в термінах їх найкращих наближень у функціональних просторах.

У підрозділі 3.1 визначено і встановлено основні властивості інтерполяційних просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, породжених дійсними методами інтерполяції.

Теорема 3.1. *Нехай* $1 \leq p,\, p_0,\, p_1 \leq \infty$, $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $\nu_0 \neq \nu_1$. *Тоді при* $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$ *виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}_p^\nu(A).$$

Теорема 3.2. *Нехай* $0 < \nu < \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 < q_0, q_1 < \infty$, $q_0 \neq q_1$ *і* $1 \leq p, p_0, p_1 \leq \infty$. *Тоді виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}_{q_0,p_0}^\nu(A), \mathcal{E}_{q_1,p_1}^\nu(A)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}_{q,p}^\nu(A), \quad \text{де } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Нехай $0 < \nu < \infty$, $1 \le p \le \infty$ і $m \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $0 \in \rho(A)$ і позначимо через $\mathcal{C}^m := \mathcal{C}^m(A)$ $(m \in \mathbb{N})$ область визначення оператора A^m з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^m} = \|A^m x\|$ для $x \in \mathcal{C}^m$. Визначимо нормовані простори

$$\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathcal{C}^\infty(A) \colon \|x\|_{\mathcal{E}_p^{\nu,m}} < \infty\right\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_p^{\nu,m}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k x\right\|_{\mathcal{C}^m}^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k x\right\|_{\mathcal{C}^m}, & p = \infty. \end{cases}$$

Теорема 3.3. *Нехай $1 \le p$, p_0, $p_1 \le \infty$, $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $\nu_0 \ne \nu_1$. Тоді при $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$ виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m).$$

Для чисел $0 < \nu < \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$ і $m \in \mathbb{N}$ визначимо простори

$$\mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^m, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathcal{C}^\infty(A) \colon \|x\|_{\mathcal{E}_{q,p}^{\nu,m}} < \infty\right\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{q,p}^{\nu,m}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x_{k-1,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^m}^p k^{\frac{p}{q}-1}\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x_{k-1,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^m} k^{\frac{1}{q}}, & p = \infty. \end{cases}$$

При $q = p$ покладемо $\mathcal{E}_{p,p}^\nu(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m)$. Якщо $q = p = 1$ або $q = p = \infty$, то покладемо $\mathcal{E}_{1,1}^\nu(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}_1^\nu(\mathcal{C}^m)$ або $\mathcal{E}_{\infty,\infty}^\nu(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^m)$, відповідно.

Теорема 3.4. *Нехай $0 < \nu < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $1 < q_0, q_1 < \infty$, $q_0 \ne q_1$, $1 \le p, p_0, p_1 \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Тоді виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}_{q_0,p_0}^\nu(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}_{q_1,p_1}^\nu(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^m), \quad \text{де} \ \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

У підрозділі 3.2 описано інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу, породжені комплексним методом інтерполяції.

Нехай $(\mathfrak{X}_0, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_0})$, $(\mathfrak{X}_1, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_1})$ — інтерполяційна пара банахових просторів, $S = \{z : \ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ — смуга у комплексній площині, $\bar{S}$ — її замикання. Позначимо через $\mathcal{F}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1)$ простір $\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1$– значних функцій, неперервних в замиканні $\bar{S}$ і аналітичних в S, таких, що

$$\sup_{z\in\bar{S}} \|f(z)\|_{\mathfrak{X}_0+\mathfrak{X}_1} < \infty,$$

$$f(j+it) \in \mathfrak{X}_j, \ j = 0,1, \ -\infty < t < \infty,$$

$f(j+it)$ неперервна як $\mathfrak{X}_j$ – значна функція від t, $j = 0,1$,

$$\|f\|_{\mathcal{F}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1)} = \max_{j=0,1}\left(\sup_t \|f(j+it)\|_{\mathfrak{X}_j}\right) < \infty.$$

Нехай $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $1 \le p_0, p_1 \le \infty$. Для $0 < \theta < 1$ визначимо інтерполяційний простір

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big]_\theta \;=\; \Big\{ & x \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A) + \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A) : \\ & \exists\, f(z) \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big),\ f(\theta) = x \Big\}\end{aligned}$$

з нормою $\|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right]_\theta} = \inf\limits_{f(\theta)=x} \|f(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)}$, де inf береться по всіх $f \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big)$, таких, що $f(\theta) = x$.

Теорема 3.5. *Нехай $1 \le p_0,\, p_1 < \infty$, $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $\nu_0 \ne \nu_1$. Тоді при $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^{\theta}$ і $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ виконується рівність*

$$\big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big]_\theta = \mathcal{E}_p^{\nu}(A).$$

Нехай $0 < \theta < 1$, $m, r \in \mathbb{N}$ і $r > m$. Визначимо інтерполяційний простір

$$[\mathcal{C}^m,\, \mathcal{C}^r]_\theta = \big\{ x \in \mathcal{C}^m + \mathcal{C}^r : \exists\, f(z) \in \mathcal{F}\big(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r\big),\ f(\theta) = x \big\},$$

з нормою $\|x\|_{[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta} = \inf\limits_{f(\theta)=x} \|f(z)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)}$, де inf береться по всіх $f \in \mathcal{F}\big(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r\big)$, таких, що $f(\theta) = x$. Для $0 < \nu < \infty$ і $1 \le p \le \infty$ визначимо простір

$$\mathcal{E}_p^{\nu}\big(\,[\mathcal{C}^m,\, \mathcal{C}^r]_\theta\,\big) := \Big\{ x \in [\mathcal{C}^m,\, \mathcal{C}^r]_\theta :\ \|x\|_{\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu,[m,r]}} < \infty \Big\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu,[m,r]}} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k x\big\|^p_{[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta} \Big)^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k x\big\|_{[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta}, & p = \infty. \end{cases}$$

Визначимо також інтерполяційний простір

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^r)\big]_\theta \;=\; \Big\{ & x \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^m) + \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^r) : \\ & \exists\, f(z) \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^r)\big),\ f(\theta) = x \Big\}\end{aligned}$$

з нормою $\|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^r)\right]_\theta} = \inf\limits_{f(\theta)=x} \|f(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^r)\right)}$, де inf береться по всіх $f \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^r)\big)$, таких, що $f(\theta) = x$.

Теорема 3.6. *Для $1 \le p_0,\, p_1 < \infty$ і $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ виконується рівність*

$$\big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^r)\big]_\theta = \mathcal{E}_p^{\nu}\left([\mathcal{C}^m,\, \mathcal{C}^r]_\theta\right).$$

У підрозділі 3.3 введено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів та встановлено їх інтерполяційні властивості.

Оператор A називається позитивним, якщо інтервал $(-\infty, 0]$ належить його резольвентній множині та існує таке число $c > 0$, що $\|(A-\lambda I)^{-1}\| \le \dfrac{c}{1+|\lambda|}$, $\lambda \in (-\infty, 0]$.

Нехай A — позитивний оператор в $\mathfrak{X}$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $m \ge 0$, $0 < \sigma < k$. Для комплексних чисел α таких, що $-m < \operatorname{Re}\alpha \le \sigma - m$, і всіх елементів $x \in \left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{\sigma/k,1}$ визначимо інтеграл

$$A_\sigma^\alpha x = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(k-m-\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha+m-1} A^{k-m}(A+tI)^{-k} x\, dt.$$

Дробова степінь A^α позитивного оператора A визначається як замикання оператора A_σ^α. Для чисел $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$ визначимо простори

$$\mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^\alpha) := \mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^\alpha, \mathfrak{X}) = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty(A) \colon \|x\|_{\mathcal{E}_{q,p}^{\nu,\alpha}} < \infty\right\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{q,p}^{\nu,\alpha}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x_{k-1,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}^p k^{\frac{p}{q}-1}\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x_{k-1,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha} k^{\frac{1}{q}}, & p = \infty. \end{cases}$$

Для $1 \le p, q \le \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ і $0 \le \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$ визначимо також простори

$$\mathcal{E}_p^\nu\big((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\big) = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty(A) : \|x\|_{\mathcal{E}_{p,q,\theta}^{\nu,(\alpha,\beta)}} < \infty\right\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{p,q,\theta}^{\nu,(\alpha,\beta)}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k x\right\|_{(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}^p\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k x\right\|_{(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}, & p = \infty, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_p^\nu\big(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\big) = \left\{x \in \left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta : \|x\|_{\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]}} < \infty\right\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k x\right\|_{[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta}^p\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k x\right\|_{[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta}, & p = \infty. \end{cases}$$

Теорема 3.7. *Нехай* $0 < \theta < 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $0 \le \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$, $1 \le p \le \infty$. *Тоді*

$$(\mathcal{E}_1^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^\alpha))_{\theta,p} = \mathcal{E}_{1/(1-\theta),p}^\nu(\mathcal{C}^\alpha).$$

Якщо існують додатні числа ε *і* M, *такі, що* A^{it} *— обмежений оператор при* $-\varepsilon \le t \le \varepsilon$ *і* $\|A^{it}\| \le M$, *то*

$$\mathcal{E}_p^\nu\big(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\big) = \mathcal{E}_p^\nu\big(\mathcal{C}^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}\big).$$

Якщо $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $\nu_0 \neq \nu_1$ *і* $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, *то при* $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^{\theta}$ *виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}_p^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),$$

а при $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, *таких, що* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^\beta)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}_p^{\nu}\left((\mathcal{C}^\alpha,\, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,p}\right),$$
$$\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right]_\theta = \mathcal{E}_p^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\, \left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^\beta)\right]_\theta = \mathcal{E}_p^{\nu}\left(\left[\mathcal{C}^\alpha,\, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right).$$

На підпросторі $\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha) := \bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}_{q,p}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$ визначимо квазінорму $|x|_{\mathcal{E}_{q,p}^\alpha} := \|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} + \inf\left\{\nu > 0\colon x \in \mathcal{E}_{q,p}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)\right\}$ і розглянемо функціонал вигляду

$$E_{q,p}^{\alpha}(t,x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^\alpha}\colon x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\ |x^0|_{\mathcal{E}_{q,p}^\alpha} \leq t\right\},\ x \in \mathcal{C}^\alpha.$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \leq \infty\}$ або $\{0 \leq s < \infty, \tau = \infty\}$ визначимо шкалу просторів

$$\mathcal{B}_{q,p,\tau}^{s}(\mathcal{C}^\alpha) := \mathcal{B}_{q,p,\tau}^{s}(\mathcal{C}^\alpha, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathcal{C}^\alpha :\ |x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^{s,\alpha}} < \infty\right\},$$
$$|x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^{s,\alpha}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^s E_{q,p}^{\alpha}(t,x)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E_{q,p}^{\alpha}(t,x), & \tau = \infty. \end{cases}$$

Якщо $q = p$, то $\mathcal{B}_{p,p,\tau}^{s}(\mathcal{C}^\alpha) := \mathcal{B}_{p,\tau}^{s}(\mathcal{C}^\alpha)$.

Теорема 3.8. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^{s,\alpha}} \leq c_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{E}_{q,p}^\alpha}^{s}\, \|x\|_{\mathcal{C}^\alpha}, \quad x \in \mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),$$
$$d_{q,p}^{\alpha}(\nu, x) \leq 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^{s,\alpha}}, \quad x \in \mathcal{B}_{q,p,\tau}^{s}(\mathcal{C}^\alpha),$$

де $d_{q,p}^{\alpha}(\nu, x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^\alpha}\colon x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)\right\}$, $\nu > 0$ *і постійні* $c_{s,\tau}$, $C_{s,\tau}$ *з теореми 2.5.*

Теорема 3.9. *Нехай* A *— позитивний оператор з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень* $\lambda_j \in \sigma(A)$, *які є полюсами резольвенти* $R_\lambda(A)$, *і кореневі підпростори* $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$ *є скінченновимірними. Нехай* $\alpha \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *причому* $\alpha = m(1-\theta) + n\theta$ *і* $0 < \theta < 1$. *Тоді виконується така оцінка*

$$\inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^\alpha}\colon x^0 \in \mathcal{R}^{\nu,m,n}(A)\right\} \leq c_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}_{p,\tau}^{s,\alpha}},\ x \in \mathcal{B}_{p,\tau}^{s}(\mathcal{C}^\alpha),$$

де $\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) :\ |\lambda_j| < \min\left(\nu^{\frac{1}{m+1}},\, \nu^{\frac{1}{n+1}}\right)\right\}$.

Нехай $1 < q < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ *і* $\mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A) = \mathcal{R}^{\nu,m,n}(A) \bigcup \mathcal{S}^{\nu,m,n}(A)$, *де* $\mathcal{S}^{\nu,m,n}(A)$ *— лінійна оболонка всіх* $\mathcal{S}_{\lambda_j}(A)$, *таких, що* $|\lambda_j| = \min\left(\nu^{\frac{1}{m+1}},\, \nu^{\frac{1}{n+1}}\right)$, $\lambda_j \in \sigma(A)$. *Тоді для всіх* $x \in \mathcal{B}_{q,p,\tau}^{s}(\mathcal{C}^\alpha)$

$$\inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^\alpha}\colon x^0 \in \left(\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A), \mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A)\right)_{1-1/q,p}\right\} \leq 2^{s+1} C_{s,\tau} \nu^{-s} |x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}^{s,\alpha}},$$

де $(\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A), \mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A))_{1-1/q,p}$ *— інтерполяційний простір між просторами* $\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A)$ *і* $\mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A)$*, причому* $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A)} := \|\cdot\|_{\mathcal{E}_1^\nu(\mathcal{C}^\alpha)}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A)} := \|\cdot\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^\alpha)}$.

У **четвертому розділі** описано функціональні простори векторів експоненціального типу, асоційованих з еліптичними операторами, а також доведено відповідні нерівності Бернштейна і Джексона з точними оцінками найкращих наближень кореневими функціями таких операторів у різних просторах Лебега.

У підрозділі 4.1 описано простори цілих функцій експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях і компактних многовидах класу C^∞.

У просторі $L_q(\Omega)$ $(1 < q < \infty)$ комплексних сумовних функцій в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з границею $\partial\Omega$ класу C^∞ розглядаємо регулярно еліптичний оператор

$$Au = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(t) D^\alpha u, \quad a_\alpha(t) \in C^\infty(\bar\Omega),\ \bar\Omega = \Omega \cup \partial\Omega, \tag{4}$$

$$\mathcal{C}^1(A) = W^{2m}_{q,\{B_j\}}(\Omega) := \left\{u \in W^{2m}_q(\Omega)\colon B_j u\,|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\dots,m\right\},$$

де $W^{2m}_q(\Omega)$ – простір Соболєва, $(B_j u)(t) = \sum_{|\alpha|\le m_j} b_{j,\alpha}(t) D^\alpha u(t)$ — набір граничних операторів, $b_{j,\alpha}(t) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $j = 1,\dots,m$; $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial t_1^{\alpha_1}\dots\partial t_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ для всіх $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Визначимо простір $\mathcal{E}_q^\nu(D) = \left\{u \in C^\infty(\bar\Omega)\colon D^\alpha u \in L_q(\Omega),\ |\alpha| = k \in \mathbb{N}_0\right\}$ з нормою $\|u\|_{\mathcal{E}_q^\nu(D)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{|\alpha|=k} \nu^{-qk}\|\,D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)}\right)^{1/q}$ і об'єднання $\mathcal{E}_q(D) = \bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}_q^\nu(D)$.

Теорема 4.1. *Нехай резольвентна множина* $\rho(A)$ *оператора* A*, визначеного рівністю (4), непорожня. Тоді для будь-якого* $1 < q < \infty$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}_q(A) = \left\{u \in \mathcal{E}_q(D)\colon B_j A^k u\,|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\dots,m,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Розглядаємо $\partial\Omega$ як гладкий многовид з локальними картами U_l $(l = 1,\dots,N)$, які покривають $\partial\Omega$. Позначимо $C^\infty(U_l)$ простір нескінченно диференційовних комплексних функцій на U_l. Локальні координати $y^l = (y_1^l,\dots,y_{n-1}^l)$ на $\partial\Omega$ визначаються відображеннями $y^l\colon U_l \to \mathbb{R}^{n-1}$ з оберненими y^{-l}. Нехай $C^\infty(\partial\Omega)$ — простір функцій u на $\partial\Omega$, таких, що $u(y^l) = u \circ y^{-l} \in C^\infty(y^l(U_l))$.

Нехай диференціальний оператор L порядку $2m$ в локальних координатах $y^l = (y_1^l,\dots,y_{n-1}^l)$ має вигляд

$$Lu(y^l) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(y^l)\, D^\alpha(u \circ y^{-l}),\ a_\alpha \in C^\infty(y^l(U_l)),\ u \in C^\infty(\partial\Omega), \tag{5}$$

де $a_\alpha(y^l) \in \mathbb{R}$ для $|\alpha| = 2m$ і $(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(y^l)\,\xi^\alpha \geq c\,|\xi|^{2m}$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$; $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Використовуючи відображення $\delta_{y^l}\colon C^\infty(y^l(U_l)) \to C^\infty(U_l)$ з $\delta_{y^l}(v) := v \circ y^l$ і фіксовану карту U_l, визначимо $L_{y^l}\colon C^\infty(y^l(U_l)) \to C^\infty(y^l(U_l))$ з $L_{y^l} := \delta_{y^l}^{-1} \circ L \circ \delta_{y^l}$ для всіх $v \in C^\infty(y^l(U_l))$. Тоді дія L на $u \in C^\infty(\partial\Omega)$ в локальних координатах $y^l = (y_1^l, \ldots, y_{n-1}^l)$ визначається як $Lu(y^l) = L_{y^l}(u \circ y^{-l})$.

Припустимо, що оператор L з областю визначення $\mathcal{C}^1(L) = C^\infty(\partial\Omega)$ є симетричний в $L_2(\partial\Omega)$. Його замикання A має дискретний спектр і $\mathcal{C}^k(A) = W_2^{2mk}(\partial\Omega)$ — простір Соболєва.

Розглянемо в $L_2(\partial\Omega)$ підпростір $\mathcal{M}_2^\nu(\partial\Omega)$ функцій u, таких, що кожна композиція $(u \circ y^{-l})(\xi)$, $\xi \in y^l(U_l)$ співпадає зі звуженням до $y^l(U_l)$ цілої аналітичної функції $\tilde{u}(\xi + i\eta)$, $\xi + i\eta \in \mathbb{C}^{n-1}$ експоненціального типу $\nu > 0$. Нехай простір $\mathcal{M}_2(\partial\Omega) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{M}_2^\nu(\partial\Omega)$ наділений квазінормою $|u|_{\mathcal{M}_2(\partial\Omega)} := \|u\|_{L_2(\partial\Omega)} + \inf\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{M}_2^\nu(\partial\Omega)\}$. Для $\nu > 0$ визначимо простір

$$\mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega) = \left\{u \in C^\infty(\partial\Omega)\colon \|u\|_{\mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)} < \infty\right\},$$

де $\|u\|_{\mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \nu^{-2k} \|u\|^2_{W_2^k(\partial\Omega)}\right)^{1/2}$, $\|u\|^2_{W_2^k(\partial\Omega)} = \sum_{l=1}^N \|u\|^2_{W_2^k(y^l(U_l))}$, $\|u\|_{W_2^k(y^l(U_l))} = \inf_{\substack{\tilde{u}|_{y^l(U_l)} = u\circ y^{-l} \\ \tilde{u}\in W_2^k(\mathbb{R}^{n-1})}} \|\tilde{u}\|_{W_2^k(\mathbb{R}^{n-1})}$. На об'єднанні $\mathcal{H}_2(\partial\Omega) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)$ задамо квазінорму $|u|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)} = \|u\|_{L_2(\partial\Omega)} + \inf\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)\}$.

Теорема 4.2. *Виконуються такі рівності:*

$$\mathcal{E}_2(A) = \mathcal{H}_2(\partial\Omega), \quad \mathcal{E}_2(A) = \mathcal{M}_2(\partial\Omega).$$

У підрозділі 4.2 наведено нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞.

Позначимо $\{\lambda_i(R)\}_1^{\nu(R)}$ послідовність, що складається із всіх ненульових власних чисел резольвенти $R_\lambda(A)$ оператора A, пронумерованих у порядку спадання модулів, причому при нумерації кожне власне число рахується стільки разів, яка його алгебраїчна кратність; $\nu(R)$— сума алгебраїчних кратностей всіх ненульових власних чисел оператора $R_\lambda(A)$.

Нехай $R_\mathcal{R} = \dfrac{1}{2}[R_\lambda(A) + R_\lambda(A)^*]$, $R_\mathcal{J} = \dfrac{1}{2i}[R_\lambda(A) - R_\lambda(A)^*]$— ермітові компоненти оператора $R_\lambda(A)$ в гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$. Нехай $S \in \mathfrak{L}[L_2(\Omega)]$ — компактний оператор, $R(K)$ — образ оператора $K \in \mathfrak{L}[L_2(\Omega)]$, $a_n(S) = \inf_{\dim R(K)\leq n} \|S - K\|$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ — апроксимаційні числа. Через $\mathfrak{S}_1$ позначимо нормований ідеал компактних операторів $\mathfrak{S}_1 = \left\{S \in \mathfrak{L}[L_2(\Omega)],\ \|S\|_{\mathfrak{S}_1} = \sum_{j=1}^\infty a_j(S) < \infty\right\}$.

Теорема 4.3. *Нехай $R_\lambda(A)$ — дисипативний оператор в $L_2(\Omega)$ з уявною компонентою $R_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_1$ і виконується одна із таких умов:*

$$\text{(i)} \ \sum_{i=1}^{\nu(R)} |\operatorname{Im} \lambda_i(R)| = \|R_{\mathcal{J}}\|_{\mathfrak{S}_1},$$

$$\text{(ii)} \ \varliminf_{n\to\infty} n a_n(R_\lambda(A)) = 0,$$

$$\text{(iii)} \ \lim_{\tau\to\infty} \frac{n_+(\tau, R_{\mathcal{R}})}{\tau} = 0 \ \textit{або} \ \lim_{\tau\to\infty} \frac{n_-(\tau, R_{\mathcal{R}})}{\tau} = 0,$$

де $n_\pm(\tau, R_{\mathcal{R}})$ — кількість характеристичних чисел компоненти $R_{\mathcal{R}}$ відповідно в інтервалах $[0,\tau]$ і $[-\tau, 0]$. Тоді множина кореневих векторів оператора A є повною в просторі $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

Нехай θ_R — розхил кута з вершиною в початку координат, з яким співпадає замикання множини всіх значень $(R_\lambda(A)u, u)$, $u \in L_2(\Omega)$.

Теорема 4.4. *Нехай виконується одна із таких умов:*

$$\text{(i)} \ \theta_R = \frac{\pi}{q}, \ q \geq 1; \ a_n(R_\lambda(A)) = o(n^{-1/q}), \ n \to \infty;$$

$$\text{(ii)} \ \theta_R = \frac{\pi}{q}, \ q > 1; \ a_n([e^{i\alpha} R]_{\mathcal{J}}) = o(n^{-1/q}), \ n \to \infty,$$

для деякого α. Тоді множина кореневих векторів оператора A є повною в просторі $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

Відзначимо також, що множина кореневих векторів оператора A є повною в просторі $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, якщо виконується умова щільності $\overline{\mathcal{E}_p(A)} = L_p(\Omega)$.

У підрозділі 4.3 описано простори цілих векторів експоненціального типу вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), звичайних вироджених еліптичних диференціальних операторів в обмеженому інтервалі та вироджених еліптичних диференціальних операторів з частинними похідними в обмежених областях з нескінченно гладкою границею.

Нехай Ω — довільна область в $\mathbb{R}^n$ і $\rho(t) \in C^\infty(\Omega)$ — додатна функція, така, що:

(i) для довільного мультиіндексу α існує таке додатне число c_α, що

$$|D^\alpha \rho(t)| \ \leq \ c_\alpha \, \rho^{1+|\alpha|}(t) \ \text{ для всіх } \ t \in \Omega;$$

(ii) для довільного додатного числа K існують числа $\varepsilon_K > 0$ і $r_K > 0$ такі, що $\rho(t) > K$, якщо $d(t) \leq \varepsilon_K$ або $|t| \geq r_K$, $t \in \Omega$ ($d(t)$ — відстань до границі області Ω).

Позначимо через $S_{\rho(t)}(\Omega)$ локально опуклий простір

$$S_{\rho(t)}(\Omega) \;=\; \Big\{u : u \in C^\infty(\Omega),\ \sup_{t\in\Omega} \rho^l(t)|D^\alpha u(t)| < \infty$$
$$\text{для всіх мультиіндексів } \alpha \text{ і всіх } l = 0, 1, 2, \dots \Big\}.$$

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$, $\eta > \zeta + 2m$. Покладемо $\aleph_l = \frac{1}{2m}\,(\eta\,(2m - l) \,+\, \zeta\, l)$, $l = 0, 1, \dots, 2m$ і визначимо оператор

$$Au = \sum_{l=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2l} \rho^{\aleph_{2l}}(t)\, b_\alpha(t)\, D^\alpha u + \sum_{|\beta|<2m} a_\beta(t)\, D^\beta u, \tag{6}$$

де $b_\alpha(t) \in C^\infty(\Omega)$ ($|\alpha| = 2l,\ l = 0, 1, \dots, m$) — дійсні функції, всі похідні яких (і самі функції) обмежені в Ω. Передбачається, що існує таке додатне число C, що $(-1)^m \sum\limits_{|\alpha|=2m} b_\alpha(t)\, \xi^\alpha \geq C\, |\xi|^{2m}$, $b_{(0,\dots,0)}(t) \geq C$, $(-1)^l \sum\limits_{|\alpha|=2l} b_\alpha(t)\, \xi^\alpha \;\geq\; 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in \Omega$ і $l = 1, \dots, m-1$. Крім цього, $a_\beta(t) \in C^\infty(\Omega)$ ($0 \leq |\beta| < 2m$) та існує додатне число $\delta > 0$, таке, що $D^\gamma a_\beta(\xi) = O\,(\,\rho^{\aleph_{|\beta|} + |\gamma| - \delta}\,)$ для $0 \leq |\beta| < 2m$ і всіх мультиіндексів γ.

Теорема 4.5. *Нехай $\eta > 0$, $1 < q < \infty$ і $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ для деякого $a \geq 0$. Далі, нехай оператор A, заданий рівністю (6), з областю визначення $W_q^{2m}(\Omega\,;\, \rho^{q\zeta};\, \rho^{q\eta})$ діє в просторі $L_q(\Omega)$. Тоді для будь-якого $0 < \nu < \infty$ виконується рівність*

$$\mathcal{E}_q^\nu(A) = \Big\{u : u \in S_{\rho(t)}(\Omega), \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k u\big\|^q_{L_q(\Omega)}\Big)^{1/q} < \infty\Big\}.$$

Нехай $-\infty < a < b < \infty$, $\Omega = (a,\, b)$ і функція $p(t) \in C^\infty(\bar\Omega)$ така, що $p(t) > 0$ ($t \in \Omega$), $0 < C_a = \lim\limits_{t\downarrow a} \dfrac{p(t)}{t-a} < \infty$, $0 < C_b = \lim\limits_{t\uparrow b} \dfrac{p(t)}{b-t} < \infty$.

Для $m = 1, 2, \dots$ і $l = 0, 1, \dots, m$ покладемо

$$A_{m,l}u = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\Big(p^l(t)\frac{d^m u}{dt^m}\Big), \tag{7}$$
$$B_{m,l}u = A_{m,l}u + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t)\frac{d^j u}{dt^j}, \quad b_j(t) \in C^\infty(\bar\Omega),$$

де $\mathcal{C}^1(A_{m,l}) = \mathcal{C}^1(B_{m,l}) = C^\infty(\bar\Omega)$ при $s = m$ і $\mathcal{C}^1(A_{m,l}) = \mathcal{C}^1(B_{m,l}) = \big\{u \in C^\infty(\bar\Omega)\colon u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0,\ j = 0, \dots, m-l-1\big\}$ для всіх $l = 0, 1, \dots,\, m-1$. Припустимо також, що $b_j(t) = O\,\big(p^{l-2m+j+1}(t)\big)$ при $t \downarrow a$ і $t \uparrow b$.

Теорема 4.6. *Для* $l = 0, 1, \ldots, m-1$ *і* $0 < \nu < \infty$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{A}_{m,l}) = \Big\{u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(\bar{A}_{m,l}/\nu)^k u\big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2} < \infty,$$

$$(A^k_{m,l}u)^{(j)}(a) = (A^k_{m,l}u)^{(j)}(b) = 0, j = 0, \ldots, m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\},$$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,l}) = \Big\{u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(\bar{B}_{m,l}/\nu)^k u\big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2} < \infty,$$

$$(B^k_{m,l}u)^{(j)}(a) = (B^k_{m,l}u)^{(j)}(b) = 0, j = 0, \ldots, m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\}.$$

Для $l = m$ *і* $0 < \nu < \infty$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{A}_{m,m}) = \Big\{u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(\bar{A}_{m,m}/\nu)^k u\big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2} < \infty\Big\},$$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,m}) = \Big\{u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(\bar{B}_{m,m}/\nu)^k u\big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2} < \infty\Big\},$$

У підрозділі 4.4 наведено інтерполяційні властивості просторів цілих векторів експоненціального типу еліптичних операторів.

Теорема 4.7. *Нехай резольвентна множина* $\rho(A)$ *оператора* A*, визначеного рівністю (4), непорожня. Для будь-яких чисел* $\beta > \alpha \geq 0$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta < 1$ *виконуються рівності*

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,p}\right) = \mathcal{E}_p^\nu\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right)\\ &= \operatorname{span}\Big\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) :\ |\lambda_j| < \min\left(\nu^{\frac{1}{m_0+1}}, \nu^{\frac{1}{n_0+1}}, \nu^{\frac{1}{m_1+1}}, \nu^{\frac{1}{n_1+1}}\right)\Big\},\end{aligned}$$

де $\alpha = m_0(1-\theta) + n_0\theta$, $\beta = m_1(1-\theta) + n_1\theta$, $m_0, n_0, m_1, n_1 \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.8. *Нехай оператор* A*, заданий рівністю (6), з областю визначення* $W_q^{2m}(\Omega\,;\,\rho^{q\zeta};\,\rho^{q\eta})$ *діє в просторі* $L_q(\Omega)$*, причому* $\eta > 0$ *і* $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ *для деякого* $a \geq 0$*. Тоді для* $s \geq 0$, $\nu > 0$, $1 < q < \infty$, $\tau > \mu + sq$ *і* $0 < \theta < 1$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right) = \operatorname{span}\Big\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) : |\lambda_j| < \min\left(\nu,\, \nu^{(s/(2m\theta)+1)^{-1}}\right)\Big\}.$$

Теорема 4.9. *Нехай* $\bar{A}$ *— замикання в* $L_2(\Omega)$ *оператора* A*, заданого рівністю (7). Тоді для* $\nu > 0$, $1 \leq q < \infty$, $r \neq h$ *і* $0 < \theta < 1$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}_q^\nu\Big(\bar{A}, \big(W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}), W_2^{2h}(\Omega;\sigma^{2h})\big)_{\theta,q}\Big) = \operatorname{span}\Big\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A}) : |\lambda_j| < \min\left(\nu^{\frac{1}{r+1}}, \nu^{\frac{1}{h+1}}\right)\Big\}.$$

У підрозділі 4.5 описано апроксимаційні простори, асоційовані з еліптичними операторами, та доведено нерівності Бернштейна і Джексона з точними оцінками найкращих наближень кореневими функціями таких операторів.

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \leq \infty\}$ або $\{0 \leq s < \infty, \tau = \infty\}$ і $1 < q < \infty$ позначимо через $B^s_{q,\tau}(\Omega)$ класичний простір Бєсова і визначимо його підпростір $B^s_{q,\tau,\{B_j\}}(\Omega) = \left\{u \in B^s_{q,\tau}(\Omega) \colon B_j A^k u\,|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1, \ldots, m,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$.

Теорема 4.10. *Для оператора A, визначеного рівністю (4), виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{B^s_{q,\tau}(\Omega)} \leq c_{s,\tau}\, |u|^s_{\mathcal{R}(A)} \|u\|_{L_q(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{R}(A),$$
$$t^s E(t, u; \mathcal{R}(A), L_q(\Omega)) \leq 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \|u\|_{B^s_{q,\tau}(\Omega)}, u \in B^s_{q,\tau,\{B_j\}}(\Omega),$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.5,

$$E(t, u; \mathcal{R}(A), L_q(\Omega)) = \inf\left\{\|u - u^0\|_{L_q(\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{R}(A), |u^0|_{\mathcal{R}(A)} \leq t\right\}$$

для всіх $u \in L_q(\Omega)$. Зокрема, для всіх $u \in B^s_{q,\tau,\{B_j\}}(\Omega)$ маємо

$$\inf\left\{\|u - u^0\|_{L_q(\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{R}^\nu(A)\right\} \leq \nu^{-s} 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \|u\|_{B^s_{q,\tau}(\Omega)}.$$

Теорема 4.11. *Для оператора A, який є замиканням в $L_2(\partial\Omega)$ симетричного оператора L, заданого рівністю (5), виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)} \leq c_{s,\tau}\, |u|^s_{\mathcal{R}(A)} \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}, \quad u \in \mathcal{R}(A),$$
$$t^s E(t, u; \mathcal{R}(A), L_2(\partial\Omega)) \leq 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \|u\|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)}, u \in \mathcal{H}_2(\partial\Omega),$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.5,

$$E(t, u; \mathcal{R}(A), L_2(\partial\Omega)) = \inf\left\{\|u - u^0\|_{L_2(\partial\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{R}(A), |u^0|_{\mathcal{R}(A)} \leq t\right\}$$

для всіх $u \in L_2(\partial\Omega)$. Зокрема, для всіх $u \in \mathcal{H}_2(\partial\Omega)$ маємо

$$\inf\left\{\|u - u^0\|_{L_2(\partial\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{R}^\nu(A)\right\} \leq \nu^{-s} 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \|u\|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)}.$$

Подібні теореми доведено для вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), узагальнених диференціальних операторів Лежандра.

У **п'ятому розділі** побудовано теорію тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з наборами замкнених операторів, а також доведено відповідні нерівності Бернштейна і Джексона з точними оцінками найкращих наближень кореневими функціями таких операторів у різних функціональних просторах.

Нехай $\left\{\mathfrak{X}_j, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_j}\right\}_{j=1}^J$ — скінченний набір банахових просторів над полем $\mathbb{C}$, $\otimes_j \mathfrak{X}_j := \mathfrak{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{X}_J$ — їх тензорний добуток, на якому задаємо проективну

норму $\|w\|_{\otimes_j\mathfrak{X}_j} = \inf\limits_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J}$, де inf береться по всіх зображеннях елемента $w \in \otimes_j\mathfrak{X}_j$ у вигляді суми $w = \sum_{n=1}^N \otimes_j x_n^j$ зі скінченним N, $x_n^j \in \mathfrak{X}_j$ і $\otimes_j x_n^j = x_n^1 \otimes \ldots \otimes x_n^J \in \otimes_j\mathfrak{X}_j$. Поповнення простору $\otimes_j\mathfrak{X}_j$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j := \mathfrak{X}_1\tilde{\otimes}\ldots\tilde{\otimes}\mathfrak{X}_J$.

На просторі $\mathfrak{X}_j$ $(j = 1, \ldots, J)$ розглядаємо необмежений замкнений лінійний оператор $A_j : \mathcal{C}^1(A_j) \subset \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_j$ із щільною областю визначення $\mathcal{C}^1(A_j)$. Для будь-яких чисел $\nu_j > 0$, $1 \le p_j \le \infty$ визначимо банахові простори $\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$ цілих векторів експоненціального типу операторів A_j. Визначимо об'єднання $\mathcal{E}_{p_j}(A_j) = \bigcup_{\nu_j>0} \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, на якому задамо квазінорму

$$|x|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} = \|x\|_{\mathfrak{X}_j} + \inf\{\nu_j > 0 : x \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)\},$$

і побудуємо тензорний добуток $\otimes_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j) := \mathcal{E}_{p_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(A_J)$ з проективною квазінормою $|w|_{\otimes_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^N |x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot |x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}$. Поповнення простору $\otimes_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ у цій квазінормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$.

Для чисел $0 < s < \infty$ і $0 < \tau_j \le \infty$ визначимо апроксимаційні простори $\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j) = \left\{x \in \mathfrak{X}_j : \ |x|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)} < \infty\right\}$, наділені квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^s E_{p_j}(t, x; \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j)\right]^{\tau_j} \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau_j}, & 0 < \tau_j < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E_{p_j}(t, x; \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j), & \tau_j = \infty, \end{cases}$$

де $E_{p_j}(t, x; \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathfrak{X}_j} \colon x^0 \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j),\ |x^0|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le t\right\}$, $x \in \mathfrak{X}_j$.

Нехай $0 < \theta < 1$ і $[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)]^\theta$ позначає простір $\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)$, наділений квазінормою $|x|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)}^\theta$, $\otimes_j[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)]^\theta$ — тензорний добуток з проективною квазінормою $|w|_{\otimes_j[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)]^\theta} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^N |x_n^1|_{\mathcal{B}_{p_1,\tau_1}^s(A_1)}^\theta \cdot \ldots \cdot |x_n^J|_{\mathcal{B}_{p_J,\tau_J}^s(A_J)}^\theta$, $\tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)]^\theta$ — поповнення простору $\otimes_j[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)]^\theta$ у цій квазінормі.

Теорема 5.1. *Нехай* $1 \le p_j, q, q_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\tau_j = \theta q_j$, $\theta = \dfrac{1}{s+1}$ *виконується неперервне вкладення*

$$\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)]^\theta.$$

Для індексів $0 < s < \infty$, $0 < \tau < \infty$ і $p = (p_1, \ldots, p_J)$ визначимо апроксимаційний простір, породжений скінченним набором операторів $A_1, \ldots, A_J$,

$$\mathscr{B}_{p,\tau}^s := \mathscr{B}_{p,\tau}^s(A_1, \ldots, A_J; \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j) = \{w \in \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j \colon |w|_{\mathscr{B}_{p,\tau}^s} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|w|_{\mathscr{B}_{p,\tau}^s} = \left(\int_0^\infty \left[t^s E_p(t, w; \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau},$$

де $E_p(t, w; \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le t} \|w - u\|_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j}$, $u \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $w \in \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j$.

Теорема 5.2. *Виконуються такі нерівності:*

$$|w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}} \le c_{s,\tau}|w|^s_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j},\ w\in\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),$$
$$E_p(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j)\le 2^{s+1}C_{s,\tau}t^{-s}|w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}},\ w\in\mathscr{B}^s_{p,\tau},$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.5.

У підрозділі 5.4 описано тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з наборами позитивних операторів, доведено нерівності Бернштейна і Джексона на таких тензорних добутках.

Нехай A_j $(j=1,\dots,J)$ — позитивні оператори в комплексних банахових просторах $\mathfrak{X}_j$. Позначимо $\mathcal{C}^\alpha_j := \mathcal{C}^\alpha(A_j)$ $(\alpha\in\mathbb{C})$ область визначення оператора A^α_j з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha_j}=\|A^\alpha_j x\|_{\mathfrak{X}_j}$, $x\in\mathcal{C}^\alpha_j\subset\mathfrak{X}_j$.

Визначимо тензорний добуток $\otimes_j\mathcal{C}^\alpha_j := \mathcal{C}^\alpha_1\otimes\ldots\otimes\mathcal{C}^\alpha_J$ з проективною нормою $\|w\|_{\otimes_j\mathcal{C}^\alpha_j} = \inf\limits_{w=\sum_n\otimes_j x^j_n}\sum_{n=1}^N\|x^1_n\|_{\mathcal{C}^\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\|x^J_n\|_{\mathcal{C}^\alpha_J}$. Поповнення простору $\otimes_j\mathcal{C}^\alpha_j$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j\mathcal{C}^\alpha_j$.

Нехай $\otimes_j\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j) := \mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}^\alpha_1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}^\alpha_J)$ — тензорний добуток з проективною квазінормою $|w|_{\otimes_j\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)}=\inf_{w=\sum_n\otimes_j x^j_n}\sum_{n=1}^N|x^1_n|_{\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}^\alpha_1)}\cdot\ldots\cdot|x^J_n|_{\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}^\alpha_J)}$, $\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)$ — його поповнення у цій квазінормі.

Для чисел $0<s<\infty$ і $0<\tau_j\le\infty$ визначимо апроксимаційні простори

$$\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)=\left\{x\in\mathcal{C}^\alpha_j:\ |x|_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)}<\infty\right\},$$

наділені квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^\infty\left[t^sE^\alpha_{p_j}(t,x)\right]^{\tau_j}\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau_j}, & 0<\tau_j<\infty,\\ \sup_{t>0}t^sE^\alpha_{p_j}(t,x), & \tau_j=\infty.\end{cases}$$

де $E^\alpha_{p_j}(t,x)=\inf\left\{\|x-x^0\|_{\mathcal{C}^\alpha_j}\colon x^0\in\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\ |x^0|_{\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)}\le t\right\}$, $x\in\mathcal{C}^\alpha_j$.

Нехай $[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta$ $(0<\theta<1)$ — простір $\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)$, наділений квазінормою $|x|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)}$, $\otimes_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta$ — тензорний добуток з проективною квазінормою $|w|_{\otimes_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta}=\inf_{w=\sum_n\otimes_j x^j_n}\sum_{n=1}^N|x^1_n|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_1,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha_1)}\cdot\ldots\cdot|x^J_n|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_J,\tau_J}(\mathcal{C}^\alpha_J)}$, $\tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta$ — його поповнення.

Теорема 5.3. *Нехай $1\le p_j,q,q_j\le\infty$, $0<\theta<1$. Тоді при $\tau_j=\theta q_j$, $\theta=\dfrac{1}{s+1}$ виконується неперервне вкладення*

$$\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{C}^\alpha_j\right)_{\theta,q}\subset\tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta.$$

Для індексів $0 < s < \infty$, $0 < \tau < \infty$ і $p = (p_1, \dots, p_J)$ визначимо апроксимаційний простір, породжений скінченним набором операторів $A_1, \dots, A_J$,

$$\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau} := \mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}(A_1, \dots, A_J; \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j) = \{w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j \colon |w|_{\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|w|_{\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}} = \Big(\int_0^\infty \big[t^s E^\alpha_p(t,w)\big]^\tau \frac{dt}{t} \Big)^{1/\tau},$$

де $E^\alpha_p(t,w) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)} \le t} \|w-u\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j}$, $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)$, $w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j$.

Теорема 5.4. *Виконуються такі нерівності:*

$$|w|_{\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}} \le c_{s,\tau} |w|^s_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)} \|w\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j}, \ w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),$$

$$E^\alpha_p(t,w) \le 2^{s+1} C_{s,\tau} t^{-s} |w|_{\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}}, \ w \in \mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau},$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.5.

У підрозділі 5.5 описано тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з еліптичними операторами, доведено нерівності Бернштейна і Джексона на тензорних добутках функціональних просторів.

Для індексів $0 < s < \infty$, $0 < \tau < \infty$ і $p = (p_1, \dots, p_J)$ визначимо апроксимаційний простір, породжений скінченним набором регулярно еліптичних операторів $A_1, \dots, A_J$,

$$\mathscr{B}^{s}_{p,\tau} := \mathscr{B}^{s}_{p,\tau}(A_1, \dots, A_J; \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)) = \{w \in \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j) \colon |w|_{\mathscr{B}^{s}_{p,\tau}} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|w|_{\mathscr{B}^{s}_{p,\tau}} = \Big(\int_0^\infty \big[t^s E_p(t,w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j))\big]^\tau \frac{dt}{t} \Big)^{1/\tau},$$

де $E_p(t,w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le t} \|w-u\|_{\tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)}$, $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $w \in \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)$.

Теорема 5.5. *Нехай $1 < p_j < \infty$, $1 \le q, q_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. Тоді при $\tau_j = \theta q_j$, $\theta = \dfrac{1}{s+1}$ виконується неперервне вкладення*

$$\big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j [B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j)]^\theta.$$

Крім того, виконуються такі нерівності:

$$|w|_{\mathscr{B}^{s}_{p,\tau}} \le c_{s,\tau} |w|^s_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \|w\|_{\tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)}, \ w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j),$$

$$E_p(t,w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)) \le 2^{s+1} C_{s,\tau} t^{-s} |w|_{\mathscr{B}^{s}_{p,\tau}}, \ w \in \mathscr{B}^{s}_{p,\tau},$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.5.

Подібні теореми і відповідні нерівності типу Бернштейна і Джексона доведено також для скінченних наборів регулярних еліптичних операторів на компактних многовидах і узагальнених диференціальних операторів Лежандра.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано наукову проблему визначення структури і опису властивостей апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами в нормованих просторах, у контексті спектральних апроксимацій та характеризації різних класів функцій в термінах їх найкращих наближень цілими функціями експоненціального типу в функціональних просторах.

Проведене в роботі дослідження дозволило отримати низку наукових результатів:

1. На основі аналізу операторного підходу до проблем апроксимації функцій встановлено можливість характеризації нескінченно диференційованих векторів замкненого оператора у комплексному банаховому просторі в термінах їх найкращих наближень різними класами, зокрема, цілих, аналітичних, цілих експоненціального типу векторів, а у випадку оператора диференціювання — наближень алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу. Обґрунтовано можливість застосування до розв'язання згаданої проблеми теорії апроксимаційних просторів.

2. Визначено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, встановлено основні властивості цих просторів, а також їх об'єднань. Доведено, що простори цілих векторів експоненціального типу оператора з точковим спектром співпадають з лінійною оболонкою образів проекторів Ріса, а у випадку оператора з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності, простір всіх цілих векторів експоненціального типу співпадає з лінійною оболонкою його кореневих векторів.

3. Введено нові класи апроксимаційних просторів типу Бєсова, асоційованих з необмеженими операторами у банахових просторах, та цілими функціями експоненціального типу для операторів диференціювання у функціональних просторах. Доведено, що ці простори є інтерполяційними просторами між просторами цілих векторів експоненціального типу і вихідним простором, встановлено властивості апроксимаційних просторів.

4. Встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів типу Бєсова з точними значеннями констант, які дають аналітичні оцінки найкращих наближень цілими векторами експоненціального типу необмеженого оператора, зокрема, спектральних апроксимацій у випадку оператора з точковим спектром, а у випадку оператора диференціювання — відповідні оцінки наближення функцій алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу.

5. Описано інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, породжених дійсними і комплексним методами інтерполяції, та встановлено їх властивості. Введено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів на областях визначення їх цілих степенів, а для позитивних операторів — на областях визначення їх комплексних степенів. Встановлено ізоморфізми для дійсної та комплексної інтерполяційних шкал цих просторів. Описано інтерполяційні простори цілих функцій експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів, а також деяких класів вироджених еліптичних диференціальних операторів.

6. Визначено інтерполяційну шкалу апроксимаційних просторів на областях визначення цілих степенів замкнених операторів та доведено інтерполяційні теореми, що характеризують цю шкалу. Описано апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами у банахових просторах, доведено їх зв'язок з інтерполяційними просторами та встановлено інтерполяційні властивості. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм цих апроксимаційних просторів, а також теореми, що характеризують спектральні апроксимації для оператора з точковим спектром.

7. Описано функціональні простори векторів експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях Ω і компактних многовидах класу C^∞, вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), звичайних вироджених еліптичних диференціальних операторів в обмеженому інтервалі та вироджених еліптичних диференціальних операторів з частинними похідними в обмежених областях з нескінченно гладкою границею. На основі ознак повноти кореневих векторів компактних операторів в гільбертовому просторі та ознак щільності множини цілих векторів експоненціального типу оператора в банахових просторах встановлено нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$.

8. Визначено апроксимаційні простори, асоційовані з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях класу C^∞. Показано, що ці апроксимаційні простори співпадають із замкненими підпросторами класичних просторів Бєсова. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона, що характеризують, зокрема, спектральні апроксимації регулярних еліптичних операторів. Описано апроксимаційні простори, асоційовані з регулярними еліптичними диференціальними операторами на компактних многовидах, що мають форму границі обмеженої області класу C^∞, і узагальненими диференціальними операторами Лежандра.

9. Визначено проективні тензорні добутки просторів цілих векторів експо-

ненціального типу для скінченних наборів замкнених операторів, що діють у банахових просторах. Побудовано спектральні розклади для операторів з точковим спектром. Описано інтерполяційні простори проективних тензорних добутків цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів над банаховими просторами і на областях визначення їх цілих степенів та встановлено їх інтерполяційні властивості.

10. Доведено, що тензорний добуток апроксимаційних просторів типу Бєсова є проміжним інтерполяційним простором між тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів і тензорним добутком банахових просторів, на яких визначено відповідні оператори. Встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу.

11. Описано тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бєсова, асоційованих з позитивними операторами, регулярно еліптичними диференціальними операторами і узагальненими диференціальними операторами Лежандра, встановлено інтерполяційні властивості цих просторів. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм визначених тензорних добутків апроксимаційних просторів.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу деяких класів еліптичних операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 3. – С. 17–20.

2. Дмитришин М.І. Інтерполяція просторів ультрагладких векторів замкнених операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 4. – С. 31–34.

3. Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу диференціальних операторів Трікомі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 3. – С. 7–10.

4. Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum // In: Banakh T. (Ed.) General Topology in Banach Spaces. Nova Sci. Publ., Huntington, New York. – 2001. – P. 137–145.

5. Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Interpolation of exponential type vectors, the complex method // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, № 1. – С. 71–75.

6. Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори між банаховим простором і векторами експоненціального типу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 3. – С. 54–60.

7. Dmytryshyn M., Lopushansky O. Interpolated subspaces of exponential vectors of the unbounded operators in Banach spaces // Demonstratio Mathematica. – 2004. – V. 37, № 1. – P. 149–158.

8. Дмитришин М.І. Інтерполяція спектральних підпросторів диференціальних операторів Трікомі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 2. – С. 16–21.

9. Дмитришин М.І. Інтерполяційні шкали спектральних підпросторів одного класу вироджених еліптичних операторів // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Випуск 239. Математика. – Чернівці: Рута. – 2005. – С. 37–42.

10. Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Інтерполяція векторів експоненціального типу дробових степенів позитивних операторів // Вісник Львівського національного університету ім. І.Франка: Серія механіко-математична. Випуск 64. – 2005. – С. 99–106.

11. Дмитришин М.І. Ознаки повноти множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 43–47.

12. Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Абстрактні простори Бєсова, асоційовані з замкненими операторами в банахових просторах // Доповіді НАН України. – 2007. – № 12. – С. 16–22.

13. Дмитришин М.І. Наближення векторами експоненціального типу диференціальних операторів Лежандра // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Випуск 454. Математика. – Чернівці: Рута. – 2009. – С. 28–33.

14. Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т. 1, № 1. – С. 8–14.

15. Дмитришин М.І. Апроксимації векторами експоненціального типу регулярних еліптичних операторів // Прикладні проблеми механіки і математики : Наук. збірник. Випуск 8. – 2010. – С. 71–77.

16. Дмитришин М.І. Простори векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів // Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 21–30.

17. Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу замкнених операторів на тензорних добутках // Математичний вісник НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 60–68.

18. Дмитришин М.І. Інтерполяція тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 89–96.

19. Дмитришин М.І. Тензорні добутки абстрактних просторів Бєсова // Карпатські математичні публікації. – 2012. – Т. 4, № 2. – С. 241–246.

20. Дмитришин М.І. Тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих із регулярними еліптичними операторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 4. – С. 75–82. (Те саме: Dmytryshyn M.I. Tensor products

of approximation spaces associated with regular elliptic operators // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V. 208, № 3. – P. 355-365.)

21. Dmytryshyn M. Interpolated tensor products of exponential type vectors of unbounded operators // Journal of Mathematics and System Science. – 2014. – V. 4, № 2. – P. 99–104.

22. Dmytryshyn M., Lopushansky O. Bernstein-Jackson-type inequalities and Besov spaces associated with unbounded operators // Journal of Inequalities and Applications. – 2014. – V. 2014. – Article ID 105, 12 pages.

23. Dmytryshyn M. Tensor products of exponential type vectors of unbounded operators // Int. Journal of Math. Analysis. – 2014. – V. 8, № 11. – P. 529–538.

24. Dmytryshyn M. Approximation spaces associated with Legendre differential operators // Int. Journal of Math. Analysis. – 2014. – V. 8, № 22. – P. 1075–1082.

25. Dmytryshyn M.I. Interpolated scales of approximation spaces for regular elliptic operators on compact manifolds // Carpathian Math. Publ. – 2014. – V. 6, № 1. – P. 26–31.

26. Дмитришин М.І. Інтерполяційні шкали апроксимаційних просторів, асоційованих з позитивними операторами // Прикладні проблеми механіки і математики : Наук. збірник. Випуск 12. – 2014. – С. 7–15.

27. Dmytryshyn M. Besov-Lorentz-type spaces and best approximations by exponential type vectors // Int. Journal of Math. Analysis. – 2015. – V. 9, № 16. – P. 779–786.

28. Dmytryshyn M. Approximation by exponential type vectors of positive operators // Int. Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – V. 112, № 4. – P. 795–804.

29. Dmytryshyn M., Lopushansky O. Spectral approximations of strongly degenerate elliptic differential operators // Carpathian Math. Publ. – 2019. – V. 11, № 1. – P. 48–53.

30. Dmytryshyn M., Lopushansky O. On Spectral Approximations of Unbounded Operators // Complex Anal. Oper. Theory. – 2019. – V. 13, № 8. – P. 3659—3673.

31. Dmytryshyn M.I. An interpolation of the spaces of exponential type vectors // Междунар. конф. “VIII Белорусская математическая конференция” Ч. 1 (Минск, Беларусь, 19-24 июня 2000 г.): тезисы докладов. – В 2 ч.: ч. 1. – Минск, 2000. – С. 58.

32. Дмитришин М.І. Інтерполяція просторів, породжених векторами експоненціального типу // Український математичний конгрес – 2001. Міжнародна конференція з функціонального аналізу (Київ, 22-26 серпня 2001 р.): тези доп. – Київ : Інститут математики НАН України, 2001. – С. 22.

33. Dmytryshyn M.I. Approximation by exponential type vectors // International conference on Functional Analysis and its Applications dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach : Book of Abstracts (Lviv, 28-31 May 2002). – Lviv :

Ivan Franko National University of Lviv, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2002. – P. 61–62.

34. Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Interpolation of exponential type vectors of positive operators // III Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9-12 вересня 2003 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2003. – С. 121.

35. Дмитришин М.І. Аналітичність кореневих функцій диференціальних операторів Лежандра // Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-26 травня 2004 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2004. – С. 69–70.

36. Дмитришин М.І. Інтерполяція векторів експоненціального типу операторів Лежандра // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 27 вересня-1 жовтня 2004 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2004. – С. 72.

37. Дмитришин М.І. Інтерполяційні простори експоненціальних векторів дробових степенів позитивних операторів // Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-27 травня 2005 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2005. – С. 196–197.

38. Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Lorentz type invariant subspaces // XI Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 18-20 травня 2006 р.): матеріали конф. – Київ : ТОВ "Задруга", 2006. – С. 500.

39. Дмитришин М.І. Повнота множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів у просторах L_ρ // Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 11-14 жовтня 2006 р.): тези доп. – Чернівці : Рута, 2006. – С. 39.

40. Дмитришин М.І. Найкращі наближення векторами експоненціального типу // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24-28 вересня 2007 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2007. – С. 91.

41. Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з диференціальним оператором Лежандра // XII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2008 р.): матеріали конф. – Київ : ТОВ "Задруга", 2008. – С. 603.

42. Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Abstract Besov spaces, associated with unbounded linear operator in Banach space // Міжнародна конференція "Аналіз і топологія" (Львів, 27 травня-7 червня 2008 р.): тези доп. – Льів : Львівський національний університет ім. І. Франка, 2008. – С. 37.

43. Дмитришин М.І. Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // IV Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні про-

блеми аналізу" (Івано-Франківськ, 10-12 вересня 2008 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2008. – С. 31.

44. Dmytryshyn M.I. Exponential Type Vectors of Complex Degrees of Positive Operators // Міжнародна конференція "Нескінченновимірний аналіз і топологія" (Івано-Франківськ, 27 травня-1 червня 2009 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2009. – С. 30–31.

45. Дмитришин М.І. Інтерполяція абстрактних просторів Бєсова // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (Чернівці, 8-13 червня 2009 р.): тези доп. – Чернівці : Книги–XXI, 2009. – С. 41–42.

46. Dmytryshyn M.I. Approximations by Exponential Type Vectors of Regular Elliptic Operators // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90th anniversary of V.E. Lyantse : Abstracts of Reports (Lviv, 17-21 November 2010). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2010. – P. 36–37.

47. Дмитришин М.І. Інтерполяція тензорних добутків просторів векторів експоненціального типу // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19-23 вересня 2011 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2011. – С. 64.

48. Дмитришин М.І. Тензорні добутки просторів векторів експоненціального типу замкнених операторів // XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. – Київ : НТУУ "КПІ", 2012. – С. 92.

49. Dmytryshyn M.I. Exponential type vectors of closed operators on tensor products // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach : Abstracts of Reports (Lviv, 17-21 September 2012). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2012. – P. 40.

50. Дмитришин М.І. Тензорні добутки інтерполяційних просторів типу Бєсова // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 48.

51. Дмитришин М.І. Інтерполяційні властивості тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з регулярними еліптичними операторами // V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013 р.): тези доп. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 24.

52. Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами // XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Ма-

тематичний аналіз. – Київ : НТУУ “КПІ”, 2014. – С. 82.

53. Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з деякими класами еліптичних операторів // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня-5 липня 2014 р.): тези доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2014. – С. 52–53.

54. Дмитришин М.І. Простори типу Лоренца, асоційовані з позитивними операторами // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1-4 липня 2015 р.): тези доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2015. – С. 38.

55. Dmytryshyn M.I. Interpolated scales of Lorentz-type spaces of exponential type vectors // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2015. – С. 31.

56. Дмитришин М.І. Спектральні апроксимації для операторів з мероморфною резольвентою // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. – Київ : НТУУ “КПІ”, 2016. – С. 95–97.

57. Дмитришин М.І. Узагальнені спектральні апроксимації для регулярних еліптичних операторів // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного аналізу” (Ворохта, 22 лютого-25 лютого 2017 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2017. – С. 77–78.

58. Дмитришин М.І. Аналітичні оцінки спектральних апроксимацій для узагальнених диференціальних операторів Лежандра // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях” (Чернівці, 17-19 вересня 2018 р.): матеріали доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2018. – С. 176.

АНОТАЦІЇ

Дмитришин М. І. Апроксимаційні простори, асоційовані з цілими векторами експоненціального типу. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2020.

У дисертаційній роботі введено і описано нові класи апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами в нормованих просторах, у контексті спектральних апроксимацій та характеризації різних класів функцій

в термінах їх найкращих наближень цілими функціями експоненціального типу в функціональних просторах. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів типу Бєсова з точними значеннями констант, які дають аналітичні оцінки найкращих наближень цілими векторами експоненціального типу необмеженого оператора, зокрема, спектральних апроксимацій у випадку оператора з точковим спектром. Описано інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, породжені дійсними і комплексним методами інтерполяції, та встановлено їх властивості. Визначено апроксимаційні простори, асоційовані з регулярно еліптичними диференціальними операторами, виродженими еліптичними диференціальними операторами і узагальненими диференціальними операторами Лежандра, та встановлено відповідні нерівності типу Бернштейна і Джексона, що характеризують наближення цілими функціями експоненціального типу та кореневими функціями в просторах Лебега. Визначено тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з наборами замкнених операторів, зокрема, позитивними операторами, регулярно еліптичними диференціальними операторами і узагальненими диференціальними операторами Лежандра, та встановлено їх інтерполяційні властивості. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона на тензорних добутках апроксимаційних просторів типу Бєсова з точними оцінками найкращих наближень кореневими функціями операторів у різних функціональних просторах.

Ключові слова: апроксимаційні простори, цілі вектори експоненціального типу, нерівності типу Бернштейна і Джексона, необмежені оператори, еліптичні оператори.

Дмитришин М. И. Аппроксимационные пространства, ассоциированные с целыми векторами экспоненциального типа. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2020.

В диссертационной работе введены и описаны новые классы аппроксимационных пространств, ассоциированных с неограниченными операторами в нормированных пространствах, в контексте спектральных аппроксимаций и характеризации различных классов функций в терминах их наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа в функциональных пространствах. Доказано неравенства типа Бернштейна и Джексона в терминах квазинорм аппроксимационных пространств типа Бесова с точными значениями констант, которые дают аналитические оценки наилучших приближений целыми векторами экспоненциального типа неограниченного оператора, в частности, спектральных аппроксимаций в случае оператора с точечным спектром.

Описаны интерполяционные пространства целых векторов экспоненциального типа замкнутого оператора, порожденные вещественными и комплексными методами интерполяции, и установлены их свойства. Определены аппроксимационные пространства, ассоциированные с регулярно эллиптическими дифференциальными операторами, вырожденными эллиптическими дифференциальными операторами и обобщенными дифференциальными операторами Лежандра, и установлены соответствующие неравенства типа Бернштейна и Джексона, характеризующие приближение целыми функциями экспоненциального типа и корневыми функциями в пространствах Лебега. Определены тензорные произведения апроксимационных пространств, ассоциированных с наборами замкнутых операторов, в частности, положительными операторами, регулярно эллиптическими дифференциальными операторами и обобщенными дифференциальными операторами Лежандра, и установлены их интерполяционные свойства. Доказано неравенства типа Бернштейна и Джексона на тензорных произведениях аппроксимационных пространств типа Бесова с точными оценками наилучших приближений корневыми функциями операторов в различных функциональных пространствах.

Ключевые слова: аппроксимационные пространства, целые векторы экспоненциального типа, неравенства типа Бернштейна и Джексона, неограниченные операторы, эллиптические операторы.

Dmytryshyn M. I. Approximation spaces associated with entire exponential type vectors. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2020.

The dissertation is devoted to the development of the theory of approximation spaces associated with entire exponential type vectors of unbounded operators in the context of spectral approximations and characterization of different classes of functions in terms of their best approximations by entire exponential type functions.

We introduce the new classes of Besov-type approximation spaces associated with unbounded operators in the Banach space. We show that such spaces are interpolation spaces and we prove the Bernstein and Jackson inequalities in terms of quasi-norms of approximation spaces. The explicit dependence of the constants on the parameters of the Besov type space is obtained.

For the differentiation operator in the space $L_q(\mathbb{R})$, we show the application of abstract results in the approximation theory of functions. We prove that the approximation space associated with the differentiation operator coincides with the classical Besov space. As a consequence, classical inequalities of Bernstein and Jackson with exact values of constants are obtained.

The interpolation theory of spaces of entire exponential type vectors associ-

ated with unbounded operators in Banach spaces is developed in the context of its applications in the approximation theory of functions, in particular, spectral approximations in the function spaces. The basic properties of interpolation spaces of entire exponential type vectors of closed operator generated by real and complex interpolation methods are defined and established. An interpolation theorem for the spaces of exponential type vectors of unbounded operators is proved on domains of their integer degrees generated by the complex method interpolation.

We introduce the new classes of spaces of entire exponential type vectors on domains of complex degrees of positive operators. Isomorphisms for the real and complex interpolation scales of introduced spaces are established. We define the approximation spaces associated with positive operators in Banach spaces and we establish the interpolation properties of such spaces.

The problem of approximation of a given element of space $\mathcal{C}^{\alpha}(A)$ is investigated, which is the domain of complex degrees ($\alpha \in \mathbb{C}$) of A, by elements of invariant subspaces of entire exponential type vectors. Bernstein and Jackson type inequalities have been proved in terms of quasi-norms of corresponding approximation spaces. We prove the theorem which characterizes the spectral approximations for the positive operator with the point spectrum in terms of quasi-norms of approximation spaces.

We describe the spaces of exponential type vectors of regular elliptic differential operators in bounded domains Ω and on compact C^{∞}-manifolds. It is proved that in the case of a non-empty resolvent set of a regularly elliptic operator, the space of entire exponential type vectors coincides with the subspace of entire exponential type functions of whose restriction on Ω belongs to the space $L_p(\Omega)$.

New conditions of completeness of the set of root vectors have been established of a regular elliptic operator in the spaces $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

We describe the approximation spaces associated with the regular elliptic differential operators in bounded domains Ω and on compact C^{∞}-manifolds, the degenerate elliptic differential operators, characterized by a strong degeneration of coefficients near the boundary (and at infinity), and the generalized differential Legendre operators. Bernstein and Jackson type inequalities in terms of quasi-norms of such approximation spaces with exact values of constants are proved.

The properties of projective tensor products of spaces of entire exponential type vectors for finite sets of closed operators in Banach spaces are established. Spectral decompositions for the operators with the point spectrum are constructed.

It is proved that the tensor product of Besov approximation spaces is an intermediate interpolation space between the tensor product of entire exponential type vectors of closed operators and the tensor product of Banach spaces on which the corresponding operators are defined. Bernstein and Jackson type inequalities, which estimate the distance from a given element of a tensor product of Banach

spaces to the subspace defined by the tensor product of spaces of entire exponential type vectors are established.

The tensor products of Besov approximation spaces in the domains of complex degrees of positive operators are determined. Bernstein and Jackson type inequalities, which estimate the distance from a given element of a tensor product of Banach spaces that are domains of complex degrees of positive operators, to the subspace defined by the tensor product of spaces of entire exponential type vectors are established.

The tensor products of Besov approximation spaces associated with the regular elliptic differential operators in bounded domains Ω and on compact C^∞-manifolds, and generalized Legendre differential operators are determined. Bernstein and Jackson type inequalities are proved in terms of quasi-norms of certain tensor products of approximation spaces.

Key words: approximation spaces, entire exponential type vectors, Bernstein-Jackson-type inequalities, unbounded operators, elliptic operators.

Підписано до друку 24.01.2020.
Формат 60 × 84/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Умовн. друк. арк. 1,72.
Наклад 100 примірників. Зам № 08/01/20

ВИДАВНИЦТВО “НАІР”
76014, м. Івано-Франківськ, вул. Височана, 18, тел. (034) 250-57-82

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виробників і розповсюджувачів видавничої продукції № 4191 від 12.11.2011 р.