ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ДМИТРИШИН МАР’ЯН ІВАНОВИЧ

УДК 517.98+517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

АПРОКСИМАЦІЙНІ ПРОСТОРИ, АСОЦІЙОВАНІ З ЦІЛИМИ ВЕКТОРАМИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

01.01.01 – математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ М.І. Дмитришин

Науковий консультант:
Лопушанський Олег Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор

ІВАНО-ФРАНКІВСЬК – 2019

АНОТАЦІЯ

Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з цілими векторами експоненціального типу. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. — ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника". — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2019.

Дисертаційна робота присвячена розробці теорії апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів, у контексті спектральних апроксимацій та характеризації різних класів функцій в термінах їх найкращих наближень цілими функціями експоненціального типу.

У першому розділі розглянуто суть операторного підходу до проблем теорії наближень функцій. Розглянуто основні елементи теорії апроксимаційних просторів та напрямки їх сучасних узагальнень. Представлено деякі необхідні відомості з теорії інтерполяції просторів та теорії класичних просторів Бєсова, а також розглянуто зв'язок теорії апроксимаційних просторів з теорією інтерполяції просторів.

У другому розділі визначено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора у банаховому просторі. Встановлено основні властивості таких просторів.

Для операторів з точковим спектром встановлено зв'язок між їх кореневими векторами та цілими векторами експоненціального типу. Показано, що простори цілих векторів експоненціального типу оператора з точковим спектром співпадають з лінійною оболонкою образів проекторів Ріса. У випадку оператора з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності, простір

всіх цілих векторів експоненціального типу співпадає з лінійною оболонкою його кореневих векторів.

У підрозділі 2.2 введено нові класи апроксимаційних просторів типу Бєсова, асоційованих з необмеженими операторами у банаховому просторі $\mathfrak{X}$. Показано, що такі простори є інтерполяційними просторами між просторами цілих векторів експоненціального типу і простором $\mathfrak{X}$.

Досліджено проблему наближення елементів банахового простору $\mathfrak{X}$ елементами A-інваріантних підпросторів цілих векторів експоненціального типу. Отримані результати представлено у вигляді нерівностей типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів. При цьому отримано явну залежність констант від параметрів простору типу Бесова. Доведено теорему, що характеризує спектральні апроксимації для оператора з точковим спектром в термінах квазінорм визначених апроксимаційних просторів типу Бєсова.

Визначено шкалу апроксимаційних просторів на областях визначення цілих степенів замкнених операторів і досліджено проблему наближення заданого елемента банахового простору, що є областю визначення цілих степенів оператора, елементами інваріантних підпросторів цілих векторів експоненціального типу. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм визначених апроксимаційних просторів.

На прикладі оператора диференціювання в просторі $L_q(\mathbb{R})$ показано застосування отриманих абстрактних результатів в теорії апроксимації функцій. Показано, що апроксимаційний простір, асоційований з оператором диференціювання, при певних значеннях індексів співпадає з класичним простором Бєсова. Як наслідок, отримано нерівності типу Бернштейна і Джексона про оцінки найкращих наближень цілими функціями експоненціального типу з точними значеннями констант, що визначаються параметрами класичного простору Бесова.

У третьому розділі розвинуто теорію інтерполяції просторів цілих

векторів експоненціального типу необмежених операторів, асоційованих з необмеженими операторами у банахових просторах, у контексті її застосувань в теорії наближень функцій, зокрема, спектральних апроксимацій у функціональних просторах.

Визначено і встановлено основні властивості інтерполяційних просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, породжених дійсними методами інтерполяції.

У підрозділі 3.2 визначено і встановлено основні властивості інтерполяційних просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, породжених комплексним методом інтерполяції. Доведено інтерполяційну теорему для просторів векторів експоненціального типу необмежених операторів на областях визначення їх цілих степенів, породжених комплексним методом інтерполяції.

У підрозділі 3.3 введено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу на областях визначення комплексних степенів позитивних операторів. Встановлено ізоморфізми для дійсної та комплексної інтерполяційних шкал введених просторів.

У підрозділі 3.4 описано апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами у банахових просторах. Встановлено інтерполяційні властивості таких просторів.

Досліджено проблему наближення заданого елемента простору $\mathcal{C}^\alpha$, що є областю визначення комплексних степенів $(\alpha \in \mathbb{C})$ оператора A, елементами інваріантних підпросторів цілих векторів експоненціального типу. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм відповідних апроксимаційних просторів. Доведено теорему, що характеризує спектральні апроксимації для позитивного оператора з точковим спектром в термінах квазінорм апроксимаційних просторів.

У підрозділі 4.1 описано простори цілих векторів експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених

областях і компактних многовидах класу C^∞. Доведено, що у випадку непорожньої резольвентної множини регулярно еліптичного оператора простір цілих векторів експоненціального типу співпадає з підпростором цілих функцій експоненціального типу, звуження яких на Ω належить простору $L_p(\Omega)$.

Встановлено нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. При цьому використано відомі ознаки повноти кореневих векторів компактних операторів в гільбертовому просторі та ознаки щільності множини цілих векторів експоненціального типу оператора в банахових просторах.

Описано простори цілих функцій експоненціального типу вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), звичайних вироджених еліптичних диференціальних операторів в обмеженому інтервалі та вироджених еліптичних диференціальних операторів з частинними похідними в обмежених областях з нескінченно гладкою границею. Доведено інтерполяційні теореми для таких просторів.

У підрозділі 4.4 описано апроксимаційні простори, асоційовані з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях Ω і на компактних многовидах класу C^∞, виродженими еліптичниими диференціальними операторами, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), узагальненими диференціальними операторами Лежандра. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм таких апроксимаційних просторів з точними значеннями констант.

У п'ятому розділі розвинуто теорію тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з замкненими операторами.

Встановлено властивості проективних тензорних добутків просторів цілих векторів експоненціального типу для скінченних наборів замкне-

них операторів, що діють у банахових просторах. Побудовано спектральні розклади для операторів з точковим спектором.

Визначено інтерполяційні простори проективних тензорних добутків цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів над банаховими просторами та встановлено їх інтерполяційні властивості.

Доведено, що тензорний добуток апроксимаційних просторів типу Бєсова є проміжним інтерполяційним простором між тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів і тензорним добутком банахових просторів, на яких визначено відповідні оператори. Встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу.

Визначено тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бєсова на областях визначення комплексних степенів позитивних операторів. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів, що є областями визначення комплексних степенів позитивних операторів, до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу.

Визначено тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бєсова, асоційованих з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях класу C^∞ та на компактних многовидах, що мають форму границі обмеженої області класу C^∞, а також узагальненими диференціальними операторами Лежандра. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм визначених тензорних добутків апроксимаційних просторів.

Ключові слова: апроксимаційні простори, цілі вектори експоненціального типу, нерівності типу Бернштейна і Джексона, необмежені опе-

ратори, еліптичні оператори.

ABSTRACT

Dmytryshyn M.I. Approximation spaces associated with the entire exponential type vectors. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 – mathematical analysis. Public Higher Education Institution "Vasyl Stefanyk Precarpathian National University". — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2019.

The dissertation is devoted to the development of the theory of approximation spaces associated with entire exponential type vectors of unbounded operators in the context of spectral approximations and characterization of different classes of functions in terms of their best approximations by entire exponential type functions.

The first section discusses the essence of the operator approach to the problems of the approximation theory of functions. The basic elements of the theory of approximation spaces and directions of their modern generalizations are considered. Some necessary information on the interpolation theory of spaces and the theory of classical Besov spaces are presented, as well as the connection of the theory of approximation spaces with the interpolation theory of spaces.

The first section discusses the essence of the operator approach to the problems of approximation theory, in which the problem of the best approximation of a given element of space by analytic, entire and entire exponential type of vectors associated with unbounded operators operating in these spaces is solved. The concept of approximation space is defined and some of its elementary properties are formulated. The relation of the theory of approximation spaces with the theory of interpolation of spaces is analyzed and the basic elementary properties of interpolation spaces generated by real

methods of interpolation are presented.

In second section we define the new classes of spaces of entire vectors exponential type of closed operator in a Banach space. The basic properties of such spaces are established.

For point spectrum operators, a relationship is established between them root vectors and entire exponential type vectors. It is proved that the spaces of entire exponential type vectors of the operator with the point spectrum coincides with the linear span of the images Riesz projectors. In the case of an operator with a point spectrum, that consists of isolated eigenvalues with finite algebraic multiplicities, the space of all entire exponential type vectors coincides with the linear span of its root vectors.

Section 2.2 introduces new classes of Besov-type approximation spaces associated with unbounded operators in the Banach space $\mathfrak{X}$. We prove that such spaces are interpolation spaces between spaces of exponential vector vectors and $\mathfrak{X}$.

The problem of approximation of a given element of a Banach space $\mathfrak{X}$ by elements of invariant subspaces of entire exponential type vectors is investigated. The results obtained are presented in the form of Bernstein and Jackson type inequalities in terms of quasi-norms of approximation spaces. The explicit dependence of the constants on the parameters of the Besov type space is obtained. The theorem characterizing spectral approximations for an operator with a point spectrum in terms of quasi-norms of defined approximation spaces of Besov type is proved.

The scale of approximation spaces in the domains of definition of integer degrees of closed operators is determined, and the problem of approximation of a given element of Banach space, which is the domain of integer degrees of operator, by elements of invariant subspaces of entire exponential type vectors, is determined. Bernstein and Jackson type inequalities are proved in terms of quasi-norms of defined approximation spaces.

For the differentiation operator in the space $L_q(\mathbb{R})$, we show the application of abstract results in the approximation theory of functions. We prove that the approximation space associated with the differentiation operator coincides with the classical Besov space at certain index values. As a consequence, classical inequalities of Bernstein and Jackson with exact values of constants are obtained.

In the third section the interpolation theory of spaces of entire exponential type vectors associated with unbounded operators in Banach spaces is developed in the context of its applications in the approximation theory of functions, in particular, spectral approximations in the function spaces.

The basic properties of interpolation spaces of entire exponential type vectors of closed operator generated by real interpolation methods are defined and established.

Section 3.2 defines and sets the basic properties interpolation spaces of entire exponential type vectors of closed operator generated by the complex method of interpolation. An interpolation theorem for the spaces of exponential type vectors of unbounded operators is proved on domains of their integer degrees generated by the complex method interpolation.

Section 3.3 introduces new classes of spaces of entire exponential type vectors on domains of complex degrees of positive operators. Isomorphisms for the real and complex interpolation scales of introduced spaces are established.

Section 3.4 defines the approximation spaces associated with positive operators in Banach spaces. The interpolation properties of such spaces are established.

The problem of approximation of a given element of space $\mathcal{C}^\alpha$ is investigated, which is the domain of complex degrees $(\alpha \in \mathbb{C})$ of A, by elements of invariant subspaces of entire exponential type vectors. Bernstein and Jackson type inequalities have been proved in terms of quasi-norms of corresponding

approximation spaces. We prove the theorem which characterizes the spectral approximations for the positive operator with point spectrum in terms of quasi-norms of approximation spaces.

Section 4.1 describes the spaces of exponential type vectors of regular elliptic differential operators in bounded domains Ω and on compact C^∞-manifolds. It is proved that in the case of a non-empty resolvent set of a regularly elliptic operator, the space of entire exponential type vectors coincides with the subspace of entire exponential type functions of whose restriction on Ω belongs to the space $L_p(\Omega)$.

New conditions of completeness of the set of root vectors have been established of a regular elliptic operator in the spaces $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. The known conditions of completeness were used the root vectors of compact operators in Hilbert space and the conditions of the density of the set of entire exponential type vectors of operator in Banach spaces.

We describe the spaces of entire exponential type vectors of degenerate elliptic differential operators such that characterized by a strong degeneration of coefficients near the boundary (and at infinity), the ordinary degenerate elliptic differential operators on finite-interval and degenerate elliptic partial differential derivatives in bounded regions with infinitely smooth boundary. Interpolation theorems for such spaces are proved.

Section 4.4 describes the approximation spaces associated with the regular elliptic differential operators in bounded domains Ω and on compact C^∞-manifolds, the degenerate elliptic differential operators, characterized by a strong degeneration of coefficients near the boundary (and at infinity), and the generalized differential Legendre operators. Bernstein and Jackson type inequalities in terms of quasi-norms of such approximation spaces with exact values of constants are proved.

In the fifth section, the theory of tensor products is developed approximation spaces associated with closed operators.

The properties of projective tensor products of spaces of entire exponential type vectors for finite sets of closed operators in Banach spaces are established. Spectral decompositions for the operators with the point spectrum are constructed.

The interpolation spaces of projective tensor products of entire exponential type vectors of closed operators in the Banach spaces are determined and their interpolation properties are established .

It is proved that the tensor product of Besov approximation spaces is an intermediate interpolation space between the tensor product of entire exponential type vectors of closed operators and the tensor product of Banach spaces on which the corresponding operators are defined. Bernstein and Jackson type inequalities, which estimate the distance from a given element of a tensor product of Banach spaces to the subspace defined by the tensor product of spaces of entire exponential type vectors are established.

The tensor products of Besov approximation spaces in the domains of complex degrees of positive operators are determined. Bernstein and Jackson type inequalities, which estimate the distance from a given element of a tensor product of Banach spaces that are domains of complex degrees of positive operators, to the subspace defined by the tensor product of spaces of entire exponential type vectors are established.

The tensor products of Besov approximation spaces associated with regular elliptic differential operators in bounded domains Ω and on compact C^∞-manifolds, and generalized Legendre differential operators are determined. Bernstein and Jackson type inequalities are proved in terms of quasinorms of certain tensor products of approximation spaces.

Key words: approximation spaces, entire exponential type vectors, Bernstein-Jackson-type inequalities, unbounded operators, elliptic operators.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу деяких класів еліптичних операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №3. – С. 17–20.

[2] Дмитришин М.І. Інтерполяція просторів ультрагладких векторів замкнених операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 4. – С. 31–34.

[3] Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу диференціальних операторів Трікомі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, №3. – С. 7–10.

[4] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum // In: Banakh T. (Ed.) General Topology in Banach Spaces. Nova Sci. Publ., Huntington, New York. – 2001. – P. 137–145.

[5] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Interpolation of exponential type vectors, the complex method // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, №1. – С. 71–75.

[6] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори між банаховим простором і векторами експоненціального типу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, №3. – С. 54–60.

[7] Dmytryshyn M., Lopushansky O. Interpolated subspaces of exponential vectors of the unbounded operators in Banach spaces // Demonstratio Mathematica. – 2004. – V. 37, №1. – P. 149–158.

[8] Дмитришин М.І. Інтерполяція спектральних підпросторів диференціальних операторів Трікомі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, №2. – С. 16–21.

[9] Дмитришин М.І. Інтерполяційні шкали спектральних підпросторів одного класу вироджених еліптичних операторів // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Випуск 239. Математика. – Чернівці: Рута. – 2005. – С. 37–42.

[10] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Інтерполяція векторів експоненціального типу дробових степенів позитивних операторів // Вісник Львівського національного університету ім. І.Франка: Серія механіко-математична. Випуск 64. – 2005. – С. 99–106.

[11] Дмитришин М.І. Ознаки повноти множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 43–47.

[12] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Абстрактні простори Бєсова, асоційовані з замкненими операторами в банахових просторах // Доповіді НАН України. – 2007. – № 12. – С. 16–22.

[13] Дмитришин М.І. Наближення векторами експоненціального типу диференціальних операторів Лежандра // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Випуск 454. Математика. – Чернівці: Рута. – 2009. – С. 28–33.

[14] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т. 1, № 1. – С. 8–14.

[15] Дмитришин М.І. Апроксимації векторами експоненціального типу регулярних еліптичних операторів // Прикладні проблеми механіки і математики : Наук. збірник. Випуск 8. – 2010. – С. 71–77.

[16] Дмитришин М.І. Простори векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів // Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 21–30.

[17] Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу замкнених операторів на тензорних добутках // Математичний вісник НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 60–68.

[18] Дмитришин М.І. Інтерполяція тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 89–96.

[19] Дмитришин М.І. Тензорні добутки абстрактних просторів Бєсова // Карпатські математичні публікації. – 2012. – Т. 4, №2. – С. 241–246.

[20] Дмитришин М.І. Тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих із регулярними еліптичними операторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, №4. – С. 75–82. (Те саме: Dmytryshyn M.I. Tensor products of approximation spaces associated with regular elliptic operators // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V. 208, № 3. – P. 355-365.)

[21] Dmytryshyn M. Interpolated tensor products of exponential type vectors of unbounded operators // Journal of Mathematics and System Science. – 2014. – V. 4, №2. – P. 99–104.

[22] Dmytryshyn M., Lopushansky O. Bernstein-Jackson-type inequalities and Besov spaces associated with unbounded operators // Journal of Inequalities and Applications. – 2014. – V. 2014. – Article ID 105, 12 pages.

[23] Dmytryshyn M. Tensor products of exponential type vectors of unbounded operators // Int. Journal of Math. Analysis. – 2014. – V. 8, №11. – P. 529–538.

[24] Dmytryshyn M. Approximation spaces associated with Legendre differential operators // Int. Journal of Math. Analysis. – 2014. – V. 8, №22. – P. 1075–1082.

[25] Dmytryshyn M.I. Interpolated scales of approximation spaces for regular elliptic operators on compact manifolds // Carpathian Math. Publ. – 2014. – V. 6, №1. – P. 26–31.

[26] Дмитришин М.І. Інтерполяційні шкали апроксимаційних просторів, асоційованих з позитивними операторами // Прикладні проблеми механіки і математики : Наук. збірник. Випуск 12. – 2014. – С. 7–15.

[27] Dmytryshyn M. Besov-Lorentz-type spaces and best approximations by exponential type vectors // Int. Journal of Math. Analysis. – 2015. – V. 9, № 16. – P. 779–786.

[28] Dmytryshyn M. Approximation by exponential type vectors of positive operators // Int. Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – V. 112, №4. – P. 795–804.

[29] Dmytryshyn M., Lopushansky O. Spectral approximations of strongly degenerate elliptic differential operators // Carpathian Math. Publ. – 2019. – V. 11, №1. – P. 48–53.

[30] Dmytryshyn M., Lopushansky O. On Spectral Approximations of Unbounded Operators // Complex Anal. Oper. Theory. – 2019. – V. 13, №8. – P. 3659—3673.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Dmytryshyn M.I. An interpolation of the spaces of exponential type vectors // Междунар. конф. “VIII Белорусская математическая конференция” Ч. 1 (Минск, Беларусь, 19-24 июня 2000 г.): тезисы докладов. – В 2 ч.: ч. 1. – Минск, 2000. – С. 58.

[2] Дмитришин М.І. Інтерполяція просторів, породжених векторами експоненціального типу // Український математичний конгрес –

2001. Міжнародна конференція з функціонального аналізу (Київ, 22-26 серпня 2001 р.): тези доп. – Київ : Інститут математики НАН України, 2001. – С. 22.

[3] Dmytryshyn M.I. Approximation by exponential type vectors // International conference on Functional Analysis and its Applications dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach : Book of Abstracts (Lviv, 28-31 May 2002). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2002. – P. 61–62.

[4] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Interpolation of exponential type vectors of positive operators // III Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9-12 вересня 2003 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2003. – С. 121.

[5] Дмитришин М.І. Аналітичність кореневих функцій диференціальних операторів Лежандра // Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-26 травня 2004 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2004. – С. 69–70.

[6] Дмитришин М.І. Інтерполяція векторів експоненціального типу операторів Лежандра // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 27 вересня-1 жовтня 2004 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2004. – С. 72.

[7] Дмитришин М.І. Інтерполяційні простори експоненціальних векторів дробових степенів позитивних операторів // Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-27 травня 2005 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2005. – С. 196–197.

[8] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Lorentz type invariant subspaces // XI Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ,

18-20 травня 2006 р.): матеріали конф. – Київ : ТОВ “Задруга”, 2006. – С. 500.

[9] Дмитришин М.І. Повнота множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів у просторах L_ρ // Міжнародна конференція “Диференціальні рівняння та їх застосування” (Чернівці, 11-14 жовтня 2006 р.): тези доп. – Чернівці : Рута, 2006. – С. 39.

[10] Дмитришин М.І. Найкращі наближення векторами експоненціального типу // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24-28 вересня 2007 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2007. – С. 91.

[11] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з диференціальним оператором Лежандра // XII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2008 р.): матеріали конф. – Київ : ТОВ “Задруга”, 2008. – С. 603.

[12] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Abstract Besov spaces, associated with unbounded linear operator in Banach space // Міжнародна конференція “Аналіз і топологія” (Львів, 27 травня-7 червня 2008 р.): тези доп. – Льів : Львівський національний університет ім. І. Франка, 2008. – С. 37.

[13] Дмитришин М.І. Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // IV Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 10-12 вересня 2008 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2008. – С. 31.

[14] Dmytryshyn M.I. Exponential Type Vectors of Complex Degrees of Positive Operators // Міжнародна конференція “Нескінченновимірний аналіз і топологія” (Івано-Франківськ, 27 травня-1 червня 2009 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2009. – С. 30–31.

[15] Дмитришин М.І. Інтерполяція абстрактних просторів Бєсова // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя

М.І. Нагнибіди (Чернівці, 8-13 червня 2009 р.): тези доп. – Чернівці : Книги–XXI, 2009. – С. 41–42.

[16] Dmytryshyn M.I. Approximations by Exponential Type Vectors of Regular Elliptic Operators // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90th anniversary of V.E. Lyantse : Abstracts of Reports (Lviv, 17-21 November 2010). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2010. – P. 36–37.

[17] Дмитришин М.І. Інтерполяція тензорних добутків просторів векторів експоненціального типу // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19-23 вересня 2011 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2011. – С. 64.

[18] Дмитришин М.І. Тензорні добутки просторів векторів експоненціального типу замкнених операторів // XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. – Київ : НТУУ "КПІ", 2012. – С. 92.

[19] Dmytryshyn M.I. Exponential type vectors of closed operators on tensor products // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach : Abstracts of Reports (Lviv, 17-21 September 2012). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2012. – P. 40.

[20] Дмитришин М.І. Тензорні добутки інтерполяційних просторів типу Бєсова // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 48.

[21] Дмитришин М.І. Інтерполяційні властивості тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з регулярними еліптичними операторами // V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013 р.): тези

доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 24.

[22] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами // XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ : НТУУ "КПІ", 2014. – С. 82.

[23] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з деякими класами еліптичних операторів // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня-5 липня 2014 р.): тези доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2014. – С. 52–53.

[24] Дмитришин М.І. Простори типу Лоренца, асоційовані з позитивними операторами // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1-4 липня 2015 р.): тези доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2015. – С. 38.

[25] Dmytryshyn M.I. Interpolated scales of Lorentz-type spaces of exponential type vectors // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2015. – С. 31.

[26] Дмитришин М.І. Спектральні апроксимації для операторів з мероморфною резольвентою // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. – Київ : НТУУ "КПІ", 2016. – С. 95–97.

[27] Дмитришин М.І. Узагальнені спектральні апроксимації для регулярних еліптичних операторів // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного ана-

лізу” (Ворохта, 22 лютого-25 лютого 2017 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2017. – С. 77–78.

[28] Дмитришин М.І. Аналітичні оцінки спектральних апроксимацій для узагальнених диференціальних операторів Лежандра // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях” (Чернівці, 17-19 вересня 2018 р.): матеріали доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2018. – С. 176.

ЗМІСТ

ВСТУП 24

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ НАПРЯМКІВ ДОСЛІДЖЕНЬ 33

1.1. Проблема апроксимації: операторний підхід 33

1.2. Апроксимаційні простори 51

1.3. Апроксимація та інтерполяція 65

Висновки до розділу 1 86

РОЗДІЛ 2. АПРОКСИМАЦІЇ ЦІЛИМИ ВЕКТОРАМИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ 87

2.1. Простори цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів 87

2.2. Апроксимаційні простори типу Бєсова 99

2.3. Нерівності типу Бернштейна і Джексона та спектральні апроксимації 116

2.4. Апроксимаційні простори Бєсова, асоційовані з цілими функціями експоненціального типу 126

Висновки до розділу 2 130

РОЗДІЛ 3. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПРОСТОРІВ ЦІЛИХ ВЕКТОРІВ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ 132

3.1. Інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу, дійсний метод 132

3.2. Інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу, комплексний метод 148

3.3. Інтерполяція цілих векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів 158

3.4. Апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами 176
Висновки до розділу 3 185

РОЗДІЛ 4. ПРОСТОРИ ЦІЛИХ ВЕКТОРІВ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ 188
4.1. Цілі вектори експоненціального типу регулярних еліптичних операторів 188
4.2. Ознаки повноти множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів 204
4.3. Цілі вектори експоненціального типу вироджених еліптичних операторів 208
4.4. Інтерполяція цілих векторів експоненціального типу еліптичних операторів 222
4.5. Апроксимаційні простори, асоційовані з еліптичними операторами 229
Висновки до розділу 4 247

РОЗДІЛ 5. ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ АПРОКСИМАЦІЙНИХ ПРОСТОРІВ 250
5.1. Цілі вектори експоненціального типу на тензорних добутках банахових просторів 250
5.2. Інтерполяція тензорних добутків цілих векторів експоненціального типу 260
5.3. Тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бєсова . 270
5.4. Тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з позитивними операторами 286
5.5. Тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з еліптичними операторами 291
Висновки до розділу 5 298

ВИСНОВКИ 300

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 304

ДОДАТКИ 325

ВСТУП

Актуальність теми. Однією з основних проблем теорії апроксимації функцій є характеризація різних класів функцій в термінах їх найкращих наближень алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу. Отримані в цьому напрямку результати формулюються у вигляді так званих прямих і обернених теорем (нерівностей Джексона і Бернштейна) теорії апроксимації функцій.

В абстрактному випадку маємо відповідну проблему наближення елементів простору аналітичними, цілими та цілими експоненціального типу векторами, асоційованими з необмеженими операторами. На основі таких класів векторів можна розвинути операторний підхід до отримання нерівностей типу Джексона і Бернштейна, які дають оцінки найкращих наближень різними класами гладких векторів, асоційованих з даним оператором. Використовуючи поняття апроксимаційного простору, можна описати певні аналогії між просторами послідовностей, функцій і операторів, що дозволяє, зокрема, отримати фундаментальні теореми представлення, трасформації, вкладення, композиції, а також отримати низку результатів про розподіл коефіцієнтів Фур'є і власних значень операторів.

Дослідженню проблем теорії апроксимації функцій, пов'язаних, зокрема, з використанням різних класів аналітичних векторів, асоційованих з необмеженими операторами, присвячено праці таких відомих вітчизняних та зарубіжних вчених як: Н. І. Ахієзер, Ю. М. Березанський, С. Н. Бернштейн, О. В. Бєсов, М. Л. Горбачук, Р. Гудман, Д. Джексон, С. Джіуліні, М. Г. Крейн, С. Г. Крейн, О. В. Лопушанський, Ю. І. Любіч, В. І. Мацаєв, Е. Нельсон, С. М. Нікольський, Г. В. Радзієвський, Я. В. Радино, В. В. Савчук, О. Б. Скасків, С. Л. Соболєв, С. Б. Стєчкін, А. Ф. Тіман, П. Л. Ульянов та ін.

Незважаючи на значні досягнення у напрямку розвитку теорії апроксимації функцій, ця тематика й надалі залишається однією з найважливіших. При цьому можна відзначити безумовний науковий інтерес до розвитку теорії спектральних апроксимацій, пов'язаних з необмеженими операторами в абстрактному випадку і операторами диференціювання в теорії функцій.

Апроксимаційні простори досі не розглядалися в контексті їх взаємозв'язку з інтерполяційними шкалами інваріантних підпросторів цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів, що дозволяє, зокрема, характеризувати спектральні апроксимації у банахових просторах, оскільки для операторів з точковим спектром підпростір цілих векторів експоненціального типу замкненого необмеженого оператора співпадає з лінійною оболонкою його спектральних підпросторів. Вищезазначене обумовило актуальність теми дисертаційної роботи, її мету та задачі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках науково-дослідних держбюджетних тем "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер державної реєстрації 0113U000184) і "Проблеми нелінійного аналізу щодо продовження відображень, які належать до різних функціональних класів на топологічних і топологічних векторних просторах" (номер державної реєстрації 0118U000097) кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника".

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка теорії апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів, у контексті спектральних апроксимацій та характеризації різних класів функцій в тер-

мінах їх найкращих наближень цілими функціями експоненціального типу.

Для досягнення цієї мети у дисертації поставлені та вирішені такі задачі:

– ввести і описати нові класи апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів;

– встановити нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів, що характеризують наближення цілими векторами експоненціального типу та спектральні апроксимації у випадку операторів з точковим спектром;

– визначити нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого необмеженого оператора у банаховому просторі та описати їх основні властивості;

– розвинути теорію інтерполяції просторів цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів;

– описати апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами у банахових просторах, та встановити їх інтерполяційні властивості;

– описати апроксимаційні простори, асоційовані з еліптичними операторами у просторах функцій, та встановити нерівності типу Бернштейна і Джексона, що характеризують наближення цілими функціями експоненціального типу;

– розвинути теорію тензорних добутків просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів у банахових просторах;

– розвинути теорію тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами, та встановити нерівності типу Бернштейна і Джексона на тензорних добутках апроксимаційних просторів.

Об'єктом дослідження є апроксимаційні простори та цілі вектори експоненціального типу, асоційовані з необмеженими операторами, що діють у нормованих просторах.

Предметом дослідження є структура і властивості апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами, їх зв'язок із інтерполяційними просторами і спектральними апроксимаціями.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використано методи теорії функцій, функціонального аналізу, теорію інтерполяції просторів, спектральну теорію операторів, теорію топологічних тензорних добутків, теорію регулярних і вироджених еліптичних диференціальних операторів.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі сформульовано новий напрям наукових досліджень апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів. У ході дослідження вперше отримано такі наукові результати:

– введено і описано нові класи апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів в нормованих просторах та цілими функціями експоненціального типу для операторів диференціювання у функціональних просторах;

– доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів з точними значеннями констант, які дають аналітичні оцінки найкращих наближень цілими векторами експоненціального типу необмеженого оператора, зокрема, спектральних апроксимацій у випадку оператора з точковим спектром, а у випадку оператора диференціювання — відповідні оцінки наближення функцій алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу;

– визначено і описано нові класи просторів цілих векторів експонен-

ціального типу замкненого необмеженого оператора у банаховому просторі;

– описано інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів, породжені дійсними і комплексним методами інтерполяції, зокрема, позитивних операторів, а також цілих функцій експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях і на компактних многовидах, вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), узагальнених диференціальних операторів Лежандра;

– описано апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами у банахових просторах, та встановлено їх інтерполяційні властивості;

– описано апроксимаційні простори, асоційовані з регулярно еліптичними диференціальними операторами, виродженими еліптичними диференціальними операторами і узагальненими диференціальними операторами Лежандра, та встановлено відповідні нерівності типу Бернштейна і Джексона, що характеризують наближення цілими функціями експоненціального типу та кореневими функціями в просторах Лебега;

– визначено тензорні добутки просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів у банахових просторах, доведено інтерполяційні теореми для цих просторів;

– визначено тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами, зокрема, позитивними операторами, регулярно еліптичними диференціальними операторами і узагальненими диференціальними операторами Лежандра, та встановлено їх інтерполяційні властивості;

– доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона на тензорних добутках апроксимаційних просторів типу Бєсова з явним виглядом за-

лежності констант від параметрів таких просторів.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач спектральної теорії диференціальних операторів, а також як методи аналізу сигналів і розпізнавання образів.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є самостійною завершеною науковою працею, що містить новий напрям наукових досліджень апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненціального типу необмежених операторів, та цілими функціями експоненціального типу для операторів диференціювання, в межах якого описано структуру і властивості цих просторів та отримано оцінки найкращих спектральних апроксимацій в абстрактних просторах та просторах функцій. Наукові положення і висновки, які виносяться на захист, здобуто автором особисто та викладено в його наукових публікаціях. У працях, які написано в співавторстві, О.В. Лопушанському належить постановка задач, аналіз отриманих результатів та участь у підготовці робіт до друку.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

– VIII Білоруській математичній конференції (Мінськ, Білорусь, 19-24 червня 2000 р.);

– Міжнародній конференції з функціонального аналізу (Київ, 22-26 серпня 2001 р.);

– Міжнародній конференції з функціонального аналізу і його застосувань, присвяченій 110-річчю з дня народження Стефана Банаха (Львів, 28-31 травня 2001 р.);

– III Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми ана-

лізу" (Івано-Франківськ, 9-12 вересня 2003 р.);

– Конференції молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-26 травня 2004 р.);

– Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 27 вересня-1 жовтня 2004 р.);

– Конференції молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-27 травня 2005 р.);

– XI Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 18-20 травня 2006 р.);

– Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 11-14 жовтня 2006 р.);

– Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 24-28 вересня 2007 р.);

– XII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2008 р.);

– Міжнародній конференції з аналізу і топології (Львів, 27 травня-7 червня 2008 р.);

– IV Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 10-12 вересня 2008 р.);

– Міжнародній науковій конференції "Нескінченновимірний аналіз і топологія" (Івано-Франківськ, 27 травня-1 червня 2009 р.);

– Міжнародній конференції до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (Чернівці, 8-13 червня 2009 р.);

– Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 90-річчю з дня народження В.Е. Лянце (Львів, 17-21 листопада 2010 р.);

– Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 19-23 вересня 2011 р.);

– XIV Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012 р.);

– Міжнародній науковій конференції, присвяченій 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (Львів, 17-21 вересня 2012 р.);

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013 р.);

– V Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013 р.);

– XV Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014 р.);

– IV Міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня-5 липня 2014 р.);

– Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1-4 липня 2015 р.);

– Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 р.);

– XVII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 р.);

– Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22 лютого-25 лютого 2017 р.);

– Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 17-19 вересня 2018 р.);

– київському семінарі з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (Київ, 1 квітня 2015 р., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. $\boxed{\text{М. Л. Горбачук}}$, д.ф.-м.н., проф. Ю. С. Самойленко у 2015 р., тепер: д.ф.-м.н., ст.н.сп. А. Н. Кочубей, д.ф.-м.н., проф. Ю. С. Самойленко);

– науковому семінарі кафедри математичного і функціонального

аналізу ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” (Івано-Франківськ, 4 вересня 2019 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. В. Загороднюк);

– науковому семінарі кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Ю. Федьковича (Чернівці, 24 вересня 2019 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. В. К. Маслюченко);

– науковому семінарі з теорії аналітичних функцій в Львівському національному університеті імені Івана Франка (Львів, 14 листопада 2019 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. О. Б. Скасків).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у 58 друкованих наукових працях, з яких: 29 статей у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях [20–37, 128–138], з них 12 — у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science Core Collection [30, 32, 35, 36, 129, 131–135, 137, 138], 28 публікацій — за матеріалами конференцій [38–56, 139–147], 1 — частина колективної монографії [127].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Повний обсяг роботи становить 335 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел складається з 206 найменувань і займає 21 сторінку. Додатки займають 11 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Автор висловлює щиру подяку своєму Вчителю Олегу Васильовичу ЛОПУШАНСЬКОМУ.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ НАПРЯМКІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1. Проблема апроксимації: операторний підхід

Однією з основних задач в теорії наближень є задача про найкраще наближення заданої функції більш простими функціями (поліномами, сплайнами, раціональними функціями тощо), тобто встановлення зв'язку між степенем гладкості функції і швидкістю прямування до нуля її найкращого наближення простими функціями. Отримані в цьому напрямку результати формулюються у вигляді прямих і обернених теорем (нерівностей Джексона і Бернштейна) теорії апроксимації функцій.

Так, аналоги нерівностей Бернштейна і Джексона у випадку апроксимацій в просторах $L_p(G)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ для груп Лі G отримано у працях С. Джіуліні [152, 153]. Якщо $\mathcal{J} = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$ — спектральний розклад сублапласіана групи G, то покладемо

$$\mathcal{M}_p(h) = \{u \in L_p : \ E(\lambda)u = u, \quad \text{якщо} \ \ \lambda \geq h^2, h \in [0, +\infty)\}.$$

Цей клас функцій в G є аналогом цілих функцій експоненціального типу в $\mathbb{R}^n$. Нехай $\mathfrak{g}$ — дійсна скінченновимірна алгебра Лі, така, що $\mathfrak{g} = \sum_{k=1}^m \mathfrak{V}_k$ як векторний простір, де $\mathfrak{V}_1$ породжує як алгебру, $\{\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_k\} = \mathfrak{V}_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ і $\{\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_m\} = 0$. Визначимо сімейство розширень

$$\delta_r \left(\sum_{k=1}^m X_k \right) = \sum_{k=1}^m r^k X_k, \quad X_k \in \mathfrak{V}_k, \ r > 0.$$

Експоненціальне відображення є диффеоморфізм $\mathfrak{g}$ на G і можна визначити на G однорідну норму $|\cdot|$, таку, що $|\delta_r x| = r|x|$. Число $Q =$

$\sum_{k=1}^{m} k \dim \mathfrak{V}_k$ називається однорідною розмірністю G. Покладемо

$$u_{(r)} = r^{-Q} u \circ \delta_{1/r}, \ r > 0.$$

Фіксуємо базис $X_1, \ldots, X_s$ в $\mathfrak{g}$ і припустимо, що $X_1, \ldots, X_n$ — базис в $\mathfrak{V}_1$. Диференціальні оператори першого порядку

$$X_k u(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u(x \exp(tX_k)),$$

відповідні елементу $X_k \in \mathfrak{V}_j$ $(k = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, m)$ є однорідними степеня j відносно розширень δ_r:

$$X_k u_{(r)} = r^{-j} (X_k u)_{(r)},$$

Нехай $\mathfrak{D}_s$ — множина всіх диференціальних мономів $X_{j_1}^{1_1}, \ldots, X_{j_k}^{1_k}$, де $i_1, \ldots, i_k$ — невід'ємні цілі числа, такі, що $i_1 + \ldots + i_k = s$ і $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$. Множина $\mathfrak{D}_s$ містить векторний простір ліво інваріантних диференціальних операторів, однорідних степеня s.

Якщо u — локально інтегровна функція, то визначимо

$$\omega_k(h, L_p(G), u) = \sup_{|x| \le t} \|\Delta_x^k u\|_{L_p(G)}, \ h \in \mathbb{R}_+, \ k \in \mathbb{N}, \ 1 \le p \le \infty,$$

$$\Delta_x^k u(y) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} u(y \delta_i x), \quad x, y \in G,$$

Відзначимо, що модулі неперервності в групі Гейзенберга досліджено у працях [152, 161, 200].

Позначимо через $L_p^s(G)$ простір всіх функцій u, таких, що u і похідні Du $(D \in \mathfrak{D}_k, k \le s)$ належать $L_p(G)$. Покладемо $\|u^{(s)}\|_{L_p(G)} = \sum_{D \in \mathfrak{D}_s} \|Du\|_{L_p(G)}$. Наступні твердження є аналогами класичних теорем Бернштейна і Джексона для визначеної вище групи Лі G [153, с. 572].

Нехай D — ліво інваріантний однорідний степеня s диференціальний оператор. Тоді існує постійна $C = C(D)$, така, що

$$\|Du\|_{L_p(G)} \le C h^s \|u\|_{L_p(G)}, \quad u \in \mathcal{M}_p(h).$$

Для кожної функції $u \in L_p(G)$ і $t, k \in \mathbb{N}$ існує функція $g_h \in \mathcal{M}_p(h)$, така, що

$$\|u - g_h\|_{L_p(G)} \leq C(k)\omega_k(1/h, L_p(G), u),$$

де постійна $C(k)$ залежить тільки від k [153, с. 573].

У випадку, коли $G = H_n$ — група Гейзенберга, розглядається нетривіальне представлення π_λ такої групи і припускається, що π_λ діє в просторі Бергмана $\mathcal{H}_\lambda$ [152, с. 242]. Якщо $\hat{u}(\lambda)$ — перетворення Фур'є функції $u \in L_p(G)$, то позначимо $\{\hat{u}(\lambda)\}_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n)$ матричне представлення $\hat{u}(\lambda)$ відносно канонічного ортонормального базису в $\mathcal{H}_\lambda$, і оцінки даються в термінах просторів

$$\mathcal{M}_p(h) = \{u \in L_p(H_n) : \{\hat{u}(\lambda)\}_{\alpha,\beta} = 0, \quad \text{якщо} \quad (2|\beta| + n)|\lambda| \geq h^2\}.$$

Наведені результати дозволили отримати характеризацію просторів Ліпшиця $\Lambda^r_{L_p}(H_n)$ через поведінку найкращих наближень функціями класів $\mathcal{M}_p(h)$ [152, с. 252]. Функція u належить простору $\Lambda^r_{L_p}(H_n)$, якщо $u \in L_p(H_n)$ та існує така постійна $M = M(u)$, що

$$\|\Delta^k_v u\|_{L_p(H_n)} \leq M\rho(v)^r, \quad \text{для всіх} \quad v \in H_n.$$

Теорема 1.1.1. [152, с. 252] *Функція u належить $\Lambda^r_{L_p}(H_n)$ тоді і тільки тоді, коли існує постійна $C > 0$ і сімейство функцій $g_h \in \mathcal{M}_p(h)$ $(h \geq 1)$, такі, що*

$$\|u - g_h\|_{L_p(H_n)} \leq C/h^r.$$

Крім того, якщо $0 \leq s < r$ і $D \in \mathfrak{D}_s$, то існують постійні C_1 і C_2, такі, що

$$\|Du\|_{L_p(H_n)} \leq C_1(\|u\|_{L_p(H_n)} + C),$$

$$h^{s-r}\omega_k(h, L_p(H_n), Du) \leq C_2(\|u\|_{L_p(H_n)} + C) \quad \textit{для всіх цілих} \quad k > r.$$

Б. Карлом [113,114] встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона, що пов'язують між собою числа Колмогорова, Гельфанда і ентропії.

Нехай $\mathfrak{L}(E,F)$ — банахів простір всіх обмежених лінійних операторів S, що діють з банахового простору E в банахів простір F, і U_E — одинична куля в E. Позначимо через $L_n(F)$ множину всіх лінійних підпросторів розмірності не більше n простору F. Поперечниками за Колмогоровим називаються числа

$$d_n(S) := \inf_{L_n \in L_n(F)} \sup_{x \in U_E} \inf_{y \in L_n} \|Sx - y\|, \ n \in \mathbb{N}.$$

Позначимо через $l_n(F)$ множину всіх (не обов'язково замкнених) лінійних підпросторів корозмірності не більше n простору F. Поперечниками за Гельфандом називаються числа

$$c_n(S) := \inf_{l_n \in l_n(F)} \sup_{x \in U_E, Sx \in l_n} \|Sx\|, \ n \in \mathbb{N}.$$

Нехай $R(T)$ позначає множину значень оператора $T \in \mathfrak{L}(E,F)$. Апроксимаційними називаються числа

$$a_n(S) := \inf_{T \in \mathfrak{L}(E,F),\, \dim R(T) \le n} \|S - T\|, \ n \in \mathbb{N}.$$

Поняття чисел ентропії введено Б. С. Мітягіним і А. Пельчинським [181]. Для $S \in \mathfrak{L}(E,F)$ числа ентропії $\epsilon_n(S)$ $(n \in \mathbb{N})$ визначаються як нижня грань всіх $\epsilon > 0$, таких, що існують $y_1, \ldots, y_n \in F$, для яких

$$S(U_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (y_i + \epsilon U_F).$$

Аналітично це можна записати так:

$$\epsilon_n(S) = \inf_{\{y_1,\ldots,y_n\} \subset F} \sup_{x \in U_E} \inf_{1 \le i \le n} \|Sx - y_i\|.$$

В теорії операторних ідеалів [189] в банахових просторах часто замість $\epsilon_n(S)$ використовують діадичні числа ентропії $e_n(S) := \epsilon_{2^{n-1}}(S)$.

Модулі ентропії $g_n(S)$ $(n \in \mathbb{N})$ оператора $S \in \mathfrak{L}(E,F)$ визначаються як

$$g_n(S) := \inf_{k\in\mathbb{N}} k^{1/n}\epsilon_k(S).$$

Доцільність наведеної характеризації обумовлюється співвідношеннями між власними значеннями і модулями ентропії для компактних операторів, що діють у банахових просторах [113, 115, 179]:

$$\left(\prod_1^n \lambda_i(S)\right)^{1/n} \le g_{2n}(S),\ n \in \mathbb{N},$$

$$\left(\prod_1^n \lambda_i(S)\right)^{1/n} \le \lim_{k\to\infty} g_{2n}^{1/k}(S^k),\ n \in \mathbb{N}.$$

Тут власні значення впорядковані по незростанню за абсолютною величиною з урахуванням їх алгебраїчної кратності. Відзначимо деякі алгебраїчні властивості модуля ентропії:

$\|S\| = g_1(S) \ge g_2(S) \ge \ldots \ge 0$, для $S \in \mathfrak{L}(E,E)$;

$g_n(TS) \le g_n(T)g_n(S)$ для $S \in \mathfrak{L}(E,F)$, $T \in \mathfrak{L}(F,G)$;

$g_n(S) = 0$, якщо $S \in \mathfrak{L}(E,F)$, $\dim R(S) < n$, E і F — дійсні банахові простори ($g_{2n-1}(S) = 0$, якщо E і F — комплексні банахові простори).

Банахів простір E є типу p $(1 \le p \le 2)$, якщо існує постійна $\tau > 0$, така, що для кожної скінченної послідовності $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ маємо

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \Big\| dt \le \tau \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p},$$

де (r_i) позначає послідовність функцій Радамахера на інтервалі $[0,1]$, $r_i(t) = \operatorname{sign}(\sin 2^i\pi t)$ [114, с. 82]. Тип Радамахера $\tau_p(E)$ є найменша постійна τ, яка задовольняє наведену вище умову.

Наступна теорема виражає нерівність типу Бернштейна між діадичними числами ентропії і поперечниками за Колмогоровим.

Теорема 1.1.2. [114, с. 98] *Нехай* $s \in \{c, d\}$ *і* $0 < \alpha < \infty$. *Тоді для всіх банахових просторів* E *і* F *та всіх* $S \in \mathfrak{L}(E, F)$ *виконується нерівність*

$$\sup_{1 \le k \le n} k^{\alpha} e_k(S) \le \rho(\alpha) \sup_{1 \le k \le n} k^{\alpha} s_k(S), \ n \in \mathbb{N}.$$

Нерівність типу Джексона виражається наступною теоремою.

Теорема 1.1.3. [114, с. 101] *Нехай* $s \in \{c, d\}$ *і* $S \in \mathfrak{L}(E, F)$. *Якщо* E *— банахів простір типу* p *і* F' *(спряжений простір до* F *) — банахів простір типу* q, *то в дійсному випадку виконується нерівність*

$$\left(\prod_{1}^{n} s_k(S) \right)^{1/n} \le \rho \tau_p(E) \tau_q(F') n^{-1+1/p+1/q} g_n(S), \ n \in \mathbb{N},$$

де $\rho \le 768 e^2 \sqrt{\pi} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^{1/q} \le 10^4$, *а в комплексному випадку виконується нерівність*

$$\left(\prod_{1}^{n} s_k(S) \right)^{1/n} \le \rho \tau_p(E) \tau_q(F') n^{-1+1/p+1/q} g_{2n}(S), \ n \in \mathbb{N},$$

де $\rho \le 3840 e^2 \sqrt{2\pi} \left(2 \frac{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^{1/q} \le 10^6$.

Нехай $L_p^*[0,1]$ $(1 \le p < \infty)$ і $L_\infty^*[0,1] := C^*[0,1]$ — простори p-сумовних і неперервних 1-періодичних функцій відповідно. Якщо $u \in L_p^*[0,1]$, то модулі неперервності визначені як

$$\omega^{(p)}(\delta, u) := \sup_{0<|h|<\delta} \left(\int_0^1 |u(x+h) - u(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Для $u \in L_p^*[0,1]$ покладемо

$$E_n(u) = \inf_{v \in \mathrm{T}_n} \|u - v\|_{L_p^*[0,1]}.$$

де T_n — множина тригонометричних поліномів, степінь яких не перевищує n.

Нерівність Бернштейна для функцій $u \in L_p^*[0,1]$ має вигляд [177]:

$$\omega^{(p)}\left(\frac{1}{n}, u\right) \leq \frac{\rho}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k(u), \ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.1.2 для $s \in \{c, d, a\}$ дає аналог цієї нерівності для операторів

$$g_n(S) \leq 2e_n(S) \leq \frac{\rho}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k(S), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нерівність Джексона для функцій $u \in L_p^*[0,1]$ має вигляд [177]:

$$E_n(u) \leq \omega^{(p)}\left(\frac{1}{n}, u\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Якщо S діє в гільбертових просторах, то теорема 1.1.3 для $s \in \{c, d, a\}$ дає аналог нерівності Джексона для операторів

$$s_n(S) \leq \rho g_n(S) \leq 2\rho e_n(S), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Слід зауважити, що встановлені вище аналоги є не тільки формальними. Якщо S_u — оператор згортки, породжений функцією u, то існує зв'язок між поперечниками за Колмогоровим, Гельфандом для S_u і числами Бернштейна $E_n(u)$ подібно як існує зв'язок між модулем ентропії для S_u і модулями неперервності для u.

Нехай $u \in L_p^*[0,1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Тоді оператор згортки визначається як

$$S_u(v) := \int_0^1 u(s-t)v(t)dt.$$

Оператор S_u можна розглядати як відображення з $L_{p'}^*[0,1]$ в $C^*[0,1]$, де $1/p + 1/p' = 1$ [206]. Якщо $s \in \{c, d, a\}$ і $u \in L_p^*[0,1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$, то для $S_u \in \mathfrak{L}(L_{p'}^*[0,1], C^*[0,1])$ виконуються нерівності [113]:

$$s_1(S_u) = \|S_u\| \leq \|u\|_{L_p^*[0,1]} = E_0(u),$$

$$s_{2n}(S_u) \leq E_n(u),$$

$$g_n(S_u) \leq 2e_n(S_u) \leq \rho\left(n^{-1/r}\|u\|_{L_p^*[0,1]} + \omega^{(p)}\left(\frac{1}{n}, u\right)\right)$$

для $0 < r < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

В. І. Горбачук і М. Л. Горбачуком [12] отримано низку результатів, що стосуються характеризації різних класів нескінченно диференційовних функцій в термінах їх найкращих наближень більш елементарними. Цей підхід виявився також плідним при оцінюванні похибки наближення методом Рітца розв'язків операторних рівнянь в гільбертовому просторі [12, 16]. Він полягає у тому, що з кожною конкретною задачею теорії наближень пов'язується деякий самоспряжений оператор, цілі вектори експоненціального типу якого є тими простими об'єктами, якими наближаються різні класи нескінченно диференційовних векторів цього оператора в метриці банахового простору, неперервно вкладеного у вихідний гільбертів простір або в його розширення. При цьому суттєво використовується теорія просторів з позитивною і негативною нормою, розвинута Ю. М. Березанським [4].

Нехай $\mathfrak{X}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ і A — замкнений лінійний оператор у ньому з щільною областю визначення $\mathcal{C}^1(A)$. Надалі, якщо не обумовлено інакше, позначаємо $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$. Покладемо $\mathcal{C}^{k+1}(A) = \{x \in \mathcal{C}^k(A) \colon A^k x \in \mathcal{C}^1(A)\}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через $\mathcal{C}^\infty(A)$ позначимо множину всіх нескінченно диференційовних векторів оператора A, тобто $\mathcal{C}^\infty(A) = \bigcap \{\mathcal{C}^k(A) \colon k \in \mathbb{N}_0\}$. Якщо оператор A обмежений, то $\mathcal{C}^\infty(A) = \mathfrak{X}$. В загальному випадку умова щільності множини $\mathcal{C}^\infty(A)$ в $\mathfrak{X}$ виконується, наприклад, коли A має хоча б одну регулярну точку [13].

В $\mathcal{C}^\infty(A)$ задамо топологію проективної границі банахових просторів $\mathcal{C}^k(A)$ з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{C}^k(A)} = \|x\| + \|Ax\| + \ldots + \|A^k x\|.$$

Нехай $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ — неспадна послідовність додатних чисел. Сліду-

ючи [17], покладемо

$$\mathfrak{C}_{\{m_n\}}(A) = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty(A) \mid \exists\, \alpha > 0, \exists\, c > 0 : \|A^k x\| \le c\alpha^k m_k,\ k \in \mathbb{N}_0\right\},$$

$$\mathfrak{C}_{(m_n)}(A) = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty(A) \mid \forall\, \alpha > 0, \exists\, c > 0 : \|A^k x\| \le c\alpha^k m_k,\ k \in \mathbb{N}_0\right\},$$

$$\mathfrak{C}^\alpha_{\langle m_n\rangle}(A) = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty(A) \mid \exists\, c > 0 : \|A^k x\| \le c\alpha^k m_k,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Простір $\mathfrak{C}^\alpha_{\langle m_n\rangle}(A)$ банахів відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{C}^\alpha_{\langle m_n\rangle}(A)} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n m_n}.$$

Простори $\mathfrak{C}_{\{m_n\}}(A)$ і $\mathfrak{C}_{(m_n)}(A)$ можна наділити відповідно топологіями індуктивної та проективної границь банахових просторів $\mathfrak{C}^\alpha_{\langle m_n\rangle}(A)$:

$$\mathfrak{C}_{\{m_n\}}(A) = \operatorname*{lim\,ind}_{\alpha\to+\infty} \mathfrak{C}^\alpha_{\langle m_n\rangle}(A),\ \mathfrak{C}_{(m_n)}(A) = \operatorname*{lim\,pr}_{\alpha\to 0_+} \mathfrak{C}^\alpha_{\langle m_n\rangle}(A).$$

Виконуються неперервні вкладення

$$\mathfrak{C}_{(m_n)}(A) \subseteq \mathfrak{C}_{\{m_n\}}(A) \subseteq \mathcal{C}^\infty(A) \subseteq \mathfrak{X}.$$

Крім того,

$$\mathfrak{C}_{\{m_n\}}(A) = \operatorname*{lim\,ind}_{k\to+\infty,\, k\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}^k_{\langle m_n\rangle}(A),\ \mathfrak{C}_{(m_n)}(A) = \operatorname*{lim\,pr}_{k\to+\infty,\, k\in\mathbb{N}} \mathfrak{C}^{1/k}_{\langle m_n\rangle}(A).$$

Якщо $m_n = n!$, то отримуємо відомі простори $\mathfrak{C}_{\{n!\}}(A)$ і $\mathfrak{C}_{(n!)}(A)$ аналітичних [182] та цілих [154] векторів оператора A.

Я. В. Радино [72] введено та досліджено простори $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$ цілих векторів експоненціального типу оператора A.

Якщо $\mathfrak{X} = C_b(\mathbb{R})$ — простір неперервних обмежених функцій на $\mathbb{R}$ зі звичайною нормою $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$, $A = d/dt$ — замкнений оператор з областю визначення $\mathcal{C}(A) = C^1_b(\mathbb{R})$, то простір $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$ співпадає з простором цілих функцій експоненціального типу, обмежених на дійсній осі [2, с. 183]. Якщо $\mathfrak{X} = L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$, $A = d/dt$ — оператор узагальненого диференціювання, $\mathcal{C}(A) = W^1_p(\mathbb{R})$, то простір $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$

співпадає з простором цілих функцій експоненціального типу, що належать $L_p(\mathbb{R})$ на дійсній осі [73, с. 1565].

Я. В. Радино [73, теорема 3] встановлено щільність простору $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$ для генератора обмеженої сильно неперервної групи у просторі $\mathfrak{X}$. Умова щільності $\overline{\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)} = \mathfrak{X}$ виконується також у таких випадках:

(i) якщо A має дійсний спектр і для будь-якого $\varepsilon > 0$ інтеграл $\int_0^{\varepsilon} \ln\ln M(t)\,dt$, де $M(t) = \sup\limits_{|\operatorname{Im}\lambda|\geq t} \|(\lambda - A)^{-1}\|$, є збіжний [17, теорема 1];

(ii) якщо iA генерує сильно неперервну групу операторів $U(t)$, для якої $\int_{-\infty}^{\infty} \ln\|U(t)\|(1+t^2)^{-1}dt < \infty$ [17, наслідок 1];

(iii) якщо A має повну систему власних векторів [73, твердження 1].

Якщо $\overline{\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)} = \mathfrak{X}$ [73, теорема 10], то кожний елемент $x \in \mathfrak{X}$ можна зобразити у вигляді ряду $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in \mathfrak{C}^k_{\langle 1\rangle}(A)$, так, що $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{\mathfrak{C}^k_{\langle 1\rangle}(A)} < +\infty$ і $\|x\| = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{\mathfrak{C}^k_{\langle 1\rangle}(A)}$, де нижня грань береться по всіх можливих представленнях $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Крім того, якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k\|x_k\|_{\mathfrak{C}^k_{\langle 1\rangle}(A)}$ збіжний, то $x \in \mathcal{C}^1(A)$ і $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_k$, де A_k — звуження оператора на підпростір $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$. Узагальнення цього результату для просторів ультрагладких векторів оператора A отримано О. В. Лопушанським [64, теорема 6]. Нагадаємо, що індуктивна границя $\mathfrak{C}_{\{m_n\}}(A) = \operatorname{lim\,ind}_{\alpha\to+\infty} \mathfrak{C}^{\alpha}_{\langle m_n\rangle}(A)$ називається простором ультрагладких векторів оператора A, якщо існує число d $(0 < d < \infty)$, таке, що $m_{n+1} \leq d^n m_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ [64, с. 504].

Типом вектора $x \in \mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$ називається число

$$\sigma(x) = \inf\left\{\alpha :\ \alpha > 0,\ x \in \mathfrak{C}^{\alpha}_{\langle 1\rangle}(A)\right\}.$$

Для довільного $x \in \mathfrak{X}$ покладемо

$$E_r(x) = \inf_{y\in\mathfrak{C}_{\{1\}}(A):\sigma(y)\leq r} \|x - y\|.$$

Функція $E_r(x)$ прямує до нуля при $r \to \infty$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)} = \mathfrak{X}$, причому швидкість прямування залежить від властиво-

стей елемента x. Задача полягає у встановленні умов, які повинен задовольняти вектор x, для того, щоб $E_r(x)$ прямувала до нуля з певною швидкістю. Розв'язання цієї задачі для деяких класів операторів міститься у працях М. Л. Горбачука і В. І. Горбачук [12], [15]- [17].

Теорема 1.1.4. [12, с. 93] *Нехай оператор A має мероморфну резольвенту $R_\lambda(A)$ та існують число $N > 0$ і послідовність кіл $\gamma_n = \{|\lambda| = r_n\} \subset \rho(A)$, таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$ і*

$$\|R_\lambda(A)\| \le c\lambda^N \text{ для } \lambda \in \gamma_n.$$

Припустимо також, що для послідовності $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ існують постійні $c > 0$ та $h > 1$, такі, що $m_{n+1} \le ch^n m_n$. Тоді $\overline{\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)} = \mathfrak{X}$ і виконуються такі співвідношення еквівалентності:

$$x \in \mathcal{C}^\infty(A) \Longleftrightarrow \forall\, m > 0 \ \lim_{n\to\infty} r_n^m E_{r_n}(x) = 0,$$

$$x \in \mathfrak{C}_{\{m_n\}}(A) \Longleftrightarrow \exists\, \alpha > 0, \exists\, c > 0 : \ E_{r_n}(x) \le c\rho^{-1}(\alpha r_n),$$

$$x \in \mathfrak{C}_{(m_n)}(A) \Longleftrightarrow \forall\, \alpha > 0, \exists\, c = c(\alpha) > 0 : \ E_{r_n}(x) \le c\rho^{-1}(\alpha r_n),$$

де $\rho(\lambda) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \dfrac{\lambda^n}{m_n}$.

Теорема 1.1.5. [15, с. 11] *Нехай оператор A має мероморфну резольвенту $R_\lambda(A)$ та існують число $N > 0$ і послідовність кіл $\gamma_n = \{|\lambda| = r_n\} \subset \rho(A)$, таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$ і*

$$\|R_\lambda(A)\| \le c\lambda^N \text{ для } \lambda \in \gamma_n.$$

Припустимо також, що для послідовності $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ існують постійні $c > 0$ та $h > 1$, такі, що $m_{n+1} \le ch^n m_n$. Тоді $\overline{\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)} = \mathfrak{X}$ і

виконуються такі співвідношення еквівалентності:

$$x \in \mathcal{C}^\infty(A) \Longleftrightarrow \forall\, m > 0 \ \lim_{n\to\infty} r_n^m E_{r_n}(x) = 0,$$

$$x \in \mathfrak{C}_{\{m_n\}}(A) \Longleftrightarrow \exists\, \alpha > 0, \exists\, c > 0 : \ E_{r_n}(x) \le c\rho^{-1}(\alpha r_n),$$

$$x \in \mathfrak{C}_{(m_n)}(A) \Longleftrightarrow \forall\, \alpha > 0, \exists\, c = c(\alpha) > 0 : \ E_{r_n}(x) \le c\rho^{-1}(\alpha r_n),$$

де $\rho(\lambda) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \dfrac{\lambda^n}{m_n}$.

Теорема 1.1.6. [17, с. 622] *Нехай* A *— нормальний оператор з дискретним спектром* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *у гільбертовому просторі* $\mathfrak{B}$. *Тоді для будь-якої монотонно незростаючої послідовності* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *додатних чисел, такої, що* $\alpha_n \to \infty$ *при* $n \to +\infty$, *знайдеться елемент* $x \in \mathfrak{B}$, *для якого* $E_{\lambda_i}(x) = \alpha_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Якщо $\mathfrak{B} = L_2(0, 2\pi)$, $Au = idu/dt$, $\mathcal{C}^1(A) = \{u(t) \in W_2^1(0, 2\pi) : u(0) = u(2\pi)\}$, то $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$ — множина всіх тригонометричних поліномів вигляду $T_n = \sum_{|k|<n} c_k e^{ikt}$. Множину поліномів, степінь яких не перевищує n, позначимо T_n і покладемо

$$E_n(u) = \inf_{v\in\mathrm{T}_n} \|u - v\|_{L_2(0,2\pi)}.$$

У цьому випадку із теореми 1.1.6 можна отримати відомий результат С. Н. Бернштейна [6] про те, що якою б не була числова послідовність

$$\alpha_0 \ge \alpha_1 \ge \ldots \ge 0, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$$

завжди існує 2π-періодична функція $u(t)$, така, що $E_n(u) = \alpha_n$.

Теорема 1.1.7. [17, с. 623] *Нехай* A *— нормальний оператор у гільбертовому просторі* $\mathfrak{B}$ *і* $\mathfrak{X}$ *банахів простір, такий, що при деякому* $k \in \mathbb{N}$ *неперервно*

$$\mathcal{C}^k(A) \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{B}.$$

Припустимо також, що для послідовності $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ $(m_0 = 1)$ *існують постійні* $c > 0$ *та* $h > 1$, *такі, що* $m_{n+1} \le ch^n m_n$. *Тоді виконуються такі співвідношення еквівалентності:*

$$u \in \mathfrak{C}_{\{m_n\}}(A) \Longleftrightarrow \exists\, \alpha > 0,\ \exists\, c > 0:\ E_r(x) \le c\rho^{-1}(\alpha r),$$

$$u \in \mathfrak{C}_{(m_n)}(A) \Longleftrightarrow \forall\, \alpha > 0, \exists\, c = c(\alpha) > 0:\ E_r(x) \le c\rho^{-1}(\alpha r),$$

де $\rho(\lambda) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \dfrac{\lambda^n}{m_n}$.

Простір $\tilde{C}[0, 2\pi]$ неперервних 2π-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій з нормою

$$\|u\|_{\tilde{C}[0,2\pi]} = \max_{t\in[0,2\pi]} |u(t)|$$

задовольняє умови теореми 1.1.7, а тому із теореми 1.1.7 при $m_n = n!$ і $\rho^\lambda = e^\lambda$ одержуємо відомий результат С. Н. Бернштейна [6], що характеризує найкращі наближення аналітичних і цілих функцій поліномами з T_n: 2π-періодична функція $u(t)$ є аналітичною (цілою) тоді і лише тоді, коли при деякому (будь-якому) q $(0 < q < 1)$

$$E_n(u) \le cq^n, \quad 0 < c = c(q),$$

де $E_n(u) = \inf_{v\in\mathrm{T}_n} \|u - v\|_{\tilde{C}[0,2\pi]}$.

Теорема 1.1.8. [17, с. 625] *За умов теореми 1.1.7 виконується таке співвідношення еквівалентності:*

$$x \in \mathcal{C}^\infty(A) \Longleftrightarrow \lim_{r\to+\infty} r^\alpha E_r(x) = 0,\ \forall\, \alpha \ge 0.$$

Із теореми 1.1.8 одержуємо ще один відомий результат С. Н. Бернштейна [6]: для того щоб 2π-періодична функція $u(t)$ мала похідні довільного порядку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha E_n(u) = 0.$$

Аналог теореми 1.1.5 за інших умов на оператор A отримано Г. В. Радзієвським [70]. Величина $E_r(x)$ оцінена зверху через K-функціонал вигляду $K(r^{-k}, x; \mathfrak{X}, \mathcal{C}^k(A)) = \inf_{y \in \mathcal{C}^k(A)}(\|x-y\| + r^{-k}\|A^k x\|)$. Встановлено також оцінку зверху такого K-функціоналу через $E_r(x)$ і $\|x\|$.

Теорема 1.1.9. [70, с. 85] *Нехай існує монотонно зростаюча послідовність додатних чисел* $\{\xi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, *така, що* $\lim\limits_{m\to\infty} \xi_m = \infty$ *і*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{\xi_{m+1}}{\xi_m} < \infty, \ \operatorname{mes}\{\mathcal{T}(\xi_m) \cap \rho(A)\} = 2\pi\xi_m, \ m \in \mathbb{N},$$

де $\mathcal{T}(\xi_m) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \xi_m\}$ *— коло радіуса* ξ_m. *Припустимо також, що оператор* A *задовольняє умову*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \max\{\ln(\xi_m \|R_{\xi_m e^{i\theta}}(A)\|), 0\}\, d\theta < \infty.$$

Тоді знайдеться така постійна $c \geq 1$, *що для всіх* $x \in \mathfrak{X}$ *і* $k \in \mathbb{N}$ *виконуються оцінки*

$$E_r(x) \leq c^k K(r^{-k}, x; \mathfrak{X}, \mathcal{C}^k(A)), \ r \geq r_1, \tag{1.1}$$

$$K(r^{-k}, x; \mathfrak{X}, \mathcal{C}^k(A)) \leq \left(\frac{c}{r}\right)^k \left(E^{[k]}(x) + \int_0^r s^{k-1} E_s(x) ds\right), \ r > 0, \tag{1.2}$$

де $E^{[k]}(x) = \inf\limits_{y \in \mathfrak{Z}(A^k)} \|x-y\|$, $\mathfrak{Z}(A^k)$ *— ядро оператора* A, $k \in \mathbb{N}_0$.

Оцінку (1.1) називають прямою теоремою або нерівністю Джексона, а оцінку (1.2) — оберненою теоремою або нерівністю Бернштейна.

За умов теореми 1.1.9 для кожного натурального $k > \gamma > 0$ виконуються такі співвідношення еквівалентності:

$$K(\delta^k, x; \mathfrak{X}, \mathcal{C}^k(A)) = O(\delta^\gamma), \delta \to 0_+ \Longleftrightarrow E_r(x) = O(r^{-\gamma}), r \to +\infty, \tag{1.3}$$

$$K(\delta^k, x; \mathfrak{X}, \mathcal{C}^k(A)) = o(\delta^\gamma), \delta \to 0_+ \Longleftrightarrow E_r(x) = o(r^{-\gamma}), r \to +\infty. \tag{1.4}$$

Позначимо

$$W_p^k(\mathbb{T}) := \{u \in W_p^k[0,2\pi] : u^{(l-1)}(0) = u^{(l-1)}(2\pi),\ l = 1,\dots,k,\ k \in \mathbb{N}\},$$

$$W_p^0(\mathbb{T}) := L_p[0,2\pi]$$

і розглянемо в просторі $L_p[0,2\pi]$ оператор диференціювання

$$D_{\mathbb{T}}u = -idu/dt,\ \mathcal{C}^1(A) = \tilde{W}_p^k(\mathbb{T}),$$

де $\tilde{W}_p^k(\mathbb{T})$ — множина функцій, що співпадають з функціями із $W_p^k(\mathbb{T})$ майже всюди. K-функціонал для оператора $D_{\mathbb{T}}$ має вигляд

$$K(\delta, u; L_p[0,2\pi], D_{\mathbb{T}}^k) = \inf_{v \in \tilde{W}_p^k(\mathbb{T})} (\|u - v\|_{L_p[0,2\pi]} + \delta \|v^k\|_{L_p[0,2\pi]})$$

$$= \inf_{v \in W_p^k(\mathbb{T})} (\|u - v\|_{L_p[0,2\pi]} + \delta \|v^k\|_{L_p[0,2\pi]}) = K(\delta, u; L_p[0,2\pi], W_p^k(\mathbb{T})). \quad (1.5)$$

Для оцінок K-функціоналу використовується модуль гладкості функції, що визначається її періодичним продовженням

$$u_{\mathbb{T}}(t) = u(t + 2\pi s),\ -2\pi s \le t < -2\pi(s-1),\ k \in \mathbb{Z},$$

рівністю

$$\omega_{\mathbb{T}}^{[k]}(\delta, u)_p = \sup_{0 \le h \le \delta} \|\Delta_h^k u_{\mathbb{T}}\|_{L_p[0,2\pi]},\ \delta \ge 0,\ u \in L_p[0,2\pi],$$

$$(\Delta_h^k u_{\mathbb{T}}) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} u_{\mathbb{T}}(t - hi).$$

Виконуються такі нерівності

$$2^{-k}\omega_{\mathbb{T}}^{[k]}(\delta, u)_p \le K(\delta, u; L_p[0,2\pi], W_p^k(\mathbb{T})) \le (2k)^k \omega_{\mathbb{T}}^{[k]}(\frac{\delta}{k}, u)_p,\ k > 0. \quad (1.6)$$

Із співвідношень (1.5) і (1.6) випливає, що оцінки (1.1) і (1.2) співпадають, відповідно, з узагальненими нерівностями Джексона і Бернштейна, встановленими С. Б. Стєчкіним [82, теореми 1 і 8], А. Ф. Тіманим і

М. Ф. Тіманим [82, теорема 4]. Співвідношення (1.3) і (1.4) при $\gamma < 1$ і $k = 1$ дають відомі необхідні і достатні умови належності функції u відповідним класам Ліпшиця, виражені через найкращі наближення u за допомогою тригонометричних поліномів.

Теорема 1.1.10. [70, с. 89] *Нехай існує монотонно зростаюча послідовність додатних чисел* $\{\xi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, *така, що* $\lim\limits_{m\to\infty}\xi_m = \infty$ *і*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\frac{\xi_{m+1}}{\xi_m} < \infty,\ \operatorname{mes}\{\mathcal{T}(\xi_m)\cap\rho(A)\} = 2\pi\xi_m,\ m\in\mathbb{N},$$

де $\mathcal{T}(\xi_m) = \{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = \xi_m\}$ *— коло радіуса* ξ_m. *Припустимо також, що для деякого* $\gamma \geq 0$ *виконується умова*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\int_0^{2\pi}\max\{\ln(\xi_m^{1-\gamma}\|R_{\xi_m e^{i\theta}}(A)\|), 0\}\,d\theta < \infty.$$

Тоді знайдеться така постійна $c \geq 1$, *що як тільки для вектора* $x\in\mathfrak{X}$ *при деякому* $j\in\mathbb{N}_0$ *виконується умова*

$$\int_1^\infty s^{j+\gamma-1}E_s(x)ds < \infty, \tag{1.7}$$

то $x\in\mathcal{C}^j(A)$, $A^jx\in\mathfrak{X}$ *і*

$$E_r(A^jx) \ \leq\ c^j\left((r+1)^{j+\gamma}E_r(x) + \int_{\max(1,r)}^\infty s^{j+\gamma-1}E_s(x)ds\right),\ r>0, \tag{1.8}$$

$$E^{[l-j]}(A^jx) \ \leq\ c^j\left(E^{[l]}(x) + \int_1^\infty s^{j+\gamma-1}E_s(x)ds\right),\ l = j, j+1, \ldots. \tag{1.9}$$

Із теореми 1.1.10 випливає, що за умов теореми 1.1.9 знайдеться така постійна $c \geq 1$, що як тільки для вектора $x\in\mathfrak{X}$ при деякому $j\in\mathbb{N}_0$ виконується умова (1.7) з $\gamma = 0$, то $x\in\mathcal{C}^j(A)$ і для вектора A^jx виконуються оцінки (1.8) і (1.9) з $\gamma = 0$, а також для всіх $k\in\mathbb{N}$ виконується нерівність

$$K(r^{-k}, A^jx; \mathfrak{X}, \mathcal{C}^k(A)) \leq c^{j+k}\Bigg(r^{-k}E^{[j+k]}(x)$$
$$+\frac{1}{r^k}\int_0^r (s+1)^{j+k-1}E_s(x)ds + \int_r^\infty s^{j-1}E_s(x)ds\Bigg),\ r>0. \tag{1.10}$$

У випадку $\mathfrak{X} = L_\infty[0, 2\pi]$ і $A = D_{\mathbb{T}}$ твердження теореми 1.1.10, що $x \in \mathcal{C}^j(A)$, отримано С. Н. Бернштейном [6], а оцінки (1.8) і (1.10) — це, відповідно, наслідок 10.1 і теорема 11 праці С. Б. Стєчкіна [82]. У випадку $\mathfrak{X} = L_p[0, 2\pi]$ $(1 \le p < \infty)$ і $A = D_{\mathbb{T}}$ твердження теореми 1.1.10 міститься в [85, п. 6.1.3].

Слід відзначити, що наведені вище результати щодо теорем вкладення суттєво посилені П. Л. Ульяновим [87, 88], яким, зокрема, отримано непосилювані умови належності функції $u \in L_p$ простору L_q $(1 \le p < q < \infty)$ в термінах найкращих наближень u в метриці $u \in L_p$ за допомогою тригонометричної системи.

Н. П. Купцов запропонував узагальнене поняття модуля неперервності, розширене на C_0-групи в банаховому просторі [63]. Використовуючи це поняття, Н. П. Купцов [63] і А. П. Терьохін [83] довели узагальнені нерівності Джексона для випадку обмежених і s-регулярних груп. Відзначимо, що група $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ є s-регулярною, якщо існує таке число $\theta \in \mathbb{R}$, що резольвента її генератора A задовольняє умову: $\|R_\lambda(e^{i\theta}A^s)\| \le C/\mathrm{Im}\lambda$.

У праці [16] для довільного самоспряженого оператора A у гільбертовому просторі $\mathfrak{B}$ наведено прямі та обернені теореми, що встановлюють зв'язок між степенем гладкості вектора $x \in \mathfrak{B}$ відносно оператора A, порядком прямування до нуля його найкращого наближення цілими векторами експоненціального типу оператора A і k-модулем неперервності вектора x щодо оператора A.

Слідуючи [63], покладемо

$$\omega_k(t, x, A) = \sup_{0\le\tau\le t} \|\Delta_\tau^k x\|, \ k \in \mathbb{N},$$

$$\Delta_h^k := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} U(ih), k \in \mathbb{N}_0, h \in \mathbb{R} \ \ (\Delta_h^0 \equiv 1, h \in \mathbb{R}_+),$$

$U(h) = \exp(ihA)$ — група унітарних операторів в $\mathfrak{B}$ з генератором iA.

Нехай $G(\lambda)$ — майже скрізь скінченна вимірна функція на $\mathbb{R}$. Функція $G(A)$ від оператора A визначається як

$$G(A) := \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) dE(\lambda).$$

Теорема 1.1.11. [16, с. 635] *Нехай $G(\lambda)$ — невід'ємна парна функція на $\mathbb{R}$, неспадна на $\mathbb{R}_+$. Тоді для довільного $x \in \mathcal{C}^1(G(A))$ і $k \in \mathbb{N}$*

$$E_r(x) \leq \frac{\sqrt{k+1}}{2^k G(r)} \omega_k \left(\frac{\pi}{r}, G(A)x, A\right), \ r > 0.$$

Якщо $G(\lambda) = |\lambda|^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m > 0$, то з теореми 1.1.11 для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$E_r(x) \leq \frac{\sqrt{k+1}}{2^k r^m} \omega_k \left(\frac{\pi}{r}, |A|^m x, A\right), \ r > 0. \tag{1.11}$$

Якщо $\mathfrak{B} = L_2(0, 2\pi)$, $Au = idu/dt$, $\mathcal{C}^1(A) = \{u(t) \in W_2^1(0, 2\pi) : u(0) = u(2\pi)\}$, то нерівність (1.11) для $k = 1$ встановлено в [92], а для довільного $k \in \mathbb{N}$ — у праці [80].

Обернена теорема у випадку наближення цілими векторами експоненціального типу оператора A формулюється наступним чином.

Теорема 1.1.12. [16, с. 636] *Нехай $\omega(t)$ — функція типу модуля неперервності, така, що:*

(i) *$\omega(t)$ неперервна і неспадна при $t \in \mathbb{R}_+$;*

(ii) *$\omega(0) = 0$;*

(iii) *$\exists\, c > 0, \ \forall\, t > 0 \ \omega(2t) \leq c\omega(t)$;*

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$.

Нехай функція $G(\lambda)$ є парною, невід'ємною і неспадною при $\lambda \geq 0$ причому $\sup\limits_{\lambda > 0} \dfrac{G(2\lambda)}{G(\lambda)} < \infty$.

Якщо для $x \in \mathfrak{B}$ існує $m > 0$, таке, що

$$E_r(x) \leq \frac{m}{G(r)} \omega\left(\frac{1}{r}\right), \ r > 0,$$

то $x \in \mathcal{C}^1(G(A))$ *і для кожного* $k \in \mathbb{N}$ *існує постійна* $m_k > 0$, *така, що*

$$\omega(t, G(A)x, A) \leq m_k \left[t^k \int_t^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau^{k+1}}\, d\tau + \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau \right],\ 0 < t \leq \frac{1}{2}.$$

Я. Грушка і С. Торба [157] довели пряму теорему, що встановлює зв'язок між степенем гладкості вектора $x \in \mathfrak{X}$ відносно неквазіаналітичного оператора A, порядком прямування до нуля його найкращого наближення цілими векторами експоненціального типу такого оператора A і k-модулем неперервності. Відзначимо, що оператор A називається неквазіаналітичним [65], якщо A генерує сильно неперервну групу операторів $U(t)$, для якої

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \|U(t)\| (1+t^2)^{-1} dt < \infty. \tag{1.12}$$

Теорема 1.1.13. [157, с. 269] *Нехай* $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *задовольняє умову (1.12). Тоді для* $x \in \mathfrak{X}$ *і* $k \in \mathbb{N}$ *існує постійна* $m_k > 0$, *така, що*

$$E_r(x) \leq m_k \sup_{0 \leq |\tau| \leq \frac{1}{r}} \|\Delta_\tau^k x\|,\ r \geq 1.$$

У зв'язку з розвитком операторного підходу до задач апроксимації в банахових просторах відзначимо також вагомий внесок А. М. Плічка [192, 193].

1.2. Апроксимаційні простори

У даному параграфі розглянемо основні елементи теорії апроксимаційних просторів та напрямки їх сучасних узагальнень.

Апроксимаційні простори були введені П. Бутцером і К. Шерером [108], а також, незалежно, Ю. А. Брудним і Н. Я. Кругляком [9]. Далі визначимо поняття апроксимаційного простору і сформулюємо деякі його елементарні властивості слідуючи фундаментальній праці А. Піча [191].

Квазінормою є невід'ємна функція $\|\cdot\|_X$, визначена на (дійсному або комплексному) лінійному просторі X, для якої виконуються такі умови:

(i) якщо $\|x\|_X = 0$ для деякого $x \in X$, то $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\|_X = |\lambda|\|x\|_X$ для $x \in X$ і всіх скалярів λ;

(iii) існує постійна $c_X \geq 1$, така, що

$$\|x+y\|_X \leq c_X\left(\|x\|_X + \|y\|_X\right) \text{ для } x, y \in X.$$

Квазінорми $\|\cdot\|_X^{(1)}$ і $\|\cdot\|_X^{(2)}$ є еквівалентними, якщо

$$\|\cdot\|_X^{(2)} \leq c_1 \|\cdot\|_X^{(1)} \text{ і } \|\cdot\|_X^{(1)} \leq c_2 \|\cdot\|_X^{(2)} \text{ для всіх } x \in X,$$

де c_1 і c_2 — відповідні константи.

Кожна квазінорма генерує метризовану хаусдорфову топологію на основному лінійному просторі. Для двох еквівалентних квазінорм відповідні топології співпадають.

Квазібанаховим простором є лінійний простір X, наділений квазінормою $\|\cdot\|_X$, так, що кожна послідовність Коші є збіжною.

Квазінорма $\|\cdot\|_X$ називається p-нормою $(0 < p \leq 1)$, якщо

$$\|x+y\|_X^p \leq c_X\left(\|x\|_X^p + \|y\|_X^p\right) \text{ для } x, y \in X.$$

Умова (iii) задовольняється, якщо $c_X := 2^{1/p-1}$. Очевидно, що для кожної квазінорми $\|\cdot\|_X$ існує еквівалентна p-норма $\|\cdot\|_X^0$, якщо p визначається як $1/p := 1 + \log_2 c_X$. Крім того, кожна p-норма є також q-норма для $0 < q < p \leq 1$.

Апроксимаційною схемою (X, X_n) є квазібанахів простір X разом з послідовністю підмножин X_n, таких, що виконуються умови:

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X; \tag{1.13}$$

$$\lambda X_n \subseteq X_n \text{ для всіх скалярів } \lambda \text{ і } n = 1, 2, \ldots; \tag{1.14}$$

$$X_m + X_n \subseteq X_{m+n} \text{ для } m, n = 1, 2, \ldots. \tag{1.15}$$

Покладемо $X_0 := \{0\}$. Очевидно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ є лінійний підпростір.

Нехай (X, X_n) — апроксимаційна схема. Для $x \in X$ і $n = 1, 2, \ldots$ n-е апроксимаційне число визначається як

$$\alpha_n(x, X) := \inf \{\|x - y\|_X : y \in X_{n-1}\}.$$

Наведемо деякі властивості:

(i) $\|x\|_X = \alpha_1(x, X) \geq \alpha_2(x, X) \geq \cdots \geq 0$ для $x \in X$;

(ii) $\alpha_n(\lambda x, X) = |\lambda| \alpha_n(x, X)$ для $x \in X$, всіх скалярів λ і $n = 1, 2, \ldots$;

(iii) $\alpha_{m+n-1}(x + y, X) \leq c_X (\alpha_m(x, X) + \alpha_n(y, X))$ для $x, y \in X$ і $m, n = 1, 2, \ldots$.

Варто відзначити, що $\alpha_n(x, X)$ в загальному не є неперервною функцією від x. Цієї ситуації можна уникнути, якщо використовувати еквівалентну p-норму на X.

Нехай $0 < \varrho < \infty$ і $0 < q \leq \infty$. Тоді апроксимаційний простір X_q^ϱ, або, більш загально, $(X, X_n)_q^\varrho$, складається з усіх елементів $x \in X$, таких, що $(n^{\varrho - 1/q} \alpha_n(x, X)) \in l_q$, де $n = 1, 2, \ldots$. Як звичайно, l_q $(0 < q \leq \infty)$ означає квазібанаховий простір всіх q-сумовних скалярних послідовностей із квазінормою $\|\cdot\|_{l_q}$. Покладемо

$$\|x\|_{X_q^\varrho} := \left\|(n^{\varrho - 1/q} \alpha_n(x, X))\right\|_{l_q} \text{ для } x \in X_q^\varrho.$$

Тоді простір X_q^ϱ є квазібанаховим. Якщо X — банахів простір і $X_n + X_n = X_n$ для $n = 1, 2, \ldots$, то X_q^ϱ при $1 \leq q \leq \infty$ є банахів простір. Цей випадок був детально розглянутий П. Бутцером і К. Шерером [108].

Елемент $x \in X$ належить простору X_q^ϱ тоді і тільки тоді, коли $(2^{k\varrho} \alpha_{2^k}(x, \mathfrak{X})) \in l_q$ для $k = 0, 1, \ldots$. Крім того,

$$\|x\|_{X_q^\varrho}^* := \left\|(2^{k\varrho} \alpha_{2^k}(x, X))\right\|_{l_q}$$

визначає еквівалентну квазінорму на X_q^ϱ.

Далі констатуємо, що виконуються такі вкладення

$$X_{q_1}^{\varrho_1} \supseteq X_{q_2}^{\varrho_2} \text{ для } 0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \infty \text{ і } 0 < q_1, q_2 \leq \infty;$$

$$X_{q_1}^{\varrho} \subseteq X_{q_2}^{\varrho} \text{ для } 0 < \varrho < \infty \text{ і } 0 < q_1 < q_2 \leq \infty.$$

Наведемо деякі важливі приклади апроксимаційних просторів.

Нехай f_n — множина всіх скалярних послідовностей $\zeta = (\zeta_m)$, що мають не більше n координат $\zeta_m \neq 0$. Також розглянемо підмножину o_n, яка містить всі скалярні послідовності, такі, що $\zeta_m = 0$, якщо $m > n$. Очевидно, що (l_p, f_n) і (l_p, o_n) $(0 < p \leq \infty)$ — апроксимаційні схеми. Покладемо

$$s_{p,q}^{\varrho} := (l_p, f_n)_q^{\varrho} \text{ і } b_{p,q}^{\varrho} := (l_p, o_n)_q^{\varrho}.$$

Простір $s_{p,q}^{\varrho}$ співпадає з відомим простором послідовностей Лоренца $l_{r,q}$, де $1/r = \varrho + 1/p$. Простори послідовностей $b_{p,q}^{\varrho}$ можна розглядати як дискретний аналог просторів Бєсова.

Нехай $L_p := L_p[0,1]$ $(0 < p \leq \infty)$ означає квазібанаховий простір всіх p-інтегровних скалярних функцій, визначених на одиничному інтервалі. Нехай F_n — множина всіх тригонометричних поліномів

$$\mathrm{p}(s) = \mathrm{p}_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\mathrm{p}_{2m} \sin 2\pi m s + \mathrm{p}_{2m+1} \cos 2\pi m s\right],$$

що мають не більше n коефіцієнтів $\mathrm{p}_m \neq 0$. Також розглянемо підмножину O_n, яка містить всі тригонометричні поліноми, такі, що $\mathrm{p}_m = 0$, якщо $m > n$. Тоді (L_p, F_n) і (L_p, O_n) — апроксимаційні схеми. Покладемо

$$S_{p,q}^{\varrho} := (L_p, F_n)_q^{\varrho} \text{ і } B_{p,q}^{\varrho} := (L_p, O_n)_q^{\varrho}.$$

С. Б. Стєчкін [81] показав, що $S_{2,1}^{1/2}$ складається з періодичних функцій, що мають абсолютно збіжні ряди Фур'є. З іншого боку, як випливає з теорії наближень, $B_{p,q}^{\varrho}$ є відомими просторами Бєсова [7].

Наведені вище результати розширено на випадок X-значних функцій, де X є квазібанаховий простір [205]. Через $[L_p, X]$ позначимо квазібанаховий простір всіх вимірних і абсолютно p-інтегровних X-значних функцій, визначених на одиничному інтервалі. При цьому визначено апроксимаційні простори

$$[S^{\varrho}_{p,q}, X] := ([L_p, X], [F_n, X])^{\varrho}_q \ \text{ і } \ [B^{\varrho}_{p,q}, X] := ([L_p, X], [O_n, X])^{\varrho}_q.$$

Нехай $\mathfrak{L}(E, F)$ — банахів простір всіх обмежених лінійних операторів, що діють з банахового простору E в банахів простір F, E' — спряжений простір до E. Оператор $S \in \mathfrak{L}(E, F)$ є абсолютно p-сумовним $(0 < p < \infty)$, якщо існує постійна $\sigma \geq 0$, така, що

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|Sx_i\|_F^p\right)^{1/p} \leq \sigma \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, u\rangle|^p\right)^{1/p} : \ \|u\|_{E'} \leq 1\right\}$$

для всіх систем елементів $x_1, \ldots, x_n \in E$. Покладемо

$$\|S\|_{\mathfrak{P}_p} := \inf \sigma.$$

Квазібанахів простір всіх p-сумовних операторів з E в F позначимо $\mathfrak{P}_p(E, F)$. Для зручності покладемо $\mathfrak{P}_\infty(E, F) := \mathfrak{L}(E, F)$ і

$$\|S\|_{\mathfrak{P}_\infty} := \|S\|_{\mathfrak{L}} := \sup\{\|Sx\|_F : \ \|x\|_E \leq 1\}.$$

Нехай $\mathfrak{F}_n(E, F)$ — множина всіх операторів $A \in \mathfrak{L}(E, F)$, що мають образ $M(A) := \{Ax : \ x \in E\}$, розмірність якого не перевищує n. Тоді $(\mathfrak{P}_p(E, F), \mathfrak{F}_n(E, F))$ — апроксимаційна схема. Покладемо

$$\mathfrak{P}^{\varrho}_{p,q}(E, F) := (\mathfrak{P}_p(E, F), \mathfrak{F}_n(E, F))^{\varrho}_q.$$

Далі сформулюємо деякі фундаментальні теореми. Насамперед відзначимо теорему представлення, яка у випадку функціональних просторів, згадується у працях О. В. Бєсова [7] і Т. І. Аманова [1]. Аналогічний результат для просторів операторів пов'язаний з працями А. Піча [188, 190]. Також слід відзначити загальну теорему такого типу, доведену Ю. А. Брудним і Н. Я. Кругляком [8, 9].

Теорема 1.2.1. [191, с. 120] *Нехай* (X, X_n) *— апроксимаційна схема. Тоді* $x \in X$ *належить* X_q^ϱ *тоді і лише тоді, коли існують* $u_k \in X_{2^k}$ *, такі, що*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad і \quad (2^{k\varrho}\|u_k\|_X) \in l_q.$$

Крім того,

$$\|x\|^*_{X_q^\varrho} := \inf \|(2^{k\varrho}\|u_k\|_X)\|_{l_q},$$

де inf *береться по всіх можливих представленнях, визначає еквівалентну квазінорму на* X_q^ϱ *.*

Безпосереднім наслідком теореми є те, що підпростір $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ щільний в X_q^ϱ, якщо $0 < q < \infty$.

Апроксимаційна схема (X, X_n) називається лінійною, якщо існує рівномірно обмежена послідовність лінійних проекторів P_n, що відображають X на X_n. Звідси випливає, що

$$\|x - P_n x\|_X \le c\alpha_n(x, X)$$

для всіх $x \in X$ і $n = 1, 2, \ldots$, де $c := c_X(1 + \sup \|P_n\|_{\mathfrak{L}})$.

За допомогою проекторів $Q_k := P_{2^{k+1}-1} - P_{2^k-1}$ можна сформулювати теорему лінійного представлення.

Теорема 1.2.2. [191, с. 122] *Нехай* (X, X_n) *— лінійна апроксимаційна схема. Тоді* $x \in X$ *належить* X_q^ϱ *тоді і тільки тоді, коли*

$$(2^{k\varrho}\|P_k x\|_X) \in l_q.$$

У цьому випадку маємо

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k x.$$

Крім того,

$$\|x\|^*_{X^\varrho_q} := \|(2^{k\varrho}\|Q_k x\|_X)\|_{l_q}$$

є еквівалентна квазінорма на X^ϱ_q.

Для кожної апроксимаційної схеми (X, X_n) маємо $X_n \subseteq X^\varrho_q$. Таким чином, (X^ϱ_q, X_n) також є апроксимаційна схема і можна повторити конструкцію апроксимаційних просторів. При цьому існують постійні $c_0 > 0$ і $c_1 > 0$, такі, що

$$n^\varrho \alpha_{2n-1}(x, X) \le c_0 \alpha_n(x, X^\varrho_q) \text{ для всіх } x \in X^\varrho_q \text{ і } n = 1, 2, \ldots;$$

$$\|u\|_{X^\varrho_q} \le c_1 n^\varrho \|u\|_X \text{ для всіх } u \in X_n \text{ і } n = 1, 2, \ldots,$$

і виконується наступна теорема реітерації.

Теорема 1.2.3. [191, с. 123] *Нехай* (X, X_n) *— апроксимаційна схема. Тоді* $(X^\varrho_q)^\sigma_r = X^{\varrho+\sigma}_r$.

Наступна властивість апроксимаційних просторів виражається теоремою трансформації.

Теорема 1.2.4. [191, с. 124] *Нехай* (X, X_m) *і* (Y, Y_n) *— апроксимаційні схеми і* $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$. *Якщо існують постійні* $\lambda > 0$ *і* $c > 0$, *такі, що*

$$T(X_n) \subseteq Y_n \quad \text{для} \quad n \ge cm^\lambda,$$

то $T(X^{\lambda\varrho}_q) \subseteq Y^\varrho_q$.

Далі сформулюємо теорему вкладення.

Теорема 1.2.5. [191, с. 125] *Нехай* X *і* Y *— квазібанахові простори, які неперервно вкладені в деякий лінійний топологічний хаусдорфовий простір. Крім того, нехай* (X, X_n) *і* (Y, X_n) *— апроксимаційні*

схеми, асоційовані з однаковими послідовностями підмножин. Припустимо, що існують постійні $c > 0$ *і* $\sigma > 0$, *такі, що*

$$\|u\|_Y \le cn^\sigma \|u\|_X \quad \text{для всіх} \quad u \in X_n \quad \text{і} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тоді $X_q^{\varrho+\sigma} \subseteq Y_q^\varrho$. *Зокрема, якщо* Y *є* r*-нормований з* $0 < r \le 1$, *то* $X_r^\sigma \subseteq Y$.

Наступна властивість апроксимаційних просторів виражається теоремою композиції.

Теорема 1.2.6. [191, с. 127] *Нехай* (X, X_n), (Y, Y_n) *і* (Z, Z_n) — *апроксимаційні схеми. Якщо* M *обмежене лінійне відображення з* $X \times Y$ *в* Z, *таке, що* $M(X_n, Y) \subseteq Z_n$ *і* $M(X, Y_n) \subseteq Z_n$ *для* $n = 1, 2, \ldots$, *то*

$$M(X_q^\varrho, Y_r^\sigma) \subseteq Z_p^{\varrho+\sigma} \quad \text{для} \quad 1/q + 1/r = 1/p.$$

Нехай (X, X_n) — апроксимаційна схема і $[L_p, X_q^\varrho]$ — квазібанахів простір. Якщо $[L_p, X_n]$ містить всі X_n-значні функції, то отримуємо апроксимаційну схему $([L_p, X], [L_p, X_n])$. Відповідні апроксимаційні простори позначимо $[L_p, X]_q^\varrho$. Далі сформулюємо теорему комутації.

Теорема 1.2.7. [191, с. 128] *Виконуються такі вкладення*

$$[L_p, X_q^\varrho] \subseteq [L_p, X]_q^\varrho, \quad \text{якщо} \quad 0 < p \le q \le \infty;$$

$$[L_p, X_q^\varrho] \supseteq [L_p, X]_q^\varrho, \quad \text{якщо} \quad 0 < q \le p \le \infty \quad \text{і} \quad q \ne \infty.$$

У згаданій вже праці А. Піча [191] наведено також застосування теорії апроксимаційних просторів до доведення відомих результатів про розподіл коефіцієнтів Фур'є і власних значень операторів.

Для будь-якої скалярної функції $f \in L_1$ послідовність коефіцієнтів Фур'є визначається як

$$\xi_1(f) = \int_0^1 f(t)dt,$$

$$\xi_{2m}(f) = 2\int_0^1 f(t)\sin 2\pi mtdt,$$

$$\xi_{2m+1}(f) = 2\int_0^1 f(t)\cos 2\pi mtdt.$$

Класичні результати щодо того, як наближення $(\xi_m(f))$ залежить від певних властивостей функції f виражаються наступними твердженнями [191, с. 130].

Якщо $1/r = \varrho + 1/2$, то твердження $f \in S^{\varrho}_{2,q}$ і $(\xi_m(f)) \in l_{r,q}$ є еквівалентними.

Нехай $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/r = \varrho + 1/p^+$, де $p^+ = \max(2, p')$. Тоді, якщо $f \in S^{\varrho}_{p,q}$, то $(\xi_m(f)) \in l_{r,q}$. Якщо $f \in B^{\varrho}_{p,q}$, то $(\xi_m(f)) \in l_{r,q}$.

Нехай E — комплексний банахів простір. Оскільки кожний оператор $S \in \mathfrak{P}^{\varrho}_{p,q}(E, F)$ можна наблизити операторами скінченного рангу, то S має зчисленну множину власних значень. Нехай $(\lambda_n(S))$ — послідовність власних значень оператора S, занумерована у порядку незростання з урахуванням кратності

$$\lambda_1(S) \geq \lambda_2(S) \geq \ldots \geq 0.$$

Якщо S має менше ніж n власних значень, то покладемо $\lambda_n(S) = 0$. Далі сформулюємо одне цікаве узагальнення теореми Вейля [167].

Теорема 1.2.8. [191, с. 132] *Нехай* $2 \leq p \leq \infty$ *і* $1/r = \varrho + 1/p$. *Тоді, якщо* $S \in \mathfrak{P}^{\varrho}_{p,q}(E, F)$, *то* $(\lambda_n(S)) \in l_{r,q}$.

Х. Альміра і У. Лютер [95] запропонували узагальнення класичних апроксимаційних просторів до більш широких класів просторів. Суть

узагальнення полягає у тому, що замість l_q-норм для означення апроксимаційних просторів використовують інші простори послідовностей $\mathcal{S}$. Умову (1.15) замінюють на більш загальну

$$X_n + X_n \subseteq X_{K(n)},\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.16}$$

з деякими числами $n \le K(n) \le K(n+1)$ і $K(0) := 0$.

Нехай $\mathcal{S}$ — дійсний лінійний простір послідовностей $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ з квазінормою $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$. $\mathcal{S}$ називається допустимим простором послідовностей [95, означення 3.2], якщо виконуються такі умови:

(i) всі скінченні послідовності $\{a_n\}_{n=1}^N$ належать $\mathcal{S}$;

(ii) якщо $0 \le a_n \le b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ і $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{S}$, то

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{S} \ \text{ і } \ \|\{a_n\}\|_{\mathcal{S}} \le \|\{a_n\}\|_{\mathcal{S}};$$

(iii) якщо $a_0 \ge a_1 \ge \ldots \ge 0$ і $\{a_{K(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{S}$, то $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{S}$ і

$$\|\{a_n\}\|_{\mathcal{S}} \le C_{\mathcal{S}} \|\{a_{K(n)}\}\|_{\mathcal{S}},$$

де постійна $C_{\mathcal{S}}$ залежить тільки від $\mathcal{S}$ і $\{K(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Означення 1.2.1. [95, означення 3.4] *Нехай X — квазінормований простір і X_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ — підмножини простору X з $X_0 = 0$, такі, що виконуються умови (1.13), (1.14) і (1.16). Крім того, нехай $\mathcal{S}$ — допустимий простір послідовностей. Тоді простір*

$$X(\mathcal{S}) := \{x \in X : \{\alpha_{n+1}(x, X)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{S}\}$$

з квазінормою $\|x\|_{X,\mathcal{S}} := \|\{\alpha_{n+1}(x, X)\}\|_{\mathcal{S}}$ називається (узагальненим) апроксимаційним простором.

$X(\mathcal{S})$ є квазінормований простір, неперервно вкладений в X. Якщо X і $\mathcal{S}$ — нормовані простори і всі X_n є лінійними підпросторами X, то простір $X(\mathcal{S})$ також нормований.

Теорема 1.2.9. [95, теорема 3.12] *Припустимо, що* $\mathcal{S}$ *має властивість*

$$\|\{a_n\}\|_{\mathcal{S}} \leq \lim_{k\to\infty} \|\{a_n\}_{n=1}^k\|_{\mathcal{S}} \text{ для всіх } \{a_n\} \in \mathcal{S} \text{ з } a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq 0,$$

де постійна $C > 0$ *залежить тільки від* $\mathcal{S}$. *Якщо* X *є повний і виконується одна з наступних умов* (a), (b) *або* (c), *то простір* $X(\mathcal{S})$ *також повний.*

(a) X *є банахів простір, всі* X_n *є лінійними підпросторами* X, $\|\{a_n\}\|_{\mathcal{S}} = \|\{|a_n|\}\|_{\mathcal{S}}$ *для всіх* $\{a_n\} \in \mathcal{S}$ *і кожна послідовність Коші* $\{\mathrm{a}_m\}$ *в* $\mathcal{S}$, *що складається зі спадних послідовностей* $\mathrm{a}_m = \{a_{mn}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq [0,\infty)$, *збіжна в* $\mathcal{S}$.

(b) *Спадна послідовність* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq [0,\infty)$ *належить* $\mathcal{S}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\lim_{k\to\infty} \|\{a_n\}_{n=0}^k\|_{\mathcal{S}} < \infty$ $(\sup_k \|\{a_n\}_{n=0}^k\|_{\mathcal{S}} < \infty)$.

(c) *Спадна послідовність* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq [0,\infty)$ *належить* $\mathcal{S}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\lim\limits_{l\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} \|\{a_n\}_{n=l}^k\|_{\mathcal{S}} = 0$. *Крім того, виконується умова* $\lim\limits_{k\to\infty} \|\{1\}_{n=0}^k\|_{\mathcal{S}} = \infty$.

Очевидно, що $\bigcup_{n=1}^\infty X_n$ є лінійний підпростір кожного апроксимаційного простору $X(\mathcal{S})$. Часто важливо знати, коли $\bigcup_{n=1}^\infty X_n$ є щільний в $X(\mathcal{S})$, або, якщо не щільний, то знайти замикання $\bigcup_{n=1}^\infty X_n$ в $X(\mathcal{S})$.

Теорема 1.2.10. [95, теорема 3.17] *Нехай* $X(\mathcal{S})$ *— апроксимаційний простір. Тоді простір*

$$\mathcal{S}_0 := \left\{\{a_n\} \in \mathcal{S} : \lim_{l\to\infty} \|\{a_n\}_{n=l}^\infty\|_{\mathcal{S}} = 0\right\},$$

наділений квазінормою $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$, *є допустимим простором послідовностей. Якщо* $\{1\}_{n\in\mathbb{N}_0} \notin \mathcal{S}$, *то* $X(\mathcal{S}_0)$ *є замиканням* $\bigcup_{n=1}^\infty X_n$ *в* $X(\mathcal{S})$. *Крім того, якщо* X *і* $\mathcal{S}_0$ *є повними, то простір* $X(\mathcal{S}_0)$ *також повний, якщо* $\lim\limits_{k\to\infty} \|\{1\}_{n=0}^k\|_{\mathcal{S}} = \infty$.

Як наслідок теореми 1.2.10 отримуємо таке твердження: якщо $\{1\}_{n\in\mathbb{N}_0} \notin \mathcal{S}$ і виконується умова

$$\lim_{l\to\infty} \|\{a_n\}_{n=l}^{\infty}\|_{\mathcal{S}} = 0 \text{ для всіх } \{a_n\} \in \mathcal{S} \text{ з } a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq 0,$$

то $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ є щільний в $X(\mathcal{S})$.

Наступні теореми характеризують збіжність в просторі $X(\mathcal{S}_0)$.

Теорема 1.2.11. [95, теорема 3.22] *Нехай x_m $(m \in \mathbb{N})$ і x — елементи простору $X(\mathcal{S}_0)$. Якщо $\lim\limits_{k\to\infty} \|\{1\}_{n=0}^{k}\|_{\mathcal{S}} = \infty$, то наступні твердження є еквівалентні.*

(i) *$x_m \to x$ в $X(\mathcal{S}_0)$;*

(ii) *$x_m \to x$ в X і $\lim\limits_{l\to\infty} \|\{\alpha_{n+1}(x_m, X)\}_{n=l}^{\infty}\|_{\mathcal{S}} = 0$ рівномірно по m.*

Друге твердження (ii) означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $l_0 = l_0(\varepsilon)$, таке, що для всіх m виконується нерівність $\|\{\alpha_{n+1}(x_m, X)\}_{n=l_0}^{\infty}\|_{\mathcal{S}} < \varepsilon$.

Теорема 1.2.12. [95, теорема 3.24] *Нехай $\mathcal{S}_0$ є повний і припустимо, що $\lim\limits_{k\to\infty} \|\{1\}_{n=0}^{k}\|_{\mathcal{S}} = \infty$. Тоді для $\{x_m\} \subseteq X$ наступні твердження є еквівалентні.*

(i) *$\{x_m\}$ збіжна в $X(\mathcal{S}_0)$;*

(ii) *$\{x_m\} \subseteq X(\mathcal{S}_0)$, $\{x_m\}$ збіжна в X, $\lim\limits_{l\to\infty} \|\{\alpha_{n+1}(x_m, X)\}_{n=l}^{\infty}\|_{\mathcal{S}} = 0$ рівномірно по m;*

(iii) *$\{x_m\}$ збіжна в X і $\lim\limits_{l\to\infty} \sup\limits_{k\geq l} \|\{\alpha_{n+1}(x_m, X)\}_{n=l}^{k}\|_{\mathcal{S}} = 0$ рівномірно по m.*

Наступна теорема виражає критерій компактності в $X(\mathcal{S}_0)$.

Теорема 1.2.13. [95, теорема 3.26] *Нехай $\mathcal{S}_0$ є повний і припустимо, що $\lim\limits_{k\to\infty} \|\{1\}_{n=0}^{k}\|_{\mathcal{S}} = \infty$. Тоді для $\mathcal{H} \subseteq X$ наступні твердження є еквівалентні.*

(i) *$\mathcal{H}$ є відносно компактна підмножина в $X(\mathcal{S}_0)$;*

(ii) $\mathcal{H}$ *є підмножина в* $X(\mathcal{S}_0)$, *відносно компактна в* X *і задовольняє умову* $\lim\limits_{l\to\infty} \|\{\alpha_{n+1}(x_m, X)\}_{n=l}^{\infty}\|_{\mathcal{S}} = 0$ *рівномірно по* $x \in \mathcal{H}$;

(iii) $\mathcal{H}$ *є відносно компактна в* X, $\lim\limits_{l\to\infty} \sup\limits_{k\geq l} \|\{\alpha_{n+1}(x_m, X)\}_{n=l}^{k}\|_{\mathcal{S}} = 0$ *рівномірно по* $x \in \mathcal{H}$.

Імплікації (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) *виконуються також і у випадку, коли* $\mathcal{S}_0$ *неповний.*

Як уже зазначалося вище, $X(\mathcal{S})$ неперервно вкладений в X. За певних умов це вкладення є компактним, якщо всі X_n є обмежено компактними, зокрема, якщо всі X_n є скінченновимірними лінійними підпросторами в X. Відзначимо, що підмножина $\mathcal{H}$ в X є обмежено компактна, якщо кожна обмежена підмножина в $\mathcal{H}$ є відносно компактна в X.

Теорема 1.2.14. [95, теорема 3.32] *Нехай* X *є повний і припустимо, що всі* X_n *є обмежено компактні. Якщо* $\lim\limits_{k\to\infty} \|\{1\}_{n=0}^{k}\|_{\mathcal{S}} = \infty$, *то вкладення* $X(\mathcal{S}) \hookrightarrow X$ *є компактним.*

Теорема 1.2.15. [95, теорема 3.33] *Припустимо,що* X *— повний і всі* X_n *— обмежено компактні. Нехай* $\mathcal{S}_1$ *і* $\mathcal{S}_2$ *— допустимі простори послідовностей з такими властивостями:*

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} \|\{1\}_{n=0}^{k}\|_{\mathcal{S}_1} = \infty$;

(ii) $\mathcal{S}_2$ *є повний і* $\|\{a_n\}\|_{\mathcal{S}_2} = \|\{|a_n|\}\|_{\mathcal{S}_2}$ *для всіх* $\{a_n\} \in \mathcal{S}_2$;

(iii) *існує така послідовність* $\{c_l\}_{l\in\mathbb{N}_0} \subseteq [0,\infty)$, $\lim\limits_{l\to\infty} c_l = 0$, *що з* $\{a_n\} \in \mathcal{S}_1$ *і* $a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq 0$ *випливає* $\{a_n\} \in \mathcal{S}_2$ *і*

$$\|\{a_n\}_{n=l}^{\infty}\|_{\mathcal{S}_2} \leq c_l \|\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{S}_1} \quad \text{для всіх} \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді вкладення $X(\mathcal{S}_1) \hookrightarrow X(\mathcal{S}_2)$ *є компактним.*

Нехай X — квазінормований простір і $\{0\} = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X$ задовольняє (1.14) і (1.16). Якщо $\mathcal{S}_1$ і $\mathcal{S}_2$ — допустимі простори послідовностей, то визначений ітераційний простір $(X(\mathcal{S}_1))(\mathcal{S}_2)$, оскільки

$X(\mathcal{S}_1)$, квазінормований простір, що містить всі X_n. Наступна теорема показує, що при певних допустимих $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ виконується рівність $(X(\mathcal{S}_1))(\mathcal{S}_2) = X(\mathcal{S})$.

Теорема 1.2.16. [95, теорема 3.35] *Нехай $\mathcal{S}_1$ і $\mathcal{S}_2$ — допустимі простори послідовностей і визначимо*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) := \left\{ \{a_n\} \in \mathcal{S}_1 : \left\{ \|\{a_{\max\{m,n\}}\}_{m=0}^{\infty}\|_{\mathcal{S}_1} \right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{S}_2 \right\},$$

$$\|\{a_n\}\|_{\mathcal{S}} := \| \left\{ \|\{a_{\max\{m,n\}}\}_{m=0}^{\infty}\|_{\mathcal{S}_1} \right\}_{n=0}^{\infty} \|_{\mathcal{S}_2}.$$

Тоді $\mathcal{S}$ — допустимий простір послідовностей і $(X(\mathcal{S}_1))(\mathcal{S}_2) = X(\mathcal{S})$ (з точністю до еквавалентності квазінорм).

Нехай X — однорідний квазінормований простір, тобто його елементами є 2π-періодичні вимірні функції на $\mathbb{R}$ і виконуються такі умови:

$$x \in X \Rightarrow x_\zeta \in X, \|x\|_X = \|x_\zeta\|_X \text{ для всіх } \zeta \in \mathbb{R}, \text{ де } x_\zeta(t) := x(t-\zeta);$$

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} \|x_\zeta - x_{\zeta_0}\|_X \text{ для всіх } x \in X \text{ і всіх } \zeta_0 \in \mathbb{R}.$$

Однорідність банахових просторів є дуже корисною для вивчення тригонометричних апроксимацій. Наприклад, відомо, що тригонометричні поліноми щільні в однорідних банахових просторах. Наступна теорема показує, що при певних умовах простори $X(\mathcal{S}_0)$ також однорідні.

Теорема 1.2.17. [95, теорема 3.38] *Нехай X — однорідний квазінормований простір і $\lim\limits_{k\to\infty} \|\{1\}_{n=0}^{k}\|_{\mathcal{S}} = \infty$. Якщо $(X_n)_\zeta \subseteq X_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ і всіх $\zeta \in \mathbb{R}$, де $(X_n)_\zeta := \{x_\zeta : x \in X_n\}$, то $X(\mathcal{S}_0)$ – однорідний.*

В термінах апроксимаційних просторів можна описати компактність в банахових просторах [96, 150]. Можливі нелінійні апроксимаційні схеми дозволяють розвинути теорію n-терм апроксимацій, в якій розглядаються наближення нелінійними підмножинами X_n [119, 120, 123, 124].

Апроксимаційні простори типу $X(l_q(\{a_n\}))$ відіграють важливу роль в аналізі рівномірної збіжності методів поліноміальної апроксимації для сингулярних інтегральних рівнянь Коші [162, 163] та інтегро-диференціальних рівнянь [112]. Некласичні простори типу Бєсова, які визначаються поведінкою певних модулів гладкості, можуть бути описані як некласичні апроксимаційні простори, якщо ці модулі еквівалентні K-функціоналам, що пов'язані з найкращими наближеннями нерівностями типу Бернштейна і Джексона.

У контексті розвитку теорії апроксимаційних просторів відзначимо також праці [116–118, 148, 194, 195, 201–203].

1.3. Апроксимація та інтерполяція

У даному параграфі розглянемо взаємозв'язок теорії апроксимаційних просторів з теорією інтерполяції просторів.

Наведемо деякі необхідні відомості з теорії інтерполяції просторів слідуючи в основному фундаментальним працям Й. Берга і Й. Льофстрьома [3] та Х. Трібеля [86].

Нагадаємо деякі основні поняття і позначення теорії категорій [10]. Категорія $\mathcal{K}$ складається із об'єктів $X, Y, Z, \ldots$ і морфізмів $R, S, T, \ldots$. Між об'єктами і морфізмами визначено відношення $T : X \curvearrowright Y$. Якщо $T : X \curvearrowright Y$ і $S : Y \curvearrowright Z$, то існує морфізм ST, що називається добутком (композицією) морфізмів S і T такий, що $ST : X \curvearrowright Z$. Операція добутку морфізмів задовольняє умові асоціативності $T(SR) = (TS)R$. Для кожного об'єкта X із $\mathcal{K}$ існує морфізм $I = I_X$, такий, що для будь-якого морфізму $T : X \curvearrowright X$ маємо $TI = IT = T$.

Нехай $\mathcal{K}_1$ і $\mathcal{K}$ — довільні категорії. Під функтором F із $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}$ розуміють правило, за яким кожному об'єкту X із $\mathcal{K}_1$ ставиться

у відповідність деякий об'єкт $F(X)$ із $\mathcal{K}$ і кожному морфізму T із $\mathcal{K}_1$ — деякий морфізм $F(T)$ із $\mathcal{K}$. При цьому, якщо $T : X \curvearrowright Y$, то $F(T) : F(X) \curvearrowright F(Y)$, $F(ST) = F(S)F(T)$ і $F(I_X) = I_{F(X)}$.

Нехай кожний об'єкт в $\mathcal{K}_1$ є об'єктом в $\mathcal{K}$ і кожний морфізм в $\mathcal{K}_1$ є морфізмом в $\mathcal{K}$. Тоді $\mathcal{K}_1$ є підкатегорія категорії $\mathcal{K}$, якщо співвідношення $F(X) = X$ і $F(T) = T$ визначають функтор із $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}$.

Позначимо через $\mathcal{N}$ категорію всіх нормованих векторних просторів. Об'єктами $\mathcal{N}$ є нормовані векторні простори, а морфізмами — обмежені лінійні оператори. Таким чином, $\mathcal{N}$ є підкатегорія категорії всіх топологічних векторних просторів. Підкатегорією категорії $\mathcal{N}$ є категорія $\mathcal{B}$ всіх банахових просторів.

Топологічні векторні простори X_0 і X_1 є сумісними (утворюють інтерполяційну пару (X_0, X_1)), якщо існує віддільний топологічний простір $\mathcal{X}$, такий, що X_0 і X_1 є його підпросторами. У цьому випадку можна визначити суму $X_0 + X_1$ і перетин $X_0 \cap X_1$. Сума складається зі всіх $x \in \mathcal{X}$, які представляються у вигляді $x = x_0 + x_1$, де $x_0 \in X_0$ і $x_1 \in X_1$.

Згідно з [3, лема 2.3.1], якщо X_0 і X_1 — сумісні нормовані векторні простори, то $X_0 \cap X_1$ — нормований векторний простір з нормою

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max(\|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}).$$

$X_0 + X_1$ також є нормований векторний простір з нормою

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{x = x_0 + x_1} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}).$$

При цьому, якщо X_0 і X_1 — повні простори, то $X_0 + X_1$ і $X_0 \cap X_1$ також повні.

Нехай $\mathcal{K}$ — довільна підкатегорія категорії $\mathcal{N}$, замкнена відносно операцій суми і перетину, а $\mathcal{K}_1$ — категорія всіх сумісних пар $\{X_0, X_1\}$ просторів із $\mathcal{K}$.

Припустимо, що відображення $T : X \mapsto Y$ — це всеможливі обмежені лінійні оператори із X в Y. Морфізми $T : (X_0, X_1) \mapsto (Y_0, Y_1)$ в категорії $\mathcal{K}_1$ — це всеможливі обмежені лінійні оператори із $X_0 + X_1$ в $Y_0 + Y_1$, такі, що відображення $T : X_0 \mapsto Y_0$, $T : X_1 \mapsto Y_1$ є морфізмами із $\mathcal{K}$.

Означення 1.3.1. [3, с. 40] *Нехай (X_0, X_1) — задана пара із $\mathcal{K}_1$. Простір X із $\mathcal{K}$ називається проміжним між X_0 і X_1 (або відносно пари (X_0, X_1)), якщо виконуються неперервні вкладення*

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

Якщо, крім того,

$$T : (X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1) \Rightarrow T : X \mapsto X,$$

то X називається інтерполяційним простором між X_0 і X_1 (або відносно (X_0, X_1)).

Нехай (X_0, X_1) і (Y_0, Y_1) — задані пари із $\mathcal{K}_1$. Тоді два простори X і Y із $\mathcal{K}$ називаються інтерполяційними відносно (X_0, X_1) і (Y_0, Y_1), якщо X і Y — проміжні простори відносно (X_0, X_1) і (Y_0, Y_1) відповідно і

$$T : (X_0, X_1) \mapsto (Y_0, Y_1) \Rightarrow T : X \mapsto Y.$$

Запис $T : (X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)$ означає, що оператор T є обмеженим лінійним відображенням із $X_0 + X_1$ в $X_0 + X_1$, звуження якого на X_0 і X_1 є обмеженими лінійними відображеннями $T : X_0 \mapsto X_0$ і $T : X_1 \mapsto X_1$ відповідно.

Очевидно, що $X_0 \cap X_1$ і $Y_0 \cap Y_1$, $X_0 + X_1$ і $Y_0 + Y_1$ є інтерполяційними просторами відносно (X_0, X_1) і (Y_0, Y_1). Якщо $X = X_0 \cap X_1$ $(X_0 + X_1)$ і $Y = Y_0 \cap Y_1$ $(Y_0 + Y_1)$, то

$$\|T\|_{X,Y} \leq \max(\|T\|_{X_0,Y_0}, \|T\|_{X_1,Y_1}). \tag{1.17}$$

Як звичайно, позначаємо $\|T\|_{X,Y} := \sup\limits_{x\neq 0}(\|Tx\|_Y/\|x\|_X)$.

Якщо виконується (1.17), то X і Y — точні інтерполяційні простори. У випадку, коли виконується нерівність

$$\|T\|_{X,Y} \leq C\max(\|T\|_{X_0,Y_0}, \|T\|_{X_1,Y_1}),$$

X і Y — рівномірні інтерполяційні простори.

Інтерполяційні простори X і Y називаються просторами типу θ $(0 \leq \theta \leq 1)$, якщо

$$\|T\|_{X,Y} \leq C\|T\|^{1-\theta}_{X_0,Y_0}, \|T\|^{\theta}_{X_1,Y_1}. \tag{1.18}$$

У випадку $C = 1$ кажуть, що X і Y — точні інтерполяційні простори типу θ.

Означення 1.3.2. [3, с. 42] *Інтерполяційним функтором (або інтерполяційним методом) на $\mathcal{K}$ називається кожний функтор F із із $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}$, такий, що, якщо (X_0, X_1) і (Y_0, Y_1) — пари із $\mathcal{K}_1$, то $F((X_0, X_1))$ і $F((Y_0, Y_1))$ — інтерполяційні простори відносно (X_0, X_1) і (Y_0, Y_1). Крім того, повинна виконуватися рівність*

$$F(T) = T \quad \text{для всіх} \quad T : (X_0, X_1) \mapsto (Y_0, Y_1).$$

Функтор F називається рівномірним (точним) інтерполяційним, якщо $F((X_0, X_1))$ і $F((Y_0, Y_1))$ — рівномірні (точні) інтерполяційні простори відносно (X_0, X_1) і (Y_0, Y_1). Подібно, F — (точний) функтор типу θ, якщо $F((X_0, X_1))$ і $F((Y_0, Y_1))$ — (точні) інтерполяційні простори типу θ.

В теорії інтерполяції виділяють дійсний і комплексний інтерполяційні методи. До дійсних методів відносяться „методи середніх“ [174, 175], „метод слідів“ [170, 172], „K-метод“ і „J-метод“ [183, 184], а також „L-метод“ [185]. Комплексний метод був розвинений Ліонсом [171], Кальдероном [111] і С. Г. Крейном [60, 61].

У контексті дослідження взаємозв'язку теорії інтерполяції з проблемами апроксимації зупинимося детальніше на дійсних K і J-методах інтерполяції.

На категорії $\mathcal{N}$ визначимо деяке сімейство інтерполяційних функторів $K_{\theta,q}$. Для кожного фіксованого $t > 0$

$$K(t,x) := K(t,x;X_0,X_1) := \inf_{x=x_0+x_1} (\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1})$$

є еквівалентною нормою в просторі X_0+X_1. Для будь-якого $x \in X_0+X_1$ величина $K(t,x)$ є додатною зростаючою і вгнутою функцією від t [3, лема 3.1.1]. Зокрема,

$$K(t,x) \le \max(1,t/s)K(s,x).$$

Нехай $\Phi_{\theta,q}$ — функціонал, визначений на невід'ємних функціях φ формулою

$$\Phi_{\theta,q}(\varphi(t)) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}\varphi(t))^q dt/t\right)^{1/q}, \ 1 \le q \le \infty.$$

Нехай $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$ або $0 \le \theta \le 1$, $q = \infty$. Для цих значень θ і q простір всіх $x \in X_0+X_1$, для яких $\Phi_{\theta,q}(K(t,x)) < \infty$, позначимо через $(X_0,X_1)_{\theta,q} := (X_0,X_1)_{\theta,q;K} := K_{\theta,q}((X_0,X_1))$. За означенням покладемо

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}} := \Phi_{\theta,q}(K(t,x)) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,x))^q dt/t\right)^{1/q}.$$

Теорема 1.3.1. [3, теорема 3.1.2] *$K_{\theta,q}$ — точний інтерполяційний функтор типу θ на категорії $\mathcal{N}$. Крім того, виконується нерівність*

$$K(t,x;X_0,X_1) \le c_{\theta,q} t^\theta \|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}}.$$

Передбачається, що $K_{\theta,q}(T) = T$ для $T : (X_0,X_1) \mapsto (Y_0,Y_1)$.

Для кожного фіксованого $t > 0$ функція

$$J(t,x) := J(t,x;X_0,X_1) := \max(\|x_0\|_{X_0}, t\|x_1\|_{X_1})$$

є еквівалентною нормою в просторі $X_0 \cap X_1$. Для будь-якого $x \in X_0 \cap X_1$ величина $J(t,x)$ є додатною зростаючою і вгнутою функцією від t [3, лема 3.2.1], що задовольняє умови

$$J(t,x) \le \max(1,t/s)J(s,x), \ K(t,x) \le \min(1,t/s)J(s,x).$$

Елементами простору $(X_0,X_1)_{\theta,q;J} := J_{\theta,q}((X_0,X_1))$ є елементи простору $X_0 + X_1$, що представляються у вигляді

$$x = \int_0^\infty u(t)dt/t, \tag{1.19}$$

де $u(t)$ — вимірна в $X_0 + X_1$ функція зі значеннями в $X_0 \cap X_1$, для якої

$$\Phi_{\theta,q}(J(t,u(t))) < \infty. \tag{1.20}$$

Нехай $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$ або $0 \le \theta \le 1$, $q = \infty$. Норма в просторі $J_{\theta,q}((X_0,X_1))$ задається формулою

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q;J}} := \inf_u \Phi_{\theta,q}(J(t,u(t))),$$

де нижня грань береться по всеможливих функціях u, що задовольняють умови (1.19) і (1.20).

Теорема 1.3.2. [3, теорема 3.2.2] *$J_{\theta,q}$ — точний інтерполяційний функтор типу θ на категорії $\mathcal{N}$. Крім того, виконується нерівність*

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q;J}} \le ct^{-\theta}J(t,x;X_0,X_1), \ x \in X_0 \cap X_1,$$

де постійна c не залежить від θ і q.

K і J-методи інтерполяції є еквівалентними, що виражається наступною теоремою.

Теорема 1.3.3. [3, теорема 3.3.1] *Якщо $0 < \theta < 1$ і $1 \le q \le \infty$, то виконується рівність $J_{\theta,q}((X_0,X_1)) = K_{\theta,q}((X_0,X_1))$ (з точністю до еквівалентності норм).*

Наступні дві теореми виражають основні властивості інтерполяційних просторів $(X_0, X_1)_{\theta,q}$.

Теорема 1.3.4. [3, теорема 3.4.1] *Нехай* (X_0, X_1) *— задана пара. Тоді*

a) $(X_0, X_1)_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{1-\theta,q}$;

b) $(X_0, X_1)_{\theta,q} \subset (X_0, X_1)_{\theta,r}$, *якщо* $q \le r$;

c) $(X_0, X_1)_{\theta_0,q_0} \cap (X_0, X_1)_{\theta_1,q_1} \subset (X_0, X_1)_{\theta,q}$, *якщо* $\theta_0 < \theta < \theta_1$;

d) $X_1 \subset X_0 \Rightarrow (X_0, X_1)_{\theta_1,q} \subset (X_0, X_1)_{\theta_0,q}$, *якщо* $\theta_0 < \theta_1$;

e) $X_1 = X_0 \Rightarrow (X_0, X_1)_{\theta,q} = X_0$ *і* $\|x\|_{X_0} = (q\theta(1-\theta))^{1/q}\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}}$.

Теорема 1.3.5. [3, теорема 3.4.2] *Нехай* (X_0, X_1) *— задана пара. Тоді*

a) *якщо* X_0 *і* X_1 *повні, то* $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ *повний;*

b) *при* $q < \infty$ *множина* $X_0 \cap X_1$ *щільна в* $(X_0, X_1)_{\theta,q}$;

c) *замикання* $X_0 \cap X_1$ *в* $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ *є простір* $(X_0, X_1)^0_{\theta,\infty}$ *всіх* x, *таких, що*

$$t^{-\theta}K(t, x; X_0, X_1) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to 0 \quad \textit{і при} \quad t \to \infty;$$

d) *якщо* X_j^0 *позначає замикання* $X_0 \cap X_1$ *в* X_j, *то при* $q < \infty$ *виконуються рівності*

$$(X_0, X_1)_{\theta,q} = (X_0^0, X_1)_{\theta,q} = (X_0, X_1^0)_{\theta,q} = (X_0^0, X_1^0)_{\theta,q}.$$

Метод дійсної інтерполяції можна узагальнити на більш широкі категорії просторів, зокрема, на квазінормовані абелеві групи [3, п. 3.10]. Позначимо через $\mathcal{A}$ категорію всіх квазінормованих абелевих груп, морфізмами якої є обмежені гомоморфізми. Якщо X_0 і X_1 — квазінормовані абелеві групи, то відображення T із X_0 в X_1 називається гомоморфізмом, якщо $T(-x) = -T(x)$ і $T(x+y) = T(x) + T(y)$. Гомоморфізм T називається обмеженим, якщо $\|T\|_{X,Y} := \sup\limits_{x\neq 0}(\|Tx\|_Y/\|x\|_X) < \infty$.

Означення проміжного простору, інтерполяційного простору і інтерполяційного функтора переносяться без змін на випадок категорії $\mathcal{A}$.

Теорема 1.3.6. [3, теорема 3.11.2] *$K_{\theta,q}$ і $J_{\theta,q}$ — інтерполяційні функтори типу θ на категорії $\mathcal{A}$, причому функтор $K_{\theta,q}$ — точний типу θ. Крім того, виконуються нерівності*

$$K(t,x;X_0,X_1) \le c_{\theta,q} t^{\theta} \|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q;K}}$$

при $0<\theta<1$ і $0<q\le\infty$ або $0\le\theta\le 1$ і $q=\infty$;

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q;J}} \le c t^{-\theta} J(t,x;X_0,X_1),\ x\in X_0\cap X_1,$$

де постійна c не залежить від θ.

Зауважимо, що $\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q;K}}$ і $\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q;J}}$ є квазінормами.

Теорема 1.3.7. [3, теорема 3.11.3] *Нехай $0<\theta<1$, $0<q\le\infty$ і (X_0,X_1) — пара квазінормованих абелевих груп. Тоді виконується рівність $J_{\theta,q}((X_0,X_1)) = K_{\theta,q}((X_0,X_1))$ (з точністю до еквівалентності квазінорм).*

Характерною ознакою теорії інтерполяції є нерівність випуклості (1.18). Покажемо, що класичну нерівність Бернштейна можна переписати у вигляді нерівності випуклості, а нерівність Джексона можна записати як нерівність, "двоїсту" до цієї нерівності випуклості.

Нехай $\mathbb{T}$ — одновимірний тор. Нерівність Бернштейна можна записати у вигляді

$$\sup_{\mathbb{T}} |D^k v(t)| \le n^k \sup_{\mathbb{T}} |v(t)|,\ k=0,1,2,\dots, \tag{1.21}$$

де v — множина тригонометричних поліномів, степінь яких не переви-

щує n. Покладемо

$$X_0 = \{\text{тригонометричні поліноми}\};$$

$$X_1 = \{\text{неперервні } 2\pi\text{-періодичні функції}\};$$

$$X_\theta = \{2\pi\text{-періодичні функції } v \text{ із } D^k v \in X_1\},\ \theta = 1/(k+1);$$

$$\|v\|_{X_0} = n^{1/(k+1)},\ \text{де } n \text{ — степінь полінома } v;$$

$$\|v\|_{X_1} = \sup_{\mathbb{T}} |v(t)|^{1/(k+1)},\ \|v\|_{X_\theta} = \sup_{\mathbb{T}} |D^k v(t)|^{1/(k+1)}.$$

Нерівність (1.21) можна записати у вигляді

$$\|v\|_{X_\theta} \le \|v\|_{X_0}^{1-\theta} \|v\|_{X_1}^{\theta},\ 0 < \theta \le 1,\ v \in X_0 \cap X_1.$$

Нерівність Джексона можна записати як

$$\inf \sup_{\mathbb{T}} |v(t) - v_0(t)| \le cn^{-k} \sup_{\mathbb{T}} |D^k v(t)|,$$

де нижня грань береться по всіх тригонометричних поліномах v_0, степінь яких не перевищує n, v — функція, k разів неперервно диференційовна і 2π-періодична. Для кожної функції $v \in X_\theta$ $(0 < \theta \le 1)$ і для кожного n існують функції $v_0 \in X_0$, $v_1 \in X_1$, що задовольняють умову $v_0 + v_1 = v \in X_0 + X_1$ і такі, що

$$\|v_0\|_{X_0} \le cn^{\theta} \|v\|_{X_\theta},\ \|v_1\|_{X_1} \le cn^{\theta-1} \|v\|_{X_\theta}.$$

Основним поняттям класичної теорії апроксимації є поняття найкращого наближення до заданої функції. Розглянемо категорію всіх квазінормованих абелевих груп і для заданої сумісної пари (X_0, X_1) покладемо

$$E(t,x) := E(t,x;X_0,X_1) = \inf_{\|x_0\|_{X_0} \le t} \|x - x_0\|_{X_1},\ 0 < t < \infty.$$

Апроксимаційний простір $E_{\alpha,q}((X_0,X_1))$ визначається як простір всіх $x \in X_0 + X_1$, для яких

$$\|x\|_{E_{\alpha,q}} = \Phi_{-\alpha,q}(E(t,x)),$$

де $0 < \alpha < \infty$ і $0 < q \leq \infty$ або $0 \leq \alpha < \infty$ і $q = \infty$.

Наступна теорема виражає взаємозв'язок апроксимаційного простору $E_{\alpha,q}((X_0, X_1))$ з інтерполяційним простором $K_{\theta,q}((X_0, X_1))$.

Теорема 1.3.8. [3, теорема 7.1.7] *Нехай* (X_0, X_1) *— квазінормована пара і* $\theta = 1/(\alpha+1)$, $r = \theta q$. *Тоді*

$$[E_{\alpha,r}((X_0, X_1))]^\theta = K_{\theta,q}((X_0, X_1)).$$

Розглянемо апроксимаційні простори $E_{\alpha,q}((X_0, X_1))$ для деяких пар (X_0, X_1). Для цього дамо спочатку визначення деяких відомих функціональних просторів.

Нехай $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ — комплексний простір функцій, інтегрованих в степені p по n-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$:

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} < \infty \right\}, \ 1 \leq p < \infty,$$

$$L_\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname{vrai}\max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(\xi)| < \infty \right\}, \ p = \infty,$$

$d\xi$ означає лебегову міру.

Позначимо через $S = S(\mathbb{R}^n)$ множину комплекснозначних швидко спадних нескінченно диференційовних функцій, визначених на n-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$. Як звичайно, $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ означає простір повільно зростаючих узагальнених функцій, спряжений до $S(\mathbb{R}^n)$ [57, глава VI].

Перетворення Фур'є визначається рівністю

$$(Fu)(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi)\, e^{-i\langle \xi, \zeta \rangle} dt, \quad u \in S,$$

де $\langle \xi, \zeta \rangle = \xi_1\zeta_1 + \ldots + \xi_n\zeta_n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Обернене перетворення Фур'є визначається рівністю

$$(F^{-1}u)(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi)\, e^{i\langle \xi, \zeta \rangle} dt, \quad u \in S.$$

Перетворення F і F^{-1} поширюються на S'. Якщо $f \in S'$ і Ff має компактний носій, то $f = f(\xi)$ є аналітичною функцією (регулярною узагальненою функцією) та існують додатні числа C і N, такі, що

$$|f(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^N.$$

Це випливає з теореми Пелі-Вінера [57, с. 226].

Нехай $\mathfrak{X}$ — банахів простір і $s \in \mathbb{R}$. Визначимо банахові простори послідовностей

$$l_p^s(\mathfrak{X}) = \left\{ x = \{x_j\}_{j=0}^{\infty} : x_j \in \mathfrak{X}, \|x\|_{l_p^s(\mathfrak{X})} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsp} \|x_j\|_{\mathfrak{X}}^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

при $1 \leq p < \infty$ і

$$l_\infty^s(\mathfrak{X}) = \left\{ x = \{x_j\}_{j=0}^{\infty} : x_j \in \mathfrak{X}, \|x\|_{l_\infty^s(\mathfrak{X})} = \sup_j 2^{js} \|x_j\|_{\mathfrak{X}} < \infty \right\}$$

при $p = \infty$.

Як звичайно, носій узагальненої функції f позначимо $\operatorname{supp} f$. Покладемо

$$M_j = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \, 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1} \right\}, \; j = 1, 2, \ldots,$$

$$M_0 = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \, |\xi| \leq 2 \}.$$

Означення 1.3.3. [86, с. 200] *Для* $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$ *і* $1 \leq q < \infty$ *покладемо*

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) \colon \; f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\xi), \quad \operatorname{supp} F a_j \subset M_j, \right.$$

$$\left. \|\{a_j\}\|_{l_q^s(L_p)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{sj} \|a_j(\xi)\|_{L_p})^q \right)^{1/q} < \infty \right\};$$

для $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$ *і* $q = \infty$ *покладемо*

$$B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) \colon \; f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\xi), \quad \operatorname{supp} F a_j \subset M_j, \right.$$

$$\left. \|\{a_j\}\|_{l_\infty^s(L_p)} = \sup_j 2^{sj} \|a_j(\xi)\|_{L_p} < \infty \right\}.$$

Для $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$ *і* $1 \le q \le \infty$ *визначимо норму*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \inf_{f=\sum a_j} \|\{a_j\}\|_{l^s_q(L_p)}.$$

Для $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$ *і* $1 < q < \infty$ *покладемо*

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \;=\; \Bigg\{ f \in S'(\mathbb{R}^n)\colon\; f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\xi), \;\; \operatorname{supp} F a_j \subset M_j,$$

$$\|\{a_j\}\|_{L_p(l^s_q)} = \Bigg[\int_{\mathbb{R}^n} \Bigg(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |a_j(\xi)|^q \Bigg)^{p/q} dx \Bigg]^{1/p} < \infty \Bigg\}.$$

Визначимо норму

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} = \inf_{f=\sum a_j} \|\{a_j\}\|_{L_p(l^s_q)}.$$

Для $-\infty < s < \infty$ *і* $1 < p < \infty$ *покладемо*

$$H^s_p(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n).$$

Для $1 < p < \infty$ *покладемо*

$$W^s_p(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n) \quad \textit{при} \quad s = 0, 1, \ldots,$$

$$W^s_p(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{при} \quad 0 < s \neq \textit{цілому числу}.$$

Простори $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ для $s \in \mathbb{N}$ співпадають з відомими просторами Соболєва [78]. Простори $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ для нецілих $s > 0$ є просторами Слободецького [77]. Простори $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ для $s > 0$ співпадають з відомими просторами Лебега (або Ліувілля, або бесселевих потенціалів), введеними Ароншайном і Смітом [98] і Кальдероном [110]. Простори $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ для $s > 0$ є просторами Бєсова [7].

Позначимо через $\mathcal{E}_p$ простір всіх цілих функцій експоненціального типу із $L_p(\mathbb{R}^n)$, тобто, $\mathcal{E}_p$ складається із всіх функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, для яких перетворення Фур'є Ff має компактний носій. Покладемо

$$\|f\|_{\mathcal{E}} = \sup\{|\xi| : \, (Ff)(\xi) \neq 0\}.$$

Простір $\mathcal{E}_p$ є квазінормованим векторним простором, якщо покласти

$$\|f\|_{\mathcal{E}_p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\mathcal{E}}.$$

У прийнятих позначеннях запишемо дві класичні нерівності Бернштейна і Джексона [3, с. 228]:

$$\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \le C_s \|f\|_{\mathcal{E}}^s \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.22}$$

$$E(t, f; \mathcal{E}_p, L_p(\mathbb{R}^n)) \le C_s t^{-s} \|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.23}$$

де $s = 0, 1, \ldots$.

Застосовуючи теорему 1.3.8, нерівність (1.22) можна записати у вигляді

$$\Big(\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/(s+1)} \le C_s \|f\|_{\mathcal{E}_p}^{1-1/(s+1)} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1/(s+1)}.$$

Подібним чином нерівність (1.23) означає, що

$$t^{-1/(s+1)} K(t, f; \mathcal{E}_p, L_p(\mathbb{R}^n)) \le C_s \Big(\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/(s+1)}.$$

Теорема 1.3.9. [3, теорема 7.2.4] *Для довільного* $\alpha > 0$

$$E_{\alpha,r}((\mathcal{E}_p, L_p(\mathbb{R}^n))) = B_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n). \tag{1.24}$$

Рівність (1.24) виражає класичний результат про найкраще наближення цілими функціями експоненціального типу.

Нехай тепер X і Y — два квазінормовані простори, причому (X, X_n) — апроксимаційна схема, визначена у п. 1.2. Припустимо, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset Y \subset X$, так, що $\|y\|_X \le C\|y\|_Y$ для всіх $y \in Y$, і для заданого $\lambda > 0$

$$\alpha_{n+1}(y, X) \le C n^{-\lambda} \|y\|_Y \quad \text{для всіх} \quad y \in Y,\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.25}$$

де постійна C не залежить від λ і y. Крім того, припустимо, що виконується нерівність

$$\|y\|_Y \le C n^{\lambda} \|y\|_X \quad \text{для всіх} \quad y \in X_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.26}$$

Теорема 1.3.10. [119, теорема 38.1] *Нехай X і Y — два квазінормовані простори, (X, X_n) — апроксимаційна схема і $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset Y \subset X$. Припустимо, що існує таке $\lambda > 0$, що виконуються нерівності (1.25) і (1.26), та існує ціле число k, таке, що $X_m + X_n \subseteq X_{k(m+n)}$. Тоді для $\varrho \in (0, \lambda)$ і $0 < q \leq \infty$ існує така постійна $C > 0$, що*

$$\left\|(2^{(j+1)\varrho}\alpha_{2^{(j+1)}}(x, X))\right\|_{l_q} \leq C\left\|(2^{j\varrho}K(2^{-\lambda j}, x; X, Y))\right\|_{l_q} \text{ для всіх } x \in X,$$

$$\left\|(2^{j\varrho}K(2^{-\lambda j}, x; X, Y))\right\|_{l_q} \leq C\left\|(2^{j\varrho}\alpha_{2^j}(x, X))\right\|_{l_q} \text{ для всіх } x \in X.$$

В умовах теореми 1.3.10 виконується рівність

$$X_q^{\varrho} = (X, Y)_{\varrho/\lambda, q}$$

(з точністю до еквівалентності квазінорм).

Таким чином, теорема 1.3.10 дозволяє розв'язати проблему характеризації апроксимаційних просторів, якщо відомий допоміжний простір Y, для якого виконуються нерівності Бернштейна і Джексона, а також відомі характеристики інтерполяційних просторів $(X, Y)_{\varrho/\lambda, q}$.

Відзначимо, що простори X_q^{λ}, $\lambda > 0$, $0 < q \leq \infty$ задовольняють нерівності Бернштейна і Джексона

$$\alpha_{n+1}(y, X) \leq Cn^{-\lambda}\|y\|_{X_q^{\lambda}} \text{ для всіх } y \in Y,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\|y\|_{X_q^{\lambda}} \leq Cn^{\lambda}\|y\|_X \text{ для всіх } y \in X_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, сімейство просторів $\{X_q^{\varrho} : \varrho > 0, 0 < q \leq \infty\}$ є інтерполяційним, тобто, якщо $0 < \varrho_0 < \varrho_1$, $0 < q_0, q_1 \leq \infty$ і $0 < \theta < 1$, то

$$(X_q^{\varrho_0}, X_q^{\varrho_1})_{\theta, q} = X_q^{\varrho}, \quad \varrho = (1 - \theta)\varrho_0 + \theta\varrho_1.$$

Зауважимо також, що апроксимації часто використовується для характеристики інтерполяційних просторів. В деяких випадках K-функціонал

можна реалізувати через апроксимації. Послідовність $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ (можливо, нелінійних) операторів таких, що A_n відображає X в X_n, забезпечує майже найкраще наближення [123, с. 87], якщо існує така постійна $C > 0$, що

$$\|x - A_n x\|_X \leq C\, \alpha_{n+1}(x, X),\ n \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ є стійкою в Y [123, с. 88], якщо існує така постійна $C > 0$, що

$$\|A_n x\|_Y \leq C\, \|x\|_Y,\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.3.11. [120, теорема 3.2] *Нехай X і Y — два квазінормовані простори, (X, X_n) — апроксимаційна схема і $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset Y \subset X$. Припустимо, що існує таке $\lambda > 0$, що виконуються нерівності (1.25) і (1.26), та існує ціле число k, таке, що $X_m + X_n \subseteq X_{k(m+n)}$. Припустимо також, що послідовність операторів $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ забезпечує майже найкраще наближення і є стійкою в Y. Тоді A_n реалізує K-функціонал, тобто*

$$\|x - A_n x\|_X + n^{-\lambda}\|A_n x\|_Y \leq C\, K(n^{-\lambda}, x; X, Y). \tag{1.27}$$

з деякою постійною $C > 0$.

Зауважимо, що нерівність (1.27) також виконується, якщо замість умови майже найкращого наближення припустити, що

$$\|x - A_n x\|_X \leq C\, \alpha_{an}(x, X),\ n \in \mathbb{N}$$

з деякою постійною $a \leq 1$. Це випливає з того, що

$$K((an)^{-\lambda}, x; X, Y) \leq a^{-\lambda} K(n^{-\lambda}, x; X, Y).$$

На практиці стійкість апроксимаційного оператора B_n, що відображає X в X_n, не завжди легко перевірити безпосередньо, але її може

вивести зі стійкості одного конкретного апроксимаційного оператора A_n в поєднанні з оцінками Джексона і Бернштейна. Оператор A_n забезпечує нерівність Джексона, якщо

$$\|y - A_n y\|_X \le C\, n^{-\lambda} \|y\|_Y, \ y \in Y.$$

Теорема 1.3.12. [120, теорема 3.3] *Нехай X і Y — два квазінормовані простори, (X, X_n) — апроксимаційна схема і $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset Y \subset X$. Припустимо, що існує таке $\lambda > 0$, що виконуються нерівності (1.25) і (1.26), та існує ціле число k, таке, що $X_m + X_n \subseteq X_{k(m+n)}$. Припустимо також, що A_n, B_n забезпечують нерівність Джексона і A_n є стійким в Y. Тоді B_n також є стійким в Y.*

Далі наведемо визначення просторів Бєсова у термінах модулів гладкості, що дозволяє узагальнити їх на випадок, коли $0 < p, q \le \infty$.

Позначимо через T_h, $h \in \mathbb{R}^n$, що визначається для функції f як $T_h f = f(\cdot + h)$, і нехай I — тотожний оператор. Тоді, для довільного цілого додатного числа r, $\Delta_h^r = (T_h - I)^r$ — r-ий різницевий оператор з кроком h. Очевидно, $\Delta_h^r = \Delta_h(\Delta_h^{r-1})$. Покладемо

$$\Delta_h^r(f, \xi) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(\xi + hi).$$

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Якщо $f \in L_p(\Omega)$ $(0 < p \le \infty)$, то

$$\omega_r(f, \delta)_p = \sup_{0 \le h \le \delta} \|\Delta_h^r(f, \cdot)\|_{L_p(\Omega)}, \ \delta > 0,$$

означає модуль гладкості r-го порядку функції $f \in L_p(\Omega)$. У випадку $p = \infty$, $L_\infty(\Omega)$ замінюється на $C(\Omega)$ — простір рівномірно неперервних функцій на Ω. Завжди маємо $\omega_r(f, \delta)_p \to 0$ при $\delta \to 0$. Швидкість цієї збіжності є гладкістю функції f.

Нехай $s > 0$, $0 < p, q \le \infty$ і $r := [s] + 1$ (найменше ціле число, більше ніж s). Функція f належить простору Бєсова $B_{p,q}^s(\Omega)$, якщо

скінченним є такий вираз

$$|f|_{B^s_{p,q}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{-s}\omega_r(f,\delta)_p\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{-s}\omega_r(f,\delta)_p, & q = \infty. \end{cases}$$

Норма простору $B^s_{p,q}(\Omega)$ задається як

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\Omega)} := |f|_{B^s_{p,q}(\Omega)} + \|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

При цьому маємо повну аналогію з наведеними вище означеннями апроксимаційних та інтерполяційних просторів. Інтерполяційні властивості просторів $B^s_{p,q}(\Omega)$, а також їх зв'язок зі сплайн апроксимаціями в $L_p(\Omega)$ $(0 < p \le \infty)$ розглянуто у праці Р. Девора і В. Попова [126].

Для заданого натурального числа r і кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $X_n := X_{n,r}$ простір кускових поліномів порядку r з n частинами в $\Omega = [0,1]$. Таким чином, для кожного елемента $S \in X_n$ існує розбиття Λ, що містить n інтервалів $\mathcal{I} \subset \Omega$, які не перетинаються, і поліномів $P_{\mathcal{I}}$ порядку r: $S = \sum_{\mathcal{I}\in\Lambda} P_{\mathcal{I}}\chi_{\mathcal{I}}$, де $\chi_{\mathcal{I}}$ — характеристична функція.

Для $0 < p \le \infty$ визначимо похибку апроксимації

$$\sigma_n(f)_p := \sigma_{n,r}(f)_p := \inf_{S\in X_{n,r}} \|f - S\|_{L_p(\Omega)}.$$

П. П. Петрушевим [187] було встановлено нерівності

$$\sigma_n(f)_p \le Cn^{-r}|f|_{B^r_{\tau,\tau}(\Omega)},$$

$$|f|_{B^r_{\tau,\tau}(\Omega)} \le Cn^r\|f\|_{L_p(\Omega)},$$

де $1/\tau = r + 1/p$ і постійна C залежить тільки від r. Ці нерівності дозволяють отримати наступну характеризацію апроксимаційних просторів $X^s_q := (L_p(\Omega), X_{n,r})^s_q$: якщо $0 < s < r$ і $1/q = s + 1/p$, то

$$X^\varrho_q = (L_p(\Omega), B^r_{\tau,\tau}(\Omega))_{s/r,q} = B^s_{q,q}(\Omega).$$

Інші приклади такого типу можна знайти у праці К. Беннета і Р. Шарплі [104].

Розглянемо також характеризацію просторів Соболєва і Бєсова за допомогою вейвлет-базисів. Вейвлет-базис породжується скінченним сімейством функцій $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_L) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$, таким, що для діадичного куба вигляду $\mathcal{I}_{j,k} = 2^{-j}([0,1)^n + k)$, де $j \in \mathbb{Z}$ і $k \in \mathbb{Z}^n$, визначено

$$\psi_{l;j,k}(\xi) := \psi_{l;\mathcal{I}_{j,k}}(\xi) = 2^{jn/2}\psi_l(2^j\xi - k).$$

Позначимо через $\mathcal{D}$ набір діадичних кубів в $\mathbb{R}^n$ і покладемо $\Lambda = \{(l, \mathcal{I}) : l = 1, \ldots, L, \mathcal{I} \in \mathcal{D}\}$. Ψ є ортонормальна вейвлет-система, якщо множина $\mathcal{S}(\Psi) = \{\psi_{l;\mathcal{I}} : (l, \mathcal{I}) \in \Lambda\}$ утворює ортонормальний базис в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Вейвлет-системи можна розглядати як безумовні базиси для багатьох класичних функціональних просторів, таких, як простори Лебега, Соболєва, Бєсова. Крім того, еквівалентні норми можуть бути виражені за допомогою вейвлет-коефіцієнтів (див., напр., [158, 180]).

Нехай $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_L) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ — ортонормальна вейвлет-система в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Припустимо, що $\psi_l \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ для деякого $\alpha > 0$ і всіх $l = 1, \ldots, L$, та існує $\varepsilon > 0$, таке, що

$$\psi_l(\xi) \le \frac{C}{(1 + |\xi|)^{n+\varepsilon}}, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \ l = 1, \ldots, L. \tag{1.28}$$

Тоді для $1 < p < \infty$ $\mathcal{S}(\Psi)$ — безумовний базис в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Крім того, для всіх $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \Big\| \Big(\sum_{(l,\mathcal{I}) \in \Lambda} |\langle f, \psi_{l;\mathcal{I}} \rangle|^2 |\mathcal{I}|^{-1} \chi_{\mathcal{I}}(\cdot) \Big)^{1/2} \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

Цей результат показано в [164, глава 6] для $n = 1$. Випадок $n > 1$ розглянуто у праці [180, розділ 6.2].

Якщо $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_L) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ — ортонормальна вейвлет-система в $L_2(\mathbb{R}^n)$, що задовольняє умову (1.28), то кожна функція $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ може бути однозначно записана у вигляді

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda(f)\psi_\lambda, \text{ де } a_\lambda(f) = \langle f, \psi_\lambda \rangle.$$

Для $s \geq 0$ і $1 < p < \infty$ покладемо

$$|f|_{W_p^s(\Psi,\mathbb{R}^n)} = \Big\| \Big(\sum_{(l,\mathcal{I})\in\Lambda} |a_{l;\mathcal{I}}(f)|^2 |\mathcal{I}|^{-2(s/n+1/2)} \chi_{\mathcal{I}}(\cdot) \Big)^{1/2} \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

і розглянемо простір Соболєва $W_p^s(\Psi,\mathbb{R}^n)$ як множину всіх функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, для яких $|f|_{W_p^s(\Psi,\mathbb{R}^n)} < \infty$, з нормою

$$\|f\|_{W_p^s(\Psi,\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + |f|_{W_p^s(\Psi,\mathbb{R}^n)}.$$

Нехай $\beta > 0$, $0 < \tau, q \leq \infty$ і $1/\tau = 1/p + \beta/n$. Визначимо простір Бєсова $B_{\tau,q}^{\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)$ як множину всіх функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_\tau(\mathbb{R}^n)$, для яких $|f|_{B_{\tau,q}^{\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)} < \infty$, де

$$|f|_{B_{\tau,q}^{\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)} = \Bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Bigg(\sum_{l=1}^{L} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |a_{l;j,k}(f)|^\tau |\mathcal{I}_{j,k}|^{-\tau(\beta/n+1/2-1/\tau)} \Bigg)^{q/\tau} \Bigg)^{1/q}.$$

Квазінорма на $B_{\tau,q}^{\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)$ визначається як

$$\|f\|_{B_{\tau,q}^{\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_\tau(\mathbb{R}^n)} + |f|_{B_{\tau,q}^{\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)}.$$

При достатніх умовах регулярності на Ψ ці простори є повними, не залежать від Ψ, і збігаються з класичними просторами Соболєва і Бєсова. Характеризації цих просторів присвячено багато наукових праць [106, 151, 198], які, однак, не охоплюють всі випадки (наприклад, коли $\tau < 1$). Альтернативні конструкції вейвлет-систем полягають у визначенні пар біортогональних вейвлет-базисів [119], систем фреймів [149].

Наступні теореми виражають нерівності типу Джексона і Берштейна в термінах норм просторів $W_p^s(\Psi,\mathbb{R}^n)$ і $B_{\tau,q}^{\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.3.13. [125, теорема 2.1] *Нехай $s \geq 0$, $\beta > 0$, $1 < p < \infty$, $0 < \tau, q \leq \infty$, $q < p$ і $1/\tau = 1/p + \beta/n$. Припустимо, що Ψ — ортонормальна вейвлет-система в $L_2(\mathbb{R}^n)$, що задовольняє умову (1.28). Якщо $\tau \leq q$ для всіх $f \in B_{\tau,q}^{s+\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)$, то*

$$\sigma_n(f)_p \leq C n^{-(1/q-1/p)} |f|_{B_{\tau,q}^{s+\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)}, \ n \in \mathbb{N},$$

де $\sigma_n(f)_p := \inf_{S\in X_n} \|f - S\|_{W_p^s(\Psi,\mathbb{R}^n)}$, X_n *— множина всіх елементів вигляду* $\sum_{\lambda\in\Delta} c_\lambda\psi_\lambda$ *і* $\Delta \subset \Lambda$ *містить не більше* n *елементів.*

Якщо $q \le \tau$ *для всіх* $f \in B_{\tau,q}^{s+\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\sigma_n(f)_p \le Cn^{-(1/\tau-1/p)}|f|_{B_{\tau,q}^{s+\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)},\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.3.14. [125, теорема 3.1] *Нехай* $s \ge 0$, $\beta > 0$, $1 < p < \infty$, $0 < \tau, q \le \infty$ *і* $1/\tau = 1/p + \beta/n$. *Припустимо, що* Ψ *— ортонормальна вейвлет-система в* $L_2(\mathbb{R}^n)$, *що задовольняє умову (1.28). Якщо* $\tau \le q$ *для всіх* $S \in X_n$, $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$|S|_{B_{\tau,q}^{s+\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)} \le Cn^{(1/\tau-1/p)}|S|_{W_p^s(\Psi,\mathbb{R}^n)},\ n \in \mathbb{N}.$$

Якщо $q \le \tau(< p)$ *для всіх* $S \in X_n$, $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$|S|_{B_{\tau,q}^{s+\beta}(\Psi,\mathbb{R}^n)} \le Cn^{(1/q-1/p)}|S|_{W_p^s(\Psi,\mathbb{R}^n)},\ n \in \mathbb{N}.$$

У контексті взаємозв'язку апроксимаційних та інтерполяційних просторів відзначимо також результати Н. Я. Кругляка [107, теорем 4.5.7 і 4.5.10], який довів, що для заданої пари квазібанахових просторів (X_0, X_1) наступні твердження є еквівалентні:

(1) для кожної неперервної увігнутої функції $\varphi : (0,1] \to [0,\infty]$, такої, що $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$, існує такий елемент $x \in X_0+X_1$, що виконується еквівалентність $K(t,x;X_0,X_1) \approx \varphi$;

(2) існує $x \in X_0 + X_1$, такий, що

$$\int_0^t K(s,x;X_0,X_1)ds \le \gamma K(t,x;X_0,X_1)$$

для всіх $t \in (0,1]$ і деякого $\gamma > 0$.

Припустимо, що умова (2) виконується для пари (X,Y), $X \subset Y$ і нехай (θ,q), (θ^*,q^*) — дві різні точки із $(0,1]\times[0,\infty]$. Тоді $(X,Y)_{\theta,q} \ne (X,Y)_{\theta^*,q^*}$. Крім того, ці простори строго включені в X.

Теорема 1.3.15. [125, теорема 6.2] *Нехай Y — квазінормований підпростір квазібанахового простору X. Наступні твердження є еквівалентні:*

(i) існує постійна $c > 0$, така, що для всіх $t \in (0, 1]$

$$\sup_{\|x\|_X=1} K(t, x; X, Y) > c;$$

(ii) існує постійна $c > 0$, така, що для кожної строго спадної послідовності додатних чисел $\{t_n\} \in c_0$ маємо

$$\sup_{\|x\|_X=1} K(t_n, x; X, Y) > c, \ n \in \mathbb{N}_0;$$

(iii) існує постійна $c > 0$ і строго спадна послідовність додатних чисел $\{t_n\} \in c_0$, така, що

$$\sup_{\|x\|_X=1} K(t_n, x; X, Y) > c, \ n \in \mathbb{N}_0;$$

(iv) для всіх $b_n \subset [0, \infty)$, таких, що $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ і всіх строго спадних послідовностей додатних чисел $\{t_n\} \in c_0$, підмножина

$$\left\{x \in X : \sup_{n\geq 1} b_n K(t_n, x; X, Y) < \infty\right\}$$

строго включена в X.

Зокрема, якщо виконується (i), то простір $(X, Y)_{\theta,q}$ строго включений в X.

Відзначимо також працю І. Асекрітової і Ю. Брудного [99], в якій доведено узагальнену інтерполяційну теорему для скінченних наборів апроксимаційних просторів, що визначаються багатопараметричним апроксимаційним сімейством. Як наслідок, отримано інтерполяційні результати для скінченних наборів різних типів просторів Бєсова.

Висновки до розділу 1

У даному розділі розглянуто суть операторного підходу до проблем теорії наближень функцій, в рамках якої, зокрема, розв'язується задача найкращого наближення заданої функції алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу. В абстрактному випадку маємо відповідну задачу наближення елементів простору аналітичними, цілими та цілими експоненціального типу векторами, асоційованими з необмеженими операторами.

Розглянуто основні елементи теорії апроксимаційних просторів та напрямки їх сучасних узагальнень.

Представлено деякі необхідні відомості з теорії інтерполяції просторів та теорії класичних просторів Бєсова, а також розглянуто зв'язок теорії апроксимаційних просторів з теорією інтерполяції просторів.

РОЗДІЛ 2

АПРОКСИМАЦІЇ ЦІЛИМИ ВЕКТОРАМИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

2.1. Простори цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів

У комплексному банаховому просторі $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ розглядаємо замкнений необмежений оператор A з щільною областю визначення $\mathcal{C}^1(A)$:

$$A\colon \mathcal{C}^1(A) \subset \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}.$$

Позначимо $\mathcal{C}^{k+1}(A) = \left\{x \in \mathcal{C}^k(A)\colon A^k x \in \mathcal{C}^1(A)\right\}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{C}^\infty(A) = \bigcap \left\{\mathcal{C}^k(A)\colon k \in \mathbb{N}_0\right\}$.

З елементом $x \in \mathcal{C}^\infty(A)$ асоціюються скалярні функції

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k x\|}{k!} z^k \quad \text{і} \quad \hat{x}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k x\|}{z^{k+1}}$$

змінної $z \in \mathbb{C}$, пов'язані між собою перетворенням Лапласа:

$$\hat{x}(z) = L[x(t)] = \int_0^\infty x(t) \exp(-zt)\, dt.$$

Елемент $x \in \mathcal{C}^\infty(A)$ називається *цілим вектором експоненціального типу* $\nu > 0$ оператора A, якщо виконується одна з таких умов (див. [105, теорема 1.1.1]):

(i) $x(z)$ ціла функція експоненціального типу $\nu = \limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln M(r)}{r}$, де $M(r) = \max\limits_{|\lambda|=r} |x(\lambda)|$;

(ii) степеневий ряд $\hat{x}(z)$ такий, що $\nu = \limsup\limits_{k\to\infty} \|A^k x\|^{1/k} < \infty$.

Нехай $0 < \nu < \infty$ і $1 \le p \le \infty$. Розглянемо відображення

$$\mathcal{C}^\infty(A) \ni x \longrightarrow \big\{(A/\nu)^k x \colon k \in \mathbb{N}_0\big\},$$

образом якого є послідовність елементів простору $\mathfrak{X}$. Для будь-якої пари індексів ν, p визначимо нормовані простори

$$\mathcal{E}_p^\nu(A) := \mathcal{E}_p^\nu(A, \mathfrak{X}) := \Big\{x \in \mathcal{C}^\infty(A) \colon \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)} < \infty\Big\},$$

де

$$\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k x\big\|_{\mathfrak{X}}^p\Big)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k x\big\|_{\mathfrak{X}}, & p = \infty. \end{cases}$$

Для спрощення записів надалі використовуємо позначення $\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu} := \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)}$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$.

Елементи просторів $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ є цілими векторами експоненціального типу оператора A і наступна теорема встановлює деякі властивості таких просторів.

Теорема 2.1.1. (i) *Виконуються неперервні вкладення*

$$\mathcal{E}_p^\nu(A) \subset \mathcal{E}_p^\tau(A) \subset \mathcal{E}_\infty^\tau(A) \subset \mathfrak{X} \text{ для } \tau > \nu.$$

(ii) *Простір $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ інваріантний відносно оператора A і звуження $A_\nu := A|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)}$ є обмежений оператор в $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ з нормою $\|A_\nu\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \nu$.*

(iii) *Спектр оператора A має властивість $\sigma\big(A_\nu\big) \subset \sigma(A)$.*

(iv) *Простір $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ повний.*

Д о в е д е н н я. (i) Вкладення $\mathcal{E}_\infty^\nu(A) \subset \mathfrak{X}$ і $\mathcal{E}_p^\nu(A) \subset \mathcal{E}_\infty^\nu(A)$ безпосередньо випливають з нерівностей $\|x\| \le \|x\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu}$ і $\|x\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu}^p \le \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}^p$.

Якщо $x \in \mathcal{E}_p^\nu(A)$, то $\|A^k x\|^p \le \nu^{pk}\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}^p$ і $\|A^k x\|^{p/k} \le \nu^p \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}^{p/k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Звідси випливає, що $\limsup_{k\to\infty} \|A^k x\|^{p/k} \le \nu^p$. Тому, для

будь-якого $\tau > \nu$ ряд $\|x\|^p_{\mathcal{E}^\tau_p} = \sum_k \|\,(A/\tau)^k\,x\|^p$ збіжний. Як наслідок, $x \in \mathcal{E}^\tau_p(A)$. Крім того, $\|x\|^p_{\mathcal{E}^\tau_p} \le \|x\|^p_{\mathcal{E}^\nu_p}$ для всіх $x \in \mathcal{E}^\nu_p(A)$ і $\tau > \nu$.

(ii) Оскільки $A(A/\nu)^k x = \nu(A/\nu)^{k+1}x$, то виконуються нерівності $\|Ax\|_{\mathcal{E}^\nu_\infty} \le \nu\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_\infty}$ і $\|Ax\|^p_{\mathcal{E}^\nu_p} \le \nu^p\|x\|^p_{\mathcal{E}^\nu_p}$ для $1 \le p < \infty$.

(iii) Для будь-якого $\lambda \in \rho(A)$ і $x \in \mathcal{E}^\nu_p(A)$ виконується рівність $(A/\nu)^k(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}(A/\nu)^k x$. Звідси маємо

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_{\mathcal{E}^\nu_p} \le \|(\lambda - A)^{-1}\|\,\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_p} \ \text{ для всіх } \ x \in \mathcal{E}^\nu_p.$$

Отже, λ належить резольвентній множині $\rho\,(A_\nu)$.

(iv) Нехай $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність Коші в просторі $\mathcal{E}^\nu_p(A)$, тобто $\forall\,\varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \|x_n - x_m\|_{\mathcal{E}^\nu_p} < \varepsilon, \ \forall\, n, m \ge n_\varepsilon$. Використовуючи нерівність $\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_p} \ge \|(A/\nu)^k x\|$ для всіх $x \in \mathcal{E}^\nu_p(A)$, маємо, що $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $\big\{(A/\nu)^k x_n \colon n \in \mathbb{N}\big\}$ — послідовності Коші в просторі $\mathfrak{X}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Із повноти простору $\mathfrak{X}$ випливає існування таких $x, y \in \mathfrak{X}$, що $x_n \to x$ і $(A/\nu)^k x_n \to y$ за нормою простору $\mathfrak{X}$. Графік оператора A^k є замкнений в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, тому $y = (A/\nu)^k x$ і $x \in \mathcal{C}^k(A)$. Це виконується для всіх $k \in \mathbb{N}_0$, тому $x \in \mathcal{C}^\infty(A)$ і $(A/\nu)^k x_n \to (A/\nu)^k x$ за нормою простору $\mathfrak{X}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$.

Беручи в $\mathfrak{X}$ границю

$$\|x_n\|_{\mathcal{E}^\nu_p} \le \|x_n - x_{n_\varepsilon}\|_{\mathcal{E}^\nu_p} + \|x_{n_\varepsilon}\|_{\mathcal{E}^\nu_p} \le \varepsilon + \|x_{n_\varepsilon}\|_{\mathcal{E}^\nu_p},$$

при $n \to \infty$, маємо $\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_p} \le \|x_{n_\varepsilon}\|_{\mathcal{E}^\nu_p} + \varepsilon$, тобто $x \in \mathcal{E}^\nu_p(A)$, оскільки $x_{n_\varepsilon} \in \mathcal{E}^\nu_p(A)$. Далі, з нерівності $\|x_n - x_m\|_{\mathcal{E}^\nu_p} < \varepsilon$ при $m \to \infty$ маємо $\|x_n - x\|_{\mathcal{E}^\nu_p} \le \varepsilon$ для всіх $n \ge n_\varepsilon$, так, що простір $\mathcal{E}^\nu_p(A)$ повний. Теорема доведена.

Теорема 2.1.1(i) дозволяє для всіх p $(1 \le p \le \infty)$ визначити підпростір $\mathcal{E}_p(A) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}^\nu_p(A)$ простору $\mathfrak{X}$. Наступна теорема встановлює зв'язок між $\mathcal{E}_p(A)$ і просторами $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$, визначеними у п. 1.1.

Теорема 2.1.2. *Для кожного* p $(1 \le p \le \infty)$ *виконуються вкладення* $\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A) \subset \mathcal{E}^{\tau}_{p}(A)$ *для* $\tau > \nu$ *і рівність* $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A) = \mathcal{E}_p(A)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $x \in \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ маємо $\|A^k x\|^p \le \nu^{pk}\|x\|^p_{\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}}$ або $\|A^k x\|^{p/k} \le \nu^p \|x\|^{p/k}_{\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}}$. Звідси випливає, що $\limsup_{k\to\infty} \|A^k x\|^{p/k} \le \nu^p$. Тому, ряд $\|x\|^p_{\mathcal{E}^{\tau}_p} = \sum_k \|\,(A/\tau)^k\, x\|^p$ збіжний для кожного $\tau > \nu$, тобто $x \in \mathcal{E}^{\tau}_p(A)$. Отже, $\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A) \subset \mathcal{E}^{\tau}_p(A)$.

Постійна c в означенні $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$ не залежить від індексу $k \in \mathbb{N}_0$. Це призводить до рівності $\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \left\{x \in \mathcal{C}^{\infty}(A)\colon \|A^k x\| \le c\,\nu^k\right\}$, а отже, $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)$. Таким чином, із встановленого вище вкладення $\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A) \subset \mathcal{E}^{\tau}_p(A)$ випливає вкладення $\mathfrak{C}_{\{1\}}(A) \subset \mathcal{E}_p(A)$ для будь-якого індексу p. Обернене вкладення $\mathcal{E}_p(A) \subset \mathfrak{C}_{\{1\}}(A)$ випливає з теореми 2.1.1(i). Теорема доведена.

Розглянемо послідовність $\{x_{k,\nu} := (A/\nu)^k x\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ і нехай $\{x^*_{k,\nu}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність, яка складається з тих самих елементів, розміщених в порядку незростання норм

$$\|x^*_{0,\nu}\| \ge \|x^*_{1,\nu}\| \ge \ldots \ge \|x^*_{k,\nu}\| \ge \ldots .$$

Для довільних чисел $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$ визначимо нормовані простори

$$\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A) := \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathcal{C}^{\infty}(A)\colon \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)} < \infty\right\},$$

де

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\|^p k^{\frac{p}{q}-1}\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\| k^{\frac{1}{q}}, & p = \infty. \end{cases}$$

Простори $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ назвемо *просторами типу Лоренца цілих векторів експоненціального типу оператора* A. При $q = p$ отримуємо простори $\mathcal{E}^{\nu}_{p,p}(A) := \mathcal{E}^{\nu}_p(A)$. Якщо $q = p = 1$ або $q = p = \infty$, то покладемо $\mathcal{E}^{\nu}_{1,1}(A) := \mathcal{E}^{\nu}_1(A)$ або $\mathcal{E}^{\nu}_{\infty,\infty}(A) := \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)$, відповідно. В такому

сенсі кажемо, що простори $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ визначені для індексів $1 \le q, p \le \infty$. Для спрощення записів надалі використовуємо також позначення $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p} := \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$.

Теорема 2.1.3. (i) *Якщо* $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$, *то виконується рівність*

$$(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A))_{1-1/q,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A). \tag{2.1}$$

Як наслідок, $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A) \subset \mathcal{E}^{\tau}_{q,p}(A)$ *для всіх* $\tau > \nu$ *і виконується неперервне вкладення* $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A) \subset \mathfrak{X}$.

(ii) *Простір* $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ *повний і звуження* $A|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}}$ *є обмежений оператор в* $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ *з нормою* $\big\|A|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}}\big\| \le \nu$.

Д о в е д е н н я. (i) Для $0 < \tau \le 1$ маємо $K\big(\tau, x; \mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)\big) = \tau\|x^{*}_{0,\nu}\|$. Якщо $x = x^0 + x^1$, $x^0 \in \mathcal{E}^{\nu}_{1}(A)$, $x^1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)$, то

$$\sum_{k=0}^{s-1} \|x^{*}_{k,\nu}\| \le \|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{1}} + s\,\|x^1\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}}, \ s \in \mathbb{N}.$$

Враховуючи, що $x^{0*}_{k,\nu} = x^{*}_{k,\nu} - \frac{x^{*}_{k,\nu}}{\|x^{*}_{k,\nu}\|}\|x^{*}_{s,\nu}\|$ для $k = 0, \dots, s$ і $x^{0*}_{k,\nu} = 0$ для $k > s$, отримуємо

$$\begin{aligned} \|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{1}} + s\,\|x^1\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}} &= \sum_{k=0}^{s-1}\left[x^{*}_{k,\nu} - \frac{x^{*}_{k,\nu}}{\|x^{*}_{k,\nu}\|}\|x^{*}_{s,\nu}\|\right] + s\|x^{*}_{s,\nu}\| \\ &\ge \sum_{k=0}^{s-1}\|x^{*}_{k,\nu}\| - s\|x^{*}_{s,\nu}\| + s\|x^{*}_{s,\nu}\| = \sum_{k=0}^{s-1}\|x^{*}_{k,\nu}\|. \end{aligned}$$

Тому $K\big(s, x; \mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)\big) = \sum_{k=0}^{s-1}\|x^{*}_{k,\nu}\|$ для всіх $s \in \mathbb{N}$.

Для $p < \infty$ і $\vartheta = 1 - 1/q$ маємо

$$\|x\|^{p}_{(\mathcal{E}^{\nu}_{1}, \mathcal{E}^{\nu}_{\infty})_{\vartheta,p}} \sim \sum_{s=1}^{\infty} s^{-\vartheta p-1}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\|x^{*}_{k,\nu}\|\right)^{p} \ge \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1-\vartheta)p-1}\|x^{*}_{s-1,\nu}\|^{p}. \tag{2.2}$$

Для $1/p + 1/p' = 1$ і $0 < \varepsilon < \vartheta$ отримуємо

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^{-\vartheta p-1} \left(\sum_{k=1}^{s-1} \|x^*_{k,\nu}\| \right)^p$$
$$\leq \sum_{s=1}^{\infty} s^{\vartheta p-1} \sum_{k=1}^{s} k^{(1-\vartheta)p-1+\varepsilon p} \|x^*_{k-1,\nu}\|^p \left(\sum_{k=1}^{s} k^{\vartheta p'-1-\varepsilon p'} \right)^{p/p'}$$
$$\leq c \sum_{k=1}^{\infty} k^{(1-\vartheta)p-1} \|x^*_{k-1,\nu}\|^p. \tag{2.3}$$

Із (2.2) і (2.3) випливає (2.1) для $1 \leq p < \infty$. Випадок $p = \infty$ є наслідком еквівалентності норм

$$\|x\|_{(\mathcal{E}_1^\nu, \mathcal{E}_\infty^\nu)_{\vartheta,\infty}} \sim \sup_s s^{-\vartheta} \sum_{k=0}^{s-1} \|x^*_{k,\nu}\| \sim \sup_s s^{1-\vartheta} \|x^*_{s-1,\nu}\|.$$

Нехай $x \in \mathcal{E}_1^\nu(A)$. Тоді $x \in \mathcal{E}_\infty^\nu(A)$, оскільки

$$\|x\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \left\| (A/\nu)^k x \right\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left\| (A/\nu)^k x \right\| = \|x\|_{\mathcal{E}_1^\nu}. \tag{2.4}$$

З іншого боку, якщо $x \in \mathcal{E}_\infty^\nu(A)$, то $\|A^k x\| \leq \nu^k \|x\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu}$, а тому $\|A^k x\|^{1/k} \leq \nu \|x\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu}^{1/k}$. Отже, $\limsup\limits_{k\to\infty} \|A^k x\|^{1/k} \leq \nu$ і для будь-якого $\tau > \nu$ ряд $\|x\|_{\mathcal{E}_1^\tau} = \sum_k \left\| (A/\tau)^k x \right\|$ збіжний. Як наслідок, $x \in \mathcal{E}_1^\tau(A)$. Таким чином, для кожного $\tau > \nu$ виконується вкладення

$$\mathcal{E}_1^\nu(A) \subset \mathcal{E}_\infty^\nu(A) \subset \mathcal{E}_1^\tau(A). \tag{2.5}$$

Із (2.1) і (2.5) для кожного $\tau > \nu$ маємо

$$\mathcal{E}_{q,p}^\nu(A) \subset \mathcal{E}_\infty^\nu(A) \subset \mathcal{E}_1^\tau(A) \subset \mathcal{E}_{q,p}^\tau(A).$$

Це означає, що $\mathcal{E}_{q,p}^\nu(A) \subset \mathcal{E}_{q,p}^\tau(A)$. Із (2.4) випливає, що перше вкладення в (2.5) неперервне. Нерівність $\|x\| \leq \|x\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu}$ дає неперервність вкладення $\mathcal{E}_\infty^\nu(A) \subset \mathfrak{X}$. Із рівності (2.1) і відомих інтерполяційних властивостей (див. [86, теорема 1.3.3]) випливає неперервність вкладення $\mathcal{E}_{q,p}^\nu(A) \subset \mathfrak{X}$.

(ii) Згідно з теоремою 2.1.1(iv) простори $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ для $p=1,\infty$ повні. Тому з рівності (2.1) випливає, що простір $\mathcal{E}_{q,p}^\nu(A)$ повний для всіх p,q.

Для кожного $x\in\mathcal{E}_{q,p}^\nu(A)$ виконуються нерівності

$$\|Ax\|_{\mathcal{E}_{q,p}^\nu}^p=\nu^p\sum_{k\in\mathbb{N}_0}(k+1)^{\frac{p}{q}-1}\big\|\,(A/\nu)^k\,x\big\|^p\le\nu^p\|x\|_{\mathcal{E}_{q,p}^\nu}^p\quad\text{для}\quad 1\le p<\infty,$$

$$\|Ax\|_{\mathcal{E}_{q,p}^\nu}=\nu\sup_{k\in\mathbb{N}_0}(k+1)^{1/q}\big\|\,(A/\nu)^k\,x\big\|\le\nu\|x\|_{\mathcal{E}_{q,p}^\nu}\quad\text{для}\quad p=\infty.$$

Звідси випливає інваріантність і обмеженість оператора $A|_{\mathcal{E}_{q,p}^\nu}$ в $\mathcal{E}_{q,p}^\nu(A)$. Теорема доведена.

Нехай $1\le p\le\infty$ і $\big\{\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність просторів, що відповідає неспадній послідовності додатних чисел $\{\nu(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, такій, що $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(n)=\infty$. Для $1\le q<\infty$ визначимо простір

$$\ell_q\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A)\big]=\left\{x\in\mathfrak{X}:\,x=\sum_{n=1}^\infty x_n,\,x_n\in\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A),\,\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n)}}^q<\infty\right\}$$

з нормою $\|x\|_{\ell_q[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}]}=\inf\left(\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n)}}^q\right)^{1/q}$, де $\inf$ береться по всіх зображеннях $\sum x_n$ елемента x.

Теорема 2.1.4. *Виконується така рівність:*

$$\ell_q\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A)\big]=\overline{\mathcal{E}_p(A)},$$

де справа замикання за нормою простору $\mathfrak{X}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $x\in\ell_q\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A)\big]$ і $x=\sum_{n=1}^\infty x_n$. Оскільки $\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|\le\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n)}}$, то ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n$ збіжний в $\overline{\mathcal{E}_p(A)}$. З нерівностей

$$\|x\|\le\inf\left(\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n)}}\right)\le\|x\|_{\ell_q[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}]}\ \text{ для всіх }\ x\in\ell_q\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A)\big]$$

випливає вкладення $\ell_q\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A)\big]\subset\overline{\mathcal{E}_p(A)}$.

З іншого боку, $\mathcal{E}_p(A) \subset \ell_q\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A)\big]$ і $\|x\|_{\ell_q[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}]} \le \|x\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n)}}$ для всіх $x \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A)$. Звідси $\|x\|_{\ell_q[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}]} \le \|x\|$ для всіх $x \in \mathcal{E}_p(A)$ і виконується вкладення $\overline{\mathcal{E}_p(A)} \subset \ell_q\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(A)\big]$. Теорема доведена.

Окремо виділимо випадок, коли оператор має точковий спектр і встановимо для такого оператора зв'язок між його кореневими векторами та цілими векторами експоненціального типу.

Означення 2.1.1. *Оператор A називається оператором з точковим спектром, якщо спектр $\sigma(A)$ складається із ізольованих точок $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, що є власними значеннями, з можливою єдиною точкою скупчення на нескінченності.*

Лема 2.1.1. *Якщо A — оператор з точковим спектром, то виконується така рівність*

$$\sigma(A) = \bigcup_{\nu>0} \sigma(A_\nu).$$

Д о в е д е н н я. Для будь-якого власного значення $\lambda_j \in \sigma(A)$ відповідний власний вектор x_j належить простору $\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$, якщо $\nu > |\lambda_j|$, оскільки $\|x_j\|_{\mathcal{E}_p^{\nu}} = \nu\left(\nu^p - \lambda^p\right)^{-1/p}\|x_j\|$. Звідси отримуємо вкладення $\sigma(A) \subset \bigcup_{\nu>0}\sigma(A_\nu)$.

З іншого боку, для довільного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ маємо

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)^{-1}x\|_{\mathcal{E}_p^{\nu}} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|A^k(\lambda I - A)^{-1}x\|}{\nu^k}\right)^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|(\lambda I - A)^{-1}A^k x\|}{\nu^k}\right)^p\right)^{1/p} \\
&\le \|(\lambda I - A)^{-1}\|\|x\|_{\mathcal{E}_p^{\nu}}.
\end{aligned}$$

Наведені співвідношення є коректні, оскільки простір $\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$ належить простору $\mathcal{C}^{\infty}(A)$, а для всіх $x \in \mathcal{C}^{\infty}(A)$ виконується рівність $A^k(\lambda I - A)^{-1}x = (\lambda I - A)^{-1}A^k x$.

Тому отримуємо $\lambda \in \bigcap_{\nu>0} \rho(A_\nu)$, де $\rho(A_\nu)$ є резольвентна множина оператора A_ν в просторі $\mathcal{E}_p^\nu(A)$. Звідси, $\rho(A) \subset \bigcap_{\nu>0} \rho(A_\nu)$ або $\bigcup_{\nu>0} \sigma(A_\nu) \subset \sigma(A)$. Лема доведена.

Наступна теорема описує простори векторів експоненціального типу оператора A з точковим спектром як лінійну оболонку образів проекторів Ріса на простір $\mathfrak{X}$. Позначимо через $\mathcal{P}^\nu(\mathfrak{X})$ комплексну лінійну оболонку всіх $\left\{P_{\lambda_j}(\mathfrak{X})\colon |\lambda_j| < \nu\right\}$, де $P_{\lambda_j} = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_j} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$ — проектор Ріса і γ_j — така замкнена крива, що охоплює власне значення $\lambda_j \in \sigma(A_\nu)$ і не охоплює інші точки спектру $\sigma(A)$.

Теорема 2.1.5. *Нехай A — оператор з точковим спектром. Тоді для будь-яких чисел $\nu > 0$ і p $(1 \le p < \infty)$ виконується рівність*

$$\mathcal{E}_p^\nu(A) = \mathcal{P}^\nu(\mathfrak{X}). \tag{2.6}$$

Д о в е д е н н я. Для будь-якого $x \in \mathcal{E}_p^\nu(A)$ і $\lambda \in \rho(A)$ маємо $\|(\lambda I - A)^{-1}x\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \|(\lambda I - A)^{-1}\|\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$ і $(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x = x$. Тому, $(\lambda I_\nu - A_\nu)^{-1} := (\lambda I - A)^{-1}|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)}$ є резольвента оператора A_ν, I_ν — одиничний оператор в $\mathcal{E}_p^\nu(A)$.

З леми 2.1.1 і обмеженості A_ν випливає, що спектр $\sigma(A_\nu)$ оператора A в $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ складається з ізольованих точок. Для довільного власного значення $\lambda_j \in \sigma(A_\nu)$ норма $\|x_j\|_{\mathcal{E}_p^\nu} = \left(\sum_{k=0}^\infty \left((|\lambda_j|/\nu)^k \|x_j\|\right)^p\right)^{1/p}$ відповідного власного вектора x_j скінченна. Тому $\max\limits_{\lambda_j \in \sigma(A_\nu)} |\lambda_j| < \nu$.

Нехай Γ_ν — замкнена крива, що охоплює всі точки множини $\sigma(A_\nu)$ і не охоплює інші точки спектру $\sigma(A)$. Тоді

$$P_\nu = \sum_{\lambda_j \in \sigma(A_\nu)} P_{\lambda_j}, \quad \text{де} \quad P_\nu = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\nu} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

Оскільки $P_{\lambda_j} P_{\lambda_k} = 0$ для $j \ne k$, маємо $P_\nu(\mathfrak{X}) = \mathcal{P}^\nu(\mathfrak{X})$. Крім того, $I_\nu = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\nu} (\lambda I_\nu - A_\nu)^{-1} d\lambda$ і $(\lambda I - A)^{-1}|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)} = (\lambda I_\nu - A_\nu)^{-1}$, а тому $I_\nu = P_\nu|_{\mathcal{E}_p^\nu(A)}$ і виконується вкладення $\mathcal{E}_p^\nu(A) \subset \mathcal{P}^\nu(\mathfrak{X})$.

З іншого боку, спектральний радіус звуження $T_\nu := A|_{P_\nu(\mathfrak{X})}$ оператора A на підпростір $P_\nu(\mathfrak{X})$ менший ніж ν, тобто $\lim\limits_{k\to+\infty} \|T_\nu^k\|^{1/k} < \nu$. Тому отримуємо

$$\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\|(A/\nu)^k x\right\|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\left\|(T_\nu/\nu)^k\right\| \|x\|\right)^p\right)^{1/p} < \infty$$

для всіх $x \in P_\nu(\mathfrak{X})$ і $\mathcal{P}^\nu(\mathfrak{X}) \subset \mathcal{E}_p^\nu(A)$. Теорема доведена.

Наслідок 2.1.1. *Нехай A — оператор з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень λ_j, які є полюсами резольвенти $R_\lambda(A)$, $\mathcal{R}^\nu(A)$ — комплексна лінійна оболонка об'єднання всіх кореневих підпросторів $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) = \{x \in \mathcal{C}^\infty(A) : (A - \lambda_j I)^{r_j} x = 0\}$, для яких $|\lambda_j| < \nu$ (r_j — порядок λ_j як полюса резольвенти $R_\lambda(A)$). Тоді для будь-яких чисел $\nu > 0$ і p $(1 \leq p < \infty)$ виконується рівність*

$$\mathcal{E}_p^\nu(A) = \mathcal{R}^\nu(A). \tag{2.7}$$

Д о в е д е н н я. Згідно з [19, с. 616], [58, с. 226], проектор $P_{\lambda_j} = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\gamma_j} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$ відображає $\mathfrak{X}$ на кореневий підпростір $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$ і $\mathcal{R}^\nu(A) = P_\nu(\mathfrak{X})$.

Рівність (2.7) випливає тепер з (2.6).

Нехай $\mathcal{S}_{\lambda_j}(A) = \{x \in \mathcal{C}^\infty(A) : (\lambda_j I - A)x = 0\}$ — підпростір власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda_j \in \sigma(A)$ і $\mathcal{S}^\nu(A)$ — комплексна лінійна оболонка всіх $\mathcal{S}_{\lambda_j}(A)$ таких, що $|\lambda_j| = \nu$, $\lambda_j \in \sigma(A)$. Визначимо пряму суму $\mathcal{Q}^\nu(A) = \mathcal{R}^\nu(A) \oplus \mathcal{S}^\nu(A)$ і покажемо, що вона співпадає з $\mathcal{E}_\infty^\nu(A)$, тобто виконується така рівність

$$\mathcal{E}_\infty^\nu(A) = \mathcal{Q}^\nu(A). \tag{2.8}$$

Застосовуючи [71, лема 1], для оператора з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень, які є полюсами резольвенти

$R_\lambda(A)$, маємо

$$\mathcal{E}_\infty^\nu(A) \subset \oplus_{j:|\lambda_j|\le\nu}\mathcal{R}_{\lambda_j}(A).$$

Тому достатньо довести рівність

$$\mathcal{S}_{\lambda_j}(A) = \mathcal{E}_\infty^\nu(A)\bigcap\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) \tag{2.9}$$

для індексів j, таких, що $|\lambda_j| = \nu$. Припустимо, що остання рівність не виконується. Тоді існують кореневі вектори $x_0, \dots, x_r$, що відповідають λ_j, такі, що $|\lambda_j| = \nu$ і $x_r \in \mathcal{E}_\infty^\nu(A)$, $r \ge 1$. Із рівності

$$A^k x_r = \sum_{i=0}^{r}\binom{k}{i}\lambda_j^{k-i}x_{r-i},\ k \ge r$$

маємо

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|A^k x_r\|}{\binom{k}{r}\nu^k} = \nu^{-r}\|x_0\|.$$

Оскільки $x_0 \ne 0$, то $\nu^{-r}\|x_0\| \ne 0$ і $x_r \notin \mathcal{E}_\infty^\nu(A)$. Таким чином, для всіх j, таких, що $|\lambda_j| = \nu$ виконується рівність (2.9), а отже, й рівність (2.8).

Далі дамо простий критерій того, що у випадку самоспряженого оператора підпростір $\mathcal{E}_1(A)$ співпадає зі спектральним підпростором оператора A.

Твердження 2.1.1 *Нехай сильно неперервна група $\mathbb{R} \ni t \to e^{itA}$ на $\mathfrak{X}$, генерована iA, така, що $\limsup\limits_{|t|\to\infty}\|e^{itA}x\| = M_x < \infty$ для всіх $x \in \mathfrak{X}$. Тоді вкладення $\mathcal{E}_1(A) \looparrowright \mathfrak{X}$ є щільним.*

Д о в е д е н н я. Нехай функція $f \in L_1(\mathbb{R})$ є звуженням на $\mathbb{R}$ цілої функції експоненціального типу $\tau > 0$, так, що $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$ і $P_\alpha = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)e^{itA}dt$ для $\alpha > 0$. Існує постійна $c > 0$ незалежна від k, така, що виконується нерівність Бернштейна $\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(k)}(t)|\,dt \le c\tau^k$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ [68, p. 115]. З відомої рівності $\lim_{|t|\to\infty}|f^{(k)}(t)| = 0$ (див. [68,

теорема 3.2.5]) інтегруванням частинами маємо

$$\begin{aligned}(iA)^k P_k x &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)(iA)^k e^{itA} x\, dt \\ &= \alpha^k \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(t)\, e^{it/\alpha\, A} x\, dt, \quad x \in \mathfrak{X}.\end{aligned}$$

Із нерівності Бернштейна випливає, що

$$\|A^k P_\alpha x\| \le c\|x\|(\tau\alpha)^k$$

для всіх $x \in \mathfrak{X}$. Як наслідок,

$$\|A^k P_\alpha x\|^{1/k} \le (c\|x\|)^{1/k}\tau\alpha, \quad \limsup_{k\to\infty} \|A^k P_\alpha x\|^{1/k} \le \tau\alpha.$$

Якщо $\nu > \tau\alpha$, то $P_\alpha x \in \mathcal{E}_1^\nu(A)$ для всіх $x \in \mathfrak{X}$. Отже,

$$\bigcup_{\alpha>0} \{P_\alpha x : x \in \mathfrak{X}\} \subset \mathcal{E}_1(A).$$

Використовуючи рівність $P_\alpha x - x = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)(e^{itA}x - x)\, dt$, покажемо, що

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|P_\alpha x - x\| = 0, \quad x \in \mathfrak{X}. \tag{2.10}$$

Оскільки $\mathfrak{X}$-значна функція $\mathbb{R} \ni t \to e^{itA}x - x$ є неперервна при $t = 0$, для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що $\max_{|t|\le\delta} \|e^{itA}x - x\| \le \varepsilon$. Таким чином,

$$\begin{aligned}\|P_\alpha x - x\| &\le \varepsilon \int_{|t|\le\delta} |\alpha f(\alpha t)|\, dt + \int_{|t|>\delta} |\alpha f(\alpha t)|\, \|e^{itA}x - x\|\, dt \\ &\le \varepsilon \int_{|t|\le\delta\alpha} |f(t)|\, dt + \max_{|t|>\delta\alpha} \|e^{itA}x - x\| \int_{|t|>\delta\alpha} |f(t)|\, dt\,.\end{aligned}$$

Оскільки $\limsup_{|t|\to\infty} \|e^{itA}x - x\| \le M_x + \|x\| < \infty$ для всіх $x \in \mathfrak{X}$, то отримуємо

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} \|P_\alpha x - x\| &\le \varepsilon\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} + (M_x + \|x\|) \lim_{\alpha\to\infty} \int_{|t|>\delta\alpha} |f(t)|\, dt \\ &= \varepsilon\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Оскільки ε довільне, то рівність (2.10) встановлено. Таким чином, об'єднання $\bigcup_{\alpha>0}\{P_\alpha x\colon x\in\mathfrak{X}\}$, а отже, $\mathcal{E}_1(A)$ щільні в $\mathfrak{X}$. Теорема доведена.

Зауваження 2.1.1 *Якщо A самоспряжений оператор в $\mathfrak{X}$, то група e^{itA} є унітарна за теоремою Стоуна. Отже, в цьому випадку $M_x\equiv 1$ і вкладення $\mathcal{E}_1(A)\hookrightarrow\mathfrak{X}$ щільне.*

2.2. Апроксимаційні простори типу Бєсова

У комплексному банаховому просторі $(\mathfrak{X},\|\cdot\|)$ розглядаємо замкнений необмежений оператор A з щільною областю визначення $\mathcal{C}^1(A)$.

Нехай $0<\nu<\infty$, $1\le q,p\le\infty$ і $\mathcal{E}^\nu_{q,p}(A)$ — простори типу Лоренца цілих векторів експоненціального типу оператора A, визначені вище. На підпросторі $\mathcal{E}_{q,p}(A):=\bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}^\nu_{q,p}(A)$ визначимо функцію

$$|x|_{\mathcal{E}_{q,p}}:=\|x\|+\inf\left\{\nu>0\colon x\in\mathcal{E}^\nu_{q,p}(A)\right\}. \tag{2.11}$$

Лема 2.2.1. *Функція* (2.11) *є квазінормою на $\mathcal{E}_{q,p}(A)$, що задовольняє нерівність*

$$|x+y|_{\mathcal{E}_{q,p}}\le|x|_{\mathcal{E}_{q,p}}+|y|_{\mathcal{E}_{q,p}}\quad\text{для всіх}\quad x,y\in\mathcal{E}_{q,p}(A).$$

Крім того, виконується неперервне вкладення $\mathcal{E}_{q,p}(A)\subset\mathfrak{X}$.

Д о в е д е н н я. Дійсно, покладемо $r(x)=\inf\left\{\nu>0\colon x\in\mathcal{E}^\nu_{q,p}(A)\right\}$. Для всіх $x,y\in\mathcal{E}_{q,p}(A)$ і $\varepsilon>0$ величини $\|x\|_{\mathcal{E}^{r(x)+\varepsilon}_{q,p}}$, $\|y\|_{\mathcal{E}^{r(y)+\varepsilon}_{q,p}}$ є скінченними і виконуються нерівності

$$\|x+y\|_{\mathcal{E}^{r+\varepsilon}_{q,p}}\le\|x\|_{\mathcal{E}^{r+\varepsilon}_{q,p}}+\|y\|_{\mathcal{E}^{r+\varepsilon}_{q,p}}\le\|x\|_{\mathcal{E}^{r(x)+\varepsilon}_{q,p}}+\|y\|_{\mathcal{E}^{r(y)+\varepsilon}_{q,p}},$$

де $r = \max\{r(x), r(y)\}$. Звідси випливає, що

$$r(x+y) \le r + \varepsilon \le r(x) + r(y) + \varepsilon.$$

Оскільки ε довільне, то $r(x+y) \le r(x) + r(y)$ для всіх $x, y \in \mathcal{E}_{q,p}(A)$. Очевидно, $r(x) = r(-x)$ для всіх $x \in \mathcal{E}_{q,p}(A)$. Отже, $|\cdot|_{\mathcal{E}_{q,p}}$ — квазінорма. Вкладення $\mathcal{E}_{q,p}(A) \subset \mathfrak{X}$ безпосередньо випливає з (2.11). Лема доведена.

Якщо $q = p$, то $\mathcal{E}_{p,p}(A) = \mathcal{E}_p(A) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_p^\nu(A)$ — підпростори цілих векторів експоненціального типу і

$$|x|_{\mathcal{E}_{p,p}} = |x|_{\mathcal{E}_p} := \|x\| + \inf\left\{\nu > 0 \colon x \in \mathcal{E}_p^\nu(A)\right\}. \tag{2.12}$$

Як наслідок леми 2.2.1, функція (2.12) є квазінормою на $\mathcal{E}_p(A)$, що задовольняє нерівність

$$|x+y|_{\mathcal{E}_p} \le |x|_{\mathcal{E}_p} + |y|_{\mathcal{E}_p} \text{ для всіх } x, y \in \mathcal{E}_p(A),$$

і вкладення $\mathcal{E}_p(A) \subset \mathfrak{X}$ неперервне.

Лема 2.2.2. *Квазінормований простір $\mathcal{E}_{q,p}(A)$ повний.*

Д о в е д е н н я. Нехай (x_n) є фундаментальна послідовність в $\mathcal{E}_{q,p}(A)$. Вона є рівномірно обмежена, тобто, $\exists \sigma > 0 :\ |x_n|_{\mathcal{E}_{q,p}(A)} < \sigma$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\inf\left\{\mu \colon (x_n) \subset \mathcal{E}_{q,p}^\mu(A)\right\} < \sigma$, маємо $(x_n) \subset \mathcal{E}_1^\nu(A)$ для $\nu > \sigma$.

За означенням $\|x\|_{\mathcal{E}_1^\nu(A)} = \nu \hat{x}(\nu)$ кожного $x \in \mathcal{E}_1^\nu(A)$, де $\hat{x}(z) = L[x(t)] = \displaystyle\int_0^\infty x(t) \exp(-zt)\, dt$ для $\{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} z| > h^x\}$ є перетворення Лапласа цілої функції $x(\lambda)$ змінної $\lambda \in \mathbb{C}$ експоненціального типу $h^x < \nu$.

Таким чином, послідовність $\{[0,\infty) \ni t \mapsto x_n(t) \exp(-t\nu) \colon n \in \mathbb{N}\}$ рівномірно абсолютно обмежена постійною $K_\nu > 0$ для всіх $t \ge 0$.

За теоремою Бернштейна про компактність [68, теорема 3.3.6] існує збіжна підпослідовність $\{x_{n_i}(t) \exp(-t\nu) \colon i \in \mathbb{N}\}$ в топології рівномірної збіжності по $t \in [0, r]$ для всіх $r > 0$. Отже, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$:

$\sup\limits_{t\in[0,r_\varepsilon]} |x_{n_i}(t) - x_{m_i}(t)| \exp(-t\nu) < \varepsilon$, $\forall n_i, m_i \geq n_\varepsilon$, де $r = r_\varepsilon > 0$ вибране таке велике, що $K_\nu \exp(-r_\varepsilon \nu) < \varepsilon$. Тому,

$$\begin{aligned}
&\|x_{n_i} - x_{m_i}\|_{\mathcal{E}_1^{2\nu}(A)} = 2\nu L[|x_{n_i}(t) - x_{m_i}(t)|] \\
&= 2\nu \int_0^\infty |x_{n_i}(t) - x_{m_i}(t)| \exp(-2t\nu)\, dt \\
&= 2\nu \left(\int_0^{r_\varepsilon} + \int_{r_\varepsilon}^\infty \right) [|x_{n_i}(t) - x_{m_i}(t)| \exp(-t\nu)] \exp(-t\nu)\, dt \\
&\leq 2\nu\varepsilon \int_0^{r_\varepsilon} \exp(-t\nu)\, dt + 2\nu K_\nu \int_{r_\varepsilon}^\infty \exp(-t\nu)\, dt \\
&= 2\varepsilon[1 - \exp(-r_\varepsilon\nu)] + 2K_\nu \exp(-r_\varepsilon\nu) < 4\varepsilon, \quad n_i, m_i \geq n_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким чином, (x_{n_i}) є фундаментальна в $\mathcal{E}_1^{2\nu}(A)$. Простір $\mathcal{E}_1^{2\nu}(A)$ повний. Як наслідок, існує $x_0 \in \mathcal{E}_1^{2\nu}(A)$ така, що $x_{n_i} \to x_0$ при $i \to \infty$, а тому $x_n \to x_0$ в $\mathcal{E}_1^{2\nu}(A)$. Отже, $\mathcal{E}_{q,p}(A)$ повний. Лема доведена.

Розглянемо функціонал вигляду

$$E_{q,p}(t,x) = \inf\left\{\|x - x^0\| \colon x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}(A),\ |x^0|_{\mathcal{E}_{q,p}} \leq t\right\},\ x \in \mathfrak{X}.$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \leq \infty\}$ або $\{0 \leq s < \infty, \tau = \infty\}$ визначимо шкалу просторів

$$\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A) := \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathfrak{X} :\ |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)} < \infty\right\},$$

де

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^s E_{q,p}(t,x)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E_{q,p}(t,x), & \tau = \infty. \end{cases}$$

Для спрощення записів використовуємо позначення $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau} := \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$.

Лема 2.2.3. *Функція* $|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)}$ *є квазінормою на* $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$.

Д о в е д е н н я. Дійсно, якщо $|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}} = 0$, то $E_{q,p}(t,x) = 0$ при всіх t. Тому можна знайти такі $x_n \in \mathcal{E}_{q,p}(A)$ $(n \in \mathbb{N})$, що $\|x - x_n\| \to 0$ і $|x_n|_{\mathcal{E}_{q,p}} \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, $x_n \to 0$ в $\mathcal{E}_{q,p}(A)$ і $x_n \to x$ в $\mathfrak{X}$. Оскільки $\mathcal{E}_{q,p}(A)$ є підпростором в $\mathfrak{X}$, то $x_n \to 0$ в $\mathfrak{X}$, а, значить, $x = 0$. Далі, для $0 < \varepsilon < 1$ маємо

$$\begin{aligned} |x+y|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}} \;\le\; & \max\left(1, 2^{1/q-1}\right)\Bigg[\left(\int_0^\infty \left[t^s E_{q,p}(\varepsilon t, x)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau} \\ & + \left(\int_0^\infty \left[t^s E_{q,p}((1-\varepsilon)t, y)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}\Bigg] \end{aligned}$$

Покладаючи $c = 2\max\left(1, 2^{1/q-1}\right)$, отримуємо

$$|x+y|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}} \le c\left(\varepsilon^{-s}|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}} + (1-\varepsilon)^{-s}|y|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}}\right).$$

Виберемо ε так, щоб обидва доданки справа стали рівними. Тоді

$$|x+y|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}} \le c\left(|x|^{1/s}_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}} + |y|^{1/s}_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}}\right)^s,$$

звідки й випливає потрібне твердження. Лема доведена.

Розглянемо також функціонал

$$E_p(t,x) = \inf\left\{\|x - x^0\| \colon x^0 \in \mathcal{E}_p(A),\ |x^0|_{\mathcal{E}_p} \le t\right\},\ x \in \mathfrak{X},$$

і для заданих чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \le \infty\}$ або $\{0 \le s < \infty, \tau = \infty\}$ визначимо шкалу просторів

$$\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A) := \mathcal{B}^s_{p,\tau}(A, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathfrak{X} :\ |x|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)} < \infty\right\},$$

де

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^s E_p(t,x)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E_p(t,x), & \tau = \infty. \end{cases}$$

Для спрощення записів використовуємо позначення $\mathcal{B}^s_{p,\tau} := \mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)$.

Із леми 2.2.3 випливає, що функція $|x|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}}$ є квазінормою на $\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)$.

Означення 2.2.1. *Простір* $\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)$, *наділений квазінормою* $|\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}}$, *назвемо апроксимаційним простором типу Бесова, асоційованим з оператором* A. *Простір* $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$, *наділений квазінормою* $|\cdot|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}}$, *назвемо апроксимаційним простором типу Бесова-Лоренца, асоційованим з оператором* A.

Наступна теорема встановлює деякі інтерполяційні властивості визначених апроксимаційних просторів.

Теорема 2.2.1. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)]^\vartheta$ *— простір* $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$, *наділений квазінормою* $|x|^\vartheta_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}}$, $x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$, *то*

$$[\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)]^\vartheta = (\mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,g}, \quad \vartheta = 1/(s+1), \quad \tau = g\vartheta. \tag{2.13}$$

(ii) *Простори* $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0 < \tau < \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ *і* $s_0 \neq s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A)\right)_{\vartheta,\tau} = \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A) \tag{2.14}$$

та існують постійні c_1, c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}} \le c_1 |x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}} |x|^\vartheta_{\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}}, \quad x \in \mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A) \cap \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A), \tag{2.15}$$

$$K\left(t, x; \mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}\right) \le c_2 t^\vartheta\, |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A),\ t > 0. \tag{2.16}$$

(iv) *Якщо* $0 < \tau \le \varrho < \infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A) \subset \mathcal{B}^s_{q,p,\varrho}(A). \tag{2.17}$$

Д о в е д е н н я. (i) Нехай спочатку $g = \infty$. Визначимо функцію

$$K_\infty(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}) = \inf_{x = x^0 + x^1} \max\left\{|x^0|_{\mathcal{E}_{q,p}}, t\|x^1\|\right\},\ x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}(A),\ x^1 \in \mathfrak{X}.$$

Згідно з [3, лема 7.1.2], для кожного $t > 0$ існує таке $\upsilon > 0$, що

$$K_\infty(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}) = \upsilon, \quad \lim_{\mu \downarrow \upsilon} E_{q,p}(\mu, x) = E_{q,p}(\upsilon + 0, x) \le \upsilon/t.$$

Отже, для кожного $\upsilon_1 > 0$ існує таке $t > 0$, що

$$\upsilon_1 \le K_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}\right) = \upsilon.$$

Для довільного фіксованого x функція $E_{q,p}(\upsilon, x)$ є спадна, а тому $E_{q,p}(\upsilon, x) \le E_{q,p}(\upsilon_1 + 0, x) \le \upsilon_1/t$ і $[E_{q,p}(\upsilon, x)]^\vartheta \le t^{-\vartheta}\upsilon_1{}^\vartheta \le t^{-\vartheta}\upsilon^{\vartheta-1}\upsilon$. Як наслідок,

$$\upsilon^{1-\vartheta}[E_{q,p}(\upsilon, x)]^\vartheta \le t^{-\vartheta} K_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}\right),$$

звідки отримуємо вкладення $(\mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,\infty} \subset [\mathcal{B}^s_{q,p,\infty}(A)]^\vartheta$. Обернене вкладення випливає з того, що

$$t^{-\vartheta} K_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}\right) \le \upsilon^{1-\vartheta}[E_{q,p}(\upsilon - 0, x)]^\vartheta \le |x|^\vartheta_{\mathcal{B}^s_{q,p,\infty}}.$$

У випадку $g < \infty$ інтегруємо частинами і проводимо заміну змінних $t = \upsilon/E_{q,p}(\upsilon, x)$. Зауважимо, що $t^\vartheta K_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}\right) \to 0$ при $t \to 0$ або $t \to \infty$ і $\upsilon^s E_{q,p}(\upsilon, x) \to 0$ при $\upsilon \to 0$ або $\upsilon \to \infty$. Тому

$$\int_0^\infty \left[t^{-\vartheta} K_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}\right)\right]^g dt/t \sim -\int_0^\infty K_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}\right)^g dt^{-\vartheta g}$$
$$= \int_0^\infty t^{-\vartheta g} dK_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X}\right)^g = \int_0^\infty \left[\upsilon/E_{q,p}(\upsilon, x)\right]^{-\vartheta g} d(t^g)$$
$$\sim \int_0^\infty \left[\upsilon^s E_{q,p}(\upsilon, x)\right]^{\vartheta g} d\upsilon/\upsilon,$$

що й доводить рівність (2.13).

(ii) Для доведення повноти $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$ наділимо суму $\mathcal{E}_{q,p}(A) + \mathfrak{X}$, яка співпадає з $\mathfrak{X}$, оскільки $\mathcal{E}_{q,p}(A) \subset \mathfrak{X}$, нормою

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{q,p}+\mathfrak{X}} = \inf_{x=x^0+x^1}\left(|x^0|_{\mathcal{E}_{q,p}} + \|x^1\|\right),\ x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}(A),\ x^1 \in \mathfrak{X}.$$

Оскільки $|x|_{\mathcal{E}_{q,p}} \ge \|x\|$, то $\|x\|_{\mathcal{E}_{q,p}+\mathfrak{X}} = \|x\|$. Отже, простір $\mathfrak{X}$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_{q,p}+\mathfrak{X}}$ є повний. Тому, кожний ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $x_n \in (\mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,g}$, такий, що $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{(\mathcal{E}_{q,p}(A),\mathfrak{X})_{\vartheta,g}} < \infty$, збіжний до $x \in \mathcal{E}_{q,p}(A) + \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Із нерівності $\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \right\|_{(\mathcal{E}_{q,p}(A),\mathfrak{X})_{\vartheta,g}} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{(\mathcal{E}_{q,p}(A),\mathfrak{X})_{\vartheta,g}}$, отримуємо, що $x \in (\mathcal{E}_{q,p}(A),\mathfrak{X})_{\vartheta,g}$. Отже, $(\mathcal{E}_{q,p}(A),\mathfrak{X})_{\vartheta,g}$ є повний. Ізоморфізм (2.13) дає повноту простору $[\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)]^{\vartheta}$, а, отже, й $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$.

(iii) Застосовуючи теорему реітерації [3, теорема 3.11.5] для індексів $\vartheta = (1-\eta)\vartheta_0 + \eta\vartheta_1$, $\vartheta_i = 1/(s_i+1)$ $(i=0,1)$, $\vartheta = 1/(s+1)$, $\tau = g\vartheta$ і $0<\eta<1$, отримуємо

$$\left([\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A)]^{\vartheta_0},\, [\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A)]^{\vartheta_1}\right)_{\eta,g} = [\mathcal{B}^{s}_{q,p,\tau}(A)]^{\vartheta}. \tag{2.18}$$

Застосовуючи теорему про степені [3, теорема 3.11.6], при $\varrho = \eta\vartheta_1/\vartheta$ отримуємо

$$\left([\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A)]^{\vartheta_0}, [\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A)]^{\vartheta_1}\right)_{\eta,g} = \left(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A)\right)^{\vartheta}_{\varrho,\tau}. \tag{2.19}$$

Рівності (2.18) і (2.19) для $s = (1-\varrho)s_0 + \varrho s_1$ дають (2.14) з $\varrho = \vartheta$. Нерівності (2.15) і (2.16) є наслідком (2.14) і відомих інтерполяційних властивостей [3, теорема 3.11.2].

(iv) Для кожного $x \in \left(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A)\right)_{\vartheta,\tau}$ існує постійна $c>0$, така, що

$$\begin{aligned}
|x|_{\left(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0},\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}\right)_{\vartheta,\varrho}} &\le \left(\sup_{t>0} t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A))\right)^{1-\tau/\varrho} \\
&\times \left(\int_0^\infty \left[t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A))\right]^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{1/\varrho} \\
&\le c\,|x|_{\left(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0},\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}\right)_{\vartheta,\tau}}.
\end{aligned}$$

Отже, вкладення $\left(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A)\right)_{\vartheta,\tau} \subset \left(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(A)\right)_{\vartheta,\varrho}$ є неперервним. Остаточно, використовуючи (2.14), отримуємо (2.17). Теорема доведена.

Із теореми 2.2.1 для випадку $\mathcal{E}_{p,p}(A) = \mathcal{E}_p(A)$ отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.2.1. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)]^\vartheta$ *— простір* $\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)$, *наділений квазінормою* $|x|^\vartheta_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}}$, $x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)$, *то*

$$[\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)]^\vartheta = (\mathcal{E}_p(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,g}, \quad \vartheta = 1/(s+1), \quad \tau = g\vartheta. \tag{2.20}$$

(ii) *Простори* $\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0 < \tau < \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ *і* $s_0 \neq s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}(A)\right)_{\vartheta,\tau} = \mathcal{B}^s_{p,\tau}(A) \tag{2.21}$$

та існують постійні c_1, c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}} \leq c_1 |x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}} |x|^\vartheta_{\mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}}, \quad x \in \mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}(A) \cap \mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}(A), \tag{2.22}$$

$$K\left(t, x; \mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}, \mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}\right) \leq c_2 t^\vartheta\, |x|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(A),\ t > 0. \tag{2.23}$$

(iv) *Якщо* $0 < \tau \leq \varrho < \infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A) \subset \mathcal{B}^s_{p,\varrho}(A). \tag{2.24}$$

Визначимо функціонал вигляду

$$E^\nu_p(t,x) = \inf\left\{\|x - x^0\| \colon x^0 \in \mathcal{E}^\nu_p(A),\ \|x^0\|_{\mathcal{E}^\nu_p} \leq t\right\},\ x \in \mathfrak{X}.$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \leq \infty\}$ або $\{0 \leq s < \infty, \tau = \infty\}$ визначимо шкалу просторів

$$\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A) := \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathfrak{X} :\ |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)} < \infty\right\},$$

де

$$|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^s E^\nu_p(t,x)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E^\nu_p(t,x), & \tau = \infty. \end{cases}$$

Для спрощення записів використовуємо позначення $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau} := \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)$.

Подібно доведенню леми 2.2.3, можна показати, що $|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}}$ є квазінормою на $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)$. Простір $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)$ є апроксимаційним простором між $\mathfrak{X}$ і простором $\mathcal{E}^\nu_p(A)$ цілих векторів експоненціального типу, що не перевищує ν.

Теорема 2.2.2. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)]^{\vartheta}$ *— простір* $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)$, *наділений квазінормою* $|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}}$, $x \in \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)$, *то*

$$[\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)]^{\vartheta} = \left(\mathcal{E}^{\nu}_{p}(A), \mathfrak{X}\right)_{\vartheta,g}, \quad \vartheta = 1/(s+1), \quad \tau = g\vartheta. \tag{2.25}$$

(ii) *Простори* $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0 < \tau < \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ *і* $s_0 \neq s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(A)\right)_{\vartheta,\tau} = \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A) \tag{2.26}$$

і існують постійні c_1, c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}} \leq c_1 |x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}} |x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}}, \quad x \in \mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(A) \cap \mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(A), \tag{2.27}$$

$$K\left(t, x; \mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}, \mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}\right) \leq c_2 t^{\vartheta}\, |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A),\ t > 0. \tag{2.28}$$

(iv) *Якщо* $0 < \tau \leq \varrho < \infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A) \subset \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\varrho}(A). \tag{2.29}$$

Д о в е д е н н я. (i) Покладемо

$$K_{\infty}\left(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p}(A), \mathfrak{X}\right) = \inf_{x=x^0+x^1} \max\left\{\|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p}}, t\|x^1\|\right\},\ x^0 \in \mathcal{E}^{\nu}_{p}(A),\ x^1 \in \mathfrak{X}.$$

Застосовуючи [3, лема 7.1.2], для кожного $t > 0$ знаходимо таке $\upsilon > 0$, що

$$\upsilon^{1-\vartheta}[E^{\nu}_{p}(\upsilon, x)]^{\vartheta} \leq t^{-\vartheta} K_{\infty}\left(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p}(A), \mathfrak{X}\right),$$

звідки отримуємо вкладення $\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p}(A), \mathfrak{X}\right)_{\vartheta,\infty} \subset [\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\infty}(A)]^{\vartheta}$. Обернене вкладення випливає з оцінки

$$t^{-\vartheta} K_{\infty}\left(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p}(A), \mathfrak{X}\right) \leq \upsilon^{1-\vartheta}[E^{\nu}_{p}(\upsilon - 0, x)]^{\vartheta} \leq |x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\infty}}.$$

У випадку $g < \infty$ інтегруємо частинами і проводимо заміну змінних

$t = \upsilon/E_p^\nu(\upsilon, x)$. В результаті маємо

$$\int_0^\infty \left[t^{-\vartheta} K_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_p^\nu(A), \mathfrak{X}\right)\right]^g dt/t \sim -\int_0^\infty K_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_p^\nu(A), \mathfrak{X}\right)^g dt^{-\vartheta g}$$

$$= \int_0^\infty t^{-\vartheta g} dK_\infty\left(t, x; \mathcal{E}_p^\nu(A), \mathfrak{X}\right)^g = \int_0^\infty \left[\upsilon/E_p^\nu(\upsilon, x)\right]^{-\vartheta g} d(t^g)$$

$$\sim \int_0^\infty \left[\upsilon^s E_p^\nu(\upsilon, x)\right]^{\vartheta g} d\upsilon/\upsilon,$$

що й доводить рівність (2.25).

(ii) Простір $(\mathcal{E}_p^\nu(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,g}$ повний як інтерполяційний простір між банаховими просторами $\mathcal{E}_p^\nu(A)$ і $\mathfrak{X}$ [86, теорема 1.3.3]. Ізоморфізм (2.25) дає повноту простору $[\mathcal{B}_{p,\tau}^{\nu,s}(A)]^\vartheta$, а, отже, й $\mathcal{B}_{p,\tau}^{\nu,s}(A)$.

(iii) Застосовуючи теорему реітерації [3, теорема 3.11.5] для індексів $\vartheta = (1-\eta)\vartheta_0 + \eta\vartheta_1$, $\vartheta_i = 1/(s_i+1)$ $(i = 0, 1)$, $\vartheta = 1/(s+1)$, $\tau = g\vartheta$ і $0 < \eta < 1$, отримуємо

$$\left([\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(A)]^{\vartheta_0},\, [\mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(A)]^{\vartheta_1}\right)_{\eta,g} = [\mathcal{B}_{p,\tau}^{\nu,s}(A)]^\vartheta. \tag{2.30}$$

Застосовуючи теорему про степені [3, теорема 3.11.6], при $\varrho = \eta\vartheta_1/\vartheta$ отримуємо

$$\left([\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(A)]^{\vartheta_0}, [\mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(A)]^{\vartheta_1}\right)_{\eta,g} = \left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(A),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(A)\right)_{\varrho,\tau}^{\vartheta}. \tag{2.31}$$

Рівності (2.30) і (2.31) для $s = (1-\varrho)s_0 + \varrho s_1$ дають (2.26) з $\varrho = \vartheta$. Нерівності (2.27) і (2.28) є наслідком (2.26) і відомих інтерполяційних властивостей [3, теорема 3.11.2].

(iv) Для кожного $x \in \left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(A),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(A)\right)_{\vartheta,\tau}$ існує постійна $c > 0$, така, що

$$\begin{aligned} |x|_{\left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}\right)_{\vartheta,\varrho}} &\le \left(\sup_{t>0} t^{-\vartheta} K(t, x; \mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(A),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(A))\right)^{1-\tau/\varrho} \\ &\times \left(\int_0^\infty \left[t^{-\vartheta} K(t, x; \mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(A),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(A))\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\varrho} \\ &\le c\, |x|_{\left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}\right)_{\vartheta,\tau}}. \end{aligned}$$

Отже, вкладення $\left(\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(A)\right)_{\vartheta,\tau} \subset \left(\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(A),\, \mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(A)\right)_{\vartheta,\varrho}$ є неперервним. Остаточно, використовуючи (2.26), отримуємо (2.29). Теорема доведена.

Нехай $0 < \nu < \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$. Припустимо, що $0 \in \rho(A)$ і позначимо через $\mathcal{C}^m := \mathcal{C}^m(A)$ $(m \in \mathbb{N})$ область визначення оператора A^m з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^m} = \|A^m x\|$ для $x \in \mathcal{C}^m$. Визначимо банахові простори

$$\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m) = \left\{x \in \mathcal{C}^{\infty}(A)\colon \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q,p}} < \infty\right\},$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\|^p_{\mathcal{C}^m} k^{\frac{p}{q}-1}\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\|_{\mathcal{C}^m} k^{\frac{1}{q}}, & p = \infty, \end{cases}$$

де $\{x^*_{k,\nu}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність, яка складається з елементів $x_{k,\nu} := (A/\nu)^k x$, розміщених в порядку незростання норм

$$\|x^*_{0,\nu}\|_{\mathcal{C}^m} \ge \|x^*_{1,\nu}\|_{\mathcal{C}^m} \ge \ldots \ge \|x^*_{k,\nu}\|_{\mathcal{C}^m} \ge \ldots.$$

На підпросторі $\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m)$ визначимо квазінорму

$$|x|_{\mathcal{E}^m_{q,p}} := \|x\|_{\mathcal{C}^m} + \inf\left\{\nu > 0\colon x \in \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m)\right\}$$

і розглянемо функціонал

$$E^m_{q,p}(t,x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^m}\colon x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\ |x^0|_{\mathcal{E}^m_{q,p}} \le t\right\},\ x \in \mathcal{C}^m.$$

Якщо $q = p$, то $\mathcal{E}_{p,p}(\mathcal{C}^m) = \mathcal{E}_p(\mathcal{C}^m)$ і

$$|x|_{\mathcal{E}^m_{p,p}} = |x|_{\mathcal{E}^m_p} := \|x\|_{\mathcal{C}^m} + \inf\left\{\nu > 0\colon x \in \mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m)\right\}.$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \le \infty\}$ або $\{0 \le s < \infty, \tau = \infty\}$ визначимо шкалу просторів

$$\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m) := \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathcal{C}^m :\ |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)} < \infty\right\}$$

із квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^s E^m_{q,p}(t,x)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0<\tau<\infty, \\ \sup_{t>0} t^s E^m_{q,p}(t,x), & \tau=\infty. \end{cases}$$

Для спрощення записів використовуємо позначення $\mathcal{B}^{s,m}_{q,p,\tau} := \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)$.

Якщо $q=p$, то отримуємо шкалу апроксимаційних просторів

$$\mathcal{B}^s_{p,p,\tau}(\mathcal{C}^m) := \mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m) := \left\{x \in \mathcal{C}^m : \ |x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{p,\tau}} < \infty\right\}$$

із квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{p,\tau}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^s E^m_{p}(t,x)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0<\tau<\infty, \\ \sup_{t>0} t^s E^m_{p}(t,x), & \tau=\infty. \end{cases}$$

Теорема 2.2.3. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)]^\vartheta$ *— простір* $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)$, *наділений квазінормою* $|x|^\vartheta_{\mathcal{B}^{s,m}_{q,p,\tau}}$, $x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)$, *то виконується рівність*

$$[\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)]^\vartheta = (\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \mathcal{C}^m)_{\vartheta,g}, \quad \vartheta = 1/(s+1), \quad \tau = g\vartheta. \tag{2.32}$$

(ii) *Простори* $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0<\tau<\infty$, $0<\vartheta<1$, $s=(1-\vartheta)s_0+\vartheta s_1$ *і* $s_0 \neq s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\vartheta,\tau} = \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m) \tag{2.33}$$

і існують постійні c_1, c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{q,p,\tau}} \le c_1 |x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_0,m}_{q,p,\tau_0}} |x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_1,m}_{q,p,\tau_1}}, \quad x \in \mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m) \cap \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m), \tag{2.34}$$

$$K\left(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\right) \le c_2 t^\vartheta\, |x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{q,p,\tau}}, x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m). \tag{2.35}$$

(iv) *Якщо* $0<\tau\le\varrho<\infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{B}^s_{q,p,\varrho}(\mathcal{C}^m). \tag{2.36}$$

Д о в е д е н н я. (i) Визначимо функцію

$$K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)=\inf_{x=x^0+x^1}\max\left\{|x^0|_{\mathcal{E}^m_{q,p}},t\|x^1\|_{\mathcal{C}^m}\right\}$$

для $x^0\in\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m)$ і $x^1\in\mathcal{C}^m$. Згідно з [3, лема 7.1.2], для кожного $t>0$ існує таке $\upsilon>0$, що

$$K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)=\upsilon,\ \ \lim_{\mu\downarrow\upsilon}E^m_{q,p}(\mu,x)=E^m_{q,p}(\upsilon+0,x)\le\upsilon/t.$$

Оскільки для довільного фіксованого x функція $E^m_{q,p}(\upsilon,x)$ є спадна, то отримуємо

$$\upsilon^{1-\vartheta}[E^m_{q,p}(\upsilon,x)]^\vartheta\le t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right),$$

звідки випливає вкладення $\left(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)_{\vartheta,\infty}\subset[\mathcal{B}^s_{q,p,\infty}(\mathcal{C}^m)]^\vartheta$. Обернене вкладення випливає з оцінки

$$t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)\le\upsilon^{1-\vartheta}[E^m_{q,p}(\upsilon-0,x)]^\vartheta\le|x|^\vartheta_{\mathcal{B}^{s,m}_{q,p,\infty}}.$$

У випадку $g<\infty$ маємо

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left[t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)\right]^g dt/t\\&\sim-\int_0^\infty K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)^g dt^{-\vartheta g}\\&=\int_0^\infty t^{-\vartheta g}dK_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)^g=\int_0^\infty\left[\upsilon/E^m_{q,p}(\upsilon,x)\right]^{-\vartheta g}d(t^g)\\&\sim\int_0^\infty\left[\upsilon^sE^m_{q,p}(\upsilon,x)\right]^{\vartheta g}d\upsilon/\upsilon,\end{aligned}$$

що й доводить рівність (2.32).

(ii) На просторі $\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m)+\mathcal{C}^m$ визначимо норму

$$\|x\|_{\mathcal{E}^m_{q,p}+\mathcal{C}^m}=\inf_{x=x^0+x^1}\left(|x^0|_{\mathcal{E}^m_{q,p}}+\|x^1\|_{\mathcal{C}^m}\right),\ x^0\in\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\ x^1\in\mathcal{C}^m.$$

Оскільки $|x|_{\mathcal{E}^m_{q,p}}\ge\|x\|_{\mathcal{C}^m}$, то $\|x\|_{\mathcal{E}^m_{q,p}+\mathcal{C}^m}=\|x\|_{\mathcal{C}^m}$. Отже, простір $\mathcal{C}^m$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^m_{q,p}+\mathcal{C}^m}$ є повний. Це означає, що кожний ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n$,

$x_n \in (\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \mathcal{C}^m)_{\vartheta,g}$, такий, що $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m)_{\vartheta,g}} < \infty$, збіжний до $x \in \mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m) + \mathcal{C}^m = \mathcal{C}^m$.

Із нерівності $\big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \big\|_{(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m)_{\vartheta,g}} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m)_{\vartheta,g}}$, отримуємо, що $x \in (\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \mathcal{C}^m)_{\vartheta,g}$. Отже, $(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \mathcal{C}^m)_{\vartheta,g}$ є повний. Ізоморфізм (2.32) дає повноту простору $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)$.

(iii) Застосовуючи теорему реітерації [3, теорема 3.11.5] для індексів $\vartheta = (1-\eta)\vartheta_0 + \eta\vartheta_1$, $\vartheta_i = 1/(s_i+1)$ $(i = 0, 1)$, $\vartheta = 1/(s+1)$, $\tau = g\vartheta$ і $0 < \eta < 1$, отримуємо

$$\big([\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta_0},\, [\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta_1}\big)_{\eta,g} = [\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta}. \tag{2.37}$$

Застосовуючи теорему про степені [3, теорема 3.11.6], при $\varrho = \eta\vartheta_1/\vartheta$ отримуємо

$$\big([\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta_0}, [\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta_1}\big)_{\eta,g} = \big(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\big)^{\vartheta}_{\varrho,\tau}. \tag{2.38}$$

Рівності (2.37) і (2.38) для $s = (1-\varrho)s_0 + \varrho s_1$ дають (2.33) з $\varrho = \vartheta$. Нерівності (2.34) і (2.35) випливають з (2.33) і відомих інтерполяційних властивостей [3, теорема 3.11.2].

(iv) Для кожного $x \in \big(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\vartheta,\tau}$ існує така постійна $c > 0$, що

$$\begin{aligned}
|x|_{\left(\mathcal{B}^{s_0,m}_{q,p,\tau_0},\mathcal{B}^{s_1,m}_{q,p,\tau_1}\right)_{\vartheta,\varrho}} &\le \left(\sup_{t>0} t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m))\right)^{1-\tau/\varrho} \\
&\times \left(\int_0^\infty \left[t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m))\right]^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{1/\varrho} \\
&\le c\,|x|_{\left(\mathcal{B}^{s_0,m}_{q,p,\tau_0},\mathcal{B}^{s_1,m}_{q,p,\tau_1}\right)_{\vartheta,\tau}},
\end{aligned}$$

а тому $\big(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\vartheta,\tau} \subset \big(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\vartheta,\varrho}$. Звідси і з (2.33), отримуємо (2.36). Теорема доведена.

Наслідок 2.2.2. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta}$ *— простір* $\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)$, *наділений квазінормою* $|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{s,m}_{p,\tau}}$, $x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)$, *то*

$$[\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta} = (\mathcal{E}_p(\mathcal{C}^m), \mathcal{C}^m)_{\vartheta,g}, \quad \vartheta = 1/(s+1), \quad \tau = g\vartheta. \tag{2.39}$$

(ii) *Простори* $\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0<\tau<\infty$, $0<\vartheta<1$, $s=(1-\vartheta)s_0+\vartheta s_1$ *і* $s_0\neq s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\vartheta,\tau}=\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m) \tag{2.40}$$

і існують постійні c_1, c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{p,\tau}}\le c_1|x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_0,m}_{p,\tau_0}}|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_1,m}_{p,\tau_1}},\quad x\in\mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^m)\bigcap\mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^m), \tag{2.41}$$

$$K\left(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\right)\le c_2t^{\vartheta}\,|x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{p,\tau}},\quad x\in\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m). \tag{2.42}$$

(iv) *Якщо* $0<\tau\le\varrho<\infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)\subset\mathcal{B}^s_{p,\varrho}(\mathcal{C}^m). \tag{2.43}$$

Визначимо функціонал вигляду

$$E^{\nu,m}_p(t,x)=\inf\left\{\|x-x^0\|_{\mathcal{C}^m}\colon x^0\in\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m),\ \|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_p}\le t\right\},\ x\in\mathcal{C}^m.$$

Для пар чисел $\{0<s<\infty, 0<\tau\le\infty\}$ або $\{0\le s<\infty,\tau=\infty\}$ визначимо шкалу просторів

$$\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m):=\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m,\mathfrak{X}):=\left\{x\in\mathfrak{X}:\ |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)}<\infty\right\}$$

з квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^\infty\left[t^sE^{\nu,m}_p(t,x)\right]^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0<\tau<\infty,\\ \sup_{t>0}t^sE^{\nu,m}_p(t,x), & \tau=\infty.\end{cases}$$

Для спрощення записів використовуємо позначення $\mathcal{B}^{\nu,s,m}_{p,\tau}:=\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)$.

Теорема 2.2.4. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta}$ *— простір* $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)$, *наділений квазінормою* $|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s,m}_{p,\tau}}$, $x\in\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)$, *то*

$$[\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta}=\left(\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)_{\vartheta,g},\quad \vartheta=1/(s+1),\quad \tau=g\vartheta \tag{2.44}$$

(з точністю до еквівалентності квазінорм).

(ii) *Простори* $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0<\tau<\infty$, $0<\vartheta<1$, $s=(1-\vartheta)s_0+\vartheta s_1$ *і* $s_0\neq s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\vartheta,\tau}=\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m) \tag{2.45}$$

і існують постійні c_1, c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,m}_{p,\tau}}\leq c_1|x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s_0,m}_{p,\tau_0}}|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s_1,m}_{p,\tau_1}},\quad x\in\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^m)\cap\mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^m), \tag{2.46}$$

$$K\left(t,x;\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^m)\right)\leq c_2t^{\vartheta}\,|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,m}_{p,\tau}},\quad x\in\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m). \tag{2.47}$$

(iv) *Якщо* $0<\tau\leq\varrho<\infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m)\subset\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\varrho}(\mathcal{C}^m). \tag{2.48}$$

Д о в е д е н н я. (i) Визначимо функціонал

$$K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)=\inf_{x=x^0+x^1}\max\left\{\|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_p},t\|x^1\|_{\mathcal{C}^m}\right\}$$

для $x^0\in\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m)$ і $x^1\in\mathcal{C}^m$.

Застосовуючи [3, лема 7.1.2], для кожного $t>0$ знаходимо таке $\upsilon>0$, що

$$\upsilon^{1-\vartheta}[E^{\nu,m}_p(\upsilon,x)]^{\vartheta}\leq t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right),$$

звідки отримуємо вкладення $\left(\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)_{\vartheta,\infty}\subset[\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\infty}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta}$. Обернене вкладення випливає з оцінки

$$t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)\leq\upsilon^{1-\vartheta}[E^{\nu,m}_p(\upsilon-0,x)]^{\vartheta}\leq|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s,m}_{p,\infty}}.$$

У випадку $g<\infty$ маємо

$$\int_0^\infty\left[t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)\right]^g dt/t$$

$$\sim-\int_0^\infty K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)^g dt^{-\vartheta g}$$

$$=\int_0^\infty t^{-\vartheta g}dK_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_p(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m\right)^g=\int_0^\infty\left[\upsilon/E^{\nu,m}_p(\upsilon,x)\right]^{-\vartheta g}d(t^g)$$

$$\sim\int_0^\infty\left[\upsilon^sE^{\nu,m}_p(\upsilon,x)\right]^{\vartheta g}d\upsilon/\upsilon,$$

що й доводить рівність (2.44).

(ii) Простір $(\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m), \mathcal{C}^m)_{\vartheta,g}$ повний як інтерполяційний простір між банаховими просторами $\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m)$ і $\mathcal{C}^m$ [86, теорема 1.3.3]. Ізоморфізм (2.44) дає повноту простору $\mathcal{B}_{p,\tau}^{\nu,s}(\mathcal{C}^m)$.

(iii) Застосовуючи теорему реітерації [3, теорема 3.11.5] для індексів $\vartheta = (1-\eta)\vartheta_0 + \eta\vartheta_1$, $\vartheta_i = 1/(s_i+1)$ $(i = 0, 1)$, $\vartheta = 1/(s+1)$, $\tau = g\vartheta$ і $0 < \eta < 1$, отримуємо

$$\big([\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta_0},\, [\mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta_1}\big)_{\eta,g} = [\mathcal{B}_{p,\tau}^{\nu,s}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta}. \tag{2.49}$$

Застосовуючи теорему про степені [3, теорема 3.11.6], при $\varrho = \eta\vartheta_1/\vartheta$ отримуємо

$$\big([\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta_0}, [\mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m)]^{\vartheta_1}\big)_{\eta,g} = \big(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\varrho,\tau}^{\vartheta}. \tag{2.50}$$

Рівності (2.49) і (2.50) для $s = (1-\varrho)s_0 + \varrho s_1$ дають (2.45) з $\varrho = \vartheta$. Нерівності (2.46) і (2.47) є наслідком (2.45) і відомих інтерполяційних властивостей [3, теорема 3.11.2].

(iv) Для кожного $x \in \big(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\vartheta,\tau}$ існує така постійна $c > 0$, що

$$\begin{aligned}
|x|_{\left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\vartheta,\varrho}} &\le \left(\sup_{t>0} t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m)\right)^{1-\tau/\varrho} \\
&\times \left(\int_0^\infty \left[t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m))\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\varrho} \\
&\le c\,|x|_{\left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\vartheta,\tau}},
\end{aligned}$$

звідки маємо $\big(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\vartheta,\tau} \subset \big(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\vartheta,\varrho}$. Звідси і з рівності (2.45) отримуємо (2.48). Теорема доведена.

2.3. Нерівності типу Бернштейна і Джексона та спектральні апроксимації

Досліджуємо проблему наближення заданого елемента банахового простору $\mathfrak{X}$ елементами A-інваріантних підпросторів $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ з фіксованими індексами q і p. Для цього використовуємо апроксимаційні простори $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$, породжені E – функціоналом, який у свою чергу пов'язаний з похибками наближення нерівностями типу Бернштейна-Джексона.

Теорема 2.3.1. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)} \le c_{s,\tau}\, |x|^s_{\mathcal{E}_{q,p}(A)} \|x\|,\ \ x \in \mathcal{E}_{q,p}(A), \tag{2.51}$$

$$t^s E(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(A),\mathfrak{X}) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)},\ \ x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A), \tag{2.52}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \left(\tau s^{-1}(s+1)^2\right)^{1/\tau}.$$

Крім того, для фіксованого s маємо

$$\liminf_{\tau\to\infty} \kappa_{s,\tau} = \limsup_{\tau\to\infty} \kappa^{-1}_{s,\tau} = 1. \tag{2.53}$$

Д о в е д е н н я. Для спрощення записів покладемо $\mathcal{E}(A) := \mathcal{E}_{q,p}(A)$, $\mathcal{B}^s_{\tau}(A) := \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$.

Нехай $1 \le q < \infty$ і $x \ne 0$. Оскільки

$$K(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) \le \min\left(|x|_{\mathcal{E}(A)}, t\|x\|\right),$$

отримуємо

$$|x|^q_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}} \le \|x\|^q \int_0^\alpha t^{-1+q(1-\theta)}dt + |x|^q_{\mathcal{E}(A)} \int_\alpha^\infty t^{-1-\theta q}dt$$
$$= \frac{1}{q(1-\theta)}\,\alpha^{q(1-\theta)}\|x\|^q + \frac{1}{\theta q}\,\alpha^{-\theta q}|x|^q_{\mathcal{E}(A)}$$
$$= \frac{1}{q\theta(1-\theta)}\left(|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}(A)}\|x\|^\theta\right)^q$$

для $\alpha = |x|_{\mathcal{E}(A)}/\|x\|$. Це можна записати як

$$|x|_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}} \le [q\theta(1-\theta)]^{-1/q}|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}(A)}\|x\|^\theta.$$

Якщо $q=\infty$, то маємо $K(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) \le t^\theta|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}(A)}\|x\|^\theta$. З попередніх нерівностей маємо

$$|x|_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}} \le \begin{cases} [q\theta(1-\theta)]^{-1/q}\,|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}(A)}\|x\|^\theta & : \quad q<\infty \\ |x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}(A)}\|x\|^\theta & : \quad q=\infty. \end{cases} \tag{2.54}$$

Розглянемо функціонал

$$K_\infty(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) := \inf_{x=x^0+x^1} \max\left(|x^0|_{\mathcal{E}(A)}, t\|x^1\|\right).$$

Зауважимо, що $v^{-\theta}K_\infty(v,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) \to 0$ при $v\to 0$ або $v\to\infty$, а також $t^sE(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) \to 0$ при $t\to 0$ або $t\to\infty$. Інтегруванням частинами із заміною змінних $v = t/E(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})$, отримуємо

$$\int_0^\infty (v^{-\theta}K_\infty(v,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^q dv/v = -\frac{1}{\theta q}\int_0^\infty K_\infty(v,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})^q dv^{-\theta q}$$
$$= \frac{1}{\theta q}\int_0^\infty v^{-\theta q}dK_\infty(v,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})^q = \frac{1}{\theta q}\int_0^\infty (t/E(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^{-\theta q}dt^q$$
$$= \frac{1}{\theta q^2}\int_0^\infty (t^sE(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^{\theta q}dt/t \quad \text{для} \quad s = 1/\theta - 1.$$

Наступні нерівності є наслідками означень K і K_∞ [186, Зауваження 3.1],

$$K_\infty(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) \le K(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) \le 2K_\infty(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}). \tag{2.55}$$

Відповідно до лівої нерівності (2.55), маємо

$$\frac{1}{\theta q^2}|x|^{\theta q}_{\mathcal{B}^s_\tau(A)} = \frac{1}{\theta q^2}\int_0^\infty (t^s E(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^{\theta q} dt/t$$
$$= \int_0^\infty (v^{-\theta} K_\infty(v,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^q dv/v$$
$$\leq \int_0^\infty (v^{-\theta} K(v,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^q dv/v = |x|^q_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}}.$$

З іншого боку, з правої нерівності (2.55) випливає

$$|x|^q_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}} = \int_0^\infty (v^{-\theta} K(v,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^q dv/v$$
$$\leq 2^q \int_0^\infty (v^{-\theta} K_\infty(v,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^q dv/v$$
$$= 2^q \frac{1}{\theta q^2}\int_0^\infty (t^s E(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^{\theta q} dt/t = 2^q \frac{1}{\theta q^2}|x|^{\theta q}_{\mathcal{B}^s_\tau(A)}.$$

Таким чином, комбінуючи попередні нерівності, отримуємо

$$|x|^q_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}} \leq 2^q(\theta q^2)^{-1}|x|^{\theta q}_{\mathcal{B}^s_\tau(A)} \leq 2^q |x|^q_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}} \quad \text{з} \quad \tau = \theta q. \tag{2.56}$$

Відповідно [3, лема 7.1.2] для кожного $v > 0$ існує таке $t > 0$, що

$$t^s E(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^\theta \leq v^{-\theta} K_\infty(v,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) \leq (t^s E(t-0,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^\theta. \tag{2.57}$$

Оскільки $|x|^\theta_{\mathcal{B}^s_\infty(A)} \leq |x|_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,\infty}}$, нерівності (2.57) дають

$$\nu^{-\theta} K(\nu,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) \leq \nu^{-\theta} 2K_\infty(\nu,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}) \leq 2(t^s E(t-0,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^\theta$$
$$\leq 2(\sup_{t>0} t^s E(t,x;\mathcal{E}(A),\mathfrak{X}))^\theta = 2|x|^\theta_{\mathcal{B}^s_\infty(A)}.$$

Як наслідок, $|x|_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,\infty}} \leq 2|x|^\theta_{\mathcal{B}^s_\infty(A)}$. Застосовуючи (2.54), отримуємо

$$|x|^\theta_{\mathcal{B}^s_\tau(A)} \leq \begin{cases} [q/(1-\theta)]^{1/q}|x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}(A)}\|x\|^\theta & : \quad q < \infty \\ |x|^{1-\theta}_{\mathcal{E}(A)}\|x\|^\theta & : \quad q = \infty. \end{cases} \tag{2.58}$$

Покладаючи $s = 1/\theta - 1$ і $\tau = \theta q$ в (2.58), отримуємо нерівності (2.51).

Інтегруванням обох частин нерівності

$$\min(1, v/t)K(t, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X}) \leq K(v, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X})$$

отримуємо

$$\left(\int_0^\infty \left(v^{-\theta}\min(1, v/t)\right)^q \frac{dv}{v}\right)^{1/q} K(t, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X}) \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty \left(v^{-\theta}K(v, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X})\right)^q \frac{dv}{v}\right)^{1/q} = |x|_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}} \quad \text{і}$$

$$\left(\int_0^\infty \left(v^{-\theta}\min(1, v/t)\right)^q \frac{dv}{v}\right)^{1/q} = \left(\int_0^t v^{(1-\theta)q-1}t^{-q}dv + \int_t^\infty v^{-\theta q-1}dv\right)^{1/q}$$

$$= \frac{1}{[q\theta(1-\theta)]^{1/q}t^\theta},$$

відповідно. Як наслідок,

$$\left(\int_0^t \frac{v^{(1-\theta)q-1}}{t^q}dv + \int_t^\infty v^{-\theta q-1}dv\right)^{1/q} K(t, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X})$$

$$= \frac{K(t, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X})}{[q\theta(1-\theta)]^{1/q}t^\theta} \leq |x|_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}}.$$

Отже, $K(t, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X}) \leq [q\theta(1-\theta)]^{1/q}t^\theta|x|_{(\mathcal{E}(A),X)_{\theta,q}}$. Беручи до уваги (2.55), (2.57), маємо

$$v^{1-\theta}E(v, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X})^\theta \leq t^{-\theta}K_\infty(t, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X}) \leq [q\theta(1-\theta)]^{1/q}|x|_{(\mathcal{E}(A),\mathfrak{X})_{\theta,q}}.$$

Застосовуючи (2.56), отримуємо

$$v^{1-\theta}E(v, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X})^\theta \leq 2[(1-\theta)/q]^{1/q}|x|^\theta_{\mathcal{B}^s_\tau(A)}.$$

Покладаючи $s = (1-\theta)/\theta$ і $\tau = \theta q$, отримуємо (2.52) для $1 \leq q < \infty$. Якщо $q = \infty$, маємо

$$t^sE(t, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X}) \leq \sup_{t>0} t^sE(t, x; \mathcal{E}(A), \mathfrak{X}) = |x|_{\mathcal{B}^s_\infty(A)}$$

для всіх $x \in \mathcal{B}^s_\infty(A)$. Таким чином, нерівності (2.52) виконуються для всіх $1 \le q \le \infty$. Границі (2.53) обчислюються безпосередньо. Теорема доведена.

Нерівності (2.51) і (2.52) є нерівностями типу Бернштейна і Джексона відповідно. Якщо $q = p$, то з теореми 2.3.1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.3.1. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)} \le c_{s,\tau}\, |x|^s_{\mathcal{E}_p(A)} \|x\|, \ x \in \mathcal{E}_p(A), \tag{2.59}$$

$$t^s E(t, x; \mathcal{E}_p(A), \mathfrak{X}) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}(A)}, \ x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(A), \tag{2.60}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \left(\tau s^{-1}(s+1)^2\right)^{1/\tau}.$$

Відстань між $x \in \mathfrak{X}$ і $\mathcal{E}^\nu_{q,p}(A)$ позначимо

$$d_{q,p}(\nu, x) = \inf\left\{\|x - x^0\| \colon x^0 \in \mathcal{E}^\nu_{q,p}(A)\right\}, \ \nu > 0.$$

Якщо $|x^0|_{\mathcal{E}_{q,p}} = r(x^0) + \|x^0\| < \upsilon$, то маємо $r(x^0) < \upsilon - \|x^0\|$, де $r(x^0) = \inf\left\{\nu > 0 \colon x^0 \in \mathcal{E}^\nu_{q,p}(A)\right\}$. Тому, $x^0 \in \mathcal{E}^\nu_{q,p}(A)$ для всіх таких чисел $\nu > 0$, що $r(x^0) < \nu < \upsilon - \|x^0\|$. Оскільки, згідно з теоремою 2.1.3(i), наявне неперервне вкладення $\mathcal{E}^\nu_{q,p}(A) \subset \mathcal{E}^\upsilon_{q,p}(A)$, то $x^0 \in \mathcal{E}^\upsilon_{q,p}(A)$. Отже, маємо нерівність

$$d_{q,p}(\upsilon, x) \le E_{q,p}(\upsilon, x), \quad x \in \mathfrak{X}, \quad \upsilon > 0. \tag{2.61}$$

Нерівності (2.61) і (2.52) дають оцінку

$$d_{q,p}(\nu, x) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A). \tag{2.62}$$

Повторюючи міркування доведення теореми 2.3.1 отримуємо нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)$.

Теорема 2.3.2. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)} \le c_{s,\tau}\, |x|^s_{\mathcal{E}^{\nu}_p(A)} \|x\|,\ x \in \mathcal{E}^{\nu}_p(A), \tag{2.63}$$

$$t^s E(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_p(A),\mathfrak{X}) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A)},\ x \in \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A), \tag{2.64}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \left(\tau s^{-1}(s+1)^2\right)^{1/\tau}.$$

Крім того, маємо

$$d_p(\nu,x) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A), \tag{2.65}$$

де $d_p(\nu,x) = \inf\left\{\|x - x^0\| \colon x^0 \in \mathcal{E}^{\nu}_p(A)\right\}$.

Далі розглянемо проблему наближення заданого елемента банахового простору $\mathcal{C}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ елементами A-інваріантних підпросторів $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m)$ з фіксованими індексами q і p. Відстань між $x \in \mathcal{C}^m$ і $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m)$ позначимо

$$d^m_{q,p}(\nu,x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^m} \colon x^0 \in \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m)\right\},\ \nu > 0.$$

Теорема 2.3.3. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{q,p,\tau}} \le c_{s,\tau}\, |x|^s_{\mathcal{E}^m_{q,p}} \|x\|_{\mathcal{C}^m},\ x \in \mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \tag{2.66}$$

$$t^s E(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{q,p,\tau}},\ x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m), \tag{2.67}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \left(\tau s^{-1}(s+1)^2\right)^{1/\tau}.$$

Крім того, маємо

$$d^m_{q,p}(\nu,x) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{q,p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m). \tag{2.68}$$

Д о в е д е н н я. Із теореми 2.2.3(i) при $\vartheta = 1/(s+1)$ і $\tau = g\vartheta$ маємо

$$\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m) \subset [\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)]^\vartheta = (\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \mathcal{C}^m)_{\vartheta,g} \subset \mathcal{C}^m.$$

Повторюючи далі міркування доведення теореми 2.3.1 отримуємо нерівності (2.66) і (2.67).

Якщо $|x^0|_{\mathcal{E}^m_{q,p}} = r(x^0) + \|x^0\|_{\mathcal{C}^m} < \upsilon$, то маємо $r(x^0) < \upsilon - \|x^0\|_{\mathcal{C}^m}$, де $r(x^0) = \inf\left\{\nu > 0\colon x^0 \in \mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m)\right\}$. Тому, $x^0 \in \mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m)$ для всіх таких чисел $\nu > 0$, що $r(x^0) < \nu < \upsilon - \|x^0\|_{\mathcal{C}^m}$. Оскільки наявне неперервне вкладення $\mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{E}^\upsilon_{q,p}(\mathcal{C}^m)$, то $x^0 \in \mathcal{E}^\upsilon_{q,p}(\mathcal{C}^m)$. Отже, маємо нерівність

$$d^m_{q,p}(\upsilon, x) \le E^m_{q,p}(\upsilon, x), \quad x \in \mathcal{C}^m, \quad \upsilon > 0. \tag{2.69}$$

Нерівності (2.67) і (2.69) дають оцінку (2.68). Теорема доведена.

Наслідок 2.3.2. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{p,\tau}} \le c_{s,\tau}\, |x|^s_{\mathcal{E}^m_p} \|x\|_{\mathcal{C}^m}, \ x \in \mathcal{E}_p(\mathcal{C}^m), \tag{2.70}$$

$$t^s E(t, x; \mathcal{E}_p(\mathcal{C}^m), \mathcal{C}^m) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{p,\tau}}, \ x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m), \tag{2.71}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \left(\tau s^{-1}(s+1)^2\right)^{1/\tau}.$$

Крім того, маємо

$$d^m_p(\nu, x) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m), \tag{2.72}$$

де $d^m_p(\nu, x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^m}\colon x^0 \in \mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m)\right\}$ *— відстань між* $x \in \mathcal{C}^m$ *і підпростором* $\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m)$.

Нерівності (2.70), (2.71) і (2.72) випливають відповідно із (2.66), (2.67) і (2.68) при $q = p$.

Теорема 2.3.4. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,m}_{p,\tau}} \le c_{s,\tau}\, |x|^s_{\mathcal{E}^{\nu,m}_p} \|x\|_{\mathcal{C}^m},\ x \in \mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m), \tag{2.73}$$

$$t^s E(t,x;\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m),\mathcal{C}^m) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,m}_{p,\tau}},\ x \in \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m), \tag{2.74}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \left(\tau s^{-1}(s+1)^2\right)^{1/\tau}.$$

Крім того, маємо

$$d^m_p(\nu,x) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,m}_{p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m). \tag{2.75}$$

де $d^m_p(\nu,x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^m} \colon x^0 \in \mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m)\right\}$ *— відстань між* $x \in \mathcal{C}^m$ *і підпростором* $\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m)$.

Д о в е д е н н я. Достатньо повторити міркування доведення теореми 2.3.1 і врахувати нерівність $d^m_p(\nu,x) \le E^{\nu,m}_p(\nu,x)$, $x \in \mathcal{C}^m$, $\nu > 0$. Теорема доведена.

Тепер розглянемо проблему спектральних апроксимацій для оператора з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень, які є полюсами резольвенти, в термінах квазінорм визначених вище апроксимаційних просторів типу Бєсова.

Визначимо об'єднання $\mathcal{R}(A) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{R}^\nu(A)$ із квазінормою

$$|x|_{\mathcal{R}(A)} = \|x\| + \inf\left\{\nu > 0 \colon x \in \mathcal{R}^\nu(A)\right\}.$$

В силу рівності (2.7) маємо

$$\mathcal{E}_p(A) = \mathcal{R}(A), \quad |x|_{\mathcal{E}_p(A)} = |x|_{\mathcal{R}(A)}, \quad x \in \mathcal{E}_p(A). \tag{2.76}$$

Як наслідок, нерівності (2.59) і (2.60) можна переписати у вигляді:

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)} \le c_{s,\tau}\, |x|^s_{\mathcal{R}(A)} \|x\|,\ x \in \mathcal{R}(A), \tag{2.77}$$

$$t^s E(t,x;\mathcal{R}(A),\mathfrak{X}) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)},\ x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A), \tag{2.78}$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.3.1.

Нехай $\mathcal{S}_{\lambda_j}(A) = \{x \in \mathcal{C}^\infty(A) : (\lambda_j I - A)x = 0\}$ — підпростір власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda_j \in \sigma(A)$, $\mathcal{S}^\nu(A)$ — комплексна лінійна оболонка всіх $\mathcal{S}_{\lambda_j}(A)$ таких, що $|\lambda_j| = \nu$, $\lambda_j \in \sigma(A)$, $\mathcal{R}^\nu(A)$ — комплексна лінійна оболонка всіх кореневих підпросторів $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$, для яких $|\lambda_j| < \nu$ і $\mathcal{Q}^\nu(A) = \mathcal{R}^\nu(A) \oplus \mathcal{S}^\nu(A)$.

Нехай $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$. В силу рівностей (2.7) і (2.8) можна визначити інтерполяційний простір $(\mathcal{R}^\nu(A), \mathcal{Q}^\nu(A))_{1-1/q,p}$ з нормою

$$\|x\|_{(\mathcal{R}^\nu(A),\mathcal{Q}^\nu(A))_{1-1/q,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^{1/q-1} K(t,x;\cdot)\right]^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/q-1} K(t,x;\cdot), & p = \infty, \end{cases}$$

де $K(t,x;\cdot) = \inf\limits_{x=x^0+x^1} \left(\|x^0\|_{\mathcal{R}^\nu(A)} + t\|x^1\|_{\mathcal{Q}^\nu(A)}\right)$, $x^0 \in \mathcal{R}^\nu(A)$, $x^1 \in \mathcal{Q}^\nu(A)$ і $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^\nu(A)} := \|\cdot\|_{\mathcal{E}^\nu_1(A)}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^\nu(A)} := \|\cdot\|_{\mathcal{E}^\nu_\infty(A)}$.

Теорема 2.3.5. *Нехай A — оператор з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень, які є полюсами резольвенти $R_\lambda(A)$. Тоді виконуються такі оцінки*

$$\inf\left\{\|x - x^0\| : x^0 \in \mathcal{R}^\nu(A)\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{p,\tau}}, x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(A), \tag{2.79}$$

$$\inf\left\{\|x - x^0\| : x^0 \in \mathcal{R}^\nu(A)\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}}, x \in \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(A). \tag{2.80}$$

Крім того, для всіх $x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$

$$\inf\left\{\|x - x^0\| : x^0 \in (\mathcal{R}^\nu(A), \mathcal{Q}^\nu(A))_{1-1/q,p}\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}}. \tag{2.81}$$

Д о в е д е н н я. Оцінки (2.79) і (2.80) є прямим наслідком рівності (2.7) і нерівностей (2.62) і (2.65).

З рівностей (2.8) і (2.1) для $1 < q < \infty$ і $1 \le p \le \infty$ маємо

$$(\mathcal{R}^\nu(A), \mathcal{Q}^\nu(A))_{1-1/q,p} = \mathcal{E}^\nu_{q,p}(A). \tag{2.82}$$

Оцінка (2.81) випливає тепер з рівності (2.82) і нерівності (2.52). Теорема доведена.

Нехай $\mathcal{S}^{\nu,m}(A)$ — комплексна лінійна оболонка всіх $\mathcal{S}_{\lambda_j}(A)$ таких, що $|\lambda_j|^{m+1} = \nu$, $\lambda_j \in \sigma(A)$, $\mathcal{R}^{\nu,m}(A)$ — комплексна лінійна оболонка всіх кореневих підпросторів $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$, для яких $|\lambda_j|^{m+1} < \nu$ і $\mathcal{Q}^{\nu,m}(A) = \mathcal{R}^{\nu,m}(A) \oplus \mathcal{S}^{\nu,m}(A)$.

Нехай $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$. В силу рівностей (2.7) і (2.8) можна визначити інтерполяційний простір $(\mathcal{R}^{\nu,m}(A), \mathcal{Q}^{\nu,m}(A))_{1-1/q,p}$ з нормою

$$\|x\|_{(\mathcal{R}^{\nu,m}(A),\mathcal{Q}^{\nu,m}(A))_{1-1/q,p}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{1/q-1}K(t,x;\cdot)\right]^p \dfrac{dt}{t}\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/q-1}K(t,x;\cdot), & p = \infty, \end{cases}$$

де $K(t,x;\cdot) = \inf\limits_{x=x^0+x^1} \left(\|x^0\|_{\mathcal{R}^{\nu,m}(A)} + t\|x^1\|_{\mathcal{Q}^{\nu,m}(A)}\right)$, $x^0 \in \mathcal{R}^{\nu,m}(A)$, $x^1 \in \mathcal{Q}^{\nu,m}(A)$ і $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^{\nu,m}(A)} := \|\cdot\|_{\mathcal{E}_1^\nu(\mathcal{C}^m)}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\nu,m}(A)} := \|\cdot\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^m)}$.

Теорема 2.3.6. *Нехай A — оператор з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень, які є полюсами резольвенти $R_\lambda(A)$. Тоді виконуються такі оцінки*

$$\inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^m} \colon x^0 \in \mathcal{R}^{\nu,m}\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{p,\tau}},\ x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^m), \quad (2.83)$$

$$\inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^m} \colon x^0 \in \mathcal{R}^{\nu,m}\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,m}_{p,\tau}},\ x \in \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^m). \quad (2.84)$$

Крім того, для всіх $x \in \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^m)$

$$\inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^m} \colon x^0 \in (\mathcal{R}^{\nu,m}, \mathcal{Q}^{\nu,m})_{1-1/q,p}\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{s,m}_{q,p,\tau}}. \quad (2.85)$$

Д о в е д е н н я. Оцінки (2.83) і (2.84) випливають з рівності

$$\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) \colon |\lambda_j|^{m+1} < \nu\right\},\ m \in \mathbb{N},$$

і нерівностей (2.72) і (2.75).

З рівностей (2.8) і (3.20) для $1 < q < \infty$ і $1 \le p \le \infty$ маємо

$$(\mathcal{R}^{\nu,m}(A), \mathcal{Q}^{\nu,m}(A))_{1-1/q,p} = \mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m). \quad (2.86)$$

Оцінка (2.85) випливає тепер з рівності (2.86) і нерівності (2.67). Теорема доведена.

2.4. Апроксимаційні простори Бєсова, асоційовані з цілими функціями експоненціального типу

У цьому параграфі покажемо застосування наведених вище абстрактних результатів до отримання нових результатів в класичній теорії апроксимації функцій.

Нехай $A = D_q$, де D_q — замикання в $\mathfrak{X} = L_q(\mathbb{R})$ $(1 < q \leq \infty)$ оператора диференціювання. У цьому випадку маємо

$$\mathcal{E}_\infty^\nu(D_q) = \left\{u \in \mathcal{C}^\infty(D_q) \colon \|u\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu} < \infty\right\},$$

де $\|u\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(D_q/\nu)^k u\right\|_{L_q(\mathbb{R})}$ $(\nu > 0)$, $\mathcal{E}_\infty(D_q) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)$.

Розглянемо простір $\mathcal{M}_q^\nu$ цілих комплексних функцій

$$U \colon \mathbb{C} \ni \xi + i\eta \longrightarrow U(\xi + i\eta)$$

експоненціального типу $\nu > 0$, що належать $L_q(\mathbb{R})$ при $\eta = 0$. Позначимо $\mathcal{M}_q = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{M}_q^\nu$. Визначимо на $\mathcal{M}_q$ квазінорму

$$|u|_{\mathcal{M}_q} = \|u\|_{L_q(\mathbb{R})} + \sup\left\{|\zeta| \colon \zeta \in \operatorname{supp} Fu\right\}, \quad u \in \mathcal{M}_q,$$

де $\operatorname{supp} Fu$ — носій перетворення Фур'є Fu функції $u \in \mathcal{M}_q$.

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \leq \infty\}$ або $\{0 \leq s < \infty, \tau = \infty\}$ і $1 < q \leq \infty$ позначимо через $B_{q,\tau}^s(\mathbb{R})$ класичний простір Бєсова з нормою $\|\cdot\|_{B_{q,\tau}^s}$. Покажемо зв'язок між простором $\mathcal{B}_{p,\tau}^s(D_q)$ and $B_{q,\tau}^s(\mathbb{R})$.

Теорема 2.4.1. *Виконується такий ізоморфізм*

$$\mathcal{B}_{\infty,\tau}^s(D_q) = B_{q,\tau}^s(\mathbb{R}).$$

Д о в е д е н н я. Позначимо $u(\xi) = U(\xi + i0)$ для $U \in \mathcal{M}_q^\nu$, де $\xi \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$. Для кожної такої цілої функції u виконується нерівність Бернштейна $\|D_q^k u\|_{L_q} \le \nu^k \|u\|_{L_q}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ (див. [3, с. 228]). Це означає, що

$$\|u\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(D_q/\nu)^k u\right\|_{L_q} \le \|u\|_{L_q}$$

Отже, якщо $U \in \mathcal{M}_q^\nu$, то $u \in \mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)$.

Навпаки, нехай $u \in \mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)$ з фіксованим $\nu > 0$. Із означення норми в $\mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)$ випливає, що $\|D_q^k u\|_{L_q} \le \nu^k \|u\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Це означає, що

$$\|U(\cdot + i\eta)\|_{L_q} \le \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|D_q^k u\right\|_{L_q} \frac{|\eta|^k}{k!} \le \|u\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu} \exp\big(\nu|\eta|\big), \quad \eta \in \mathbb{R} \qquad (2.87)$$

для будь-якої функції $U\colon \mathbb{C} \ni \xi + i\eta \longrightarrow U(\xi + i\eta)$, такої, що $u(\xi) = U(\xi + i0)$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$. Отже, $U(\cdot + i\eta) \in L_q(\mathbb{R})$ для всіх $\eta \in \mathbb{R}$. Із нерівності (2.87) випливає, що, якщо $q = \infty$, то $U(\cdot + i\eta) \in \mathcal{M}_\infty^\nu$.

Покажемо, що $U(\cdot + i\eta) \in \mathcal{M}_q^\nu$ для $1 < q < \infty$. Нехай $C_b(\mathbb{R})$ — простір обмежених неперервних комплексних функцій на $\mathbb{R}$ із sup-нормою $\|\cdot\|_{L_\infty}$. Нехай $W_q^1(\mathbb{R})$ — простір Соболєва, що співпадає з областю визначення оператора D_q, і наділений нормою $\|u\|_{W_q^1} = \Big(\|u\|_{L_q}^q + \|Du\|_{L_q}^q\Big)^{1/q}$, Доведемо неперервність вкладення $W_q^1(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$.

Розглянемо випадок $1 < q \le 2$. Простір Шварца $S(\mathbb{R})$ швидко спадних функцій є щільний в $W_q^1(\mathbb{R})$ і інваріантний відносно перетворення Фур'є F. Існує постійна c_1, така, що $\|u\|_{L_\infty} \le c_1 \|Fu\|_{L_1}$ для всіх $u \in S(\mathbb{R})$, оскільки $F^{-1}\colon L_1(\mathbb{R}) \longrightarrow L_\infty(\mathbb{R})$ неперервне. Використаємо відомий ізоморфізм $W_q^1(\mathbb{R}) = H_q^1(\mathbb{R})$ (див. [86, теорема 2.3.3]), де $H_q^1(\mathbb{R})$ — відповідний простір бесселевих потенціалів на $\mathbb{R}$. Згідно з теоремою Рісса-Торіна, перетворення Фур'є $F\colon L_q(\mathbb{R}) \longrightarrow L_r(\mathbb{R})$ з $1/r = 1 - 1/q$

неперервне. Для будь-якого $u \in S(\mathbb{R})$ маємо

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L_\infty} \le c_1 \|Fu\|_{L_1} \\
&\le c_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\zeta|^2\right)^{-q/2} d\zeta \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \left(1+|\zeta|^2\right)^{1/2} Fu(\zeta) \right|^r d\zeta \right)^{1/r} \\
&= c_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\zeta|^2\right)^{-q/2} d\zeta \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| F \circ F^{-1} \left(1+|\zeta|^2\right)^{1/2} Fu(\zeta) \right|^r d\zeta \right)^{1/r} \\
&\le c_1 c_2 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\zeta|^2\right)^{-q/2} d\zeta \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| F^{-1} \left(1+|\zeta|^2\right)^{1/2} Fu(\zeta) \right|^q d\zeta \right)^{1/q} \\
&= c_1 c_2 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\zeta|^2\right)^{-q/2} d\zeta \right)^{1/q} \|u\|_{H_q^1} \le c \|u\|_{W_q^1},
\end{aligned}$$

де $c = c_1 c_2 c_3 \left(\int (1+|\zeta|^2)^{-q/2} d\zeta\right)^{1/q} < \infty$, $c_2 = \|F\|_{\mathfrak{L}(L_q, L_r)}$ і c_3 визначена ізоморфізмом $W_q^1(\mathbb{R}) = H_q^1(\mathbb{R})$. Як наслідок, виконується нерівність $\|u\|_{L_\infty} \le c\|u\|_{W_q^1}$ для всіх $u \in W_q^1(\mathbb{R})$, оскільки вкладення $S(\mathbb{R}) \subset W_q^1(\mathbb{R})$ щільне.

Як відомо [79, глава I, розділ 8, теорема 1]), наявні неперервні вкладення $W_q^1(-n,n) \subset C_b(-n,n)$ для $n \in \mathbb{N}$ і $2 \le q < \infty$. Отже, існує постійна c, така, що $\operatorname{ess\,sup}_{(-n,n)} |u| \le c\|u\|_{W_q^1(-n,n)}$ для всіх $u \in W_q^1(-n,n)$. З іншого боку, якщо $u \in W_q^1(\mathbb{R})$, то $|u(\xi)|^q \to 0$ майже всюди на $\mathbb{R}$ при $|\xi| \to \infty$. Тому, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке n, що

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}} |u| \le \varepsilon + \operatorname*{ess\,sup}_{(-n,n)} |u| \le \varepsilon + c\|u\|_{W_q^1(-n,n)} \le \varepsilon + c\|u\|_{W_q^1(\mathbb{R})}$$

для всіх $u \in W_q^1(\mathbb{R})$.

В результаті обох зазначених вище випадків, маємо

$$\|u\|_{L_\infty} \le c\|u\|_{W_q^1}, \quad u \in W_q^1(\mathbb{R}), \quad 1 < q \le \infty.$$

Отже, $\|D_q^k u\|_{L_\infty} \le c\|D_q^k u\|_{W_q^1}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Використовуючи нерівність

$$\|D_q^k u\|_{W_q^1}^q = \|D_q^k u\|_{L_q}^q + \|D_q^{k+1} u\|_{L_q}^q \le (1+\nu^q)\nu^{kq} \|u\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu}^q,$$

маємо

$$\|U(\cdot+i\eta)\|_{L_\infty} \le \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|D_q^k u\right\|_{L_\infty} \frac{|\eta|^k}{k!} \le c\,(1+\nu^q)^{1/q} \exp\left(\nu|\eta|\right) \|u\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu}$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}$. Отже, $U \in \mathcal{M}_q^\nu$ для всіх $1 < q \le \infty$. Для звуження $\mathcal{M}_q^\nu \ni U \longrightarrow u \in \mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)$ маємо

$$\mathcal{M}_q^\nu = \mathcal{E}_\infty^\nu(D_q), \quad \mathcal{M}_q = \mathcal{E}_\infty(D_q). \tag{2.88}$$

Застосовуючи (2.20), (2.88) і відомі інтерполяційні властивості просторів Бєсова (див. [3, теорема 7.2.4]), отримуємо потрібну рівність

$$\mathcal{B}_{\infty,\tau}^s(D_q) = (\mathcal{E}_\infty(D_q), L_q(\mathbb{R}))_{\vartheta,r}^{1/\vartheta} = (\mathcal{M}_q, L_q(\mathbb{R}))_{\vartheta,r}^{1/\vartheta} = B_{q,\tau}^s(\mathbb{R}),$$

де $\vartheta = 1/(s+1)$ і $\tau = r\vartheta$. Теорема доведена.

Теорема 2.4.2. *Виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{B_{q,\tau}^s} \le c_{s,\tau}\, |u|_{\mathcal{M}_q}^s \, \|u\|_{L_q}, \quad u \in \mathcal{M}_q, \tag{2.89}$$

$$d_\infty(\nu, u) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s} \, \|u\|_{B_{q,\tau}^s}, \quad u \in B_{q,\tau}^s(\mathbb{R}), \tag{2.90}$$

де $d_\infty(\nu,u) = \inf\left\{\|u-v\|_{L_q} \colon v \in \mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)\right\} = \inf\left\{\|u-v\|_{L_q} \colon v \in \mathcal{M}_q^\nu\right\}$, *постійні* $c_{s,\tau}$ *і* $C_{s,\tau}$ *з теореми 2.3.1.*

Д о в е д е н н я. Використовуючи першу із рівностей (2.88) і теорему Пелі-Вінера ([57, розділ VI, § 4]), отримуємо

$$\sup\left\{|\zeta| \colon \zeta \in \operatorname{supp} Fu\right\} = \inf\left\{\nu > 0 \colon u \in \mathcal{E}_\infty^\nu(D_q)\right\}, \quad u \in \mathcal{M}_q.$$

Отже, квазінорми $|u|_{\mathcal{E}_\infty}$ і $|u|_{\mathcal{M}_q}$ є рівними на $\mathcal{M}_q$. Тепер залишилось скористатися наслідком 2.3.1 і теоремою 2.4.1. Теорема доведена.

Висновки до розділу 2

У даному розділі визначено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора у банаховому просторі. Встановлено основні властивості таких просторів (теорема 2.1.1).

Для операторів з точковим спектром встановлено зв'язок між їх кореневими векторами та цілими векторами експоненціального типу (теорема 2.1.5). Показано, що простори цілих векторів експоненціального типу оператора з точковим спектром співпадають з лінійною оболонкою образів проекторів Ріса. У випадку оператора з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності, простір всіх цілих векторів експоненціального типу співпадає з лінійною оболонкою його кореневих векторів.

За умови щільності множини цілих векторів експоненціального типу в банаховому просторі $\mathfrak{X}$ доведено можливість представлення кожного елемента $x \in \mathfrak{X}$ у вигляді ряду, членами якого є цілі вектори експоненціального типу замкненого оператора (теорема 2.1.4).

Введено нові класи апроксимаційних просторів типу Бєсова, асоційованих з необмеженими операторами у банаховому просторі $\mathfrak{X}$. Показано, що такі простори є інтерполяційними просторами між просторами цілих векторів експоненціального типу і простором $\mathfrak{X}$ (теореми 2.2.1, 2.2.2, наслідок 2.2.1).

Визначено шкалу апроксимаційних просторів на областях визначення цілих степенів операторів. Встановлено інтерполяційні властивості таких просторів (теореми 2.2.3, 2.2.4, наслідок 2.2.2).

Досліджено проблему наближення заданого елемента банахового простору $\mathfrak{X}$ елементами A-інваріантних підпросторів цілих векторів експоненціального типу $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)$ з фіксованими індексами q і p. Отримані результати представлено у вигляді нерівностей типу Бернштейна і Дже-

ксона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів (теореми 2.3.1, 2.3.2, наслідок 2.3.1). При цьому отримано явну залежність констант від параметрів простору типу Бесова.

Доведено теорему, що характеризує спектральні апроксимації для оператора з точковим спектром в термінах квазінорм визначених апроксимаційних просторів типу Бєсова (теорема 2.3.5).

Досліджено проблему наближення заданого елемента банахового простору $\mathcal{C}^m$, що є областю визначення цілих степенів $(m \in \mathbb{N})$ оператора A, елементами інваріантних підпросторів векторів експоненціального типу $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m)$. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм відповідних апроксимаційних просторів (теореми 2.3.3, 2.3.4, наслідок 2.3.2). Доведено теорему, що характеризує спектральні апроксимації для оператора з точковим спектром в термінах квазінорм визначених апроксимаційних просторів (теорема 2.3.6).

На прикладі оператора диференціювання в просторі $L_q(\mathbb{R})$ показано застосування отриманих вище абстрактних результатів в класичній теорії апроксимації функцій. Доведено, що апроксимаційний простір, асоційований з оператором диференціювання, при певних значеннях індексів співпадає з класичним простором Бєсова (теорема 2.4.1). Як наслідок, отримано нерівності типу Бернштейна і Джексона (теорема 2.4.2) з точними значеннями констант, що визначаються параметрами простору Бесова.

Основні результати розділу 2 опубліковані у працях [28, 43, 45, 46, 54, 127, 131, 135, 138, 140, 142, 143].

РОЗДІЛ 3

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПРОСТОРІВ ЦІЛИХ ВЕКТОРІВ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

У даному розділі розвинемо теорію інтерполяції просторів цілих векторів експоненціального типу, асоційованих з необмеженими операторами у банахових просторах, у контексті її застосувань в теорії наближень функцій, зокрема, спектральних апроксимацій різними класами функцій в термінах їх найкращих наближень у різних функціональних просторах.

3.1. Інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу, дійсний метод

Визначимо і встановимо основні властивості інтерполяційних просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, породжених дійсними методами інтерполяції.

Нехай $0 < \nu, \nu_0, \nu_1 < \infty$, $1 \le p, p_0, p_1 \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Для пари просторів $\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A)$ і $\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)$ визначимо інтерполяційний простір

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)_{\theta,p} = \left\{ x \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A) + \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A) : \|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}} < \infty \right\},$$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(t, x; \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) \right]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t, x; \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)), & p = \infty, \end{cases}$$

де $K(t, x; \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) = \inf\limits_{x=x^0+x^1} \left(\|x^0\|_{\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}} + t\,\|x^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}} \right)$, $x^0 \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A)$, $x^1 \in \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)$ і $t > 0$.

Теорема 3.1.1. *Нехай* $1 \le p,\, p_0,\, p_1 \le \infty$, $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $\nu_0 \ne \nu_1$. *Тоді при* $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^{\theta}$ *виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}_p^{\nu}(A). \tag{3.1}$$

Д о в е д е н н я. Простір $\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$ ізометричний простору послідовностей вигляду $l_p^{\nu} = \left\{\bar{x} := \{\nu^{-k}x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} :\, x_k = A^k x, x \in \mathcal{E}_p^{\nu}(A)\right\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_p^{\nu}} = \|x\|_{\mathcal{E}_p^{\nu}}$. Зробимо заміну $\nu = 2^{-\sigma}$, при якій умова $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^{\theta}$ переходить у рівність $\sigma = (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1$. Тоді для $\bar{x} \in l_\infty^{\max(\nu_0,\nu_1)}$ маємо

$$K(t, \bar{x}, l_\infty^{\nu_0}, l_\infty^{\nu_1}) \sim \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \min(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1})\|x_k\|.$$

Якщо $\bar{x} \in (l_\infty^{\nu_0},\, l_\infty^{\nu_1})_{\theta,p}$, то з точністю до деякої постійної $c > 0$ отримуємо

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}\|^p_{\left(l_\infty^{\nu_0}, l_\infty^{\nu_1}\right)_{\theta,p}} &\sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta pj(\sigma_0-\sigma_1)} \sup_k \left[\min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|\right]^p \\
&\ge \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{pj[\sigma_0(1-\theta)+\sigma_1\theta]}\|x_j\|^p = c\|\bar{x}\|^p_{l_p^{\nu}}.
\end{aligned}$$

Отже, виконується неперервне вкладення $(l_\infty^{\nu_0},\, l_\infty^{\nu_1})_{\theta,p} \subset l_p^{\nu}$.

Нехай $\bar{x} \in l_p^{\nu}$ і, без обмеження загальності, $\nu_0 < \mu_0 < \nu < \mu_1 < \nu_1$. Тоді

$$K(t, \bar{x}, l_1^{\nu_0}, l_1^{\nu_1}) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} \min(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1})\|x_k\|.$$

Використовуючи нерівність Гельдера ([57, с. 56]), маємо

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}\|^p_{\left(l_1^{\nu_0}, l_1^{\nu_1}\right)_{\theta,p}} &\sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta pj(\sigma_0-\sigma_1)}\Bigg[\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|\Bigg]^p \\
&\leq c'\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{pj(\sigma-\sigma_0)}\Bigg(\sum_{k\leq j} 2^{p'k(\sigma_0-\mu_0)}\Bigg)^{p/p'}\Bigg(\sum_{k\leq j} 2^{pk\mu_0}\|x_k\|^p\Bigg) \\
&+ c'\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{pj(\sigma-\sigma_1)}\Bigg(\sum_{k>j} 2^{p'k(\sigma_1-\mu_1)}\Bigg)^{p/p'}\Bigg(\sum_{k>j} 2^{pk\mu_1}\|x_k\|^p\Bigg) \\
&\leq c''\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{pk\mu_0}\|x_k\|^p\sum_{j\geq k} 2^{pj(\sigma-\mu_0)} + c''\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{pk\mu_1}\|x_k\|^p \\
&\times \sum_{j<k} 2^{pj(\sigma-\mu_1)} \leq c\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\sigma p}\|x_k\|^p = c\|\bar{x}\|^p_{l_p^\nu}.
\end{aligned}$$

Тому виконується неперервне вкладення $l_p^\nu \subset (l_1^{\nu_0},\, l_1^{\nu_1})_{\theta,p}$. З властивостей інтерполяційних просторів ([86, теорема 1.3.3]) отримуємо

$$(l_1^{\nu_0},\, l_1^{\nu_1})_{\theta,p} \subset \left(l_{p_0}^{\nu_0},\, l_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p} \subset (l_\infty^{\nu_0},\, l_\infty^{\nu_1})_{\theta,p}$$

при $1 \leq p, p_0, p_1 \leq \infty$. В результаті маємо

$$l_p^\nu \subset \left(l_{p_0}^{\nu_0},\, l_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p} \subset l_p^\nu,$$

звідки й випливає (3.1). Теорема доведена.

Наслідок 3.1.1. *Нехай* $1 \leq p,\, p_0,\, p_1 \leq \infty$, $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $\nu_0 \neq \nu_1$ *і* $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$. *Існують такі додатні числа* $c_1 = c_1(\theta, p)$ *і* $c_2 = c_2(\theta, p)$, *що виконуються нерівності*

$$K(t, x; \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) \leq c_1 t^\theta \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}, \quad x \in \mathcal{E}_p^\nu(A), \tag{3.2}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \leq c_2\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}}\|x\|^\theta_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}},\ x \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A)\bigcap\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A). \tag{3.3}$$

При $1 \leq p \leq \tilde{p} \leq \infty$ *виконуються вкладення*

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)_{\theta,p} \subset \left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)_{\theta,\tilde{p}}. \tag{3.4}$$

Крім того, якщо $\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A) \subset \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)$ *і* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, *то*

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)_{\theta_0,p} \subset \left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)_{\theta_1,\tilde{p}}. \tag{3.5}$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (3.2) випливає з (3.1) та оцінки

$$\begin{aligned} t^{-\theta} K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) &= K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) \left(\int_t^\infty s^{-\theta p} \frac{ds}{s} \right)^{1/p} \\ &\le c\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}}. \end{aligned}$$

Нехай $x \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A) \bigcap \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ і $T\lambda = \lambda x$ — відображення $\mathbb{C}$ в $\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A)$ або $\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)$ відповідно. Тоді

$$\|T\|_{\mathbb{C}\to\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A)} = \|x\|_{\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}}, \ \|T\|_{\mathbb{C}\to\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)} = \|x\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}}.$$

Нерівність (3.3) випливає тепер з (3.1) та оцінки

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}} = \|T\|_{\mathbb{C}\to\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}} \le c\|x\|_{\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}}^{1-\theta} \|x\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}}^{\theta}.$$

Для $x \in \left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)_{\theta,p}$ маємо

$$\begin{aligned} \|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,\tilde{p}}} &\le \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/\tilde{p}} \\ &\times \left(\sup_{t>0} t^{-\theta} K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) \right)^{(1-p/\tilde{p})} \le c\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}}, \end{aligned}$$

звідки випливає (3.4).

Якщо $\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A) \subset \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)$, то з нерівності

$$K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) \le t\,\|x\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}}, \ x \in \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A),$$

маємо

$$\begin{aligned} \|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,1}} &= \int_0^1 t^{-\theta_1} K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) \frac{dt}{t} \\ &+ \int_1^\infty t^{-\theta_1} K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) \frac{dt}{t} \le c\,\|x\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}} \\ &+ \sup_{t>0} t^{-\theta_0} K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) \int_1^\infty \tau^{-(\theta_1-\theta_0)} \frac{d\tau}{\tau} \\ &\le c_1\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,\infty}}, \end{aligned}$$

звідки випливає вкладення

$$\left(\mathcal{E}^{\nu_0}_{p_0}(A), \mathcal{E}^{\nu_1}_{p_1}(A)\right)_{\theta_0,\infty} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu_0}_{p_0}(A), \mathcal{E}^{\nu_1}_{p_1}(A)\right)_{\theta_1,1}.$$

Таким чином, вкладення (3.5) випливає з (3.4).

Нехай $0 < \nu < \infty$, $1 < q_0, q_1 < \infty$, $1 \le p, p_0, p_1 \le \infty$, $0 < \theta < 1$. Визначимо інтерполяційний простір $\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)\right)_{\theta,p}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}, \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\cdot), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\cdot))\right]^p \dfrac{dt}{t}\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)), & p = \infty, \end{cases}$$

де $K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)) = \inf\limits_{x=x^0+x^1} \left(\|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}} + t\,\|x^1\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}}\right)$, $t > 0$, $x^0 \in \mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A)$, $x^1 \in \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)$.

Теорема 3.1.2. *Нехай* $0 < \nu < \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 < q_0, q_1 < \infty$, $q_0 \ne q_1$ *і* $1 \le p, p_0, p_1 \le \infty$. *Тоді виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A), \quad \text{де} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{3.6}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $1 \le p \le \tilde{p} \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Тоді виконуються вкладення

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)\right)_{\theta,p} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)\right)_{\theta,\tilde{p}}. \tag{3.7}$$

Дійсно, при $1 \le p \le \tilde{p} < \infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{1}, \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}\right)_{\theta,\tilde{p}}} \le \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde{p}}$$

$$\times \left(\sup_{t>0} t^{-\theta} K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A))\right)^{(1-p/\tilde{p})} \le c\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{1}, \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}\right)_{\theta,p}},$$

звідки отримуємо (3.7).

Вкладення $\left(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)\right)_{\theta,p} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)\right)_{\theta,\infty}$ випливає з нерівності $K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)) \le c\,t^{\theta}\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{1}, \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}\right)_{\theta,p}}$.

Застосовуючи теорему про реітерацію [3, теорема 3.11.5], в силу рівності (2.1), маємо

$$\big(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)\big)_{\theta,p}=\big(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(A)\big)_{\lambda,p}=\mathcal{E}^{\nu}_{1/(1-\lambda),p}(A), \tag{3.8}$$

де $q_0=1/(1-\theta_0)$, $q_1=1/(1-\theta_1)$, $\lambda=(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1$, $0\le\theta_0<\theta_1\le 1$. При $q=1/(1-\lambda)$ із рівності (3.8) отримуємо (3.6). Теорема доведена.

Наслідок 3.1.2. *Нехай* $0<\nu<\infty$, $0<\theta<1$, $1<q_0,q_1<\infty$, $q_0\ne q_1$ *і* $1\le p,p_0,p_1\le\infty$. *Існують такі додатні числа* $c_1=c_1(\theta,p)$ *і* $c_2=c_2(\theta,p)$, *що виконуються нерівності*

$$K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A))\le c_1t^{\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}},\quad x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A), \tag{3.9}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}}\le c_2\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}},\ x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A)\bigcap\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A). \tag{3.10}$$

При $1\le p\le\tilde p\le\infty$ *виконуються вкладення*

$$\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A)\subset\mathcal{E}^{\nu}_{q,\tilde p}(A). \tag{3.11}$$

Крім того, якщо $\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A)\subset\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)$ *і* $0<\theta_0<\theta_1<1$, *то*

$$\big(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)\big)_{\theta_0,p}\subset\big(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)\big)_{\theta_1,\tilde p}. \tag{3.12}$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (3.9) випливає з (3.6) та оцінки

$$t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A))=K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A))$$
$$\times\left(\int_t^{\infty}s^{-\theta p}\frac{ds}{s}\right)^{1/p}\le c\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}}.$$

Нерівність (3.10) випливає з (3.6) та оцінки

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}}=\|T\|_{\mathbb{C}\to\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}}\le c\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}},$$

де $T\lambda=\lambda x$, $\lambda\in\mathbb{C}$ і $x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A)\bigcap\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)$.

Вкладення (3.11) отримуємо з (3.7). Із нерівності

$$K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A))\le t\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}},\ x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A),$$

маємо

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}\right)_{\theta_1,1}} &= \int_0^1 t^{-\theta_1} K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A))\frac{dt}{t} \\
&+ \int_1^{\infty} t^{-\theta_1} K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A))\frac{dt}{t} \le c\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}} \\
&+ \sup_{t>0} t^{-\theta_0} K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(A)) \int_1^{\infty} \tau^{-(\theta_1-\theta_0)}\frac{d\tau}{\tau} \\
&\le c_1\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}\right)_{\theta_0,\infty}},
\end{aligned}$$

звідки випливає вкладення

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta_0,\infty} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(A)\right)_{\theta_1,1}.$$

Таким чином, вкладення (3.12) випливає з (3.11).

Наслідок 3.1.3. *Нехай* $0<\nu<\infty$, $1\le p,p_0,p_1\le\infty$, $p_0\ne p_1$ *і* $0<\theta<1$. *Тоді виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(A)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A), \quad \text{де} \quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}. \tag{3.13}$$

Існують такі додатні числа $c_1=c_1(\theta,p)$ *і* $c_2=c_2(\theta,p)$, *що виконуються нерівності*

$$K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(A)) \le c_1 t^{\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}}, \quad x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(A), \tag{3.14}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}} \le c_2\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}}, \ x\in\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(A)\bigcap\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(A). \tag{3.15}$$

Якщо $1\le p\le\tilde p\le\infty$, $0<\theta_0<\theta_1<1$ *і* $\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(A)\subset\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(A)$, *то*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(A)\right)_{\theta_0,p} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(A),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(A)\right)_{\theta_1,\tilde p}. \tag{3.16}$$

Д о в е д е н н я. Рівність (3.13) отримуємо з (3.6) при $q_0=p_0$ і $q_1=p_1$. Нерівності (3.14) і (3.15) випливають із (3.9) і (3.10) відповідно. Вкладення (3.16) отримуємо з (3.12).

Нехай $0 < \nu < \infty$, $1 \le p \le \infty$ і $m \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $0 \in \rho(A)$ і позначимо через $\mathcal{C}^m := \mathcal{C}^m(A)$ $(m \in \mathbb{N})$ область визначення оператора A^m з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^m} = \|A^m x\|$ для $x \in \mathcal{C}^m$. Визначимо нормовані простори

$$\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m, \mathfrak{X}) := \left\{ x \in \mathcal{C}^\infty(A) \colon \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m)} < \infty \right\},$$

де

$$\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \left\| (A/\nu)^k x \right\|_{\mathcal{C}^m}^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \left\| (A/\nu)^k x \right\|_{\mathcal{C}^m}, & p = \infty. \end{cases}$$

Для спрощення записів надалі використовуємо також позначення $\mathcal{E}_p^{\nu,m} := \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m)$.

Простори $\mathcal{C}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ банахові, тому простори $\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m)$ також банахові. Крім того, використовуючи результати доведення теореми 2.1.1(i), для $1 \le p \le \infty$ і $0 < \nu < \tau$ отримуємо такі неперервні вкладення

$$\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{E}_p^\tau(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{E}_\infty^\tau(\mathcal{C}^m).$$

Якщо $x \in \mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^m)$, то маємо нерівність $\|A^k x\|_{\mathcal{C}^m} \le \nu^k \|x\|_{\mathcal{E}_\infty^{\nu,m}}$, а тому $\|A^k x\|_{\mathcal{C}^m}^{1/k} \le \nu \|x\|_{\mathcal{E}_\infty^{\nu,m}}^{1/k}$. Отже, $\limsup\limits_{k \to \infty} \|A^k x\|_{\mathcal{C}^m}^{1/k} \le \nu$ і для будь-якого $\tau > \nu$ ряд $\|x\|_{\mathcal{E}_1^{\tau,m}} = \sum_k \left\| (A/\tau)^k x \right\|_{\mathcal{C}^m}$ збіжний. Як наслідок, $x \in \mathcal{E}_1^\tau(\mathcal{C}^m)$. Таким чином, для кожного $\tau > \nu$ виконується вкладення

$$\mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{E}_1^\tau(\mathcal{C}^m).$$

Нехай $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Для пари просторів $\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m)$ і $\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)$ визначимо інтерполяційний простір

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,p} = \left\{ x \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m) + \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m) : \|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0,m}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1,m}\right)_{\theta,p}} < \infty \right\},$$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0,m},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1,m}\right)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m))\right]^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}, & p<\infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)), & p=\infty, \end{cases}$$

$K(t,x;\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)) = \inf\limits_{x=x^0+x^1}\left(\|x^0\|_{\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0,m}} + t\|x^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1,m}}\right), x^0 \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m)$, $x^1 \in \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)$ і $t>0$.

Теорема 3.1.3. *Нехай* $1 \le p,\, p_0,\, p_1 \le \infty$, $0<\nu_0,\nu_1<\infty$, $\nu_0 \ne \nu_1$. *Тоді при* $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^{\theta}$ *виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}_p^{\nu}(\mathcal{C}^m). \tag{3.17}$$

Д о в е д е н н я. Простір $\mathcal{E}_p^{\nu}(\mathcal{C}^m)$ ізометричний простору послідовностей вигляду $l_p^{\nu,m} = \left\{\bar{x} := \{\nu^{-k}x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} : x_k = A^k x, x \in \mathcal{E}_p^{\nu}(\mathcal{C}^m)\right\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_p^{\nu,m}} = \|x\|_{\mathcal{E}_p^{\nu,m}}$. Подібно як у доведенні теореми 3.1.1 зробимо заміну $\nu = 2^{-\sigma}$ і, без обмеження загальності, покладемо $\nu_0 < \nu < \nu_1$. Тоді для $\bar{x} \in (l_\infty^{\nu_0,m},\, l_\infty^{\nu_1,m})_{\theta,p}$ маємо

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|^p_{\left(l_\infty^{\nu_0,m},l_\infty^{\nu_1,m}\right)_{\theta,p}} &\sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta pj(\sigma_0-\sigma_1)} \sup_k \left[\min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^m}\right]^p \\ &\ge \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{pj[\sigma_0(1-\theta)+\sigma_1\theta]}\|x_j\|^p_{\mathcal{C}^m} = c\|\bar{x}\|^p_{l_p^{\nu,m}}, \end{aligned}$$

звідки випливає вкладення $(l_\infty^{\nu_0,m},\, l_\infty^{\nu_1,m})_{\theta,p} \subset l_p^{\nu,m}$.

Якщо $\bar{x} \in l_p^{\nu,m}$, то, використовуючи нерівність Гельдера ([57, с. 56]), маємо

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|^p_{\left(l_1^{\nu_0,m},l_1^{\nu_1,m}\right)_{\theta,p}} &\sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta pj(\sigma_0-\sigma_1)} \left[\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^m}\right]^p \\ &\le c\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\sigma p}\|x_k\|^p_{\mathcal{C}^m} = c\|\bar{x}\|^p_{l_p^{\nu,m}}, \end{aligned}$$

звідки випливає вкладення $l_p^{\nu,m} \subset (l_1^{\nu_0,m},\, l_1^{\nu_1,m})_{\theta,p}$. З урахуванням властивостей інтерполяційних просторів ([86, теорема 1.3.3]) отримуємо

$$l_p^{\nu,m} \subset (l_1^{\nu_0,m},\, l_1^{\nu_1,m})_{\theta,p} \subset \left(l_{p_0}^{\nu_0,m},\, l_{p_1}^{\nu_1,m}\right)_{\theta,p} \subset (l_\infty^{\nu_0,m},\, l_\infty^{\nu_1,m})_{\theta,p} \subset l_p^{\nu,m},$$

що й доводить (3.17). Теорема доведена.

Наслідок 3.1.4. *Для всіх* p $(1 \le p \le \infty)$ *виконуються рівності*

$$\mathcal{E}(\mathcal{C}^m) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}^{\nu}_{p}(\mathcal{C}^m), \quad \bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m) = \bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}^{\nu}_{p}(\mathcal{C}^m).$$

Нехай $1 \le p \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $m, r \in \mathbb{N}$ і $r > m$. Визначимо інтерполяційний простір

$$(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,p} = \big\{x \in \mathcal{C}^m + \mathcal{C}^r : \|x\|_{(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,p}} < \infty\big\},$$

з нормою

$$\|x\|_{(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \big[t^{-\theta} K(t, x; \mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)\big]^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t, x; \mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r), & p = \infty, \end{cases}$$

де $K(t, x; \mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r) = \inf\limits_{x=x^0+x^1} \big(\|x^0\|_{\mathcal{C}^m} + t\,\|x^1\|_{\mathcal{C}^r}\big)$, $x^0 \in \mathcal{C}^m$, $x^1 \in \mathcal{C}^r$.

Для $0 < \nu < \infty$ і $1 \le p, q \le \infty$ визначимо простір

$$\mathcal{E}^{\nu}_{p}\big((\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}\big) := \mathcal{E}^{\nu}_{p}\big((\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}, \mathfrak{X}\big) := \Big\{x \in (\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q} : \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,(m,r)}_{p,q,\theta}} < \infty\Big\}$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,(m,r)}_{p,q,\theta}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \big\|(A/\nu)^k x\big\|^p_{(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}}\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k x\big\|_{(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}}, & p = \infty, \end{cases}$$

де позначено $\mathcal{E}^{\nu,(m,r)}_{p,q,\theta} := \mathcal{E}^{\nu}_{p}\big((\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}\big)$.

Для $0 < \nu < \infty$ і $1 \le p, p_0, p_1 \le \infty$ визначимо інтерполяційний простір

$$\big(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^r)\big)_{\theta,p} = \Big\{x \in \mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m) + \mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^r) : \|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{p_0}, \mathcal{E}^{\nu,r}_{p_1}\right)_{\theta,p}} < \infty\Big\},$$

з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{p_0},\mathcal{E}^{\nu,r}_{p_1}\right)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r))\right]^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}, & p<\infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r)), & p=\infty, \end{cases}$$

де $K(t,x;\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m),\,\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r)) = \inf\limits_{x=x^0+x^1}\left(\|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{p_0}} + t\,\|x^1\|_{\mathcal{E}^{\nu,r}_{p_1}}\right),\ x^0\in\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m)$, $x^1\in\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r)$.

Теорема 3.1.4. *Для* $1\le p_0,\,p_1<\infty$ *і* $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$ *виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m),\,\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}^\nu_p\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,p}\right). \tag{3.18}$$

Д о в е д е н н я. Простір $\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m)$ ізометрично вкладений в простір послідовностей

$$l^m_p = \left\{\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}:\ \xi_k\in\mathcal{C}^m,\ \|\{\xi_k\}\|_{l^m_p} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\|\xi_k\|^p_{\mathcal{C}^m}\right)^{1/p}<\infty\right\}.$$

Відповідну ізометрію позначимо

$$\mathcal{I}\colon \mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m)\ni x\hookrightarrow\{\xi_k=(A/\nu)^k x\}\in l^m_p.$$

K-функціонал інтерполяційного простору $\left(l^m_{p_0},\,l^r_{p_1}\right)_{\theta,p}$ допускає оцінку

$$\begin{aligned} K(t,\mathcal{I}(x),l^m_{p_0},l^r_{p_1}) &\le \inf_{x=x^0+x^1}\left(\|\mathcal{I}(x^0)\|_{l^m_{p_0}} + t\|\mathcal{I}(x^1)\|_{l^r_{p_1}}\right) \\ &\le \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m)\to l^m_{p_0}} K\left(\frac{t\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r)\to l^r_{p_1}}}{\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m)\to l^m_{p_0}}}, x, \mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r)\right). \end{aligned}$$

Проводячи заміну $\tau = t\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r)\to l^r_{p_1}}\|\mathcal{I}\|^{-1}_{\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^m)\to l^m_{p_0}}$, отримуємо

$$\|\mathcal{I}(x)\|_{\left(l^m_{p_0},l^r_{p_1}\right)_{\theta,p}} \le \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m)\to l^m_{p_0}} \frac{\|\mathcal{I}\|^\theta_{\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r)\to l^r_{p_1}}}{\|\mathcal{I}\|^\theta_{\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m)\to l^m_{p_0}}}\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{p_0},\mathcal{E}^{\nu,r}_{p_1}\right)_{\theta,p}}.$$

Застосовуючи подібні оцінки для оберненого відображення $\mathcal{I}^{-1}$, визначеного на множині значень оператора $\mathcal{I}$, отримаємо

$$\|\mathcal{I}(x)\|_{\left(l^m_{p_0},l^r_{p_1}\right)_{\theta,p}} = \|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{p_0},\mathcal{E}^{\nu,r}_{p_1}\right)_{\theta,p}},\ x\in\left(\mathcal{E}^\nu_{p_0}(\mathcal{C}^m),\,\mathcal{E}^\nu_{p_1}(\mathcal{C}^r)\right)_{\theta,p}.$$

Згідно з означенням простір $\mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,p}\right)$ ізометричний простору послідовностей

$$l_{p,\theta}^{\nu,(m,r)} = \left\{\bar{x} := \{\nu^{-k}x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} :\, x_k = A^k x, x \in \mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r)_{\theta,p}\right)\right\}$$

з нормою $\|\bar{x}\|_{l_{p,\theta}^{\nu,(m,r)}} = \|x\|_{\mathcal{E}_{p,p,\theta}^{\nu,(m,r)}}$. Застосовуючи тепер відомий ізоморфізм просторів [86, теорема 1.18.1]:

$$\left(l_{p_0}^m, l_{p_1}^r\right)_{\theta,p} = l_{p,\theta}^{(m,r)}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1},$$

де $l_{p,\theta}^{(m,r)} = \left\{\{\xi_k\} : \xi_k \in (\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r)_{\theta,p}, \|\{\xi_k\}\|_{l_{p,\theta}^{(m,r)}}^p = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \|\xi_k\|_{(\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r)_{\theta,p}}^p < \infty\right\}$, приходимо до рівності (3.18). Теорема доведена.

Наслідок 3.1.5. *Для чисел* $1 \le p, q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $m, r \in \mathbb{N}$ *і* $r > m$ *виконується вкладення*

$$\mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right) \subset \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^m). \tag{3.19}$$

Д о в е д е н н я. Для $x = x^0 + x^1 \in \mathcal{C}^m$ маємо

$$\|x\|_{\mathcal{C}^m} = \|x^0 + x^1\|_{\mathcal{C}^m} \le \|x^0\|_{\mathcal{C}^m} + \|x^1\|_{\mathcal{C}^m} \le \|x^0\|_{\mathcal{C}^m} + \alpha_{m,r}\|x^1\|_{\mathcal{C}^r},$$

де $\alpha_{m,r}$ — норма вкладення $\mathcal{C}^r \subset \mathcal{C}^m$. Для деякої постійної $c_{\theta,m,r}$ отримуємо нерівність

$$K(\alpha_{m,r}, x; \mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r) \le c_{\theta,m,r}\, \alpha_{m,r}^\theta\, \|x\|_{(\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}}, \quad x \in (\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q},$$

а отже, неперервне вкладення $(\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q} \subset \mathcal{C}^m$, з якого випливає (3.19).

Наслідок 3.1.6. *Для чисел* $1 \le p, q \le \infty$, $0 < \theta < 1$ *і* $\varepsilon > 0$ *маємо*

$$\mathcal{E}_1^\nu\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right) \subset \mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right) \subset \mathcal{E}_1^{\nu+\varepsilon}\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right),$$

$$\mathcal{E}\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_1^\nu\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right),$$

$$\bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}_1^\nu\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right) = \bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^m,\,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right).$$

Нехай $\{x^*_{k,\nu}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність, яка складається з елементів $x_{k,\nu} := (A/\nu)^k x$, розміщених в порядку незростання норм

$$\|x^*_{0,\nu}\|_{\mathcal{C}^m} \geq \|x^*_{1,\nu}\|_{\mathcal{C}^m} \geq \ldots \geq \|x^*_{k,\nu}\|_{\mathcal{C}^m} \geq \ldots .$$

Для чисел $0 < \nu < \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ і $m \in \mathbb{N}$ визначимо простори

$$\mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m, \mathfrak{X}) := \left\{ x \in \mathcal{C}^\infty(A) \colon \|x\|_{\mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m)} < \infty \right\},$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\|^p_{\mathcal{C}^m} k^{\frac{p}{q}-1} \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\|_{\mathcal{C}^m} k^{\frac{1}{q}}, & p = \infty. \end{cases}$$

При $q = p$ покладемо $\mathcal{E}^\nu_{p,p}(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m)$. Якщо $q = p = 1$ або $q = p = \infty$, то покладемо $\mathcal{E}^\nu_{1,1}(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}^\nu_1(\mathcal{C}^m)$ або $\mathcal{E}^\nu_{\infty,\infty}(\mathcal{C}^m) := \mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^m)$, відповідно. Для спрощення записів покладемо $\mathcal{E}^{\nu,m}_{q,p} := \mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m)$.

Теорема 3.1.5. *Виконується така рівність*

$$(\mathcal{E}^\nu_1(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^m))_{1-1/q,p} = \mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m). \tag{3.20}$$

Як наслідок, для всіх $\tau > \nu$ наявні вкладення

$$\mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{E}^\tau_{q,p}(\mathcal{C}^m). \tag{3.21}$$

Д о в е д е н н я. Простір $\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m)$ ізометричний простору послідовностей $l^{\nu,m}_p = \left\{ \bar{x} := \{\nu^{-k} x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} : x_k = A^k x,\, x \in \mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^m) \right\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l^{\nu,m}_p} = \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_p}$, а простір $\mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m)$ ізометричний простору послідовностей $l^{\nu,m}_{q,p} = \left\{ \bar{x} := \{x_{k,\nu}\}_{k\in\mathbb{N}_0} : x_{k,\nu} = (A/\nu)^k x,\, x \in \mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m) \right\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l^{\nu,m}_{q,p}} = \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q,p}}$.

Для $0 < \tau \leq 1$ маємо

$$K\big(\tau, x; l^{\nu,m}_1, l^{\nu,m}_\infty\big) = \tau \|x^*_{0,\nu}\|_{\mathcal{C}^m},$$

$$K\big(s, x; l^{\nu,m}_1, l^{\nu,m}_\infty\big) = \sum_{k=0}^{s-1} \|x^*_{k,\nu}\|_{\mathcal{C}^m}, \ s \in \mathbb{N}.$$

Використовуючи ці вирази при $p<\infty$, отримуємо

$$\|\bar{x}\|^p_{(l_1^{\nu,m},l_\infty^{\nu,m})_{\theta,p}} \sim \sum_{s=1}^{\infty} s^{-\theta p-1}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\|x^*_{k,\nu}\|_{\mathcal{C}^m}\right)^p \geq \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1-\theta)p-1}\|x^*_{s-1,\nu}\|^p_{\mathcal{C}^m},$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^{-\theta p-1}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\|x^*_{k,\nu}\|_{\mathcal{C}^m}\right)^p \leq c\sum_{k=1}^{\infty} k^{(1-\theta)p-1}\|x^*_{k-1,\nu}\|^p_{\mathcal{C}^m},$$

звідки випливає рівність

$$(l_1^{\nu,m},l_\infty^{\nu,m})_{\theta,p} = l^{\nu,m}_{1/(1-\theta),p},$$

еквівалентна (3.20). Випадок $p=\infty$ є наслідком еквівалентності норм

$$\|\bar{x}\|_{(l_1^{\nu,m},l_\infty^{\nu,m})_{\theta,\infty}} \sim \sup_s s^{-\theta}\sum_{k=0}^{s-1}\|x^*_{k,\nu}\|_{\mathcal{C}^m} \sim \sup_s s^{1-\theta}\|x^*_{s-1,\nu}\|_{\mathcal{C}^m}.$$

Якщо $x\in\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^m)$, то $\|A^kx\|_{\mathcal{C}^m}\leq\nu^k\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_\infty}$, а тому $\|A^kx\|^{1/k}_{\mathcal{C}^m}\leq\nu\,\|x\|^{1/k}_{\mathcal{E}^{\nu,m}_\infty}$. Отже, $\limsup\limits_{k\to\infty}\|A^kx\|^{1/k}_{\mathcal{C}^m}\leq\nu$ і для будь-якого $\tau>\nu$ ряд $\|x\|_{\mathcal{E}^{\tau,m}_1}=\sum_k\left\|\,(A/\tau)^k x\right\|_{\mathcal{C}^m}$ збіжний. Як наслідок, $x\in\mathcal{E}^\tau_1(\mathcal{C}^m)$. Таким чином, для кожного $\tau>\nu$ виконується вкладення

$$\mathcal{E}^\nu_1(\mathcal{C}^m)\subset\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^m)\subset\mathcal{E}^\tau_1(\mathcal{C}^m). \tag{3.22}$$

Із (3.20) і (3.22) для $\tau>\nu$ маємо

$$\mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^m)\subset\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^m)\subset\mathcal{E}^\tau_1(A)\subset\mathcal{E}^\tau_{q,p}(\mathcal{C}^m),$$

звідки й отримуємо (3.21). Теорема доведена.

Нехай $0<\nu<\infty$, $m\in\mathbb{N}$, $1<q_0,q_1<\infty$, $1\leq p,p_0,p_1\leq\infty$ і $0<\theta<1$. Визначимо інтерполяційний простір $\left(\mathcal{E}^\nu_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^\nu_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,p}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty\left[t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^\nu_{q_0,p_0}(\cdot),\mathcal{E}^\nu_{q_1,p_1}(\cdot))\right]^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}, & p<\infty,\\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^\nu_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^\nu_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)), & p=\infty,\end{cases}$$

де $K(t,x;\mathcal{E}^\nu_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^\nu_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m))=\inf\limits_{x=x^0+x^1}\left(\|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_0,p_0}}+t\|x^1\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}}\right), t>0$, $x^0\in\mathcal{E}^\nu_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m)$, $x^1\in\mathcal{E}^\nu_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)$.

Теорема 3.1.6. *Нехай* $0 < \nu < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $1 < q_0, q_1 < \infty$, $q_0 \neq q_1$, $1 \leq p, p_0, p_1 \leq \infty$ *і* $0 < \theta < 1$. *Тоді виконується рівність*

$$\big(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\theta,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \quad \text{де} \ \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{3.23}$$

Д о в е д е н н я. Застосовуючи теорему про реітерацію [3, теорема 3.11.5] і рівність (3.20), отримуємо

$$\big(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\theta,p} = \big(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m)\big)_{\lambda,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{1/(1-\lambda),p}(\mathcal{C}^m), \tag{3.24}$$

де $q_0 = 1/(1-\theta_0)$, $q_1 = 1/(1-\theta_1)$, $\lambda = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$, $0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$. Покладаючи $q = 1/(1-\lambda)$, із рівності (3.24) отримуємо (3.23). Теорема доведена.

Наслідок 3.1.7. *Нехай* $0 < \nu < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $1 < q_0, q_1 < \infty$, $q_0 \neq q_1$, $1 \leq p, p_0, p_1 \leq \infty$ *і* $0 < \theta < 1$. *Існують такі додатні числа* $c_1 = c_1(\theta, p)$ *і* $c_2 = c_2(\theta, p)$, *що виконуються нерівності*

$$K(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)) \leq c_1 t^{\theta} \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q,p}}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \tag{3.25}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q,p}} \leq c_2 \|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_0,p_0}} \|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}}, \ x \in \mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m) \bigcap \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m). \tag{3.26}$$

При $1 \leq p \leq \tilde{p} \leq \infty$ *виконуються вкладення*

$$\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{E}^{\nu}_{q,\tilde{p}}(\mathcal{C}^m). \tag{3.27}$$

Крім того, якщо $\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)$ *і* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, *то*

$$\big(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\theta_0,p} \subset \big(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)\big)_{\theta_1,\tilde{p}}. \tag{3.28}$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (3.25) випливає з (3.23) та оцінки

$$t^{-\theta} K(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)) = K(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m))$$
$$\times \left(\int_t^{\infty} s^{-\theta p} \frac{ds}{s} \right)^{1/p} \leq c \|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_0,p_0}, \mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}}.$$

Нерівність (3.26) випливає з (3.23) та оцінки

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}} = \|T\|_{\mathbb{C}\to\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}} \le c\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_0,p_0}}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}},$$

де $T\lambda = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$ і $x \in \mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m)\bigcap\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)$.

Нехай $1 \le p \le \tilde{p} \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Тоді виконуються вкладення

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,p} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,\tilde{p}}. \tag{3.29}$$

Дійсно, при $1 \le p \le \tilde{p} < \infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_1,\mathcal{E}^{\nu,m}_{\infty}\right)_{\theta,\tilde{p}}} \le \left(\int_0^{\infty}\left(t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m)\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde{p}}$$

$$\times\left(\sup_{t>0}t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m))\right)^{(1-p/\tilde{p})} \le c\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_1,\mathcal{E}^{\nu,m}_{\infty}\right)_{\theta,p}},$$

звідки отримуємо (3.29).

Вкладення $\left(\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,p} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,\infty}$ випливає з нерівності $K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^m)) \le c\,t^{\theta}\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_1,\mathcal{E}^{\nu,m}_{\infty}\right)_{\theta,p}}$.

Вкладення (3.27) отримуємо з (3.29). Із нерівності

$$K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m)) \le t\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}},\ x \in \mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^m),$$

маємо

$$\begin{aligned}\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}\right)_{\theta_1,1}} &= \int_0^1 t^{-\theta_1}K(t,x;\cdot,\cdot)\frac{dt}{t} + \int_1^{\infty}t^{-\theta_1}K(t,x;\cdot,\cdot)\frac{dt}{t}\\ &\le c\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}} + \sup_{t>0}t^{-\theta_0}K(t,x;\cdot,\cdot)\int_1^{\infty}\tau^{-(\theta_1-\theta_0)}\frac{d\tau}{\tau}\\ &\le c_1\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,m}_{q_1,p_1}\right)_{\theta_0,\infty}},\end{aligned}$$

звідки випливає вкладення

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta_0,\infty} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta_1,1}.$$

Вкладення (3.28) випливає тепер з (3.27).

Наслідок 3.1.8. *Нехай* $0 < \nu < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p, p_0, p_1 \le \infty$, $p_0 \ne p_1$ *і* $0 < \theta < 1$. *Тоді виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \quad \text{де} \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}. \tag{3.30}$$

Існують такі додатні числа $c_1 = c_1(\theta, p)$ *і* $c_2 = c_2(\theta, p)$, *що виконуються нерівності*

$$K(t, x; \mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^m)) \le c_1 t^{\theta} \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q,p}}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^m), \tag{3.31}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{q,p}} \le c_2 \|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{p_0}} \|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,m}_{p_1}}, \ x \in \mathcal{E}^{\nu,m}_{p_0}(\mathcal{C}^m) \bigcap \mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^m). \tag{3.32}$$

Якщо $1 \le p \le \tilde{p} \le \infty$, $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ *і* $\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^m)$, *то*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta_0,p} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^m)\right)_{\theta_1,\tilde{p}}. \tag{3.33}$$

Д о в е д е н н я. Рівність (3.30) отримуємо з (3.23) при $q_0 = p_0$ і $q_1 = p_1$. Нерівності (3.31) і (3.32) випливають із (3.25) і (3.26) відповідно. Вкладення (3.33) отримуємо з (3.28).

3.2. Інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу, комплексний метод

У даному параграфі опишемо інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу, породжені комплексним методом інтерполяції.

Нехай $(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1)$ — інтерполяційна пара банахових просторів, $S = \{z : \ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ — смуга у комплексній площині, $\bar{S}$ — її замикання. Позначимо через $\mathcal{F}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1)$ простір $\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1$– значних функцій,

неперервних в замиканні $\bar{S}$ і аналітичних в S, таких, що

$$\sup_{z\in\bar{S}} \|f(z)\|_{\mathfrak{X}_0+\mathfrak{X}_1} < \infty,$$

$$f(j+it) \in \mathfrak{X}_j,\ j=0,1,\ -\infty < t < \infty,$$

$f(j+it)$ неперервна як $\mathfrak{X}_j$ – значна функція від t, $j=0,1$,

$$\|f\|_{\mathcal{F}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1)} = \max_{j=0,1}\Big(\sup_t \|f(j+it)\|_{\mathfrak{X}_j}\Big) < \infty.$$

Позначимо через $\mathcal{F}_-(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1)$ множину всіх функцій $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1)$, для яких

$$\lim_{|t|\to\infty} \|f(j+it)\|_{\mathfrak{X}_j} = 0,\ j=0,1.$$

Для $0<\theta<1$ покладемо

$$[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_\theta = \Big\{x \in \mathfrak{X}_0+\mathfrak{X}_1 :\ \exists\, f(z) \in \mathcal{F}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1),\ f(\theta)=x\Big\},$$

$$[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_{\theta,-} = \Big\{x \in \mathfrak{X}_0+\mathfrak{X}_1 :\ \exists\, f(z) \in \mathcal{F}_-(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1),\ f(\theta)=x\Big\},$$

$$\|x\|_{[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_\theta} = \|x\|_{[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_{\theta,-}} = \inf_{f(\theta)=x} \|f(z)\|_{\mathcal{F}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1)}, \tag{3.34}$$

де inf береться по всіх $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1)$ (відповідно, всіх $f \in \mathcal{F}_-(\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1)$), таких, що $f(\theta)=x$.

Простори $[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_\theta$ і $[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_{\theta,-}$, наділені нормою (3.34), є банаховими просторами і співпадають між собою з точністю до еквівалентності норм ([86, теорема 1.9.2]). У цьому сенсі простори $[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_\theta$ і $[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_{\theta,-}$ ототожнюємо і позначаємо $[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_\theta$. Простори $[\mathfrak{X}_0,\mathfrak{X}_1]_\theta$ $(0<\theta<1)$ є інтерполяційними, причому інтерполяційний функтор — точний типу θ ([86, теорема 1.9.3]).

Нехай $0<\nu_0,\nu_1<\infty$, $1\le p_0,p_1\le\infty$ і $\mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big)$ — простір $\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A)+\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big)$– значних функцій, неперервних в замиканні

$\bar{S}$ і аналітичних в S, таких, що

$$\sup_{z\in\bar{S}} \|f(z)\|_{\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A)+\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)} < \infty,$$

$$f(j+it) \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A),\ j=0,1,\ -\infty < t < \infty,$$

$f(j+it)$ неперервна як $\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A)$ – значна функція від t, $j=0,1$,

$$\|f\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\,\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)} = \max_{j=0,1}\left(\sup_t \|f(j+it)\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}}\right) < \infty.$$

Для $0<\theta<1$ визначимо інтерполяційний простір

$$\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\,\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right]_\theta = \Big\{x \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A)+\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A) :$$

$$\exists\ f(z) \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\,\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big),\ f(\theta)=x\Big\}$$

з нормою

$$\|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\,\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_\theta} = \inf_{f(\theta)=x} \|f(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\,\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)},$$

де $\inf$ береться по всіх $f \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\,\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big)$, таких, що $f(\theta)=x$.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $1 \le p_0,\, p_1 < \infty$, $0<\nu_0,\nu_1<\infty$, $\nu_0 \ne \nu_1$. *Тоді при* $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^{\theta}$ *і* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ *виконується рівність*

$$\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\,\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right]_\theta = \mathcal{E}_p^{\nu}(A). \tag{3.35}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $x \in \left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)_{\theta,p}$. Існує розклад $x = \sum_j x_j$, такий, що $x_j \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A) \bigcap \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)$ і

$$\left(\sum_j (2^{-j\theta} J(2^j, x_j; \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)))^p\right)^{1/p} \le c\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}},$$

де $J(2^j, x_j; \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)) = \max\left(\|x_j\|_{\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}}, 2^j\|x_i\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}}\right)$.

Для $\delta>0$, $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ покладемо

$$f(z) = exp(\delta(z-\eta)^2)\sum_j f_j,$$

$$f_j(z) = x_j\left(2^{(\theta_1-\theta_0)j}\left(2^{-j\theta}J(2^j, x_j; \cdot,\cdot)/\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}}\right)^{p(1/p_1-1/p_0)}\right)^{z-\eta}.$$

В результаті маємо

$$|\exp(-\delta(it-\eta)^2)|\|f(it)\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,p_0}},$$

$$\leq \left(\sum_j (2^{-j\theta_0}J(2^j,f_j(it);\cdot,\cdot))^{p_0}\right)^{1/p_0} \leq c\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}},$$

$$|\exp(-\delta(1+it-\eta)^2)|\|f(1+it)\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,p_1}},$$

$$\leq \left(\sum_j (2^{-j\theta_1}J(2^j,f_j(1+it);\cdot,\cdot))^{p_1}\right)^{1/p_1} \leq c\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}}.$$

Отже, $f\in\mathcal{F}\left(\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,p_0},\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,p_1}\right)$ і $f(\eta)=x$, звідки випливає вкладення

$$\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}\subset\left[\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,p_0},\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,p_1}\right]_\eta. \tag{3.36}$$

З іншого боку, нехай $x\in\left[\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,p_0},\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,p_1}\right]_\eta$ і $f\in\mathcal{F}\left(\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,p_0},\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,p_1}\right)$, $f(\eta)=x$. Покладемо

$$g_j(z)=2^{(z-\eta)((\theta_0-\theta_1)j+\gamma)}f(z).$$

Тоді $g_j\in\mathcal{F}\left(\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,p_0},\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,p_1}\right)$ і $g_j(\eta)=x$. Використовуючи інтегральну формулу Коші

$$x=\int P_0(\eta,\xi)g_j(i\xi)d\xi+\int P_1(\eta,\xi)g_j(1+i\xi)d\xi,$$

де

$$P_l(\eta,\xi)=e^{-\pi\xi}\sin\pi\eta/\left[\sin^2\pi\eta+\left(\cos\pi\eta-e^{\pi(il-\xi)}\right)^2\right],\ l=0,1,$$

при відповідному виборі γ маємо

$$2^{-j\theta}K(2^j, x_j; \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A))$$
$$\leq 2^{-j\theta - j\eta(\theta_0-\theta_1)-\eta\gamma}\int P_0(\eta,\xi)K(2^j, f(i\xi); \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A))d\xi$$
$$+2^{-j\theta - j(1-\eta)(\theta_0-\theta_1)+(1-\eta)\gamma}\int P_1(\eta,\xi)K(2^j, f(1+i\xi); \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A))d\xi$$
$$\leq c\left(\int P_0(\eta,\xi)2^{-j\theta_0}K(2^j, f(i\xi); \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A))d\xi\right)^{1-\eta}$$
$$\times\left(\int P_1(\eta,\xi)2^{-j\theta_1}K(2^j, f(1+i\xi); \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A))d\xi\right)^{\eta}.$$

Застосовуючи нерівності Гельдера ([57, с. 56]) і Мінковського ([57, с. 55]), отримуємо

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}} \leq c\left(\int P_0(\eta,\xi)\|f(i\xi)\|^{p_0}_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,p_0}}d\xi\right)^{(1-\eta)/p_0}$$
$$\times\left(\int P_1(\eta,\xi)\|f(1+i\xi)\|^{p_1}_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,p_1}}d\xi\right)^{\eta/p_1} \leq c\|f\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\,\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)},$$

звідки випливає вкладення

$$\left[\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,p_0},\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,p_1}\right]_{\eta} \subset \left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}. \tag{3.37}$$

Вкладення (3.36) і (3.37) дають рівність

$$\left[\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_0,p_0},\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta_1,p_1}\right]_{\eta} = \left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right)_{\theta,p}. \tag{3.38}$$

Рівність (3.35) випливає з (3.38), [86, (1.18.2/7)] і (3.1). Теорема доведена.

Наслідок 3.2.1. *Нехай* $1 \leq p_0,\, p_1 < \infty$, $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $\nu_0 \neq \nu_1$. *Якщо* $\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A) \subset \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)$ *і* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, *то*

$$\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right]_{\theta_0} \subset \left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right]_{\theta_1}. \tag{3.39}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $x \in \big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big]_{\theta_0}$. Виберемо функцію $f \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\big)$, таку, що $f(\theta) = x$ і

$$\|f(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)} \le \|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_{\theta_0}} + \varepsilon.$$

Покладемо $\theta_0 = \zeta\theta_1$, де $0 \le \zeta < 1$ і $\varphi(z) = f(\theta_1 z)\exp(\varepsilon(z^2 - \zeta^2))$. Тоді маємо

$$\|f(\theta_1 + it)\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_{\theta_1}} \le \|f(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A)\right)},$$

звідки випливає

$$\|\varphi(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_{\theta_1}\right)} \le \big(\|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_{\theta_0}} + \varepsilon\big)e^{\varepsilon}.$$

Оскільки $\varphi(\zeta) = x$ і

$$\Big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\big]_{\theta_1}\Big]_{\zeta} \subset \Big[\big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\big]_{\theta_1},\, \big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\big]_{\theta_1}\Big]_{\zeta} = \big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\big]_{\theta_1},$$

то

$$\|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_{\theta_1}} \le c\|\varphi(\zeta)\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_{\theta_1}\right]_{\zeta}} \le c\|\varphi(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(A),\, \left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_{\theta_1}\right)}.$$

Звідси випливає вкладення $\|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_{\theta_1}} \le c\|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}\right]_{\theta_0}}$, з якого отримуємо (3.39).

Для $0 < \nu < \infty$, $1 \le p_0, p_1 \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$ і $0 < \theta < 1$ визначимо інтерполяційний простір

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)\big]_{\theta} \;=\; \Big\{x \in \mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m) + \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m) :\\ \exists\, f(z) \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)\big),\ f(\theta) = x\Big\}\end{aligned}$$

з нормою

$$\|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0,m},\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1,m}\right]_{\theta}} = \inf_{f(\theta)=x} \|f(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^r)\right)},$$

де $\inf$ береться по всіх $f \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^m),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^m)\big)$, таких, що $f(\theta) = x$.

Нехай $0 < \theta < 1$ $m, r \in \mathbb{N}$ і $r > m$. Визначимо інтерполяційний простір

$$[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta = \big\{x \in \mathcal{C}^m + \mathcal{C}^r : \exists\, f(z) \in \mathcal{F}\big(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r\big),\ f(\theta) = x\big\},$$

з нормою

$$\|x\|_{[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta} = \inf_{f(\theta)=x} \|f(z)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)},$$

де $\inf$ береться по всіх $f \in \mathcal{F}\big(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r\big)$, таких, що $f(\theta) = x$.

Для $0 < \nu < \infty$ і $1 \le p \le \infty$ визначимо простір

$$\mathcal{E}_p^\nu\big(\,[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta\,\big) := \mathcal{E}_p^\nu\big(\,[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta\,, \mathfrak{X}\big) := \Big\{x \in [\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta : \ \|x\|_{\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu,[m,r]}} < \infty\Big\}$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu,[m,r]}} = \begin{cases} \Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \big\|(A/\nu)^k x\big\|^p_{[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta}\Big)^{1/p}, & p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k x\big\|_{[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta}, & p = \infty, \end{cases}$$

де позначено $\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu,[m,r]} := \mathcal{E}_p^\nu\big(\,[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta\,\big)$.

Визначимо також інтерполяційний простір

$$\big[\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^r)\big]_\theta \ = \ \Big\{x \in \mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^m) + \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^r) : \\ \exists\, f(z) \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^r)\big),\ f(\theta) = x\Big\}$$

з нормою

$$\|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu,m}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu,r}\right]_\theta} = \inf_{f(\theta)=x} \|f(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^r)\right)},$$

де $\inf$ береться по всіх $f \in \mathcal{F}\big(\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^r)\big)$, таких, що $f(\theta) = x$.

Теорема 3.2.2. *Для* $1 \le p_0, p_1 < \infty$ *і* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ *виконується рівність*

$$\big[\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^r)\big]_\theta = \mathcal{E}_p^\nu\left([\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta\right) \tag{3.40}$$

(з точністю до еквівалентності норм).

Д о в е д е н н я. Нехай $f(z)\in \mathcal{F}(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^r))$ і $f(\theta)=x$ для $x\in\left[\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^r)\right]_{\theta}$. Тоді

$$g(z)=\left(\frac{\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m)\to l^m_{p_0}}}{\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^r)\to l^r_{p_1}}}\right)^{z-\theta}\mathcal{I}f(z)\in\mathcal{F}\left(l^m_{p_0},l^r_{p_1}\right),\ g(\theta)=\mathcal{I}x$$

і виконуються такі оцінки

$$\|g(z)\|_{\mathcal{F}\left(l^m_{p_0},l^r_{p_1}\right)}\le\|\mathcal{I}\|^{(1-\theta)}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m)\to l^m_{p_0}}\|\mathcal{I}\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^r)\to l^r_{p_1}}\|f(z)\|_{\mathcal{F}\left(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^r)\right)}$$

$$\|\mathcal{I}x\|_{\left[l^m_{p_0},l^r_{p_1}\right]_{\theta}}\le\|\mathcal{I}\|^{(1-\theta)}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m)\to l^m_{p_0}}\|\mathcal{I}\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^r)\to l^r_{p_1}}\|x\|_{\left[\mathcal{E}^{\nu,m}_{p_0},\mathcal{E}^{\nu,r}_{p_1}\right]_{\theta}}.$$

Застосовуючи подібні оцінки для оберненого відображення $\mathcal{I}^{-1}$, отримаємо

$$\|\mathcal{I}(x)\|_{\left[l^m_{p_0},l^r_{p_1}\right]_{\theta}}=\|x\|_{\left[\mathcal{E}^{\nu,m}_{p_0},\mathcal{E}^{\nu,r}_{p_1}\right]_{\theta}},\ x\in\left[\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^m),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^r)\right]_{\theta}.$$

За означенням простір $\mathcal{E}^{\nu}_{p}\left([\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r]_{\theta}\right)$ ізометричний простору послідовностей

$$l^{\nu,[m,r]}_{p,\theta}=\left\{\bar{x}:=\{\nu^{-k}x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}:\ x_k=A^kx,x\in\mathcal{E}^{\nu}_{p}\left([\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r]_{\theta}\right)\right\}$$

з нормою $\|\bar{x}\|_{l^{\nu,[m,r]}_{p,\theta}}=\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,[m,r]}_{p,\theta}}$. Тому рівність (3.40) випливає з відомого ізоморфізму просторів [86, теорема 1.18.1]:

$$\left[l^m_{p_0},l^r_{p_1}\right]_{\theta}=l^{[m,r]}_{p,\theta},\quad\frac{1}{p}=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_1},$$

де $l^{[m,r]}_{p,\theta}=\left\{\{\xi_k\}:\xi_k\in[\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r]_{\theta},\|\{\xi_k\}\|^p_{l^{[m,r]}_{p,\theta}}=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0}\|\xi_k\|^p_{[\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r]_{\theta}}<\infty\right\}$. Теорема доведена.

Нехай $1\le p\le\infty$, $m,r\in\mathbb{N}$ і $\left\{\mathcal{E}^{\nu(n)}_{p}(\mathcal{C}^m)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left\{\mathcal{E}^{\nu(n)}_{p}\left([\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r]_{\theta}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left\{\mathcal{E}^{\nu(n)}_{p}\left((\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовності просторів, що відповідають неспадній послідовності додатних чисел $\{\nu(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, такій, що $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(n)=$

∞. Для $1 \le \rho < \infty$ визначимо простори

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m)\big] \;=\; \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in \mathcal{C}^m : x_n \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m),$$

$$\|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]} = \inf_{x=\sum x_n} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\rho-1)} \|x_n\|^\rho_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}} \right)^{1/\rho} < \infty \Bigg\},$$

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left((\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right)\big] = \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in (\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q} : x_n \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left((\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right),$$

$$\|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu(n),(m,r)}]} = \inf_{x=\sum x_n} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\rho-1)} \|x_n\|^\rho_{\mathcal{E}_{p,q,\theta}^{\nu(n),(m,r)}} \right)^{1/\rho} < \infty \Bigg\},$$

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left([\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta\right)\big] = \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in [\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta : x_n \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left([\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta\right),$$

$$\|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu(n),[m,r]}]} = \inf_{x=\sum x_n} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\rho-1)} \|x_n\|^\rho_{\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu(n),[m,r]}} \right)^{1/\rho} < \infty \Bigg\}.$$

Теорема 3.2.3. *Виконуються такі ізоморфізми просторів*

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m)\big] = \overline{\mathcal{E}(\mathcal{C}^m)}, \tag{3.41}$$

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left((\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right)\big] = \overline{\mathcal{E}\left((\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}\right)}, \tag{3.42}$$

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left([\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta\right)\big] = \overline{\mathcal{E}\left([\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta\right)}, \tag{3.43}$$

де замикання за нормами просторів $\mathcal{C}^m$, $(\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r)_{\theta,q}$ *і* $[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^r]_\theta$ *відповідно.*

Д о в е д е н н я. Для $y \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m)$ маємо таку нерівність

$$\|y\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]} \le 2^{\rho-1} \|y\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}}.$$

Оскільки $\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m) \subset \mathcal{E}_p^{\nu(n+1)}(\mathcal{C}^m)$, то в нерівності можна перейти до границі

$$\|y\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]} \le 2^{\rho-1} \lim_{n\to\infty} \|y\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}} = 2^{\rho-1} \|y\|_{\mathcal{C}^m}.$$

Використовуючи нерівність Гельдера, отримуємо

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]} &\le 2^{\rho-1}\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}}\\ &\le 2^{\rho-1}\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\rho-1)}\|x_n\|^{\rho}_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}}\Bigg)^{1/\rho},\end{aligned}$$

тобто, ряди $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ є абсолютно збіжними в $\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m)\big]$.

Покажемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ збіжний до x в $\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m)\big]$. Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\mathcal{C}^m}\le\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}}\le\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\rho-1)}\|x_n\|^{\rho}_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}}\Bigg)^{1/\rho},$$

то ряд $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ абсолютно збіжний в $\mathcal{C}^m$. Отже, для $\varepsilon>0$ існує таке N, що

$$\begin{aligned}\Big\|x-\sum_{n=1}^{N}x_n\Big\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]} &= \Big\|\sum_{n>N}x_n\Big\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]}\le\sum_{n>N}\|x_n\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]}\\ &\le 2^{\rho-1}\sum_{n>N}\|x_n\|_{\mathcal{C}^m}<\varepsilon.\end{aligned}$$

Це означає, що простір $\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m)\big]$ повний. Оскільки

$$\|x\|_{\mathcal{C}^m}\le\inf_{x=\sum x_n}\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\mathcal{C}^m}\le\inf_{x=\sum x_n}\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}}\le\|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]},$$

то $\|x\|_{\mathcal{C}^m}\le\|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]}\le 2^{\rho-1}\|x\|_{\mathcal{C}^m}$ для $x\in\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m)$. Із наслідку 3.1.4 маємо $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^m)=\mathcal{E}(\mathcal{C}^m)$. Тому,

$$\|x\|_{\mathcal{C}^m}\le\|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),m}]}\le 2^{\rho-1}\|x\|_{\mathcal{C}^m},\quad x\in\mathcal{E}(\mathcal{C}^m).$$

Для доведення рівностей (3.42) і (3.43) достатньо у попередніх міркуваннях замінити $\mathcal{C}^m$ на $(\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r)_{\theta,q}$ і $[\mathcal{C}^m,\mathcal{C}^r]_\theta$ відповідно. Теорема доведена.

3.3. Інтерполяція цілих векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів

У даному параграфі введемо нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів та встановимо їх інтерполяційні властивості.

Означення 3.3.1. [86, с. 103] *Нехай* $\mathfrak{X}$ *— комплексний банахів простір* A *— замкнений лінійний оператор з щільною областю визначення* $\mathcal{C}^1(A)$ *і значеннями в* $\mathfrak{X}$*. Оператор* A *називається позитивним, якщо інтервал* $(-\infty, 0]$ *належить його резольвентній множині та існує таке число* $c > 0$*, що*

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{c}{1 + |\lambda|}, \qquad \lambda \in (-\infty, 0]. \tag{3.44}$$

Прикладом позитивного оператора є будь-який позитивно-визначений самоспряжений оператор в гільбертовому просторі. Якщо A — генератор сильно неперервної напівгрупи $U(t)$, для якої існують числа M і β $(M \geq 0, \beta < 0)$, такі, що

$$\|U(t)\| \leq Me^{\beta t}, \qquad 0 \leq t < \infty,$$

то, згідно з теоремою Хілле-Іосіди ([57, с. 343]), оператор $-A$ позитивний. Однак, існують позитивні оператори, які не є генераторами жодних напівгруп.

Відзначимо, що області визначення $\mathcal{C}^k(A)$ $(k \in \mathbb{N})$ цілих степенів позитивного оператора щільні в $\mathfrak{X}$ і для всіх $x \in \mathfrak{X}$

$$\lim_{t \to \infty} [t(A + tI)^{-1}]^k x = x. \tag{3.45}$$

Дійсно, вважаючи, без обмеження загальності, що $x \in \mathcal{C}^1(A)$, маємо

$$\|[t(A + tI)^{-1}]^k x - x\| \leq c\|t(A + tI)^{-1}x - x\| = c\|(A + tI)^{-1}Ax\| \to 0.$$

Нехай A — позитивний оператор в $\mathfrak{X}$, $m,k\in\mathbb{Z}$, $m\geq 0$, $0<\sigma<k$. Для комплексних чисел α таких, що $-m<\operatorname{Re}\alpha\leq\sigma-m$, і всіх елементів $x\in\left(\mathfrak{X},\mathcal{C}^k\right)_{\sigma/k,1}$ визначимо інтеграл

$$A_\sigma^\alpha x=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(k-m-\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha+m-1}A^{k-m}(A+tI)^{-k}x\,dt. \quad (3.46)$$

Використовуючи рівність

$$\frac{d}{dt}(t^k[A(A+tI)^{-1}]^k)=kt^{k-1}[A(A+tI)^{-1}]^{k+1}, \quad (3.47)$$

за допомогою інтегрування частинами отримуємо

$$\begin{aligned}A_\sigma^\alpha x &= \frac{-\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(k-m-\alpha)}\int_0^\infty\frac{1}{k-m-\alpha}(t^{\alpha+m-k})'t^k\\ &\times\ [A(A+tI)^{-1}]^kA^{-m}x\,dt=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(k+1-m-\alpha)}\\ &\times\ \int_0^\infty t^{\alpha+m-k}t^{k-1}[A(A+tI)^{-1}]^{k+1}A^{-m}x\,dt.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що (3.46) не залежить від k.

Нехай $-m<\operatorname{Re}\alpha\leq\sigma-m-1$. Незалежність (3.46) від m випливає з рівності

$$\begin{aligned}A_\sigma^\alpha x &= \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(k-m-\alpha)}\int_0^\infty\frac{1}{m+\alpha}(t^{\alpha+m})'A^{k-m}(A+tI)^{-k}x\,dt\\ &= \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha+m+1)\Gamma(k-m-\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha+m}A^{k-m}(A+tI)^{-k-1}x\,dt.\end{aligned}$$

Означення A_σ^α показує, що $A^{-k}A_\sigma^\alpha$ можна продовжити до лінійного неперервного оператора на $\mathfrak{X}$. Нехай

$$\left(\mathfrak{X},\mathcal{C}^k\right)_{\sigma/k,1}\ni x_j\to 0 \text{ в } \mathfrak{X} \text{ і } A_\sigma^\alpha x_j\to x \text{ в } \mathfrak{X}.$$

Тоді $A^{-k}x=0$ і $x=0$. Отже, оператор A_σ^α допускає замикання, незалежність якого від σ випливає з нерівності

$$\|A_\sigma^\alpha x\|\leq c\|x\|_{(\mathfrak{X},\mathcal{C}^k)_{\sigma/k,1}}$$

і того, що множина $\mathcal{C}^k$ щільна в $\left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{\sigma/k,1}$.

Дробова степінь A^α позитивного оператора A визначається як замикання оператора A^α_σ. Для цілих α визначена таким чином степінь співпадає зі звичайним визначенням степені оператора. Дійсно, позначимо через $\tilde{A}^j$ $(j \in \mathbb{N})$ степінь A, визначену звичайним способом. Згідно з (3.45) для $x \in \mathfrak{X}$ маємо

$$A(A+tI)^{-1}x \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{3.48}$$

Застосовуючи повторно співвідношення (3.47) і (3.48), отримуємо

$$\begin{aligned}
&\frac{k\ldots(2k-1)}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}t^j[A(A+tI)^{-1}]^{2k}A^{-k}x\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{k\ldots(2k-1)}{(k-1)!}\int_0^N t^{k-1}[A(A+tI)^{-1}]^{2k}A^{-k}x\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{k\ldots(2k-2)}{(k-1)!}\int_0^N t^{-k+1}\frac{d}{dt}(t^{2k-1}[A(A+tI)^{-1}]^{2k-1})A^{-k}x\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{k\ldots(2k-2)}{(k-2)!}\int_0^N t^{k-1}[A(A+tI)^{-1}]^{2k-1}A^{-k}x\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty} k\int_0^N t^{k-1}[A(A+tI)^{-1}]^{k+1}A^{-k}x\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{d}{dt}(t^k[A(A+tI)^{-1}]^k)A^{-k}x\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty}[N(A+NI)^{-1}]^k x = x,
\end{aligned}$$

тобто

$$x = \frac{k\ldots(2k-1)}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}t^j[A(A+tI)^{-1}]^{2k}A^{-k}x\,dt. \tag{3.49}$$

Використовуючи (3.49), за допомогою повторного застосування замкненого оператора A для $x \in \left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{j/k,1}$ отримуємо

$$A^j x = \frac{k\ldots(2k-1)}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-j}t^j[A(A+tI)^{-1}]^{2k}A^{-(k-j)}x\,\frac{dt}{t} \tag{3.50}$$

Із представлення (3.50) і (3.46) випливає

$$A_{k+1}^j x = \tilde{A}^j x, \quad x \in \mathcal{C}^{2k}(\tilde{A}).$$

Із співвідношення (3.45) отримуємо щільність $\mathcal{C}^{2k}(\tilde{A})$ в $\mathcal{C}^j(A)$ і $\mathcal{C}^j(\tilde{A})$. Оскільки A^j і $\tilde{A}^j$ — замкнені оператори, то $\tilde{A}^j = A^j$.

Нехай $m \in \mathbb{N}$. Використовуючи (3.46) із $2k$ замість k і $m = 2k$, $\alpha = -k$, $2k - 1 < \sigma < 2k$, знаходимо, що A^{-k} — неперервний оператор. Враховуючи (3.49), маємо

$$\tilde{A}^k A^{-k} x = A^{-k} \tilde{A}^k x = x, \quad x \in \mathcal{C}^{3k}(\tilde{A}),$$

звідки випливає $\tilde{A}^{-k} = A^{-k}$.

Область визначення $\mathcal{C}^\alpha$ оператора A^α далі розглядаємо як банахів простір з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|A^\alpha x\|$, $x \in \mathcal{C}^\alpha$.

Лема 3.3.1. *Нехай A — позитивний оператор в $\mathfrak{X}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ і $\operatorname{Re}\alpha \cdot \operatorname{Re}\beta > 0$. Тоді*

$$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}. \tag{3.51}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\operatorname{Re}\alpha < 0$ і $\operatorname{Re}\beta < 0$ і $x \in \mathcal{C}^{2k}$, де k — достатньо велике натуральне число. Згідно з (3.46), $A^\beta x$ належить $\mathcal{C}^k$, а тому вирази $A^\alpha A^\beta x$ і $A^{\alpha+\beta} x$ мають смисл. При фіксованому β ці вирази є $\mathfrak{X}$-значними функціями, аналітичними по α. При фіксованому α $A^{\alpha+\beta} x$ — аналітична $\mathfrak{X}$-значна функція, α $A^\beta x$ — аналітична $\mathcal{C}^k$-значна функція, а отже, $A^\alpha A^\beta x$ — аналітична $\mathfrak{X}$-значна функція. Тому отримуємо

$$A^\alpha A^\beta x = c \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} (A + tI)^{-1} (A + \tau I)^{-1} A^2 x \, dt d\tau. \tag{3.52}$$

Використовуючи рівність

$$t(A + tI)^{-1} x - \tau (A + \tau I)^{-1} x = (t - \tau) A (A + tI)^{-1} (A + \tau I)^{-1} x,$$

і аналітичність по t і τ підінтегральної функції в (3.52), отримуємо

$$\begin{aligned} A^\alpha A^\beta x &= c\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Bigg[\int_{i\varepsilon+0}^{i\varepsilon+\infty} t^\alpha (A+tI)^{-1}Ax \int_{-i\varepsilon+0}^{-i\varepsilon+\infty} \tau^{\beta-1}\frac{d\tau}{t-\tau}dt \\ &+ \int_{-i\varepsilon+0}^{-i\varepsilon+\infty} \tau^\alpha (A+\tau I)^{-1}Ax \int_{i\varepsilon+0}^{i\varepsilon+\infty} t^{\alpha-1}\frac{dt}{\tau-t}d\tau\Bigg] \\ &= c'\int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}(A+tI)^{-1}Ax\,dt = A^{\alpha+\beta}x. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Покладаючи $k=m$ в (3.46), для $\operatorname{Re}\alpha<0$ маємо $\|A^\alpha x\|\le c\|x\|$, звідки випливає неперервність A^α. Крім того, отримуємо

$$A^{-\alpha}A^\alpha x = x,\ x\in\mathcal{C}^{2k},\ |\operatorname{Re}\alpha|<k.$$

Якщо $\mathcal{C}^{2k}\ni x_j\to x\in\mathfrak{X}$, то $A^\alpha x_j\to A^\alpha x$. Оскільки $A^{-\alpha}$ — замкнений оператор, то звідси випливає, що $A^\alpha x$ належить $\mathcal{C}^{-\alpha}$ і $A^{-\alpha}A^\alpha x = x$.

Якщо $\operatorname{Re}\alpha<0$, то подібним чином отримуємо

$$A^\alpha A^{-\alpha}x = x,\ x\in\mathcal{C}^{-\alpha}. \tag{3.54}$$

Це означає, що $0\in\rho(A^{-\alpha})$ і $(A^{-\alpha})^{-1}=A^\alpha$.

Нехай тепер $\operatorname{Re}\alpha>0$ і $\operatorname{Re}\beta>0$. Тоді для достатньо великого натурального числа m маємо

$$\|A^\beta x\| = \|A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta}x\|\le c\|A^{\alpha+\beta}x\|,\quad x\in\mathcal{C}^m. \tag{3.55}$$

Якщо $x\in\mathcal{C}^{\alpha+\beta}$, то існує послідовність $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}^m$, така, що $x_j\to x$ і $A^{\alpha+\beta}x_j\to A^{\alpha+\beta}x$. Із оцінки (3.55) маємо $A^\beta x_j\to A^\beta x$. Враховуючи замкненість оператора A^α, отримуємо $A^\beta x\in\mathcal{C}^\alpha$ і $A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta}x$. Навпаки, нехай $x\in\mathcal{C}^\beta$ і $A^\beta x\in\mathcal{C}^\alpha$. Тоді існує елемент $y\in\mathcal{C}^{\alpha+\beta}$, такий, що

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta}y = A^\alpha A^\beta y,$$

звідки $A^\alpha A^\beta(x-y)=0$, а тому $x=y$. Таким чином, рівність (3.51) доведено.

Лема 3.3.2. *Нехай A — позитивний оператор в $\mathfrak{X}$ і $\alpha \in \mathbb{C}$. Якщо $\operatorname{Re}\alpha + r < k$, $r > 0$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$ і $1 \le p \le \infty$, то оператор A^α ізоморфно відображає $\mathcal{C}^\alpha$ на $\mathfrak{X}$, $\mathcal{C}^{\alpha+r}$ на $\mathcal{C}^r$ і $\left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{(\operatorname{Re}\alpha+r)/k,p}$ на $\left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{r/k,p}$.*

Д о в е д е н н я. В силу рівності (3.54), A^α — ізоморфне відображення $\mathcal{C}^\alpha$ на $\mathfrak{X}$. Аналогічно A^r — ізоморфне відображення $\mathcal{C}^r$ на $\mathfrak{X}$. Визначимо норму в $\mathcal{C}^r$ як $\|A^r x\|$. Тоді із (3.51) випливає, що A^α — ізоморфне відображення $\mathcal{C}^{\alpha+r}$ на $\mathcal{C}^r$.

З рівності (3.46) для $m = 0$, $\sigma = \operatorname{Re}\alpha$ і того, що норма простору $\left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{\theta,p}$ еквівалентна нормі

$$\|x\|^*_{\left(\mathfrak{X},\mathcal{C}^k\right)_{\theta,p}} = \int_0^\infty t^{\theta k}[A(A+tI)^{-1}]^k x\, dt,$$

випливає вкладення

$$\left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{\operatorname{Re}\alpha/k,1} \subset \mathcal{C}^\alpha. \tag{3.56}$$

З рівності (3.46) для $m = k$ випливає

$$\begin{aligned}
&\left\|t^{\operatorname{Re}\alpha}[A(A+tI)^{-1}]^k A^{-\alpha}x\right\| \\
&\le c\left\|t^{\operatorname{Re}\alpha}(A+tI)^{-k}\int_0^t \tau^{-\alpha+k-1}[A(A+\tau I)^{-1}]^k x\, d\tau\right\| \\
&+c\left\|t^{\operatorname{Re}\alpha}[A(A+\tau I)^{-1}]^k \int_0^\infty \tau^{-\alpha+k-1}(A+tI)^{-k} x\, d\tau\right\| \le c'\|x\|.
\end{aligned}$$

За допомогою граничного переходу отримуємо останню оцінку для всіх $x \in \mathfrak{X}$. Тому маємо

$$\left\|t^{\operatorname{Re}\alpha}[A(A+tI)^{-1}]^k A^{-\alpha}x\right\| \le c\|A^\alpha x\|, \quad x \in \mathcal{C}^\alpha,$$

звідки випливає вкладення

$$\mathcal{C}^\alpha \subset \left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{\operatorname{Re}\alpha/k,\infty}. \tag{3.57}$$

Із вкладень (3.56), (3.57) і теореми про реітерацію [3, теорема 3.5.3] для $0 < \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$ випливає рівність

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^\alpha)_{\theta,p} = \left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^\beta\right)_{\operatorname{Re}\alpha/\operatorname{Re}\beta,p},$$

яка показує, що A^α ізоморфно відображає $\left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{(\operatorname{Re}\alpha+r)/k,p}$ на простір $\left(\mathfrak{X}, \mathcal{C}^k\right)_{r/k,p}$. Лема доведена.

Нехай $0 < \nu < \infty$, $1 \le p \le \infty$, $\alpha \in \mathbb{C}$ і A — позитивний оператор в $\mathfrak{X}$. Леми 3.3.1 і 3.3.2 дозволяють визначити нормовані простори

$$\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha) := \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha, \mathfrak{X}) := \left\{ x \in \mathcal{C}^\infty(A) \colon \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha)} < \infty \right\},$$

де

$$\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k x\right\|_{\mathcal{C}^\alpha}^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k x\right\|_{\mathcal{C}^\alpha}, & p = \infty. \end{cases}$$

Для спрощення записів використовуємо позначення $\mathcal{E}_p^{\nu,\alpha} := \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$.

Простори $\mathcal{C}^\alpha$ з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|A^\alpha x\|$ банахові, тому простори $\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ також банахові. Крім того, в силу теореми 2.1.1, для $1 \le p < \infty$ і $0 < \nu < \tau$ отримуємо такі неперервні вкладення

$$\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha) \subset \mathcal{E}_p^\tau(\mathcal{C}^\alpha) \subset \mathcal{E}_\infty^\tau(\mathcal{C}^\alpha).$$

Якщо $x \in \mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$, то маємо нерівність $\|A^k x\|_{\mathcal{C}^\alpha} \le \nu^k \|x\|_{\mathcal{E}_\infty^{\nu,\alpha}}$, а тому $\|A^k x\|_{\mathcal{C}^\alpha}^{1/k} \le \nu \, \|x\|_{\mathcal{E}_\infty^{\nu,\alpha}}^{1/k}$. Отже, $\limsup_{k\to\infty} \|A^k x\|_{\mathcal{C}^\alpha}^{1/k} \le \nu$ і для будь-якого $\tau > \nu$ ряд $\|x\|_{\mathcal{E}_1^{\tau,\alpha}} = \sum_k \left\| (A/\tau)^k x \right\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ збіжний. Як наслідок, $x \in \mathcal{E}_1^\tau(\mathcal{C}^\alpha)$. Таким чином, для кожного $\tau > \nu$ виконується вкладення

$$\mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^\alpha) \subset \mathcal{E}_1^\tau(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.58}$$

Нехай $\{x_{k,\nu}^*\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність, яка складається з елементів $x_{k,\nu} := (A/\nu)^k x$, розміщених в порядку незростання норм

$$\|x_{0,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha} \ge \|x_{1,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha} \ge \ldots \ge \|x_{k,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha} \ge \ldots.$$

Для чисел $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$ визначимо простори

$$\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha}) := \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha}, \mathfrak{X}) = \Big\{ x \in \mathcal{C}^{\infty}(A) \colon \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha})} < \infty \Big\},$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha})} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \|x^{*}_{k-1,\nu}\|^{p}_{\mathcal{C}^{\alpha}} k^{\frac{p}{q}-1} \Big)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \|x^{*}_{k-1,\nu}\|_{\mathcal{C}^{\alpha}} k^{\frac{1}{q}}, & p = \infty. \end{cases}$$

Для спрощення записів використовуємо позначення $\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q,p} := \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha})$.

Для $1 \le p, q \le \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ і $0 \le \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$ визначимо також простори

$$\mathcal{E}^{\nu}_{p}\big((\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta})_{\theta,q}\big) = \Big\{ x \in \mathcal{C}^{\infty}(A) : \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,(\alpha,\beta)}_{p,q,\theta}} < \infty \Big\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,(\alpha,\beta)}_{p,q,\theta}} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \big\|(A/\nu)^{k} x\big\|^{p}_{(\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta})_{\theta,q}} \Big)^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^{k} x\big\|_{(\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta})_{\theta,q}}, & p = \infty, \end{cases}$$

$$\mathcal{E}^{\nu}_{p}\big([\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta}]_{\theta} \big) = \Big\{ x \in [\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta}]_{\theta} : \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,[\alpha,\beta]}_{p,\theta}} < \infty \Big\},$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,[\alpha,\beta]}_{p,\theta}} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \big\|(A/\nu)^{k} x\big\|^{p}_{[\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta}]_{\theta}} \Big)^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^{k} x\big\|_{[\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta}]_{\theta}}, & p = \infty. \end{cases}$$

Наступна теорема встановлює ізоморфізми для дійсної та комплексної інтерполяційних шкал введених просторів. Рівність просторів розуміється з точністю до еквівалентності норм.

Теорема 3.3.1. *Нехай* $0 < \theta < 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $0 \le \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$, $1 \le p \le \infty$. *Тоді*

$$(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(\mathcal{C}^{\alpha}), \mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^{\alpha}))_{\theta,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{1/(1-\theta),p}(\mathcal{C}^{\alpha}). \tag{3.59}$$

Якщо існують додатні числа ε *і* M*, такі, що* A^{it} *— обмежений оператор при* $-\varepsilon \le t \le \varepsilon$ *і* $\|A^{it}\| \le M$*, то*

$$\mathcal{E}_p^\nu\big(\,[\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta\,\big) = \mathcal{E}_p^\nu\big(\mathcal{C}^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}\big). \tag{3.60}$$

Якщо $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$*,* $\nu_0 \ne \nu_1$ *і* $1 \le p_0,\, p_1 \le \infty$*, то при* $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$ *виконується рівність*

$$\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big)_{\theta,p} = \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \tag{3.61}$$

а при $1 \le p_0, p_1 < \infty$*, таких, що* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$

$$\big(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^\beta)\big)_{\theta,p} = \mathcal{E}_p^\nu\,\big((\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,p}\big)\,, \tag{3.62}$$

$$\big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big]_\theta = \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \tag{3.63}$$

$$\big[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu}(\mathcal{C}^\beta)\big]_\theta = \mathcal{E}_p^\nu\,\big(\,[\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta\big)\,. \tag{3.64}$$

Д о в е д е н н я. Простір $\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ ізометричний простору послідовностей $l_p^{\nu,\alpha} = \big\{\bar{x} := \{\nu^{-k}x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} :\, x_k = A^k x,\, x \in \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\big\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_p^{\nu,\alpha}} = \|x\|_{\mathcal{E}_p^{\nu,\alpha}}$, а простір $\mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ $(1 < q < \infty)$ ізометричний простору послідовностей $l_{q,p}^{\nu,\alpha} = \big\{\bar{x} := \{x_{k,\nu}\}_{k\in\mathbb{N}_0} :\, x_{k,\nu} = (A/\nu)^k x,\, x \in \mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\big\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_{q,p}^{\nu,\alpha}} = \|x\|_{\mathcal{E}_{q,p}^{\nu,\alpha}}$.

Для $0 < \tau \le 1$ маємо $K\big(\tau, x; l_1^{\nu,\alpha}, l_\infty^{\nu,\alpha}\big) = \tau\|x_{0,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}$, а для всіх $s \in \mathbb{N}$ $K\big(s, x; l_1^{\nu,\alpha}, l_\infty^{\nu,\alpha}\big) = \sum_{k=0}^{s-1}\|x_{k,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}$. Підставляючи ці вирази для функціонала K у формули для норм при $p < \infty$, отримуємо

$$\|\bar{x}\|^p_{(l_1^{\nu,\alpha}, l_\infty^{\nu,\alpha})_{\theta,p}} \sim \sum_{s=1}^\infty s^{-\theta p-1}\bigg(\sum_{k=1}^{s-1}\|x_{k,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}\bigg)^p \ge \sum_{s=1}^\infty s^{(1-\theta)p-1}\|x_{s-1,\nu}^*\|^p_{\mathcal{C}^\alpha},$$

$$\sum_{s=1}^\infty s^{-\theta p-1}\bigg(\sum_{k=1}^{s-1}\|x_{k,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}\bigg)^p \le c\sum_{k=1}^\infty k^{(1-\theta)p-1}\|x_{k-1,\nu}^*\|^p_{\mathcal{C}^\alpha},$$

звідки випливає рівність

$$(l_1^{\nu,\alpha}, l_\infty^{\nu,\alpha})_{\theta,p} = l_{1/(1-\theta),p}^{\nu,\alpha},$$

еквівалентна (3.59). Випадок $p=\infty$ є наслідком еквівалентності норм

$$\|\bar{x}\|_{(l_1^{\nu,\alpha},l_\infty^{\nu,\alpha})_{\theta,\infty}} \sim \sup_s s^{-\theta}\sum_{k=0}^{s-1}\|x_{k,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha} \sim \sup_s s^{1-\theta}\|x_{s-1,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}.$$

Для будь-якого t $(-\infty<t<\infty)$ можна записати $|t|=\varepsilon N+\delta$, де $N\in\mathbb{N}_0$, $0\le\delta<\varepsilon$. Використовуючи (3.53), для $\mathcal{C}^{2k}$ отримуємо

$$\|A^{it}x\| = \|A^{\pm i\delta}A^{\pm i\varepsilon N}x\| \le M^{N+1}\|x\| \le ce^{\gamma|t|}\|x\|,$$

де c і γ — деякі невід'ємні числа. Звідси випливає, що A^{it} — обмежений оператор для всіх t $(-\infty<t<\infty)$ і виконується нерівність

$$\|A^{it}\| \le ce^{\gamma|t|}.$$

Згідно з означенням $\mathcal{C}^\beta$ множина $\mathcal{C}^k$ щільна в $\mathcal{C}^\beta$ для кожного натурального числа $k>\operatorname{Re}\beta$. Застосовуючи (3.53), маємо $\mathcal{C}^\beta=\mathcal{C}^{\operatorname{Re}\beta}$ для $\operatorname{Re}\beta>0$. Тому, без обмеження загальності, можна покласти $\alpha=0$, $\beta>0$.

Нехай $x\in\mathcal{C}^k$, де k — достатньо велике натуральне число. Тоді при $0<\theta<1$

$$\begin{aligned}
&\|x\|_{[\mathfrak{X},\mathcal{C}^\beta]_\theta} \le c\left\|e^{(z-\theta)^2}A^{-(z-\theta)\beta}x\right\|_{\mathcal{F}(\mathfrak{X},\mathcal{C}^\beta)}\\
&\le c\max\left[\sup_t\left\|e^{(it-\theta)^2}A^{-it\beta}A^{\theta\beta}x\right\|, \sup_t\left\|e^{(1+it-\theta)^2}A^{-it\beta}A^{\theta\beta}x\right\|\right]\\
&\le c\|A^{\theta\beta}x\|.
\end{aligned}$$

Оскільки $\mathcal{C}^k$ щільне в $\mathcal{C}^{\theta\beta}$, то з останньої оцінки маємо

$$\mathcal{C}^{\theta\beta}\subset\left[\mathfrak{X},\mathcal{C}^\beta\right]_\theta. \tag{3.65}$$

Згідно з [86, теорема 1.9.1 (b)], лінійна оболонка функцій вигляду $e^{\delta z^2+\lambda z}y$, де $\delta>0$, $\lambda\in\mathbb{N}$ і $y\in\mathcal{C}^k$, щільна в $\mathcal{F}_-\left(\mathfrak{X},\mathcal{C}^\beta\right)$. Позначимо через $Lin\left\{e^{\delta_j z^2+\lambda_j z}y_j\right\}$ лінійну комбінацію скінченного числа функцій

$e^{\delta_j z^2+\lambda_j z}y_j$. Тоді маємо

$$\|A^{\theta\beta}x\| \le c \inf_{Lin\left\{e^{\delta_j z^2+\lambda_j z}y_j\right\}\big|_{z=\theta}=x} \left\|Lin\left\{e^{\delta_j z^2+\lambda_j z}y_j\right\}\right\|_{\mathcal{F}(\mathfrak{X},\mathcal{C}^\beta)} = c\|x\|_{[\mathfrak{X},\mathcal{C}^\beta]_\theta}.$$

Оскільки $\mathcal{C}^k$ щільне в $\mathcal{C}^\beta$, а $\mathcal{C}^\beta$ щільне в $\left[\mathfrak{X},\mathcal{C}^\beta\right]_\theta$, то $\mathcal{C}^k$ щільне в $\left[\mathfrak{X},\mathcal{C}^\beta\right]_\theta$. Крім того, оператор $A^{\theta\beta}$ замкнений, тому з останньої нерівності отримуємо

$$\left[\mathfrak{X},\mathcal{C}^\beta\right]_\theta \subset \mathcal{C}^{\theta\beta}. \tag{3.66}$$

Із (3.65) і (3.66) випливає (3.60).

Зробимо заміну $\nu = 2^{-\sigma}$ і, без обмеження загальності, покладемо $\nu_0 < \nu < \nu_1$. Тоді для $\bar{x} \in (l_\infty^{\nu_0,\alpha},\, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,p}$ маємо

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}\|^p_{\left(l_\infty^{\nu_0,\alpha},\, l_\infty^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,p}} &\sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta pj(\sigma_0-\sigma_1)} \sup_k \left[\min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right]^p \\
&\ge \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{pj[\sigma_0(1-\theta)+\sigma_1\theta]}\|x_j\|^p_{\mathcal{C}^\alpha} = c\|\bar{x}\|^p_{l_p^{\nu,\alpha}},
\end{aligned}$$

звідки випливає вкладення $(l_\infty^{\nu_0,\alpha},\, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,p} \subset l_p^{\nu,\alpha}$.

Якщо $\bar{x} \in l_p^{\nu,\alpha}$, то, використовуючи нерівність Гельдера ([57, с. 56]), маємо

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}\|^p_{\left(l_1^{\nu_0,\alpha},\, l_1^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,p}} &\sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta pj(\sigma_0-\sigma_1)} \left[\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right]^p \\
&\le c\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\sigma p}\|x_k\|^p_{\mathcal{C}^\alpha} = c\|\bar{x}\|^p_{l_p^{\nu,\alpha}},
\end{aligned}$$

звідки випливає вкладення $l_p^{\nu,\alpha} \subset (l_1^{\nu_0,\alpha},\, l_1^{\nu_1,\alpha})_{\theta,p}$. З урахуванням властивостей інтерполяційних просторів ([86, теорема 1.3.3]) отримуємо

$$l_p^{\nu,\alpha} \subset (l_1^{\nu_0,\alpha},\, l_1^{\nu_1,\alpha})_{\theta,p} \subset \left(l_{p_0}^{\nu_0,\alpha},\, l_{p_1}^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,p} \subset (l_\infty^{\nu_0,\alpha},\, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,p} \subset l_p^{\nu,\alpha},$$

що доводить (3.61).

Визначимо банахові простори послідовностей

$$l_p^\alpha = \left\{ \{\xi_k\} : \xi_k \in \mathcal{C}^\alpha,\ \|\{\xi_k\}\|_{l_p^\alpha} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \|\xi_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$$l_{p,\theta}^{(\alpha,\beta)} = \left\{ \{\xi_k\} : \xi_k \in (\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,p}, \|\{\xi_k\}\|_{l_{p,\theta}^{(\alpha,\beta)}}^p = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \|\xi_k\|_{(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,p}}^p < \infty \right\}.$$

Згідно з [86, теорема 1.18.1],

$$\left(l_{p_0}^\alpha, l_{p_1}^\beta\right)_{\theta,p} = l_{p,\theta}^{(\alpha,\beta)}, \tag{3.67}$$

де $1/p = 1/p_0 + 1/p_1$.

В силу означень просторів $\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ і $\mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^\alpha,\, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,p}\right)$ маємо ізометричні вкладення

$$\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha) \ni x \hookrightarrow \{\xi_k := (A/\nu)^k x\} \in l_p^\alpha,$$

$$\mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^\alpha,\, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,p}\right) \ni x \hookrightarrow \{\xi_k := (A/\nu)^k x\} \in l_{p,\theta}^{(\alpha,\beta)}.$$

Позначаючи відповідну ізометрію через $\mathcal{I}$, отримуємо

$$\|\mathcal{I}(x)\|_{\left(l_{p_0}^\alpha, l_{p_1}^\beta\right)_{\theta,p}} = \|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu,\alpha}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu,\beta}\right)_{\theta,p}},\ x \in \left(\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\right)_{\theta,p}.$$

Звідси і з (3.67) випливає (3.62).

Подібно як у доведенні теореми 3.2.1 для $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$ і $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ отримуємо рівність

$$\left[\left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_0,p_0}, \left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_1,p_1}\right]_\theta = \left(\mathcal{E}_{p_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,p}.$$

Звідси і з рівності (3.61), враховуючи [86, (1.18.2/7)], маємо (3.63).

Визначимо простір

$$l_{p,\theta}^{[\alpha,\beta]} = \left\{ \{\xi_k\} : \xi_k \in \left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta, \|\{\xi_k\}\|_{l_{p,\theta}^{[\alpha,\beta]}}^p = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \|\xi_k\|_{[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}^p < \infty \right\}$$

і використаємо відомий ізоморфізм просторів [86, теорема 1.18.1]:

$$\left[l_{p_0}^\alpha, l_{p_1}^\beta\right]_\theta = l_{p,\theta}^{[\alpha,\beta]}, \tag{3.68}$$

де $1/p = 1/p_0 + 1/p_1$. Згідно з означенням простір $\mathcal{E}_p^\nu\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right)$ ізометричний простору послідовностей

$$l_{p,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]} = \left\{\bar{x} := \{\nu^{-k} x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} : x_k = A^k x, x \in \mathcal{E}_p^\nu\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right)\right\}$$

з нормою $\|\bar{x}\|_{l_{p,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]}} = \|x\|_{\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]}}$. Крім того, подібно, як у доведенні теореми 3.2.2, отримуємо

$$\|\mathcal{I}(x)\|_{\left[l_{p_0}^\alpha, l_{p_1}^\beta\right]_\theta} = \|x\|_{\left[\mathcal{E}_{p_0}^{\nu,\alpha}, \mathcal{E}_{p_1}^{\nu,\beta}\right]_\theta},\ x \in \left[\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\right]_\theta, \tag{3.69}$$

де $\mathcal{I} : \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha) \hookrightarrow l_p^\alpha$. Рівність (3.64) випливає тепер з (3.68) і (3.69). Теорема доведена.

Із рівності (3.61) і вкладення (3.58) випливає, що для всіх чисел p $(1 \le p \le \infty)$

$$\mathcal{E}(\mathcal{C}^\alpha) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^\alpha) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha),\quad \bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^\alpha) = \bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.70}$$

Для чисел $1 \le p, q \le \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $0 \le \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$, $0 < \theta < 1$ і $\varepsilon > 0$ маємо

$$\mathcal{E}_1^\nu\left((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right) \subset \mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right) \subset \mathcal{E}_1^{\nu+\varepsilon}\left((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right),$$

$$\mathcal{E}_1^\nu\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right) \subset \mathcal{E}_p^\nu\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right) \subset \mathcal{E}_1^{\nu+\varepsilon}\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right),$$

$$\mathcal{E}\left((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_1^\nu\left((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right),$$

$$\mathcal{E}\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_1^\nu\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_p^\nu\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right),$$

$$\bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}_1^\nu\left((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right) = \bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}_p^\nu\left((\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right),$$

$$\bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}_1^\nu\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right) = \bigcap_{\nu>0} \mathcal{E}_p^\nu\left(\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta\right).$$

Нехай $0 < \nu < \infty$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $1 < q_0, q_1 < \infty$, $1 \le p, p_0, p_1 \le \infty$ і $0 < \theta < 1$. Визначимо інтерполяційний простір $\left(\mathcal{E}_{q_0,p_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1,p_1}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,p}$

з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\cdot),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\cdot))\right]^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}, & p<\infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha)), & p=\infty, \end{cases}$$

де $K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha)) = \inf\limits_{x=x^0+x^1}\left(\|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_0,p_0}} + t\|x^1\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}}\right), t>0$, $x^0\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha)$, $x^1\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha)$.

Теорема 3.3.2. *Нехай* $0<\nu<\infty$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $1<q_0,q_1<\infty$, $q_0\neq q_1$, $1\le p,p_0,p_1\le\infty$ *і* $0<\theta<1$. *Тоді виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha), \quad \text{де} \quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}. \tag{3.71}$$

Д о в е д е н н я. Застосовуючи теорему про реітерацію [3, теорема 3.11.5] і рівність (3.59), отримуємо

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,p} = \left(\mathcal{E}^{\nu}_{1}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\lambda,p} = \mathcal{E}^{\nu}_{1/(1-\lambda),p}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{3.72}$$

де $q_0=1/(1-\theta_0)$, $q_1=1/(1-\theta_1)$, $\lambda=(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1$, $0\le\theta_0<\theta_1\le 1$. Покладаючи $q=1/(1-\lambda)$, із рівності (3.72) отримуємо (3.71). Теорема доведена.

Наслідок 3.3.1. *Нехай* $0<\nu<\infty$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $1<q_0,q_1<\infty$, $q_0\neq q_1$, $1\le p,p_0,p_1\le\infty$ *і* $0<\theta<1$. *Існують такі додатні числа* $c_1=c_1(\theta,p)$ *і* $c_2=c_2(\theta,p)$, *що виконуються нерівності*

$$K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha)) \le c_1 t^\theta \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q,p}}, \quad x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{3.73}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q,p}} \le c_2\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_0,p_0}}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}}, \ x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha)\bigcap\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.74}$$

При $1\le p\le\tilde{p}\le\infty$ *виконуються вкладення*

$$\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha)\subset\mathcal{E}^{\nu}_{q,\tilde{p}}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.75}$$

Крім того, якщо $\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha)\subset\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha)$ *і* $0<\theta_0<\theta_1<1$, *то*

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_0,p}\subset\left(\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_1,\tilde{p}}. \tag{3.76}$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (3.73) випливає з (3.71) та оцінки

$$t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^{\alpha}))=K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^{\alpha}))$$
$$\times\left(\int_t^{\infty}s^{-\theta p}\frac{ds}{s}\right)^{1/p}\le c\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}}.$$

Нерівність (3.74) випливає з (3.71) та оцінки

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}}=\|T\|_{\mathbb{C}\to\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}\right)_{\theta,p}}\le c\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_0,p_0}}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}},$$

де $T\lambda=\lambda x$, $\lambda\in\mathbb{C}$ і $x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^{\alpha})\bigcap\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^{\alpha})$.

Нехай $1\le p\le\tilde{p}\le\infty$ і $0<\theta<1$. Тоді виконуються вкладення

$$\left(\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^{\alpha})\right)_{\theta,p}\subset\left(\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^{\alpha})\right)_{\theta,\tilde{p}}. \tag{3.77}$$

Дійсно, при $1\le p\le\tilde{p}<\infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_1,\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{\infty}\right)_{\theta,\tilde{p}}}\le\left(\int_0^{\infty}\left(t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^{\alpha}))^p\frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde{p}}$$
$$\times\left(\sup_{t>0}t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^{\alpha}))\right)^{(1-p/\tilde{p})}\le c\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_1,\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{\infty}\right)_{\theta,p}},$$

звідки отримуємо (3.77).

Вкладення $\left(\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^{\alpha})\right)_{\theta,p}\subset\left(\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^{\alpha})\right)_{\theta,\infty}$ випливає з нерівності $K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_1(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{\infty}(\mathcal{C}^{\alpha}))\le c\,t^{\theta}\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_1,\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{\infty}\right)_{\theta,p}}$.

Вкладення (3.75) отримуємо з (3.77). Із нерівності

$$K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{q_0,p_0}(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^{\alpha}))\le t\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}},\ x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q_1,p_1}(\mathcal{C}^{\alpha}),$$

маємо

$$\begin{aligned}\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}\right)_{\theta_1,1}} &= \int_0^1 t^{-\theta_1}K(t,x;\cdot,\cdot)\frac{dt}{t}+\int_1^{\infty}t^{-\theta_1}K(t,x;\cdot,\cdot)\frac{dt}{t}\\ &\le c\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}}+\sup_{t>0}t^{-\theta_0}K(t,x;\cdot,\cdot)\int_1^{\infty}\tau^{-(\theta_1-\theta_0)}\frac{d\tau}{\tau}\\ &\le c_1\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_0,p_0},\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q_1,p_1}\right)_{\theta_0,\infty}},\end{aligned}$$

звідки випливає вкладення

$$\big(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(\mathcal{C}^{\alpha})\big)_{\theta_0,\infty}\subset\big(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0,q_0}(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1,q_1}(\mathcal{C}^{\alpha})\big)_{\theta_1,1}.$$

Вкладення (3.76) випливає тепер з (3.75).

Наслідок 3.3.2. *Нехай* $0<\nu<\infty$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $1\le p,p_0,p_1\le\infty$, $p_0\ne p_1$ *і* $0<\theta<1$. *Тоді виконується рівність*

$$\big(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^{\alpha})\big)_{\theta,p}=\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha}),\quad \text{де}\ \ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}. \tag{3.78}$$

Існують такі додатні числа $c_1=c_1(\theta,p)$ *і* $c_2=c_2(\theta,p)$, *що виконуються нерівності*

$$K(t,x;\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^{\alpha}))\le c_1t^{\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q,p}},\quad x\in\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha}), \tag{3.79}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q,p}}\le c_2\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p_0}}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p_1}},\ x\in\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p_0}(\mathcal{C}^{\alpha})\bigcap\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^{\alpha}). \tag{3.80}$$

Якщо $1\le p\le\tilde{p}\le\infty$, $0<\theta_0<\theta_1<1$ *і* $\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^{\alpha})\subset\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^{\alpha})$, *то*

$$\big(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^{\alpha})\big)_{\theta_0,p}\subset\big(\mathcal{E}^{\nu}_{p_0}(\mathcal{C}^{\alpha}),\mathcal{E}^{\nu}_{p_1}(\mathcal{C}^{\alpha})\big)_{\theta_1,\tilde{p}}. \tag{3.81}$$

Д о в е д е н н я. Рівність (3.78) отримуємо з (3.71) при $q_0=p_0$ і $q_1=p_1$. Нерівності (3.79) і (3.80) випливають із (3.73) і (3.74) відповідно. Вкладення (3.81) отримуємо з (3.76).

Нехай $1\le p\le\infty$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $0\le\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\beta<\infty$ і $\big\{\mathcal{E}^{\nu(n)}_{p}(\mathcal{C}^{\alpha})\big\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\big\{\mathcal{E}^{\nu(n)}_{p}\big([\mathcal{C}^{\alpha},\mathcal{C}^{\beta}]_{\theta}\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\big\{\mathcal{E}^{\nu(n)}_{p}\big((\mathcal{C}^{\alpha},\mathcal{C}^{\beta})_{\theta,q}\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовності просторів, що відповідають неспадній послідовності додатних чисел $\{\nu(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, такій, що $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(n)=\infty$. Для $1\le\rho<\infty$ визначимо простори

$$\ell_{\rho}\big[\mathcal{E}^{\nu(n)}_{p}(\mathcal{C}^{\alpha})\big]\ =\ \Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}x_n=x\in\mathcal{C}^{\alpha}:x_n\in\mathcal{E}^{\nu(n)}_{p}(\mathcal{C}^{\alpha}),$$

$$\|x\|_{\ell_{\rho}[\mathcal{E}^{\nu(n),\alpha}_{p}]}=\inf_{x=\sum x_n}\left(\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\rho-1)}\|x_n\|^{\rho}_{\mathcal{E}^{\nu(n),\alpha}_{p}}\right)^{1/\rho}<\infty\Bigg\},$$

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left((\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right)\big] = \Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in (\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}:$$

$$x_n \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left((\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right),$$

$$\|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu(n),(\alpha,\beta)}]} = \inf_{x=\sum x_n}\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\rho-1)}\|x_n\|^\rho_{\mathcal{E}_{p,q,\theta}^{\nu(n),(\alpha,\beta)}}\right)^{1/\rho} < \infty\Bigg\},$$

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left([\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta\right)\big] = \Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in [\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta:\ x_n \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left([\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta\right),$$

$$\|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu(n),[\alpha,\beta]}]} = \inf_{x=\sum x_n}\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\rho-1)}\|x_n\|^\rho_{\mathcal{E}_{p,\theta}^{\nu(n),[\alpha,\beta]}}\right)^{1/\rho} < \infty\Bigg\},$$

Теорема 3.3.3. *Виконуються такі ізоморфізми просторів*

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^\alpha)\big] = \overline{\mathcal{E}(\mathcal{C}^\alpha)}, \tag{3.82}$$

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left((\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right)\big] = \overline{\mathcal{E}\left((\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\right)}, \tag{3.83}$$

$$\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}\left([\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta\right)\big] = \overline{\mathcal{E}\left([\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta\right)}, \tag{3.84}$$

де замикання за нормами просторів $\mathcal{C}^\alpha$, $(\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ *і* $[\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta$ *відповідно.*

Д о в е д е н н я. Із неперервності вкладення $\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^\alpha) \subset \mathcal{E}_p^{\nu(n+1)}(\mathcal{C}^\alpha)$ для всіх $y \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^\alpha)$ маємо

$$\|y\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}]} \le 2^{\rho-1}\lim_{n\to\infty}\|y\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}} = 2^{\rho-1}\|y\|_{\mathcal{C}^\alpha},\ y \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^\alpha).$$

Використовуючи нерівність Гельдера, отримуємо

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}]} &\le 2^{\rho-1}\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}}\\ &\le 2^{\rho-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(\rho-1)}\|x_n\|^\rho_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}}\right)^{1/\rho},\end{aligned}$$

тобто, ряди $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ є абсолютно збіжними в $\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^\alpha)\big]$.

Покажемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збіжний до x в $\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^\alpha)\big]$. Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathcal{C}^\alpha} \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\rho-1)} \|x_n\|^\rho_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}} \right)^{1/\rho},$$

то ряд $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно збіжний в $\mathcal{C}^\alpha$. Отже, для $\varepsilon > 0$ існує таке N, що

$$\begin{aligned} \Big\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \Big\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}]} &= \Big\| \sum_{n>N} x_n \Big\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}]} \le \sum_{n>N} \|x_n\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}]} \\ &\le 2^{\rho-1} \sum_{n>N} \|x_n\|_{\mathcal{C}^\alpha} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Це означає, що простір $\ell_\rho\big[\mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^\alpha)\big]$ повний. Оскільки

$$\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} \le \inf_{x=\sum x_n} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathcal{C}^\alpha} \le \inf_{x=\sum x_n} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}} \le \|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}]},$$

то $\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} \le \|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}]} \le 2^{\rho-1}\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ для $x \in \mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^\alpha)$.

Із рівності (3.64) теореми 3.3.1 отримуємо

$$\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha) = \mathcal{E}_p^\nu\big([\mathcal{C}^{m_0}, \mathcal{C}^{n_0}]_\theta \big) = \big[\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^{m_0}), \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^{n_0})\big]_\theta .$$

Із рівностей (3.70) маємо $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_p^{\nu(n)}(\mathcal{C}^\alpha) = \mathcal{E}(\mathcal{C}^\alpha)$. Тому,

$$\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} \le \|x\|_{\ell_\rho[\mathcal{E}_p^{\nu(n),\alpha}]} \le 2^{\rho-1}\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha}, \quad x \in \mathcal{E}(\mathcal{C}^\alpha).$$

Для доведення рівностей (3.83) і (3.84) достатньо у попередніх міркуваннях замінити $\mathcal{C}^\alpha$ на $(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ і $[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta$ відповідно. Теорема доведена.

3.4. Апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами

У комплексному банаховому просторі $\mathfrak{X}$ розглядаємо позитивний оператор A із означення 3.3.1. Нехай $0 < \nu < \infty$, $1 \le p \le \infty$ і $\mathcal{C}^\alpha$ — область визначення оператора A^α $(\alpha \in \mathbb{C})$, на якій задаємо норму $\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|A^\alpha x\|$, $x \in \mathcal{C}^\alpha$. Для чисел $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$ визначені простори

$$\mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha) = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty(A)\colon \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q,p}} < \infty\right\},$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{q,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\|^p_{\mathcal{C}^\alpha} k^{\frac{p}{q}-1}\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x^*_{k-1,\nu}\|_{\mathcal{C}^\alpha} k^{\frac{1}{q}}, & p = \infty, \end{cases}$$

де $\{x^*_{k,\nu}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність, яка складається з елементів $x_{k,\nu} := (A/\nu)^k x$, розміщених в порядку незростання норм

$$\|x^*_{0,\nu}\|_{\mathcal{C}^\alpha} \ge \|x^*_{1,\nu}\|_{\mathcal{C}^\alpha} \ge \ldots \ge \|x^*_{k,\nu}\|_{\mathcal{C}^\alpha} \ge \ldots.$$

На підпросторі $\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha) := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha)$ визначимо квазінорму

$$|x|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}} := \|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} + \inf\left\{\nu > 0\colon x \in \mathcal{E}^\nu_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha)\right\},$$

яка задовольняє нерівність

$$|x+y|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}} \le |x|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}} + |y|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}} \text{ для всіх } x, y \in \mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha).$$

Розглянемо функціонал вигляду

$$E^\alpha_{q,p}(t,x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^\alpha}\colon x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\ |x^0|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}} \le t\right\},\ x \in \mathcal{C}^\alpha.$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \le \infty\}$ або $\{0 \le s < \infty, \tau = \infty\}$ визначимо шкалу просторів

$$\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha) := \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha, \mathfrak{X}) := \left\{x \in \mathcal{C}^\alpha :\ |x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)} < \infty\right\}$$

із квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^s E^\alpha_{q,p}(t,x)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0<\tau<\infty, \\ \sup_{t>0} t^s E^\alpha_{q,p}(t,x), & \tau=\infty. \end{cases}$$

Для спрощення записів використовуємо позначення $\mathcal{B}^{s,\alpha}_{q,p,\tau} := \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$.

Якщо $q=p$, то маємо шкалу просторів

$$\mathcal{B}^s_{p,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha) := \mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha) := \left\{x\in\mathcal{C}^\alpha:\ |x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}}<\infty\right\}$$

із квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^s E^\alpha_{p}(t,x)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0<\tau<\infty, \\ \sup_{t>0} t^s E^\alpha_{p}(t,x), & \tau=\infty, \end{cases}$$

де

$$E^\alpha_p(t,x) = \inf\left\{\|x-x^0\|_{\mathcal{C}^\alpha}:\, x^0\in\mathcal{E}_p(\mathcal{C}^\alpha),\ |x^0|_{\mathcal{E}^\alpha_p}\le t\right\},\ x\in\mathcal{C}^\alpha.$$

Теорема 3.4.1. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)]^\vartheta$ *– простір* $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$, *наділений квазінормою* $|x|^\vartheta_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{q,p,\tau}}$, $x\in\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$, *то*

$$[\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)]^\vartheta = (\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha)_{\vartheta,g}, \quad \vartheta=1/(s+1), \quad \tau=g\vartheta \tag{3.85}$$

(з точністю до еквівалентності квазінорм).

(ii) *Простори* $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0<\tau<\infty$, $0<\vartheta<1$, $s=(1-\vartheta)s_0+\vartheta s_1$ *і* $s_0\ne s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\vartheta,\tau} = \mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha) \tag{3.86}$$

і існують постійні c_1, c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{q,p,\tau}} \le c_1 |x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_0,\alpha}_{q,p,\tau_0}} |x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_1,\alpha}_{q,p,\tau_1}}, \quad x\in\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha)\cap\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{3.87}$$

$$K\left(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right) \le c_2 t^\vartheta\, |x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{q,p,\tau}}, x\in\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.88}$$

(iv) *Якщо* $0<\tau\le\varrho<\infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)\subset\mathcal{B}^s_{q,p,\varrho}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.89}$$

Д о в е д е н н я. (i) Визначимо функціонал

$$K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)=\inf_{x=x^0+x^1}\max\left\{|x^0|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}},t\|x^1\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right\}$$

для $x^0\in\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha)$ і $x^1\in\mathcal{C}^\alpha$. Згідно з [3, лема 7.1.2], для кожного $t>0$ існує таке $\upsilon>0$, що

$$K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)=\upsilon,\ \ \lim_{\mu\downarrow\upsilon}E^\alpha_{q,p}(\mu,x)=E^\alpha_{q,p}(\upsilon+0,x)\le\upsilon/t.$$

Оскільки для довільного фіксованого x функція $E^\alpha_{q,p}(\upsilon,x)$ є спадна, то отримуємо

$$\upsilon^{1-\vartheta}[E^\alpha_{q,p}(\upsilon,x)]^\vartheta\le t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right),$$

звідки випливає вкладення $\left(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)_{\vartheta,\infty}\subset[\mathcal{B}^s_{q,p,\infty}(\mathcal{C}^\alpha)]^\vartheta$. Обернене вкладення випливає з оцінки

$$t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)\le\upsilon^{1-\vartheta}[E^\alpha_{q,p}(\upsilon-0,x)]^\vartheta\le|x|^\vartheta_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{q,p,\infty}}.$$

У випадку $g<\infty$ маємо

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left[t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)\right]^g dt/t\\&\sim-\int_0^\infty K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)^g dt^{-\vartheta g}\\&=\int_0^\infty t^{-\vartheta g}dK_\infty\left(t,x;\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)^g=\int_0^\infty\left[\upsilon/E^\alpha_{q,p}(\upsilon,x)\right]^{-\vartheta g}d(t^g)\\&\sim\int_0^\infty\left[\upsilon^sE^\alpha_{q,p}(\upsilon,x)\right]^{\vartheta g}d\upsilon/\upsilon,\end{aligned}$$

що й доводить рівність (3.85).

(ii) На просторі $\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha)+\mathcal{C}^\alpha$ визначимо норму

$$\|x\|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}+\mathcal{C}^\alpha}=\inf_{x=x^0+x^1}\left(|x^0|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}}+\|x^1\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right),\ x^0\in\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\ x^1\in\mathcal{C}^\alpha.$$

Оскільки $|x|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}}\ge\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha}$, то $\|x\|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}+\mathcal{C}^\alpha}=\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha}$. Отже, простір $\mathcal{C}^\alpha$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^\alpha_{q,p}+\mathcal{C}^\alpha}$ є повний. Це означає, що кожний ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n$,

$x_n \in (\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{C}^\alpha)_{\vartheta,g}$, такий, що $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha)_{\vartheta,g}} < \infty$, збіжний до $x \in \mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha) + \mathcal{C}^\alpha = \mathcal{C}^\alpha$.

Із нерівності $\big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \big\|_{(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha)_{\vartheta,g}} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha)_{\vartheta,g}}$, отримуємо, що $x \in (\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{C}^\alpha)_{\vartheta,g}$. Отже, $(\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{C}^\alpha)_{\vartheta,g}$ є повний. Ізоморфізм (3.85) дає повноту простору $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$.

(iii) Застосовуючи теорему реітерації [3, теорема 3.11.5] для індексів $\vartheta = (1-\eta)\vartheta_0 + \eta\vartheta_1$, $\vartheta_i = 1/(s_i+1)$ $(i = 0, 1)$, $\vartheta = 1/(s+1)$, $\tau = g\vartheta$ і $0 < \eta < 1$, отримуємо

$$\big([\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta_0},\, [\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta_1}\big)_{\eta,g} = [\mathcal{B}^{s}_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta}. \tag{3.90}$$

Застосовуючи теорему про степені [3, теорема 3.11.6], при $\varrho = \eta\vartheta_1/\vartheta$ отримуємо

$$\big([\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta_0}, [\mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta_1}\big)_{\eta,g} = \big(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big)^{\vartheta}_{\varrho,\tau}. \tag{3.91}$$

Рівності (3.90) і (3.91) для $s = (1-\varrho)s_0 + \varrho s_1$ дають (3.86) з $\varrho = \vartheta$. Нерівності (3.87) і (3.88) випливають з (3.86) і відомих інтерполяційних властивостей [3, теорема 3.11.2].

(iv) Для кожного $x \in \big(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big)_{\vartheta,\tau}$ існує така постійна $c > 0$, що

$$\begin{aligned}
|x|_{\left(\mathcal{B}^{s_0,\alpha}_{q,p,\tau_0},\mathcal{B}^{s_1,\alpha}_{q,p,\tau_1}\right)_{\vartheta,\varrho}} &\le \left(\sup_{t>0} t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha))\right)^{1-\tau/\varrho} \\
&\times \left(\int_0^\infty \left[t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha))\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\varrho} \\
&\le c\,|x|_{\left(\mathcal{B}^{s_0,\alpha}_{q,p,\tau_0},\mathcal{B}^{s_1,\alpha}_{q,p,\tau_1}\right)_{\vartheta,\tau}},
\end{aligned}$$

а тому $\big(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big)_{\vartheta,\tau} \subset \big(\mathcal{B}^{s_0}_{q,p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}^{s_1}_{q,p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big)_{\vartheta,\varrho}$. Звідси і з (3.86), отримуємо (3.89). Теорема доведена.

Наслідок 3.4.1. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)]^\vartheta$ *— простір* $\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$, *наділений квазінормою* $|x|^\vartheta_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}}$, $x \in \mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$, *то*

$$[\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)]^\vartheta = (\mathcal{E}_p(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{C}^\alpha)_{\vartheta,g}, \quad \vartheta = 1/(s+1), \quad \tau = g\vartheta \tag{3.92}$$

(з точністю до еквівалентності квазінорм).

(ii) *Простори* $\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0<\tau<\infty$, $0<\vartheta<1$, $s=(1-\vartheta)s_0+\vartheta s_1$ *і* $s_0\neq s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\vartheta,\tau}=\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha) \tag{3.93}$$

і існують постійні c_1, c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}}\le c_1|x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_0,\alpha}_{p,\tau_0}}|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{s_1,\alpha}_{p,\tau_1}},\quad x\in\mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha)\bigcap\mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{3.94}$$

$$K\left(t,x;\mathcal{B}^{s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{B}^{s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)\le c_2t^{\vartheta}\,|x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}},\quad x\in\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.95}$$

(iv) *Якщо* $0<\tau\le\varrho<\infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}^s_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)\subset\mathcal{B}^s_{p,\varrho}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.96}$$

Визначимо функціонал

$$E^{\nu,\alpha}_p(t,x)=\inf\left\{\|x-x^0\|_{\mathcal{C}^\alpha}\colon x^0\in\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha),\ \|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_p}\le t\right\},\ x\in\mathcal{C}^\alpha,$$

і для пар чисел $\{0<s<\infty, 0<\tau\le\infty\}$ або $\{0\le s<\infty,\tau=\infty\}$ розглянемо шкалу просторів

$$\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha):=\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha,\mathfrak{X}):=\left\{x\in\mathfrak{X}:\ |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)}<\infty\right\}$$

з квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^\infty\left[t^sE^{\nu,\alpha}_p(t,x)\right]^\tau\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0<\tau<\infty,\\ \sup_{t>0}t^sE^{\nu,\alpha}_p(t,x), & \tau=\infty.\end{cases}$$

Використовуємо також позначення $\mathcal{B}^{\nu,s,\alpha}_{p,\tau}:=\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$.

Теорема 3.4.2. (i) *Якщо* $[\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)]^\vartheta$ *— простір* $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$, *наділений квазінормою* $|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s,\alpha}_{p,\tau}}$, $x\in\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$, *то*

$$[\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)]^\vartheta=\left(\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)_{\vartheta,g},\quad \vartheta=1/(s+1),\quad \tau=g\vartheta \tag{3.97}$$

(з точністю до еквівалентності квазінорм).

(ii) *Простори* $\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$ *повні.*

(iii) *Якщо* $0<\tau<\infty$, $0<\vartheta<1$, $s=(1-\vartheta)s_0+\vartheta s_1$ *і* $s_0\neq s_1$, *то*

$$\left(\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\vartheta,\tau}=\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha) \tag{3.98}$$

і існують постійні c_1, c_2, *такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,\alpha}_{p,\tau}}\le c_1|x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s_0,\alpha}_{p,\tau_0}}|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s_1,\alpha}_{p,\tau_1}},\quad x\in\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha)\cap\mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{3.99}$$

$$K\left(t,x;\mathcal{B}^{\nu,s_0}_{p,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{B}^{\nu,s_1}_{p,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)\le c_2t^{\vartheta}\,|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,\alpha}_{p,\tau}},\quad x\in\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.100}$$

(iv) *Якщо* $0<\tau\le\varrho<\infty$, *то виконується неперервне вкладення*

$$\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)\subset\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\varrho}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.101}$$

Д о в е д е н н я. (i) Визначимо функціонал

$$K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)=\inf_{x=x^0+x^1}\max\left\{\|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_p},t\|x^1\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right\}$$

для $x^0\in\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha)$ і $x^1\in\mathcal{C}^\alpha$.

Застосовуючи [3, лема 7.1.2], для кожного $t>0$ знаходимо таке $\upsilon>0$, що

$$\upsilon^{1-\vartheta}[E^{\nu,\alpha}_p(\upsilon,x)]^{\vartheta}\le t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right),$$

звідки отримуємо вкладення $\left(\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)_{\vartheta,\infty}\subset[\mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\infty}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta}$. Обернене вкладення випливає з оцінки

$$t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)\le\upsilon^{1-\vartheta}[E^{\nu,\alpha}_p(\upsilon-0,x)]^{\vartheta}\le|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\nu,s,\alpha}_{p,\infty}}.$$

У випадку $g<\infty$ маємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\left[t^{-\vartheta}K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)\right]^g dt/t\\
&\sim-\int_0^\infty K_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)^g dt^{-\vartheta g}\\
&=\int_0^\infty t^{-\vartheta g}dK_\infty\left(t,x;\mathcal{E}^\nu_p(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)^g=\int_0^\infty\left[\upsilon/E^{\nu,\alpha}_p(\upsilon,x)\right]^{-\vartheta g}d(t^g)\\
&\sim\int_0^\infty\left[\upsilon^sE^{\nu,\alpha}_p(\upsilon,x)\right]^{\vartheta g}d\upsilon/\upsilon,
\end{aligned}$$

що й доводить рівність (3.97).

(ii) Простір $(\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{C}^\alpha)_{\vartheta,g}$ повний як інтерполяційний простір між банаховими просторами $\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ і $\mathcal{C}^\alpha$ [86, теорема 1.3.3]. Ізоморфізм (3.97) дає повноту простору $\mathcal{B}_{p,\tau}^{\nu,s}(\mathcal{C}^\alpha)$.

(iii) Застосовуючи теорему реітерації [3, теорема 3.11.5] для індексів $\vartheta = (1-\eta)\vartheta_0 + \eta\vartheta_1$, $\vartheta_i = 1/(s_i+1)$ $(i = 0, 1)$, $\vartheta = 1/(s+1)$, $\tau = g\vartheta$ і $0 < \eta < 1$, отримуємо

$$\left([\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta_0},\, [\mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta_1}\right)_{\eta,g} = [\mathcal{B}_{p,\tau}^{\nu,s}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta}. \tag{3.102}$$

Застосовуючи теорему про степені [3, теорема 3.11.6], при $\varrho = \eta\vartheta_1/\vartheta$ отримуємо

$$\left([\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta_0}, [\mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha)]^{\vartheta_1}\right)_{\eta,g} = \left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\varrho,\tau}^{\vartheta}. \tag{3.103}$$

Рівності (3.102) і (3.103) для $s = (1-\varrho)s_0 + \varrho s_1$ дають (3.98) з $\varrho = \vartheta$. Нерівності (3.99) і (3.100) є наслідком (3.98) і відомих інтерполяційних властивостей [3, теорема 3.11.2].

(iv) Для кожного $x \in \left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\vartheta,\tau}$ існує така постійна $c > 0$, що

$$\begin{aligned}
|x|_{\left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\vartheta,\varrho}} &\le \left(\sup_{t>0} t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)^{1-\tau/\varrho} \\
&\times \left(\int_0^\infty \left[t^{-\vartheta} K(t,x;\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha))\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\varrho} \\
&\le c\,|x|_{\left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\vartheta,\tau}},
\end{aligned}$$

звідки маємо $\left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\vartheta,\tau} \subset \left(\mathcal{B}_{p,\tau_0}^{\nu,s_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{B}_{p,\tau_1}^{\nu,s_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\vartheta,\varrho}$. Звідси і з рівності (3.98) отримуємо (3.101). Теорема доведена.

Розглянемо проблему наближення заданого елемента банахового простору $\mathcal{C}^\alpha$ елементами A-інваріантних підпросторів $\mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ з фіксованими індексами q і p. Відстань між $x \in \mathcal{C}^\alpha$ і $\mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ позначимо

$$d_{q,p}^\alpha(\nu, x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^\alpha} \colon x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\right\},\ \nu > 0.$$

Теорема 3.4.3. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{q,p,\tau}} \le c_{s,\tau}\, |x|^{s}_{\mathcal{E}^{\alpha}_{q,p}}\, \|x\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}, \quad x \in \mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha}), \tag{3.104}$$

$$d^{\alpha}_{q,p}(\nu, x) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{q,p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^{s}_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^{\alpha}), \tag{3.105}$$

де постійні $c_{s,\tau}$ *і* $C_{s,\tau}$ *з теореми 2.3.1.*

Д о в е д е н н я. Із теореми 3.4.1(i) при $\vartheta = 1/(s+1)$ і $\tau = g\vartheta$ маємо

$$\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha}) \subset [\mathcal{B}^{s}_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^{\alpha})]^{\vartheta} = (\mathcal{E}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha}), \mathcal{C}^{\alpha})_{\vartheta,g} \subset \mathcal{C}^{\alpha}.$$

Якщо $|x^0|_{\mathcal{E}^{\alpha}_{q,p}} = r(x^0) + \|x^0\|_{\mathcal{C}^{\alpha}} < \upsilon$, то маємо $r(x^0) < \upsilon - \|x^0\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}$, де $r(x^0) = \inf\left\{\nu > 0 \colon x^0 \in \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha})\right\}$. Тому, $x^0 \in \mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha})$ для всіх таких чисел $\nu > 0$, що $r(x^0) < \nu < \upsilon - \|x^0\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}$. Оскільки наявне неперервне вкладення $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha}) \subset \mathcal{E}^{\upsilon}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha})$, то $x^0 \in \mathcal{E}^{\upsilon}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha})$. Отже, маємо нерівність

$$d^{\alpha}_{q,p}(\upsilon, x) \le E^{\alpha}_{q,p}(\upsilon, x), \quad x \in \mathcal{C}^{\alpha}, \quad \upsilon > 0. \tag{3.106}$$

Повторюючи далі міркування доведення теореми 2.3.1 для $\mathfrak{X} = \mathcal{C}^{\alpha}$ з урахуванням (3.106) отримуємо нерівності (3.104) і (3.105). Теорема доведена.

Наслідок 3.4.2. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}} \le c_{s,\tau}\, |x|^{s}_{\mathcal{E}^{\alpha}_{p}}\, \|x\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}, \quad x \in \mathcal{E}_{p}(\mathcal{C}^{\alpha}), \tag{3.107}$$

$$d^{\alpha}_{p}(\nu, x) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^{s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^{\alpha}), \tag{3.108}$$

де $d^{\alpha}_{p}(\nu, x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^{\alpha}} \colon x^0 \in \mathcal{E}^{\nu}_{p}(\mathcal{C}^{\alpha})\right\}$ *— відстань між* $x \in \mathcal{C}^{\alpha}$ *і підпростором* $\mathcal{E}^{\nu}_{p}(\mathcal{C}^{\alpha})$.

Нерівності (3.107) і (3.108) випливають із (3.104) і (3.105) при $q = p$.

Теорема 3.4.4. *Виконуються такі нерівності:*

$$|x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,\alpha}_{p,\tau}} \le c_{s,\tau}\, \|x\|^{s}_{\mathcal{E}^{\nu,\alpha}_{p}}\, \|x\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}, \quad x \in \mathcal{E}^{\nu}_{p}(\mathcal{C}^{\alpha}), \tag{3.109}$$

$$d^{\alpha}_{p}(\nu, x) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,\alpha}_{p,\tau}}, \quad x \in \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^{\alpha}), \tag{3.110}$$

де $d^{\alpha}_{p}(\nu, x) = \inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^{\alpha}} \colon x^0 \in \mathcal{E}^{\nu}_{p}(\mathcal{C}^{\alpha})\right\}$.

Д о в е д е н н я. Достатньо повторити міркування доведення теореми 2.3.1 для $\mathfrak{X} = \mathcal{C}^{\alpha}$ і врахувати нерівність $d^{\alpha}_{p}(\nu, x) \le E^{\nu,\alpha}_{p}(\nu, x)$, $x \in \mathcal{C}^{\alpha}$, $\nu > 0$. Теорема доведена.

Наступна теорема характеризує спектральні апроксимації для позитивного оператора з точковим спектром в термінах квазінорм визначених апроксимаційних просторів.

Теорема 3.4.5. *Нехай A — позитивний оператор з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень $\lambda_j \in \sigma(A)$, які є полюсами резольвенти $R_{\lambda}(A)$, і кореневі підпростори $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$ є скінченновимірними. Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}$, причому $\alpha = m(1-\theta) + n\theta$ і $0 < \theta < 1$. Тоді виконуються такі оцінки*

$$\inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^{\alpha}} \colon x^0 \in \mathcal{R}^{\nu,m,n}\right\} \le c_{s,\tau}\, \nu^{-s}\, |x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}},\ x \in \mathcal{B}^{s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^{\alpha}), \tag{3.111}$$

$$\inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^{\alpha}} \colon x^0 \in \mathcal{R}^{\nu,m,n}\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \nu^{-s} |x|_{\mathcal{B}^{\nu,s,\alpha}_{p,\tau}}, x \in \mathcal{B}^{\nu,s}_{p,\tau}(\mathcal{C}^{\alpha}), \tag{3.112}$$

де $\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) \colon |\lambda_j| < \min\left(\nu^{\frac{1}{m+1}}, \nu^{\frac{1}{n+1}}\right)\right\}$.

Нехай $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$ і позначимо

$$\mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A) = \mathcal{R}^{\nu,m,n}(A) \bigcup \mathcal{S}^{\nu,m,n}(A),$$

де $\mathcal{S}^{\nu,m,n}(A)$ — комплексна лінійна оболонка всіх $\mathcal{S}_{\lambda_j}(A)$ таких, що $|\lambda_j| = \min\left(\nu^{\frac{1}{m+1}}, \nu^{\frac{1}{n+1}}\right)$, $\lambda_j \in \sigma(A)$. Тоді для всіх $x \in \mathcal{B}^{s}_{q,p,\tau}(\mathcal{C}^{\alpha})$

$$\inf\left\{\|x - x^0\|_{\mathcal{C}^{\alpha}} \colon x^0 \in (\mathcal{R}^{\nu,m,n}, \mathcal{Q}^{\nu,m,n})_{1-1/q,p}\right\} \le 2^{s+1} C_{s,\tau} \nu^{-s} |x|_{\mathcal{B}^{s,\alpha}_{q,p,\tau}}, \tag{3.113}$$

де $(\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A), \mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A))_{1-1/q,p}$ *— інтерполяційний простір між просторами* $\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A)$ *і* $\mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A)$*, причому* $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A)} := \|\cdot\|_{\mathcal{E}_1^\nu(\mathcal{C}^\alpha)}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A)} := \|\cdot\|_{\mathcal{E}_\infty^\nu(\mathcal{C}^\alpha)}$.

Д о в е д е н н я. В силу рівності (2.7) для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^k) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) : |\lambda_j|^{k+1} < \nu\right\}. \tag{3.114}$$

З рівності (3.114), теореми 3.3.1 і скінченновимірності кореневих підпросторів отримуємо

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha) &= \mathcal{E}_p^\nu\big([\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^n]_\theta\big) = \big[\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^m), \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^n)\big]_\theta \\ &= \mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^m) \bigcap \mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^n) = \mathcal{R}^{\nu,m,n}(A),\end{aligned} \tag{3.115}$$

де $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Оцінки (3.111) і (3.112) випливають з (3.115) і нерівностей (3.108) і (3.110) відповідно.

З рівностей (2.8) і (3.59) для $1 < q < \infty$ і $1 \le p \le \infty$ маємо

$$(\mathcal{R}^{\nu,m,n}(A), \mathcal{Q}^{\nu,m,n}(A))_{1-1/q,p} = \mathcal{E}_{q,p}^\nu(\mathcal{C}^\alpha). \tag{3.116}$$

Оцінка (3.113) випливає з рівності (3.116) і нерівності (3.105). Теорема доведена.

Висновки до розділу 3

У даному розділі розвинуто теорію інтерполяції просторів цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів, що діють у банахових просторах.

Визначено і встановлено основні властивості інтерполяційних просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, породжених дійсними методами інтерполяції (теореми 3.1.1, 3.1.2, наслідки 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3).

Доведено інтерполяційні теореми для просторів цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів на областях визначення їх цілих степенів (теореми 3.1.3, 3.1.4). Доведено інтерполяційну теорему (теорема 3.1.6) та встановлено інтерполяційні властивості просторів типу Лоренца цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора на областях визначення його цілих степенів (наслідок 3.1.7).

Визначено і встановлено основні властивості інтерполяційних просторів цілих векторів експоненціального типу оператора, породжених комплексним методом інтерполяції (теорема 3.2.1, наслідок 3.2.1).

Доведено інтерполяційну теорему для просторів цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів на областях визначення їх цілих степенів, породжених комплексним методом інтерполяції (теорема 3.2.2).

За умови щільності цілих векторів експоненціального типу доведено можливість представлення кожного елемента областей визначення цілих степенів оператора та відповідних інтерполяційних просторів у вигляді ряду, членами якого є вектори експоненціального типу (теорема 3.2.3).

Введено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу на областях визначення комплексних степенів позитивних операторів. Встановлено ізоморфізми для дійсної та комплексної інтерполяційних шкал введених просторів (теорема 3.3.1). Доведено інтерполяційну теорему для просторів (теорема 3.3.2) та встановлено їх інтерполяційні властивості (наслідки 3.3.1, 3.3.2).

За умови щільності цілих векторів експоненціального типу позитивного оператора доведено можливість представлення кожного елемента областей визначення комплексних степенів оператора та відповідних інтерполяційних просторів у вигляді ряду, членами якого є цілі вектори експоненціального типу позитивного оператора (теорема 3.3.3).

Визначено апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними опе-

раторами у банахових просторах. Встановлено інтерполяційні властивості таких просторів (теореми 3.4.1, 3.4.2, наслідок 3.4.1).

Досліджено проблему наближення заданого елемента банахового простору $\mathcal{C}^{\alpha}$, що є областю визначення комплексних степенів оператора A, елементами інваріантних підпросторів векторів експоненціального типу $\mathcal{E}^{\nu}_{q,p}(\mathcal{C}^{\alpha})$. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм відповідних апроксимаційних просторів (теореми 3.4.3, 3.4.4, наслідок 3.4.2). Доведено теорему, що характеризує спектральні апроксимації для оператора з точковим спектром в термінах квазінорм визначених апроксимаційних просторів (теорема 3.4.5).

Основні результати розділу 3 опубліковані у працях [21, 26, 30, 32, 37, 38, 41, 45, 51, 128, 129, 136, 139, 141, 142, 144].

РОЗДІЛ 4

ПРОСТОРИ ЦІЛИХ ВЕКТОРІВ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

У даному розділі розглядаємо функціональні простори векторів експоненціального типу, асоційованих з еліптичними операторами, а також відповідні нерівності Бернштейна і Джексона з точними оцінками найкращих наближень кореневими функціями таких операторів у різних просторах Лебега.

4.1. Цілі вектори експоненціального типу регулярних еліптичних операторів

У даному параграфі опишемо простори цілих функцій експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях і компактних многовидах класу C^∞.

Означення 4.1.1. [86, с. 300] *Обмежена область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *з границею* $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ *називається областю класу* C^∞, *якщо існує такий скінченний набір відкритих куль* U_j $(j = 1, \ldots, N)$, *що* $\bigcup\limits_{j=1}^{N} U_j \supset \partial\Omega$ *і* $U_j \bigcap \partial\Omega \neq \emptyset$, *і такі нескінченно диференційовні дійсні вектор-функції* $f^{(j)}(t) = \left(f_1^{(j)}(t), \ldots, f_n^{(j)}(t)\right)$, *визначені в* $\bar{U}_j$, $y = f^{(j)}(t)$ *є взаємнооднозначне відображення кулі* U_j *на деяку обмежену область в* $\mathbb{R}^n$, *причому образ множини* $U_j \bigcap \partial\Omega$ *є частиною гіперплощини* $\{y : y \in \mathbb{R}^n, y_n = 0\}$, *а образ множини* $U_j \bigcap \Omega$ *– однозв'язною областю в півпросторі* $\mathbb{R}^n_+ = \{t : t \in \mathbb{R}^n, t_n > 0\}$. *Крім цього, передбачається, що*

$$\frac{\partial\left(f_1^{(j)}(t), \ldots, f_n^{(j)}(t)\right)}{\partial\left(t_1, \ldots t_n\right)} \neq 0, \quad t = (t_1, \ldots t_n) \in \bar{U}_j.$$

Позначимо $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_n^{\alpha_n}}$, де $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ для всіх $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{0+}^n$, де $\mathbb{Z}_{0+}^n = \{\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}^n, \alpha_n \geq 0\}$.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞. Як звичайно, через $L_q(\Omega)$ $(1 < q < \infty)$ позначимо комплексний простір функцій, інтегрованих в степені q по області Ω:

$$L_q(\Omega) = \left\{ u : \|u\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(t)|^q \, dt \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Для чисел $0 < \nu < \infty$ і $1 < q < \infty$ визначимо простір

$$\mathcal{E}_q^\nu(D) = \left\{ u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \colon D^\alpha u \in L_q(\Omega),\ |\alpha| = k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

з нормою

$$\|u\|_{\mathcal{E}_q^\nu(D)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{|\alpha| = k} \nu^{-qk} \| D^\alpha u \|_{L_q(\Omega)}^q \right)^{1/q}$$

і об'єднання $\mathcal{E}_q(D) = \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{E}_q^\nu(D)$. Через $C^\infty(\bar{\Omega})$ позначено множину всіх комплекснозначних нескінченно диференційовних функцій, визначених в Ω, всі похідні яких (включаючи саму функцію) неперервно продовжуються на $\bar{\Omega}$.

Лема 4.1.1. *Простір $\mathcal{E}_q(D)$ співпадає з простором всіх цілих аналітичних функцій експоненціального типу, звуження яких на Ω належить $L_q(\Omega)$.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо допоміжний простір функцій з $L_q(\Omega)$ вигляду

$$\mathcal{E}_q^\nu(\Omega) = \Big\{ u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : D^\alpha u \in L_q(\Omega),\ \sup_{t \in \Omega} |D^\alpha u(t)| \leq c\nu^k, \\ |\alpha| = k \in \mathbb{N}_0 \Big\}, \tag{4.1}$$

де постійна $c = c(u, \nu)$ не залежить від $k \in \mathbb{N}_0$, і утворимо об'єднання $\mathcal{E}_q(\Omega) = \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{E}_q^\nu(\Omega)$. Покажемо, що простір $\mathcal{E}_q(\Omega)$ співпадає з простором

всіх цілих аналітичних функцій експоненціального типу, звуження яких на Ω належить $L_q(\Omega)$.

Нехай $u(t) \in \mathcal{E}_q^\nu(\Omega)$. Запишемо $u(t+h)$, де $h = (h_1, \ldots, h_n)$ and $t + h \in \Omega$ у формі

$$u(t+h) = u(t) + \frac{du(t)}{1!} + \frac{d^2u(t)}{2!} + \ldots + \frac{d^k u(t+\theta h)}{k!}, \quad 0 \le \theta \le 1,$$

де $du(t)$ є повний диференціал функції $u(t)$. Залишок ряду задовольняє умову

$$\Big|\frac{d^k u(t+\theta h)}{k!}\Big| = \Big|\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(t+\theta h) h^\alpha\Big| \le c\nu^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \to 0, \ k \to \infty,$$

де $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n}$. Таким чином, функції з $\mathcal{E}_q^\nu(\Omega)$ є аналітичними в Ω і розкладаються у збіжні ряди $\sum\limits_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(t) h^\alpha$. Крім того, для всіх $h \in \mathbb{C}^n$ такі ряди визначають розширення $u(t)$ як цілої функції на $\mathbb{C}^n$. В силу оцінки (4.1) для всіх $t \in \Omega$ і $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$|u(t+is)| \le \sum_\alpha \Big|\frac{D^\alpha u(t)}{\alpha!}(is)^\alpha\Big| \le \sum_\alpha \frac{c\nu^{|\alpha|}}{\alpha!} |s_1|^{\alpha_1} \ldots |s_n|^{\alpha_n} \le c_1 e^{\nu\|s\|}.$$

Покладаючи, без обмеження загальності, $0 \in \Omega$, з попередньої нерівності отримуємо

$$|u(t+is)| = |u(z)| \le c_1 e^{\nu\|z\|} \tag{4.2}$$

для всіх $t, s \in \mathbb{R}^n$ і $u(z)$ має експоненціальний тип.

Далі, якщо ціла аналітична функція $u(z) = u(z_1, \ldots, z_n)$ задовольняє нерівність

$$|u(z)| = |u(t+is)| \le C_1 e^{a(\|t\|+\|s\|)}, \tag{4.3}$$

де $z_j = t_j + is_j$, $j = 1, \ldots, n$, $\|t\| = \Big(\sum\limits_{j=1}^n |t_j|^2\Big)^{1/2}$, $\|s\| = \Big(\sum\limits_{j=1}^n |s_j|^2\Big)^{1/2}$, і $a > 0$, тобто, $u(z)$ має експоненціальний тип, то для всіх $|\alpha| = k$, $k = 0, 1, \ldots$ виконується нерівність

$$|D^\alpha u(t)| \le C_2 (2an)^k e^{a\|t\|}, \tag{4.4}$$

де постійна C_2 не залежать від k.

Дійсно, частинні похідні функції $u(z)$ можуть бути обчислені за формулою Коші

$$D^\alpha u(t) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \dots \int\limits_{\Gamma_n} \frac{u(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - t_1)^{\alpha_1+1} \dots (\zeta_n - t_n)^{\alpha_n+1}}, \tag{4.5}$$

де $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, Γ_j коло в площині ζ_j з центром в t_j і радіуса R. З (4.3) і (4.5) отримуємо

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(t)| &\le \frac{\alpha!}{(2\pi)^n R^k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |u(t_1 + Re^{i\phi_1}, \dots, t_n + Re^{i\phi_n})| d\phi_1 \dots d\phi_n \\ &\le \frac{s! C_1}{R^k} e^{a(nR + \|t'\|)}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

де $\zeta_j - t_j = Re^{i\phi_j}$, $t' = (t'_1, \dots, t'_n)$, t'_j — точка між значеннями $t_j - R$ і $t_j + R$, в якій значення $a|t_j|$ досягає максимуму.

Виберемо радіус R так, щоб значення $\exp(anR)/R^k$ досягало мінімуму. Легко бачити, що це виконується для $R = k/an$, так що нерівність (4.6) з використанням формули Стірлінга може бути записана у вигляді

$$|D^\alpha u(t)| \le C_3 (2an)^k e^{a\|t'\|}, \tag{4.7}$$

де постійна C_3 не залежить від k. Розглянемо останній множник в нерівності (4.7). Для цього замінимо t'_j на $t_j + \theta_j R$, where $|\theta_j| \le 1$. Тоді, з еквівалентності норм в $\mathbb{C}^n$, маємо

$$e^{a\|t'_j\|} = \exp\left(a \sum_{j=1}^n \|t_j + \theta R\|\right) \le \exp\left(a \sum_{j=1}^n \|t_j\|\right) e^{na\theta R} \le C_4 e^{a\|t\|},$$

що й доводить (4.4).

Тепер, нехай ціла функція $u(z)$ задовольняє (4.2). Тоді згідно з (4.4) виконується нерівність

$$|D^\alpha u(t)| \le c_2 (2n\nu)^k e^{\nu|t|}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}^n$ і $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$. Це означає, що $u(t) \in \mathcal{E}_q^{2n\nu}(\Omega)$, тобто, $u(t) \in \mathcal{E}_q(\Omega)$.

Якщо $l > n/q$ і $u \in \mathcal{E}_q^t(D)$, то з теореми вкладення Соболєва (див. [86, теорема 2.8.1]) маємо

$$\sup_{t\in\Omega} |Du(t)| \le c \max_{|\alpha|\le 1} \|D^\alpha u(t)\|_{L_q(\Omega)},$$

$$\sup_{t\in\Omega} |D^\alpha u(t)| \le c \max\left\{1, \nu, \dots, \nu^l\right\}\nu^k \|u\|_{\mathcal{E}_q^\nu(D)} \le c_0 \nu^k, \ |\alpha| = k \in \mathbb{N}_0,$$

де постійні c, c_0 не залежать від k. Це означає, що $u \in \mathcal{E}_q^\nu(\Omega)$, а отже, $\mathcal{E}_q(D) \subset \mathcal{E}_q(\Omega)$.

Навпаки, нехай $u \in \mathcal{E}_q^\nu(\Omega)$. Тоді, в силу обмеженості Ω, маємо

$$\sup_{t\in\Omega} |D^\alpha u(t)| \le c_3 (2n\nu)^k \quad \text{і} \quad \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{L_q(\Omega)} \le c_2 (2n^2\nu)^k.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \sum_{|\alpha|=k} (4n^2\nu)^{-qk} \| D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)} \le \frac{2^q}{2^q - 1} \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\sum\limits_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)}}{(2n^2\nu)^{qk}}, \tag{4.8}$$

яка означає, що $u \in \mathcal{E}_q^{4n^2\nu}(D)$ і, як наслідок, $u \in \mathcal{E}_q(D)$. Лема доведена.

Означення 4.1.2. [86, с. 451] *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞. Диференціальний оператор L, що задається рівністю*

$$Lu = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(t) D^\alpha u, \tag{4.9}$$

називається власно еліптичним, якщо

$$a(t,\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(t)\xi^\alpha \ne 0 \text{ для всіх } 0 \ne \xi \in \mathbb{R}^n \text{ і всіх } t \in \bar{\Omega}$$

і якщо для будь-якої пари лінійно незалежних векторів $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ і для будь-якого $t \in \bar{\Omega}$ многочлен $a(t, \xi + \tau\eta)$ від комплексної змінної τ має рівно m коренів $\tau_k^+(t,\xi,\eta)$ з додатною уявною частиною (а, отже, рівно m коренів $\tau_k^-(t,\xi,\eta)$ з від'ємною уявною частиною). Тут $a_\alpha(t)$ — нескінченно диференційовні комплекснозначні функції на $\bar{\Omega}$. Покладемо

$$a^+(t,\xi,\eta,\tau) = \prod_{k=1}^m (\tau - \tau_k^+), \ a^-(t,\xi,\eta,\tau) = \prod_{k=1}^m (\tau - \tau_k^-).$$

Означення 4.1.3. [86, с. 452] *Нехай* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— обмежена область класу* C^∞ *і нехай* B_j $(j = 1, \ldots, k)$ *— диференціальні оператори на* $\partial\Omega$, *що задаються рівністю*

$$(B_j u)(t) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{j,\alpha}(t) D^\alpha u(t), \ b_{j,\alpha}(t) \in C^\infty(\partial\Omega), \tag{4.10}$$

де $C^\infty(\partial\Omega)$ *— множина всіх нескінченно диференційовних комплекснозначних функцій на* $\partial\Omega$. *Набір* $\{B_j\}_{j=1}^k$ *називається нормальною системою, якщо*

$$0 \le m_1 < m_2 < \ldots < m_k$$

і для кожного нормального до $\partial\Omega$ *вектора* ϱ_t, $t \in \partial\Omega$, *виконується умова*

$$\sum_{|\alpha| = m_j} b_{j,\alpha}(t) \varrho_t^\alpha \ne 0, \ j = 1, \ldots, k.$$

Означення 4.1.4. [86, с. 453] *Нехай* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— обмежена область класу* C^∞ *і нехай* L *— власно еліптичний диференціальний оператор,* $\{B_j\}_{j=1}^m$ *— набір диференціальних операторів на* $\partial\Omega$, *визначених формулою (4.10). Набір* $\{B_j\}_{j=1}^m$ *називається додатковою системою відносно* L, *якщо, яка б не була точка* $t \in \partial\Omega$, *для відповідного нормального вектора* ϱ_t *і для довільного дотичного вектора* $\mu_t \ne 0$ *до* $\partial\Omega$ *в цій точці многочлени*

$$b_j(t, \mu_t + \tau\varrho_t) = \sum_{|\alpha| = m_j} b_{j,\alpha}(t)(\mu_t + \tau\varrho_t)^\alpha$$

від змінної τ *лінійно незалежні за модулем* $a^+(t, \mu_t, \varrho_t, \tau)$.

Означення 4.1.5. [86, с. 453] *Набір, що складається із диференціального оператора (4.9) і граничних операторів (4.10), називається регулярно еліптичним, якщо:*

(i) оператор L є власно еліптичним;

(ii) набір $\{B_j\}_{j=1}^m$ утворює нормальну систему, причому

$$m_j \le 2m-1,\ j=1,\dots,m;$$

(iii) набір $\{B_j\}_{j=1}^m$ утворює додаткову систему відносно L.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞, набір операторів $L, \{B_j\}_{j=1}^m$ регулярно еліптичний в сенсі означення 4.1.5. У комплексному просторі $L_q(\Omega)$ $(1<q<\infty)$ розглядаємо замкнений лінійний оператор

$$Au = Lu, \quad \mathcal{C}^1(A) = W^{2m}_{q,\{B_j\}}(\Omega), \tag{4.11}$$

де $W^{2m}_{q,\{B_j\}}(\Omega) := \left\{u \in W^{2m}_q(\Omega)\colon B_j u\,|_{\partial\Omega}= 0,\ j=1,\dots,m\right\}$ і $W^{2m}_q(\Omega)$ – простір Соболєва.

Теорема 4.1.1. *Для будь-якого $1<q<\infty$ виконується рівність*

$$\mathcal{E}^\nu_q(A) \ = \ \Bigg\{u \in C^\infty(\bar\Omega)\colon B_j A^k u\,|_{\partial\Omega}= 0,\ j=1,\dots,m,\ k\in\mathbb{N}_0,$$

$$\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k u\right\|^q_{L_q(\Omega)}\Bigg)^{1/q} < \infty\Bigg\}. \tag{4.12}$$

Д о в е д е н н я. Згідно з [86, теорема 5.4.4/1], локально опуклий простір $\mathcal{C}^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{C}^k(A)$, що визначається сімейством півнорм $\|A^k u\|_{L_q(\Omega)}$ $(k\in\mathbb{N}_0)$, співпадає (в алгебраїчному і топологічному сенсі) із замкненим підпростором

$$C^\infty_{A,\{B_j\}}(\bar\Omega) = \left\{u \in C^\infty(\bar\Omega)\colon B_j A^k u\,|_{\partial\Omega}= 0,\ j=1,\dots,m,\ k\in\mathbb{N}_0\right\}$$

локально опуклого простору $C^\infty(\bar\Omega)$ з топологією, що визначається півнормами $\sup\limits_{t\in\Omega}|D^\alpha u(t)|$, $0\le|\alpha|<\infty$. Звідси та з означення простору $\mathcal{E}^\nu_q(A)$ отримуємо (4.12). Теорема доведена.

Теорема 4.1.2. *Нехай резольвентна множина* $\rho(A)$ *оператора* A, *визначеного рівністю (4.11), непорожня. Тоді для будь-якого* $1 < q < \infty$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}_q(A) = \mathcal{E}_q(D, A, B_j), \tag{4.13}$$

де $\mathcal{E}_q(D, A, B_j) = \left\{u \in \mathcal{E}_q(D)\colon B_j A^k u\,|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1, \ldots, m,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$.

Д о в е д е н н я. Без обмеження загальності, покладемо $0 \in \rho(A)$. Оскільки

$$\begin{aligned} \|A^k u\|^q_{L_q(\Omega)} &\leq \nu^{kq} \|u\|^q_{L_q(\Omega)} \\ &\leq \nu^{2kq}\Big(\sum_{|\alpha|=k} \nu^{-kq} \|D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)} + \nu^{-kq}\|u\|^q_{L_q(\Omega)}\Big) \end{aligned}$$

для всіх $u \in \mathcal{E}^\nu_q(A)$, то маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \nu^{-2kq} \|A^k u\|^q_{L_q(\Omega)} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left(\sum_{|\alpha|=k} \nu^{-kq} \|D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)} + \nu^{-kq}\|u\|^q_{L_q(\Omega)}\right).$$

Замінюючи $\mu = \nu^2$ при $\nu > 1$, отримуємо

$$\begin{aligned} \|u\|^q_{\mathcal{E}^\mu_q(A)} &\leq \|u\|^q_{\mathcal{E}^\nu_q(D)} + \frac{\nu^q \|u\|^q_{L_q(\Omega)}}{\nu^q - 1} \\ &\leq \|u\|^q_{\mathcal{E}^\nu_q(D)} + \frac{\nu^q \|u\|^q_{\mathcal{E}^\nu_q(D)}}{\nu^q - 1} = \left(1 + \frac{\nu^q}{\nu^q - 1}\right) \|u\|^q_{\mathcal{E}^\nu(D)}. \end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає вкладення

$$\mathcal{E}^{\sqrt{\nu}}_q(D, A, B_j) \subset \mathcal{E}^\nu_q(A), \tag{4.14}$$

де $\mathcal{E}^{\sqrt{\nu}}_q(D, A, B_j) = \left\{u \in \mathcal{E}^{\sqrt{\nu}}_q(D)\colon B_j A^k u\,|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1, \ldots, m,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$.

З іншого боку, згідно з [86, теорема 5.4.3] існує таке додатне число c_k, що виконується нерівність

$$\|A^k u\|_{L_q(\Omega)} \geq c_k \|u\|_{W^{2mk}_q(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{C}^k(A). \tag{4.15}$$

Тоді

$$\|A^{k+1}u\|_{L_q(\Omega)} = \|A^k(Au)\|_{L_q(\Omega)} \geq c_k\|Au\|_{W_q^{2mk}(\Omega)}$$

$$= c_k\Big(\sum_{|\alpha|\leq 2mk}\|D^\alpha Au\|^q_{L_q(\Omega)}\Big)^{1/q} \geq c_k\Big(\sum_{|\alpha|\leq 2mk}\|AD^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)}\Big)^{1/q}$$

$$\geq c_k c_1\Big(\sum_{|\alpha|\leq 2mk}\|D^\alpha u\|^q_{W_q^{2m}(\Omega)}\Big)^{1/q} = c_{k+1}\|u\|_{W_q^{2m(k+1)}(\Omega)}.$$

А отже, якщо $u \in \mathcal{E}_q^\nu(A)$, то

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\nu^{-qk}\|A^k u\|^q_{L_q(\Omega)} \geq \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{|\alpha|=k}(c_1^{-1}\nu)^{-qk}\|\,D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)}.$$

Це означає, що виконується вкладення

$$\mathcal{E}_q^\nu(A) \subset \mathcal{E}_q^{c_1^{-1}\nu}(D, A, B_j). \tag{4.16}$$

Із вкладень (4.14) і (4.16) отримуємо (4.13). Теорема доведена.

Наслідок 4.1.1. *В умовах теореми 4.1.2 виконується рівність*

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{E}_q(D, A, B_j). \tag{4.17}$$

Д о в е д е н н я. Згідно з [86, теорема 5.4.4/1], оператор A має точковий спектр, що складається із ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності, причому підпростори кореневих (власних і приєднаних) векторів не залежать від q і містяться в $C^\infty_{A,\{B_j\}}(\bar{\Omega})$. Тому рівність (4.17) безпосередньо випливає з (2.76) і (4.13).

Далі розглянемо регулярні еліптичні диференціальні оператори на компактних многовидах класу C^∞. Такі многовиди описуються за допомогою систем локальних координат (див., напр., [90, глава I, § 1.8]).

Розглядаємо $\partial\Omega$ як гладкий многовид з локальними картами U_l $(l = 1, \ldots, N)$, які покривають $\partial\Omega$. Позначимо $C^\infty(U_l)$ простір нескінченно диференційованих комплексних функцій на U_l. Локальні координати $y^l = (y_1^l, \ldots, y_{n-1}^l)$ на $\partial\Omega$ визначаються відображеннями $y^l\colon U_l \to$

$\mathbb{R}^{n-1}$ з оберненими y^{-l}. Нехай $C^\infty(\partial\Omega)$ — простір функцій u на $\partial\Omega$, таких, що $u(y^l) = u \circ y^{-l} \in C^\infty(y^l(U_l))$.

Нехай на $\partial\Omega$ визначений диференціальний оператор L порядку $2m$, який в локальних координатах $y^l = (y_1^l, \ldots, y_{n-1}^l)$ має вигляд

$$Lu(y^l) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(y^l)\, \partial^\alpha(u \circ y^{-l}),\ a_\alpha \in C^\infty(y^l(U_l)),\ u \in C^\infty(\partial\Omega), \quad (4.18)$$

де $a_\alpha(y^l) \in \mathbb{R}$ для $|\alpha| = 2m$ і відповідно до [86, означення 5.2.1] існує постійна $c > 0$, така, що

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(y^l)\, \xi^\alpha \ge c\, |\xi|^{2m}$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тут $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, $\partial_i = \partial/\partial y_i^l$.

Використовуючи відображення $\delta_{y^l} \colon C^\infty(y^l(U_l)) \to C^\infty(U_l)$ з $\delta_{y^l}(v) := v \circ y^l$ і фіксовану карту U_l, визначимо $L_{y^l} \colon C^\infty(y^l(U_l)) \to C^\infty(y^l(U_l))$ з $L_{y^l} := \delta_{y^l}^{-1} \circ L \circ \delta_{y^l}$ для всіх $v \in C^\infty(y^l(U_l))$. Тоді дія L на $u \in C^\infty(\partial\Omega)$ в локальних координатах $y^l = (y_1^l, \ldots, y_{n-1}^l)$ визначається як $Lu(y^l) = L_{y^l}(u \circ y^{-l})$.

Нехай простір $L_q(\partial\Omega)$ $(1 < q < \infty)$ має звичайний смисл (міра на $\partial\Omega$ породжується лебеговою мірою в $\mathbb{R}^n$).

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞, кулі U_j $(j = 1, \ldots, N)$ із означення 4.1.1. Розглянемо область ω таку, що $\bar{\omega} \subset \Omega$ і $\bigcup\limits_{j=1}^{N} U_j \bigcup \omega \supset \Omega$. Нехай $\psi_0(t) \in C_0^\infty(\omega)$ і $\psi_j(t) \in C_0^\infty(U_j)$ утворюють розбиття одиниці на Ω, тобто

$$0 \le \psi_j(t) \le 1 \text{ для } j = 0, 1, \ldots, N,\ \sum_{j=0}^{N} \psi_j(t) = 1 \text{ для } t \in \Omega \quad (4.19)$$

(поза межами ω або відповідно U_j функції $\psi_j(t)$ доозначені нулем).

Означення 4.1.6. [86, с. 346] *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞, кулі U_j і функції $f^{(j)}(t)$ $(j = 1, \ldots, N)$ із означення 4.1.1.*

Нехай $f^{(j)-1}(y)$ *— відповідні обернені функції, а функції* $\psi_j(t)$ $(j = 1, \ldots, N)$ *визначені співвідношенням (4.19). Для* $0 < s < \infty$, $1 < q < \infty$ *і* $1 \le \tau \le \infty$ *покладемо*

$$B^s_{q,\tau}(\partial\Omega) = \big\{u \in L_q(\partial\Omega)\colon (\psi_j u)(f^{(j)-1}(y)) \in B^s_{q,\tau}(\mathbb{R}^{n-1}), j = 1, \ldots, N\big\},$$

$$\|u\|_{B^s_{q,\tau}(\partial\Omega)} = \sum_{j=1}^{N} \|(\psi_j u)(f^{(j)-1}(y))\|_{B^s_{q,\tau}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Для $s = 1, 2, \ldots,$ $1 < q < \infty$ *покладемо*

$$W^s_q(\partial\Omega) = \big\{u \in L_q(\partial\Omega)\colon (\psi_j u)(f^{(j)-1}(y)) \in W^s_q(\mathbb{R}^{n-1}), j = 1, \ldots, N\big\},$$

$$\|u\|_{W^s_q(\partial\Omega)} = \sum_{j=1}^{N} \|(\psi_j u)(f^{(j)-1}(y))\|_{W^s_q(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Поза образом множини $U_j \bigcap \partial\Omega$ *функції* $(\psi_j u)(f^{(j)-1}(y))$ *доозначені нулем.*

Простори $B^s_{q,\tau}(\partial\Omega)$ і $W^s_q(\partial\Omega)$ є банаховими і з точністю до еквівалентності норм не залежать ні від вибору куль U_j, ні від вибору функцій $f^{(j)}(t)$ і $\psi_j(t)$.

Припустимо, що оператор L з областю визначення $\mathcal{C}^1(L) = C^\infty(\partial\Omega)$ є симетричний в $L_2(\partial\Omega)$. Його замикання, яке позначимо A, має дискретний спектр і $\mathcal{C}^k(A) = W^{2mk}_2(\partial\Omega)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ є простір Соболєва [86, теорема 7.6.1]. Таким чином, A є самоспряжений в $L_2(\partial\Omega)$, а його підпростір векторів експоненціального типу $\mathcal{E}(A)$ є щільний в $L_2(\partial\Omega)$ згідно з твердженням 2.1.1. Для спрощення припускаємо, що $0 \in \rho(A)$.

Теорема 4.1.3. *Виконується така рівність:*

$$\mathcal{E}^\nu_2(A) = \left\{u \in C^\infty(\partial\Omega)\colon \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k u\big\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right)^{1/2} < \infty\right\}. \qquad (4.20)$$

Д о в е д е н н я. Нехай $U_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $(j = 1, \ldots, N)$ — кулі, що покривають $\partial\Omega$, $y_i^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ — локальні координати і $\chi_j^2 \in C^\infty(\partial\Omega)$ — розбиття одиниці, що відповідає покриттю $\{U_j\}$:

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_j^2 = 1 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \ \chi_j \in C_0^\infty(U_j), \ 0 \le \chi_j \le 1.$$

Якщо $u \in C^\infty(\partial\Omega)$, то

$$\big(Au, u\big)_{L_2(\partial\Omega)} = \sum_{j=1}^{N} \big(Au, \chi_j^2 u\big)_{L_2(\partial\Omega)},$$

$$\big(Au, \chi_j^2 u\big)_{L_2(\partial\Omega)} = \int_{U_j} f_j(y^{(j)'})(Au)(y^{(j)'})(\chi_j^2 u)(y^{(j)'})dy^{(j)'},$$

де $f_j(y^{(j)'}) \in C^\infty(U_j)$ — функція, що залежить від вибору локальної системи координат, причому $f_j(y^{(j)'}) \ge c > 0$. Використовуючи нерівність Гордінга [67, с. 297], для довільного $\varepsilon > 0$ і деякої постійної $c > 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \big(Au, u\big)_{L_2(\partial\Omega)} &\ge \sum_{j=1}^{N} \big(A\chi_j u, \chi_j u\big)_{L_2(\partial\Omega)} - \varepsilon\|u\|^2_{W_2^m(\partial\Omega)} - c_1(\varepsilon)\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \\ &\ge c\|u\|^2_{W_2^m(\partial\Omega)} - 2\varepsilon\|u\|^2_{W_2^m(\partial\Omega)} - c_2(\varepsilon)\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \\ &\ge \frac{c}{2}\|u\|^2_{W_2^m(\partial\Omega)} - c_3\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Застосовуючи тепер [86, теорема 5.3.4], отримуємо еквівалентність

$$\|A^k u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \sim \|u\|^2_{W_2^{2mk}(\partial\Omega)}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{4.22}$$

Це означає, що $\mathcal{C}^k(A) = W_2^{2mk}(\partial\Omega)$ для $k \in \mathbb{N}$, а тому, згідно з теоремою вкладення [86, теорема 4.6.1], маємо $\mathcal{C}^\infty(A) = C^\infty(\partial\Omega)$. Звідси і з означення простору $\mathcal{E}_q(A)$ випливає (4.20). Теорема доведена.

Слідуючи [3, розділ 7.2], розглянемо в $L_2(\partial\Omega)$ підпростір $\mathcal{M}_2^\nu(\partial\Omega)$ функцій u, таких, що кожна композиція $(u \circ y^{-l})(\xi)$, $\xi \in y^l(U_l)$ співпадає

зі звуженням до $y^l(U_l)$ цілої аналітичної функції $\tilde{u}(\xi+i\eta)$, $\xi+i\eta\in\mathbb{C}^{n-1}$ експоненціального типу $\nu>0$. Нехай простір $\mathcal{M}_2(\partial\Omega)=\bigcup_{\nu>0}\mathcal{M}_2^\nu(\partial\Omega)$ наділений квазінормою $|u|_{\mathcal{M}_2(\partial\Omega)}:=\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}+\inf\{\nu>0\colon u\in\mathcal{M}_2^\nu(\partial\Omega)\}$.

Нехай $\{\psi_l\in C^\infty(\partial\Omega)\}$ — розбиття одиниці, відповідне покриттю $\{U_l\}$ многовиду $\partial\Omega$, тобто $\sum_{l=1}^N\psi_l=1$ на $\partial\Omega$ з $\psi_l\in C_0^\infty(U_l)$, $0\le\psi_l\le 1$. Для $s\in(0,\infty)$ розглянемо простір типу Соболєва-Слободецького на многовиді (див. [86, означення 3.6.1], [173, розділ 7.3])

$$H_2^s(\partial\Omega)=\bigl\{u\in L_2(\partial\Omega)\colon \psi_l(u\circ y^{-l})\in H_2^s(\mathbb{R}^{n-1}),\ l=1,\dots,N\bigr\}$$

наділений нормою $\|u\|_{H_2^s(\partial\Omega)}=\sum_{l=1}^N\|\psi_l(u\circ y^{-l})\|_{H_2^s(\mathbb{R}^{n-1})}$ де $\psi_l(u\circ y^{-l})(\xi)$ доозначені нулем поза образом $y^l(U_l)$ і $H_2^s(\mathbb{R}^{n-1})$ є простір Соболєва-Слободецького на $\mathbb{R}^{n-1}$, зокрема, $H_2^s(\partial\Omega)=W_2^s(\partial\Omega)$ для $s\in\mathbb{N}$.

Для $\nu>0$ визначимо простір

$$\mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)=\bigl\{u\in C^\infty(\partial\Omega)\colon \|u\|_{\mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)}<\infty\bigr\},$$

де $\|u\|_{\mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)}=\Bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-2k}\|u\|^2_{W_2^k(\partial\Omega)}\Bigr)^{1/2}$, $\|u\|^2_{W_2^k(\partial\Omega)}=\sum_{l=1}^N\|u\|^2_{W_2^k(y^l(U_l))}$,

$$\|u\|_{W_2^k(y^l(U_l))}=\inf_{\substack{\tilde{u}|_{y^l(U_l)}=u\circ y^{-l}\\ \tilde{u}\in W_2^k(\mathbb{R}^{n-1})}}\|\tilde{u}\|_{W_2^k(\mathbb{R}^{n-1})}\asymp\|\psi_l(u\circ y^{-l})\|_{W_2^k(\mathbb{R}^{n-1})}\tag{4.23}$$

і звуження в сенсі теорії узагальнених функцій [86, означення 4.2.1/1]. На об'єднанні $\mathcal{H}_2(\partial\Omega)=\bigcup_{\nu>0}\mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)$ задамо квазінорму

$$|u|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)}=\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}+\inf\{\nu>0\colon u\in\mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)\}.$$

Теорема 4.1.4. *Виконуються такі рівності:*

$$\mathcal{E}_2(A)=\mathcal{H}_2(\partial\Omega),\quad \mathcal{E}_2(A)=\mathcal{M}_2(\partial\Omega).\tag{4.24}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\tilde{u}(\xi+i\eta)$, $\xi+i\eta\in\mathbb{C}^{n-1}$, така, що $\tilde{u}\in W_2^k(\mathbb{R}^{n-1})$ для $\eta=0$ і $\tilde{u}\,|_{y^l(U_l)}=u\circ y^{-l}$ для будь якого $u\in\mathcal{H}_2^\nu(\partial\Omega)$. Тоді

$$\|\tilde{u}\|_{W_2^k(\mathbb{R}^{n-1})}\le c\,\nu^k,\quad k\in\mathbb{Z}_+,\quad l=1,\dots,N,\tag{4.25}$$

де $c > 0$ не залежить від k. Якщо $r > (n-1)/2$, то теорема вкладення Соболєва дає

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{u}(\xi)| \le c' \, \|\tilde{u}\|_{W_2^r(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $c' > 0$. Звідси маємо

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}} |\partial^\alpha \tilde{u}(\xi)| \le c\, c' \, \max(1, \nu, \ldots, \nu^r)\, \nu^k = c'' \nu^k \tag{4.26}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ і $|\alpha| = k$, де $c'' > 0$ не залежить від k. Запишемо $\tilde{u}(\xi + h)$, $h = (h_1, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ у вигляді

$$\tilde{u}(\xi + h) = \tilde{u}(\xi) + d\tilde{u}(\xi)/1! + d^2\tilde{u}(\xi)/2! + \ldots + d^k\tilde{u}(\xi + \theta h)/k!,$$

де $0 \le \theta \le 1$ і

$$\Big| \frac{d^k \tilde{u}(\xi + \theta h)}{k!} \Big| \le \sum_{|\alpha|=k} \Big| \partial^\alpha \tilde{u}(\xi + \theta h) \frac{h^\alpha}{\alpha!} \Big| \le c'' \nu^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{|h|^\alpha}{\alpha!} \to 0, \quad k \to \infty,$$

$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_{n-1}!$, $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \ldots h_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, $|h|^\alpha = |h_1|^{\alpha_1} \ldots |h_{n-1}|^{\alpha_{n-1}}$.

Таким чином, $\xi \mapsto \tilde{u}(\xi)$ є дійсна аналітична. В силу (4.26) ряд $\sum_{k \ge 0} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \tilde{u}(\xi) h^\alpha$ є абсолютно збіжний для всіх $h \in \mathbb{C}^{n-1}$ і визначає комплексне аналітичне продовження на $\mathbb{C}^{n-1}$. Проводячи подібну оцінку для будь якого $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, маємо

$$|\tilde{u}(\xi + i\eta)| \le \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{|\alpha|=k} \Big| \partial^\alpha \tilde{u}(\xi) \frac{(i\eta)^\alpha}{\alpha!} \Big| \le c''' e^{\nu|\eta|}, \tag{4.27}$$

де $c''' > 0$ не залежить від $\xi + i\eta \in \mathbb{C}^{n-1}$. Це означає, що $\xi + i\eta \mapsto \tilde{u}(\xi + i\eta)$ є ціла аналітична функція експоненціального типу ν зі звуженням $u \in \mathcal{M}_2^\nu(\partial\Omega)$.

Навпаки, нехай $\tilde{u}(\xi + i\eta)$ для всіх $u \in \mathcal{M}_2^\nu(\partial\Omega)$, така, що $\tilde{u}\,|_{y^l(U_l)} = u \circ y^{-l}$ для всіх $l = 1, \ldots, N$. Оскільки ціла функція $\tilde{u}$ задовольняє нерівність $|\tilde{u}(\xi + i\eta)| \le C_1 e^{\nu(|\xi| + |\eta|)}$ з постійною C_1 і $|\xi| = \sum_{j=1}^n |\xi_j|$, маємо

$$|\partial^\alpha \tilde{u}(\xi)| \le c_0 \, (2(n-1)\nu)^k \, e^{\nu|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad |\alpha| = k, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

з постійною $c_0 > 0$, яка не залежить від k.

Частинні похідні функції $\tilde{u}\mid_{y^l(U_l)} = u \circ y^{-l}$ можуть бути обчислені за формулою Коші

$$\partial^\alpha (u \circ y^{-l})(\xi) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_{n-1}} \frac{(u \circ y^{-l})(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})\, d\zeta_1 \dots d\zeta_{n-1}}{(\zeta_1 - \xi_1)^{\alpha_1+1} \dots (\zeta_{n-1} - \xi_{n-1})^{\alpha_{n-1}+1}},$$

де γ_j є коло в $\mathbb{C}$ з центром $\xi_j \in \mathbb{R}$ і радіусом r. Звідси маємо

$$\begin{aligned} &|\partial^\alpha (u \circ y^{-l})(\xi)| \\ &\le \frac{r^{-k}\alpha!}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |u(\xi_1 + re^{i\vartheta_1}, \dots, \xi_n + re^{i\vartheta_n})|\, d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-1} \\ &\le c' r^{-k} \alpha!\, e^{\nu((n-1)r + |\xi^\star|)}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

де $c' > 0$ не залежить від k, $\zeta_j - \xi_j = re^{i\vartheta_j}$ і $\xi^\star = (\xi_1^\star, \dots, \xi_{n-1}^\star)$, $\xi_j^\star \in [\xi_j - r, \xi_j + r]$ є точка, в якій $\nu|\xi_j|$ досягає максимуму. Виберемо r так, що $r^{-k} e^{\nu(n-1)r}$ досягає мінімуму. Легко перевірити, що це виконується для $r = k\,(\nu(n-1))^{-1}$. Використовуючи формулу Стірлінга, (4.28) можна переписати

$$|\partial^\alpha (u \circ y^{-l})(\xi)| \le c''\,(2\nu(n-1))^k\, e^{\nu|\xi^\star|}, \tag{4.29}$$

де c'' не залежить від k. Замінимо $\xi_j^\star$ на $\xi_j + r\varepsilon_j$ with $|\varepsilon_j| \le 1$. Маємо $\exp(\nu|\xi^\star|) = \exp(\nu \sum_{j=1}^n |\xi_j + r\varepsilon_j|) \le \exp(\nu \sum_{j=1}^n |\xi_j|) \exp((n-1)\nu r \varepsilon) \le c''' \exp(\nu|\xi|)$. Звідси випливає

$$\sup_{\xi \in y^l(U_l)} |\partial^\alpha (u \circ y^{-l})(\xi)| \le c_1 (2(n-1)\nu)^k,$$

де $c_1 > 0$ не залежить від k. Використовуючи цю нерівність, отримуємо

$$\|u\|^2_{W_2^k(\partial\Omega)} \le \sum_{l=1}^N \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha (u \circ y^{-l})\|^2_{L_2(y^l(U_l))} \le c_2 \left(2(n-1)^2 \nu\right)^{2k},$$

де $c_2 > 0$ не залежить від k. Далі з нерівностей

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|u\|^2_{W_2^k(\partial\Omega_j)}}{(2\sqrt{2}(n-1)^2 \nu_j)^{2k}} \le \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{2^k} \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|u\|^2_{W_2^k(\partial\Omega_j)}}{(2(n-1)^2 \nu_j)^{2k}} \le 2c_2 \tag{4.30}$$

випливає $u \in \mathcal{H}_2^{2\sqrt{2}(n-1)^2\nu_j}(\partial\Omega)$ і, як наслідок, $u \in \mathcal{H}_2(\partial\Omega)$.

Покажемо, що $\mathcal{H}_2(\partial\Omega) = \mathcal{M}_2(\partial\Omega)$ з еквівалентністю квазінорм

$$|u|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)} \asymp |u|_{\mathcal{M}_2(\partial\Omega)}. \tag{4.31}$$

Справді, достатньо показати, що

$$\inf\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{H}_2^{\nu}(\partial\Omega)\} \asymp \inf\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{M}_2^{\nu}(\partial\Omega)\}. \tag{4.32}$$

Оскільки $\mathcal{H}_2^{\nu}(\partial\Omega) \subset \mathcal{M}_2^{\nu}(\partial\Omega)$,

$$\inf\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{M}_2^{\nu}(\partial\Omega)\} \leq \inf\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{H}_2^{\nu}(\partial\Omega)\}. \tag{4.33}$$

З іншого боку, із вкладення $\mathcal{M}_2^{\nu}(\partial\Omega) \subset \mathcal{H}_2^{c\nu}(\partial\Omega)$ для $c = 2\sqrt{2}(n-1)^2$, маємо

$$\inf\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{M}_2^{\nu}(\partial\Omega)\} \geq c \inf\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{H}_2^{\nu}(\partial\Omega)\}. \tag{4.34}$$

З нерівностей (4.33) і (4.34) безпосередньо випливає (4.32).

Застосовуючи тепер [86, теорема 7.6.1], отримуємо

$$c_1\|u\|_{W_2^{2m}(\partial\Omega)} \leq \|Au\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq c_1'\|u\|_{W_2^{2m}(\partial\Omega)}$$

де $c_1, c_1' > 0$. Оскільки $\|A^k u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \nu^k \|u\|_{W_2^k(\partial\Omega)}$ виконується для всіх $u \in \mathcal{E}^{\nu}(A)$ і $k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\sum \nu^{-4k}\|A^k u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq \sum \nu^{-2k}\|u\|^2_{W_2^k(\partial\Omega)},$$

що дає вкладення $\mathcal{H}_2^{\sqrt{\nu}}(\partial\Omega) \subset \mathcal{E}_2^{\nu}(A)$.

Припустимо, що для будь якого $k > 1$ існує $c_k > 0$, таке, що $\|A^k u\|_{L_2(\partial\Omega)} \geq c_k \|u\|_{W_2^{2mk}(\partial\Omega)}$ для всіх $u \in \mathcal{C}^k(A)$. Тоді

$$\begin{aligned}
\|A^{k+1}u\|_{L_2(\partial\Omega)} &= \|A^k(Au)\|_{L_2(\partial\Omega)} \geq c_k \|Au\|_{W_2^{2mk}(\partial\Omega)} \\
&= c_k \sum_{l=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leq 2mk} \left\|\psi_l \partial^\alpha (Au \circ y^{-l})\right\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&\geq c_k \sum_{l=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leq 2mk} \left\|\psi_l A \partial^\alpha (u \circ y^{-l})\right\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&\geq c_k c_1 \sum_{l=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leq 2mk} \left\|\psi_l \partial^\alpha (u \circ y^{-l})\right\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&= c_{k+1} \|u\|_{W_2^{2m(k+1)}(\partial\Omega)},
\end{aligned}$$

де $c_{k+1} = c_k c_1 = c_1^k$. Отже, для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $u \in \mathcal{C}^k(A)$ маємо

$$\|A^k u\|_{L_2(\partial\Omega)} \geq c_1^k \|u\|_{W_2^{2mk}(\partial\Omega)}, \tag{4.35}$$

де $c_1 > 0$ не залежить від u і k. З нерівності (4.35) випливає

$$\sum \nu^{-2k} \|A^k u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \geq \sum (c_1^{-1}\nu)^{-2k} \|u\|^2_{W_2^k(\partial\Omega)},$$

що дає вкладення $\mathcal{E}_2^\nu(A) \subset \mathcal{H}_2^{c_1^{-1}\nu}(\partial\Omega)$. Таким чином, рівність $\mathcal{E}_2(A) = \mathcal{H}_2(\partial\Omega)$ встановлено. Враховуючи рівність $\mathcal{H}_2(\partial\Omega) = \mathcal{M}_2(\partial\Omega)$, маємо також $\mathcal{E}_2(A) = \mathcal{M}_2(\partial\Omega)$. Теорема доведена.

4.2. Ознаки повноти множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів

У цьому параграфі наведемо нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$), де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞ (див. означення 4.1.1). При цьому використаємо відомі ознаки повноти кореневих

векторів компактних операторів в гільбертовому просторі (див. [18, глава V]) та ознаки щільності множини цілих векторів експоненціального типу оператора в банахових просторах.

Як звичайно, кажемо, що множина кореневих векторів регулярно еліптичного оператора є повною в просторі $L_p(\Omega)$, якщо замикання її лінійної оболонки збігається з $L_p(\Omega)$.

Припустимо, що резольвентна множина $\rho(A)$ оператора A непорожня. Відомо [86, теорема 5.4.4/1], що у такому випадку спектр $\sigma(A)$ оператора A складається із ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності, причому підпростори кореневих векторів не залежать від індексу p і містяться в просторі

$$C^{\infty}_{A,\{B_j\}}(\bar{\Omega}) = \Big\{u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})\colon B_j A^k u\,|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1, \ldots, m,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\}.$$

Позначимо $\{\lambda_i(R)\}_1^{\nu(R)}$ послідовність, що складається із всіх ненульових власних чисел резольвенти $R_\lambda(A)$ оператора A, пронумерованих у порядку спадання модулів, причому при нумерації кожне власне число рахується стільки разів, яка його алгебраїчна кратність; $\nu(R)$ — сума алгебраїчних кратностей всіх ненульових власних чисел оператора $R_\lambda(A)$.

Нехай $R_{\mathcal{R}} = \dfrac{1}{2}[R_\lambda(A) + R_\lambda(A)^*]$, $R_{\mathcal{J}} = \dfrac{1}{2i}[R_\lambda(A) - R_\lambda(A)^*]$ — ермітові компоненти оператора $R_\lambda(A)$ в гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$. Нагадаємо, що оператор $R_\lambda(A)$ є дисипативним, якщо його уявна компонента $R_{\mathcal{J}}$ є невід'ємним оператором, тобто, якщо скалярний добуток $(R_{\mathcal{J}}u, u) \geq 0$ для всіх $u \in L_2(\Omega)$.

Нехай $S \in \mathfrak{L}[L_2(\Omega)]$ — компактний оператор, $R(K)$ — образ оператора $K \in \mathfrak{L}[L_2(\Omega)]$, $a_n(S) = \inf_{\dim R(K) \leq n} \|S - K\|$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ — апроксимаційні числа. Через $\mathfrak{S}_q$ $(1 \leq q \leq \infty)$ позначимо нормований ідеал компактних операторів

$$\mathfrak{S}_q = \left\{ S \in \mathfrak{L}[L_2(\Omega)],\ \|S\|_{\mathfrak{S}_q} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^q(S)\right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Теорема 4.2.1. *Нехай* $R_\lambda(A)$ *— дисипативний оператор в* $L_2(\Omega)$ *з уявною компонентою* $R_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_1$ *і виконується одна із таких умов:*

$$\text{(i)} \ \sum_{i=1}^{\nu(R)} |\operatorname{Im} \lambda_i(R)| = \|R_{\mathcal{J}}\|_{\mathfrak{S}_1},$$

$$\text{(ii)} \ \varliminf_{n\to\infty} n a_n(R_\lambda(A)) = 0,$$

$$\text{(iii)} \ \lim_{\tau\to\infty} \frac{n_+(\tau, R_{\mathcal{R}})}{\tau} = 0 \ \textit{або} \ \lim_{\tau\to\infty} \frac{n_-(\tau, R_{\mathcal{R}})}{\tau} = 0,$$

де $n_\pm(\tau, R_{\mathcal{R}})$ *— кількість характеристичних чисел компоненти* $R_{\mathcal{R}}$ *відповідно в інтервалах* $[0, \tau]$ *і* $[-\tau, 0]$.

Тоді множина кореневих векторів оператора A *є повною в просторі* $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

Д о в е д е н н я. Покладемо, без обмеження загальності, $0 \in \rho(A)$. Тоді, згідно з [86, теорема 5.4.3] існують такі додатні числа c_1 і c_1', що виконуються нерівності

$$c_1 \|u\|_{W_q^{2m}(\Omega)} \le \|Au\|_{L_q(\Omega)} \le c_1' \|u\|_{W_q^{2m}(\Omega)} \quad \text{для всіх} \quad u \in \mathcal{C}^1(A).$$

Звідси і з компактності вкладень $W_p^{2m}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ [86, теорема 3.2.5] випливає компактність оператора A^{-1} в $L_p(\Omega)$. Застосовуючи тепер [18, глава V, теореми 2.2, 4.2, 4.1], при виконанні відповідно умов (i)–(iii), отримуємо повноту множини кореневих векторів оператора A^{-1} в просторі $L_2(\Omega)$. Оскільки кореневі вектори операторів A і A^{-1} співпадають, то звідси випливає повнота множини кореневих векторів оператора A в $L_2(\Omega)$.

Згідно з [86, теорема 5.4.4/1] маємо

$$\mathcal{C}^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(A) = C^\infty_{A,\{B_j\}}(\bar{\Omega}).$$

Тому лінійна оболонка множини кореневих векторів оператора A щільна в $C^\infty_{A,\{B_j\}}(\bar{\Omega})$.

Згідно з [86, теорема 3.2.2] множина $C^\infty(\bar{\Omega})$ щільна в просторі $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Крім того, в силу [86, теорема 4.3.2/1(a)] множина $C_0^\infty(\Omega)$ всіх визначених в Ω комплекснозначних нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм щільна в $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. А це значить, що множина $C^\infty_{A,\{B_j\}}(\bar{\Omega})$ також щільна в $L_p(\Omega)$ і, таким чином, отримуємо повноту множини кореневих векторів оператора A в $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Теорема доведена.

Нехай θ_R — розхил кута з вершиною в початку координат, з яким співпадає замикання множини всіх значень $(R_\lambda(A)u, u)$, $u \in L_2(\Omega)$.

Теорема 4.2.2. *Нехай виконується одна із таких умов:*

(i) $\theta_R = \dfrac{\pi}{q}$, $q \geq 1$; $a_n(R(\lambda, A)) = o(n^{-1/q})$, $n \to \infty$;

(ii) $\theta_R = \dfrac{\pi}{q}$, $q > 1$; $a_n([e^{i\alpha}R]_{\mathcal{J}}) = o(n^{-1/q})$, $n \to \infty$,

для деякого α. Тоді множина кореневих векторів оператора A є повною в просторі $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

Д о в е д е н н я. Застосовуючи [18, глава V, теореми 6.1, 6.2], при виконанні відповідно умов (i)–(ii), отримуємо повноту множини кореневих векторів оператора A^{-1} в просторі $L_2(\Omega)$. Звідси випливає також повнота множини кореневих векторів оператора A в $L_2(\Omega)$.

Далі подібними міркуваннями як у доведенні теореми 4.2.1 встановлюємо повноту множини кореневих векторів оператора A в $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Теорема доведена.

Компактний оператор S має скінченний порядок, якщо $S \in \mathfrak{S}_q$ для деякого $q < \infty$. Нижню грань чисел q, для яких $\sum_{j=1}^\infty a_n^q(S) < \infty$, називають порядком оператора S і позначають $q(S)$.

Наступна ознака повноти кореневих векторів оператора A в $L_p(\Omega)$ виключає умову дисипативності резольвенти $R_\lambda(A)$ в $L_2(\Omega)$.

Теорема 4.2.3. *Нехай* $R_\lambda(A) = S(I+P)$, *де* S *— самоспряжений оператор і* $q(S) < \infty$, P *— компактний оператор в* $L_2(\Omega)$. *Тоді множина кореневих векторів оператора* A *є повною в просторі* $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

Д о в е д е н н я. Згідно з [18, глава V, теорема 8.1] отримуємо повноту множини кореневих векторів оператора A^{-1} в просторі $L_2(\Omega)$. Звідси випливає також повнота множини кореневих векторів оператора A в $L_2(\Omega)$.

Далі повторюючи міркування із доведення теореми 4.2.1 встановлюємо повноту множини кореневих векторів оператора A в $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Теорема доведена.

Відзначимо також, що множина кореневих векторів оператора A є повною в просторі $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, якщо виконується умова щільності

$$\overline{\mathcal{E}_p(A)} = L_p(\Omega). \tag{4.36}$$

Це безпосередньо випливає з рівностей (2.76) і (4.17). Таким чином, відомі ознаки щільності множини цілих векторів експоненціального типу оператора в банахових просторах (див. [15]) дають нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

4.3. Цілі вектори експоненціального типу вироджених еліптичних операторів

У даному параграфі розглянемо вироджені еліптичні диференціальні оператори, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів

поблизу границі (і на нескінченності), звичайні вироджені еліптичні диференціальні оператори в обмеженому інтервалі та вироджені еліптичні диференціальні оператори з частинними похідними в обмежених областях з нескінченно гладкою границею. Для таких операторів опишемо відповідні простори цілих векторів експоненціального типу.

Нехай Ω — довільна область в $\mathbb{R}^n$. Через $C^\infty(\Omega)$ позначимо множину всіх комплекснозначних нескінченно диференційовних функцій на Ω. Нехай далі $\rho(t) \in C^\infty(\Omega)$ — додатна функція, така, що:

(i) для довільного мультиіндексу α існує таке додатне число c_α, що

$$|D^\alpha \rho(t)| \le c_\alpha \, \rho^{1+|\alpha|}(t) \ \text{ для всіх } \ t \in \Omega;$$

(ii) для довільного додатного числа K існують числа $\varepsilon_K > 0$ і $r_K > 0$ такі, що $\rho(t) > K$, якщо $d(t) \le \varepsilon_K$ або $|t| \ge r_K$, $t \in \Omega$ ($d(t)$ — відстань до границі області Ω).

Позначимо через $S_{\rho(t)}(\Omega)$ локально опуклий простір

$$S_{\rho(t)}(\Omega) \ = \ \Big\{ u : u \in C^\infty(\Omega), \ \sup_{t\in\Omega} \rho^l(t) |D^\alpha u(t)| < \infty$$
$$\text{для всіх мультиіндексів } \alpha \text{ і всіх } l = 0, 1, 2, \dots \Big\}.$$

Означення 4.3.1. [86, с. 511] *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$, $\eta > \zeta + 2m$. *Покладемо*

$$\aleph_l = \frac{1}{2m} \left(\eta \, (2m - l) \, + \, \zeta \, l \right), \quad l = 0, 1, \dots, 2m$$

і визначимо оператор

$$Au = \sum_{l=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2l} \rho^{\aleph_{2l}}(t) \, b_\alpha(t) \, D^\alpha u + \sum_{|\beta|<2m} a_\beta(t) \, D^\beta u, \tag{4.37}$$

де $b_\alpha(t) \in C^\infty(\Omega)$ $(|\alpha| = 2l, \ l = 0, 1, \dots, m)$ *— дійсні функції, всі похідні яких (і самі функції) обмежені в* Ω. *Передбачається, що існує таке додатне число* C, *що для всіх* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *і всіх* $t \in \Omega$

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(t) \, \xi^\alpha \ge C \, |\xi|^{2m}, \ b_{(0,\dots,0)}(t) \ge C,$$

$$(-1)^l \sum_{|\alpha|=2l} b_\alpha(t)\,\xi^\alpha \ \geq\ 0,\ l = 1, \ldots, m-1.$$

Крім цього, $a_\beta(t) \in C^\infty(\Omega)$ $(0 \leq |\beta| < 2m)$ *та існує додатне число* $\delta > 0$, *таке, що* $D^\gamma a_\beta(\xi) = O\,(\,\rho^{\aleph_{|\beta|}+|\gamma|-\delta}\,)$ *для* $0 \leq |\beta| < 2m$ *і всіх мультиіндексів* γ.

Рівність (4.37), за наведених вище умов, визначає достатньо широкий клас вироджених еліптичних операторів [204]. Зокрема, якщо Ω – довільна обмежена область і $\rho^{-1}(t) \sim d(t)$, то цьому класу належить оператор

$$Au = \rho^\zeta(t)\,(-\triangle)^m u + \rho^\eta(t) u,\ \eta > \zeta + 2m.$$

У випадку, якщо Ω – обмежена область з нескінченно гладкою границею, то поблизу границі можна покласти $\rho(t) = d^{-1}(t)$.

Позначимо через $L_q^{loc}(\Omega)$ $(1 < q < \infty)$ множину всіх комплекснозначних функцій $u(t)$ на Ω, таких, що функція $|u(t)|^q$ локально сумовна. Покладемо

$$\Omega^{(j)} = \{u \in \Omega :\ \rho(t) < 2^j\},\ j = N, N+1, \ldots,$$

де N таке велике, що $\Omega^{(N)} \neq \emptyset$, і

$$\Omega_j = \Omega^{(j+2)} \backslash \Omega^{(j-1)},\ j = N+1, N+2, \ldots,$$

$$\Omega_N = \Omega^{(N+2)}.$$

Через $\Psi(\Omega; \rho)$ позначимо множину систем функцій $\{\psi_j(t)\}_{j=N}^\infty$, що задовольняють умови

$$0 \leq \psi_j(t) \leq 1,\ \psi_j(t) \in C_0^\infty(\Omega_j),\ \sum_{j=N}^\infty \psi_j(t) = 1,\ t \in \Omega$$

(передбачається, що функції $\psi_j(t)$ доозначені нулем поза межами Ω_j). Через $C_0^\infty(\Omega_j)$ позначено множину всіх визначених в Ω_j комплекснозначних нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм.

Крім того, передбачається, що для довільного мультиіндексу γ існує таке додатне число c_γ, що

$$|D^\gamma \psi_j(t)| \le c_\gamma\, 2^{j|\gamma|},\ j = N, N+1, \dots,\ 0 < |\gamma| < \infty.$$

Нехай $\{\psi_j(t)\}_{j=N}^{\infty} \in \Psi(\Omega;\rho)$, $1 < q < \infty$, $\tau \ge \mu + sq$, $s \in \mathbb{N}_0$ і $\tau, \mu \in \mathbb{R}$. Слідуючи означенню 3.2.3/2 [86], визначимо простір

$$W_q^s(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau) = \Big\{u : u \in L_q^{loc}(\Omega), \|u\|_{W_q^s(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)} < \infty\Big\},$$

$$\|u\|_{W_q^s(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)} = \left[\sum_{j=N}^{\infty}\Big(2^{j\mu}\|\psi_j u\|^q_{W_q^s(\mathbb{R}^n)} + 2^{j\tau}\|\psi_j u\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n)}\Big)\right]^{1/q},$$

де $W_q^s(\mathbb{R}^n)$ — простір Соболєва, $L_q(\mathbb{R}^n)$ — комплексний простір функцій, інтегрованих в степені q по n-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$:

$$L_q(\mathbb{R}^n) = \left\{u : \|u\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(t)|^q\,dt\right)^{1/q} < \infty\right\}.$$

Теорема 4.3.1. *Нехай $\eta > 0$, $1 < q < \infty$ і $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ для деякого $a \ge 0$. Далі, нехай оператор A, заданий рівністю (4.37), з областю визначення $W_q^{2m}(\Omega\,;\,\rho^{q\zeta};\,\rho^{q\eta})$ діє в просторі $L_q(\Omega)$. Тоді для будь-якого $0 < \nu < \infty$ виконується рівність*

$$\mathcal{E}_q^\nu(A) = \left\{u : u \in S_{\rho(t)}(\Omega), \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(A/\nu)^k u\big\|^q_{L_q(\Omega)}\right)^{1/q} < \infty\right\}. \quad (4.38)$$

Д о в е д е н н я. Згідно з [86, теореми 6.5.2/1, 3.2.4/3] для $u \in W_q^{2km}(\Omega\,;\,\rho^{qk\zeta};\,\rho^{qk\eta}) \subset \mathcal{C}^k(A)$ маємо еквівалентність

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(A)} \sim \|u\|_{W_q^{2km}(\Omega\,;\,\rho^{qk\zeta};\,\rho^{qk\eta})}. \quad (4.39)$$

Нехай $u \in S_{\rho(t)}(\Omega)$. Тоді $\|u\|_{W_q^{2km}(\Omega\,;\,\rho^{qk\zeta};\,\rho^{qk\eta})} \le c\displaystyle\int_\Omega \rho^{-a}(t)dt < \infty$, оскільки, за умовою, $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ для деякого $a \ge 0$. Звідси випливає вкладення

$$S_{\rho(t)}(\Omega) \subset W_q^{2km}(\Omega\,;\,\rho^{qk\zeta};\,\rho^{qk\eta}). \quad (4.40)$$

Згідно з [86, теорема 6.6.2] в $S_{\rho(t)}(\Omega)$ існує підмножина, а саме, лінійна оболонка кореневих функцій, яка щільна в $\mathcal{C}^k(A)$. Тому із (4.39) випливає рівність $\mathcal{C}^k(A) = W_q^{2km}(\Omega\,;\,\rho^{qk\zeta};\,\rho^{qk\eta})$. Вкладення (4.40) показує, що $S_{\rho(t)}(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(A)$.

Нехай тепер $u \in \mathcal{C}^\infty(A)$. Тоді $\rho^l D^\alpha u \in L_q(\Omega)$ для всіх $l \in \mathbb{N}_0$ і всіх мультиіндексів α. Звідси і з теореми вкладення Соболєва одержуємо

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\Omega} \rho^l |D^\alpha u(t)| &= \lim_{k\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}^n} \left| \rho^l(t) \sum_{j=N}^{k} \psi_j(t) D^\alpha u(t) \right| \\ &\le c \lim_{k\to\infty} \left\| \rho^l \sum_{j=N}^{k} \psi_j(t) D^\alpha u \right\|_{W_q^n(\mathbb{R}^n)} \le c_{l,|\alpha|},\end{aligned}$$

тобто $u \in S_{\rho(t)}(\Omega)$. Таким чином, маємо

$$\mathcal{C}^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} W_q^{2km}(\Omega\,;\,\rho^{qk\zeta};\,\rho^{qk\eta}) = S_{\rho(t)}(\Omega). \tag{4.41}$$

Рівність (4.38) випливає тепер з (4.41) та означення простору $\mathcal{E}_q^\nu(A)$. Теорема доведена.

Далі розглянемо узагальнені диференціальні оператори Лежандра і Трікомі.

Означення 4.3.2. [86, с. 543] *Нехай* $-\infty < a < b < \infty$, $\Omega = (a,\,b)$ *і функція* $p(t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ *така, що* $p(t) > 0$ $(t \in \Omega)$, $0 < C_a = \lim\limits_{t\downarrow a} \dfrac{p(t)}{t-a} < \infty$, $0 < C_b = \lim\limits_{t\uparrow b} \dfrac{p(t)}{b-t} < \infty$.

Для $m = 1, 2, \ldots$ *і* $l = 0, 1, \ldots, m$ *покладемо*

$$A_{m,l} u = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \Big(p^l(t) \frac{d^m u}{dt^m} \Big), \tag{4.42}$$

$$B_{m,l} u = A_{m,l} u + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t) \frac{d^j u}{dt^j}, \quad b_j(t) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \tag{4.43}$$

де $\mathcal{C}^1(A_{m,l}) = \mathcal{C}^1(B_{m,l}) = C^\infty(\bar{\Omega})$ *при* $s = m$ *і* $\mathcal{C}^1(A_{m,l}) = \mathcal{C}^1(B_{m,l}) = \left\{u \in C^\infty(\bar{\Omega})\colon u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0,\ j = 0, \ldots, m-l-1\right\}$ *для всіх* $l = 0, 1, \ldots, m-1$. *Припустимо також, що* $b_j(t) = O\left(p^{l-2m+j+1}(t)\right)$ *при* $t \downarrow a$ *і* $t \uparrow b$.

Прикладами функцій $p(t)$ можуть бути

$$p(t) = (t-a)(b-t),$$

$$p(t) = \begin{cases} C_a(t-a), & a < t < a+\varepsilon, \\ C_b(b-t), & b-\varepsilon < t < b, \end{cases}$$

де $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Оператори $A_{m,l}$ і $B_{m,l}$ розглядаються як необмежені оператори в $L_2(\Omega)$. Ці оператори називаються узагальненими диференціальними операторами Лежандра. При $m = l = 1$ і $p(t) = (t-a)(b-t)$ оператор $A_{m,l}$ є класичним диференціальним оператором Лежандра.

Згідно з [86, теорема 7.4.1], оператор $A_{m,l}$, визначений формулою (4.42), є істотно самоспряжений, тобто його замикання $\bar{A}_{m,l}$ в $L_2(\Omega)$ є самоспряжений оператор з чисто точковим спектром, власні значення якого невід'ємні. Згідно з [86, теорема 7.5.1], оператор $B_{m,l}$, визначений формулою (4.43), має замикання $\bar{B}_{m,l}$ в $L_2(\Omega)$ і виконуються рівності

$$\mathcal{C}^1(\bar{B}_{m,l}) = \mathcal{C}^1(\bar{A}_{m,l}) = \Big\{u \in W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2l})\colon \\ u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0,\ j = 0, \ldots, m-l-1\Big\}$$

для всіх $l = 0, 1, \ldots, m-1$ і $\mathcal{C}^1(\bar{B}_{m,m}) = \mathcal{C}^1(\bar{A}_{m,m}) = W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2m})$, де позначено

$$W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2l}) \ = \ \Big\{u \in L_2(\Omega) : \\ \|u\|^2_{W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2l})} = \sum_{j=0}^{2m} \int_\Omega p^{2l}(t)\, |u^{(j)}(t)|^2\, dt < \infty\Big\}.$$

Теорема 4.3.2. *Для* $l = 0, 1, \ldots, m-1$ *і* $0 < \nu < \infty$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{A}_{m,l}) = \Big\{ u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \big\| (\bar{A}_{m,l}/\nu)^k u \big\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2} < \infty,$$

$$(A^k_{m,l} u)^{(j)}(a) = (A^k_{m,l} u)^{(j)}(b) = 0, j = 0, \ldots, m-l-1, \ k \in \mathbb{N}_0 \Big\},$$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,l}) = \Big\{ u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \big\| (\bar{B}_{m,l}/\nu)^k u \big\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2} < \infty,$$

$$(B^k_{m,l} u)^{(j)}(a) = (B^k_{m,l} u)^{(j)}(b) = 0, j = 0, \ldots, m-l-1, \ k \in \mathbb{N}_0 \Big\}.$$

Для $l = m$ *і* $0 < \nu < \infty$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{A}_{m,m}) = \Big\{ u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \big\| (\bar{A}_{m,m}/\nu)^k u \big\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2} < \infty \Big\},$$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,m}) = \Big\{ u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \big\| (\bar{B}_{m,m}/\nu)^k u \big\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2} < \infty \Big\},$$

Д о в е д е н н я. Нехай $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ і $-1 < h \neq 2m-1$. Тоді, згідно з [86, лема 7.3.1/1], існує число δ, $0 < \delta < (b-a)/2$, таке, що

$$\int_a^b p^h |(pu)^{(m)}|^2 dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |u|^2 dt \sim \int_a^b p^{h+2} |u^{(m)}|^2 dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |u|^2 dt. \quad (4.44)$$

Застосовуючи дану еквівалентність, отримуємо

$$\int_a^b \big[|(p(p^{l-1} u^{(m)}))^{(m)}|^2 + |u|^2 \big] dt \sim \int_a^b \big[p^2 |(p^{l-1} u^{(m)})^{(m)}|^2 + |u|^2 \big] dt,$$

$$\int_a^b \big[p^2 |(p^{l-1} u^{(m)})^{(m)}|^2 + |u|^2 \big] dt \sim \int_a^b \big[p^4 |(p^{l-2} u^{(m)})^{(m)}|^2 + |u|^2 \big] dt,$$

. . . . . .

$$\int_a^b \big[p^{2l-2} |(pu^{(m)})^{(m)}|^2 + |u|^2 \big] dt \sim \int_a^b \big[p^{2l} |u^{(2m)}|^2 + |u|^2 \big] dt.$$

Отже, маємо таку еквівалентність

$$\int_a^b \big[|(p^l u^{(m)})^{(m)}|^2 + |u|^2 \big] dt \ \sim \int_a^b \big[p^{2l} |u^{(2m)}|^2 + |u|^2 \big] dt,$$

з якої випливає

$$\|A_{m,l}u\|^2_{L_2(\Omega)} \,+\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \sim \|u\|^2_{W_2^{2m}(\Omega;\,p^{2l})}. \tag{4.45}$$

Застосовуючи знову (4.44), отримуємо

$$\int_a^b \left[|(p^l(p^l u^{(m)})^{(2m)})^{(m)}|^2 + |u|^2\right]dt \sim \int_a^b \left[p^{2l}|(p^l u^{(m)})^{(3m)}|^2 + |u|^2\right]dt,$$

$$\int_a^b \left[p^{2l}|(p^l u^{(m)})^{(3m)}|^2 + |u|^2\right]dt \sim \int_a^b \left[p^{4l}|u^{(4m)}|^2 + |u|^2\right]dt,$$

а тому

$$\|A^2_{m,l}u\|^2_{L_2(\Omega)} \,+\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \sim \|u\|^2_{W_2^{4m}(\Omega;\,p^{4l})}.$$

Продовжуючи процес ітерацій, отримуємо

$$\|A^k_{m,l}u\|^2_{L_2(\Omega)} \,+\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \sim \|u\|^2_{W_2^{2km}(\Omega;\,p^{2kl})}. \tag{4.46}$$

Зокрема, $\mathcal{C}^k(\bar{A}_{m,l}) = \overline{\mathcal{C}^k(A_{m,l})}$ є замикання $\mathcal{C}^k(A_{m,l})$ в $W_2^{2km}(\Omega;\,p^{2kl})$ для $l = 0, 1, \ldots, m$. Згідно з [86, теорема 7.3.2/1], при $j = m - [(l+1)/2] - 1$ справедливі неперервні вкладення $W_2^m(\Omega;\,p^l) \subset C^j(\bar{\Omega})$, тому

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{A}_{m,l}) \;=\; \Big\{u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), (A^k_{m,l}u)^{(j)}(a) = (A^k_{m,l}u)^{(j)}(b) = 0,$$

$$j = 0, \ldots, m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0,\ l = 0, 1, \ldots,\, m-1\Big\},$$

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{A}_{m,m}) = C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Із оцінки $b_j(t) \,=\, O\left(p^{l-2m+j+1}(t)\right)$ (при $t \downarrow a$ і $t \uparrow b$) і умови

$b_j(t) \in C^\infty(\bar\Omega)$ випливає, що для $u \in C^\infty(\bar\Omega)$ і будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\Big\| \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t)\, u^{(j)} \Big\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_a^b \Big| \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t)\, u^{(j)}(t) \Big|^2 dt$$

$$\le c \int_a^b \sum_{j=0}^{2m-1} p^{2\,\max(0,\,l-2m+j+1)}(t) |u^{(j)}(t)|^2\, dt$$

$$\le c \int_a^b \sum_{j=0}^{2m} p^{2\,\max(0,\,l-2m+j)}(t) \left(\varepsilon\, |u^{(j)}(t)|^2 \,+\, c\,(\varepsilon)\, |u(t)|^2 \right) dt$$

$$\le c_1 \Big(\varepsilon\, \|u\|^2_{W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2l})} \,+\, c\,(\varepsilon)\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \Big).$$

Звідси, враховуючи (4.45), маємо

$$\|B_{m,l} u\|^2_{L_2(\Omega)} \,+\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \sim \|u\|^2_{W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2l})}.$$

Далі отримуємо такі оцінки

$$\int_a^b \Big[\Big| (p^l (p^l u^{(m)})^{(2m)})^{(m)} |^2 + \Big(p^l \sum_{j=0}^{2m-1} (b_j(t)\, u^{(j)})^{(m)} \Big)^{(m)}$$

$$+ \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(t) \Big((p^l u^{(m)})^{(m)} + \sum_{i=0}^{2m-1} b_i(\xi)\, u^{(i)} \Big)^{(j)} \Big|^2 + |u|^2 \Big] dt$$

$$\sim \int_a^b \Big[p^{4l} |u^{(4m)}|^2 + p^{2l} \sum_{j=0}^{2m} p^{2\,\max(0,\,l-2m+j)}(t) |u^{(j+2m)}|^2$$

$$+ \sum_{j=0}^{2m} p^{2\,\max(0,\,l-2m+j)}(t) \sum_{i=0}^{2m} p^{2\,\max(0,\,l-2m+i)}(t) |u^{(j+i)}|^2 + |u|^2 \Big] dt,$$

$$\int_a^b p^{2l} \sum_{j=0}^{2m} p^{2\,\max(0,\,l-2m+j)}(t) |u^{(j+2m)}|^2\, dt$$

$$\le \int_a^b p^{2l} \sum_{j=0}^{2m} p^{2\,\max(0,\,l-2m+j)}(t) \big(\varepsilon\, |u^{(j+2m)}(t)|^2 \,+\, c\,(\varepsilon)\, |u(t)|^2 \big)\, dt$$

$$\le c_1 \Big(\varepsilon\, \|u\|^2_{W_2^{4m}(\Omega;\, p^{4l})} \,+\, c\,(\varepsilon)\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \Big),$$

$$\int_a^b \sum_{j=0}^{2m} p^{2\max(0,\,l-2m+j)}(t) \sum_{i=0}^{2m} p^{2\max(0,\,l-2m+i)}(\xi)|u^{(j+i)}|^2\,dt$$

$$\leq \int_a^b \sum_{j=0}^{2m} p^{4\max(0,\,l-2m+j)}(t)\big(\varepsilon\,|u^{(2j)}(t)|^2 \,+\, c\,(\varepsilon)\,|u(t)|^2\big)\,dt$$

$$\leq c_1\left(\varepsilon\,\|u\|^2_{W_2^{4m}(\Omega;\,p^{4l})} \,+\, c\,(\varepsilon)\,\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\right).$$

Отже, маємо таку еквівалентність

$$\|B^2_{m,l}u\|^2_{L_2(\Omega)} \,+\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \sim \|u\|^2_{W_2^{4m}(\Omega;\,p^{4l})}.$$

Продовжуючи процес ітерацій, отримуємо

$$\|B^k_{m,l}u\|^2_{L_2(\Omega)} \,+\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \sim \|u\|^2_{W_2^{2km}(\Omega;\,p^{2kl})}. \tag{4.47}$$

Зокрема, $\mathcal{C}^k(\bar{B}_{m,l}) = \overline{\mathcal{C}^k(B_{m,l})}$ є замикання $\mathcal{C}^k(B_{m,l})$ в $W_2^{2km}(\Omega;\,p^{2kl})$ для $l = 0, 1, \ldots, m$. З урахуванням [86, теорема 7.3.2/1], маємо

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{B}_{m,l}) \;=\; \Big\{u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), (B^k_{m,l}u)^{(j)}(a) = (B^k_{m,l}u)^{(j)}(b) = 0,$$

$$j = 0, \ldots, m-l-1,\; k \in \mathbb{N}_0,\; l = 0, 1, \ldots,\, m-1\Big\},$$

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{B}_{m,m}) = C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Теорема доведена.

Нехай тепер $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞. Окіл S границі $\partial\Omega$ з внутрішньої сторони Ω запишемо у вигляді $S = \partial\Omega \times (0, h)$, де $h > 0$ достатньо мале. Виберемо систему відкритих куль U_j, таку, що $\bigcup\limits_{j=1}^{N} U_j \supset \bar{S}$. На перетині $U_j \bigcap S$ введемо систему локальних координат $\left(y_1^{(j)}, \ldots, y_{n-1}^{(j)}, y_n^{(j)}\right) = \left(y^{(j)\prime}, y_n^{(j)}\right)$ класу C^∞, де напрямок координатних ліній $y_n = y_n^{(j)}$ співпадає з напрямком внутрішньої нормалі, а

$\left(y_1^{(j)}, \ldots, y_{n-1}^{(j)}\right)$ — локальні координати на $\partial\Omega \bigcap U_j$. Покладемо

$$g_j = g_j(y^{(j)}) = \left| \det \left(\frac{\partial t_l}{\partial y_r^{(j)}} \right)_{l,r}^{1,\ldots,n} \right|.$$

Через $d(t)$ позначимо відстань від точки $t \in \Omega$ до границі $\partial\Omega$. Передбачається, що для точок $t \in S$ виконується умова $y_n = d(t)$.

Означення 4.3.3. [86, с. 545] *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞ і нехай $m = 1, 2, \ldots,$ $l = 0, 1, \ldots, m$. Диференціальний оператор*

$$B_{m,l}u = \sum_{|\alpha| \le 2m} b_\alpha(t) D^\alpha u, \quad b_\alpha(t) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \tag{4.48}$$

називається оператором Трікомі першого типу, якщо виконуються такі умови:

(i) *коефіцієнти $b_\alpha(t)$ при $|\alpha| = 2m$ є дійсними і існує така функція $c(t) > 0$, що для всіх $t \in \Omega$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(t)\, \xi^\alpha \ \ge\ c(t)\, |\xi|^{2m};$$

(ii) *Вираз $B_{m,l}u$ в області $U_j \bigcap S$ можна зобразити у вигляді*

$$\begin{aligned} g_j B_{m,l} u(t) \ &= \ (-1)^m h_j \frac{\partial^m}{\partial y_n^m} \Big(a(y_n) y_n^l \frac{\partial^m v_j}{\partial y_n^m} \Big) \\ &\quad + \sum_{|\beta| \le 2m} c_\beta(y^{(j)\prime}) D^\beta_{y^{(j)\prime}} v_j + \sum_{|\gamma| \le 2m-1} d_\gamma(y^{(j)}) D^\gamma v_j, \end{aligned} \tag{4.49}$$

де $u(t) = v_j(y^{(j)})$ в $U_j \bigcap S$, $h_j = h_j(y^{(j)\prime}) \ge c > 0$ — функція класу C^∞ в $\overline{U_j \bigcap S}$, що не залежить від y_n, а функція $a(\zeta)$ додатна і нескінченно диференційовна на відрізку $[0, h]$. Крім того, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0)$, а другий доданок у формулі (4.49) є регулярно еліптичний додатно визначений диференціальний оператор порядку $2m$ в локальних координатах $y^{(j)\prime}$ з дійснозначними коефіцієнтами c_β класу C^∞, визначеними

на $\partial\Omega$. *Передбачається також, що* $d_\gamma(y^{(j)}) \in C^\infty(\overline{U_j \bigcap S})$ *і при* $y_n \downarrow 0$

$$d_\gamma(y^{(j)}) = \begin{cases} O\left(y_n^{\gamma_n}\right) & \text{для} \quad |\gamma'| > 0, \\ O\left(y_n^{\gamma_n-(2m-l)+1}\right) & \text{для} \quad |\gamma'| = 0, \end{cases}$$

де $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_n) = (\gamma', \gamma_n)$;

(iii) *область визначення оператора* $B_{m,l}$ *задається рівностями*

$$\mathcal{C}^1(B_{m,l}) = \left\{ u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \frac{\partial^s u}{\partial y_n^s}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ s = 0, 1, \ldots, m-l-1 \right\}$$

для $l = 0, 1, \ldots, m-1$ *і* $\mathcal{C}^1(B_{m,m}) = C^\infty(\bar{\Omega})$.

Згідно з [86, теорема 7.6.4], оператор $B_{m,l}$ із означення 4.3.3, допускає замикання $\bar{B}_{m,l}$ в $L_2(\Omega)$ і область визначення $\mathcal{C}^1(\bar{B}_{m,l})$ є замикання $\mathcal{C}^1(B_{m,l})$ за нормою

$$\left[\|u\|^2_{W_2^{2m}(\Omega\setminus S)} + \int_S \left(\sum_{|\beta|\le 2m} \left| D^\beta_{y^{(j)'}} u \right|^2 + d^{2l}(t) \left| \frac{\partial^{2m} u}{\partial y_n^{2m}} \right|^2 \right) dt \right]^{1/2},$$

Теорема 4.3.3. *Нехай оператор* $B_{m,l}$ *із означення 4.3.3 симетричний в* $L_2(\Omega)$, *причому* $d_\gamma(y^{(j)}) = 0$ *в (4.49). Тоді для* $l = 0, 1, \ldots, m-1$ *і* $0 < \nu < \infty$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,l}) = \left\{ u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\| (\bar{B}_{m,l}/\nu)^k u \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} < \infty, \right.$$
$$\left. \frac{\partial^s B^k_{m,l} u}{\partial y_n^s}\Big|_{\partial\Omega} = 0, s = 0, \ldots, m-l-1, \ k \in \mathbb{N}_0 \right\}, \qquad (4.50)$$

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,m}) = \left\{ u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\| (\bar{B}_{m,m}/\nu)^k u \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} < \infty \right\}. \qquad (4.51)$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\chi_0(t)$ і $\chi_0(t)$ — дійсні функції, що належать $C^\infty(\bar{\Omega})$, такі, що

$$\chi_0^2(t) + \chi_1^2(t) = 1 \text{ в } \Omega,$$

$$\chi_0(t) \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\chi_0(t) = 1 \text{ в деякому околі множини } \Omega \setminus S.$$

Враховуючи, що

$$d(t) = g_j(y^{(j)}) dy_1^{(j)} \dots dy_{n-1}^{(j)} dy_n,$$

застосовуючи оцінку (4.21) і нерівність Гордінга [67, с. 297], отримуємо, що для деякої області ω такої, що $\Omega \setminus S \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, виконується оцінка

$$\begin{aligned}
(B_{m,l}u, u)_{L_2(\Omega)} &= \left(B_{m,l}u, \chi_0^2 u\right)_{L_2(\Omega)} + \left(B_{m,l}u, \chi_1^2 u\right)_{L_2(S)} \\
&\geq (B_{m,l}\chi_0 u, \chi_0 u)_{L_2(\Omega)} + (B_{m,l}\chi_1 u, \chi_1 u)_{L_2(S)} \\
&-\varepsilon \|u\|^2_{W_2^m(\omega)} - c\varepsilon \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \geq c\|u\|^2_{W_2^m(\omega)} \\
&+c \int_S \left(d^l(t) \left| \frac{\partial^m u}{\partial y_n^m} \right|^2 + \sum_{|\beta| \leq m} \left| D^\beta_{y^{(j)\prime}} u \right|^2 \right) dt - c' \|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Використовуючи (4.52) і [86, теорема 5.3.4], отримуємо, що норма

$$\left[\|u\|^2_{W_2^{2mk}(\Omega \setminus S)} + \int_S \left(\sum_{|\beta| \leq 2mk} \left| D^\beta_{y^{(j)\prime}} u \right|^2 + d^{2lk}(t) \left| \frac{\partial^{2mk} u}{\partial y_n^{2mk}} \right|^2 \right) dt \right]^{1/2}$$

є еквівалентною нормою на $\mathcal{C}^k(B_{m,l})$. В силу оцінки (4.44) і [86, теорема 4.2.4], маємо

$$\mathcal{C}^k(B_{m,l}) \subset W_2^{(2m-l)k}(\Omega), \quad (4.53)$$

а тому, згідно з [86, теорема 4.6.1], $\mathcal{C}^\infty(B_{m,l}) \subset C^\infty(\bar{\Omega})$. Теорема доведена.

Зауваження 4.3.1 *Із вкладення (4.53) і [86, теорема 4.6.1] випливає, що рівності (4.50) і (4.51) можна розуміти також в топологічному смислі. Топологія в* $C^\infty(\bar\Omega)$ *породжується півнормами* $\sup\limits_{t\in\Omega}|D^\beta u(t)|$, $0\le|\beta|<\infty$. *Топологія в* $\mathcal{C}^\infty(B_{m,l})$ *задається півнормами* $\|\bar B^k_{m,l}u\|_{L_2(\Omega)}$, $k\in\mathbb{N}_0$.

Нехай $j\ge 1$, $0\le s\le j$, $j,s\in\mathbb{Z}$. Позначимо

$$C^\infty_{j,s}(\bar\Omega) \;=\; \Big\{u\in C^\infty(\bar\Omega):\ \frac{\partial^r u}{\partial\varrho^r}\Big|_{\partial\Omega}=0 \ \text{ для } \ r=n_1 j+n_2,$$
$$n_1=0,1,\ldots;\ n_2=0,\ldots,s-1\Big\}$$

для $s\ge 1$, $C^\infty_{j,s}(\bar\Omega)=C^\infty(\bar\Omega)$ для $s=0$, ϱ — нормаль до границі $\partial\Omega$. У топології, що породжується півнормами $\sup\limits_{t\in\Omega}|D^\beta u(t)|$, $0\le|\beta|<\infty$, $C^\infty_{j,s}(\bar\Omega)$ є простором Фреше. У випадку $j=s$ маємо $C^\infty_{j,s}(\bar\Omega)=C^\infty_0(\bar\Omega)$.

Теорема 4.3.4. *Нехай* $j\ge 1$, $0\le s\le j/2$, $m=j-l$, $l=j-2s$, $j,s\in\mathbb{Z}$. *Припустимо, що* $B_{m,l}$ *– симетричний оператор в* $L_2(\Omega)$ *і* $a(\zeta)=1$, $d_\beta(y^{(j)})=0$ *в (4.49). Тоді*

$$\mathcal{E}^\nu_2(\bar B_{m,l})=\Big\{u: u\in C^\infty_{j,s}(\bar\Omega),\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|(\bar B_{m,l}/\nu)^k u\big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}<\infty\Big\}. \quad (4.54)$$

Д о в е д е н н я. При $s=0$ формула (4.54) співпадає з (4.51), а при $s>0$ – з формулою (4.50). Теорема доведена.

Означення 4.3.4. [86, с. 546] *Нехай* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *— обмежена область класу* C^∞ *і нехай* $\sigma(t)\in C^\infty(\bar\Omega)$ *— додатна функція, причому* $\sigma(t)=d(t)$ *поблизу границі. Позначимо через* $\{a_{jl}(t)\}^{1,\ldots,n}_{j,l}$ *додатно визначену симетричну матрицю з дійснозначними коефіцієнтами* $a_{jl}(t)\in C^\infty(\bar\Omega)$, *для якої*

$$\sum_{j,l=1}^n a_{jl}(t)\,\xi_j\,\xi_l\ge c|\xi|^2,$$

де $c > 0$ *— додатне число, що не залежить від* $t \in \Omega$ *і* $\xi \in \mathbb{R}^n$. *Диференціальний оператор, що задається співвідношеннями*

$$Au = -\sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_j}\Big(a_{jl}(t)\sigma(t)\frac{\partial u}{\partial t_l}\Big),\ \mathcal{C}^1(A) = C^\infty(\bar{\Omega}), \tag{4.55}$$

називається оператором Трікомі другого типу.

Згідно з [86, теорема 7.6.6/1], оператор A із означення 4.3.4 істотно самоспряжений в $L_2(\Omega)$. Його замикання $\bar{A}$ є обмежений знизу оператор з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності.

Теорема 4.3.5. *Нехай оператор* $\bar{A}$ *— замикання в* $L_2(\Omega)$ *оператора* A *із означення 4.3.4. Тоді*

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{A}) = \Big\{u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|(\bar{A}/\nu)^k u\big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2} < \infty\Big\}. \tag{4.56}$$

Д о в е д е н н я. Згідно з [86, теорема 7.6.6/1],

$$\mathcal{C}^k(\bar{A}) = W_2^{2k}\big(\Omega, \sigma^{2k}\big). \tag{4.57}$$

Із формули (4.57) і [86, теорема 7.3.2/1] випливає вкладення

$$\mathcal{C}^k(\bar{A}) \subset W_2^{k-1}(\Omega). \tag{4.58}$$

Застосовуючи [86, теорема 4.6.1] із (4.58) отримуємо $\mathcal{C}^\infty(\bar{A}) = C^\infty(\bar{\Omega})$ (в теоретико-множинному і топологічному сенсі). Звідси і з означення простору $\mathcal{E}_2^\nu(\bar{A})$ випливає (4.56). Теорема доведена.

4.4. Інтерполяція цілих векторів експоненціального типу еліптичних операторів

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞. У комплексному просторі $L_q(\Omega)$ $(1 < q < \infty)$ розглядаємо регулярно еліптичний оператор A, визначений рівністю (4.11). Надалі припустимо, що резольвентна

множина оператора A непорожня. Відомо [86, теорема 4.9.1], що у такому випадку для достатньо великих додатних чисел $\rho \geq \rho_0$ оператор $A + \rho I$ позитивний. Оскільки простори векторів експоненціального типу операторів A і $A + \rho I$ співпадають, то, без обмеження загальності, вважаємо, що A — позитивний оператор. Згідно з [86, теорема 5.4.4/1], оператор A має точковий спектр, що складається із ізольованих власних значень $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ скінченної алгебраїчної кратності, причому підпростори кореневих (власних і приєднаних) векторів не залежать від q. Далі span означає лінійну алгебраїчну оболонку векторів.

Теорема 4.4.1. *Для будь-яких чисел* $\beta > \alpha \geq 0$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta < 1$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}_p^{\nu}\left((\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta})_{\theta,p}\right) = \mathcal{E}_p^{\nu}\left(\left[\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta}\right]_{\theta}\right)$$
$$= \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) : \ |\lambda_j| < \min\left(\nu^{\frac{1}{m_0+1}}, \nu^{\frac{1}{n_0+1}}, \nu^{\frac{1}{m_1+1}}, \nu^{\frac{1}{n_1+1}}\right)\right\}, \quad (4.59)$$

де $\alpha = m_0(1-\theta) + n_0\theta$, $\beta = m_1(1-\theta) + n_1\theta$, $m_0, n_0, m_1, n_1 \in \mathbb{N}$.

Якщо коефіцієнти $a_{\alpha}(t)$ *оператора* A *є постійними, то виконується рівність*

$$\mathcal{E}_p\left((\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta})_{\theta,p}\right) = \mathcal{E}_p\left(\left[\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta}\right]_{\theta}\right)$$
$$= \left\{u \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^n)\,|_{\Omega} : \ B_j A^k u\,|_{\partial\Omega} = 0, \ j = 1, \ldots, m, \ k \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad (4.60)$$

де $\operatorname{Exp}(\mathbb{C}^n)$ *— простір всіх цілих аналітичних функцій експоненціального типу над* $\mathbb{C}^n$.

Д о в е д е н н я. В силу рівності (2.7) для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\mathcal{E}_p^{\nu}(\mathcal{C}^k) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) : \ |\lambda_j|^{k+1} < \nu\right\}. \quad (4.61)$$

З рівності (4.61), теореми 3.3.1 і скінченновимірності кореневих підпросторів отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\alpha) &= \mathcal{E}_p^\nu\big([\mathcal{C}^{m_0},\,\mathcal{C}^{n_0}]_\theta\big) = \big[\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^{m_0}),\,\mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^{n_0})\big]_\theta = \mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^{m_0})\bigcap\mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^{n_0})\\
&= \operatorname{span}\Big\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A):\ |\lambda_j| < \min\big(\nu^{\frac{1}{m_0+1}},\,\nu^{\frac{1}{n_0+1}}\big)\Big\},\\
\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^\beta) &= \mathcal{E}_p^\nu\big([\mathcal{C}^{m_1},\,\mathcal{C}^{n_1}]_\theta\big) = \big[\mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^{m_1}),\,\mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^{n_1})\big]_\theta = \mathcal{E}_{p_0}^\nu(\mathcal{C}^{m_1})\bigcap\mathcal{E}_{p_1}^\nu(\mathcal{C}^{n_1})\\
&= \operatorname{span}\Big\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A):\ |\lambda_j| < \min\big(\nu^{\frac{1}{m_1+1}},\,\nu^{\frac{1}{n_1+1}}\big)\Big\},
\end{aligned}$$

де $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. Застосовуючи знову теорему 3.3.1, врахувавши попередні рівності, отримуємо (4.59).

З рівності (4.61) і теореми 4.1.2 для $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_p(\mathcal{C}^k) = \bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}_p^\nu(\mathcal{C}^k)\\
&= \big\{u \in \operatorname{Exp}(\mathbb{C}^n)\,|_\Omega\colon B_jA^ku\,|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\dots,m,\ k \in \mathbb{N}_0\big\}.
\end{aligned}$$

Залишилось застосувати теорему 3.3.1. Теорема доведена.

Нехай $\{\psi_j(t)\}_{j=N}^\infty \in \Psi(\Omega;\rho)$, де $\Psi(\Omega;\rho)$ — система функцій, визначена у п. 2.3, $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$, $\tau \ge \mu + sq$, $\tau, \mu \in \mathbb{R}$ і $s \ge 0$. Слідуючи означенню 3.2.3/2 [86], визначимо простір

$$B_{q,p}^s(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau) = \Big\{u : u \in L_q^{loc}(\Omega), \|u\|_{B_{q,p}^s(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)} < \infty\Big\},$$

$$\|u\|_{B_{q,p}^s(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)} = \left[\sum_{j=N}^\infty\Big(2^{j\mu}\|\psi_ju\|_{B_{q,p}^s(\mathbb{R}^n)}^q + 2^{j\tau}\|\psi_ju\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}^q\Big)\right]^{1/q},$$

де $B_{q,p}^s(\mathbb{R}^n)$ — простір Бєсова.

Нехай $1 < q < \infty$, $m, r, h \in \mathbb{N}$, $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$, $\eta > \zeta + 2m$ і $0 < \theta < 1$. Далі, нехай оператор A із означення 4.3.1 з областю визначення $W_q^{2m}(\Omega\,;\,\rho^{q\zeta};\,\rho^{q\eta})$ діє в просторі $L_q(\Omega)$. Із доведення теореми 4.3.1 випливає, що оператор A^k $(k \in N)$ здійснює ізоморфізм простору

$W_q^{2km}(\Omega\,;\,\rho^{qk\zeta};\,\rho^{qk\eta})$ на $L_q(\Omega)$. Звуження оператора A^k на інтерполяційний простір $\big(W_q^{2rm}(\Omega\,;\,\rho^{qr\zeta};\,\rho^{qr\eta}),\,W_q^{2hm}(\Omega\,;\,\rho^{qh\zeta};\,\rho^{qh\eta})\big)_{\theta,q}$ є замкненим оператором із щільною областю визначення $\Big(W_q^{2(r+k)m}(\Omega\,;\,\rho^{q(r+k)\zeta};\,\rho^{q(r+k)\eta}),\,W_q^{2(h+k)m}(\Omega\,;\,\rho^{q(h+k)\zeta};\,\rho^{q(h+k)\eta})\Big)_{\theta,q}$. Тому для $0<\nu<\infty$ визначений простір

$$\mathcal{E}_q^{\nu}\left(A,\big(W_q^{2rm}(\cdot),\,W_q^{2hm}(\cdot)\big)_{\theta,q}\right)=\Big\{u\in\mathcal{C}^{\infty}(A)\colon$$

$$\|u\|^q_{\mathcal{E}_q^{\nu}\left(A,\left(W_q^{2rm}(\cdot),\,W_q^{2hm}(\cdot)\right)_{\theta,q}\right)}=\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\left\|(A/\nu)^k u\right\|^q_{\left(W_q^{2rm}(\cdot),\,W_q^{2hm}(\cdot)\right)_{\theta,q}}<\infty\Big\}.$$

Нехай $s=(1-\theta)2rm+\theta 2hm$, $r\neq h$, $\tau=(1-\theta)q\,r\,\eta+\theta q\,h\,\zeta$ і $\dfrac{\mu-\tau}{sq}=\dfrac{\zeta-\eta}{2m}$. Тоді згідно з [86, теорема 3.4.2] виконується така рівність

$$\big(W_q^{2rm}(\Omega\,;\,\rho^{qr\zeta};\,\rho^{qr\eta}),\,W_q^{2hm}(\Omega\,;\,\rho^{qh\zeta};\,\rho^{qh\eta})\big)_{\theta,q}=B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau}).$$

Таким чином, для чисел $s\geq 0$, $\nu>0$, $1<q<\infty$, $\tau\geq\mu+sq$ визначено інтерполяційну шкалу просторів $\mathcal{E}_q^{\nu}\left(A,B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})\right)$. Норма простору $\mathcal{E}_q^{\nu}\left(A,B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})\right)$ визначається рівністю

$$\|u\|_{\mathcal{E}_q^{\nu}\left(A,B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})\right)}=\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\|(A/\nu)^k u\|^q_{B^s_{p,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})}\right)^{1/q}$$

і еквівалентна нормі

$$\|u\|^*_{\mathcal{E}_q^{\nu}\left(A,B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})\right)}=\left(\int_0^{\infty}\left[t^{-\theta}K(t,u;W_q^{2rm}(\cdot),W_q^{2hm}(\cdot))\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q},$$

де $K(t,u;W_q^{2rm}(\cdot),W_q^{2hm}(\cdot))=\inf\limits_{u=u^0+u^1}\Big(\|u^0\|_{W_q^{2rm}(\cdot)}+t\,\|u^1\|_{W_q^{2hm}(\cdot)}\Big)$, $u^0\in W_q^{2rm}(\Omega\,;\,\rho^{qr\zeta};\,\rho^{qr\eta})$, $u^1\in W_q^{2hm}(\Omega\,;\,\rho^{qh\zeta};\,\rho^{qh\eta})$.

Для $0\leq s_1<s_2$ і довільного $\varepsilon>0$ виконуються неперервні вкладення

$$\mathcal{E}_q^{\nu}\left(A,B^{s_2}_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})\right)\subset\mathcal{E}_q^{\nu}\left(A,B^{s_1}_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})\right),$$

$$\mathcal{E}_q^{\nu}\left(A,B^{s}_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})\right)\subset\mathcal{E}_q^{\nu+\varepsilon}\left(A,B^{s}_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^{\mu};\,\rho^{\tau})\right).$$

Простір $\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right)$ інваріантний відносно оператора A^k і для всіх $u \in \mathcal{E}_q^\nu\left(A, B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right)$ виконується нерівність

$$\|A^k u\|_{\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right)} \le \nu^k \|u\|_{\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right)}.$$

Відзначимо також, що згідно з [86, теорема 6.6.2], оператор A має точковий спектр, що складається із ізольованих власних значень $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ скінченної алгебраїчної кратності, причому підпростори кореневих (власних і приєднаних) векторів не залежать від q.

Теорема 4.4.2. *Нехай оператор A із означення 4.3.1 з областю визначення $W_q^{2m}(\Omega\,;\,\rho^{q\zeta};\,\rho^{q\eta})$ діє в просторі $L_q(\Omega)$, причому $\eta > 0$ і $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ для деякого $a \ge 0$. Тоді для $s \ge 0$, $\nu > 0$, $1 < q < \infty$, $\tau > \mu + sq$ і $0 < \theta < 1$ виконуються рівності*

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right) = \operatorname{span}\Big\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A) : |\lambda_j| < \min\left(\nu,\, \nu^{(s/(2m\theta)+1)^{-1}}\right)\Big\}, \quad (4.62)$$

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right) = \Big\{u : u \in S_{\rho(t)}(\Omega), \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k u\right\|^q_{B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)}\right)^{1/q} < \infty\Big\}. \quad (4.63)$$

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 3.1.4 виконується така рівність

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right) = \left(\mathcal{E}_{q_0}^\nu\left(A, W_q^{2rm}(\cdot)\right), \mathcal{E}_{q_1}^\nu\left(A, W_q^{2hm}(\cdot)\right)\right)_{\theta,q}, \quad (4.64)$$

де $s = (1-\theta)2rm + \theta 2hm$, $r \ne h$, $\tau = (1-\theta)q\,r\,\eta + \theta q\,h\,\zeta$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$ і $\dfrac{\mu-\tau}{sq} = \dfrac{\zeta-\eta}{2m}$. Із рівності (4.64) при $r = 0$ маємо

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B^s_{q,q}(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right) = \left(\mathcal{E}_{q_0}^\nu\left(A, L_q(\Omega)\right), \mathcal{E}_{q_1}^\nu\left(A, W_q^{2hm}(\cdot)\right)\right)_{\theta,q},$$

де $s = \theta 2hm$ і $\tau = \theta p\,h\,\zeta$.

З рівності (2.7) для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(A, W_q^{2km}(\Omega\,;\,\rho^{qk\zeta};\,\rho^{qk\eta})\right) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A):\ |\lambda_j|^{k+1} < \nu\right\}.$$

В силу скінченновимірності кореневих підпросторів $\mathcal{R}_{\lambda_j}(A)$ простори $\mathcal{E}_q^\nu\left(A, W_q^{2km}(\Omega\,;\,\rho^{qk\zeta};\,\rho^{qk\eta})\right)$ також скінченновимірні. Тому отримуємо

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B_{q,q}^s(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right) = \mathcal{E}_{q_0}^\nu\left(A, L_q(\Omega)\right)\bigcap \mathcal{E}_{q_1}^\nu\left(A, W_q^{2hm}(\cdot)\right)$$

$$= \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A):\ |\lambda_j| < \nu\right\}\bigcap \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A):\ |\lambda_j|^{h+1} < \nu\right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(A):\ |\lambda_j| < \min\left(\nu, \nu^{1/(h+1)}\right)\right\},$$

що й доводить рівність (4.62).

Рівність (4.63) випливає з рівності $\mathcal{C}^\infty(A) = S_{\rho(t)}(\Omega)$ та означення простору $\mathcal{E}_q^\nu\left(A, B_{q,q}^s(\Omega\,;\,\rho^\mu;\,\rho^\tau)\right)$. Теорема доведена.

Нехай A — оператор із означення 4.3.4, що діє в просторі $L_2(\Omega)$. Згідно з [86, теорема 7.6.6/1], його замикання $\bar{A}$ є обмежений знизу оператор з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності. Крім того, $\mathcal{C}^k(\bar{A}) = W_2^{2k}\left(\Omega, \sigma^{2k}\right)$, де

$$W_2^{2k}(\Omega;\,\sigma^{2k}) \;=\; \Bigg\{u \in L_2(\Omega):$$

$$\|u\|^2_{W_2^{2k}(\Omega;\,\sigma^{2k})} = \sum_{j=0}^{2k}\int_\Omega \sigma^{2k}(t)\,|u^{(j)}(t)|^2\,dt < \infty\Bigg\}.$$

Звуження оператора $\bar{A}^k$ на інтерполяційний простір $\left(W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}),\, W_2^{2h}(\Omega;\,\sigma^{2h})\right)_{\theta,q}$ є замкненим оператором із щільною областю визначення $\left(W_2^{2(r+k)}(\Omega\,;\,\sigma^{2(r+k)}),\, W_2^{2(h+k)}(\Omega\,;\,\sigma^{2(h+k)})\right)_{\theta,q}$. Тому для $0 < \nu < \infty$ і $1 \le q < \infty$ визначений простір

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(\bar{A}, \left(W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}),\, W_2^{2h}(\Omega;\,\sigma^{2h})\right)_{\theta,q}\right) = \Bigg\{u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{A}):$$

$$\|u\|^q_{\mathcal{E}_q^\nu\left(\bar{A},\left(W_2^{2r}(\cdot),\,W_2^{2h}(\cdot)\right)_{\theta,q}\right)} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\left\|(\bar{A}/\nu)^k u\right\|^q_{\left(W_2^{2r}(\cdot),\,W_2^{2h}(\cdot)\right)_{\theta,q}} < \infty\Bigg\}.$$

Теорема 4.4.3. *Нехай* $\bar{A}$ *— замикання в* $L_2(\Omega)$ *оператора* A *із означення 4.3.4. Тоді для* $\nu > 0$, $1 \le q < \infty$, $r \ne h$ *і* $0 < \theta < 1$ *виконуються рівності*

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(\bar{A}, \left(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2h}(\Omega;\, \sigma^{2h})\right)_{\theta,q}\right) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A}) : |\lambda_j| < \min\left(\nu^{\frac{1}{r+1}},\, \nu^{\frac{1}{h+1}}\right)\right\}, \quad (4.65)$$

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(\bar{A}, \left(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2h}(\Omega;\, \sigma^{2h})\right)_{\theta,q}\right) = \left\{u : u \in C^\infty(\bar{\Omega}),\right.$$
$$\left.\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(\bar{A}/\nu)^k u\right\|^q_{\left(W_2^{2r}(\Omega;\,\sigma^{2r}),\, W_2^{2h}(\Omega;\,\sigma^{2h})\right)_{\theta,q}}\right)^{1/q} < \infty\right\}. \quad (4.66)$$

Д о в е д е н н я. Застосовуючи теорему 3.1.4, маємо

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(\bar{A}, \left(W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r}),\, W_2^{2h}(\Omega;\, \sigma^{2h})\right)_{\theta,q}\right)$$
$$= \left(\mathcal{E}_{q_0}^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2r}(\Omega;\, \sigma^{2r})\right), \mathcal{E}_{q_1}^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2h}(\Omega;\, \sigma^{2h})\right)\right)_{\theta,q},$$

де $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$. З рівності (2.7) для довільного $k \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2k}(\Omega;\, \sigma^{2k})\right) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A}) :\, |\lambda_j|^{k+1} < \nu\right\}.$$

Оскільки кореневі підпростори $\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A})$ оператора $\bar{A}$ скінченновимірні, то простори $\mathcal{E}_q^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2k}(\Omega;\, \sigma^{2k})\right)$ також скінченновимірні. Крім того, згідно з [86, теорема 1.6.2], підпростір $\mathcal{E}_{q_0}^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2r}(\cdot)\right) \bigcap \mathcal{E}_{q_1}^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2h}(\cdot)\right)$ щільний в просторі $\left(\mathcal{E}_{q_0}^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2r}(\cdot)\right), \mathcal{E}_{q_1}^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2h}(\cdot)\right)\right)_{\theta,q}$. Тому

$$\mathcal{E}_q^\nu\left(\bar{A}, \left(W_2^{2r}(\cdot),\, W_2^{2h}(\cdot)\right)_{\theta,q}\right) = \mathcal{E}_{q_0}^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2r}(\cdot)\right) \bigcap \mathcal{E}_{q_1}^\nu\left(\bar{A}, W_2^{2h}(\cdot)\right)$$
$$= \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A}) :\, |\lambda_j|^{r+1} < \nu\right\} \bigcap \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A}) :\, |\lambda_j|^{h+1} < \nu\right\}$$
$$= \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A}) :\, |\lambda_j| < \min\left(\nu^{\frac{1}{r+1}},\, \nu^{\frac{1}{h+1}}\right)\right\},$$

що й доводить рівність (4.65).

Рівність (4.63) випливає з рівності $\mathcal{C}^\infty(\bar{A}) = C^\infty(\bar{\Omega})$ та означення простору $\mathcal{E}_q^\nu\left(\bar{A}, \left(W_2^{2r}(\cdot), W_2^{2h}(\cdot)\right)_{\theta,q}\right)$. Теорема доведена.

4.5. Апроксимаційні простори, асоційовані з еліптичними операторами

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞, набір операторів $L, \{B_j\}_{j=1}^m$ регулярно еліптичний в сенсі означення 4.1.5. У комплексному просторі $L_q(\Omega)$ $(1 < q < \infty)$ розглядаємо замкнений лінійний оператор

$$Au = Lu = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(\xi) D^\alpha u, \quad a_\alpha(\xi) \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{C}^1(A) = \left\{u \in W_q^{2m}(\Omega)\colon B_j u|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1, \dots, m\right\}.$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau \le \infty\}$ або $\{0 \le s < \infty, \tau = \infty\}$ і $1 < q < \infty$ позначимо через $B_{q,\tau}^s(\Omega)$ класичний простір Бєсова, який визначається як звуження простору $B_{q,\tau}^s(\mathbb{R})$ на Ω, з нормою

$$\|u\|_{B_{q,\tau}^s(\Omega)} = \inf_{v|_\Omega = u, v \in B_{q,\tau}^s(\mathbb{R})} \|v\|_{B_{q,\tau}^s(\mathbb{R})}.$$

Визначимо також простір

$$B_{q,\tau,\{B_j\}}^s(\Omega) = \left\{u \in B_{q,\tau}^s(\Omega)\colon B_j A^k u\,|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1, \dots, m,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Теорема 4.5.1. *Виконується такий ізоморфізм*

$$\mathcal{B}_{q,\tau}^s(A) = B_{q,\tau,\{B_j\}}^s(\Omega). \tag{4.67}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо простір

$$\mathcal{E}_q^\nu(D) = \left\{\, u \in C^\infty(\bar{\Omega})\colon D^\alpha u \in L_q(\Omega),\ |\alpha| = k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

з нормою

$$\|u\|_{\mathcal{E}_q^\nu(D)} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{|\alpha|=k}\nu^{-qk}\|\,D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)}\Big)^{1/q}, \quad \nu>0.$$

Покажемо, що об'єднання $\mathcal{E}_q(D)=\bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}_q^\nu(D)$ співпадає з простором всіх цілих аналітичних функцій експоненціального типу, звуження яких на Ω належить $L_q(\Omega)$. Простір $\mathcal{E}_q(D)$ наділимо квазінормою

$$|u|_{\mathcal{E}_q(D)} := \|u\|_{L_q(\Omega)} + \inf\big\{\nu>0\colon u\in\mathcal{E}_q^\nu(D)\big\}.$$

Для спрощення, покладемо $0\in\Omega$. Якщо $l>n/q$ і $u\in\mathcal{E}_q^\nu(D)$, то з теореми вкладення Соболєва маємо

$$\sup_{\xi\in\Omega}|D^\alpha u(\xi)| \le c\,\max\big\{1,\nu,\dots,\nu^l\big\}\nu^k\|u\|_{\mathcal{E}_q^\nu(D)} \le c_0\nu^k, \tag{4.68}$$

де $|\alpha|=k\in\mathbb{N}_0$ і постійні c, c_0 не залежать від k. Звідси випливає, що

$$|u(\xi+i\eta)| \le \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{|\alpha|=k}\big|D^\alpha u(\xi)\big|\frac{|\eta|^k}{k!} \le c_1 e^{\nu|\eta|} \tag{4.69}$$

для всіх $\xi\in\Omega$ і $\eta\in\mathbb{R}^n$, де постійна c_1 не залежить від $k\in\mathbb{N}_0$. Отже, u має ціле аналітичне розширення експоненціального типу на $\mathbb{C}^n$.

Нехай ціла функція u задовольняє (4.69). Тоді виконується нерівність $|D^\alpha u(\xi)|\le c_2(2n\nu)^k e^{\nu|\xi|}$ для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$ і $|\alpha|=k\in\mathbb{N}_0$. В силу обмеженості Ω маємо

$$\sup_{\xi\in\Omega}|D^\alpha u(\xi)| \le c_3(2n\nu)^k \quad \text{і} \quad \sum_{|\alpha|=k}\|\,D^\alpha u\|_{L_q(\Omega)} \le c_2(2n^2\nu)^k.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{|\alpha|=k}(4n^2\nu)^{-qk}\|\,D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)} \le \frac{2^q}{2^q-1}\sup_{k\in\mathbb{N}_0}\frac{\sum\limits_{|\alpha|=k}\|\,D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)}}{(2n^2\nu)^{qk}}, \tag{4.70}$$

з якої випливає, що $u\in\mathcal{E}_q^{4n^2\nu}(D)$, а, отже, $u\in\mathcal{E}_q(D)$.

Використовуючи нерівності (4.68), (4.70) і теорему Пелі-Вінера, отримуємо еквівалентність квазінорм

$$|u|_{\mathcal{E}_q(D)} \sim \inf_{v|_\Omega = u,\, v \in L_q(\mathbb{R}^n)} \Big\{ \|v\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} + \sup_{\zeta \in \operatorname{supp} Fv} |\zeta| \Big\},$$

де $\operatorname{supp} Fv$ позначає носій перетворення Фур'є Fv функції $v \in L_q(\mathbb{R}^n)$.

Застосовуючи [86, теорема 4.2.2], [3, теорема 7.1.7], класичні нерівності Бернштейна і Джексона [3, с. 228], отримуємо, що для будь-якого $l \in \mathbb{N}$ існує постійна c_l, така, що

$$\|u\|_{W_q^l(\Omega)}^{1/(l+1)} \le c_l\, |u|_{\mathcal{E}_q(D)}^{1-1/(l+1)}\, \|u\|_{L_q(\Omega)}^{1/(l+1)}, \quad u \in \mathcal{E}_q(D), \tag{4.71}$$

$$K\big(t, u; \mathcal{E}_q(D), L_q(\Omega)\big) \le c_l\, t^{1/(l+1)} \|u\|_{W_q^l(\Omega)}^{1/(l+1)}, \quad u \in W_q^l(\Omega). \tag{4.72}$$

Визначимо простір

$$\mathcal{B}_{q,\tau}^s(D) = \Big\{ u \in L_q(\Omega) : |u|_{\mathcal{B}_{q,\tau}^s(D)} = \Big(\int_0^\infty \big(t^s E_q(t,u)\big)^\tau \frac{dt}{t} \Big)^{1/\tau} < \infty \Big\},$$

де $E_q(t,u) = \inf\big\{ \|u - u^0\|_{L_q(\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{E}_q(D),\ |u^0|_{\mathcal{E}_q(D)} \le t \big\}$. Використовуючи нерівності (4.71), (4.72) і відомі теореми [3, теореми 3.11.5, 3.11.6, 7.1.7], [86, теорема 2.4.2/2], отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{q,\tau}^s(D) &= \Big(\big(\mathcal{E}_q(D),\, L_q(\Omega)\big)_{1/(s+1),\tau(s+1)} \Big)^{s+1} \\ &= \big(L_q(\Omega),\, W_q^l(\Omega)\big)_{s/l,\tau} = B_{q,\tau}^s(\Omega). \end{aligned} \tag{4.73}$$

Рівність (4.67) випливає тепер з (4.13) і (4.73). Теорема доведена.

Теорема 4.5.2. *Виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{B_{q,\tau}^s(\Omega)} \le c_{s,\tau}\, |u|_{\mathcal{R}(A)}^s \|u\|_{L_q(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{R}(A), \tag{4.74}$$

$$t^s E(t, u; \mathcal{R}(A), L_q(\Omega)) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \|u\|_{B_{q,\tau}^s(\Omega)}, u \in B_{q,\tau,\{B_j\}}^s(\Omega), \tag{4.75}$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.3.1,

$$E(t, u; \mathcal{R}(A), L_q(\Omega)) = \inf\big\{ \|u - u^0\|_{L_q(\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{R}(A), |u^0|_{\mathcal{R}(A)} \le t \big\}$$

для всіх $u \in L_q(\Omega)$.

Зокрема, для всіх $u \in B^s_{q,\tau,\{B_j\}}(\Omega)$ *маємо*

$$\inf\left\{\|u-u^0\|_{L_q(\Omega)}\colon u^0 \in \mathcal{R}^\nu(A)\right\} \le \nu^{-s}2^{s+1}C_{s,\tau}\,\|u\|_{B^s_{q,\tau}(\Omega)}, \qquad (4.76)$$

де $\mathcal{R}^\nu(A)$ *— комплексна лінійна оболонка кореневих підпросторів* $\{\mathcal{R}(\lambda_j)\colon |\lambda_j| < \nu\}$ *оператора* A.

Д о в е д е н н я. Застосовуючи теорему 2.3.1, рівності (2.76) і (4.67), отримуємо потрібні нерівності (4.74) і (4.75). Оцінка (4.76) безпосередньо випливає з (2.79). Теорема доведена.

На компактному многовиді, що має форму границі $\partial\Omega$ обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класу C^∞, розглянемо регулярно еліптичний оператор A, який є замиканням в $L_2(\partial\Omega)$ симетричного оператора L, що заданий формулою (4.18) і має область визначення $\mathcal{C}^1(L) = C^\infty(\partial\Omega)$.

В силу теореми 4.1.3 для $0 < \nu < \infty$ визначений простір

$$\mathcal{E}^\nu_2(A) = \left\{u \in C^\infty(\partial\Omega)\colon \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\left\|(A/\nu)^k u\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right)^{1/2} < \infty\right\}.$$

На об'єднанні $\mathcal{E}_2(A) = \bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}^\nu_2(A)$ визначимо квазінорму

$$|u|_{\mathcal{E}_2(A)} = \|u\|_{L_2(\partial\Omega)} + \inf\left\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{E}^\nu_2(A)\right\}.$$

Для $0 < s < \infty$ визначимо простори

$$\mathcal{B}^s_{2,2}(A) = \left\{u \in L_2(\partial\Omega):\ |u|_{\mathcal{B}^s_{2,2}(A)} < \infty\right\},$$

$$|u|_{\mathcal{B}^s_{2,2}(A)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^\alpha E_2(t,u)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^\alpha E_2(t,u), & \tau = \infty, \end{cases}$$

де $E_2(t,u) = \inf\left\{\left\|u-u^0\right\|_{L_2(\partial\Omega)} : u^0 \in \mathcal{E}_2(A), \left|u^0\right|_{\mathcal{E}_2(A)} \le t\right\}$, $u \in L_2(\partial\Omega)$.

Теорема 4.5.3. *Виконується така рівність:*

$$\mathcal{B}^s_{2,2}(A) = H^s_2(\partial\Omega). \tag{4.77}$$

Д о в е д е н н я. Позначимо через $\mathcal{M}_2$ простір цілих аналітичних функцій експоненціального типу на $\mathbb{C}^{n-1}$, звуження v яких на дійсний підпростір належить $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$, із квазінормою $|v|_{\mathcal{M}_2} = \|v\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} + \sup\{|\zeta|\colon \zeta \in \operatorname{supp} F(v)\}$, де $\operatorname{supp} Fv$ означає носій образу перетворення Фур'є Fv. Застосовуючи [3, теорема 7.1.7] і класичні нерівності Бернштейна і Джексона [3, §7.2], для будь-якого $r \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$\begin{aligned} &\|v\|^{1/(r+1)}_{W^r_2(\mathbb{R}^{n-1})} \le c_r\, |v|^{1-1/(r+1)}_{\mathcal{M}_2}\, \|v\|^{1/(r+1)}_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}, \quad v \in \mathcal{M}_2, \\ &K\big(t, v;\, \mathcal{M}_2, L_2(\mathbb{R}^{n-1})\big) \le c'_r\, t^{1/(r+1)} \|v\|^{1/(r+1)}_{W^r_2(\mathbb{R}^{n-1})}, \quad v \in W^r_2(\mathbb{R}^{n-1}), \end{aligned} \tag{4.78}$$

де $K(t, v; \mathcal{M}_2\,, L_2(\mathbb{R}^{n-1})) = \inf\limits_{v=v^0+v^1} \big\{|v^0|_{\mathcal{M}_2} + t\|v^1\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}\big\}$, $v^0 \in \mathcal{M}_2$, $v^1 \in L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ для всіх $t > 0$.

За теоремою Пелі-Вінера (див. [160, теорема 1.7.7]) для всіх $u \in \mathcal{M}_2(\partial\Omega)$ і для всіх звужень на дійсний підпростір $v \in \mathcal{M}_2$ цілих функцій експоненціального типу, які задовольняють рівність $v\,|_{y^l(U_l)} = u \circ y^{-l}$ для кожного l, отримуємо співвідношення $\sup\{|\zeta|\colon \zeta \in \operatorname{supp} F(v)\} = \inf\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{M}^\nu_2(\partial\Omega)\}$. Отже,

$$|v|_{\mathcal{M}_2} \asymp |u|_{\mathcal{M}_2(\partial\Omega)} \tag{4.79}$$

для всіх $v \in \mathcal{M}_2$ таких, що $v\,|_{y^l(U_l)} = u \circ y^{-l}$ для кожного l. Враховуючи (4.23), а також беручи $\inf$ по звуженнях $v\,|_{y^l(U_l)} = u \circ y^{-l}$ і сумуючи по $l = 1, \ldots, N$, із першої нерівності (4.78) отримуємо

$$\|u\|_{W^r_2(\partial\Omega)} \le c''_r\, |u|^r_{\mathcal{M}_2(\partial\Omega)}\, \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}, \quad u \in \mathcal{M}_2(\partial\Omega).$$

З другого боку, із (4.31) і (4.79) випливає, що

$$
\begin{aligned}
&K(t,u;\mathcal{H}_2(\partial\Omega),L_2(\partial\Omega)) = \inf_{\substack{u=u^0+u^1\\ u^0\in\mathcal{H}_2(\partial\Omega),\,u^1\in L_2(\partial\Omega)}} \left\{|u^0|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)} + t\|u^1\|_{L_2(\partial\Omega)}\right\}\\
&\asymp \inf_{u=u^0+u^1}\left\{|u^0|_{\mathcal{M}_2(\partial\Omega)} + t\sum_{l=1}^{N}\left\|\psi_l\left(u^1\circ y^{-l}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}\right\}\\
&\le N\inf_{v=v^0+v^1}\left\{|v^0|_{\mathcal{M}_2} + t\max_l\left\|v^1\,|_{y^l(U_l)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}\right\}\\
&\le N\inf_{v=v^0+v^1}\left\{|v^0|_{\mathcal{M}_2} + t\left\|v^1\right\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}\right\}\\
&= N\cdot K(t,v;\mathcal{M}_2\,,L_2(\mathbb{R}^{n-1}))
\end{aligned}
$$

для всіх $v^\imath\in\mathcal{M}_2$ таких, що $v^\imath\,|_{y^l(U_l)}= u^\imath\circ y^{-l}$ $(\imath=0,1)$ для кожного l. Тепер із другої нерівності (4.78) отримуємо

$$
K\big(t,u;\,\mathcal{H}_2(\partial\Omega),L_2(\partial\Omega)\big)^{r+1}\le c_r'''\,t\|u\|_{W_2^r(\partial\Omega)},\quad u\in W_2^r(\partial\Omega).
$$

Отримані вище нерівності можна переписати у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\|u\|_{W_2^r(\partial\Omega)}^{1/(r+1)}\le\tilde{c}_r\,|u|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)}^{1-1/(r+1)}\,\|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^{1/(r+1)},\quad u\in\mathcal{H}_2(\partial\Omega),\\
&K\big(t,u;\,\mathcal{H}_2(\partial\Omega),L_2(\partial\Omega)\big)\le\tilde{c}_r'\,t^{1/(r+1)}\|u\|_{W_2^r(\partial\Omega)}^{1/(r+1)},\quad u\in W_2^r(\partial\Omega).
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

Далі розглянемо допоміжний простір вигляду

$$
\mathcal{B}_{2,2}^s(\partial\Omega)=\left\{u\in L_2(\partial\Omega):|u|_{\mathcal{B}_{2,2}^s(\partial\Omega)}=\Big(\int_0^\infty\big(t^sE(t,u;\partial\Omega)\big)^2\frac{dt}{t}\Big)^{1/2}<\infty\right\},
$$

де $E(t,u;\partial\Omega)\;=\;\inf\left\{\|u-u^0\|_{L_2(\partial\Omega)}\colon u^0\in\mathcal{H}_2(\partial\Omega),\;|u^0|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)}\le t\right\}$. Згідно з [3, теорема 7.1.7] виконується ізоморфізм

$$
\mathcal{B}_{2,2}^s(\partial\Omega)=\Big[\big(\mathcal{H}_2(\partial\Omega),L_2(\partial\Omega)\big)_{1/(s+1),2(s+1)}\Big]^{s+1}.
$$

Застосовуючи теорему про реітерацію [3, теорема 3.11.5] і теорему про степені [3, теорема 3.11.6] з урахуванням нерівностей (4.80), отримуємо

$$
\Big[\big(\mathcal{H}_2(\partial\Omega),L_2(\partial\Omega)\big)_{1/(s+1),2(s+1)}\Big]^{s+1}=\big(L_2(\partial\Omega),W_2^r(\partial\Omega)\big)_{s/r,2}.
$$

Згідно з [173, теорема 7.7] з точністю до еквівалентності норм маємо

$$\left[W_2^r(\partial\Omega), L_2(\partial\Omega)\right]_{1-s/r} = H_2^s(\partial\Omega),$$

де зліва є інтерполяційний простір, який визначається як область визначення оператора $A^{s/r}$ [173, означення 2.1]. Теорема 1.18.10 [86] дає рівність

$$\left[W_2^r(\partial\Omega), L_2(\partial\Omega)\right]_{1-s/r} = \left(W_2^r(\partial\Omega), L_2(\partial\Omega)\right)_{1-s/r,2}.$$

В результаті, отримуємо

$$\mathcal{B}_{2,2}^s(\partial\Omega) = H_2^s(\partial\Omega). \tag{4.81}$$

Використовуючи (4.81), рівність $\mathcal{E}_2(A) = \mathcal{H}_2(\partial\Omega)$ і означення простору $\mathcal{B}_{2,2}^s(A)$, отримуємо потрібну нам рівність (4.77). Теорема доведена.

Теорема 4.5.4. *Виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)} \le c_{s,\tau}\, |u|_{\mathcal{R}(A)}^s \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}, \quad u \in \mathcal{R}(A), \tag{4.82}$$

$$t^s E(t, u; \mathcal{R}(A), L_2(\partial\Omega)) \le 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \|u\|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)}, u \in \mathcal{H}_2(\partial\Omega), \tag{4.83}$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.3.1,

$$E(t, u; \mathcal{R}(A), L_2(\partial\Omega)) = \inf\left\{\|u - u^0\|_{L_2(\partial\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{R}(A), |u^0|_{\mathcal{R}(A)} \le t\right\}$$

для всіх $u \in L_2(\partial\Omega)$.

Зокрема, для всіх $u \in \mathcal{H}_2(\partial\Omega)$ маємо

$$\inf\left\{\|u - u^0\|_{L_2(\partial\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{R}^\nu(A)\right\} \le \nu^{-s} 2^{s+1} C_{s,\tau}\, \|u\|_{\mathcal{H}_2(\partial\Omega)}, \tag{4.84}$$

де $\mathcal{R}^\nu(A)$ — комплексна лінійна оболонка кореневих підпросторів $\{\mathcal{R}(\lambda_j) \colon |\lambda_j| < \nu\}$ оператора A.

Д о в е д е н н я. Застосовуючи теорему 2.3.1, рівності (2.76) і (4.77), отримуємо потрібні нерівності (4.82) і (4.83). Оцінка (4.84) безпосередньо випливає з (2.79). Теорема доведена.

Нехай тепер оператор A, заданий рівністю (4.37), з областю визначення $W_q^{2m}(\Omega\,;\,\rho^{q\zeta};\,\rho^{q\eta})$ діє в просторі $L_q(\Omega)$, де Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$. Оператор A є замкнений в $L_q(\Omega)$ (див. [86, теорема 6.6.2]). Спектр оператора A складається з ізольованих власних значень $\{\lambda_j \in \mathbb{C}\colon j \in \mathbb{N}\}$ скінченної алгебраїчної кратності, його кореневі вектори належать $S_{\rho(t)}(\Omega)$, а їх лінійна оболонка щільна в $S_{\rho(t)}(\Omega)$ і, як наслідок, щільна в $L_q(\Omega)$.

У просторі Бєсова $B^s_{q,\tau}(\Omega)$ розглянемо підпростір, асоційований з функцією $\rho(t)$,

$$B^s_{q,\tau,\rho(t)}(\Omega) = \Big\{u \in B^s_{q,\tau}(\Omega)\colon \sup_{t\in\Omega} \rho^l(t)|D^\alpha u(t)| < \infty \text{ для всіх } \alpha \text{ і } l \in \mathbb{N}_0\Big\}.$$

Теорема 4.5.5. *Виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{B^s_{q,\tau}(\Omega)} \le c_{s,\tau}\,|u|^s_{\mathcal{R}(A)}\|u\|_{L_q(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{R}(A), \tag{4.85}$$

$$t^s E(t,u;\mathcal{R}(A),L_q(\Omega)) \le 2^{s+1}C_{s,\tau}\,\|u\|_{B^s_{q,\tau}(\Omega)}, u \in B^s_{q,\tau,\{B_j\}}(\Omega), \tag{4.86}$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.3.1,

$$E(t,u;\mathcal{R}(A),L_q(\Omega)) = \inf\big\{\|u-u^0\|_{L_q(\Omega)}\colon u^0 \in \mathcal{R}(A), |u^0|_{\mathcal{R}(A)} \le t\big\}$$

для всіх $u \in L_q(\Omega)$.

Зокрема, для всіх $u \in B^s_{q,\tau,\rho(t)}(\Omega)$ маємо

$$\inf\big\{\|u-u^0\|_{L_q(\Omega)}\colon u^0 \in \mathcal{R}^\nu(A)\big\} \le \nu^{-s}2^{s+1}C_{s,\tau}\,\|u\|_{B^s_{q,\tau}(\Omega)}, \tag{4.87}$$

де $\mathcal{R}^\nu(A)$ — комплексна лінійна оболонка кореневих підпросторів $\{\mathcal{R}(\lambda_j)\colon |\lambda_j| < \nu\}$ оператора A.

Д о в е д е н н я. Спочатку встановимо таку рівність:

$$\mathcal{E}_q(A) = \Big\{u \in \mathcal{E}_q(D)\colon \sup_{t\in\Omega} \rho^l(t)|D^\alpha u(t)| < \infty \text{ для всіх } \alpha \text{ і } l \in \mathbb{N}_0\Big\}. \tag{4.88}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\|A^k u\|^q_{L_q(\Omega)} &\le \nu^{kq}\|u\|^q_{L_q(\Omega)}\\ &\le \nu^{2kq}\Big(\sum_{|\alpha|=k}\nu^{-kq}\|D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)}+\nu^{-kq}\|u\|^q_{L_q(\Omega)}\Big)\end{aligned}$$

для всіх $u\in\mathcal{E}^\nu_q(A)$, то маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\nu^{-2kq}\|A^k u\|^q_{L_q(\Omega)}\le\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\left(\sum_{|\alpha|=k}\nu^{-kq}\|D^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)}+\nu^{-kq}\|u\|^q_{L_q(\Omega)}\right).$$

Замінюючи $\mu=\nu^2$ при $\nu>1$, отримуємо

$$\begin{aligned}\|u\|^q_{\mathcal{E}^\mu_q(A)} &\le \|u\|^q_{\mathcal{E}^\nu_q(D)}+\frac{\nu^q\|u\|^q_{L_q(\Omega)}}{\nu^q-1}\\ &\le \|u\|^q_{\mathcal{E}^\nu_q(D)}+\frac{\nu^q\|u\|^q_{\mathcal{E}^\nu_q(D)}}{\nu^q-1}=\left(1+\frac{\nu^q}{\nu^q-1}\right)\|u\|^q_{\mathcal{E}^\nu(D)}.\end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає вкладення

$$\big\{u\in\mathcal{E}^{\sqrt{\nu}}(D)\colon\ \sup_{t\in\Omega}\rho^l(t)|D^\alpha u(t)|<\infty\,\text{для всіх}\,\alpha\,\text{і}\,l\in\mathbb{N}_0\big\}\subset\mathcal{E}^\nu(A).$$

З іншого боку, застосовуючи [86, теорема 6.5.2/1, лема 6.2.3] для довільного $k\in\mathbb{N}$, отримуємо

$$\begin{aligned}\|A^k u\|_{L_q(\Omega)} &\ge c_k\|u\|_{W^{2mk}_q(\Omega;\rho^{q\zeta k};\rho^{q\eta k})}\\ &= c_k\Big[\int_\Omega\Big(\sum_{|\alpha|=2mk}\rho^{q\zeta k}(t)|D^\alpha u(t)|^q+\rho^{q\eta k}(t)|u(t)|^q\Big)dt\Big]^{\frac{1}{q}}\\ &\ge c_k c_\rho^k\Big[\int_\Omega\Big(\sum_{|\alpha|=2mk}|D^\alpha u(t)|^q+|u(t)|^q\Big)dt\Big]^{\frac{1}{q}}=c_k c_\rho^k\|u\|_{W^{2mk}_q(\Omega)},\end{aligned}$$

де $c_\rho > 0$ не залежить від k. Отже,

$$\|A^{k+1}u\|_{L_q(\Omega)} = \|A^k(Au)\|_{L_q(\Omega)} \geq c_k c_\rho^k \|Au\|_{W_q^{2mk}(\Omega)}$$

$$= c_k c_\rho^k \Big(\sum_{|\alpha|=2mk} \|D^\alpha Au\|^q_{L_q(\Omega)} + \|Au\|^q_{L_q(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq c_k c_\rho^k \Big(\sum_{|\alpha|=2mk} \|AD^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)} + \|Au\|^q_{L_q(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq c_k c_1 c_\rho^{k+1} \Big(\sum_{|\alpha|=2mk} \|D^\alpha u\|^q_{W_q^{2m}(\Omega)} + \|u\|^q_{W_q^{2m}(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$= c_{k+1} c_\rho^{k+1} \|u\|_{W_q^{2m(k+1)}(\Omega)},$$

де $c_{k+1} = c_k c_1 = c_1^{k+1}$ індукцією по k. Отже, для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $u \in \mathcal{C}^k(A)$, маємо $\|A^k u\|_{L_q(\Omega)} \geq c_1^k c_\rho^k \|u\|_{W_q^{2mk}(\Omega)}$, де $c_1 > 0$ не залежить від k. Це дає нерівність

$$\sum \nu^{-k} \|A^k u\|_{L_q(\Omega)} \geq \sum ((c_1 c_\rho)^{-1} \nu)^{-k} \|u\|_{W_q^k(\Omega)},$$

з якої випливає вкладення

$$\mathcal{E}_q^\nu(A) \subset \Big\{ u \in \mathcal{E}_q^{(c_1 c_\rho)^{-1}\nu}(D) \colon \sup_{t\in\Omega} \rho^l(t) |D^\alpha u(t)| < \infty \text{ для всіх } \alpha \text{ і } l \in \mathbb{N}_0 \Big\}.$$

Рівність (4.88) доведено. З урахуванням (4.41), маємо

$$\mathcal{B}^s_{q,\tau}(A, L_q(\Omega)) = B^s_{q,\tau,\rho(t)}(\Omega). \tag{4.89}$$

Застосовуючи теорему 2.3.1, рівності (2.76) і (4.89), отримуємо потрібні нерівності (4.85) і (4.86). Оцінка (4.87) безпосередньо випливає з (2.79). Теорема доведена.

Нехай $-\infty < a < b < \infty$, $\Omega = (a, b)$, $m = 1, 2, \ldots$ і $l = 0, 1, \ldots, m$. Розглянемо оператор $A_{m,l}u$ із означення 4.3.2:

$$A_{m,l}u = (-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m} \Big(p^l(\xi) \frac{d^m u}{d\xi^m} \Big).$$

Оператор $A_{m,l}$ допускає замикання $\bar{A}_{m,l}$ в $L_2(\Omega)$ з областю визначення

$$\mathcal{C}^1(\bar{A}_{m,l}) = \Big\{ u \in W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2l}) \colon \\ u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0,\ j = 0, \ldots, m-l-1 \Big\}$$

для всіх $l = 0, 1, \ldots,\, m-1$ і $\mathcal{C}^1(\bar{A}_{m,m}) = W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2m})$.

Для $\nu > 0$ визначимо простір

$$\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{m,l}) = \Big\{ u \in \mathcal{C}^{\infty}(\bar{A}_{m,l}) \colon \|u\|_{\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{m,l})} < \infty \Big\},$$

де $\|u\|_{\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{m,l})} = \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \big\| \big(\bar{A}_{m,l}/\nu\big)^k u \big\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2}$. Функція

$$|u|_{\mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l})} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \inf \big\{ \nu > 0 \colon u \in \mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{m,l}) \big\}$$

є квазінормою на підпросторі $\mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l}) = \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{m,l})$, причому

$$|u+v|_{\mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l})} \le |u|_{\mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l})} + |v|_{\mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l})},\ u, v \in \mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l}).$$

Розглянемо простір

$$\mathcal{E}_2^{\nu}(D) = \Big\{ u \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) : u^{(k)} \in L_2(\Omega),\ k \in \mathbb{N}_0 \Big\},$$

наділений нормою $\|u\|_{\mathcal{E}_2^{\nu}(D)} = \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \nu^{-2k} \|u^{(k)}\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2}$ і об'єднання $\mathcal{E}_2(D) = \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{E}_2^{\nu}(D)$. Простір $\mathcal{E}_2(D)$ наділимо квазінормою $|u|_{\mathcal{E}_2(D)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \inf \big\{ \nu > 0 \colon u \in \mathcal{E}_2^{\nu}(D) \big\}$.

Лема 4.5.1. *Виконуються такі рівності:*

$$\mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l}) = \Big\{ u \in \mathcal{E}_2(D) \colon (A_{m,l}^k u)^{(j)}(a) = (A_{m,l}^k u)^{(j)}(b) = 0, \\ j = 0, \ldots, m-l-1,\ l = 0, 1, \ldots,\, m-1,\ k \in \mathbb{N}_0 \Big\},$$

$$\mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,m}) = \mathcal{E}_2(D).$$

Д о в е д е н н я. Нехай $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$, $-1 < h \ne 2m-1$ і $\varphi_a(\xi) \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ — функція, що задовольняє умову $0 \le \varphi_a(\xi) \le 1$, тотожно рівна 1 в деякому правому півоколі точки a і нулю в деякому

лівому півоколі точки b, і $\varphi_b(\xi)$ — функція з аналогічними властивостями. Використовуючи відому нерівність Харді

$$\int_0^\infty \xi^{-\sigma}|f(\xi)|^p d\xi \le \left(\frac{p}{|\sigma-1|}\right)^p \int_0^\infty \xi^{-\sigma+p}|f'(\xi)|^p d\xi,$$

$1<p<\infty$, $\sigma\ne 1$, $f\in C_0^\infty((0,\infty))$ (див. [89, теорема 330]), та вибираючи відповідним чином $\varphi_a(\xi)$ і $\varphi_b(\xi)$, маємо

$$\int_a^b p^h p'^2|u|^2 d\xi \le (1+\varepsilon_1)\int_a^b (|p'(a)|^{h+2}|u\varphi_a|^2(\xi-a)^h$$

$$+|p'(b)|^{h+2}|u\varphi_b|^2(b-\xi)^h)d\xi + c\int_{a+\delta_1}^{b-\delta_1}|u|^2 d\xi$$

$$\le \frac{4(1+\varepsilon_2)}{(h+1)^2}\int_a^b (|(u\varphi_a)'|^2+|(u\varphi_b)'|^2)p^{h+2}d\xi + c\int_{a+\delta_2}^{b-\delta_2}|u|^2 d\xi.$$

Використовуючи нерівність

$$|(u\varphi_a)'|^2 \le (1+\varepsilon_3)|u'|^2\varphi_a^2 + c(\varepsilon_3)(\varphi_a')^2,$$

отримуємо

$$\int_a^b p^h p'^2|u|^2 d\xi \le \frac{4(1+\varepsilon_4)}{(h+1)^2}\int_a^b |u'|^2 p^{h+2}d\xi + c\int_{a+\delta_3}^{b-\delta_3}|u|^2 d\xi. \qquad (4.90)$$

Припустимо, що $0\in\rho(\bar{A}_{m,l})$, в іншому випадку замінимо $L_2(\Omega)$ на підпростір без скінченновимірного ядра оператора $\bar{A}_{m,l}$. Тоді з еквівалентності (4.46), з урахуванням оцінки (4.90), випливає існування додатних чисел c і C, таких, що

$$c^{2k}\|u^{(k)}\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|\bar{A}^k_{m,l}u\|^2_{L_2(\Omega)} \le C^{2k}\|u^{(2km)}\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Звідси маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}(C\nu^{2m})^{-2k}\|\bar{A}^k_{m,l}u\|^2_{L_2(\Omega)} \le \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\nu^{-4km}\|u^{(2km)}\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|u\|^2_{\mathcal{E}^\nu_2(D)}.$$

Тому наявні вкладення

$$\Big\{u \in \mathcal{E}_2^{\nu}(D)\colon (A_{m,l}^k u)^{(j)}(a) = (A_{m,l}^k u)^{(j)}(b) = 0,$$

$$j = 0, \ldots, m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\} \subset \mathcal{E}_2^{\tau}(\bar{A}_{m,l}) \ \text{ для } \ l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\mathcal{E}_2^{\nu}(D) \subset \mathcal{E}_2^{\tau}(\bar{A}_{m,m}),$$

де $\tau = C\nu^{2m}$.

Нехай $u \in \mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{m,s})$. Тоді

$$\|u\|^2_{\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{m,l})} \geq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(c^{-1}\nu\right)^{-2k} \|u^{(k)}\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Звідси випливають вкладення

$$\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{m,l}) \subset \Big\{u \in \mathcal{E}_2^{c^{-1}\nu}(D)\colon (A_{m,l}^k u)^{(j)}(a) = (A_{m,l}^k u)^{(j)}(b) = 0,$$

$$j = 0, \ldots, m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\} \ \text{ для } \ l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{m,m}) \subset \mathcal{E}_2^{c^{-1}\nu}(D),$$

і маємо еквівалентність квазінорм $|u|_{\mathcal{E}_2(D)} \sim |u|_{\mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l})}$ для $u \in \mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l})$. Лема доведена.

Визначимо функціонал

$$E(t,u) = \inf\Big\{\big\|u - u^0\big\|_{L_2(\Omega)} : u^0 \in \mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l}), \big|u^0\big|_{\mathcal{E}(\bar{A}_{m,l})} \leq t\Big\},\ u \in L_2(\Omega).$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty,\ 0 < \tau \leq \infty\}$ і $\{0 \leq s < \infty,\ \tau = \infty\}$ визначимо простори $\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{m,l}) = \Big\{u \in L_2(\Omega) :\ |u|_{\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{m,l})} < \infty\Big\}$,

$$|u|_{\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{m,l})} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{\infty} \left[t^{\alpha} E(t,u)\right]^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\alpha} E(t,u), & \tau = \infty. \end{cases}$$

Якщо $[\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{m,l})]^{\vartheta}$ — простір $\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{m,l})$ з квазінормою $|u|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{m,l})}$, то, згідно з теоремою 2.2.1 (i), виконується рівність

$$[\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{m,l})]^{\vartheta} = \big(\mathcal{E}_2(\bar{A}_{m,l}), L_2(\Omega)\big)_{\vartheta,g},\ \vartheta = 1/(s+1),\ \tau = g\vartheta$$

(з точністю до еквівалентності квазінорм).

Теорема 4.5.6. *Виконуються такі ізоморфізми просторів:*

$$\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{m,l}) = \Big\{u \in B^s_{2,\tau}(\Omega)\colon (A^k_{m,l}u)^{(j)}(a) = (A^k_{m,l}u)^{(j)}(b) = 0,$$

$$j = 0, \ldots, m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\} \text{ для } l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{m,m}) = B^s_{2,\tau}(\Omega),$$

де $B^s_{2,\tau}(\Omega)$ *— класичний простір Бєсова.*

Д о в е д е н н я. Перевіримо, що $\mathcal{E}_2(D)$ співпадає з простором всіх цілих аналітичних функцій експоненціального типу, звуження яких на Ω належить $L_2(\Omega)$.

Якщо $u(\xi) \in \mathcal{E}^\nu_2(D)$, то з теореми вкладення Соболєва

$$\sup_{\xi\in\Omega} |u^{(k)}(\xi)| \le c\max\{1,\nu\}\nu^k \|u\|_{\mathcal{E}^\nu_2(D)} \le c_0\nu^k,\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{4.91}$$

Звідси випливає

$$|u(\xi + i\eta)| \le \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big|u^{(k)}(\xi)\big| \frac{|\eta|^k}{k!} \le c_1 e^{\nu|\eta|} \tag{4.92}$$

для всіх $\xi \in \Omega$ і $\eta \in \mathbb{R}$, де постійна c_1 не залежить від $k \in \mathbb{N}_0$. Отже, u має ціле аналітичне розширення екпоненціального типу на $\mathbb{C}$.

Нехай функція u задовольняє (4.92). Тоді $\|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \le c_2(2\nu)^k$ і

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} (4\nu)^{-2k}\|u^{(k)}\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{4}{3}\sup_k (2\nu)^{-2k}\|u^{(k)}\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{4.93}$$

Це означає, що $u \in \mathcal{E}^{4\nu}_2(D)$, а, отже, $u \in \mathcal{E}_2(D)$.

Використовуючи нерівності (4.91), (4.93) і теорему Пелі-Вінера, отримуємо еквівалентність

$$|u|_{\mathcal{E}_2(D)} \sim \inf_{v|_\Omega = u,\, v\in L_2(\mathbb{R})} \Big\{\|v\|_{L_2(\mathbb{R})} + \sup_{\zeta\in\operatorname{supp} Fv} |\zeta|\Big\},$$

де $\operatorname{supp} Fv$ позначає носій перетворення Фур'є Fv функції $v \in L_2(\mathbb{R})$.

Застосовуючи [86, теорема 4.2.2], [3, теорема 7.1.7], класичні нерівності Бернштейна і Джексона [3, с. 228], отримуємо

$$\|u\|_{W_2^l(\Omega)}^{1/(l+1)} \le c_l\, |u|_{\mathcal{E}_2(D)}^{1-1/(l+1)}\, \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1/(l+1)}, \quad u \in \mathcal{E}_2(D), \tag{4.94}$$

$$K\big(t, u; \mathcal{E}_2(D), L_2(\Omega)\big) \le c_l\, t^{1/(l+1)} \|u\|_{W_2^l(\Omega)}^{1/(l+1)}, \quad u \in W_2^l(\Omega), \tag{4.95}$$

де $l \in \mathbb{N}$ і $K(t, u; \mathcal{E}_2(D), L_2(\Omega)) = \inf\limits_{u=u^0+u^1} \big(|u^0|_{\mathcal{E}_2(D)} + t\, \|u^1\|_{L_2(\Omega)}\big)$.

Визначимо простір

$$\mathcal{B}_{2,\tau}^s(D) := \Big\{ u \in L_2(\Omega) : |u|_{\mathcal{B}_{2,\tau}^s(D)} := \Big(\int_0^\infty \big(t^s E_2(t,u)\big)^\tau \frac{dt}{t} \Big)^{1/\tau} < \infty \Big\},$$

де $E_2(t,u) = \inf\big\{ \|u - u^0\|_{L_2(\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{E}_2(D),\ |u^0|_{\mathcal{E}_2(D)} \le t \big\}$. Використовуючи нерівності (4.94), (4.95) і [3, теореми 3.11.5, 3.11.6, 7.1.7], [86, теорема 2.4.2/2], отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{2,\tau}^s(D) &= \Big(\big(\mathcal{E}_2(D),\, L_2(\Omega)\big)_{1/(s+1),\tau(s+1)} \Big)^{s+1} \\ &= \big(L_2(\Omega),\, W_2^l(\Omega)\big)_{s/l,\tau} = B_{2,\tau}^s(\Omega). \end{aligned} \tag{4.96}$$

Залишилось використати лему 4.5.1. Теорема доведена.

Теорема 4.5.7. *Виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{B_{2,\tau}^s(\Omega)} \le c_{s,\tau} |u|_{\mathcal{R}(\bar{A}_{m,l})}^s \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{R}(\bar{A}_{m,l}), \tag{4.97}$$

$$t^s E(t, u; \mathcal{R}(\bar{A}_{m,l}), L_2(\Omega)) \le 2^{s+1} C_{s,\tau} \|u\|_{B_{2,\tau}^s(\Omega)},\ u \in \mathcal{B}_{2,\tau}^s(\bar{A}_{m,l}), \tag{4.98}$$

де постійні $c_{s,\tau}$ і $C_{s,\tau}$ з теореми 2.3.1,

$$E(t, u; \mathcal{R}(\bar{A}_{m,l}), L_2(\Omega)) = \inf\Big\{ \|u - u^0\|_{L_2(\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{R}(\bar{A}_{m,l}), |u^0|_{\mathcal{R}(\bar{A}_{m,l})} \le t \Big\}$$

для всіх $u \in L_2(\Omega)$.

Зокрема, для всіх $u \in \mathcal{B}_{2,\tau}^s\big(\bar{A}_{m,l}\big)$ маємо

$$\inf\big\{ \|u - u^0\|_{L_2(\Omega)} \colon u^0 \in \mathcal{R}^\nu(\bar{A}_{m,l}) \big\} \le \nu^{-s} 2^{s+1} C_{s,\tau}\, |u|_{B_{2,\tau}^s(\Omega)}, \tag{4.99}$$

де $\mathcal{R}^\nu(\bar{A}_{m,l})$ — комплексна лінійна оболонка кореневих підпросторів $\big\{ \mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{A}_{m,l}) \colon |\lambda_j| < \nu \big\}$ оператора $\bar{A}_{m,l}$.

Д о в е д е н н я. Застосовуючи теореми 2.3.1 і 4.5.6, з урахуванням рівності (2.76), отримуємо потрібні нерівності (4.97) і (4.98). Оцінка (4.99) безпосередньо випливає з (2.79). Теорема доведена.

Нехай $-\infty < a < b < \infty$, $\Omega = (a,\, b)$, $m = 1, 2, \ldots$ і $l = 0, 1, \ldots, m$. Розглянемо оператор $B_{m,l}u$ із означення 4.3.2:

$$B_{m,l}u = A_{m,l}u + \sum_{j=0}^{2m-1} b_j(\xi)\frac{d^j u}{d\xi^j}, \quad b_j(\xi) \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Оператор $B_{m,l}$ допускає замикання $\bar{B}_{m,l}$ в $L_2(\Omega)$ з областю визначення

$$\mathcal{C}^1(\bar{B}_{m,l}) = \Big\{u \in W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2l})\colon \\ u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0,\ j = 0, \ldots, m-l-1\Big\}$$

для всіх $l = 0, 1, \ldots,\, m-1$ і $\mathcal{C}^1(\bar{B}_{m,m}) = W_2^{2m}(\Omega;\, p^{2m})$.

Для $\nu > 0$ визначимо простір

$$\mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,l}) = \Big\{u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{B}_{m,l})\colon \|u\|_{\mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,l})} < \infty\Big\},$$

де $\|u\|_{\mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,l})} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\|\big(\bar{B}_{m,l}/\nu\big)^k u\big\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}$. Функція

$$|u|_{\mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l})} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \inf\big\{\nu > 0\colon u \in \mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,l})\big\}$$

є квазінормою на підпросторі $\mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l}) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_2^\nu(\bar{B}_{m,l})$, причому

$$|u+v|_{\mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l})} \le |u|_{\mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l})} + |v|_{\mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l})},\ u, v \in \mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l}).$$

Лема 4.5.2. *Виконуються такі рівності:*

$$\mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l}) = \Big\{u \in \mathcal{E}_2(D)\colon (B_{m,l}^k u)^{(j)}(a) = (B_{m,l}^k u)^{(j)}(b) = 0, \\ j = 0, \ldots, m-l-1,\ l = 0, 1, \ldots,\, m-1,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\},$$

$$\mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,m}) = \mathcal{E}_2(D).$$

Д о в е д е н н я. Приймемо, без обмеження загальності, що $0 \in \rho(\bar{B}_{m,l})$. В силу еквівалентності (4.47) існує таке додатне число $c_k > 0$, що

$$\|\bar{B}^k_{m,l}u\|_{L_2(\Omega)} \geq c_k\|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)},\ u \in \mathcal{C}^k(\bar{B}_{m,l}).$$

Тому

$$\|\bar{B}^{k+1}_{m,l}u\|_{L_2(\Omega)} = \|\bar{B}^k_{m,l}(\bar{B}_{m,l}u)\|_{L_2(\Omega)} \geq c_k\|(\bar{B}_{m,l}u)^{(k)}\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\geq c_k\|\bar{B}_{m,l}u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \geq c_{k+1}\|u^{(k+1)}\|_{L_2(\Omega)},$$

де $c_{k+1} = c_k c_1 = c_1^k$. Отже, для будь якого $k \in \mathbb{N}$ і всіх $u \in \mathcal{C}^k(\bar{B}_{m,l})$ маємо

$$\|\bar{B}^k_{m,l}u\|_{L_2(\Omega)} \geq c_1^k\|u^{(k)}\|_{L_2(\Omega)},\ u \in \mathcal{C}^k(\bar{B}_{m,l}),$$

де постійна c_1 не залежить від k. Із цієї нерівності випливає

$$\sum_{k=0}^{\infty}\nu^{-2k}\|\bar{B}^k_{m,l}u\|^2_{L_2(\Omega)} \geq \sum_{k=0}^{\infty}(c_1^{-1}\nu)^{-2k}\|u^{(k)}\|^2_{L_2(\Omega)},$$

а отже,

$$\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{B}_{m,l}) \subset \Big\{u \in \mathcal{E}_2^{c^{-1}\nu}(D)\colon (B^k_{m,l}u)^{(j)}(a) = (B^k_{m,l}u)^{(j)}(b) = 0,$$

$$j = 0,\ldots,m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\} \text{ для } l = 0,1,\ldots,m-1,$$

$$\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{B}_{m,m}) \subset \mathcal{E}_2^{c^{-1}\nu}(D).$$

Використовуючи рівність (2.7), для $u \in \mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{B}_{m,l})$ і $k \in \mathbb{N}$ маємо $\|\bar{B}^k_{m,l}u\|_{L_2(\Omega)} \leq \nu^k\|u\|_{L_2(\Omega)}$. Тому

$$\sum_{k=0}^{\infty}\nu^{-4k}\|\bar{B}^k_{m,l}u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\nu^{-2k}\|u^{(k)}\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Звідси випливає

$$\big\{u \in \mathcal{E}_2^{\sqrt{\nu}}(D)\colon (\bar{B}^k_{m,l}u)^{(j)}(a) = (\bar{B}^k_{m,l}u)^{(j)}(b) = 0,$$

$$j = 0,\ldots,m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\} \subset \mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{B}_{m,l}) \text{ для } l = 0,1,\ldots,m-1,$$

$$\mathcal{E}_2^{\sqrt{\nu}}(D) \subset \mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{B}_{m,m}),$$

і маємо еквівалентність квазінорм $|u|_{\mathcal{E}_2(D)} \sim |u|_{\mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l})}$ для $u \in \mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l})$. Лема доведена.

Визначимо функціонал

$$E(t,u) = \inf\left\{\left\|u-u^0\right\|_{L_2(\Omega)} : u^0 \in \mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l}), \left|u^0\right|_{\mathcal{E}(\bar{B}_{m,l})} \le t\right\},\ u \in L_2(\Omega).$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty,\ 0 < \tau \le \infty\}$ і $\{0 \le s < \infty,\ \tau = \infty\}$ визначимо простори $\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,l}) = \left\{u \in L_2(\Omega) :\ |u|_{\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,l})} < \infty\right\}$,

$$|u|_{\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,l})} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^\alpha E(t,u)\right]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & 0 < \tau < \infty, \\ \sup_{t>0} t^\alpha E(t,u), & \tau = \infty. \end{cases}$$

Якщо $[\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,l})]^\vartheta$ — простір $\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,l})$ з квазінормою $|u|^\vartheta_{\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,l})}$, то, згідно з теоремою 2.2.1 (i), виконується рівність

$$[\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,l})]^\vartheta = \left(\mathcal{E}_2(\bar{B}_{m,l}), L_2(\Omega)\right)_{\vartheta,g},\ \vartheta = 1/(s+1),\ \tau = g\vartheta$$

(з точністю до еквівалентності квазінорм).

Теорема 4.5.8. *Виконуються такі ізоморфізми просторів:*

$$\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,l}) = \Big\{u \in B^s_{2,\tau}(\Omega) \colon (B^k_{m,l}u)^{(j)}(a) = (B^k_{m,l}u)^{(j)}(b) = 0,$$
$$j = 0,\dots,m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0\Big\} \text{ для } l = 0,1,\dots,m-1,$$

$$\mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,m}) = B^s_{2,\tau}(\Omega),$$

де $B^s_{2,\tau}(\Omega)$ *— класичний простір Бесова.*

Д о в е д е н н я. Потрібні рівності випливають із (4.96) і леми 4.5.2. Теорема доведена.

Теорема 4.5.9. *Виконуються такі нерівності:*

$$\|u\|_{B^s_{2,\tau}(\Omega)} \le c_{s,\tau}|u|^s_{\mathcal{R}(\bar{B}_{m,l})}\|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{R}(\bar{B}_{m,l}), \tag{4.100}$$

$$t^s E(t,u;\mathcal{R}(\bar{B}_{m,l}), L_2(\Omega)) \le 2^{s+1}C_{s,\tau}\|u\|_{B^s_{2,\tau}(\Omega)},\ u \in \mathcal{B}^s_{2,\tau}(\bar{B}_{m,l}), \tag{4.101}$$

де постійні $c_{s,\tau}$ *і* $C_{s,\tau}$ *з теореми 2.3.1,*

$$E(t,u;\mathcal{R}(\bar{B}_{m,l}),L_2(\Omega)) = \inf\left\{\|u-u^0\|_{L_2(\Omega)}\colon u^0\in\mathcal{R}(\bar{B}_{m,l}), |u^0|_{\mathcal{R}(\bar{B}_{m,l})}\le t\right\}$$

для всіх $u\in L_2(\Omega)$.

Зокрема, для всіх $u\in\mathcal{B}^s_{2,\tau}\left(\bar{B}_{m,l}\right)$ *маємо*

$$\inf\left\{\|u-u^0\|_{L_2(\Omega)}\colon u^0\in\mathcal{R}^\nu(\bar{B}_{m,l})\right\}\le\nu^{-s}2^{s+1}C_{s,\tau}\,|u|_{B^s_{2,\tau}(\Omega)}, \quad (4.102)$$

де $\mathcal{R}^\nu(\bar{B}_{m,l})$ *— комплексна лінійна оболонка кореневих підпросторів* $\left\{\mathcal{R}_{\lambda_j}(\bar{B}_{m,l})\colon |\lambda_j|<\nu\right\}$ *оператора* $\bar{B}_{m,l}$.

Д о в е д е н н я. Застосовуючи теореми 2.3.1 і 4.5.8, з урахуванням рівності (2.76), отримуємо потрібні нерівності (4.100) і (4.101). Оцінка (4.102) безпосередньо випливає з (2.79). Теорема доведена.

Висновки до розділу 4

У даному розділі описано простори цілих векторів експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях Ω і на компактних многовидах класу C^∞. Доведено, що у випадку непорожньої резольвентної множини регулярно еліптичного оператора простір цілих векторів експоненціального типу співпадає з підпростором цілих функцій експоненціального типу, звуження яких на Ω належить простору $L_p(\Omega)$ (теорема 4.1.2). Аналогічний результат для компактних многовидів класу C^∞ отримано в теоремі 4.1.4.

Встановлено нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$. При цьому використано відомі ознаки повноти кореневих векторів компактних

операторів в гільбертовому просторі та ознаки щільності множини цілих векторів експоненціального типу оператора в банахових просторах (теореми 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3).

Описано простори цілих векторів експоненціального типу вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності) (теорема 4.3.1), звичайних вироджених еліптичних диференціальних операторів в обмеженому інтервалі (теорема 4.3.2) та вироджених еліптичних диференціальних операторів з частинними похідними в обмежених областях з нескінченно гладкою границею (теореми 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5).

Описано інтерполяційні простори векторів експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях класу C^∞ (теорема 4.4.1), вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності) (теорема 4.4.2) і узагальнених диференціальних операторів Лежандра (теорема 4.4.3).

Описано апроксимаційні простори, асоційовані з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях Ω і на компактних многовидах класу C^∞. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм таких апроксимаційних просторів (теореми 4.5.2, 4.5.4) з точними значеннями констант, що характеризують оцінки найкращих наближень функцій просторів Лебега кореневими функціями відповідних операторів.

Описано також апроксимаційні простори, асоційовані з виродженими еліптичними диференціальними операторами, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), узагальненими диференціальними операторами Лежандра (теореми 4.5.6, 4.5.8). Доведено відповідні нерівності типу Бернштейна і Джексона (теореми 4.5.5, 4.5.7, 4.5.9) з точними значеннями констант, що та-

кож дають аналітичні оцінки найкращих наближень функцій просторів Лебега кореневими функціями вказаних операторів.

Основні результати розділу 4 опубліковані у працях [20, 22, 27, 29, 31, 36, 38–40, 42, 44, 50, 52, 55, 56, 131, 133, 134, 137, 138, 145].

РОЗДІЛ 5

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ АПРОКСИМАЦІЙНИХ ПРОСТОРІВ

У даному розділі розвинемо теорію тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з наборами замкнених операторів, а також відповідні нерівності Бернштейна і Джексона з точними оцінками найкращих наближень кореневими функціями таких операторів у різних функціональних просторах.

5.1. Цілі вектори експоненціального типу на тензорних добутках банахових просторів

Нехай $\left\{\mathfrak{X}_j, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_j}\right\}_{j=1}^{J}$ — скінченний набір банахових просторів над полем $\mathbb{C}$, $\otimes_j \mathfrak{X}_j := \mathfrak{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{X}_J$ — їх тензорний добуток, на якому задаємо проективну норму

$$\|w\|_{\otimes_j \mathfrak{X}_j} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J},$$

де $\inf$ береться по всіх зображеннях елемента $w \in \otimes_j \mathfrak{X}_j$ у вигляді суми $w = \sum_{n=1}^{N} \otimes_j x_n^j$ зі скінченним N, $x_n^j \in \mathfrak{X}_j$ і $\otimes_j x_n^j = x_n^1 \otimes \ldots \otimes x_n^J \in \otimes_j \mathfrak{X}_j$. Поповнення простору $\otimes_j \mathfrak{X}_j$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j := \mathfrak{X}_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mathfrak{X}_J$. Відзначимо, що згідно з теоремою Гротендіка [93, глава III, теорема 6.4] довільний елемент поповнення $\mathfrak{X}$ має вигляд суми деякого абсолютно збіжного ряду $w = \sum_n \otimes_j x_n^j$.

На просторі $\mathfrak{X}_j$ $(j = 1, \ldots, J)$ розглядаємо необмежений замкнений лінійний оператор $A_j : \mathcal{C}^1(A_j) \subset \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_j$ із щільною областю визначення $\mathcal{C}^1(A_j)$. Для будь-яких чисел $\nu_j > 0$, $1 \le p_j \le \infty$ визначимо банахові

простори цілих векторів експоненціального типу оператора A_j

$$\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) = \left\{ x \in \mathcal{C}^\infty(A_j) \colon \|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} < \infty \right\}$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A_j/\nu_j)^k x\right\|_{\mathfrak{X}_j}^{p_j} \right)^{1/p_j}, & 1 \le p_j < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A_j/\nu_j)^k x\right\|_{\mathfrak{X}_j}, & p_j = \infty. \end{cases}$$

Побудуємо тензорний добуток

$$\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) := \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)$$

з проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)}.$$

Нехай $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$ — поповнення $\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$ у цій нормі.

Лема 5.1.1. *Для будь-яких* $0 \le \nu_j \le \gamma_j$ $(j = 1, \ldots, J)$ *і* $w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$ *виконуються вкладення*

$$\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) \subset \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j) \subset \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j. \tag{5.1}$$

Д о в е д е н н я. Перше із вкладень (5.1) випливає з нерівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\gamma_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\gamma_J}(A_J)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)}.$$

В силу нерівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J} \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\gamma_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\gamma_J}(A_J)} < \infty$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \otimes_j x_n^j$ абсолютно збіжний в просторі $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$. Оскільки простір $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$ повний, то $\sum_{n=1}^{\infty} \otimes_j x_n^j = w \in \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$, звідки отримуємо друге вкладення в (5.1). Лема доведена.

Нехай $\left\{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)\right\}$ — послідовність просторів, що відповідає неспадній послідовності додатних чисел $\{\nu_j(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, такій, що $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_j(n)=\infty$. Визначимо простір рядів вигляду

$$l_1\big[\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j);\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\big] \;=\; \Big\{w=\sum_{n=1}^{\infty}w_n\in\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j : w_n\in\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|w_n\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)}<\infty\Big\}$$

з нормою $\|w\|_{l_1}=\inf\limits_{w=\sum_n w_n}\sum_{n=1}^{\infty}\|w_n\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)}$.

Лема 5.1.2. *Якщо підпростір* $\bigcup_{\nu_j(n)>0}\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)$ *щільний в* $\mathfrak{X}_j$ *для всіх* $j=1,\ldots,J$, *то виконується ізоморфізм*

$$\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j=l_1\big[\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j);\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\big]. \tag{5.2}$$

Д о в е д е н н я. Із нерівності $\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j}\le\|w\|_{l_1}$ маємо вкладення

$$l_1\big[\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j);\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\big]\subset\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j \tag{5.3}$$

для всіх $w\in l_1\big[\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j);\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\big]$.

З іншого боку, нерівність $\|w\|_{l_1}\le\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)}$ виконується для всіх $w\in\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)$. Із означення норми простору $\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)$ випливає, що для всіх $x\in\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)$ $(j=1,\ldots,J)$ виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)}=\|x\|_{\mathfrak{X}_j}$. Тому,

$$\|w\|_{l_1}\le\lim_{n\to\infty}\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)}=\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j}$$

для всіх $w\in\bigcup_{\nu_j(n)>0}\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)$ і маємо вкладення

$$\bigcup_{\nu_j(n)>0}\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)\subset l_1\big[\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j);\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\big].$$

Із рівності $\bigcup_{\nu_j(n)>0}\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)=\tilde{\otimes}_j\bigcup_{\nu_j(n)>0}\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)$ і умови щільності $\overline{\bigcup_{\nu_j(n)>0}\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)}=\mathfrak{X}_j$ отримуємо

$$\overline{\bigcup_{\nu_j(n)>0}\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)}=\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j.$$

Таким чином,

$$\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j \subset l_1\big[\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j); \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\big]. \tag{5.4}$$

Рівність (5.2) випливає з (5.3) і (5.4). Лема доведена.

Кожному оператору A_j над простором $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$ поставимо у відповідність оператор

$$\mathcal{A}_j := I_1 \otimes \ldots \otimes A_j \otimes \ldots \otimes I_J,$$

де I_j — одиничний оператор в $\mathfrak{X}_j$. Оператор $\mathcal{A}_j$ з областю визначення

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{A}_j) = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \otimes_i x_n^i \in \tilde{\otimes}_i \mathfrak{X}_i : \ x_n^j \in \mathcal{C}^1(A_j), \ x_n^i \in \mathfrak{X}_i \text{ при } i \neq j \Big\}$$

замкнений в $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$.

Спектр необмеженого оператора A_j над простором $\mathfrak{X}_j$ позначимо через $\sigma(A_j)$, резольвенту — $R_\lambda(A_j) = (\lambda I_j - A_j)^{-1}$. Спектр необмеженого оператора $\mathcal{A}_j$ над простором $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$ позначимо $\sigma(\mathcal{A}_j)$.

Для всіх $j = 1, \ldots, J$ виконується рівність

$$\sigma(\mathcal{A}_j) = \sigma(A_j).$$

Це випливає з рівності

$$R_\lambda(\mathcal{A}_j) = I_1 \otimes \ldots \otimes R_\lambda(A_j) \otimes \ldots \otimes I_J,$$

де $R_\lambda(\mathcal{A}_j) = [\lambda(I_1 \otimes \ldots \otimes I_J) - \mathcal{A}_j]^{-1}$ — резольвента оператора $\mathcal{A}_j$ над простором $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$, визначена при $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma(\mathcal{A}_j)$.

Вкладення (5.1) із леми 5.1.1 дозволяють на $\bigcup_{\nu_j > 0} \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$ визначити індуктивну границю $\liminf_{\nu_j \to \infty} \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, так, що

$$\liminf_{\nu_j \to \infty} \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) = \liminf_{\nu_1 \to \infty} \ldots \liminf_{\nu_J \to \infty} \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j).$$

На підпросторі $\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ можна задати топологію індуктивної границі, тобто

$$\mathcal{E}_{p_j}(A_j) = \liminf_{\nu_j \to +\infty} \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j).$$

При цьому вкладення $\mathcal{E}_{p_j}(A_j) \subset \mathfrak{X}_j$ неперервне. Для спрощення записів далі індекс j опускаємо. Для послідовності додатних чисел $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, такої, що $\lim_{n\to\infty} \nu_n = \infty$, наявний топологічний ізоморфізм

$$\mathcal{E}_p(A) = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_p^{\nu_n}(A).$$

Цей факт випливає з властивостей індуктивних границь [93, глава II, § 6]. Дійсно, визначимо ін'єкцію: $f : \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{E}_p^{\nu_n}(A) \to \oplus_{\nu\in\mathbb{R}_+}\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$ і нехай

$$\varphi^* : \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{E}_p^{\nu_n}(A) \to \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_p^{\nu_n}(A),$$

$$\varphi : \oplus_{\nu\in\mathbb{R}_+}\mathcal{E}_p^{\nu}(A) \to \liminf_{\nu\to+\infty} \mathcal{E}_p^{\nu}(A)$$

— фактор-відображення. Покладемо $\psi = \varphi \cdot f \cdot (\varphi^*)^{-1}$, де $(\varphi^*)^{-1}$ — обернене відображення до φ^*. Оскільки $f(Ker(\varphi^*)) \subset Ker(\varphi)$, то відображення ψ визначене та ін'єктивне із простору $\liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_p^{\nu_n}(A)$ в $\liminf_{\nu\to+\infty} \mathcal{E}_p^{\nu}(A)$. Фактор-відображення φ і φ^* — неперервні і відкриті, f — топологічний ізоморфізм, тому ψ — топологічний ізоморфізм із $\liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_p^{\nu_n}(A)$ на свою область значень. Нехай x — довільний ненульовий елемент із $\liminf_{\nu\to+\infty} \mathcal{E}_p^{\nu}(A)$. Тоді існує таке $\nu > 0$, що відповідна проекція $x_\nu = \pi_\nu(x)$ відмінна від нуля. Крім того, існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $\nu \le n$ і $\varphi_\nu = \varphi_n \cdot \varphi_n^\nu$, де φ_n^ν — неперервне лінійне відображення $\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$ в $\mathcal{E}_p^{\nu_n}(A)$. Тому в $\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$ знайдеться елемент $x_n \ne 0$, такий, що $\varphi_n^\nu(x_\nu) = x_n$. Оскільки $\psi \cdot \varphi^* \cdot \varphi_n = \varphi_n$, то існує ненульовий елемент $x_n \in \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_p^{\nu_n}(A)$, такий, що $x_n = \pi_n(x)$ і $\psi(x_n) = x_\nu$. Отже, ψ — топологічний ізоморфізм із $\liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_p^{\nu_n}(A)$ на $\liminf_{\nu\to+\infty} \mathcal{E}_p^{\nu}(A)$.

Теорема 5.1.1. *Кожна обмежена підмножина S простору $\mathcal{E}_p(A)$ міститься і обмежена в деякому просторі $\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що перетин обмеженої множини S з кожним із підпросторів $\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$ необмежений. Тоді для $\nu > 0$ і кожної послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ знайдуться послідовності чисел $0 \le \xi_n \to \infty$

і $k_n \in \mathbb{N}_0$ такі, що $\sum\limits_{k=0}^{k_n} \left\|(A/\nu)^k x_n\right\|^p \geq \xi_n^{2p}$. З іншого боку, для будь-якого опуклого околу U в $\mathcal{E}_p(A)$ існує таке число $\delta > 0$, що $\delta S \subset U$. Окіл U визначається послідовністю куль з центром в нулі радіуса ε_s з простору $\mathcal{E}_p^s(A)$, тобто

$$U = \left\{ x = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s y_s : y_s \in \mathcal{E}_p^s(A), \|y_s\|_{\mathcal{E}_p^s} \leq \varepsilon_s, \sum_{s=1}^{m} \lambda_s = 1, \lambda_s \geq 0, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Оскільки $(x_n) \subset S$, то $\delta(x_n) \subset U$. Тому $x_n = \sum_{s=1}^{m} \lambda_{sn} y_{sn}$, де

$$y_{sn} \in \mathcal{E}_p^s(A),\ \delta\|y_{sn}\|_{\mathcal{E}_p^s} \leq \varepsilon_s,\ \sum_s \lambda_{sn} = 1,\ \lambda_{sn} \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned}
\xi_n^2 &\leq \sum_s \lambda_{sn} \left[\sum_{k=0}^{k_n} \left\|(A/\nu)^k y_{sn}\right\|^p \right]^{1/p} \\
&\leq \sum_s \lambda_{sn} \left[\sum_{k=0}^{k_n} \left(\left\|(A/s)^k y_{sn}\right\| \left(\frac{s}{\nu}\right)^k \right)^p \right]^{1/p} \\
&\leq \sum_s \lambda_{sn} \max_{k \leq k_n} \left(\frac{s}{\nu}\right)^k \left[\sum_{k=0}^{k_n} \left\|(A/s)^k y_{sn}\right\|^p \right]^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{\delta} \sum_s \lambda_{sn} \max_{k \leq k_n} \left(\frac{s}{\nu}\right)^k \varepsilon_s \leq \frac{1}{\delta} \sup_{k \leq k_n, 1 \leq s} \left[\left(\frac{s}{\nu}\right)^k \varepsilon_s \right].
\end{aligned}$$

Вибираючи ε_s так, щоб $0 \leq \varepsilon_s \leq \inf\limits_n \left[\xi_n \left(\frac{s}{\nu}\right)^{k_n} \right]$, маємо

$$\delta \xi_n^2 \leq \sup_{k \leq k_n, 1 \leq s} \left[\left(\frac{s}{\nu}\right)^k \varepsilon_s \right] \leq \xi_n,$$

або $\delta \xi_n \leq 1$, що неможливо. Теорема доведена.

Нехай $\mathcal{E}_p'(A)$ і $\mathcal{E}_p^{-\nu}(A)$ — топологічно спряжені векторні простори відповідно до $\mathcal{E}_p(A)$ і $\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$. Використовуючи відомі співвідношення двоїстості [93, глава IV, § 4] і теорему 5.1.1, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 5.1.1. *Якщо на спряжених просторах* $\mathcal{E}'_p(A)$ *і* $\mathcal{E}_p^{-\nu}(A)$ *задані їх сильні топології, або топології Маккі, то виконується топологічний ізоморфізм*

$$\mathcal{E}'_p(A) = \lim_{\nu\to+\infty} \mathrm{pr}\, \mathcal{E}_p^{-\nu}(A),$$

де в правій частині приведена локально опукла проективна границя. Зокрема, в сильній топології $\mathcal{E}'_p(A)$ *є простором Фреше.*

Якщо $\|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^{-\nu}} = \sup\limits_{\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}\le 1} |<x,\varphi>|$ — норма простору $\mathcal{E}_p^{-\nu}(A)$, $\Phi_{-\nu} : \mathcal{E}'_p(A) \ni \psi \to \varphi \in \mathcal{E}_p^{-\nu}(A)$ — проекція, то сильну топологію на $\mathcal{E}'_p(A)$ можна задати набором півнорм вигляду $q_{-\nu}(\psi) = \|\Phi_{-\nu}\psi\|_{\mathcal{E}_p^{-\nu}}$.

Теорема 5.1.2. *Простір* $\mathcal{E}_p(A)$ *інваріантний відносно оператора* A *і відповідне звуження* $A_{\mathcal{E}_p} := A|_{\mathcal{E}_p(A)}$ *є елементом алгебри* $\mathfrak{L}(\mathcal{E}_p(A))$ *лінійних неперервних відображень над* $\mathcal{E}_p(A)$.

Д о в е д е н н я. В силу нерівності $\|Ax\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \nu\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$, $x \in \mathcal{E}_p^\nu(A)$, відображення $A : \mathcal{E}_p^\nu(A) \to \mathcal{E}_p^\nu(A)$ неперервне. Оскільки наявний топологічний ізоморфізм $\mathcal{E}_p(A) = \lim\limits_{\nu\to+\infty}\mathrm{ind}\, \mathcal{E}_p^\nu(A)$, то з основної властивості індуктивних границь [93, с. 73] випливає, що $A_{\mathcal{E}_p} \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}_p(A))$. Теорема доведена.

Нехай $\mathcal{F}$ — простір Фреше, $Q = \{q\}$ — спрямований набір півнорм, що задає топологію $\mathcal{F}$. Оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{F})$ є (рівномірно) півобмежений [64, с. 504], якщо для будь-якої півнорми $q \in Q$ існує таке число $c = c(q,T) > 0$ (відповідно число $c = c(T) > 0$), що

$$q(Tx) \le cq(x) \text{ для всіх } x \in \mathcal{F}.$$

Підалгебру (рівномірно) півобмежених операторів алгебри $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$ всіх неперервних лінійних операторів над $\mathcal{F}$ позначимо через $\mathfrak{U}(\mathcal{F})$ (відповідно $\mathfrak{S}(\mathcal{F})$).

Теорема 5.1.3. *Спряжений оператор $A'_{\mathcal{E}_p}$ до оператора $A_{\mathcal{E}_p}$ відносно дуальної пари $< \mathcal{E}_p(A), \mathcal{E}'_p(A) >$ є півобмеженим оператором над простором $\mathcal{E}'_p(A)$ із сильною топологією.*

Д о в е д е н н я. Нехай $x \in \mathcal{E}_p^\nu(A)$ і $0 < \nu < \tau$. Тоді

$$\begin{aligned}
\|(A/\tau)^n x\|_{\mathcal{E}_p^\tau} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} (\nu/\tau)^{(k+n)p} \left\|(A/\nu)^{k+n} x\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq (\nu/\tau)^n \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} (\nu/\tau)^{kp} \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \|(A/\nu)^m x\|^p\right)^{1/p} \\
&= (\nu/\tau)^n \left(1 - (\nu/\tau)^p\right)^{-1/p} \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu},
\end{aligned}$$

звідки $\|(A/\tau)^n x\|_{\mathcal{E}_p^\tau} \leq \tau^n \|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Півнорми, які визначають сильну топологію простору $\mathcal{E}'_p(A)$ можна записати у вигляді $q_{-\nu}(\psi) = \sup\limits_{\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}\leq 1} |< x, \psi >|$, де $x \in \mathcal{E}_p^\nu(A)$. Для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$\begin{aligned}
q_{-\nu}(A'^n_{\mathcal{E}_p}\psi) &= \tau^n \sup_{\tau^n\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}\leq 1} |< A^n x, \psi >| \\
&\leq \tau^n \sup_{\|y\|_{\mathcal{E}_p^\tau}\leq 1} |< y, \psi >| = \tau^n q_{-\tau}(\psi).
\end{aligned}$$

Поклавши $\tilde{q}_{-\nu}(\psi) = \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \left[\left(\dfrac{1}{2\tau}\right)^n q_{-\nu}(A'^n_{\mathcal{E}_p}\psi)\right]^p\right)^{1/p}$, в силу попередньої нерівності отримуємо $\tilde{q}_{-\nu}(\psi) \leq 2q_{-\tau}(\psi)$. З іншого боку, виконується нерівність $q_{-\nu}(\psi) \leq \tilde{q}_{-\nu}(\psi)$, а тому набір півнорм $\tilde{Q} = \{\tilde{q}\}$ також визначає сильну топологію на $\mathcal{E}'_p(A)$. Крім того, виконується нерівність $\tilde{q}_{-\nu}(A'_{\mathcal{E}_p}\psi) \leq 2s\tilde{q}_{-\nu}(\psi)$. Тому $A'_{\mathcal{E}_p}$ — півобмежений оператор над $\mathcal{E}'_p(A)$ відносно набору $\tilde{Q}$. Залишається лише зауважити, що властивість півобмеженості не залежить від вибору півнорм. Теорема доведена.

Позначимо через $\mathrm{sp}(A_{\mathcal{E}_p})$ спектр оператора $A_{\mathcal{E}_p}$ в алгебрі $\mathfrak{L}(\mathcal{E}_p(A))$, а через $\sigma(A_{\mathcal{E}_p}) = \overline{\mathrm{sp}(A_{\mathcal{E}_p})}$ — його замикання в $\mathbb{C}$.

Теорема 5.1.4. *Виконується таке вкладення* $\sigma(A_{\mathcal{E}_p}) \subset \sigma(A)$, *де* $\sigma(A)$ *— спектр оператора* A *над банаховим простором* $\mathfrak{X}$. *Якщо виконується умова щільності* $\overline{\mathcal{E}_p(A)} = \mathfrak{X}$, *то* $\sigma(A_{\mathcal{E}_p}) = \sigma(A)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$, тоді резольвента $R_\lambda(A)$ оператора A над простором $\mathfrak{X}$ належить алгебрі $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$. Оскільки виконується рівність $A^k R_\lambda(A)x = R_\lambda(A)A^k x$ для всіх $x \in \mathcal{C}^\infty(A)$ і $k \in \mathbb{N}_0$, то

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k R_\lambda(A)x\right\|^p \leq \|R_\lambda(A)\|^p \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\nu)^k x\right\|^p.$$

Звідси $\|R_\lambda(A)x\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \leq \|R_\lambda(A)\|\,\|x\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$ і оператор $R_\lambda(A)$ діє над простором $\mathcal{E}_p^\nu(A)$. Тому $R_\lambda\big(A_{\mathcal{E}_p}\big) := R_\lambda(A)|_{\mathcal{E}_p(A)} \in \mathfrak{L}\,(\mathcal{E}_p(A))$. Згідно з теоремою 5.1.2 підпростір $\mathcal{E}_p(A)$ інваріантний відносно оператора A і $R_\lambda\big(A_{\mathcal{E}_p}\big)$ — резольвента оператора $A_{\mathcal{E}_p}$ в алгебрі $\mathfrak{L}\,(\mathcal{E}_p(A))$. Отже, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{sp}\big(A_{\mathcal{E}_p}\big)$, тобто $\mathrm{sp}\big(A_{\mathcal{E}_p}\big) \subset \sigma(A)$. Оскільки спектр $\sigma(A)$ замкнений в $\mathbb{C}$, то отримуємо $\overline{\mathrm{sp}\big(A_{\mathcal{E}_p}\big)} = \sigma\big(A_{\mathcal{E}_p}\big) \subset \sigma(A)$.

Навпаки, нехай $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma\big(A_{\mathcal{E}_p}\big)$. Тоді $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)$, оскільки виконується рівність $\sigma\big(A_{\mathcal{E}_p}\big) = \sigma\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)$, де спряжений оператор $A'_{\mathcal{E}_p}$ розглядається в алгебрі $\mathfrak{L}\left(\mathcal{E}'_p(A)\right)$ сильно неперервних відображень. Використаємо рівність

$$R_\mu\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big) = R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\left[I - (\lambda-\mu)R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\right]^{-1},\ \mu \in \mathbb{C}\backslash\sigma\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big).$$

Покладемо $\zeta = (\lambda-\mu)^{-1}$. Тоді

$$\left[I - (\lambda-\mu)R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\right]^{-1} = \zeta\left[I\zeta - R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\right]^{-1}.$$

Згідно з теоремою 5.1.3 резольвента $\left[I\zeta - R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\right]^{-1}$ голоморфна в околі нескінченно віддаленої точки в алгебрі $\mathfrak{U}\,(\mathcal{E}_p(A))$ півобмежених операторів з топологією, що визначається набором півнорм $\overline{Q} = \{\overline{q}\}$, де

$\overline{q}(T) = \sup\limits_{q(x)\le 1} q(Tx)$, $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}_p(A))$, $x \in \mathcal{E}_p(A)$. Алгебра $\mathfrak{L}\left(\mathcal{E}'_p(A)\right)$ з топологією рівномірної збіжності на обмежених підмножинах із $\mathcal{E}_p(A)$ повна і знайдеться таке число $\delta > 0$, що ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} R^k_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\zeta^{-k-1}$ збіжний при $|\zeta| \ge \delta$. Зокрема, обмежена послідовність частинних сум $\{S_k(\delta)\}$, а отже і послідовність $\left\{\delta^{-k}R^k_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\right\}$. Згідно з теоремою Банаха-Штейнгауза, послідовність $\left\{\delta^{-k}R^k_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\right\}$ одностайно неперервна над $\mathcal{E}'_p(A)$, тобто для будь-якого $\nu > 0$ знайдеться неперервна на $\mathcal{E}'_p(A)$ півнорма q, така, що $q_{-\nu}\left[\delta^{-k}R^k_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\psi\right] \le q(\psi)$ для всіх $\psi \in \mathcal{E}'_p(A)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Покладаючи $\check{q}_{-\nu}(\psi) = \sup\limits_{k\ge 0} q_{-\nu}\left[\delta^{-k}R^k_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\psi\right]$, маємо $\check{q}_{-\nu}(\psi) \le q(\psi)$ і півнорма $\check{q}_{-\nu}$ неперервна на $\mathcal{E}'_p(A)$. З іншого боку, $q_{-\nu}(\psi) \le \check{q}_{-\nu}(\psi)$ і набір $\{\check{q}_{-\nu}\}$ визначає топологію $\mathcal{E}'_p(A)$. Крім того,

$$\check{q}_{-\nu}\left(R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\psi\right) \le \delta \sup_{k\ge 0} \check{q}_{-\nu}\left(\delta^{-k-1}R^{k+1}_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\psi\right) \le \delta\check{q}_{-\nu}(\psi)$$

для всіх $\psi \in \mathcal{E}'_p(A)$. Це означає, що $R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big) \in \mathfrak{S}\left(\mathcal{E}'_p(A)\right)$ і

$$q_{-\nu}\left(R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\psi\right) \le \left\|R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\right\|_{\mathfrak{S}} q_{-\nu}(\psi)$$

для всіх $\psi \in \mathcal{E}'_p(A)$, де $\left\|R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\right\|_{\mathfrak{S}} = \sup\limits_{\nu>0}\sup\limits_{q_{-\nu}(\psi)\le 1} q_{-\nu}\left(R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\psi\right)$.

Використовуючи двоїстість між півнормами $q_{-\nu}$ і нормами $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^\nu_p}$, а також очевидне співвідношення $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_p} = \|x\|$ для $x \in \mathcal{E}_p(A)$, одержуємо $\left\|R_\lambda\big(A_{\mathcal{E}_p}\big)x\right\| \le \left\|R_\lambda\big(A'_{\mathcal{E}_p}\big)\right\|_{\mathfrak{S}}\|x\|$. З урахування умови щільності $\overline{\mathcal{E}_p(A)} = \mathfrak{X}$ маємо $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$. Теорема доведена.

Побудуємо тепер тензорний добуток $\otimes_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j) = \mathcal{E}_{p_1}(A_1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{E}_{p_J}(A_J)$ з проективною локально опуклою топологією. Поповнення простору $\otimes_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ в цій топології позначимо $\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$.

Наявний топологічний ізоморфізм просторів

$$\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j) = \lim_{\nu_j\to\infty}\operatorname{ind}\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j).$$

Це випливає з топологічних ізоморфізмів вигляду

$$\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j) = \lim_{\nu_j \to \infty} \operatorname{ind} \left[\mathcal{E}_{p_1}(A_1) \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes}\, \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes}\, \mathcal{E}_{p_J}(A_J) \right],$$

встановлених для просторів типу (DF) у праці [155].

Нехай спектр $\sigma(A_j)$ оператора A_j над простором $\mathfrak{X}_j$ складається із ізольованих власних значень $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, які є полюсами резольвенти $R_\lambda(A_j)$, причому $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$. Позначимо через $\mathcal{R}_{\lambda_k}(A_j)$ кореневий підпростір оператора A_j, що відповідає власному значенню λ_k.

Теорема 5.1.5. *Якщо підпростір* $\bigcup_{\nu_j(n)>0} \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)$ *щільний в* $\mathfrak{X}_j$ *для всіх* $j = 1, \ldots, J$, *то виконується ізоморфізм*

$$\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j = \Big\{ w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \ : \ w_n \in \tilde{\otimes}_j \operatorname{span} \big\{ \mathcal{R}_{\lambda_k}(A_j) : \ |\lambda_k| < \nu_j(n) \big\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j)} < \infty \Big\}. \tag{5.5}$$

Д о в е д е н н я. В силу рівності (2.7) для всіх $j = 1, \ldots, J$ маємо

$$\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j(n)}(A_j) = \operatorname{span} \big\{ \mathcal{R}_{\lambda_k}(A_j) : \ |\lambda_k| < \nu_j(n) \big\},$$

де span означає комплексну лінійну оболонку векторів. Звідси і з рівності (5.2) отримуємо потрібний ізоморфізм (5.5). Теорема доведена.

5.2. Інтерполяція тензорних добутків цілих векторів експоненціального типу

Нехай $0 < t, \nu_j, \gamma_j < \infty$, $1 \le q, q_j, p_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. Визначимо інтерполяційний простір $\big(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta, q_j}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta, q_j}} = \Big(\int_0^{\infty} \big[t^{-\theta} K(t, x; \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)) \big]^{q_j} \frac{dt}{t} \Big)^{1/q_j},$$

де $K(t,x;\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)) = \inf\limits_{x=x^0+x^1}\left(\|x^0\|_{\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}} + t\|x^1\|_{\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}}\right)$, $x^0 \in \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)$, $x^1 \in \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)$. Нехай $\otimes_j\left(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}$ — тензорний добуток з проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j\left(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}}$$

$$= \inf_{w=\sum_n \otimes_j x^j_n} \sum_{n=1}^{N} \|x^1_n\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu_1}_{p_1}(A_1),\mathcal{E}^{\gamma_1}_{p_1}(A_1)\right)_{\theta,q_1}} \cdot \ldots \cdot \|x^J_n\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu_J}_{p_J}(A_J),\mathcal{E}^{\gamma_J}_{p_J}(A_J)\right)_{\theta,q_J}},$$

$\tilde{\otimes}_j\left(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}$ — його поповнення у цій нормі.

Визначимо також інтерполяційний простір $\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q}$ з нормою

$$\|w\|^q_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q}} = \int_0^\infty \left[t^{-\theta}K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j))\right]^q\frac{dt}{t},$$

де $K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)) = \inf\limits_{w=u+v}\left(\|u\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)} + t\,\|v\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)}\right)$, $u \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)$, $v \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)$.

Відзначимо, що при $1 \le q \le \tilde{q} \le \infty$ виконуються вкладення

$$\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q} \subset \left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,\tilde{q}}. \tag{5.6}$$

Це випливає з того, що для $w \in \left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q}$ маємо

$$\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\cdot),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\cdot)\right)_{\theta,\tilde{q}}} \le \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\cdot),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\cdot))^q\frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde{q}}$$

$$\times\left(\sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\cdot),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\cdot))\right)^{(1-q/\tilde{q})} \le c\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\cdot),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\cdot)\right)_{\theta,q}}.$$

Крім того, якщо $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, то

$$\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta_0,q} \subset \left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta_1,\tilde{q}}. \tag{5.7}$$

Справді, із нерівності

$$K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)) \le t\,\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)},\ w \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j),$$

маємо

$$\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta_1,1}} = \int_0^1 t^{-\theta_1}K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j))\frac{dt}{t}$$

$$+\int_1^\infty t^{-\theta_1}K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j))\frac{dt}{t} \le c\,\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)}$$

$$+\sup_{t>0} t^{-\theta_0}K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j))\int_1^\infty \tau^{-(\theta_1-\theta_0)}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$\le c_1\,\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta_0,\infty}},$$

звідки випливає вкладення

$$\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta_0,\infty} \subset \left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta_1,1}.$$

Вкладення (5.7) випливає тепер з (5.6).

Теорема 5.2.1. *Нехай* $0<\nu_j\le\gamma_j<\infty$, $1\le q,q_j,p_j\le\infty$ *для всіх* $j=1,\dots,J$ *і* $0<\theta<1$. *Тоді виконується неперервне вкладення*

$$\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j\left(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}. \tag{5.8}$$

Д о в е д е н н я. Відзначимо, що при $0<\nu_j\le\gamma_j<\infty$ виконуються нерівності $\|x\|_{\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)}\le\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)}$ для всіх $x\in\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)$ і вкладення $\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)\subset\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)$ неперервні.

Застосовуючи відому інтерполяційну нерівність [3, с. 67]

$$\|x\|_{(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j))_{\theta,q_j}} \le c_{\theta,q_j}\max\left(t^{-\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)},t^{1-\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)}\right),\ x\in\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)$$

і те, що для будь-якого $t>0$ існують $u\in\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)$ і $v\in\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)$ такі, що $w=u+v$ і

$$\|u\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)} \le c_{\theta,q}t^{\theta}\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q}},$$

$$\|v\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)} \le c_{\theta,q}t^{\theta-1}\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q}},$$

для всіх скінченних сум $w=\sum_n \otimes_j x_n^j \in \big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q}$ отримуємо

$$\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\left(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j),\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}}$$

$$= \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_n \|x_n^1\|_{\left(\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1),\mathcal{E}_{p_1}^{\gamma_1}(A_1)\right)_{\theta,q_1}} \dots \|x_n^J\|_{\left(\mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J),\mathcal{E}_{p_J}^{\gamma_J}(A_J)\right)_{\theta,q_J}}$$

$$\le c' \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \Big(\sum_n \max\left(s^{-\theta}\|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1)}, s^{1-\theta}\|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\gamma_1}(A_1)}\right)$$

$$\dots \max\left(s^{-\theta}\|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)}, s^{1-\theta}\|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\gamma_J}(A_J)}\right)\Big)$$

$$\le c'' \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \Big(s^{-\theta J} \sum_n \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1)} \dots \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)}$$

$$+ s^{(1-\theta)J} \sum_n \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\gamma_1}(A_1)} \dots \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\gamma_J}(A_J)}\Big)$$

$$\le c''\Big(t^{-\theta} \inf_{u=\sum_n \otimes_j u_n^j} \sum_n \|u_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1)} \dots \|u_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)}$$

$$+ t^{1-\theta} \inf_{v=\sum_n \otimes_j v_n^j} \sum_n \|v_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\gamma_1}(A_1)} \dots \|v_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\gamma_J}(A_J)}\Big)$$

$$= c''\big(t^{-\theta}\|u\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} + t^{1-\theta}\|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}\big) \le c\,|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q}}.$$

Відзначимо, що при переході від першої нерівності до другої використано те, що $\|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)} \le \|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}$ для $x \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, оскільки при цьому для всіх $j,l=1,\dots,J$ і $s>0$

$$s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} \le s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\nu_l}(A_l)}$$

$$+ s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)} s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)}. \tag{5.9}$$

Справді, при виконанні нерівностей $s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} \ge s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}$ і $s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\nu_l}(A_l)} \le s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)}$, відповідно маємо

$$\max\left(s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}, s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}\right) = s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)},$$

$$\max\left(s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\nu_l}(A_l}, s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l}\right) = s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\nu_l}(A_l)}.$$

Оскільки $s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} \geq s^{-1}s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)} = s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}$, а також $s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\nu_l}(A_l)} \geq s^{-1}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} = s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)}$, то

$$s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} \geq s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\nu_l}(A_l)}$$

$$\geq s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-1}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} = s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)},$$

тобто

$$s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} \geq s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)}. \tag{5.10}$$

З іншого боку, маємо

$$s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\nu_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)}$$

$$\geq s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-1}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)}$$

$$= s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)},$$

тобто

$$\begin{aligned} &s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\nu_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} \\ &\geq s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Віднімаючи від нерівності (5.11) нерівність (5.10), отримуємо

$$s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\nu_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)}$$

$$- s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} \geq s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathcal{E}_{p_l}^{\gamma_l}(A_l)} \geq 0,$$

тобто (5.9) виконується.

При переході від другої до третьої нерівності, зважаючи на те, що береться inf по всіх $w = \sum_n \otimes_j x_n^j$, $x_n^j \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, беремо послідовно inf по двох часткових представленнях $w = u = \sum_n \otimes_j u_n^j$ із $u_n^j \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$ і $w = v = \sum_n \otimes_j v_n^j$ із $v_n^j \in \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(A_j)$.

Згідно з [86, теорема 1.6.2] $\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j) = \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j) \cap \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)$ щільний в $\big(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j), \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j}$, тому нерівність

$$\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\left(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}} \le c\,\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q}} \tag{5.12}$$

виконується для всіх $w \in \big(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\big)_{\theta,q}$. Із нерівності (5.12) випливає потрібне вкладення (5.8). Теорема доведена.

Теорема 5.2.2. *Нехай* $1 \le q, q_j, p_j \le \infty$, $0 < \nu_j < \gamma_j < \infty$, $\mu_j = \nu_j^{1-\theta}\gamma_j^{\theta}$ *для всіх* $j = 1, \dots, J$ *і* $0 < \theta < 1$. *Тоді виконується неперервне вкладення*

$$\big(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\mu_j}_{q_j}(A_j). \tag{5.13}$$

Існує таке додатне число $c = c(\theta, q, q_j)$, *що виконується нерівність*

$$\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\mu_j}_{q_j}(A_j)} \le c\,\|w\|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)}\|w\|^{\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)}. \tag{5.14}$$

Д о в е д е н н я. Вкладення (5.13) безпосередньо випливає із (3.1) і (5.8).

Нехай $w \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ і $T\lambda = \lambda w$ — відображення $\mathbb{C}$ в $\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)$ або $\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)$. Нерівність (5.14) випливає з (5.12) та оцінки

$$\begin{aligned}\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q}} &= \|T\|_{\mathbb{C}\to\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\right)_{\theta,q}}\\ &\le c\|w\|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)}\|w\|^{\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)}.\end{aligned}$$

Теорема доведена.

Припустимо, що спектр $\sigma(A_j)$ кожного оператора A_j $(j = 1, \dots, J)$ над простором $\mathfrak{X}_j$ є точковим і складається із ізольованих власних значень $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, які є полюсами резольвенти $R_\lambda(A_j)$. Тоді з вкладення (5.13) і рівності(2.7) отримуємо

$$\big(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(A_j)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j\,\mathrm{span}\left\{\mathcal{R}_{\lambda_k}(A_j) :\ |\lambda_k| < \mu_j\right\},$$

де $\mu_j = \nu_j^{1-\theta}\gamma_j^{\theta}$ $(j = 1, \ldots, J)$ і $\mathcal{R}_{\lambda_k}(A_j)$ — кореневий підпростір оператора A_j, що відповідає власному значенню λ_k.

Припустимо, що $0 \in \rho(A_j)$ для всіх $j = 1, \ldots, J$ і позначимо через $\mathcal{C}_j^m := \mathcal{C}^m(A_j)$ $(m \in \mathbb{N})$ область визначення оператора A_j^m з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}_j^m} = \|A_j^m x\|_{\mathfrak{X}_j}$ для $x \in \mathcal{C}_j^m \subset \mathfrak{X}_j$.

Нехай $0 < t, \nu_j, \gamma_j < \infty$, $1 \le q, q_j, p_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. Визначимо інтерполяційний простір $\big(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)\big)_{\theta,q_j}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m),\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)\right)_{\theta,q_j}} = \Big(\int_0^\infty \big[t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m),\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m))\big]^{q_j}\frac{dt}{t}\Big)^{1/q_j},$$

де $K(t,x;\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m),\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)) = \inf\limits_{x=x^0+x^1}\big(\|x^0\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m)} + t\|x^1\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)}\big)$, $x^0 \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m)$, $x^1 \in \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)$.

Нехай $\otimes_j\big(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)\big)_{\theta,q_j}$ — тензорний добуток з проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m),\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)\right)_{\theta,q_j}}$$

$$= \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j}\sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\left(\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}_1^m),\mathcal{E}_{p_1}^{\gamma_1}(\mathcal{C}_1^m)\right)_{\theta,q_1}} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\left(\mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(\mathcal{C}_J^m),\mathcal{E}_{p_J}^{\gamma_J}(\mathcal{C}_J^m)\right)_{\theta,q_J}},$$

$\tilde{\otimes}_j\big(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)\big)_{\theta,q_j}$ — його поповнення у цій нормі.

Визначимо також простір $\big(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)\big)_{\theta,q}$ з нормою

$$\|w\|^q_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)\right)_{\theta,q}} = \int_0^\infty \big[t^{-\theta}K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m))\big]^q\frac{dt}{t},$$

де $K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m),\tilde{\otimes}_j\mathcal{C}_j^m)) = \inf\limits_{w=u+v}\big(\|u\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m)} + t\,\|v\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)}\big)$, $u \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m)$, $v \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m)$, $v \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)$.

Теорема 5.2.3. *Нехай* $0 < \nu_j \le \gamma_j < \infty$, $1 \le q, q_j, p_j \le \infty$ *для всіх* $j = 1, \ldots, J$ *і* $0 < \theta < 1$. *Тоді виконується неперервне вкладення*

$$\big(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j\big(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{E}_{p_j}^{\gamma_j}(\mathcal{C}_j^m)\big)_{\theta,q_j}. \tag{5.15}$$

Д о в е д е н н я. Якщо $0 < \nu_j \le \gamma_j < \infty$ $(j = 1, \dots, J)$, то виконуються нерівності $\|x\|_{\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} \le \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}$ для всіх $x \in \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$ і вкладення $\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j) \subset \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$ неперервні. Подібним чином як у доведенні теореми 5.2.1, застосовуючи інтерполяційну нерівність

$\|x\|_{(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j))_{\theta,q_j}} \le c_{\theta,q_j} \max\left(t^{-\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}, t^{1-\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}\right)$, $x \in \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$ і те, що для будь-якого $t > 0$ існують $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$ і $v \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$ такі, що $w = u + v$ і

$$\|u\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} \le c_{\theta,q} t^{\theta} \|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q}},$$

$$\|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} \le c_{\theta,q} t^{\theta-1} \|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q}},$$

для всіх скінченних сум $w = \sum_n \otimes_j x^j_n \in \left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q}$ отримуємо

$$\begin{aligned}
&\|w\|_{\tilde{\otimes}_j \left(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q_j}} \\
&= \inf_{w = \sum_n \otimes_j x^j_n} \sum_n \|x^1_n\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu_1}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1), \mathcal{E}^{\gamma_1}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1)\right)_{\theta,q_1}} \dots \|x^J_n\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu_J}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J), \mathcal{E}^{\gamma_J}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J)\right)_{\theta,q_J}} \\
&\le c' \inf_{w = \sum_n \otimes_j x^j_n} \Big(\sum_n \max\left(s^{-\theta}\|x^1_n\|_{\mathcal{E}^{\nu_1}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1)}, s^{1-\theta}\|x^1_n\|_{\mathcal{E}^{\gamma_1}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1)}\right) \\
&\dots \max\left(s^{-\theta}\|x^J_n\|_{\mathcal{E}^{\nu_J}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J)}, s^{1-\theta}\|x^J_n\|_{\mathcal{E}^{\gamma_J}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J)}\right)\Big) \\
&\le c'' \inf_{w = \sum_n \otimes_j x^j_n} \Big(s^{-\theta J} \sum_n \|x^1_n\|_{\mathcal{E}^{\nu_1}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1)} \dots \|x^J_n\|_{\mathcal{E}^{\nu_J}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J)} \\
&+ s^{(1-\theta)J} \sum_n \|x^1_n\|_{\mathcal{E}^{\gamma_1}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1)} \dots \|x^J_n\|_{\mathcal{E}^{\gamma_J}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J)}\Big) \\
&\le c''\Big(t^{-\theta} \inf_{u = \sum_n \otimes_j u^j_n} \sum_n \|u^1_n\|_{\mathcal{E}^{\nu_1}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1)} \dots \|u^J_n\|_{\mathcal{E}^{\nu_J}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J)} \\
&+ t^{1-\theta} \inf_{v = \sum_n \otimes_j v^j_n} \sum_n \|v^1_n\|_{\mathcal{E}^{\gamma_1}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1)} \dots \|v^J_n\|_{\mathcal{E}^{\gamma_J}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J)}\Big) \\
&= c''\left(t^{-\theta}\|u\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} + t^{1-\theta}\|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}\right) \le c\,|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q}}.
\end{aligned}$$

Оскільки $\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$ щільний в просторі $\left(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q_j}$, то нерівність

$$\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\left(\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j),\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q_j}} \le c\,\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q}} \tag{5.16}$$

виконується для всіх $w \in \left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q}$. Із нерівності (5.16) випливає вкладення (5.15). Теорема доведена.

Теорема 5.2.4. *Нехай* $1 \le q, q_j, p_j \le \infty$, $0 < \nu_j < \gamma_j < \infty$, $\mu_j = \nu_j^{1-\theta}\gamma_j^{\theta}$ *для всіх* $j = 1, \dots, J$ *і* $0 < \theta < 1$. *Тоді виконується неперервне вкладення*

$$\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\mu_j}_{q_j}(\mathcal{C}^m_j). \tag{5.17}$$

Існує таке додатне число $c = c(\theta, q, q_j)$, *що виконується нерівність*

$$\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\mu_j}_{q_j}(\mathcal{C}^m_j)} \le c_2\|w\|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}\|w\|^{\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}. \tag{5.18}$$

Д о в е д е н н я. Вкладення (5.17) випливає із рівності (3.17) і (5.16).

Нерівність (5.18) випливає з (5.17) та оцінки

$$\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q}} \le c\|w\|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}\|w\|^{\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}$$

для $w \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$. Теорема доведена.

Відзначимо, що при $1 \le q \le \tilde{q} \le \infty$ для $w \in \left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q}$ маємо

$$\|w\|^{\tilde{q}}_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,\tilde{q}}} \le \int_0^\infty \left(t^{-\theta}K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j))^q\frac{dt}{t}\right.$$

$$\times\left(\sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j))\right)^{\tilde{q}-q}$$

$$\le c\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta,q}},$$

звідки випливає вкладення

$$\big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\big)_{\theta,q} \subset \big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\big)_{\theta,\tilde{q}}. \tag{5.19}$$

Крім того, якщо $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, то із нерівності

$$K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)) \le t \, \|w\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}, \ w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j),$$

маємо

$$\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta_1,1}} = \int_0^1 t^{-\theta_1} K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)) \frac{dt}{t}$$
$$+ \int_1^\infty t^{-\theta_1} K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)) \frac{dt}{t} \le c \, \|w\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}$$
$$+ \sup_{t>0} t^{-\theta_0} K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)) \int_1^\infty \tau^{-(\theta_1-\theta_0)} \frac{d\tau}{\tau}$$
$$\le c_1 \, \|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\right)_{\theta_0,\infty}},$$

звідки випливає вкладення

$$\Big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\Big)_{\theta_0,\infty} \subset \Big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\Big)_{\theta_1,1}.$$

Звідси і з (5.19) отримуємо

$$\big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\big)_{\theta_0,q} \subset \big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\big)_{\theta_1,\tilde{q}}.$$

Якщо спектр $\sigma(A_j)$ кожного оператора A_j $(j = 1, \ldots, J)$ над простором $\mathfrak{X}_j$ є точковим і складається із ізольованих власних значень $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, які є полюсами резольвенти $R_\lambda(A_j)$, то з вкладення (5.17) і рівності (2.7) отримуємо

$$\big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\gamma_j}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j \operatorname{span}\big\{\mathcal{R}_{\lambda_k}(A_j) : \ |\lambda_k|^{m+1} < \mu_j\big\},$$

де $\mu_j = \nu_j^{1-\theta}\gamma_j^\theta$ $(j = 1, \ldots, J)$ і $\mathcal{R}_{\lambda_k}(A_j)$ — кореневий підпростір оператора A_j, що відповідає власному значенню λ_k.

5.3. Тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бєсова

Нехай $\otimes_j \mathfrak{X}_j := \mathfrak{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{X}_J$ — тензорний добуток скінченного набору комплексних банахових просторів $\left\{\mathfrak{X}_j, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_j}\right\}_{j=1}^{J}$ із проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j \mathfrak{X}_j} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J}.$$

Поповнення простору $\otimes_j \mathfrak{X}_j$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$.

На просторі $\mathfrak{X}_j$ $(j = 1, \ldots, J)$ розглядаємо необмежений замкнений лінійний оператор $A_j : \mathcal{C}^1(A_j) \subset \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_j$ із щільною областю визначення $\mathcal{C}^1(A_j)$. Для будь-яких чисел $\nu_j > 0$, $1 \le p_j \le \infty$ визначимо банахові простори цілих векторів експоненціального типу оператора A_j

$$\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) = \left\{ x \in \mathcal{C}^\infty(A_j) \colon \|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} < \infty \right\}$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \left\| (A_j/\nu_j)^k x \right\|_{\mathfrak{X}_j}^{p_j} \right)^{1/p_j}, & 1 \le p_j < \infty, \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \left\| (A_j/\nu_j)^k x \right\|_{\mathfrak{X}_j}, & p_j = \infty. \end{cases}$$

Визначимо об'єднання $\mathcal{E}_{p_j}(A_j) = \bigcup_{\nu_j > 0} \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, на якому задамо квазінорму

$$|x|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} = \|x\|_{\mathfrak{X}_j} + \inf\{\nu_j > 0 : x \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)\},$$

і побудуємо тензорний добуток $\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j) := \mathcal{E}_{p_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(A_J)$ з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^{N} |x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot |x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}.$$

Поповнення простору $\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ у цій квазінормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$.

Відзначимо, що за теоремою Гротендіка, узагальненою на випадок квазінормованих просторів, довільний елемент w поповнення $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ має вигляд суми деякого абсолютно збіжного ряду $w = \sum_n \otimes_j x_n^j$ із елементами $\otimes_j x_n^j \in \mathcal{E}_{p_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(A_J)$.

Справді, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $w_n \in \mathcal{E}_{p_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(A_J)$ таке, що $|w - w_n|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} < \varepsilon/2^{n+2}$. Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$, $|w_{n+1} - w_n|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \leq |w_{n+1} - w|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + |w - w_n|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} < \varepsilon/2^{n+1}$, то кожний елемент $w_{n+1} - w_n$ в $\mathcal{E}_{p_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(A_J)$ має зображення $w_{n+1} - w_n = \sum_{l=l_n+1}^{l_{(n+1)}} \otimes_j x_l^j$, де $\sum_{l=l_n+1}^{l_{(n+1)}} |x_l^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)} \ldots |x_l^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)} \leq |w_{n+1} - w_n|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + \varepsilon/2^{n+1} \leq \varepsilon/2^n$. Внаслідок того, що $|w_1|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \leq |w|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + |w - w_1|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} < |w|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + \varepsilon/2$, елемент w_1 можна подати у вигляді $w_1 = \sum_{l=1}^{l_1} \otimes_j x_l^j$ такому, що $\sum_{l=1}^{l_1} |x_l^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)} \ldots |x_l^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)} \leq |w_1|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + \varepsilon/2 \leq |w|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + \varepsilon$. Отже, маємо $\forall\, \varepsilon > 0$, $w = w_1 + \sum_n (w_{n+1} - w_n) = \sum_l \otimes_j x_l^j$, при цьому $\sum_l |x_l^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)} \ldots |x_l^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)} \leq |w|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = |w|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + 2\varepsilon$.

Лема 5.3.1 *Справедливе таке вкладення*

$$\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j) \subset \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j. \tag{5.20}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо спочатку випадок одного простору $\mathfrak{X}_j$ і одного оператора A_j, тому індекс j опускаємо. Нехай послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}_p(A)$ – фундаментальна. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує n_ε : $|x_n - x_m|_{\mathcal{E}_p(A)} < \varepsilon$ для всіх $n, m \geq n_\varepsilon$. Тоді

$$\inf\{\nu \colon x_n - x_m \in \mathcal{E}_p^{\nu}(A)\} < \varepsilon \quad \text{і} \quad \|x_n - x_m\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon,$$

зокрема, $x_n - x_m \in \mathcal{E}_p^{\varepsilon_0}(A)$ для всіх $n, m \geq n_\varepsilon$ при деякому $\varepsilon_0 < \varepsilon$. Як відомо (див. [103, лема 1], [105, теорема 1.1.1]), використовуючи перетворення Лапласа L, кожному елементу $x \in \mathcal{E}_p^{\varepsilon}(A)$ єдиним чином можна

співставити цілу аналітичну функцію змінної $\lambda \in \mathbb{C}$ експоненціального типу $h^x < \varepsilon^p$,

$$x(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \|A^k x\|^p_{\mathfrak{X}} \lambda^k / k!$$

таку, що

$$\|\varepsilon x\|^p_{\mathcal{E}^{\varepsilon}_p(A)} = L[x(t)] = \int_0^\infty x(t) \exp(-\varepsilon^p t)\, dt,$$

де $g(z) = \|zx\|^p_{\mathcal{E}^{|z|}_p(A)}$ розглядається як функція змінної $\{z \in \mathbb{C} \colon |z|^p > h^x\}$. І навпаки (див. [105, теорема 1.1.2]), застосовуючи обернене перетворення L^{-1}, отримуємо

$$x(\lambda) = L^{-1}[g(z)] = \frac{1}{2\pi i} \oint \exp(\lambda z) \|zx\|^p_{\mathcal{E}^{|z|}_p(A)} dz, \quad |z| = \varepsilon_0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

де $h^x < \varepsilon_0^p < \varepsilon^p$. Оскільки $x_n - x_m \in \mathcal{E}^{\varepsilon_0}_p(A)$ для всіх $n, m \geq n_\varepsilon$, то сукупність функцій

$$\Phi = \left\{ \exp(-\varepsilon_0^p t) \|x_n - x_m\|^p_{\mathcal{E}^{|z|}_p(A)} \colon n, m \geq n_\varepsilon,\ |z| = \varepsilon_0,\ t \in [0, \infty) \right\}$$

рівномірно обмежена на $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \varepsilon_0\} \times [0, \infty)$. Обернене перетворення L^{-1} відображає Φ на сукупність функцій вигляду

$$\{[0, \infty) \ni t \mapsto (x_n - x_m)(t) \exp(-\varepsilon_0^p t) \colon n, m \geq n_\varepsilon\}$$

рівномірно обмежену деякою сталою K_ε по всіх $t \geq 0$ і $n, m \geq n_\varepsilon$. За теоремою Бернштейна про компактність [68, теорема 3.3.6] існує збіжна підпослідовність $(x_{n_i} - x_{m_i})(t) \exp(-\varepsilon_0^p t)$, $(i \in \mathbb{N})$ в топології рівномірної збіжності на $[0, r]$, $(\forall r > 0)$. Звідси, для всіх $n_i, m_i \geq n_\varepsilon$ маємо

$$\begin{aligned}
\|x_{n_i} - x_{m_i}\|^p_{\mathcal{E}^{\varepsilon}_p(A)} &= \varepsilon^{-p} L[(x_{n_i} - x_{m_i})(t)] \\
&= \varepsilon^{-p} \int_0^\infty (x_{n_i} - x_{m_i})(t) \exp(-\varepsilon^p t)\, dt \\
&= \varepsilon^{-p} \int_0^\infty [(x_{n_i} - x_{m_i})(t) \exp(-\varepsilon_0^p t)] \exp[-(\varepsilon^p - \varepsilon_0^p) t]\, dt \\
&= \varepsilon^{-p} \lim_{r \to \infty} \int_0^r [(x_{n_i} - x_{m_i})(t) \exp(-\varepsilon_0^p t)] \exp[-(\varepsilon^p - \varepsilon_0^p) t]\, dt \\
&\leq \varepsilon^{-p} K_\varepsilon \lim_{r \to \infty} \int_0^r \exp[-(\varepsilon^p - \varepsilon_0^p) t]\, dt = M_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Оскільки $\|x_{n_i} - x_{m_i}\|^p_{\mathcal{E}^\varepsilon_p(A)} = \sum_k \|(A/\varepsilon)^k(x_{n_i} - x_{m_i})\|^p_{\mathfrak{X}}$, то

$$\|A^k(x_{n_i} - x_{m_i})\|^p_{\mathfrak{X}} \le \varepsilon^{kp}\|x_{n_i} - x_{m_i}\|^p_{\mathcal{E}^\varepsilon_p(A)} \le \varepsilon^{kp} M_\varepsilon$$

для всіх $n_i, m_i \ge n_\varepsilon$ і всіх $k \ge 1$. Отже, послідовності $\left(A^k x_{n_i}\right)_{i=1}^\infty$, для всіх $k \ge 1$ фундаментальні в $\mathfrak{X}$.

Припускаючи, що $x_n \to 0$ в $\mathfrak{X}$, для підпослідовності $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$, маємо $\|A^k x_{n_i}\|_{\mathfrak{X}} \to 0$ для всіх $k \ge 1$ при $i \to \infty$, оскільки графіки A^k замкнені [131, теорема 1(iv)]. З урахуванням рівності

$$\|x_{n_i}\|_{\mathcal{E}^\varepsilon_p(A)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left\|(A/\varepsilon)^k x_{n_i}\right\|^p_{\mathfrak{X}}\right)^{1/p},$$

отримуємо $x_{n_i} \to 0$ при $i \to \infty$ в просторі $\mathcal{E}^\varepsilon_p(A)$ для довільного $\varepsilon > 0$. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке n_ε, що

$$|x_{n_i}|_{\mathcal{E}_p(A)} = \|x_{n_i}\|_{\mathfrak{X}} + \inf\{\nu\colon x_{n_i} \in \mathcal{E}^\nu_p(A)\} < 2\varepsilon$$

для всіх $n_i \ge n_\varepsilon$. Це означає, що $x_{n_i} \to 0$ при $i \to \infty$ і, як наслідок, $x_n \to 0$ в просторі $\mathcal{E}_p(A)$.

Далі використаємо результати [5, глава XIV, теореми 7.1 – 7.2], узагальнені на випадок квазінормованих просторів.

Позначимо через $x_{\mathscr{E}_p}$ і $x_{\mathfrak{X}}$ класи еквівалентних між собою фундаментальних послідовностей $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(x_n \in \mathcal{E}_p(A))$ відповідно в $\mathcal{E}_p(A)$ і $\mathfrak{X}$ та побудуємо відображення

$$\mathcal{E}_p(A) \ni x_{\mathscr{E}_p} \to G x_{\mathscr{E}_p} = x_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}.$$

Таке відображення визначено коректно, оскільки якщо $(y_n)_{n=1}^\infty \in x_{\mathscr{E}_p}$, тобто $(x_n)_{n=1}^\infty \sim (y_n)_{n=1}^\infty$ відносно $|\cdot|_{\mathcal{E}_p(A)}$, то в силу очевидної нерівності $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}} \le |\cdot|_{\mathcal{E}_p(A)}$ така ж еквівалентність справедлива й відносно $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$.

Відображення G лінійне і неперервне:

$$\begin{aligned}\|G x_{\mathscr{E}_p}\|_{\mathfrak{X}} &= \|x_{\mathfrak{X}}\|_{\mathfrak{X}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\mathfrak{X}} \le \lim_{n\to\infty} |x_n|_{\mathcal{E}_p(A)} \\ &= |x_{\mathscr{E}_p}|_{\mathcal{E}_p(A)}, (x_n)_{n=1}^\infty \in x_{\mathscr{E}_p} \in \mathcal{E}_p(A).\end{aligned}$$

Розглянемо підпростір

$$\operatorname{Ker} G = \{x \in \mathcal{E}_p(A) : Gx = 0\} \subset \mathcal{E}_p(A).$$

З наведених вище міркувань випливає, що $\operatorname{Ker} G = \{0\}$, а тому $\mathcal{E}_p(A)$ можна ототожнити з областю значень оператора G і вважати, що $\mathcal{E}_p(A) \subset \mathfrak{X}$ і $\|x\|_{\mathfrak{X}} \le |x|_{\mathcal{E}_p(A)}$, $x \in \mathcal{E}_p(A)$.

Беручи далі фундаментальні послідовності $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ відносно квазінорми $|\cdot|_{\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)}$ в просторі $\mathcal{E}_{p_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(A_J)$ такі, що $w_n \to 0$ в просторі $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$, аналогічно як вище отримуємо, що $w_n \to 0$ в просторі $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$. Лема доведена.

Для $0 < q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 < t < \infty$ визначимо інтерполяційний простір $\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}$ з квазінормою

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} = \left(\int_0^{\infty} \left[t^{-\theta} K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

$K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) = \inf\limits_{w=u+v} \left(|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + t \, \|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j} \right)$, $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $v \in \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$.

Для чисел $0 < s < \infty$ і $0 < \tau_j \le \infty$ визначимо апроксимаційні простори між квазінормованим підпростором $\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ і банаховим простором $\mathfrak{X}_j$

$$\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j) = \left\{ x \in \mathfrak{X}_j : \ |x|_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)} < \infty \right\},$$

наділені квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)} = \begin{cases} \left(\int_0^{\infty} \left[t^s E_{p_j}(t,x) \right]^{\tau_j} \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau_j}, & 0 < \tau_j < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E_{p_j}(t,x), & \tau_j = \infty, \end{cases}$$

де $E_{p_j}(t,x) = \inf \left\{ \|x - x^0\|_{\mathfrak{X}_j} : x^0 \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \ |x^0|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le t \right\}$, $x \in \mathfrak{X}_j$.

Нехай $0 < \theta < 1$ і $[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}$ позначає простір $\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)$, наділений квазінормою $|x|^{\theta}_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)}$, $\otimes_j [\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}$ — тензорний добуток з

проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^{N} |x_n^1|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_1,\tau_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot |x_n^J|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_J,\tau_J}(A_J)},$$

$\tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta$ — поповнення простору $\otimes_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta$ у цій квазінормі.

Теорема 5.3.1. *Нехай* $1 \le p_j, q, q_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\tau_j = \theta q_j$, $\theta = \dfrac{1}{s+1}$ *виконується неперервне вкладення*

$$\big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)]^\theta. \tag{5.21}$$

Д о в е д е н н я. Для кожного індексу $j = 1, \ldots, J$ визначимо інтерполяційний простір

$$\big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j)\,, \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j} = \big\{x \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j) + \mathfrak{X}_j \colon |x|_{(\mathcal{E}_{p_j}(A_j)\,,\mathfrak{X}_j)_{\theta,q_j}} < \infty\big\}$$

наділений квазінормою

$$|x|_{(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j)_{\theta,q_j}} = \left(\int_0^\infty \big[t^{-\theta} K(t,x;\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j)\big]^{q_j} \frac{dt}{t}\right)^{1/q_j},$$

де $K(t,x;\mathcal{E}_{p_j}(A_j)\,,\mathfrak{X}_j) = \inf_{x=x^0+x^1}\big\{|x^0|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} + t\|x^1\|_{\mathfrak{X}_j}\big\}$, $x^0 \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $x^1 \in \mathfrak{X}_j$ і $t > 0$. Тензорний добуток

$$\otimes_j\big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j} := (\mathcal{E}_{p_1}(A_1), \mathfrak{X}_1)_{\theta,q_1} \otimes \ldots \otimes (\mathcal{E}_{p_J}(A_J), \mathfrak{X}_J)_{\theta,q_J}$$

цих просторів наділимо проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}} = \inf \sum_n |x_n^1|_{(\mathcal{E}_{p_1}(A_1)\,,\mathfrak{X}_1)_{\theta,q_1}} \ldots |x_n^J|_{(\mathcal{E}_{p_J}(A_J)\,,\mathfrak{X}_J)_{\theta,q_J}},$$

де $\inf$ за всіма скінченними сумами $w = \sum_n \otimes_j x_n^j \in \otimes_j \left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}$ із $x_n^j \in (\mathcal{E}_{p_j}(A_j)\,, \mathfrak{X}_j)_{\theta,q_j}$.

Покажемо, що

$$\big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j\big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j}, \tag{5.22}$$

де справа поповнення $\otimes_j\big(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\big)_{\theta,q_j}$ відносно $|\cdot|_{\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}}$.

Застосовуючи інтерполяційну нерівність

$$|x|_{(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j)_{\theta,q_j}} \le c_{\theta,q_j}\max\left(t^{-\theta}|x|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}, t^{1-\theta}\|x\|_{\mathfrak{X}_j}\right),\ x\in\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$$

і те, що для будь-якого $t>0$ існують $u\in\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ і $v\in\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j$ такі, що $w=u+v$ і

$$|u|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le c_{\theta,q}t^{\theta}|w|_{(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j)_{\theta,q}},$$

$$\|v\|_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j} \le c_{\theta,q}t^{\theta-1}|w|_{(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j)_{\theta,q}},$$

для всіх скінченних сум $w=\sum_n\otimes_j x_n^j\in(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j)_{\theta,q}$ отримуємо

$$\begin{aligned}
&|w|_{\tilde{\otimes}_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}} = \inf_{w=\sum_n\otimes_j x_n^j}\sum_n |x_n^1|_{(\mathcal{E}_{p_1}(A_1),\mathfrak{X}_1)_{\theta,q_1}}\dots|x_n^J|_{(\mathcal{E}_{p_J}(A_J),\mathfrak{X}_J)_{\theta,q_J}}\\
&\le c'\inf_{w=\sum_n\otimes_j x_n^j}\Big(\sum_n\max\left(s^{-\theta}|x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)}, s^{1-\theta}\|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1}\right)\\
&\dots\max\left(s^{-\theta}|x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}, s^{1-\theta}\|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J}\right)\Big)\\
&\le c''\inf_{w=\sum_n\otimes_j x_n^j}\Big(s^{-\theta J}\sum_n|x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)}\dots|x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}\\
&+s^{(1-\theta)J}\sum_n\|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1}\dots\|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J}\Big)\\
&\le c''\Big(t^{-\theta}\inf_{u=\sum_n\otimes_j u_n^j}\sum_n|u_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(A_1)}\dots|u_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(A_J)}\\
&+t^{1-\theta}\inf_{v=\sum_n\otimes_j v_n^j}\sum_n\|v_n^1\|_{\mathfrak{X}_1}\dots\|v_n^J\|_{\mathfrak{X}_J}\Big)\\
&=c''\big(t^{-\theta}|u|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}+t^{1-\theta}\|v\|_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j}\big)\le c\,|w|_{(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j)_{\theta,q}}.
\end{aligned}$$

При переході від першої нерівності до другої використано те, що $|x|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\ge\|x\|_{\mathfrak{X}_j}$, $x\in\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, оскільки при цьому для всіх $j,l=1,\dots,J$

і $s > 0$

$$s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} \leq s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-\theta}|x_n^l|_{\mathcal{E}_{p_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}. \tag{5.23}$$

Справді, при $s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \geq s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}$ і $s^{-\theta}|x_n^l|_{\mathcal{E}_{p_l}(A_l)} \leq s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}$, відповідно маємо

$$\max\left(s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}, s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}\right) = s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)},$$
$$\max\left(s^{-\theta}|x_n^l|_{\mathcal{E}_{p_l}(A_l)}, s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}\right) = s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}.$$

Оскільки $s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \geq s^{-1}s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j} = s^{-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}$, а також $s^{-\theta}|x_n^l|_{\mathcal{E}_{p_l}(A_l)} \geq s^{-1}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} = s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}$, то

$$s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} \geq s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-\theta}|x_n^l|_{\mathcal{E}_{p_l}(A_l)}$$
$$\geq s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-1}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} = s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l},$$

тобто

$$s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} \geq s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}. \tag{5.24}$$

З іншого боку, маємо

$$s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-\theta}|x_n^l|_{\mathcal{E}_{p_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}$$
$$\geq s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-1}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}$$
$$= s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l},$$

тобто

$$\begin{aligned} &s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-\theta}|x_n^l|_{\mathcal{E}_{p_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} \\ &\geq s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Віднімаючи від нерівності (5.25) нерівність (5.24), отримуємо

$$s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{-\theta}|x_n^l|_{\mathcal{E}_{p_l}(A_l)} + s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l}$$
$$-s^{-\theta}|x_n^j|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} \geq s^{1-\theta}\|x_n^j\|_{\mathfrak{X}_j}s^{1-\theta}\|x_n^l\|_{\mathfrak{X}_l} \geq 0,$$

тобто (5.23) виконується.

При переході від другої до третьої нерівності, зважаючи на те, що береться inf по всіх $w = \sum_n \otimes_j x_n^j$, $x_n^j \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, беремо послідовно inf по двох часткових представленнях $w = u = \sum_n \otimes_j u_n^j$ із $u_n^j \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ і $w = v = \sum_n \otimes_j v_n^j$ із $v_n^j \in \mathfrak{X}_j$.

Підпростір $\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ щільний в $(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j)_{\theta,q_j}$, а тому нерівність

$$|w|_{\tilde{\otimes}_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}} \le c\,|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}$$

виконується для всіх $w \in \left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}$. Звідси випливає вкладення (5.22).

Згідно з теоремою 2.2.1(i) наявний ізоморфізм квазінормованих просторів

$$\left[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)\right]^\theta = \left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}, \quad |x|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j)} \sim |x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q_j}}, \tag{5.26}$$

де $\tau_j = \theta q_j$ і $\theta = \dfrac{1}{s+1}$. З рівностей (5.26) і (5.22) отримуємо (5.21). Теорема доведена.

Для індексів $0 < s < \infty$, $0 < \tau < \infty$ і $p = (p_1, \ldots, p_J)$ визначимо апроксимаційний простір, породжений скінченним набором операторів $A_1, \ldots, A_J$,

$$\mathscr{B}^s_{p,\tau} := \mathscr{B}^s_{p,\tau}(A_1, \ldots, A_J; \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j) = \{w \in \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j \colon |w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}} = \Big(\int_0^\infty \left[t^s E_p(t,w)\right]^\tau \frac{dt}{t}\Big)^{1/\tau},$$

де $E_p(t,w) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le t} \|w-u\|_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j}$, $u \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $w \in \tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j$.

Теорема 5.3.2. *Виконуються такі нерівності:*

$$|w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}} \le c_{s,\tau}|w|^s_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\|w\|_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j}, \ w \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tag{5.27}$$

$$E_p(t,w) \le 2^{s+1}C_{s,\tau}t^{-s}|w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}}, \ w \in \mathscr{B}^s_{p,\tau}, \tag{5.28}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau}^{-1} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \left(\tau s^{-1}(s+1)^2\right)^{1/\tau}.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $1 \le q < \infty$ і $w \ne 0$. Оскільки

$$K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \le \min\left(|w|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)}, t\|w\|_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j}\right),$$

отримуємо

$$\begin{aligned} |w|^q_{(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \mathfrak{X})_{\theta,q}} &\le \|w\|^q_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j} \int_0^\alpha t^{-1+q(1-\theta)} dt + |w|^q_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \int_\alpha^\infty t^{-1-\theta q} dt \\ &= \frac{1}{q(1-\theta)}\, \alpha^{q(1-\theta)} \|w\|^q_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j} + \frac{1}{\theta q}\, \alpha^{-\theta q} |w|^q_{\mathcal{E}(A)} \\ &= \frac{1}{q\theta(1-\theta)} \left(|w|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \|w\|^\theta_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j}\right)^q \end{aligned}$$

для $\alpha = |w|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} / \|w\|_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j}$. Це можна записати як

$$|w|_{(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)_{\theta,q}} \le [q\theta(1-\theta)]^{-1/q} |w|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \|w\|^\theta_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j}.$$

Якщо $q = \infty$, то маємо $K(t, x; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \le t^\theta |w|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \|w\|^\theta_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j}$. З попередніх нерівностей маємо

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} \le \begin{cases} [q\theta(1-\theta)]^{-1/q}\, |w|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \|w\|^\theta_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j} & : \ q < \infty \\ |w|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \|w\|^\theta_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j} & : \ q = \infty. \end{cases} \tag{5.29}$$

Розглянемо функціонал

$$K_\infty(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) := \inf_{w = w^0 + w^1} \max\left(|w^0|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)}, t\|w^1\|_{\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j}\right).$$

Зауважимо, що $v^{-\theta} K_\infty(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \to 0$ при $v \to 0$ або $v \to \infty$, а також $t^s E(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \to 0$ при $t \to 0$ або $t \to \infty$. Інтегруванням частинами із заміною змінних $v = t/E(t, x; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)$,

отримуємо

$$\int_0^\infty (v^{-\theta} K_\infty(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j))^q dv/v$$
$$= -\frac{1}{\theta q} \int_0^\infty K_\infty(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)^q dv^{-\theta q}$$
$$= \frac{1}{\theta q} \int_0^\infty v^{-\theta q} dK_\infty(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)^q$$
$$= \frac{1}{\theta q} \int_0^\infty (t/E(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j))^{-\theta q} dt^q$$
$$= \frac{1}{\theta q^2} \int_0^\infty (t^s E(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j))^{\theta q} dt/t \quad \text{для} \quad s = 1/\theta - 1.$$

Наступні нерівності є наслідками означень K і K_∞ [186, Зауваження 3.1],

$$\begin{aligned} K_\infty(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) &\leq K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \\ &\leq 2K_\infty(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Відповідно до лівої нерівності (5.30), маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta q^2} |w|^{\theta q}_{\mathscr{B}^s_\tau(A)} &= \frac{1}{\theta q^2} \int_0^\infty (t^s E(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j))^{\theta q} dt/t \\ &= \int_0^\infty (v^{-\theta} K_\infty(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j))^q dv/v \\ &\leq \int_0^\infty (v^{-\theta} K(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j))^q dv/v \\ &= |w|^q_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}. \end{aligned}$$

З іншого боку, з правої нерівності (5.30) випливає

$$\begin{aligned}
|w|^q_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} &= \int_0^\infty (v^{-\theta}K(v,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j))^q dv/v \\
&\le 2^q\int_0^\infty (v^{-\theta}K_\infty(v,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j))^q dv/v \\
&= 2^q\frac{1}{\theta q^2}\int_0^\infty (t^sE(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j))^{\theta q} dt/t \\
&= 2^q\frac{1}{\theta q^2}|w|^{\theta q}_{\mathscr{B}^s_\tau(A)}.
\end{aligned}$$

Таким чином, комбінуючи попередні нерівності, для $\tau=\theta q$ отримуємо

$$|w|^q_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} \le 2^q(\theta q^2)^{-1}|w|^{\theta q}_{\mathscr{B}^s_\tau(A)} \le 2^q|w|^q_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}. \tag{5.31}$$

Відповідно [3, лема 7.1.2] для кожного $v>0$ існує таке $t>0$, що

$$\begin{aligned}
t^sE(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j))^\theta &\le v^{-\theta}K_\infty(v,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j) \\
&\le \left(t^sE(t-0,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j)\right)^\theta. \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

Оскільки $|w|^\theta_{\mathscr{B}^s_\infty(A)} \le |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,\infty}}$, нерівності (5.32) дають

$$\begin{aligned}
\nu^{-\theta}K(\nu,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j) &\le \nu^{-\theta}2K_\infty(\nu,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j) \\
&\le 2(t^sE(t-0,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j))^\theta \\
&\le 2(\sup_{t>0} t^sE(t,w;\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j))^\theta \\
&= 2|w|^\theta_{\mathscr{B}^s_\infty(A)}.
\end{aligned}$$

Як наслідок, $|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\right)_{\theta,\infty}} \le 2|w|^\theta_{\mathcal{B}^s_\infty(A)}$. Застосовуючи (5.29), отримуємо

$$|w|^\theta_{\mathscr{B}^s_\tau(A)} \le \begin{cases} [q/(1-\theta)]^{1/q}|w|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\|w\|^\theta_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j} & : \ q<\infty \\ |w|^{1-\theta}_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\|w\|^\theta_{\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j} & : \ q=\infty. \end{cases} \tag{5.33}$$

Покладаючи $s=1/\theta-1$ і $\tau=\theta q$ в (5.33), отримуємо нерівності (5.27).

Інтегруванням обох частин нерівності

$$\min(1, v/t)K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \le K(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)$$

отримуємо

$$\left(\int_0^\infty \left(v^{-\theta}\min(1, v/t)\right)^q \frac{dv}{v}\right)^{1/q} K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \le$$

$$\le \left(\int_0^\infty \left(v^{-\theta}K(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)\right)^q \frac{dv}{v}\right)^{1/q} = |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}} \quad \text{і}$$

$$\left(\int_0^\infty \left(v^{-\theta}\min(1, v/t)\right)^q \frac{dv}{v}\right)^{1/q} = \left(\int_0^t v^{(1-\theta)q-1}t^{-q}dv + \int_t^\infty v^{-\theta q-1}dv\right)^{1/q}$$

$$= \frac{1}{[q\theta(1-\theta)]^{1/q}t^\theta},$$

відповідно. Як наслідок,

$$\left(\int_0^t \frac{v^{(1-\theta)q-1}}{t^q}dv + \int_t^\infty v^{-\theta q-1}dv\right)^{1/q} K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)$$

$$= \frac{K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)}{[q\theta(1-\theta)]^{1/q}t^\theta} \le |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}.$$

Отже, $K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \le [q\theta(1-\theta)]^{1/q}t^\theta |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), X\right)_{\theta,q}}$. Беручи до уваги (5.30), (5.32), маємо

$$\begin{aligned} v^{1-\theta}E(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)^\theta &\le t^{-\theta}K_\infty(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \\ &\le [q\theta(1-\theta)]^{1/q}|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j\right)_{\theta,q}}. \end{aligned}$$

Застосовуючи (5.31), отримуємо

$$v^{1-\theta}E(v, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j)^\theta \le 2[(1-\theta)/q]^{1/q}|w|^\theta_{\mathscr{B}^s_\tau(A)}.$$

Покладаючи $s = (1-\theta)/\theta$ і $\tau = \theta q$, отримуємо (5.28) для $1 \le q < \infty$. Якщо $q = \infty$, маємо

$$t^sE(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) \le \sup_{t>0} t^sE(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j) = |w|_{\mathscr{B}^s_\infty(A)}$$

для всіх $w \in \mathscr{B}^s_\infty(A)$. Теорема доведена.

Припустимо, що $0 \in \rho(A_j)$ для всіх $j = 1, \ldots, J$ і $\mathcal{C}^m_j$ — область визначення оператора A^m_j в просторі $\mathfrak{X}_j$. Тоді можна визначити тензорний добуток $\otimes_j \mathcal{C}^m_j := \mathcal{C}^m_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{C}^m_J$ скінченного набору банахових просторів $\left\{\mathcal{C}^m_j, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^m_j}\right\}_{j=1}^J$ із проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j \mathcal{C}^m_j} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x^j_n} \sum_{n=1}^N \|x^1_n\|_{\mathcal{C}^m_1} \cdot \ldots \cdot \|x^J_n\|_{\mathcal{C}^m_J}.$$

Поповнення простору $\otimes_j \mathcal{C}^m_j$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j$.

Для чисел $1 \le p_j \le \infty$ $(j = 1, \ldots, J)$ визначимо також тензорний добуток $\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j) := \mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J)$ з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x^j_n} \sum_{n=1}^N |x^1_n|_{\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1)} \cdot \ldots \cdot |x^J_n|_{\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J)}.$$

Поповнення простору $\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$ у цій квазінормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$.

Для $0 < q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 < t < \infty$ визначимо інтерполяційний простір $\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q}$ з квазінормою

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q},$$

$K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j) = \inf\limits_{w=u+v} \left(|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} + t\,\|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j}\right)$, $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$, $v \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j$.

Для чисел $0 < s < \infty$ і $0 < \tau_j \le \infty$ визначимо апроксимаційні простори між квазінормованим підпростором $\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$ і банаховим простором $\mathcal{C}^m_j$

$$\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j) = \left\{x \in \mathcal{C}^m_j : \ |x|_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j)} < \infty\right\},$$

наділені квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^s E^m_{p_j}(t,x)\right]^{\tau_j} \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau_j}, & 0 < \tau_j < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E^m_{p_j}(t,x), & \tau_j = \infty. \end{cases}$$

де $E^m_{p_j}(t,x) = \inf\left\{\|x-x^0\|_{\mathcal{C}^m_j} \colon x^0 \in \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j),\ |x^0|_{\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} \le t\right\},\ x \in \mathcal{C}^m_j$.

Нехай $0<\theta<1$ і $[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j)]^\theta$ позначає простір $\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j)$, наділений квазінормою $|x|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j)}$, $\otimes_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j)]^\theta$ — тензорний добуток з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j)]^\theta} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x^j_n} \sum_{n=1}^N |x^1_n|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_1,\tau_1}(\mathcal{C}^m_1)} \cdot \ldots \cdot |x^J_n|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_J,\tau_J}(\mathcal{C}^m_J)};$$

$\tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j)]^\theta$ — його поповнення.

Теорема 5.3.3. *Нехай* $1 \le p_j, q, q_j \le \infty$, $0<\theta<1$. *Тоді при* $\tau_j = \theta q_j$, $\theta = \dfrac{1}{s+1}$ *виконується неперервне вкладення*

$$\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^m_j)]^\theta. \tag{5.34}$$

Д о в е д е н н я. Покажемо, що

$$\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q_j}, \tag{5.35}$$

де $\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q_j}$ — інтерполяційний простір з квазінормою

$$|x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q_j}} = \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(t,x;\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j)\right]^{q_j} \frac{dt}{t}\right)^{1/q_j},$$

$K(t,x;\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j) = \inf\limits_{x=x^0+x^1}\left(|x^0|_{\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} + t\,\|x^1\|_{\mathcal{C}^m_j}\right)$, $x^0 \in \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$, $x^1 \in \mathcal{C}^m_j$; $\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q_j} := (\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1), \mathcal{C}^m_1)_{\theta,q_1} \otimes \ldots \otimes (\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J), \mathcal{C}^m_J)_{\theta,q_J}$ — тензорний добуток цих просторів, наділений проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q_j}} = \inf \sum_n |x^1_n|_{(\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}^m_1), \mathcal{C}^m_1)_{\theta,q_1}} \ldots |x^J_n|_{(\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}^m_J), \mathcal{C}^m_J)_{\theta,q_J}},$$

де inf за всіма скінченними сумами $w = \sum_n \otimes_j x^j_n \in \otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q_j}$ із $x^j_n \in (\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j)_{\theta,q_j}$. Через $\tilde{\otimes}_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q_j}$ позначено поповнення $\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q_j}$ у проективній квазінормі $|\cdot|_{\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j\right)_{\theta,q_j}}$.

Застосовуючи інтерполяційну нерівність

$$|x|_{(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \mathcal{C}^m_j)_{\theta,q_j}} \le c_{\theta,q_j} \max\left(t^{-\theta}|x|_{\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)}, t^{1-\theta}\|x\|_{\mathcal{C}^m_j}\right),\ x \in \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$$

і те, що для будь-якого $t > 0$ існують $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m)$ і $v \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^m$ такі, що $w = u + v$ і

$$|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m)} \le c_{\theta,q} t^{\theta} |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q}},$$

$$\|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^m} \le c_{\theta,q} t^{\theta-1} |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q}},$$

для всіх скінченних сум $w = \sum_n \otimes_j x_n^j \in (\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^m)_{\theta,q}$ отримуємо

$$|w|_{\tilde{\otimes}_j \left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q_j}} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_n |x_n^1|_{(\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^m), \mathcal{C}_1^m)_{\theta,q_1}} \dots |x_n^J|_{(\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^m), \mathcal{C}_J^m)_{\theta,q_J}}$$

$$\le c' \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \Big(\sum_n \max\left(s^{-\theta} |x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^m)}, s^{1-\theta} \|x_n^1\|_{\mathcal{C}_1^m}\right)$$

$$\dots \max\left(s^{-\theta} |x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^m)}, s^{1-\theta} \|x_n^J\|_{\mathcal{C}_J^m}\right)\Big)$$

$$\le c'' \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \Big(s^{-\theta J} \sum_n |x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^m)} \dots |x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^m)}$$

$$+ s^{(1-\theta)J} \sum_n \|x_n^1\|_{\mathcal{C}_1^m} \dots \|x_n^J\|_{\mathcal{C}_J^m}\Big)$$

$$\le c''\Big(t^{-\theta} \inf_{u=\sum_n \otimes_j u_n^j} \sum_n |u_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^m)} \dots |u_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^m)}$$

$$+ t^{1-\theta} \inf_{v=\sum_n \otimes_j v_n^j} \sum_n \|v_n^1\|_{\mathcal{C}_1^m} \dots \|v_n^J\|_{\mathcal{C}_J^m}\Big)$$

$$= c''\big(t^{-\theta} |u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m)} + t^{1-\theta} \|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^m}\big) \le c\, |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q}}.$$

Оскільки підпростір $\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m)$ щільний в $\left(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q_j}$, то для всіх $w \in \left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q}$ виконується нерівність

$$|w|_{\tilde{\otimes}_j \left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q_j}} \le c\, |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q}}.$$

З цієї нерівності випливає вкладення (5.35).

В силу рівності (2.39) для всіх $j = 1, \dots, J$ наявний ізоморфізм квазінормованих просторів

$$\left[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(\mathcal{C}_j^m)\right]^{\theta} = \left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q_j}, \quad |x|^{\theta}_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(\mathcal{C}_j^m)} \sim |x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^m), \mathcal{C}_j^m\right)_{\theta,q_j}}, \tag{5.36}$$

де $\tau_j = \theta q_j$ і $\theta = \dfrac{1}{s+1}$. З рівності (5.36) і (5.35) отримуємо (5.34). Теорема доведена.

Для індексів $0 < s < \infty$, $0 < \tau < \infty$ і $p = (p_1, \ldots, p_J)$ визначимо апроксимаційний простір, породжений скінченним набором операторів $A_1, \ldots, A_J$,

$$\mathscr{B}^{s,m}_{p,\tau} := \mathscr{B}^{s,m}_{p,\tau}(A_1, \ldots, A_J; \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j) = \{w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j \colon |w|_{\mathscr{B}^{s,m}_{p,\tau}} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|w|_{\mathscr{B}^{s,m}_{p,\tau}} = \Big(\int_0^\infty \big[t^s E^m_p(t,w)\big]^\tau \frac{dt}{t} \Big)^{1/\tau},$$

де $E^m_p(t,w) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} \le t} \|w-u\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j}$, $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$, $w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j$.

Теорема 5.3.4. *Виконуються такі нерівності:*

$$|w|_{\mathscr{B}^{s,m}_{p,\tau}} \le c_{s,\tau} |w|^s_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)} \|w\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j}, \ w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j), \tag{5.37}$$

$$E^m_p(t,w) \le 2^{s+1} C_{s,\tau} t^{-s} |w|_{\mathscr{B}^{s,m}_{p,\tau}}, \ w \in \mathscr{B}^{s,m}_{p,\tau}, \tag{5.38}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \big(\tau s^{-1}(s+1)^2\big)^{1/\tau}.$$

Д о в е д е н н я. Повторюючи міркування доведення теореми 5.3.2, поклавши $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^m_j)$ замість $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ і $\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^m_j$ замість $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$, отримуємо потрібні нерівності (5.37) і (5.38). Теорема доведена.

5.4. Тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з позитивними операторами

Нехай A_j $(j = 1, \ldots, J)$ — позитивні оператори в комплексних банахових просторах $\mathfrak{X}_j$ (див. означення 3.3.1). Позначимо $\mathcal{C}^\alpha_j := \mathcal{C}^\alpha(A_j)$

$(\alpha \in \mathbb{C})$ область визначення оператора A_j^α з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}_j^\alpha} = \|A_j^\alpha x\|_{\mathfrak{X}_j}$, $x \in \mathcal{C}_j^\alpha \subset \mathfrak{X}_j$.

Визначимо тензорний добуток $\otimes_j \mathcal{C}_j^\alpha := \mathcal{C}_1^\alpha \otimes \ldots \otimes \mathcal{C}_J^\alpha$ із проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j \mathcal{C}_j^\alpha} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathcal{C}_1^\alpha} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{C}_J^\alpha}.$$

Поповнення простору $\otimes_j \mathcal{C}_j^\alpha$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha$.

Нехай $1 \le p_j \le \infty$ $(j = 1, \ldots, J)$, $\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha) := \mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^\alpha) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^\alpha)$ — тензорний добуток з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^N |x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^\alpha)} \cdot \ldots \cdot |x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^\alpha)};$$

$\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)$ — його поповнення у цій квазінормі.

Для чисел $0 < q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 < t < \infty$ визначимо інтерполяційний простір $\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q}$ з квазінормою

$$|w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

$K(t, w; \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha) = \inf\limits_{w=u+v} \left(|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)} + t\, \|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha} \right)$, $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)$, $v \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha$.

Для чисел $0 < s < \infty$ і $0 < \tau_j \le \infty$ визначимо апроксимаційні простори

$$\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}_j^\alpha) = \left\{ x \in \mathcal{C}_j^\alpha : \ |x|_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)} < \infty \right\},$$

наділені квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^s E^\alpha_{p_j}(t,x) \right]^{\tau_j} \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau_j}, & 0 < \tau_j < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E^\alpha_{p_j}(t,x), & \tau_j = \infty. \end{cases}$$

де $E^\alpha_{p_j}(t,x) = \inf \left\{ \|x - x^0\|_{\mathcal{C}_j^\alpha} \colon x^0 \in \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha),\ |x^0|_{\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)} \le t \right\}$, $x \in \mathcal{C}_j^\alpha$.

Нехай $[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta$ $(0<\theta<1)$ — простір $\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)$, наділений квазінормою $|x|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)}$, $\otimes_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta$ — тензорний добуток з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta}=\inf_{w=\sum_n\otimes_j x^j_n}\sum_{n=1}^N|x^1_n|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_1,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha_1)}\cdot\ldots\cdot|x^J_n|^\theta_{\mathcal{B}^s_{p_J,\tau_J}(\mathcal{C}^\alpha_J)};$$

$\tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta$ — його поповнення.

Теорема 5.4.1. *Нехай* $1\le p_j,q,q_j\le\infty$, $0<\theta<1$. *Тоді при* $\tau_j=\theta q_j$, $\theta=\dfrac{1}{s+1}$ *виконується неперервне вкладення*

$$\big(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{C}^\alpha_j\big)_{\theta,q}\subset\tilde{\otimes}_j[\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)]^\theta. \tag{5.39}$$

Д о в е д е н н я. Спочатку покажемо, що

$$\big(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\tilde{\otimes}_j\mathcal{C}^\alpha_j\big)_{\theta,q}\subset\tilde{\otimes}_j\big(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j\big)_{\theta,q_j}, \tag{5.40}$$

де $\big(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j\big)_{\theta,q_j}$ — інтерполяційний простір з квазінормою

$$|x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j\right)_{\theta,q_j}}=\left(\int_0^\infty\left[t^{-\theta}K(t,x;\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j)\right]^{q_j}\frac{dt}{t}\right)^{1/q_j},$$

$K(t,x;\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j)=\inf\limits_{x=x^0+x^1}\big(|x^0|_{\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)}+t\,\|x^1\|_{\mathcal{C}^\alpha_j}\big)$, $x^0\in\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)$, $x^1\in\mathcal{C}^\alpha_j$; $\otimes_j\big(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j\big)_{\theta,q_j}:=(\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}^\alpha_1),\mathcal{C}^\alpha_1)_{\theta,q_1}\otimes\ldots\otimes(\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}^\alpha_J),\mathcal{C}^\alpha_J)_{\theta,q_J}$ — тензорний добуток цих просторів, наділений проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j\right)_{\theta,q_j}}=\inf\sum_n|x^1_n|_{(\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}^\alpha_1),\mathcal{C}^\alpha_1)_{\theta,q_1}}\ldots|x^J_n|_{(\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}^\alpha_J),\mathcal{C}^\alpha_J)_{\theta,q_J}},$$

де $\inf$ за всіма скінченними сумами $w=\sum_n\otimes_j x^j_n\in\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j\right)_{\theta,q_j}$ із $x^j_n\in(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j)_{\theta,q_j}$. Як звичайно, через $\tilde{\otimes}_j\big(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j\big)_{\theta,q_j}$ позначено поповнення $\otimes_j\big(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j\big)_{\theta,q_j}$ у проективній квазінормі $|\cdot|_{\otimes_j\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j\right)_{\theta,q_j}}$.

Застосовуючи інтерполяційну нерівність

$$|x|_{(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j),\mathcal{C}^\alpha_j)_{\theta,q_j}}\le c_{\theta,q_j}\max\big(t^{-\theta}|x|_{\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)},t^{1-\theta}\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha_j}\big),\ x\in\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)$$

і те, що для будь-якого $t > 0$ існують $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)$ і $v \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha$ такі, що $w = u + v$ і

$$|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)} \le c_{\theta,q} t^\theta |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q}},$$

$$\|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha} \le c_{\theta,q} t^{\theta-1} |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q}},$$

для всіх скінченних сум $w = \sum_n \otimes_j x_n^j \in \left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q}$ отримуємо

$$|w|_{\tilde{\otimes}_j \left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q_j}} = \inf_{w = \sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_n |x_n^1|_{(\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^\alpha), \mathcal{C}_1^\alpha)_{\theta,q_1}} \dots |x_n^J|_{(\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^\alpha), \mathcal{C}_J^\alpha)_{\theta,q_J}}$$

$$\le c' \inf_{w = \sum_n \otimes_j x_n^j} \Big(\sum_n \max\left(s^{-\theta} |x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^\alpha)}, s^{1-\theta} \|x_n^1\|_{\mathcal{C}_1^\alpha}\right)$$

$$\dots \max\left(s^{-\theta} |x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^\alpha)}, s^{1-\theta} \|x_n^J\|_{\mathcal{C}_J^\alpha}\right)\Big)$$

$$\le c'' \inf_{w = \sum_n \otimes_j x_n^j} \Big(s^{-\theta J} \sum_n |x_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^\alpha)} \dots |x_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^\alpha)}$$

$$+ s^{(1-\theta)J} \sum_n \|x_n^1\|_{\mathcal{C}_1^\alpha} \dots \|x_n^J\|_{\mathcal{C}_J^\alpha}\Big)$$

$$\le c''\Big(t^{-\theta} \inf_{u = \sum_n \otimes_j u_n^j} \sum_n |u_n^1|_{\mathcal{E}_{p_1}(\mathcal{C}_1^\alpha)} \dots |u_n^J|_{\mathcal{E}_{p_J}(\mathcal{C}_J^\alpha)}$$

$$+ t^{1-\theta} \inf_{v = \sum_n \otimes_j v_n^j} \sum_n \|v_n^1\|_{\mathcal{C}_1^\alpha} \dots \|v_n^J\|_{\mathcal{C}_J^\alpha}\Big)$$

$$= c''\left(t^{-\theta} |u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)} + t^{1-\theta} \|v\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha}\right) \le c\, |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q}}.$$

Оскільки підпростір $\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha)$ щільний в $\left(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q_j}$, то для всіх $w \in \left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q}$ виконується нерівність

$$|w|_{\tilde{\otimes}_j \left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q_j}} \le c\, |w|_{\left(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q}}.$$

З цієї нерівності випливає вкладення (5.40).

В силу рівності (3.85) для всіх $j = 1, \dots, J$ наявний ізоморфізм квазінормованих просторів

$$\left[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(\mathcal{C}_j^\alpha)\right]^\theta = \left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q_j}, \quad |x|^\theta_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(\mathcal{C}_j^\alpha)} \sim |x|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}_j^\alpha), \mathcal{C}_j^\alpha\right)_{\theta,q_j}}, \tag{5.41}$$

де $\tau_j = \theta q_j$ і $\theta = \dfrac{1}{\alpha+1}$. З рівності (5.41) і (5.40) отримуємо (5.39). Теорема доведена.

Для індексів $0 < s < \infty$, $0 < \tau < \infty$ і $p = (p_1, \ldots, p_J)$ визначимо апроксимаційний простір, породжений скінченним набором операторів $A_1, \ldots, A_J$,

$$\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau} := \mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}(A_1, \ldots, A_J; \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j) = \{w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j \colon |w|_{\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|w|_{\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}} = \Big(\int_0^\infty \big[t^s E^\alpha_p(t,w)\big]^\tau \frac{dt}{t} \Big)^{1/\tau},$$

де $E^\alpha_p(t,w) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)} \le t} \|w-u\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j}$, $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)$, $w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j$.

Теорема 5.4.2. *Виконуються такі нерівності:*

$$|w|_{\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}} \le c_{s,\tau} |w|^s_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)} \|w\|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j}, \ w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j), \tag{5.42}$$

$$E^\alpha_p(t,w) \le 2^{s+1} C_{s,\tau} t^{-s} |w|_{\mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}}, \ w \in \mathscr{B}^{s,\alpha}_{p,\tau}, \tag{5.43}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \big(\tau s^{-1}(s+1)^2\big)^{1/\tau}.$$

Д о в е д е н н я. Повторюючи міркування доведення теореми 5.3.2, поклавши $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(\mathcal{C}^\alpha_j)$ замість $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ і $\tilde{\otimes}_j \mathcal{C}^\alpha_j$ замість $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$, отримуємо потрібні нерівності (5.42) і (5.43). Теорема доведена.

5.5. Тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з еліптичними операторами

На просторах $\left\{L_{p_j}(\Omega_j)\right\}_{j=1}^{J}$ $(1 < p_j < \infty)$ комплексних сумовних функцій розглянемо регулярно еліптичні оператори (в сенсі означення 4.1.5)

$$A_j u = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_{j,\alpha}(\xi) D^\alpha u, \quad a_{j,\alpha}(\xi) \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{C}^1(A_j) = \left\{u \in W_{p_j}^{2m}(\Omega_j) \colon B_{ji} u|_{\partial\Omega_j} = 0,\ j = 1, \ldots, J, i = 1, \ldots, m\right\},$$

де $W_{p_j}^{2m}(\Omega_j)$ – простір Соболєва; $(B_{ji}u)(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m_i} b_{j,i,\alpha}(\xi) D^\alpha u(\xi)$ — набір граничних операторів; $b_{j,i,\alpha}(\xi) \in C^\infty(\partial\Omega_j)$, $i = 1, \ldots, m$.

Нехай $\otimes_j L_{p_j}(\Omega_j) := L_{p_1}(\Omega_1) \otimes \ldots \otimes L_{p_J}(\Omega_J)$ — тензорний добуток, на якому задаємо проективну норму

$$\|w\|_{\otimes_j L_{p_j}(\Omega_j)} = \inf_{w = \sum_n \otimes_j u_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|u_n^1\|_{L_{p_1}(\Omega_1)} \cdot \ldots \cdot \|u_n^J\|_{L_{p_J}(\Omega_J)},$$

де inf береться по всіх зображеннях елемента $w \in \otimes_j L_{p_j}(\Omega_j)$ у вигляді суми $w = \sum_{n=1}^{N} \otimes_j u_n^j$ зі скінченним N, $u_n^j \in L_{p_j}(\Omega_j)$ і $\otimes_j u_n^j = u_n^1 \otimes \ldots \otimes u_n^J \in \otimes_j L_{p_j}(\Omega_j)$. Поповнення простору $\otimes_j L_{p_j}(\Omega_j)$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j) := L_{p_1}(\Omega_1) \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} L_{p_J}(\Omega_J)$.

Для пар чисел $\{0 < s < \infty, 0 < \tau_j \le \infty\}$ і $\{0 \le s < \infty, \tau_j = \infty\}$ визначимо апроксимаційні простори

$$\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j) = \left\{u \in L_{p_j}(\Omega_j) : \ |u|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)} < \infty\right\},$$

наділені квазінормою

$$|u|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^s(A_j)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^s E_{p_j}(t,u)\right]^{\tau_j} \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau_j}, & 0 < \tau_j < \infty, \\ \sup_{t>0} t^s E_{p_j}(t,u), & \tau_j = \infty, \end{cases}$$

де $E_{p_j}(t,u) = \inf\left\{\|u - u^0\|_{L_{p_j}(\Omega_j)} \colon u^0 \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j),\ |u^0|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le t\right\}$.

Визначимо також простір

$$B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j) \;=\; \Big\{u \in B^s_{p_j,\tau_j}(\Omega_j)\colon B_{ji}u|_{\partial\Omega_j}= 0,\ j = 1,\dots,J,$$
$$i = 1,\dots,m,\quad k \in \mathbb{N}_0\Big\},$$

де $B^s_{p_j,\tau_j}(\Omega_j)$ — класичний простір Бєсова.

Нехай $[B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j)]^\theta$ $(0 < \theta < 1)$ — простір $B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j)$, наділений квазінормою $\|u\|^\theta_{B^s_{p_j,\tau_j}(\Omega_j)}$. Визначимо тензорний добуток

$$\otimes_j[B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j)]^\theta = [B^s_{p_1,\tau_1,\{B_{1i}\}}(\Omega_1)]^\theta \otimes \ldots \otimes [B^s_{p_J,\tau_J,\{B_{Ji}\}}(\Omega_J)]^\theta$$

з проективною квазінормою

$$\|w\|_{\otimes_j[B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j)]^\theta} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j u^j_n} \sum_{n=1}^N \|u^1_n\|^\theta_{B^s_{p_1,\tau_1}(\Omega_1)} \cdot \ldots \cdot \|u^J_n\|^\theta_{B^s_{p_J,\tau_J}(\Omega_J)}.$$

Поповнення простору $\otimes_j[B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j)]^\theta$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j[B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j)]^\theta$.

Для індексів $0 < s < \infty$, $0 < \tau < \infty$ і $p = (p_1,\dots,p_J)$ визначимо апроксимаційний простір, породжений скінченним набором операторів $A_1,\dots,A_J$,

$$\mathscr{B}^s_{p,\tau} := \mathscr{B}^s_{p,\tau}(A_1,\dots,A_J;\tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)) = \{w \in \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)\colon |w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}} = \Big(\int_0^\infty [t^s E_p(t,w)]^\tau \frac{dt}{t}\Big)^{1/\tau},$$

де $E_p(t,w) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\le t} \|w-u\|_{\tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)}$, $u \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $w \in \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)$.

Теорема 5.5.1. *Нехай* $1 < p_j < \infty$, $1 \le q, q_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\tau_j = \theta q_j$, $\theta = \dfrac{1}{s+1}$ *виконується неперервне вкладення*

$$\big(\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j[B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j)]^\theta. \tag{5.44}$$

Крім того, виконуються такі нерівності:

$$|w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}} \le c_{s,\tau}|w|^s_{\tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j)}\|w\|_{\tilde{\otimes}_j L_{p_j}(\Omega_j)},\ w \in \tilde{\otimes}_j\mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tag{5.45}$$

$$E_p(t,w) \le 2^{s+1}C_{s,\tau}t^{-s}|w|_{\mathscr{B}^s_{p,\tau}},\ w \in \mathscr{B}^s_{p,\tau}, \tag{5.46}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau}^{-1} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \left(\tau s^{-1}(s+1)^2\right)^{1/\tau}.$$

Д о в е д е н н я. Із теореми 4.5.1 для всіх $j = 1,\dots,J$ маємо

$$\mathcal{B}^s_{p_j,\tau_j}(A_j) = B^s_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega_j). \tag{5.47}$$

Вкладення (5.44) є наслідком (5.21) і рівностей (5.47).

Нерівності (5.45) і (5.46) випливають відповідно з (5.27) і (5.28) з урахуванням рівностей (5.44). Теорема доведена.

Нехай $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область класу C^∞ з границею $\partial\Omega_j$ для всіх $j = 1,\dots,J$ (див. [86, означення 3.2.1/2]). Розглядаємо $\partial\Omega_j$ як гладкий многовид, U_{jl} $(l = 1,\dots,N)$ – локальні карти, що покривають $\partial\Omega_j$. Позначимо через $C^\infty(U_{jl})$ простір нескінченно диференційованих комплекснозначних функцій на U_{jl}. Нехай $y^l = (y^l_1,\dots,y^l_{n-1})$ – локальні координати на $\partial\Omega_j$, визначені дифеоморфізмами $y^l\colon U_{jl} \to \mathbb{R}^{n-1}$, обернені відображення до яких позначаємо через y^{-l}. Через $C^\infty(\partial\Omega_j)$ позначаємо простір комплекснозначних функцій u заданих на $\partial\Omega_j$ таких, що $u(y^l) = u \circ y^{-l} \in C^\infty(y^l(U_{jl}))$ для всіх $l = 1,\dots,N$.

Нехай на кожному многовиді $\partial\Omega_j$ визначено еліптичний диференціальний оператор L_j $(j = 1,\dots,J)$, який в локальних координатах $y^l = (y^l_1,\dots,y^l_{n-1})$ $(l = 1,\dots,N)$ має вигляд лінійного диференціального оператора порядку $2m \in \mathbb{N}$

$$L_j u(y^l) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_{j,\alpha}(y^l)\,\partial^\alpha(u \circ y^{-l}),\ a_{j,\alpha}(y^l) \in C^\infty(y^l(U_{jl})),\ u \in C^\infty(\partial\Omega_j),$$

де згідно з [86, означення 5.2.1] $a_{j,\alpha}(y^l) \in \mathbb{R}$ для $|\alpha| = 2m$ та існує постійна c така, що $(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_{j,\alpha}(y^l)\, \xi^\alpha \geq c\, |\xi|^{2m}$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Використовуючи відображення $\delta_{y^l}\colon C^\infty(y^l(U_{jl})) \to C^\infty(U_{jl})$, де $\delta_{y^l}(v) := v \circ y^l$ для всіх $v \in C^\infty(y^l(U_{jl}))$, кожному індексу $l = 1, \ldots, N$ можемо співставити оператор $L_{y^l} : C^\infty(y^l(U_{jl})) \to C^\infty(y^l(U_{jl}))$, де $L_{y^l} := \delta_{y^l}^{-1} \circ L \circ \delta_{y^l}$. Тоді дія оператора L на функції $u \in C^\infty(\partial\Omega_j)$ в локальних координатах $y^l = (y_1^l, \ldots, y_{n-1}^l)$ визначається, як $Lu(y^l) = L_{y^l}(u \circ y^{-l})$ для всіх $l = 1, \ldots, N$.

Припускаємо далі, що кожен оператор L_j з областю визначення $\mathfrak{D}(L_j) = C^\infty(\partial\Omega_j)$ симетричний в $L_2(\partial\Omega_j)$. Тоді його замикання, яке позначимо як A_j, має точковий спектр і область визначення його k-го степеня $\mathfrak{D}(A_j^k)$ співпадає з простором Соболєва $W_2^{2mk}(\partial\Omega_j)$ (див. [86, теорема 7.6.1]). Крім того, оператор A_j самоспряжений в $L_2(\partial\Omega_j)$, а його підпростір векторів експоненціального типу $\mathcal{E}_2(A_j)$ щільний в $L_2(\partial\Omega_j)$. Припускаємо також, що $0 \in \rho(A_j)$ для всіх $j = 1, \ldots, J$, де $\rho(A_j)$ – резольвентна множина оператора A_j.

Слідуючи [3, §7.2], розглянемо в $L_2(\partial\Omega_j)$ підпростір $\mathcal{M}_2^\nu(\partial\Omega_j)$ функцій u таких, що композиція функцій $(u \circ y^{-l})(\xi)$ змінної $\xi \in y^l(U_{jl})$ для кожного $l = 1, \ldots, N$ є звуженням на $y^l(U_{jl})$ цілих аналітичних функцій $v(\xi + i\eta)$ змінної $\xi + i\eta \in \mathbb{C}^{n-1}$ фіксованого експоненціального типу ν.

Визначимо апроксимаційний простір, породжений скінченним набором операторів $A_1, \ldots, A_J$,

$$\mathscr{H}_{2,\tau}^s := \mathscr{H}_{2,\tau}^s(A_1, \ldots, A_J; \tilde{\otimes}_j L_2(\partial\Omega_j)) = \{w \in \tilde{\otimes}_j L_2(\partial\Omega_j)\colon |w|_{\mathscr{H}_{2,\tau}^s} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|w|_{\mathscr{H}_{2,\tau}^s} = \Big(\int_0^\infty [t^s E_2(t,w)]^\tau \, \frac{dt}{t} \Big)^{1/\tau},$$

де $E_2(t,w) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(A_j)} \leq t} \|w - u\|_{\tilde{\otimes}_j L_2(\partial\Omega_j)}, \;\; u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(A_j), \;\; w \in \tilde{\otimes}_j L_2(\partial\Omega_j).$

Теорема 5.5.2. *Нехай* $1 \leq q, q_j \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\tau_j = \theta q_j$,

$\theta = \dfrac{1}{s+1}$ *виконується неперервне вкладення*

$$\big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(A_j), \tilde{\otimes}_j L_2(\partial\Omega_j)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j [H_2^s(\partial\Omega_j)]^\theta. \tag{5.48}$$

Крім того, виконуються такі нерівності:

$$|w|_{\mathscr{H}^s_{2,\tau}} \le c_{s,\tau} |w|^s_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(A_j)} \|w\|_{\tilde{\otimes}_j L_2(\partial\Omega_j)}, \ w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(A_j), \tag{5.49}$$

$$E_2(t,w) \le 2^{s+1} C_{s,\tau} t^{-s} |w|_{\mathscr{H}^s_{2,\tau}}, \ w \in \mathscr{H}^s_{2,\tau}, \tag{5.50}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau}^{-1} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \big(\tau s^{-1}(s+1)^2\big)^{1/\tau}.$$

Д о в е д е н н я. Із теореми 4.5.3 для всіх $j = 1, \ldots, J$ маємо

$$\mathcal{B}^s_{2,2}(A_j) = H_2^s(\partial\Omega_j). \tag{5.51}$$

Вкладення (5.48) є наслідком (5.21) і рівностей (5.51).

Нерівності (5.49) і (5.50) випливають відповідно з (5.27) і (5.28) з урахуванням рівностей (5.51). Теорема доведена.

Нехай $-\infty < a_j < b_j < \infty$, $\Omega_j = (a_j, b_j)$, $j = 1, \ldots, J$, $m = 1, 2, \ldots$ і $l = 0, 1, \ldots, m$. Розглянемо набір операторів $A_{j,m,l}u$ $(j = 1, \ldots, J)$ із означення 4.3.2:

$$A_{j,m,l}u = (-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m}\Big(p_j^l(\xi)\frac{d^m u}{d\xi^m}\Big).$$

Оператор $A_{j,m,l}$ допускає замикання $\bar{A}_{j,m,l}$ в $L_2(\Omega_j)$ з областю визначення

$$\mathcal{C}^1(\bar{A}_{j,m,l}) = \Big\{ u \in W_2^{2m}(\Omega_j;\, p_j^{2l}) : \\ u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0, \ i = 0, \ldots, m-l-1 \Big\}$$

для всіх $l = 0, 1, \ldots, m-1$ і $\mathcal{C}^1(\bar{A}_{j,m,m}) = W_2^{2m}(\Omega_j;\, p_j^{2m})$.

Для $\nu > 0$ визначимо простір

$$\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{j,m,l}) = \Big\{ u \in \mathcal{C}^{\infty}(\bar{A}_{j,m,l})\colon \|u\|_{\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{j,m,l})} < \infty \Big\},$$

де $\|u\|_{\mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{j,m,l})} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big\| \big(\bar{A}_{j,m,l}/\nu\big)^k u \big\|^2_{L_2(\Omega_j)} \Big)^{1/2}$, а також об'єднання $\mathcal{E}_2(\bar{A}_{j,m,l}) = \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{j,m,l})$ із квазінормою

$$|u|_{\mathcal{E}_2(\bar{A}_{j,m,l})} = \|u\|_{L_2(\Omega_j)} + \inf\big\{ \nu > 0\colon u \in \mathcal{E}_2^{\nu}(\bar{A}_{j,m,l}) \big\}.$$

Для пар чисел $\{0 < s < \infty,\ 0 < \tau_j \le \infty\}$ і $\{0 \le s < \infty,\ \tau_j = \infty\}$ визначимо простори $\mathcal{B}^s_{2,\tau_j}(\bar{A}_{j,m,l}) = \Big\{ u \in L_2(\Omega_j) :\ |u|_{\mathcal{B}^s_{2,\tau_j}(\bar{A}_{j,m,l})} < \infty \Big\}$,

$$|u|_{\mathcal{B}^s_{2,\tau_j}(\bar{A}_{j,m,l})} = \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_0^{\infty} \big[t^{\alpha} E(t,u) \big]^{\tau_j} \frac{dt}{t} \Big)^{1/\tau_j}, & 0 < \tau_j < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\alpha} E(t,u), & \tau_j = \infty, \end{cases}$$

де $E(t,u) = \inf\Big\{ \big\| u - u^0 \big\|_{L_2(\Omega_j)} : u^0 \in \mathcal{E}_2(\bar{A}_{j,m,l}), \big| u^0 \big|_{\mathcal{E}(\bar{A}_{j,m,l})} \le t \Big\}$.

Для $l = 0, 1, \ldots, m-1$ покладемо

$$\overset{\circ}{B}{}^s_{2,\tau_j}(\Omega_j) := \Big\{ u \in B^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)\colon (A^k_{j,m,l} u)^{(i)}(a) = (A^k_{j,m,l} u)^{(i)}(b) = 0,$$
$$i = 0, \ldots, m-l-1,\ k \in \mathbb{N}_0 \Big\}.$$

Нехай $\big[\overset{\circ}{B}{}^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)\big]^{\theta}$ $(0 < \theta < 1)$ — простір $\overset{\circ}{B}{}^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)$, наділений квазінормою $\|u\|^{\theta}_{B^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)}$. Визначимо тензорний добуток

$$\otimes_j \big[\overset{\circ}{B}{}^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)\big]^{\theta} = \big[\overset{\circ}{B}{}^s_{2,\tau_1}(\Omega_1)\big]^{\theta} \otimes \ldots \otimes \big[\overset{\circ}{B}{}^s_{2,\tau_J}(\Omega_J)\big]^{\theta}$$

з проективною квазінормою

$$\|w\|_{\otimes_j \left[\overset{\circ}{B}{}^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)\right]^{\theta}} = \inf_{w = \sum_n \otimes_j u_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|u_n^1\|^{\theta}_{B^s_{2,\tau_1}(\Omega_1)} \cdot \ldots \cdot \|u_n^J\|^{\theta}_{B^s_{2,\tau_J}(\Omega_J)}.$$

Поповнення простору $\otimes_j \big[\overset{\circ}{B}{}^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)\big]^{\theta}$ у цій квазінормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j \big[\overset{\circ}{B}{}^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)\big]^{\theta}$. Розглянемо також тензорний добуток $\otimes_j [B^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)]^{\theta} =$

$[B^s_{2,\tau_1}(\Omega_1)]^\theta \otimes \ldots \otimes [B^s_{2,\tau_J}(\Omega_J)]^\theta$ просторів $[B^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)]^\theta$ $(j = 1, \ldots, J)$ з проективною квазінормою $\|\cdot\|_{\otimes_j [B^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)]^\theta}$ і його поповнення $\tilde{\otimes}_j [B^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)]^\theta$ у цій квазінормі.

Визначимо також апроксимаційний простір, породжений скінченним набором операторів $\bar{A}_{1,m,l}, \ldots, \bar{A}_{J,m,l}$,

$$\mathscr{B}^s_{2,\tau} := \mathscr{B}^s_{2,\tau}(\bar{A}_{1,m,l}, \ldots, \bar{A}_{J,m,l}; \tilde{\otimes}_j L_2(\Omega_j)) = \{w \in \tilde{\otimes}_j L_2(\Omega_j) \colon |w|_{\mathscr{B}^s_{2,\tau}} < \infty\}$$

з квазінормою

$$|w|_{\mathscr{B}^s_{2,\tau}} = \Big(\int_0^\infty [t^s E_2(t,w)]^\tau \, \frac{dt}{t} \Big)^{1/\tau},$$

де $E_2(t,w) = \inf\limits_{|u|_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(\bar{A}_{j,m,l})} \le t} \|w - u\|_{\tilde{\otimes}_j L_2(\Omega_j)}$, $u \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(\bar{A}_{j,m,l})$, $w \in \tilde{\otimes}_j L_2(\Omega_j)$.

Теорема 5.5.3. *Нехай* $1 \le q, q_j \le \infty$ *і* $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\tau_j = \theta q_j$, $\theta = \dfrac{1}{s+1}$ *виконуються неперервні вкладення:*

$$\big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(\bar{A}_{j,m,l}), \tilde{\otimes}_j L_2(\Omega_j)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j \big[\mathring{B}^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)\big]^\theta, \tag{5.52}$$

для $l = 0, 1, \ldots, m-1$ *і*

$$\big(\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(\bar{A}_{j,m,m}), \tilde{\otimes}_j L_2(\Omega_j)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j [B^s_{2,\tau_j}(\Omega_j)]^\theta. \tag{5.53}$$

Крім того, виконуються такі нерівності:

$$|w|_{\mathscr{B}^s_{2,\tau}} \le c_{s,\tau} |w|^s_{\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(\bar{A}_{j,m,l})} \|w\|_{\tilde{\otimes}_j L_2(\Omega_j)}, \ w \in \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}_2(\bar{A}_{j,m,l}), \tag{5.54}$$

$$E_2(t,w) \le 2^{s+1} C_{s,\tau} t^{-s} |w|_{\mathscr{B}^s_{2,\tau}}, \ w \in \mathscr{B}^s_{2,\tau}, \tag{5.55}$$

де

$$c_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 1 & : \ \tau = \infty, \end{cases} \qquad C_{s,\tau} := \begin{cases} \kappa^{-1}_{s,\tau} & : \ \tau < \infty \\ 2^{-s-1} & : \ \tau = \infty, \end{cases}$$

$$\kappa_{s,\tau} := \big(\tau s^{-1}(s+1)^2\big)^{1/\tau}.$$

Д о в е д е н н я. Із теореми 4.5.6 для всіх $j = 1, \ldots, J$ маємо

$$\mathcal{B}^s_{2,\tau_j}(\bar{A}_{j,m,l}) = \Big\{ u \in B^s_{2,\tau_j}(\Omega_j) \colon (A^k_{j,m,l} u)^{(i)}(a) = (A^k_{j,m,l} u)^{(i)}(b) = 0,$$
$$i = 0, \ldots, m-l-1, \ k \in \mathbb{N}_0 \Big\} \text{ для } l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\mathcal{B}^s_{2,\tau_j}(\bar{A}_{j,m,m}) = B^s_{2,\tau_j}(\Omega_j). \tag{5.56}$$

Вкладення (5.44) є наслідком (5.21) і рівностей (5.56).

Нерівності (5.54) і (5.55) випливають відповідно з (5.27) і (5.28) з урахуванням рівностей (5.56). Теорема доведена.

Висновки до розділу 5

У даному розділі розвинуто теорію тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з замкненими операторами.

Встановлено властивості проективних тензорних добутків просторів цілих векторів експоненціального типу для скінченних наборів замкнених операторів, що діють у банахових просторах. Побудовано спектральні розклади для операторів з точковим спектором (теорема 5.1.5).

Визначено інтерполяційні простори проективних тензорних добутків цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів над банаховими просторами та встановлено їх інтерполяційні властивості (теореми 5.2.1, 5.2.2).

Визначено інтерполяційні простори проективних тензорних добутків цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів на областях визначення їх цілих степенів. Доведено відповідні інтерполяційні теореми 5.2.3 і 5.2.4.

Доведено, що тензорний добуток апроксимаційних просторів типу Бєсова є проміжним інтерполяційним простором між тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів і тензорним добутком банахових просторів, на яких визначено відповідні оператори (теорема 5.3.1). Встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів до підпростору, що визначається

тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу (теорема 5.3.2).

Доведено, що тензорний добуток апроксимаційних просторів типу Бєсова на областях визначення цілих степенів операторів є проміжним інтерполяційним простором між тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу і тензорним добутком банахових просторів, що є областями визначення цілих степенів операторів (теорема 5.3.3). Встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів, що є областями визначення цілих степенів операторів, до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу (теорема 5.3.4).

Визначено тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бєсова на областях визначення комплексних степенів позитивних операторів (теорема 5.4.1). Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів, що є областями визначення комплексних степенів позитивних операторів, до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів векторів експоненціального типу (теорема 5.4.2).

Визначено тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бєсова, асоційованих з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях класу C^∞ (теорема 5.5.1) та на компактних многовидах, що мають форму границі обмеженої області класу C^∞ (теорема 5.5.2), а також узагальненими диференціальними операторами Лежандра (теорема 5.5.3). Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм визначених тензорних добутків апроксимаційних просторів.

Основні результати розділу 5 опубліковані у працях [33–36, 47–50, 130, 132, 146].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано наукову проблему визначення структури і опису властивостей апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами в нормованих просторах, у контексті спектральних апроксимацій та характеризації різних класів функцій в термінах їх найкращих наближень цілими функціями експоненціального типу в функціональних просторах.

Проведене в роботі дослідження дозволило отримати низку наукових результатів:

1. На основі аналізу операторного підходу до проблем апроксимації функцій встановлено можливість характеризації нескінченно диференційованих векторів замкненого оператора у комплексному банаховому просторі в термінах їх найкращих наближень різними класами, зокрема, цілих, аналітичних, цілих експоненціального типу векторів, а у випадку оператора диференціювання — наближень алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу. Обґрунтовано можливість застосування до розв'язання згаданої проблеми теорії апроксимаційних просторів.

2. Визначено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, встановлено основні властивості цих просторів, а також їх об'єднань. Доведено, що простори цілих векторів експоненціального типу оператора з точковим спектром співпадають з лінійною оболонкою образів проекторів Ріса, а у випадку оператора з точковим спектром, що складається із ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності, простір всіх цілих векторів експоненціального типу співпадає з лінійною оболонкою його кореневих векторів.

3. Введено нові класи апроксимаційних просторів типу Бєсова, асоційованих з необмеженими операторами у банахових просторах, та цілими

функціями експоненціального типу для операторів диференціювання у функціональних просторах. Доведено, що ці простори є інтерполяційними просторами між просторами цілих векторів експоненціального типу і вихідним простором, встановлено властивості апроксимаційних просторів.

4. Встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів типу Бєсова з точними значеннями констант, які дають аналітичні оцінки найкращих наближень цілими векторами експоненціального типу необмеженого оператора, зокрема, спектральних апроксимацій у випадку оператора з точковим спектром, а у випадку оператора диференціювання — відповідні оцінки наближення функцій алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу.

5. Описано інтерполяційні простори цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, породжених дійсними і комплексним методами інтерполяції, та встановлено їх властивості. Введено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів на областях визначення їх цілих степенів, а для позитивних операторів — на областях визначення їх комплексних степенів. Встановлено ізоморфізми для дійсної та комплексної інтерполяційних шкал цих просторів. Описано інтерполяційні простори цілих функцій експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів, а також деяких класів вироджених еліптичних диференціальних операторів.

6. Визначено інтерполяційну шкалу апроксимаційних просторів на областях визначення цілих степенів замкнених операторів та доведено інтерполяційні теореми, що характеризують цю шкалу. Описано апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами у банахових просторах, доведено їх зв'язок з інтерполяційними просторами та встановлено інтерполяційні властивості. Доведено нерівності типу Берн-

штейна і Джексона в термінах квазінорм цих апроксимаційних просторів, а також теореми, що характеризують спектральні апроксимації для оператора з точковим спектром.

7. Описано функціональні простори векторів експоненціального типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях Ω і компактних многовидах класу C^∞, вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), звичайних вироджених еліптичних диференціальних операторів в обмеженому інтервалі та вироджених еліптичних диференціальних операторів з частинними похідними в обмежених областях з нескінченно гладкою границею. На основі ознак повноти кореневих векторів компактних операторів в гільбертовому просторі та ознак щільності множини цілих векторів експоненціального типу оператора в банахових просторах встановлено нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$.

8. Визначено апроксимаційні простори, асоційовані з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях класу C^∞. Показано, що ці апроксимаційні простори співпадають із замкненими підпросторами класичних просторів Бєсова. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона, що характеризують, зокрема, спектральні апроксимації регулярних еліптичних операторів. Описано апроксимаційні простори, асоційовані з регулярними еліптичними диференціальними операторами на компактних многовидах, що мають форму границі обмеженої області класу C^∞, і узагальненими диференціальними операторами Лежандра.

9. Визначено проективні тензорні добутки просторів цілих векторів експоненціального типу для скінченних наборів замкнених операторів, що діють у банахових просторах. Побудовано спектральні розклади

для операторів з точковим спектром. Описано інтерполяційні простори проективних тензорних добутків цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів над банаховими просторами і на областях визначення їх цілих степенів та встановлено їх інтерполяційні властивості.

10. Доведено, що тензорний добуток апроксимаційних просторів типу Бєсова є проміжним інтерполяційним простором між тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів і тензорним добутком банахових просторів, на яких визначено відповідні оператори. Встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу.

11. Описано тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бєсова, асоційованих з позитивними операторами, регулярно еліптичними диференціальними операторами і узагальненими диференціальними операторами Лежандра, встановлено інтерполяційні властивості цих просторів. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм визначених тензорних добутків апроксимаційних просторів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Аманов Т.И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств // Тр. МИАН СССР. – 1967. – Т. 77. – С. 5–34.

[2] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

[3] Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. – М: Мир, 1980. – 264 с.

[4] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К: Наук. думка, 1965. – 798 с.

[5] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. – К: Выща школа, 1990. – 600 с.

[6] Бернштейн С.Н. Собрание сочинений: В 2-х т. – М: Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 1. – 585 с.

[7] Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. МИАН СССР. – 1961. – Т. 60. – С. 42–81.

[8] Брудный Ю.А. Аппроксимационные пространства // В кн.: Геометрия линейных пространств и теория операторов: Межвузовский тематический сборник. – Ярославль: Ярославский ун-т, 1977. – С. 3–30.

[9] Брудный Ю.А., Кругляк Н.Я. Об одном семействе аппроксимационных пространств // В кн.: Исследования по теории функций многих вещественных переменных: Межвузовский тематический сборник. – Ярославль: Ярославский ун-т, 1978. – С. 15–43.

[10] Букур И., Деляну А.Введение в теорию категорий и функторов. – М: Мир, 1972. – 129 с.

[11] Ганзбург М.И. Теоремы Джексона и Бернштейна в $\mathbb{R}^m$ // Успехи мат. наук. – 1979. – Т.34, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 1(205). – С. 225–226.

[12] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Операторный подход к вопросам аппроксимации // Алгебра и анализ. – 1997. – Т.9, № 6. – С. 90–108.

[13] Горбачук В.И., Князюк А.В. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Усп. мат. наук. – 1989. – Т. 44, № 3. – С. 55–91.

[14] Горбачук М.Л. Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 5. – С. 596–607.

[15] Горбачук М.Л. Ознаки повноти множини цілих векторів експоненціального типу необмеженого оператора // Доп. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 7–11.

[16] Горбачук М.Л., Грушка Я.І., Торба С.М. Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 5. – С. 633–643.

[17] Горбачук М.Л., Горбачук В.І. Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 5. – С. 616–628.

[18] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М: Наука, 1965. – 448 с.

[19] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. – М: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.

[20] Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу деяких класів еліптичних операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 3. – С. 17–20.

[21] Дмитришин М.І. Інтерполяція просторів ультрагладких векторів замкнених операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 4. – С. 31–34.

[22] Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу диференціальних операторів Трікомі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, №3. – С. 7–10.

[23] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори між банаховим простором і векторами експоненціального типу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, №3. – С. 54–60.

[24] Дмитришин М.І. Інтерполяція спектральних підпросторів диференціальних операторів Трікомі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, №2. – С. 16–21.

[25] Дмитришин М.І. Інтерполяційні шкали спектральних підпросторів одного класу вироджених еліптичних операторів // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Випуск 239. Математика. – Чернівці: Рута. – 2005. – С. 37–42.

[26] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Інтерполяція векторів експоненціального типу дробових степенів позитивних операторів // Вісник Львівського національного університету ім. І.Франка: Серія механіко-математична. Випуск 64. – 2005. – С. 99–106.

[27] Дмитришин М.І. Ознаки повноти множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №2. – С. 43–47.

[28] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Абстрактні простори Бєсова, асоційовані з замкненими операторами в банахових просторах // Доповіді НАН України. – 2007. – №12. – С. 16–22.

[29] Дмитришин М.І. Наближення векторами експоненціального типу диференціальних операторів Лежандра // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Випуск 454. Математика. – Чернівці: Рута. – 2009. – С. 28–33.

[30] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т. 1, №1. – С. 8–14.

[31] Дмитришин М.І. Апроксимації векторами експоненціального типу регулярних еліптичних операторів // Прикладні проблеми механіки і математики : Наук. збірник. Випуск 8. – 2010. – С. 71–77.

[32] Дмитришин М.І. Простори векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів // Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т. 2, №2. – С. 21–30.

[33] Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу замкнених операторів на тензорних добутках // Математичний вісник НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 60–68.

[34] Дмитришин М.І. Інтерполяція тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 89–96.

[35] Дмитришин М.І. Тензорні добутки абстрактних просторів Бєсова // Карпатські математичні публікації. – 2012. – Т. 4, №2. – С. 241–246.

[36] Дмитришин М.І. Тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих із регулярними еліптичними операторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, №4. – С. 75–82. (Те саме: Dmytryshyn M.I. Tensor products of approximation spaces associated with regular elliptic operators // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V. 208, № 3. – P. 355-365.)

[37] Дмитришин М.І. Інтерполяційні шкали апроксимаційних просторів, асоційованих з позитивними операторами // Прикладні проблеми механіки і математики : Наук. збірник. Випуск 12. – 2014. – С. 7–15.

[38] Дмитришин М.І. Інтерполяція просторів, породжених векторами експоненціального типу // Український математичний конгрес – 2001. Міжнародна конференція з функціонального аналізу (Київ,

22-26 серпня 2001 р.): тези доп. – Київ : Інститут математики НАН України, 2001. – С. 22.

[39] Дмитришин М.І. Аналітичність кореневих функцій диференціальних операторів Лежандра // Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-26 травня 2004 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2004. – С. 69–70.

[40] Дмитришин М.І. Інтерполяція векторів експоненціального типу операторів Лежандра // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 27 вересня-1 жовтня 2004 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2004. – С. 72.

[41] Дмитришин М.І. Інтерполяційні простори експоненціальних векторів дробових степенів позитивних операторів // Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-27 травня 2005 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2005. – С. 196–197.

[42] Дмитришин М.І. Повнота множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів у просторах L_ρ // Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 11-14 жовтня 2006 р.): тези доп. – Чернівці : Рута, 2006. – С. 39.

[43] Дмитришин М.І. Найкращі наближення векторами експоненціального типу // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24-28 вересня 2007 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2007. – С. 91.

[44] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з диференціальним оператором Лежандра // XII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2008 р.): матеріали конф. – Київ : ТОВ "Задруга", 2008. – С. 603.

[45] Дмитришин М.І. Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // IV Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 10-12 вересня 2008 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2008. – С. 31.

[46] Дмитришин М.І. Інтерполяція абстрактних просторів Бєсова // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (Чернівці, 8-13 червня 2009 р.): тези доп. – Чернівці : Книги–XXI, 2009. – С. 41–42.

[47] Дмитришин М.І. Інтерполяція тензорних добутків просторів векторів експоненціального типу // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19-23 вересня 2011 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2011. – С. 64.

[48] Дмитришин М.І. Тензорні добутки просторів векторів експоненціального типу замкнених операторів // XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. – Київ : НТУУ “КПІ”, 2012. – С. 92.

[49] Дмитришин М.І. Тензорні добутки інтерполяційних просторів типу Бєсова // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 48.

[50] Дмитришин М.І. Інтерполяційні властивості тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з регулярними еліптичними операторами // V Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 24.

[51] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами // XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ : НТУУ "КПІ", 2014. – С. 82.

[52] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з деякими класами еліптичних операторів // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня-5 липня 2014 р.): тези доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2014. – С. 52–53.

[53] Дмитришин М.І. Простори типу Лоренца, асоційовані з позитивними операторами // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1-4 липня 2015 р.): тези доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2015. – С. 38.

[54] Дмитришин М.І. Спектральні апроксимації для операторів з мероморфною резольвентою // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. – Київ : НТУУ "КПІ", 2016. – С. 95–97.

[55] Дмитришин М.І. Узагальнені спектральні апроксимації для регулярних еліптичних операторів // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного аналізу" (Ворохта, 22 лютого-25 лютого 2017 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2017. – С. 77–78.

[56] Дмитришин М.І. Аналітичні оцінки спектральних апроксимацій для узагальнених диференціальних операторів Лежандра // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її засто-

сування в природничих науках і інформаційних технологіях” (Чернівці, 17-19 вересня 2018 р.): матеріали доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2018. – С. 176.

[57] Иосида К. Функциональный анализ. – М: Мир, 1967. – 624 с.

[58] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

[59] Крейн М.Г. Про лінійні цілком неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами // Збірник праць ін-ту математики АН УРСР. – 1948. – №9. — С. 104—129.

[60] Крейн С.Г. Об одной интерполяциооной теореме в теории операторов // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 130. — С. 491—494.

[61] Крейн С.Г. О понятии нормальной шкалы пространств // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 132. — С. 510—513.

[62] Крейн С.Г., Петунин Ю.И. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[63] Купцов Н.П. Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // Успехи мат. наук. – 1968. – Т. 23, №4. – С. 118–178.

[64] Лопушанський О.В. Операторне числення на ультрагладких векторах // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №4. – С. 502-513.

[65] Любич Ю.И., Мацаев В.И. Об операторах с отделимым спектром // Мат. сб. – 1962. – Т. 56(98), №4. – С. 433–468.

[66] Михайлец В.А., Мурач А.А. Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с.

[67] Морен К. Методы гильбертова пространства. – М: Мир, 1965. – 570 с.

[68] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

[69] Престін Ю., Савчук В.В., Шидліч А.Л. Прямі та обернені теореми наближення 2π-періодичних функцій операторами Тейлора - Абеля - Пуассона // Укр. мат. журн. – 2017. – Т. 69, № 5. – С. 657-669.

[70] Радзиевский Г.В. Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени // Мат. сб. – 1998. – Т. 189, № 4. – С. 83–124.

[71] Радзиевский Г.В. О наилучших приближениях и о скорости сходимости разложений по корневым векторам оператора // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 6. – С. 754-773.

[72] Радыно Я.В. Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 9. – С. 791–793.

[73] Радыно Я.В. Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т.21, № 9. – С. 1559–1569.

[74] Романюк А.С. Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 10. – С. 1398-1408.

[75] Романюк А.С. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сборник. – 2008. – Т. 199, № 2. – С. 93-114.

[76] Романюк А.С. Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения классов функций многих переменных // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, № 3. – С. 401-415.

[77] Слободецкий Л.Н. Обобщенные просторанства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленингр. госю пед. ин-та им. А.И. Герцена. – 1958. – Т. 197. — С. 54—112.

[78] Соболев С.Л. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1935. – Т. 3, № 7. — С. 291—294.

[79] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

[80] Степанец А.И., Сердюк А.С. Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, №1. – С. 106–124.

[81] Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 102, №1. — С. 37—40.

[82] Стечкин С.Б. Опорядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15, №3. — С. 219—242.

[83] Терехин А.П. Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. – 1975. – Вып. 2. – С. 3–28.

[84] Тиман А.Ф., Тиман М.Ф. Обобщенный модуль непрерывности и наилучшие приближения в среднем // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 71, №1. — С. 17—20.

[85] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М: Физматгиз, 1960. – 624 с.

[86] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М: Мир, 1980. – 664 с.

[87] Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32, №3. — С. 649—686.

[88] Ульянов П.Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. – 1970. – Т. 81(123), №1. — С. 104—131.

[89] Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. – М: Изд. ИЛ, 1948. – 456 с.

[90] Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М: Мир, 1965. – 379 с.

[91] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М: Изд. ИЛ, 1962. – 829 с.

[92] Черных Н.И. О неравенствах Джексона в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – Т. 88. — С. 71—74.

[93] Шефер Х. Топологические векторные пространства. – М: Мир, 1971. – 359 с.

[94] Almira J.M. On strict inclusion relations between approximation and interpolation spaces // Banach J. Math. Anal. – 2011. – V. 5, № 2. – P. 93–105.

[95] Almira J.M., Luther U. Generalized approximation spaces and applications // Math. Nachr. – 2004. – V. 263-264. – P. 3–35.

[96] Almira J.M., Luther U. Compactness and generalized approximation spaces // Numer. Funct. Anal. Optim. – 2002. – V. 23. – P. 1–38.

[97] Aronszajn N., Gagliardo E. Interpolation spaces and interpolation // Ann. Math. Pura Appl. – 1965. – V. 68, № 4. – P. 51–118.

[98] Aronszajn N., Smith K.T. Theory of Bessel potentials // Ann. Inst. Fourier. – 1961. – V. 11. – P. 385–476.

[99] Asekritova I., Brudnyi Yu.A. Interpolation of several multiparametric approximation spaces // J. Approx. Theory. – 2004. – V. 129, № 2. – P. 182–206.

[100] Babenko A.G., Kryakin Y.V., Staszak P.T. Special Moduli of Continuity and the Constant in the Jackson-Stechkin Theorem // Constr. Approx. – 2013. – V. 38, № 3. – P. 339–364.

[101] Bandura A.I., Skaskiv O.B. Open problems for entire functions of bounded index in direction // Mat. Stud. – 2015. – V. 43, № 1. – P. 103–109.

[102] Bandura A., Skaskiv O., Filevych P. Properties of entire solutions of some linear PDE's // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2017. – V. 16, № 2. – P. 17–28.

[103] Bednarz A., Lopushansky O. Exponential type vectors of isometric group generators // Mat. Stud. – 2002. – V. 18, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 1. – P. 99–106.

[104] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators, in Pure and Applied Mathematics. – N.Y.: Academic Press, 1988. – 469 p.

[105] Bieberbach L. Analytische fortsetzung. – Berlin: Springer-Verlag, 1955. – 168 p.

[106] Bourdaud G. Ondelettes et espaces de Besov // Rev. Mat. Iberoamericana. – 1995. – V. 11, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 3. – P. 477–512.

[107] Brudnyi Yu.A., Krugljak N.Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. – North-Holland Math. Libr. 47. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1991. – P. 91–288.

[108] Butzer P.L., Scherer K. Approximationsprozesse und Interpolationsmethoden. – Mannheim: Bibliographisches Institut, Hochschultaschenbücher-Verlag, 1968. – 172 p.

[109] Butzer P.L., Scherer K. Jackson and Bernstein-type inequalities for families of commutative operators in Banach spaces // J. Approx. Theory. – 1972. – V. 5, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 3. – P. 308–342.

[110] Calderon A.P. Lebesgue spaces of functions and distributions // Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. – 1961. – V. 4. – P. 33–49.

[111] Calderon A.P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method // Studia Math. – 1964. – V. 24. – P. 113–190.

[112] Capobianco M.R., Criscuolo G., Junghanns P., Luther U. Uniform convergence of the collocation method for Prandtl's integro-differential equation // ANZIAM J. – 2000. – V. 42. – P. 151–168.

[113] Carl B. Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems // J. Funct. Anal. – 1981. – V. 41. – P. 290–306.

[114] Carl B. Inequalities of Bernstein-Jackson-type and degree of compactness of operators in Banach spaces // Ann. Inst. Fourier. – 1985. – V. 35, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 3. – P. 79–118.

[115] Carl B., Triebel H. Inequalities between eigenvalues, entropy numbers and related quantities of compact operators in Banach spaces // Math. Ann. – 1980. – V. 251. – P. 129–133.

[116] Cobos F. On the Lorentz-Marcinkiewicz operator ideals // Math. Nachr. – 1986. – V. 126. – P. 281–300.

[117] Cobos F., Milman M. On a limit class of approximation spaces // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1990. – V. 11, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 1-2. – P. 11–31.

[118] Cobos F., Resina I. Representation theorems for some operator ideals // J. London Math. Soc. – 1989. – V. 39. – P. 324–334.

[119] Cohen A. Wavelet Methods in Numerical Analysis. Handbook of numerical analysis. – North-Holland, Amsterdam. – 2002. – V. VII. – P. 417–711.

[120] Cohen A., De Vore R.A., Hochmuth R. Restricted nonlinear approximation // Constr. Approx. – 2000. – V. 16. – P. 85–113.

[121] Defant A., Floret K. Tensor Norms and Operator Ideals. – North Holland, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1993. – 565 p.

[122] Defant A., Mastylo M., Michels C. On interpolation of tensor products of Banach spaces // Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. – 2003. – V. 97, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 2. – P. 209–221.

[123] De Vore R.A. Nonlinear approximation // Acta Numerica. – 1980. – V. 7. – P. 51–150.

[124] De Vore R.A., Lorentz G.G. Constructive Approximation. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 449 p.

[125] De Vore R.A., Jawerth B., Popov V.A. Compresion of wavelet decompositions // Amer. J. of Math. – 1992. – V. 114. – P. 737–785.

[126] De Vore R.A., Popov V.A. Interpolation of Besov spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1988. – V. 305, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 1. – P. 397–414.

[127] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum // In: Banakh T. (Ed.) General Topology in Banach Spaces. Nova Sci. Publ., Huntington, New York. – 2001. – P. 137–145.

[128] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Interpolation of exponential type vectors, the complex method // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, № 1. – С. 71–75.

[129] Dmytryshyn M., Lopushansky O. Interpolated subspaces of exponential vectors of the unbounded operators in Banach spaces // Demonstratio Mathematica. – 2004. – V. 37, № 1. – P. 149–158.

[130] Dmytryshyn M. Interpolated tensor products of exponential type vectors of unbounded operators // Journal of Mathematics and System Science. – 2014. – V. 4, № 2. – P. 99–104.

[131] Dmytryshyn M., Lopushansky O. Bernstein-Jackson-type inequalities and Besov spaces associated with unbounded operators // Journal of Inequalities and Applications. – 2014. – V. 2014. – Article ID 105, 12 pages.

[132] Dmytryshyn M. Tensor products of exponential type vectors of unbounded operators // Int. Journal of Math. Analysis. – 2014. – V. 8, № 11. – P. 529–538.

[133] Dmytryshyn M. Approximation spaces associated with Legendre differential operators // Int. Journal of Math. Analysis. – 2014. – V. 8, № 22. – P. 1075–1082.

[134] Dmytryshyn M.I. Interpolated scales of approximation spaces for regular elliptic operators on compact manifolds // Carpathian Math. Publ. – 2014. – V. 6, № 1. – P. 26–31.

[135] Dmytryshyn M. Besov-Lorentz-type spaces and best approximations by exponential type vectors // Int. Journal of Math. Analysis. – 2015. – V. 9, № 16. – P. 779–786.

[136] Dmytryshyn M. Approximation by exponential type vectors of positive operators // Int. Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – V. 112, №4. – P. 795–804.

[137] Dmytryshyn M., Lopushansky O. Spectral approximations of strongly degenerate elliptic differential operators // Carpathian Math. Publ. – 2019. – V. 11, №1. – P. 48–53.

[138] Dmytryshyn M., Lopushansky O. On Spectral Approximations of Unbounded Operators // Complex Anal. Oper. Theory. – 2019. – V. 13, №8. – P. 3659—3673.

[139] Dmytryshyn M.I. An interpolation of the spaces of exponential type vectors // Междунар. конф. "VIII Белорусская математическая конференция" Ч. 1 (Минск, Беларусь, 19-24 июня 2000 г.): тезисы докладов. – В 2 ч.: ч. 1. – Минск, 2000. – С. 58.

[140] Dmytryshyn M.I. Approximation by exponential type vectors // International conference on Functional Analysis and its Applications dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach : Book of Abstracts (Lviv, 28-31 May 2002). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2002. – P. 61–62.

[141] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Interpolation of exponential type vectors of positive operators // III Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9-12 вересня 2003 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2003. – С. 121.

[142] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Lorentz type invariant subspaces // XI Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 18-20 травня 2006 р.): матеріали конф. – Київ : ТОВ "Задруга", 2006. – С. 500.

[143] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Abstract Besov spaces, associated with unbounded linear operator in Banach space // Міжнародна кон-

ференція “Аналіз і топологія” (Львів, 27 травня-7 червня 2008 р.): тези доп. – Льів : Львівський національний університет ім. І. Франка, 2008. – С. 37.

[144] Dmytryshyn M.I. Exponential Type Vectors of Complex Degrees of Positive Operators // Міжнародна конференція “Нескінченновимірний аналіз і топологія” (Івано-Франківськ, 27 травня-1 червня 2009 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2009. – С. 30–31.

[145] Dmytryshyn M.I. Approximations by Exponential Type Vectors of Regular Elliptic Operators // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90th anniversary of V.E. Lyantse : Abstracts of Reports (Lviv, 17-21 November 2010). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2010. – P. 36–37.

[146] Dmytryshyn M.I. Exponential type vectors of closed operators on tensor products // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach : Abstracts of Reports (Lviv, 17-21 September 2012). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2012. – P. 40.

[147] Dmytryshyn M.I. Interpolated scales of Lorentz-type spaces of exponential type vectors // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2015. – С. 31.

[148] Feher F., Grässler G. On an extremal scale of approximation spaces // J. Comp. Anal. Appl. – 2001. – V. 3, № 2. – P. 95–108.

[149] Frazier M., Jawerth B. A discrete transform and decomposition of distribution spaces // J. Func. Anal. – 1990. – V. 93, № 1. – P. 34–170.

[150] Fugarolas M.A. Compactness in approximation spaces // Colloq. Math. – 1994. – V. LXVII, № 2. – P. 253–262.

[151] Garrigós G., Hochmuth R., Tabacco A. Wavelet characterizations for anisotropic Besov spaces when $0 < p < 1$ // Proc. Edin. Math. Soc. – 2004. – V. 47, № 3. – P. 573–595.

[152] Giulini S. Bernstein and Jackson theorems for the Heisenberg group // J. Austral. Math. Soc. – 1985. – V. 38. – P. 241–254.

[153] Giulini S. Approximation and Besov spaces on stratified groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 96, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 4. – P. 1741–1764.

[154] Goodman R. Analytic and entire vectors for representations of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 143. – P. 55–76.

[155] Grotendieck A. Produits tensorial topologeus et espases nucleaire // Mem. Amer. Math. Soc. – 1955. – V. 16, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 2. – P. 1–140.

[156] Grotendieck A. Topological vector spases. – New York-London-Paris: Gordon and Breach, 1973. – 245 p.

[157] Grushka Ya., Torba S. Direct theorems in the theory of approximation of vectors in a banach space with exponential type entire vectors // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2007. – V. 13, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 3. – P. 267–278.

[158] Hernández E., Weiss G. A First Course on Wavelets. – CRC Press, Boca Raton FL, 1996.

[159] Holmstedt T. Interpolation of quasi-normed spaces // Math. Scand. – 1970. – V. 26. – P. 177–199.

[160] Hörmander L. Linear partial differential operators. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1976. – 287 p.

[161] Inglis I.R. Bernstein's theorem and the Fourier algebra of the Heisenberg group // Boll. Un. Mat. Ital. – 1983. – V. 2, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 6. – P. 39–46.

[162] Junghanns P., Luther U. Cauchy singular integral equations in spaces of continuous functions and methods for their numerical solution // J. Comp. Appl. Math. – 1997. – V. 77. – P. 201–237.

[163] Junghanns P., Luther U. Uniform convergence of a fast algorithm for Cauchy singular integral equations // Linear Algebra and its Applications. – 1998. – V. 275–276. – P. 327–347.

[164] Kahane J.P., Lemarié-Rieusset P.G. Fourier series and wavelets. – London: Gordon and Breach Publ., 1995. – 394 p.

[165] Kopotun K.A., Leviatan D., Prymak A., Shevchuk I.A. Uniform and Pointwise Shape Preserving Approximation by Algebraic Polynomials // arXiv:1109.0968v1. – 2011. – P. 1–74.

[166] Kouba O. On the interpolation of injective or projective tensor products of Banach spaces // J. Funct. Anal. – 1991. – V. 96, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 1. – P. 38–61.

[167] König H. Weyl-type inequalities for operators in Banach spaces // Proc. Paderborn Conf. Functional Analysis, 1979, North-Holland, Amsterdam. – 1980. – P. 297-–317.

[168] Krée P. Interpolation d'espaces vectoriels qui ne sont ni normés, ni comlets. Applications // Ann. Inst. Fourier. – 1967. – V. 17, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 2. – P. 137–174.

[169] Light W.A., Cheney E.W. Approximation Theory in Tensor Product Spaces. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1985. – 133 p.

[170] Lions J.L. Théorémes de trace et d'interpolation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1959. – V. 13. – P. 389–403.

[171] Lions J.L. Une construction d'espaces d'interpolation // G. R. Acad. Sci. Paris. – 1960. – V. 251. – P. 1853–1856.

[172] Lions J.L. Sur les espaces d'interpolation; dualité // Math. Scand. – 1961. – V. 9. – P. 147–177.

[173] Lions J.L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Volume 1. – Paris: Dunod, 1968. – 372 p.

[174] Lions J.L., Peetre J. Propriétés d'espaces d'interpolation // G. R. Acad. Sci. Paris. – 1961. – V. 253. – P. 1747–1749.

[175] Lions J.L., Peetre J. Sur une d'espaces d'interpolation // Inst. Hautes Études. Sci. Publ. Math. – 1964. – V. 19. – P. 5–68.

[176] Lopushansky O. Best approximations in Hardy spaces on infinite-dimensional unitary matrix groups // Abstract and Applied Analysis. – 2014. – V. 2014. – Article ID 631503, 8 pages.

[177] Lorentz G.G. Approximation of Functions. – Holt, Rinehart and Winston, New York-Chicago-Toronto, Ont., 1966. – 188 p.

[178] Luther U. Representation, interpolation, and reiteration theorems for generalized approximation spaces // Ann. Mat. Pura Appl. – 2003. – V. 182. – P. 161–200.

[179] Makai E. Jr., Zemanek J. Geometrical means of eigenvalues // J. Operator Theory. – 1982. – V. 7. – P. 173–178.

[180] Meyer Y. Wavelets and operators. – Cambridge University Press, 1992. – 221 p.

[181] Mitjagin B.S., Pelczynski A. Nuclear operators and approximative dimension // Pros. Int. Congr. Math., Moscow, 1966. – P. 366–372.

[182] Nelson E. Analytic vectors // Ann. Math. – 1959. – V. 70, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 3. – P. 572–615.

[183] Peetre J. Sur le nombre de parametrés dans la définition de certain espaces d'interpolation // Ricerche. Mat. – 1963. – V. 12. – P. 248–261.

[184] Peetre J. Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation // G. R. Acad. Sci. Paris. – 1963. – V. 256. – P. 1424–1426.

[185] Peetre J. A new approach in interpolation spaces // Studia Math. – 1970. – V. 34. – P. 23–42.

[186] Peetre J. Interpolation of normed abelian groups, Sparr G. // Ann. Mat. Pura Appl. – 1972. – V. 92. – P. 217–262.

[187] Petrushev P.P. Direct and converse theorems for spline and rational approximation and Besov spaces, in Function Spaces and Applications (M. Cwikel et al., eds), Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin. – V. 1302. – P. 363–377.

[188] Pietsch A. Einige neue Klassen von kompakten linearen Abbildungen, // Rev. Romaine Math. Pures Appl. – 1963. – V. 8. – P. 427–447.

[189] Pietsch A. Operator ideals. – Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978 . – 451 p.

[190] Pietsch A. Factorization theorems for some scales of operator ideals // Math. Nachr. – 1980. – V. 97. – P. 15–19.

[191] Pietsch A. Approximation spaces // J. Approx. Theory. – 1981. – V. 32, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 2. – P. 115–134.

[192] Plichko A. Rate of Decay of the Bernstein Numbers // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2013. – V. 9, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 1. – P. 59–72.

[193] Plichko A. Norm approximation property // Acta et commentationes universitatis tartuensis de mathematica. – 2014. – V. 18, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 1. – P. 65–68.

[194] Pustylnik E. Ultrasymmetric sequence spaces in approximation theory // Collectanea Math. – 2006. – V. 57. – P. 257–277.

[195] Pustylnik E. A new class of approximation spaces // Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. II, Suppl. – 2005. – V. 76. – P. 517–532.

[196] Ryan R.A. Introduction to tensor products of Banach spaces. – London-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. – 225 p.

[197] Savchuk V.V., Shidlich A.L. Approximation of functions of several variables by linear methods in the space S^p // Acta Sci. Math. – 2014. – V. 80, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 3–4. – P. 477–489.

[198] Sickel W. A remark on orhtonormal bases of compactly supported wavelets in Triebel-Lizorkin spaces. The case $0 < p, q < \infty$ // Arch. Math. – 1991. – V. 57, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 3. – P. 281–289.

[199] Sickel W., Ullrich T. Tensor products of Sobolev–Besov spaces and applications to approximation from the hyperbolic cross // J. Approx. Theory – 2009. – V. 161, $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 2. – P. 748–786.

[200] Soardi P. M. On nonisotropic Lipschitz spaces. – Harmonic Analysis, Lecture Notes in Math. – V. 992. – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – P. 115–138.

[201] Tiţa N. Equivalent quasi-norms on some operator ideals // Annal. Univ. Craiova. – 2001. – V. 28. – P. 16–23.

[202] Tiţa N. A generalization of the limit class of approximation spaces // Annal. Univ. Iasi. – 1997. – V. 43. – P. 133–138.

[203] Tiţa N. Approximation spaces and bilinear operators // Studia Univ. Babes-Bolyai, Ser. Math. – 1990. – V. 35. – P. 89–92.

[204] Triebel H. L_p theory for a class of singular elliptic differential operators // Czechoslovak Math. J. – 1973. – V. 28. – P. 525–541.

[205] Vogt D. Integrationstheorie in p-normierten Riiumen // Math. Ann. – 1967. – V. 173. – P. 219–232.

[206] Zygmund A. Trigonometric series. – London-New York-Melbourne: Cambridge University Press, 2002. – 747 p.

ДОДАТКИ

Список публікацій за темою дисертації

[1] Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу деяких класів еліптичних операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 3. – С. 17–20.

[2] Дмитришин М.І. Інтерполяція просторів ультрагладких векторів замкнених операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 4. – С. 31–34.

[3] Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу диференціальних операторів Трікомі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 3. – С. 7–10.

[4] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum // In: Banakh T. (Ed.) General Topology in Banach Spaces. Nova Sci. Publ., Huntington, New York. – 2001. – P. 137–145.

[5] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Interpolation of exponential type vectors, the complex method // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, № 1. – С. 71–75.

[6] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори між банаховим простором і векторами експоненціального типу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 3. – С. 54–60.

[7] Dmytryshyn M., Lopushansky O. Interpolated subspaces of exponential vectors of the unbounded operators in Banach spaces // Demonstratio Mathematica. – 2004. – V. 37, № 1. – P. 149–158.

[8] Дмитришин М.І. Інтерполяція спектральних підпросторів диференціальних операторів Трікомі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 2. – С. 16–21.

[9] Дмитришин М.І. Інтерполяційні шкали спектральних підпросторів одного класу вироджених еліптичних операторів // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Випуск 239. Математика. – Чернівці: Рута. – 2005. – С. 37–42.

[10] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Інтерполяція векторів експоненціального типу дробових степенів позитивних операторів // Вісник Львівського національного університету ім. І.Франка: Серія механіко-математична. Випуск 64. – 2005. – С. 99–106.

[11] Дмитришин М.І. Ознаки повноти множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 43–47.

[12] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Абстрактні простори Бєсова, асоційовані з замкненими операторами в банахових просторах // Доповіді НАН України. – 2007. – № 12. – С. 16–22.

[13] Дмитришин М.І. Наближення векторами експоненціального типу диференціальних операторів Лежандра // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Випуск 454. Математика. – Чернівці: Рута. – 2009. – С. 28–33.

[14] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т. 1, № 1. – С. 8–14.

[15] Дмитришин М.І. Апроксимації векторами експоненціального типу регулярних еліптичних операторів // Прикладні проблеми механіки і математики : Наук. збірник. Випуск 8. – 2010. – С. 71–77.

[16] Дмитришин М.І. Простори векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів // Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 21–30.

[17] Дмитришин М.І. Вектори експоненціального типу замкнених операторів на тензорних добутках // Математичний вісник НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 60–68.

[18] Дмитришин М.І. Інтерполяція тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 89–96.

[19] Дмитришин М.І. Тензорні добутки абстрактних просторів Бєсова // Карпатські математичні публікації. – 2012. – Т. 4, №2. – С. 241–246.

[20] Дмитришин М.І. Тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих із регулярними еліптичними операторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, №4. – С. 75–82. (Те саме: Dmytryshyn M.I. Tensor products of approximation spaces associated with regular elliptic operators // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V. 208, № 3. – P. 355-365.)

[21] Dmytryshyn M. Interpolated tensor products of exponential type vectors of unbounded operators // Journal of Mathematics and System Science. – 2014. – V. 4, №2. – P. 99–104.

[22] Dmytryshyn M., Lopushansky O. Bernstein-Jackson-type inequalities and Besov spaces associated with unbounded operators // Journal of Inequalities and Applications. – 2014. – V. 2014. – Article ID 105, 12 pages.

[23] Dmytryshyn M. Tensor products of exponential type vectors of unbounded operators // Int. Journal of Math. Analysis. – 2014. – V. 8, №11. – P. 529–538.

[24] Dmytryshyn M. Approximation spaces associated with Legendre differential operators // Int. Journal of Math. Analysis. – 2014. – V. 8, №22. – P. 1075–1082.

[25] Dmytryshyn M.I. Interpolated scales of approximation spaces for regular elliptic operators on compact manifolds // Carpathian Math. Publ. – 2014. – V. 6, №1. – P. 26–31.

[26] Дмитришин М.І. Інтерполяційні шкали апроксимаційних просторів, асоційованих з позитивними операторами // Прикладні проблеми механіки і математики : Наук. збірник. Випуск 12. – 2014. – С. 7–15.

[27] Dmytryshyn M. Besov-Lorentz-type spaces and best approximations by exponential type vectors // Int. Journal of Math. Analysis. – 2015. – V. 9, № 16. – P. 779–786.

[28] Dmytryshyn M. Approximation by exponential type vectors of positive operators // Int. Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – V. 112, №4. – P. 795–804.

[29] Dmytryshyn M., Lopushansky O. Spectral approximations of strongly degenerate elliptic differential operators // Carpathian Math. Publ. – 2019. – V. 11, №1. – P. 48–53.

[30] Dmytryshyn M., Lopushansky O. On Spectral Approximations of Unbounded Operators // Complex Anal. Oper. Theory. – 2019. – V. 13, №8. – P. 3659—3673.

[31] Dmytryshyn M.I. An interpolation of the spaces of exponential type vectors // Междунар. конф. “VIII Белорусская математическая конференция” Ч. 1 (Минск, Беларусь, 19-24 июня 2000 г.): тезисы докладов. – В 2 ч.: ч. 1. – Минск, 2000. – С. 58.

[32] Дмитришин М.І. Інтерполяція просторів, породжених векторами експоненціального типу // Український математичний конгрес – 2001. Міжнародна конференція з функціонального аналізу (Київ, 22-26 серпня 2001 р.): тези доп. – Київ : Інститут математики НАН України, 2001. – С. 22.

[33] Dmytryshyn M.I. Approximation by exponential type vectors // International conference on Functional Analysis and its Applications

dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach : Book of Abstracts (Lviv, 28-31 May 2002). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 2002. – P. 61–62.

[34] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Interpolation of exponential type vectors of positive operators // III Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9-12 вересня 2003 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2003. – С. 121.

[35] Дмитришин М.І. Аналітичність кореневих функцій диференціальних операторів Лежандра // Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-26 травня 2004 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2004. – С. 69–70.

[36] Дмитришин М.І. Інтерполяція векторів експоненціального типу операторів Лежандра // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 27 вересня-1 жовтня 2004 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2004. – С. 72.

[37] Дмитришин М.І. Інтерполяційні простори експоненціальних векторів дробових степенів позитивних операторів // Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-27 травня 2005 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2005. – С. 196–197.

[38] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Lorentz type invariant subspaces // XI Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 18-20 травня 2006 р.): матеріали конф. – Київ : ТОВ "Задруга", 2006. – С. 500.

[39] Дмитришин М.І. Повнота множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів у просторах L_ρ // Міжнародна конферен-

ція “Диференціальні рівняння та їх застосування” (Чернівці, 11-14 жовтня 2006 р.): тези доп. – Чернівці : Рута, 2006. – С. 39.

[40] Дмитришин М.І. Найкращі наближення векторами експоненціального типу // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24-28 вересня 2007 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2007. – С. 91.

[41] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з диференціальним оператором Лежандра // XII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2008 р.): матеріали конф. – Київ : ТОВ “Задруга”, 2008. – С. 603.

[42] Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. Abstract Besov spaces, associated with unbounded linear operator in Banach space // Міжнародна конференція “Аналіз і топологія” (Львів, 27 травня-7 червня 2008 р.): тези доп. – Льів : Львівський національний університет ім. І. Франка, 2008. – С. 37.

[43] Дмитришин М.І. Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів // IV Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 10-12 вересня 2008 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2008. – С. 31.

[44] Dmytryshyn M.I. Exponential Type Vectors of Complex Degrees of Positive Operators // Міжнародна конференція “Нескінченновимірний аналіз і топологія” (Івано-Франківськ, 27 травня-1 червня 2009 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Плай, 2009. – С. 30–31.

[45] Дмитришин М.І. Інтерполяція абстрактних просторів Бєсова // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (Чернівці, 8-13 червня 2009 р.): тези доп. – Чернівці : Книги–XXI, 2009. – С. 41–42.

[46] Dmytryshyn M.I. Approximations by Exponential Type Vectors of Regular Elliptic Operators // International Conference on Functional

Analysis dedicated to the 90th anniversary of V.E. Lyantse : Abstracts of Reports (Lviv, 17-21 November 2010). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2010. – P. 36–37.

[47] Дмитришин М.І. Інтерполяція тензорних добутків просторів векторів експоненціального типу // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19-23 вересня 2011 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2011. – С. 64.

[48] Дмитришин М.І. Тензорні добутки просторів векторів експоненціального типу замкнених операторів // XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. – Київ : НТУУ "КПІ", 2012. – С. 92.

[49] Dmytryshyn M.I. Exponential type vectors of closed operators on tensor products // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach : Abstracts of Reports (Lviv, 17-21 September 2012). – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2012. – P. 40.

[50] Дмитришин М.І. Тензорні добутки інтерполяційних просторів типу Бєсова // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 48.

[51] Дмитришин М.І. Інтерполяційні властивості тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з регулярними еліптичними операторами // V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. – С. 24.

[52] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами // XV Міжнародна наукова конференція ім. акад.

М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ : НТУУ “КПІ”, 2014. – С. 82.

[53] Дмитришин М.І. Апроксимаційні простори, асоційовані з деякими класами еліптичних операторів // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня-5 липня 2014 р.): тези доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2014. – С. 52–53.

[54] Дмитришин М.І. Простори типу Лоренца, асоційовані з позитивними операторами // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1-4 липня 2015 р.): тези доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2015. – С. 38.

[55] Dmytryshyn M.I. Interpolated scales of Lorentz-type spaces of exponential type vectors // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 р.): тези доп. – Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 2015. – С. 31.

[56] Дмитришин М.І. Спектральні апроксимації для операторів з мероморфною резольвентою // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 р.): матеріали конф. – Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. – Київ : НТУУ “КПІ”, 2016. – С. 95–97.

[57] Дмитришин М.І. Узагальнені спектральні апроксимації для регулярних еліптичних операторів // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного аналізу” (Ворохта, 22 лютого-25 лютого 2017 р.): тези доп. – Івано-Франківськ : Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2017. – С. 77–78.

[58] Дмитришин М.І. Аналітичні оцінки спектральних апроксимацій для узагальнених диференціальних операторів Лежандра // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 17-19 вересня 2018 р.): матеріали доп. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2018. – С. 176.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких конференціях, наукових семінарах:

[1] Міжнародна конференція "VIII Білоруська математична конференція" (Мінськ, Білорусь, 19-24 червня 2000 р.).

[2] Міжнародна конференція з функціонального аналізу (Київ, 22-26 серпня 2001 р.).

[3] Міжнародна конференція з функціонального аналізу і його застосувань, присвячена 110-річчю з дня народження Стефана Банаха (Львів, 28-31 травня 2001 р.)

[4] III Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 9-12 вересня 2003 р.).

[5] Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-26 травня 2004 р.).

[6] Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 27 вересня-1 жовтня 2004 р.).

[7] Конференція молодих учених з сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача (Львів, 24-27 травня 2005 р.).

[8] XI Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 18-20 травня 2006 р.).

[9] Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 11-14 жовтня 2006 р.).

[10] Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24-28 вересня 2007 р.).

[11] XII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2008 р.).

[12] Міжнародна конференція "Аналіз і топологія" (Львів, 27 травня-7 червня 2008 р.).

[13] IV Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 10-12 вересня 2008 р.).

[14] Міжнародна конференція "Нескінченновиміриний аналіз і топологія" (Івано-Франківськ, 27 травня-1 червня 2009 р.).

[15] Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (Чернівці, 8-13 червня 2009 р.).

[16] Міжнародна конференція з функціонального аналізу, присвячена 90-річчю з дня народження В.Е. Лянце (Львів, 17-21 листопада 2010 р.).

[17] Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19-23 вересня 2011 р.).

[18] XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012 р.).

[19] Міжнародна наукова конференція, присвячена 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (Львів, 17-21 вересня 2012 р.).

[20] Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013 р.).

[21] V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013 р.).

[22] XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014 р.).

[23] IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня-5 липня 2014 р.).

[24] Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1-4 липня 2015 р.).

[25] Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 р.).

[26] XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 р.).

[27] Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та метематичного аналізу" (Ворохта, 22 лютого-25 лютого 2017 р.).

[28] Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 17-19 вересня 2018 р.).

[29] Київський семінар з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (Київ, 1 квітня 2015 р., керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. М. Л. Горбачук, д.ф.-м.н., проф. Ю. С. Самойленко у 2015 р., тепер: д.ф.-м.н., ст.н.сп. А. Н. Кочубей, д.ф.-м.н., проф. Ю. С. Самойленко).

[30] Науковий семінар кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" (Івано-Франківськ, 4 вересня 2019 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. А. В. Загороднюк).

[31] Науковий семінар кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Ю. Федьковича (Чернівці, 24 вересня 2019 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. В. К. Маслюченко).

[32] Науковий семінар з теорії аналітичних функцій в Львівському національному університеті імені Івана Франка (Львів, 14 листопада 2019 р., керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. О. Б. Скасків).