

# Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу **Дмитришина Мар'яна Івановича** "Апроксимаційні простори, асоційовані з цілими векторами експоненціального типу", подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01–математичний аналіз

## 1. Актуальність теми дослідження.

Дисертаційне дослідження присвячено розв'язанню задач теорії наближень цілими векторами експоненціального типу замкнених необмежених операторів у комплексних банахових просторах, зокрема, побудові методу розв'язання задачі про найкраще наближення інваріантними підпросторами цілих векторів експоненціального типу. За основу такого нового методу запропоновано операторний аналог нерівностей типу Бернштейна та Джексона.

Аналітичні вектори, як ефективний інструмент у розв'язання багатьох різноманітних задач аналізу, з'явилися в роботах Харіш-Чандри (1953), П. Карт'є і Ж. Діксм'є (1958), Е. Нельсона (1959), Л. Гордінга (1960), Р. Гудмана (1969).

Фундаментальний результат Е. Нельсона про всюди щільність аналітичних векторів у банаховому просторі став витоком для цілого напрямку сучасного функціонального аналізу, пов'язаному з теорією наближень. Так за допомогою техніки цілих векторів експоненціального типу, які утворюють важливий підклас аналітичних векторів, у працях М. Л. Горбачука та Г. В. Радзієвського розв'язано низку задач про найкращі наближення елементів банахового простору. Зокрема, як в термінах модуля неперервності, так і в термінах  $K$ -функціоналу встановлено оцінки найкращих наближень типу нерівностей Бернштейна та Джексона, з яких безпосередньо випливає низка класичних теорем теорії наближень функцій тригонометричними поліномами та цілими функціями експоненціального типу.

Якщо провести паралель аналогій між класичною теорією наближень та "абстрактною" теорією наближень аналітичними векторами, то більшість вже завершених результатів у першій не отримали ще своїх аналогів у другій теорії. Так, наприклад, задача про точні оцінки (в сенсі абсолютних констант) найкращих наближень, розв'язанню якої присвячено праці видатних вітчизняних математиків В. К. Дзядика і М. П. Корнейчука та багатьох представників, заснованих ними наукових шкіл, залишається й дотепер актуальною в абстрактному випадку.

У дисертаційній роботі запропоновано новий підхід до розв'язання задач такого типу. Його суть полягає в описанні апроксимаційних схем, асоційованих з інваріантними підпросторами цілих векторів експоненціального типу та описанні відповідних апроксимаційних просторів як інтерполяційних просторів.

З огляду на викладене вище, вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною.

## 2. Зміст роботи та наукові результати.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел з 206 найменувань і додатків, які містять список публікацій за темою дисертації та відомостей про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи становить 335 сторінок.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, наведено мету, завдання, об'єкт і предмет дослідження, наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, а також представлено відомості про апробацію результатів дослідження, публікації, структуру роботи.

Основний зміст роботи становлять п'ять розділів.

Перший розділ присвячено огляду літератури та основних напрямків дослідження. Матеріал у ньому є дуже об'ємним, інформативним і чітко систематизованим. Зокрема, у ньому наведено попередні відомості та сформульовано результати, які мають безпосереднє відношення до дисертації. А саме, відомості з теорії апроксимаційних просторів, теорії інтерполяційних просторів і теорії функціональних просторів.

Другий розділ є основним розділом дисертаційної роботи. У ньому визначено нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора у банаховому просторі та запроваджено нові класи апроксимаційних просторів типу Бесова, асоційованих з цим оператором. Істотно важливим результатом є з'ясування зв'язку між апроксимаційними та інтеполяційними просторами, а точніше описання апроксимаційних просторів як інтерполяційних (теореми 2.2.1, 2.2.2).

У контексті питань, які стосуються спектральних апроксимацій у банахових просторах, виділено оператори з точковим спектром, лінійна оболонка кореневих векторів яких збігається з простором усіх цілих векторів експоненціального типу такого оператора (теорема 2.1.5, наслідок 2.1.1).

Одним з найвагоміших результатів у другому розділі є операторні аналоги нерівностей типу Бернштейна і Джексона. Ці аналоги виражено в термінах квазінорм апроксимаційних просторів типу Бесова (теорема 2.3.1) і до того ж з'ясовано (в аналітичному вигляді) залежність констант від параметрів, якими визначаються апроксимаційні простори. Виявилось, що в певному розумінні знайдений аналітичний вираз констант у нерівностях типу Бернштейна і Джексона є непокрощуваним.

Отримані нерівності характеризують наближення заданого елемента банахового простору елементами інваріантних підпросторів цілих векторів експоненціального типу, а для оператора з точковим спектром дають опис спектральних апроксимацій елементів банахового простору (теорема 2.3.5).

Як приклад одного з можливих застосувань основного результату, розглянуто оператор диференціювання у просторі Лебега і, як наслідок, отримано нерівності типу Бернштейна і Джексона із явним виразом залежності констант від параметрів класичного простору Бесова (теорема 2.4.2). Цей результат є новим і для класичної теорії апроксимації функцій.

Слід відзначити також істотний просув у розвинення теорії апроксимаційних просторів на областях визначення цілих степенів оператора. Отримані у цьому напрямку результати, сформульовано в теоремах 2.3.3, 2.3.4 і 2.3.6.

Третій розділ дисертації присвячено побудові теорії інтерполяції просторів цілих векторів експоненціального типу, асоційованих з необмеженими операторами в банахових просторах.

Встановлено основні властивості інтерполяційних просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора, породжених дійсним  $K$ -методом (теореми 3.1.1, 3.1.2) і комплексним методом інтерполяції (теорема 3.2.1). Уведено інтерполяційні простори типу Лоренца векторів експоненціального типу на областях визначення цілих степенів замкненого оператора (теореми 3.1.5, 3.1.6) і описано їх властивості.

Розглянуто нові класи просторів цілих векторів експоненціального типу на областях визначення комплексних степенів додатних операторів. Для таких просторів доведено відповідні інтерполяційні теореми 3.3.1, 3.3.2 та встановлено їх властивості (наслідки 3.3.1, 3.3.2).

Для додатних операторів визначено також відповідні апроксимаційні простори типу Бесова, встановлено їх інтерполяційні властивості (теореми 3.4.1, 3.4.2). У контексті спектральних апроксимацій заслуговує на особливу увагу проблема наближення заданого елемента банахового простору, що є областю визначення комплексних степенів додатного оператора, елементами інваріантних підпросторів його цілих векторів експоненціального типу. Отримано результат, що характеризує спектральні апроксимації для додатного оператора з точковим спектром в термінах квазінорм визначених апроксимаційних просторів (теорема 3.4.5).

Четвертий розділ дисертації присвячено просторам цілих векторів експоненціального типу різних класів еліптичних операторів у контексті задач теорії апроксимації цілими функціями експоненціального типу і, зокрема, кореневими функціями таких операторів у просторах Лебега. А саме, розглянуто регулярні еліптичні диференціальні оператори в обмежених областях  $\Omega$  і на компактних многовидах класу  $C^\infty$ . Показано, що для таких операторів простори цілих векторів експоненціального типу збігаються з підпросторами цілих функцій експоненціального типу (теореми 4.1.2, 4.1.4).

Важливими видаються знайдені нові ознаки повноти множини корневих функцій регулярно еліптичного оператора в просторах Лебега (теореми 4.2.1-4.2.3), зважаючи на аспекти нетривіальності просторів цілих векторів експоненціального типу.

Описано також простори цілих векторів експоненціального типу вироджених еліптичних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів (теорема 4.3.1), узагальнених диференціальних операторів Лежандра (теорема 4.3.2) та вироджених еліптичних диференціальних операторів Трікомі (теореми 4.3.3-4.3.5).

Встановлено інтерполяційні властивості просторів цілих векторів експоненціального типу, асоційованих зі згаданими вище класами еліптичних операторів (теореми 4.4.1-4.4.3).

У підрозділі 4.5 описано апроксимаційні простори, асоційовані з регулярними еліптичними операторами в обмежених областях  $\Omega$  і на компактних многовидах класу  $C^\infty$ , еліптичними диференціальними операторами, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), узагальненими диференціальними операторами Лежандра. У рамках задачі про оцінки найкращих на-

ближень функцій просторів Лебега кореневими функціями відповідних еліптичних операторів доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм визначених апроксимаційних просторів (теореми 4.5.2, 4.5.4, 4.5.5, 4.5.7, 4.5.9).

У п'ятому розділі дисертації побудовано теорію тензорних добутків апроксимаційних просторів типу Бесова.

Описано проєктивні тензорні добутки просторів цілих векторів експоненціального типу для скінченних наборів замкнених операторів та встановлено деякі їх властивості, зокрема, ті, що стосуються спектральних розкладів (теорема 5.1.5). Описано інтерполяційні властивості проєктивних тензорних добутків цілих векторів експоненціального типу замкнених операторів над банаховими просторами (теореми 5.2.1, 5.2.2). Інтерполяційні теореми доведено також для випадку проєктивних тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів на областях визначення їх цілих степенів (теореми 5.2.3, 5.2.4).

Доведено можливість опису тензорних добутків апроксимаційних просторів типу Бесова як інтерполяційних просторів (теорема 5.3.1). Як наслідок, встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм тензорних добутків апроксимаційних просторів зі значеннями констант, які визначаються параметрами апроксимаційних просторів (теорема 5.3.2).

Подібні результати поширено на випадок тензорних добутків апроксимаційних просторів типу Бесова на областях визначення цілих степенів скінченних наборів операторів (теореми 5.3.3, 5.3.4), а також на областях визначення комплексних степенів наборів додатних операторів (теореми 5.4.1, 5.4.2).

Останній параграф п'ятого розділу присвячено застосуванню отриманих абстрактних результатів до тензорних добутків апроксимаційних просторів типу Бесова, асоційованих з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях і на компактних многовидах (теореми 5.5.1, 5.5.2), а також узагальненими диференціальними операторами Лежандра (теорема 5.5.3).

### **3. Обґрунтованість, достовірність і новизна наукових результатів.**

Дисертаційне дослідження М. І. Дмитришина проведене на високому науковому рівні. Результати роботи є новими. Усі математичні твердження дисертаційної роботи, які містяться в теоремах і лемах є строго обґрунтованими. Їх достовірність не викликає сумнівів. Викладення положень дисертації виконано логічно і послідовно з дотриманням усіх стандартів наукової літератури.

Результати кандидатської дисертації автора не містяться в докторській дисертації.

### **4. Публікації та апробація результатів.**

Результати дисертації опубліковано у 58 роботах, 29 з яких – це статті в українських та закордонних фахових виданнях, з них 12 статей опубліковано у виданнях, які індексуються у наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection.

Результати дисертації доповідалися на 28 міжнародних наукових конференціях та численних наукових семінарах у провідних наукових центрах України. Автореферат повністю відповідає змісту дисертації.

## 5. Практичне значення результатів.

Дисертаційна робота М. І. Дмитришина є цілісною і завершеною науковою працею, в якій одержано результати теоретичного характеру. Вони складають вагомий внесок у теорію операторів, теорію функціональних просторів, теорію наближень. Розроблені у дисертаційній роботі методи можуть знайти подальше застосування в різних розділах сучасного математичного аналізу.

## 6. Зауваження

Дисертаційну роботу написано на належному науковому рівні. У цілому до наукової складової тексту дисертації зауважень немає, за винятком таких:

- на стор. 127 у доведенні теореми 2.4.1 зустрічається поняття простору Шварца, яке слід було б уточнити;
- для доведення наслідку 3.1.1 достатньо було зіслатися на відомі властивості інтерполяційних просторів;
- простори  $\mathcal{E}_p^{\nu}(C^m)$  слід було ввести у підрозділі 2.2, де вони вже по суті використовуються при побудові апроксимаційних просторів;
- матеріал підрозділу 4.3 доцільно було б розділити, виділивши в окремі підрозділи ті класи еліптичних операторів, які розглядаються;
- у формулюванні теореми 5.3.1 не уточнено, які саме можливі значення параметрів  $\tau_j$  і  $s$ .

Інших серйозних зауважень до оформлення дисертації немає. Ті нечисленні друкарські помилки і описки, які мною помічені не впливають на позитивне сприйняття дисертації і не зменшують її наукового рівня.

## 7. Висновки.

Дисертаційне дослідження *"Апроксимаційні простори, асоційовані з цілими векторами експоненціального типу"* є завершеним науковим дослідженням в актуальних напрямках сучасної теорії наближень та теорії операторів. В ній розроблено методикою розв'язання низки важливих наукових проблем, які мають світове значення.

Одержані в дисертації результати мають вагоме теоретичне значення. Вони напевне знайдуть застосування у дослідженнях в прикладних задачах спектральної теорії операторів, або ж як методи аналізу сигналів чи розпізнавання образів.

Наукові положення дисертаційного дослідження повною мірою апробовані на міжнародних наукових конференціях і наукових семінарах.

Наведені зауваження не зменшують наукового рівня дисертації.

На основі вивчення рукопису дисертації, автореферату та статей, опублікованих за темою дисертації, вважаю, що обрана тема дослідження є актуальною, наукові положення є новими, достовірними і строго математично обґрунтованими. Дисертація М. І. Дмитришина *"Апроксимаційні простори, асоційовані з цілими векторами*

експоненціального типу" , подана на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, відповідає вимогам щодо змісту докторських дисертацій "Порядку присудження наукових ступенів" , затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013, результати дослідження відповідають вимогам до наукового рівня результатів докторської дисертації, а її автор Дмитришин Мар'ян Іванович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент  
доктор фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник,  
провідний науковий співробітник  
відділу теорії функцій  
Інституту математики НАН України



В. В. Савчук  
Підпис  
**ЗАСВІДЧУЮ**  
Зав. канцелярією  
Інституту математики АН України  
3 Березень 2014