ВІДГУК

офіційного опонента про дисертаційну роботу **Дмитришина Мар'яна Івановича**
"Апроксимаційні простори, асоційовані з цілими векторами експоненціального типу",
подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01–математичний аналіз

1. Актуальність дослідження і його мета. Прийнято вважати, що основи конструктивної теорії функцій (теорії апроксимації) започатковано дослідженнями П.Л.Чебишова та теоремами К.Веєрштраса (1885) і К.Рунге (1885) про найкраще рівномірне наближення поліномами функції, відповідно, неперервної на дійсному відрізку і аналітичної на замкненому компакті зі зв'язним доповненням. Відоме пряме конструктивне доведення теореми Веєрштрасса за допомогою многочленів Чебишова. З апроксимаційної теореми Веєрштраса про можливість рівномірного наближення поліномами неперервних дійсних функцій на відрізку $[a, b]$ алгебраїчними поліномами, зокрема, негайно випливає сепарабельність простору $C[a, b]$, а отже, з огляду на його гаусдорфовість, і його рівнопотужність з множиною дійсних чисел. Тобто, з цього зауваження бачимо, що навіть початкові теореми, які лежать в основі теорії апроксимації, виявляють досить глибинні її зв'язки з іншими розділами сучасної математики. Не говорячи вже про безумовну користь конструктивних побудов апроксимуючих агрегатів з точки зору потреб обчислювальної математики, а отже, й з точки зору практичних потреб в обчислювальних інструментах в найбільш різноманітних розділах сучасної експериментальної науки. Різноманітні підтвердження цьому знаходимо, як протягом XX ст., так і вже у XXI ст. Власне, як зазвичай буває, нові теоретичні досягнення ведуть до більш результативних практичних застосувань, а потреба таких застосувань викликає нові постановки суто теоретичних проблем. До останніх варто віднести відродження на початку 70-их інтересу до дослідження суто класичних проблем, що стосуються кратних рядів: степеневих, Фур'є і т.п., – наприклад, результативність апроксимацій Паде при чисельному розв'язуванні задач фізики високих енергій методом кратних степеневих рядів з невизначеними коефіцієнтами, природньо приводить до потреби дослідження властивостей таких рядів, а суто практична результативність чисельного моделювання за допомомогою жадібних апроксимант (pure greedy approximation) призвела до появи наприкінці 90-их активного інтересу до суто теоретичних постановок поблем для таких об'єктів, потреба дослідження об'єктів одієї "форми" (наприклад, монотонності, опуклості) призвело до появи і активного розвитку такого відносно нового напрямку, як формозберігаючі наближення (опуклі функції наближаються опуклими поліномами, монотонні – монотонними). У цьому ж ряду, інспіроване потребами моделювання різноманітних природніх сигналів (наприклад, частотно-часового аналізу геоакустичних сигналів) виникнення значного інтересу до дослідження розрідженої апроксимації (sparse approximation). Зазначимо також, що розвинута у дослідженнях Чебишова і його школи теорія найкращого наближення функцій на початку XX ст. переросла в конструктивну теорію функцій. При цьому після появи статей Д. Джексона (1911) і С.Н. Бернштейна (1912) акценти перемістились від задач наближення індивідуальних (окремих) функцій до дослідження поведінки похибок наближення многочленами в тих чи інших класах функцій при прямуванні до нескінченності їхніх степенів, що не відмінило актуальність знаходження "індивідуальних" оцінок апроксимацій функцій з різноманітних класів, різноманітними апроксимуючими агрегатами (поліномами за всеможливими ортонормованими системами) у термінах найрізноманітніших норм. У подальшому, після появи у 30-40-их роках поняття поперечника Колмогорова, значну кількість досліджень було виконано у цьому контексті. У тому числі в дуже абстрактних функціонально-топологічних постановках проблем.

Перелік прізвищ математиків, що присвятили свої роботи даній тематиці є надзвичайно великим, тому згадаємо лише прізвища тих, чиї дослідження в значній мірі визначили напрямки подальшого розвитку теорії апроксимації. Це дослідження Ш. Ла Валле-Пуссена, А.Лебега Н.І.Ахієзера, А.Зігмунда, Ж.Фавара, С.М.Нікольського, С.Б.Стєчкіна, О.П.Тімана, П.Л.Ульянова, В.К.Дзядика, М.П.Корнійчука, М.П.Тімана. Серед сучасних досліджень варто виділити дослідження, виконані R.A. De Vore, А.А. Гончаром, О.І. Степанцем, І.О. Шевчуком, В.Н. Темляковим та їхніми учнями, а також дуже вликою кількістю більш чи менш знаних математиків у наукових центрах у всьому світі. Різноманітні зв'язки, які існують між структурними та конструктивними властивостями функцій, в першу чергу швидкістю прямування до нуля їх найкращих поліноміальних наближень, були і є метою пошуку у таких дослідженнях. Серед задач, які при цьому розглядаються одне з центральних місць займає, так звана задача Нікольського–Колмогорова про встановлення умов, за яких для найкращого наближення у тій чи іншій метриці, можна знайти головний член асимптотичної формули. Проблема пошуку точних сталих в обернених теоремах теорії наближень, які поряд з прямими теоремами займають основне місце в даній теорії, тривалий час у більшості випадків була далекою від свого вирішення. У цьому зв'язку варто відзначити роботи, виконані у 1972–1976 р.р. М.Д. Стерліним, який вперше в доволі загальних постановках успішно справився з цією проблемою. При цьому він вперше дослідив з точки зору наближень простори $S^{p,\mu}$, взяті пізніше О.І. Степанцем, у вигляді основи для структурування властивостей просторів періодичних функцій. Серед досягнень у цьому напрямку останніх років відзначимо дослідження, виконані А.С. Романюком, В.В. Савчуком, А.С. Сердюком, О.С. Чайченком. І у даний час ці проблеми займають одне з центральних місць в конструктивній теорії функцій дійсної та комплексної змінних, позаяк встановлення нових фактів дуже часто приводить до виникнення нових постановок питань, важливих як з точки зору розвитку самої теорії, так і її застосувань. Ще одним прикладом цього є відносно недавне розв'язання А.І.Бондаренком у повному обсязі проблеми еквілібруму, а також разом з М.В'язовською і Д.Радченком засобами "неперервної математики" (теорії рядів Фур'є і теорії аналітичних функцій) дискретної проблеми упакування куль у просторах розмірності 8 і 24. Перші результати, отримані в 1912 році в комплексному випадку С.Н.Бернштейном, стосувалися задачі про обчислення швидкості прямування до нуля на відрізку найкращих поліноміальних наближень звуження на відрізок аналітичної на деякій множині функції f. В більш загальному випадку для довільного континуума відповідні теореми довів Дж.Уолш (1926 р.). Власне, у подальшому у випадку апроксимації поліномами аналітичних функцій в комплексній площині виявилось, що не кожна область допускає можливість такої апроксимації. Областями, що допускають таку апроксимацію, є так звані області Каратеодорі, тобто, області, межа яких є одночасно межею деякої необмеженої області. Найпростішими прикладами областей Каратеодорі є Жорданові області. Конструктивні характеристики функцій з класів Ліпшиця в областях, що мають аналітичні границі отримано у 1942 р. В.Севеллом. Задачі поліноміальної апроксимації функцій, означених в областях з "особливостями а також на довільних континуумах зі зв'язним доповненням, досліджувались С.Н.Мергеляном. Даний напрям отримав свій подальший розвиток у роботах С.Я.Альпера, В.К.Дзядика, Н.А.Лебедєва, П.М.Тамразова, В.І.Білого та інших. Зазначимо, що дослідження можливості наближення аналітичних функцій поліномами в середньому по контуру та по області проводились В.І.Смірновим, М.В.Келдишем, С.Н.Мергеляном, А.І.Маркушевичем, М.А.Лаврентьєвим, Г.Ц.Тумаркіним та іншими. Задачі, пов'язані зі знаходженням конструктивних характеристик класів аналітичних функцій в залежності від їх найкращих поліноміальних наближень по контуру та по області, досліджувались в роботах Дж.Уолша, Г.Рассела, І.І.Ібрагімова, Дж.І.Мамедханова, В.М.Кокілашвілі та інших. Майже відразу, поряд з дослідженням апроксимаційних властивостей послідовностей алгебраїчних поліномів, виник і досі активно розвивається такий напрямок дослідження, як наближення поліномами Фур'є (тригонометричними і т.п.), а більш загально, лінійними агрегатами, побудованими за ортонормованими системами функцій чи ортогональними поліномами. Ці два напрямки досліджень активно впливають один на одного, і успіхи в одному з них призводять до появи нових ідей і постановок задач в іншому з них. Власне, наприклад, виявлення нових тонких шкал при вивченні просторів Хермандера і Соболева у дослідженнях В.А. Михайлеця і А.А. Мурача, негайно робить актуальною проблему систематизації теорії наближень у просторах Лебега зі змінним показником, чи, більш загально, просторах Орлича. Варто зазначити, що описані вище напрямки досліджень у теорії апроксимації тісно пов'язані з надзвичайно широкими дослідженнями інтерполяційних проблем. При цьому задачі інтерполяції конкретних об'єктів (функцій, операторів, функціоналів) після появи знаменитих інтерполяційних теорем М. Ріса, Орліча і Мацинкевича призвели до побудови зусиллями багатьох авторів доволі стрункої теорії інтерполяційних просторів. Позаяк інтерполяційні агрегати можна розглядати і використовувати, з іншого боку, для потреб апроксимації, то паралельно багато авторів стали розглядати різні апроксимаційні схеми з подібної точки зору – апроксимації просторів певними наборами просторів добре відомої структури. Перелік математиків, які приділили свою увагу проблемам, що при цьому виникають, в даний час також є надзвичайно обширними. Варто також згадати, про моделювання різноманітного роду явищ і процесів, як згаданих вище, так і доволі нових напрямків таких, як аналіз даних в мережевих інформаційних потоках та проблеми захисту цих інформаційних потоків. Виявляється, що моделювання невизначеностей в цих явищах доволі успішно здійснюється засобами теорії апроксимаційних просторів. Зазначимо, що теорія інтерполяції лінійних операторів досліджує взаємозв'язки між лінійними просторами різноманітної природи. Традиційно а чи більш звично мати справу з різними функціями, що описують реальні об'єкти, тобто, функції від змінних, що є доволі близькими до реальних речей. Те ж саме можна сказати і про значення функцій. Але у процесі розвитку досліджень стало зрозумілим, що значно продуктивніше розглядати функції від самих функцій (оператори), а внаслідок цього розглядати простори функцій в цілому. Теорія інтерполяції йде ще дальше: в ній розглядаються "функції", в яких аргументами є простори, які утворені з тих же функцій, що і описують реальні об'єкти. Природно, що і значення таких "функцій" від просторів повинні бути деякими просторами. Це дає змогу називати такі "функції" конструкціями просторів. Власне, теорія інтерполяції лінійних операторів досліджує інтерполяційні конструкції і все, що з ними пов'язане. У випадку теорії інтерполяції лінійних операторів зазвичай розглядають в таких конструкціях банахові простори і лінійні оператори, як їхні перетворення. При цьому основні результати стосуються нормованих і квазінормованих просторів та лінійних перетворень цих просторів, а сама теорія інтерполяції має справу з порядковими структурами, оскільки основні результати полягають у встановленні різного типу оцінок і нерівностей. Зазначимо, що виклад ключових підсумків розвитку теорії інтерполяційних просторів викладені в книгах Х. Трібеля, С.Г.Крейна, Ю.І. Петуніна і Е. М. Семенова, Й.Берга і Й. Льофстрема. У цьому контексті не можна не згадати також і про книги К.Беннета і Р.Шарплі та Ю.А.Брудного і Н.Я.Кругляка, в яких ввикладено результати подальших і дуже плідних досліджень. Цей перелік можна продовжити значною кількістю згадок про дослідження, які виконані багтьма авторами вже у XXI ст.

З іншого боку, у зв'язку з різними задачами теорії апроксимації використовують поняття апроксимаційних схем та відповідних апроксимаційних просторів, що мають тісний зв'язок з інтерполяційними просторами. Використовуючи шкалу інваріантних відносно довільного необмеженого замкненого оператора підпросторів цілих векторів експоненційного типу, природним чином можна визначити апроксимаційні простори, асоційовані з таким оператором, що діє у банаховому просторі. На таких підпросторах оператор обмежений, при цьому зберігаються основні спектральні характеристики, а тому така конструкція дозволяє досліджувати властивості розв'язків диференціально-операторних рівнянь з необмеженими операторами, шляхом зведення їх до аналогічних рівнянь з обмеженими операторами. За умови щільності векторів експоненційного типу, банахів простір можна розкласти в нескінченну суму підпросторів цілих векторів експоненційного типу, при цьому дія оператора повністю визначається дією на цих підпросторах. Операторний підхід до задач апроксимації дозволяє отримати вагомі результати щодо зв'язку між степенем гладкості функції і швидкістю прямування до нуля її найкращого наближення цілими векторами експоненційного типу, характеризації спектральних апроксимацій у випадку операторів з точковим спектром у банахових просторах, а у випадку оператора диференціювання у функціональних просторах — відповідні оцінки наближення функцій алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненційного типу, або ж кореневими функціями. Зважаючи на сказане вище, не повинно виникнути сумнівів в актуальності теми дисертаційного дослідження Дмитришина Мар'яна Івановича, що присвячене розробці теорії апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненційного типу, у їхніх зв'язках з задачами теоремами теорії інтерполяційних просторів.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Основний зміст дисертаційної роботи міститься у розділах 2–5. На думку автора відгуку, основні результати дисертаційної роботи, що складають її ядро, містяться у розділах 2 (2.2–2.4), 3 (3.2–3.4) і 4 (4.3–4.5). Основним науковим результатом дисертації є розробка теорії апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненційного типу необмежених операторів, а також встановлення її тісних зв'язків з теорією інтерполяційних просторів.

У розділі 2 дисертації введено і описано нові класи апроксимаційних просторів, асоційованих з цілими векторами експоненційного типу необмежених операторів в банахових просторах, доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм таких просторів з точними значеннями сталих в оцінках найкращих наближень цілими векторами експоненційного типу.

У підрозділі 2.1 визначено нові класи просторів цілих векторів експоненційного типу замкненого оператора, встановлено основні властивості цих просторів (теореми 2.1.1–2.1.3), а також встановлено можливість характеризації кореневих векторів оператора з точковим спектром в термінах цілих векторів експоненційного типу (теорема 2.1.5). Власне, доведено, що простори цілих векторів експоненційного типу оператора з точковим спектром збігаються з лінійною оболонкою образів проекторів Ріса, а у випадку оператора з точковим спектром, що складається з ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності, простір всіх цілих векторів експоненційного типу збігається з лінійною оболонкою його кореневих векторів.

У підрозділі 2.2 введено нові класи апроксимаційних просторів типу Бєсова, асоційованих з необмеженими операторами у банахових просторах, та цілими функціями експоненційного типу для операторів диференціювання у функціональних просторах. Доведено, що ці простори характеризуються як інтерполяційні простори (теореми 2.2.1–2.2.4).

У підрозділі 2.3 встановлено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм апроксимаційних просторів типу Бєсова з явним виглядом сталих, залежних від параметрів таких просторів (теореми 2.3.1, 2.3.2). Доведені нерівності дають аналітичні оцінки найкращих наближень цілими векторами експоненційного типу необмеженого оператора (теорема 2.3.3), зокрема, спектральних апроксимацій у випадку оператора з точковим спектром (теореми 2.3.5 і 2.3.6), а у випадку оператора диференціювання — відповідні оцінки наближення функцій алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненційного типу (теорема 2.4.1 і наслідок з неї – теорема 2.4.2, у підрозділі 2.4).

У розділі 3 побудовано теорію інтерполяції просторів цілих векторів експоненційного типу, асоційованих з необмеженими операторами у банахових просторах, у контексті її застосувань в теорії наближень функцій. Встановлено інтерполяційні властивості просторів цілих векторів експоненційного типу замкненого оператора, породжених як дійсними (підрозділ 3.1 – теореми 3.1.1, 3.1.2 та відповідні наслідки), так і комплексним методами інтерполяції (підрозділ 3.2 – теореми 3.2.1, 3.2.2). Описано нові класи просторів цілих векторів експоненційного типу замкнених операторів на областях визначення їх цілих степенів, а для позитивних операторів — на областях визначення їх комплексних степенів. Встановлено ізоморфізми для дійсної та комплексної інтерполяційних шкал цих просторів (теорема 3.3.1).

У підрозділі 3.4 описано шкалу апроксимаційних просторів, асоційованих з позитивними операторами у банахових просторах, та доведено інтерполяційні теореми, що характеризують цю шкалу, власне, досліджено інтерполяційні властивості апроксимаційних просторів, асоційованих з позитивними операторами на банахових просторах (теореми 3.4.1, 3.4.2). Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм цих апроксимаційних просторів, а також теореми, що характеризують спектральні апроксимації для оператора з точковим спектром.

У розділі 4 описано функціональні простори цілих векторів експоненційного типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях Ω і компактних многовидах класу C^∞ (підрозділ 4.1), вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), звичайних вироджених еліптичних диференціальних операторів в обмеженому інтервалі та вироджених еліптичних диференціальних операторів з частинними похідними в обмежених областях з нескінченно гладкою границею. Встановлено нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$. Власне, простори цілих функцій експоненційного типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях і компактних многовидах класу C^∞ описано у підрозділі 4.1, а нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область класу C^∞, наведено у підрозділі 4.2.

У підрозділі 4.3 описано простори цілих векторів експоненційного типу вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), звичайних вироджених еліптичних диференціальних операторів в обмеженому інтервалі та вироджених еліптичних диференціальних операторів з частинними похідними в обмежених областях з нескінченно гладкою границею.

Доведено, що апроксимаційні простори, асоційовані з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях і компактних многовидах класу C^∞, узагальнених диференціальних операторів Лежандра є замкненими підпросторами класичних просторів Бєсова. У підрозділі 4.4 наведено інтерполяційні властивості просторів цілих векторів експоненційного типу регулярних еліптичних диференціальних операторів в обмежених областях класу C^∞ (теорема 4.4.1) і узагальнених диференціальних операторів Лежандра (теорема 4.4.3). А у підрозділі 4.5 описано апроксимаційні простори, асоційовані з еліптичними операторами, та доведено нерівності Бернштейна і Джексона з точними оцінками найкращих наближень кореневими функціями таких операторів, що характеризують спектральні апроксимації цих операторів (теореми 4.5.5, 4.5.7, 4.5.9).

У розділі 5 побудовано теорію проективних тензорних добутків просторів цілих векторів експоненційного типу для скінченних наборів замкнених операторів, що діють у банахових просторах, а також розвинуто теорію інтерполяційних просторів проективних тензорних добутків цілих векторів експоненційного типу замкнених операторів над банаховими просторами (теореми 5.2.1, 5.2.2) та замкнених операторів на областях визначення їх цілих степенів (теореми 5.2.3, 5.2.4).

Описано проективні тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бєсова та доведено, що тензорний добуток апроксимаційних просторів типу Бєсова є проміжним інтерполяційним простором між тензорним добутком просторів цілих векторів експоненційного типу замкнених операторів і тензорним добутком банахових просторів, на яких визначено відповідні оператори (теорема 5.3.1). Також доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів цілих векторів експоненційного типу (теорема 5.3.2). Подібні теореми доведено для тензорних добутків апроксимаційних просторів типу Бєсова на областях визначення цілих степенів операторів (теореми 5.3.3, 5.3.4). Також описано тензорні добутки апроксимаційних просторів, асоційованих з позитивними операторами (теореми 5.4.1, 5.4.2), регулярними еліптичними диференціальними операторами (теореми 5.5.1) і узагальненими диференціальними операторами Лежандра (теорема 5.5.3) та доведено нерівності типу Бернштейна і

Розділ 5 дисертації є найскладнішим, як з точки зору техніки і методів доведення його результатів, так і з точки зору сприйняття читачем цих доведень та основних результатів. Найбільш вагомі нетривіальні результати дисертації, що демонструють потужність й силу, розроблених автором дисертаційного дослідження і застосованих ним підходів, на думку автора даного відгуку зосереджені у розділах 2 і 3. За своєю сукупністю ця частина дисертації є цілком достатньою, щоб з впевненістю стверджувати, що проведені у дисертації дослідження є найвищого наукового рівня.

Зазначимо, що ми зосередили увагу тільки на результатах, які утворюють ядро дисертаційної роботи і в достатній мірі характеризують новизну і силу дисертації. Зі сказаного вище у цьому пункті, а також в актуальності, випливає, що всі основні результати дисертаційної роботи М.І.Дмитришина є новими і мають важливе значення, як для розвитку теорії апроксимаційних просторів в цілому, так і для можливих застосувань.

3. Обґрунтованість і достовірність результатів дисертації. Доведення всіх основних результатів дисертаційної роботи М.І.Дмитришина приведені з достатньою повнотою, на прийнятому в сучасній математичній літературі рівні строгості і тому в їх обґрунтованості і достовірності не виникає сумніву. Дисертація написана чіткою і зрозумілою мовою, виклад логічний і послідовний.

4. Зауваження.

1. Результати розділу 2, що стосуються операторів з точковим спектром, мають більш спеціальний вигляд, ніж інші результати цього розділу, і тому їх варто було би виділити в окремий підрозділ.
2. Доведення повноти простору $\mathcal{B}^s_{q,p,\tau}(A)$ в теоремі 2.2.1 можна спростити, використовуючи повноту простору $\mathcal{E}_{q,p}(A)$ та інтерполяційні властивості.
3. Крім регулярно еліптичного, можна і доцільно було би розглянути інші приклади позитивних операторів та описати їхні інтерполяційні властивості (п. 4.4). Зрештою, не можна охопити неосяжне – для цього замало місця і засобів.
4. На тензорному добутку просторів цілих векторів експоненційного типу розглядається проективна локально опукла топологія (с.259), однак далі вона не використовується.
5. Доведення теореми 2.3.4 аж занадто конспективне – всього 3 рядки, так само як і доведення теорем 5.5.2 і 5.5.3, які є доволі фрагментарними. Хоча в правильності тверджень цих теорем не виникає сумнівів, проте доведення слід було написати значно детальніше.
6. Дисертаційна робота є дотичною до досліджень дуже багатьох авторів і, тому вимагає акуратного співставлення і порівняння отриманих автором результатів з результатами досліджень інших авторів. Попри великий список теорем інших авторів, наведених у першому розділі, а також доволі ґрунтовний у цьому зв'язку виклад суті операторних підходів до теорії апроксимаційних просторів і інтерполяції просторів, практично відсутнє більш-менш детальне і формальне порівняння результатів автора дисертації з результатами інших авторів. Остання обставина разом з громіздкою системою позначень створює для читача окремі незручності у спробах скласти у певну систему набір теорем з дисертації разом з твердженнями інших авторів. Зазначимо також, що огляд досліджень, виконаних у XXI ст. хоча і є доволі фрагментарним, проте торкається всіх основних досягнень цього періоду.
7. На сам кінець, загадка природи, як рівності (2.53), які є елементарними і вартують хіба-що звичайного зауваження стосовно сталих з теореми 2.3.1, опинилися у формулюванні самої теореми 2.3.1?

Зазначені зауваження не носять принципового характеру та не знижують загальної цінності результатів, винесених здобувачем на захист, і загальної високої оцінки дисертаційної роботи М.І. Дмитришина.

5. Теоретична цінність і практична значущість наукових результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і є вагомим внеском в розвиток як теорії операторів в цілому, так і теорії апроксимаційних та інтерполяційних просторів. Отримані теоретичні результати можуть знайти застосування при розв'язанні прикладних задач спектральної теорії диференціальних операторів, а також при моделюванні і в аналізі сигналів і у теорії розпізнавання образів, при моделюванні і аналізі даних в мережевих інформаційних потоках та в проблемах захисту даних в цих інформаційних потоках. Розроблені у дисертації підходи можуть виявитися корисними при дослідженні явищ, що моделюються засобами теорії різного роду нечітких (fuzzy) об'єктів та в термінах різного роду грубих (rough) збіжностей.

6. Публікації і апробація результатів роботи. Наукові результати дисертації М.І. Дмитришина опубліковано у 58 друкованих наукових працях, з яких: 29 статей у наукових фахових виданнях, з них 12 - у виданнях, проіндексованих у наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection, 28 публікацій - за матеріалами конференцій, 1 - частина колективної монографії. Обсяг наукових праць та їхня кількість відповідають вимогам щодо публікацій основного змісту дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора наук. Основні результати дисертації з достатньою повнотою опубліковано у статтях з переліку публікацій автора, наведеного у дисертації і авторефераті. Результати дисертаційної роботи доповідались на численних міжнародних наукових конференціях, а також на наукових семінарах Київського національного університету ім.Т.Г.Шевченка, Інституту математики НАНУ, Львівського національного університету ім. І.Франка, Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича, ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" і, отже, пройшли належну апробацію.

7. Висновки. Дисертаційна робота М.І.Дмитришина "Апроксимаційні простори, асоційовані з цілими векторами експоненційного типу" є завершеним науковим дослідженням, має теоретичний характер, а її результати мають вагоме теоретичне значення для теорії інтерполяційних і апроксимаційних просторів. В ній піддається систематичному аналізу проблема описання в термінах інтерполяційних просторів структури і властивостей апроксимаційних просторів, асоційованих з необмеженими операторами в нормованих просторах, у контексті спектральних апроксимацій та характеризації різних класів функцій в термінах їх найкращих наближень цілими векторами експоненційного типу в функціональних просторах. Вона виконана на сучасному науковому рівні. Перелічені вище зауваження до роботи не применшують хорошого враження від роботи в цілому. Аналізуючи дисертаційну роботу, слід відзначити її ідейну цілісність, вона містить остаточний розв'язок цілого ряду перелічених вище важливих для теорії апроксимації в нормованих і квазінормованих просторах задач. Результати роботи належно опубліковані. Автореферат в цілому правильно і повно відображає зміст дисертації. З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота М.І.Дмитришина задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12-14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (із змінами і доповненнями), щодо докторських дисертацій, результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня результатів (актуальність, новизна, наукова значимість) докторської дисертації, а її автор **Мар'ян Іванович Дмитришин** заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. — математичний аналіз.

Професор, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри теорії функцій і теорії
ймовірностей Львівського національного
університету імені Івана Франка

О.Б.Скаскiв

03. 03. 2020 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Підпис Скаскiв О.

ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА