МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Бак Сергій Миколайович

УДК 517.97

ДИСКРЕТНІ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНІ ГАМІЛЬТОНОВІ СИСТЕМИ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико–математичних наук

Львів — 2020

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
Панков Олександр Андрійович,
Державний університет імені Моргана, м. Балтимор, США,
професор кафедри математики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореcподент НАН України
Слюсарчук Василь Юхимович,
Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне,
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор,
дійсний член АН вищої школи України
Конет Іван Михайлович,
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,
проректор з наукової роботи, професор кафедри математики;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Бугрій Олег Миколайович,
Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,
в.о. завідувача кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться "11"грудня 2020 р. о 15-й год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79001, м. Львів, вул. Університетська, 1, аудиторія 377.

З дисертацією можна ознайомитися у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розіслано "4"листопада 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Головатий Ю. Д.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження. Дисертаційна робота присвячена вивченню дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем, які широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. До таких систем належать нескінченні системи нелінійних осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера.

Такі моделі з фізичної точки зору досліджували О. Браун, Ю. Ківшар, Д. Хеннінг, Г. Ціроніс, Ж. Тамга, М. Ремуссене, Ф. Флах, К. Кладко, Ж. Пуже, С. Такено, І. Батт, Дж. Ваттіс, Ю. Доі, А. Накатані, Ф. Франк, Я. Френкель, Т. Конторова, Дж. ван дер Мерве, А. Бішоп, Д. Кемпбелл, С. Дмітрієв, Б. Маломед, І. Люксютов, М. Палій, М. Пейрар, А. Сегюр, А. Золотарюк, Л. Тенг, Р. Гріффітс, Дж. Рьодер, І. Зеленська та ін.

Варто зазначити, що скінченні системи зв'язаних осциляторів широко використовують для моделювання різноманітних процесів в хімії (хімічні осцилятори) та біології (біологічні осцилятори), при дослідженні нейронних мереж тощо. Тут широко використовується теорія зв'язаних фазових осциляторів, основою якої стала побудована у 1975 році японським фізиком Й. Курамото модель фазових осциляторів (зараз відома як модель Курамото). Значний внесок у розробку цієї теорії зробили С. Ватанабе, Е. Отт, Т. Антонсен, С. Строгац, Х. Хонг, А. Піковський, Ю. Майстренко, Р. Борисюк, О. Бурилко та ін.

Особливу роль в динаміці подібних систем відіграють періодичні розв'язки, які в фізиці називаються бризерами. Питання про існування бризерів тієї чи іншої частоти є однією із актуальних проблем нелінійної фізики. С. Обрі та Р. Маккей за допомогою методів теорії збурень одержали результати для однорідних ланцюгів лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів зі слабким зв'язком (на одновимірній ґратці). С. Бак та О. Панков за допомогою варіаційного методу дослідили питання існування нетривіальних періодичних розв'язків для ланцюгів лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. О. Панков подібним чином також довів існування періодичних розв'язків для системи Фермі-Пасти-Улама на одновимірній ґратці. П. Срікантом встановлено існування періодичних розв'язків у скінченній системі типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці.

Іншим важливим класом розв'язків є біжучі хвилі. Біжучі хвилі для параболічних рівнянь в частинних похідних досить детально досліджено такими математиками як Дж. Смоллер, А. Вольперт та В. Вольперт. Дж. Йосс та К. Кіршгаснер за допомогою методів теорії біфуркацій дослідили питання існування біжучих хвиль в ланцюгах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів зі слабким зв'язком. С. Баком за допомогою варіаційного підходу одержано умови існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в ланцюгах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. П. Макіта, Ж. Ліу, Ш. Гуо та З. Жанг в аналогічний спосіб встановили існування періодичних і гомоклінічних (відокремлених) біжучих хвиль в нелінійно зв'язаних ланцюгах нелінійних частинок. К. Крейнер та Й. Зіммер за допомогою варіаційного підходу дослідили питання існування періодичних, гомоклінічних і гетероклінічних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона з лінійним і нелінійним зв'язком сусідів на одновимірній ґратці. Б. Буффоні, Г. Шветлік та Й. Зіммер встановили існування гетероклінічних біжучих хвиль для цієї моделі з більш загальною нелінійністю. Питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на одновимірній ґратці досліджували Ж. Фрізеке, Дж. Ваттіс, Д. Сметс, М. Віллем, О. Панков, К. Пфлюгер, Б. Руф, П. Срікант, Г. Аріолі, Дж. Чабровскі, Ф. Газзола, А. Шулькін, С. Террацині та ін. М. Германн та Й. Радемахер за допомогою варіаційного підходу встановили існування гетероклінічних біжучих хвиль.

Зазначимо, що подібні системи на двовимірній ґратці вивчались переважно з фізичної точки зору, а математичних праць є небагато. Зокрема, Ж. Фрізеке та К. Маттісом досліджено питання існування відокремлених біжучих хвиль в системі лінійно зв'язаних частинок на двовимірній ґратці, кожна з яких взаємодіє як з чотирма найближчими сусідами (по вертикалі і по горизонталі), так і з чотирма діагональними сусідами без зовнішнього потенціалу. А М. Фецканом та В. Ротосом встановлено існування періодичних біжучих хвиль в системі лінійно зв'язаних частинок, які взаємодіють тільки з чотирма своїми найближчими сусідами (як у цій дисертації) з припущенням, що нелінійність непарна і 2π-періодична. Л. Жанг та Ш. Гуо за допомогою методів теорії біфуркацій вивчали 2π-періодичні хвилі в таких системах.

Дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на одновимірній ґратці досліджено в значній мірі такими математиками як А. Бішоп, П. Кеврекідіс, К. Расмуссен, О. Панков, М. Вейнштейн, В. Ротос, С. Бак, Р. Ередеро, Д. Леві, П. Вінтерніц, П. Пачіані, В. Конотоп, Дж. Мензала, М. Ченг та ін. Важливим класом розв'язків таких рівнянь є стоячі хвилі. За допомогою варіаційного методу в працях М. Ченга, О. Панкова, В. Ротоса, С. Бака досліджувалося питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера з різними видами нелінійностей. Р. Ередеро, Д. Леві та П. Вінтерніц описали алгебри Лі точкових симетрій для подібних рівнянь. Питання коректності задачі Коші для таких рівнянь досліджували П. Пачіані, В. Конотоп, Дж. Мензала та О. Панков. Зауважимо, що для ланцюгів осциляторів і систем Фермі-Пасти-Улама є лише декілька праць О. Панкова та С. Бака, в яких встановлено умови існування і єдиності розв'язків задачі Коші. Що ж стосується дослідження двовимірних дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера, то такі рівняння також вивчалися переважно з фізичної точки зору (Ф. Флах, К. Кладко, Р. Маккей), а питання дослідження умов існування стоячих хвиль в математичних працях не розглядалося.

Таким чином, рівняння нескінченних систем нелінійних осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, системи типу Фермі-Пасти-Улама, а також дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці є недостатньо дослідженими з математичної точки зору і тому потребують вивчення, зокрема, питання існування та єдиності розв'язків задачі Коші, існування періодичних розв'язків, існування біжучих і стоячих хвиль в таких системах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в рамках науково-дослідних тем, що є складовою частиною досліджень передбачених планами наукової роботи кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського:

- "Коректність задачі Коші для систем осциляторів на двовимірних ґратках"(державний реєстраційний номер 0119U102948);
- "Варіаційний метод дослідження одного класу гамільтонових систем" (державний реєстраційний номер 0119U102956);
- "Проблеми математики та інформатики у педагогічному університеті: теорія і практика"(державний реєстраційний номер 0120U101032).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження умов існування та властивостей розв'язків дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем широких класів. *Завданнями* дисертаційної роботи є:

1) встановити умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці;

2) дослідити існування періодичних за часовою змінною розв'язків в системах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці та методи їх побудови;

3) дослідити існування біжучих хвиль в системах лінійно і нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці;

4) дослідити існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці;

5) дослідити існування біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці;

6) дослідити існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера з кубічною та насичуваною нелінійностями на двовимірній ґратці.

Об'єктом дисертаційного дослідження є дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи.

Предметом дисертаційного дослідження є: умови існування і єдиності розв'язків задачі Коші та умови існування періодичних розв'язків для нескінченних систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці; умови існування біжучих хвиль в системах осциляторів, дискретних рівняннях типу синус-Ґордона і системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці; умови існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці.

Методи дослідження. В даній роботі для виконання поставлених завдань було використано методи функціонального аналізу, варіаційний метод, метод умовної мінімізації, метод періодичних апроксимацій, методи аналізу Фур'є.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати, сформульовані і доведені в дисертації, є новими та строго обґрунтованими. У дисертаційній роботі одержано такі нові результати:

1. Встановлено умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Знайдено умови обмеженості глобального розв'язку. Одержані результати є поширенням відомих результатів для систем осциляторів на одновимірних ґратках на випадок двовимірних ґраток для ширших класів потенціалів. Дана задача на двовимірній ґратці досі не розглядалася.

2. Знайдено умови існування періодичних за часовою змінною розв'язків у нескінченній системі лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Встановлено способи побудови таких розв'язків. Раніше питання про існування періодичних розв'язків для подібних систем розглядалися тільки у випадку одновимірної ґратки.

3. Встановлено умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах лінійно та нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Досліджено існування надзвукових і дозвукових біжучих хвиль. Одержані результати значно розширюють відомі результати для подібних систем, які стосуються існування лише періодичних біжучих хвиль в системах з лінійним зв'язком у випадку вужчого класу потенціалів.

4. Доведено існування періодичних, гомоклінічних і гетероклінічних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці з нелінійним зв'язком. Одержані результати поширюють відомі результати для подібних рівнянь, заданих на двовимірній ґратці з лінійним зв'язком.

5. Встановлено умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Доведено існування монотонних біжучих хвиль. Біжучі хвилі в системах такого типу на двовимірній ґратці досі не вивчалися.

6. Знайдено умови існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера з різного типу нелінійностями на двовимірній ґратці. Для подібних рівнянь відомі лише результати, які стосуються таких хвиль, досліджених з фізичної точки зору.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані в теорії звичайних диференціальних рівнянь та у нелінійній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Результати дисертації одержано автором самостійно. У статті [4] авторові належить формулювання і доведення теорем 1 і 2, у [5] — формулювання і доведення теорем 1.1, 4.2, 5.2, 5.3, 6.4, 6.5, 6.7 і наслідків з них, у [17] — формулювання і доведення теорем 3 і 4, у [18] — формулювання і доведення теорем 1 і 2, у [19] — формулювання і доведення теореми 1, а у статті [20] — формулювання і доведення теорем 4.1, 4.3, 4.4 і наслідку 1.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, які включено до дисертації, апробовано на:

- Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: проф. Бокало М. М., проф. Каленюк П. І.) (Львів, 2019–2020 рр.);

- науковому семінарі кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (керівники: проф. Трохименко В. С., проф. Ковтонюк М. М.) (Вінниця, 2008–2020 рр.);

- науковому семінарі кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь Донецького національного університету імені Василя Стуса (керівник — доц. Буряченко К. О.) (Вінниця, 2015–2016 рр.);

- Дванадцятій Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 2008 р.);

- Міжвузівській науково-практичній конференції "Актуальні проблеми математики, фізики і технологій"(Вінниця, 2008–2019 рр.);

- Українському математичному конгресі (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова) (Київ, 2009 р.);

- Тринадцятій Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 2010 р.);

- Міжнародній науковій конференції "Teoretyczne i praktyczne innowacje naukowe"(Краків, 2013 р.);

- X Міжнародній математичній конференції імені В. Я. Скоробагатька (Дрогобич, 2015 р.);

- Міжнародній конференції з диференціальних рівнянь, присвяченій 110-й річниці Я. Б. Лопатинського (Львів, 2016 р.);

- 5-й Міжнародній конференції молодих учених з диференціальних рівнянь, присвяченій Я. Б. Лопатинському (Київ, 2016 р.);

- VII Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації"(Кам'янець-Подільський, 2016 р.);

- Всеукраїнській науково-практичній конференції "Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності"(Вінниця, 2017 р.);

- Міжнародній науковій конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь"(Київ, 2017 р.);

- Міжнародній науково-методичній конференції "Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності"(Вінниця, 2018 р.; 2020 р.);

- VIII Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації присвяченій 100-річчю Національної Академії наук України та 100-річчю КПНУ ім. І. Огієнка (Кам'янець-Подільський, 2018 р.);

- II Всеукраїнській науково-практичній конференції "Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності"(Вінниця, 2019 р.);

- IX Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації"(Кам'янець-Подільський, 2020 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 20 статтях [1–20] у фахових наукових журналах та збірниках наукових праць і додатково висвітлено у 22 тезах доповідей і матеріалах конференцій [21–42]. Серед публікацій 8 статей у вітчизняних і закордонних журналах, які входять до наукометричної бази Scopus, 2 — Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Список використаних джерел складає 220 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 336 сторінок, з них 270 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, сформульовано мету і завдання дослідження, визначено об'єкт і предмет дослідження, описано методи дослідження, охарактеризовано наукову новизну і практичне значення одержаних результатів, вказано публікації та апробацію результатів дослідження.

У **першому розділі** дисертації зроблено огляд літератури з теми дослідження та наведено короткий опис результатів дисертаційної роботи.

У **другому розділі** дисертації вивчається питання існування і єдиності розв'язків Коші для системи рівнянь, які описують динаміку нескінченної (зліченної) системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці:

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) +$$
$$+ b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}) - U'_{n,m}(q_{n,m}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (1)$$

де $q_{n,m} = q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t, з крайовими умовами

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \qquad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Розглядаються потенціали вигляду $U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r)$, для яких система (1) набуває вигляду

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1}+$$
$$+c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{3}$$

Природним конфігураційним простором для системи (3), враховуючи граничні умови (2), є простір $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{R})$ дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком $\left(q^{(1)}, q^{(2)}\right) = \sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} q^{(1)}_{n,m}q^{(2)}_{n,m}$ і відповідною нормою $\|q\| = (q,q)^{\frac{1}{2}}$. Тому цю систему зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{4}$$

де $(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$, $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$, $\left(B(q)\right)_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m})$.

У підрозділі 2.1 наводиться формулювання задачі Коші для рівняння (4) у просторі l^2 та основні припущення. Зокрема, припускається, що виконуються такі умови:

(i_2) $\{a_{n,m}\}, \{b_{n,m}\}$ *і* $\{d_{n,m}\}$ *— обмежені послідовності дійсних чисел;*

(ii_2) $V_{n,m} \in C^1(\mathbb{R})$, $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$, $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, *причому для будь-якого* $R > 0$ *існує таке* $C = C(R) > 0$, *що для всіх* $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$:

$$|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)| \le C|r_1 - r_2|,\ |r_1|, |r_2| \le R. \tag{5}$$

Під *розв'язком* рівняння (4) розуміється функція $q : I \to l^2$, $q \in C^2(I; l^2)$, $I \subset \mathbb{R}$, яка задовольняє це рівняння.

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні його розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)},\ \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{6}$$

Якщо розв'язок задачі (4), (6) визначений на всій числовій прямій ($I = \mathbb{R}$), то він називається *глобальним*, у протилежному випадку — *локальним*.

У підрозділі 2.2 доведено існування та єдиність локального і глобального розв'язків задачі Коші. Для цього використано класичні теореми існування і єдиності в банахових просторах.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови* (i_2) *та* (ii_2). *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l^2$ *і* $q^{(1)} \in l^2$ *задача (4), (6) має єдиний локальний розв'язок.*

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови* (i_2) *та* (ii_2), *причому нерівність (5) виконується зі сталою* C, *яка не залежить від* R. *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l^2$ *і* $q^{(1)} \in l^2$ *задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок.*

Зауважимо, що посилена умова (ii_2) виконується для нелінійностей, ріст яких на нескінченності не вище 2-го степеня. Щоб послабити цю умову, відмітимо, що рівняння (4) у просторі l^2 можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p,q), \\ \dot{q} = H'_p(p,q); \end{cases}$$

з гамільтоніаном $H(p,q) = \frac{1}{2}\left(\|p\|^2 - (Aq,q)\right) + \sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m})$, де $p = \dot{q}$. Гамільтоніан задає повну енергію системи, тобто суму кінетичної і потенціальної енергії, причому $\frac{1}{2}\|p\|^2$ визначає кінетичну енергію, а $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m}) - \frac{1}{2}(Aq,q)$ — потенціальну. Зазначимо, що $H(p,q)$ є сталим на розв'язках рівняння (4).

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови $(i_2), (ii_2)$ та оператор A недодатний, тобто $(Aq,q) \leq 0$ для будь-якого $q \in l^2$. Крім того, нехай виконується одна з таких двох умов:*

(a) $V_{n,m}(r) \geq 0$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ і $r \in \mathbb{R}$;

(b) існує така неспадна функція $h(\xi)$, визначена для $\xi \geq 0$, що $\lim\limits_{\xi\to+\infty} h(\xi) = +\infty$ і $V_{n,m}(r) \geq h(|r|)$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ і $r \in \mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок.

Також тут встановлено умови обмеженості глобального розв'язку.

Теорема 2.4. *Нехай виконуються умови $(i_2), (ii_2)$ та $V_{n,m}(r) \geq 0$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ і $r \in \mathbb{R}$. Тоді*

(a) якщо оператор A недодатний та $\lim\limits_{r\to\pm\infty} V_{n,m}(r) = +\infty$ (рівномірно по $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$), то єдиний розв'язок задачі (4), (6) з початковими даними $q^{(0)}$, $q^{(1)} \in l^2$ є обмеженою функцією на $\mathbb{R}$ зі значеннями в l^∞. Крім того, якщо для деякого $s \geq 2$ існують $R > 0$ і $c > 0$ такі, що $V_{n,m}(r) \geq c|r|^s$ для всіх $r \in [-R,R]$ і $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, то розв'язок є обмеженою функцією на $\mathbb{R}$ зі значеннями в l^s;

(b) якщо оператор A від'ємно визначений, тобто $(Aq,q) \leq -\alpha\|q\|^2$, $\alpha > 0$, то єдиний розв'язок задачі (4), (6) з початковими даними $q^{(0)}$, $q^{(1)} \in l^2$ є обмеженою функцією на $\mathbb{R}$ зі значеннями в l^2.

У підрозділі 2.3 окремо досліджено випадок степеневих потенціалів

$$V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p} r^p, \ p > 2,$$

де $\{g_{n,m}\}$ — обмежена послідовність, які в загальному випадку не задовольняють одержані вище умови. Передбачається, що оператор A від'ємно визначений, тобто $(Aq,q) \le -\alpha_0\|q\|^2,\ \alpha_0 > 0$, для $q \in l^2$.

Подамо гамільтоніан H у вигляді $H(p,q) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + J(q)$, де $J(q) = -\frac{1}{2}(Aq,q) + \frac{1}{p}\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m}q_{n,m}^p = \frac{1}{2}a(q) + \frac{1}{p}b(q)$. І покладемо $\gamma = \inf\limits_q\{\sup\limits_{\lambda\ge 0} J(\lambda q) : q \in l^2, q \ne 0\}$ та $W_\gamma = \{q \in l^2 :\ 0 \le J(\lambda q) < \gamma\ \forall\lambda \in [0,1]\}$. Показано, що якщо початкові дані достатньо малі в l^2-нормі, то глобальний розв'язок існує.

Теорема 2.5. *Нехай виконується умова (i_2), $V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}r^p$, $p > 2$, де $\{g_{n,m}\}$ — обмежена послідовність, а оператор A від'ємно визначений і $q^{(0)} \in W_\gamma$, $q^{(1)} \in l^2$ такі, що $\frac{1}{2}\|q^{(1)}\|^2 + J(q^{(0)}) < \gamma$. Тоді задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок.*

В силу того, що множина початкових даних із теореми 2.7 відкрита і містить нульові дані, одержуємо наслідок:

Наслідок 2.3. *Нехай виконується умова (i_2), $V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}r^p$, $p > 2$, де $\{g_{n,m}\}$ — обмежена послідовність, а оператор A від'ємно визначений. Тоді існує таке $\delta > 0$, що для будь-яких початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ з $\|q^{(0)}\| \le \delta$ і $\|q^{(1)}\| \le \delta$ задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок.*

Цей результат узагальнюється на випадок додатно однорідних потенціалів степеня $p > 2$.

Теорема 2.6. *Нехай виконується умова (i_2), $V_{n,m}(r) = \frac{1}{p}f_{n,m}(r)$, де $f_{n,m}(r)$ — додатно однорідна функція степеня $p > 2$, а оператор A від'ємно визначений. Тоді існує таке $\delta > 0$, що для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ з $\|q^{(0)}\| \le \delta$ і $\|q^{(1)}\| \le \delta$ задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок.*

У підрозділі 2.4 показано, що для достатньо великої множини початкових даних глобальний розв'язок не може існувати.

Теорема 2.7. *Нехай виконується умова (i_2), $V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}r^p$, $p > 2$, де $\{g_{n,m}\}$ — обмежена послідовність, а оператор A недодатний і нехай початкові дані $q^{(0)} \in l^2$ і $q^{(1)} \in l^2$ задовольняють умови: $\left(q^{(0)}, q^{(1)}\right) > 0$ і $H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) < 0$. Тоді глобальний розв'язок задачі (4), (6) не існує.*

У **третьому розділі** дисертації вивчаються періодичні за часовою змінною розв'язки рівняння (4). У підрозділі 3.1 наводиться формулювання задачі про періодичні розв'язки та основні припущення. Зокрема, вивчаються розв'язки рівняння (4), які задовольняють умову періодичності за часовою змінною

$$q(t+T) = q(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $T > 0$ — деяке число.

Припускається, що виконуються такі умови:

(i_3) *існує таке $N \in \mathbb{N}$, що коефіцієнти $a_{n,m}, b_{n,m}$ і $d_{n,m}$ є N-періодичними, тобто $a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}$, $b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$, $d_{n+N,m} = d_{n,m+N} = d_{n,m}$, $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$; A — додатно визначений оператор в l^2, тобто існує* *таке* $\alpha_0 > 0$, *що* $(Aq, q) \geq \alpha_0 \|q\|^2$, $q \in l^2$;

(ii_3) $V_{n,m} \in C^1(\mathbb{R})$, $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ *і* $V'_{n,m}(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$, *та виконується умова* N*-періодичності* $V_{n+N,m}(r) = V_{n,m+N}(r) = V_{n,m}(r)$, $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$;

(iii_3) *існує таке* $\mu > 2$, *що для всіх* $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$:

$$0 < \mu V_{n,m}(r) \leq V'_{n,m}(r) r, \quad r \neq 0.$$

Зауважимо, що умову (iii_3) називають *умовою Амброзетті–Рабіновіца*.

У підрозділі 3.2 наводиться варіаційне формулювання задачі. Тут розглядаються деякі функціонали J_k та J:

$$J_k(q) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2} \|\dot{q}(t)\|^2_{l^2_k} + \frac{1}{2}(A_k q, q)_{l^2_k} - \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V_{n,m}(q_{n,m}(t)) \right] dt,$$

$$J(q) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2} \|\dot{q}(t)\|^2_{l^2} + \frac{1}{2}(A q, q)_{l^2} - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m}(t)) \right] dt,$$

визначені відповідно на просторах соболєвського типу $X_{T,k} = \{q \in H^1_{loc}(\mathbb{R}; l^2_k) : q(t+T) = q(t)\}$ та $X_T = \{q \in H^1_{loc}(\mathbb{R}; l^2) : q(t+T) = q(t)\}$, де l^2_k — простір kN-періодичних послідовностей:

$$q_{n+kN,m} = q_{n,m+kN} = q_{n,m}, \tag{8}$$

(k — фіксоване натуральне число), з нормою

$$\|q\|_{l^2_k} = \left(\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} |q_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Критичні точки функціоналів J_k та J є T-періодичними розв'язками відповідно задачі (3), (8) та рівняння (4).

Однією із найпростіших і найпопулярніших мінімаксних теорем є теорема про гірський перевал.

Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1. Кажуть, що I задовольняє *умову Пале–Смейла*, якщо виконується наступна умова:

(PS) *якщо* $\{u_n\} \subset H$ *така послідовність, що* $\{I(u_n)\}$ *обмежена та* $I'(u_n) \to 0$, $n \to \infty$, *то* $\{u_n\}$ *містить збіжну підпослідовність.*

Зауважимо, що при перевірці цієї умови можна, без обмеження загальності, вважати, що числова послідовність $\{I(u_n)\}$ збігається, оскільки з обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

Послідовність $\{u_n\}$ точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу I на деякому рівні b, якщо $I(u_n) \to b$ та $I'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тоді, враховуючи сказане вище, умову Пале-Смейла можна переформулювати наступним чином:

(PS) *будь-яка послідовність Пале-Смейла $\{u_n\} \subset H$ містить збіжну підпослідовність.*

Теорема про гірський перевал. *Нехай на гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$ заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1, який задовольняє умову Пале–Смейла. Припустимо, що існують $e \in H$ і $r > 0$ такі, що $\|e\| > r$ і $\beta := \inf\limits_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e)$. Тоді існує критична точка $u \in H$ функціоналу I така, що критичне значення $I(u) = b := \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \beta$, де $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. При цьому $I(u) \leq \sup\limits_{\tau\geq 0} I(\tau e)$.*

Якщо функціонал задовольняє всі умови цієї теореми, крім умови Пале-Смейла, то кажуть, що він задовольняє *геометрію гірського перевалу.*

У підрозділі 3.3 за допомогою теореми про гірський перевал доведено існування просторово-періодичних апроксимацій T-періодичних розв'язків (критичні точки функціоналу J_k).

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови (i_3)—(iii_3). Тоді для будь-яких $T > 0$ і $k \geq 1$ задача (3), (8) має нетривіальний розв'язок $q = q^{(T,k)} \in X_{T,k}$. Крім того, для будь-якого $T > 0$ існують такі додатні сталі ε_0, C_0, ε і C, які не залежать від k, що $\varepsilon_0 \leq \|q^{(T,k)}\|_{T,k} \leq C_0$, $\varepsilon \leq J_k(q^{(T,k)}) \leq C$. Більше того, існує таке $T_0 > 0$, яке не залежить від k, що при всіх $T \geq T_0$ цей розв'язок є несталою функцією від t.*

Дана задача використовується як допоміжна для отримання періодичних розв'язків вихідної задачі (випадок функціоналу J).

У підрозділі 3.4 за допомогою методу періодичних апроксимацій отримано результат про існування T-періодичних розв'язків для достатньо великих T. Функціонал J задовольняє частині умов теореми про гірський перевал. Однак, умова Пале–Смейла для цього функціоналу не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються в інший спосіб — за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k. Основним результатом третього розділу є теорема:

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови (i_3)—(iii_3). Тоді для будь-якого $T > 0$ рівняння (4) має нетривіальний T-періодичний розв'язок. Більше того, для достатньо великих значень T цей розв'язок не є сталим.*

У підрозділі 3.5 показано, як за допомогою процедури умовної мінімізації можна побудувати періодичний розв'язок у випадку степеневої потенціальної функції:

$$V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}|r|^p, \tag{9}$$

де $g_{n,m} > 0, p > 2$. У даному випадку система (3) набуває вигляду

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = a_{n-1,m}q_{n-1,m}(t) + a_{n,m}q_{n+1,m}(t) + b_{n,m-1}q_{n,m-1}(t) + b_{n,m}q_{n,m+1}(t) +$$

$$+c_{n,m}q_{n,m}(t) - g_{n,m}|q_{n,m}(t)|^{p-2}q_{n,m}(t),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{10}$$

де $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$.

Як і вище, робиться припущення:

(i_3') *існує таке $N \in \mathbb{N}$, що коефіцієнти $a_{n,m}, b_{n,m}$, $d_{n,m}$ і $g_{n,m}$ є N-періодичними, тобто $a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}$, $b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$, $d_{n+N,m} = d_{n,m+N} = d_{n,m}$, $g_{n+N,m} = g_{n,m+N} = g_{n,m}$, і A — додатно визначений оператор в l^2.*

Далі функціонал J подається у вигляді $J(q) = \Psi(q) - S(q)$, де $\Psi(q)$ і $S(q)$ — квадратична і неквадратична частини J відповідно. І для будь-якого $\theta > 0$ розглядається задача умовної мінімізації:

$$\textit{знайти } u \in X_T, \textit{ для якого існує } \inf_{q \in X_T} \{\Psi(q):\ S(q) = \theta\} =: I_\theta. \tag{11}$$

Виявляється, що ця задача має розв'язки для для будь-яких $\theta > 0$ і $T > 0$, а періодичні розв'язки системи (10) виражаються через розв'язки задачі (11), що встановлюють наступні дві теореми.

Теорема 3.3. *Нехай виконується умова (i_3') та u — розв'язок задачі (11). Тоді існує таке $\lambda > 0$, що $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}}u$ є T-періодичним розв'язком задачі (10), (2).*

Теорема 3.4. *Нехай виконується умова (i_3'), тоді для будь-якого $T > 0$ задача (11) має розв'язок $u \in X_T$. Більше того, для достатньо великих значень T цей розв'язок не є сталим.*

У **четвертому розділі** дисертації досліджується питання існування біжучих хвиль в системах нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці.

Підрозділ 4.1 присвячений питанню існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах лінійно зв'язаних осциляторів. Рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = c_1(q_{n+1,m}(t) + q_{n-1,m}(t) - 2q_{n,m}(t)) +$$

$$+c_2(q_{n,m+1}(t) + q_{n,m-1}(t) - 2q_{n,m}(t)) - U'(q_{n,m}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{12}$$

де $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Розглядаються потенціали вигляду $U(r) = -\frac{a}{2}r^2 + V(r)$, для яких система (12) набуває вигляду

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = c_1(\Delta_{(1)}q)_{n,m}(t) + c_2(\Delta_{(2)}q)_{n,m}(t) + aq_{n,m-1}(t) - V'(q_{n,m}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{13}$$

де $(\Delta_{(1)}q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} - 2q_{n,m}$, $(\Delta_{(2)}q)_{n,m} = q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 2q_{n,m}$ дискретні оператори Лапласа відповідно за змінними n і m. В перших двох пунктах підрозділу 4.1 розглядається формулювання задачі про біжучі хвилі та варіаційне формулювання задачі.

Біжучою хвилею в даному випадку є розв'язок вигляду

$$q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct), \tag{14}$$

де $\overrightarrow{l}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ — фіксований хвильовий вектор, який задає напрям поширення хвилі. Нагадаємо, що функція $u(s)$ неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$ називається профілем біжучої хвилі. Стала c представляє собою швидкість хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується вправо, а якщо $c < 0$, то вліво.

Після підстановки біжучої хвилі (14) в систему (13), одержується рівняння для її профілю $u(s)$:

$$c^2u''(s) = c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))+$$

$$+c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) + au(s) - V'(u(s)), \tag{15}$$

де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi$.

Під розв'язком рівняння (15) розуміється функція $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, яка задовольняє це рівняння.

Вивчаються біжучі хвилі двох типів: періодичні та відокремлені. У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі достатньо знайти розв'язок рівняння (15) з умовою періодичності

$$u(s+2k) = u(s),\ s \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

де $k > 0$ — деяке число. Профіль відокремленої хвилі є розв'язком рівняння (15) з крайовими умовами на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{17}$$

Зазначимо, що в рівняння (15) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (15), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

Введемо в розгляд множину

$$\Omega(c_1, c_2, a) = \left\{ c > 0 :\ \min_{\xi\in\mathbb{R}} \sigma(\xi) \geq 0 \right\},$$

де $\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4c_1 \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\cos\varphi\right) - 4c_2\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\sin\varphi\right) + a$. Очевидно, що ця множина непорожня, якщо $a \geq 0$. Важливу роль відіграє величина c_0, яка визначається рівністю

$$c_0 = c_0(c_1, c_2, a) := \inf_{c>0} \Omega(c_1, c_2, a). \tag{18}$$

Всюди далі припускається, що потенціал $V(r)$ задовольняє умову:

(h_4) *$V(r) \in C^1(\mathbb{R})$, $V(0) = V'(0) = 0$ і $V'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, та існує таке $\mu > 2$, що $0 < \mu V(r) \leq V'(r)r$, $r \neq 0$.*

Зауважимо, що за виконання умови (h_4) потенціали $U(r) = -\frac{a}{2}r^2 + V(r)$ є притягуючими до стану рівноваги при $a \geq 0$ (сильно поблизу нуля, якщо $a > 0$, і слабко поблизу нуля, якщо $a = 0$) і відштовхуючими при $a < 0$.

Залежно від типу біжучої хвилі, розглядаються функціонали

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k} [\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 -$$

$$-\frac{c_2}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2}u^2(s) - V(u(s))]ds,$$

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 -$$

$$-\frac{c_2}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2}u^2(s) - V(u(s))]ds,$$

визначені відповідно на соболєвських просторах $E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u(s + 2k) = u(s)\}$ та $E = H^1(\mathbb{R})$. Доведено, що критичні точки цих функціоналів є розв'язками рівняння (15) у відповідних просторах.

У пунктах 4.1.3 та 4.1.4 доведено існування надзвукових нетривіальних періодичних та несталих відокремлених біжучих хвиль. Показано, що для достатньо великих періодів профіль періодичної хвилі не сталий.

Теорема 4.1. *Нехай виконується умова (h_4) і $a > 0$. Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > c_0$ рівняння (15) має нетривіальний розв'язок u, що задовольняє умову (16). Крім того, існують такі додатні сталі ε_0, C_0, ε і C, які не залежать від k, що*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0, \tag{19}$$

$$\varepsilon \leq J_k(u) \leq C. \tag{20}$$

Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях k.

Зауважимо, що оскільки серед встановлених умов існування біжучих хвиль є умова $c > c_0$, то c_0 будемо називати *швидкістю звуку* (як це зроблено, наприклад, в працях О. Панкова). Тоді теорема 4.1 встановлює існування надзвукових періодичних біжучих хвиль.

Теорема 4.2. *Нехай виконується умова* (h_4) *і* $a > 0$*. Тоді для будь-якого* $c > c_0$ *рівняння (15) має несталий розв'язок* u*, який задовольняє умови (17), а отже, існують дві несталі відокремлені біжучі хвилі з профілем* u *та швидкостями* $\pm c$*.*

Тут також використано теорему про гірський перевал для періодичних біжучих хвиль та метод періодичних апроксимацій для відокремлених біжучих хвиль. Крім того, доведено, що профіль відокремленої біжучої хвилі експоненціально спадає на нескінченності (пункт 4.1.5).

Ще однією популярною мінімаксною теоремою є теорема про зачеплення.

Нехай H — гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z$ такий елемент, що $\|z\| = r$. Позначимо $M := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| \leq \rho, \lambda \geq 0\}$ і $M_0 := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \geq 0, \text{ або } \|u\| \leq \rho, \lambda = 0\}$, тобто M_0 — межа M. Нехай $N := \{u \in Z : \|u\| = r\}$.

Розглянемо C^1-функціонал I на H і припустимо, що $\beta := \inf\limits_{u \in N} I(u) > \alpha := \sup\limits_{u \in M_0} I(u)$. В такому випадку кажуть, що функціонал I задовольняє *геометрію зачеплення.*

Теорема про зачеплення. *Нехай на гільбертовому просторі* H *заданий функціонал* $I : H \to \mathbb{R}$ *класу* C^1*, який задовольняє умову Пале–Смейла та геометрію зачеплення. Тоді існує критична точка* $u \in H$ *функціоналу* I *така, що критичне значення* $I(u) = b := \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{u \in M} I(\gamma(u)) \geq \beta$*, де* $\Gamma := \{\gamma \in C(M, H) : \gamma|_{M_0} = id\}$*. При цьому* $I(u) \leq \sup\limits_{u \in M} I(u)$*.*

У пункті 4.1.6 досліджено існування періодичних біжучих хвиль з довільною швидкістю $c > 0$, зокрема, дозвукових хвиль. Для цього використано теорему про зачеплення.

Наступна теорема встановлює існування нетривіальних періодичних біжучих хвиль для рівняння (15) для довільних швидкостей $c > 0$. Зокрема, сюди входять хвилі зі швидкостями $c > c_0$ і хвилі зі швидкостями $c \in (0, c_0]$. Існування перших (надзвукових хвиль) було встановлено за допомогою теореми про гірський перевал, а от існування дозвукових хвиль залишалося відкритим.

Теорема 4.4. *Нехай виконується умова* (h_4) *і* $a > 0$*. Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c > 0$ *рівняння (15) має нетривіальний розв'язок* u*, що задовольняє умову (16).*

Зауваження 4.1. *На відміну від теореми 4.1, теорема 4.4 встановлює існування тільки нетривіальних періодичних хвиль хоча із більш широким діапазоном швидкостей. Довести несталість цих розв'язків тут не вдасться, оскільки в надзвуковому випадку є рівномірні по* k *оцінки розв'язків (19) і це дає несталість при великих періодах, а у дозвуковому випадку таких оцінок немає. Якби вони були, то за допомогою методу періодичних апроксимацій можна було б одержати і відокремлені хвилі. Оскільки відомі методи у цьому випадку застосувати не можна, то питання про існування* *несталих розв'язків залишається відкритим.*

Проте, дещо інакша ситуація у випадку, коли $a = 0$. Наступна теорема встановлює існування несталих періодичних біжучих хвиль.

Теорема 4.5. *Нехай виконується умова (h_4) і $a = 0$. Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > 0$ рівняння (15) має нетривіальний розв'язок u, що задовольняє умову (16). Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях k.*

Підрозділ 4.2 присвячений питанню існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах нелінійно зв'язаних осциляторів. У цьому підрозділі вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = W_1'(q_{n+1,m}(t) - q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t) - q_{n-1,m}(t)) + W_2'(q_{n,m+1}(t) -$$

$$- q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t) - q_{n,m-1}(t)) - U'(q_{n,m}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (21)$$

де $W_1, W_2, U \in C^1(\mathbb{R})$ — потенціали взаємодії та зовнішній потенціал відповідно.

Підставляючи (14) в (21), одержуємо рівняння для профілю $u(s)$ біжучої хвилі

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s + \cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s - \cos\varphi)) +$$

$$+ W_2'(u(s + \sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s - \sin\varphi)) - U'(u(s)). \qquad (22)$$

У пункті 4.2.1 розглядаються основні припущення та варіаційне формулювання задачі. Зокрема, розглядаються потенціали вигляду:

(i_4) $W_1(r) = \frac{c_1}{2} r^2 + f_1(r)$, $W_2(r) = \frac{c_2}{2} r^2 + f_2(r)$, $U(r) = -\frac{a}{2} r^2 + V(r)$, *де* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Також припускається, що неквадратична частина $h \in \{f_1; f_2; V\}$ кожного з цих потенціалів задовольняє умови:

(ii_4) $h(0) = h'(0) = 0$ *і* $h'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$;

(iii_4) *існує* $\mu > 2$ *таке, що* $0 < \mu h'(r) \le r h'(r)$, $r \ne 0$.

У пункті 4.2.2 за допомогою методу критичних точок і теореми про гірський перевал встановлено існування надзвукових періодичних біжучих хвиль.

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови (i_4)–(iii_4) і $a > 0$. Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > c_0$ рівняння (22) має нетривіальний розв'язок u, що задовольняє умову (16). Крім того, існують такі додатні сталі ε_0, C_0, ε і C, які не залежать від k, що $\varepsilon_0 \le \|u\|_k^2 \le C_0$, $\varepsilon \le J_k(u) \le C$. Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях k.*

А в пункті 4.2.3 за допомогою методу періодичних апроксимацій доведено існування надзвукових відокремлених хвиль.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови* (i_4)*–*(iii_4) *і* $a > 0$. *Тоді для будь-якого* $c > c_0$ *рівняння (22) має несталий розв'язок* u, *який задовольняє умови (17), а отже, існують дві несталі відокремлені біжучі хвилі з профілем* u *та швидкостями* $\pm c$.

У пункті 4.2.4 за допомогою теореми про зачеплення встановлено існування періодичних біжучих хвиль з довільною швидкістю $c > 0$, зокрема, дозвукових хвиль.

Теорема 4.8. *Нехай виконуються умови* (i_4)*–*(iii_4) *і* $a = 0$. *Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c > 0$ *рівняння (22) має нетривіальний розв'язок* u, *що задовольняє умову (16). Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях* k.

У **п'ятому розділі** дисертації вивчається питання існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона на двовимірній ґратці з нелінійним зв'язком частинок (осциляторів), тобто в системі (21) із зовнішнім потенціалом вигляду $U(r) = K(1-\cos r)$, який не задовольняє умови підрозділу 4.2. У цьому випадку рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = W_1'(q_{n+1,m}(t) - q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t) - q_{n-1,m}(t)) + W_2'(q_{n,m+1}(t) -$$

$$-q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t) - q_{n,m-1}(t)) - K\sin q_{n,m}(t),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (23)$$

де $W_1, W_2 \in C^1(\mathbb{R})$, $K > 0$.

У підрозділі 5.1 наводиться формулювання задачі про біжучі хвилі для таких рівнянь. Зокрема, для профілю біжучої хвилі одержується рівняння

$$c^2u''(s) = W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) +$$

$$+W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) - K\sin u(s), \qquad (24)$$

де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$.

Вивчаються біжучі хвилі трьох типів: періодичні, гомоклінічні та гетероклінічні. У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі достатньо знайти розв'язок рівняння (24) з умовою періодичності

$$u(s+2k) = u(s),\ s \in \mathbb{R}, \qquad (25)$$

де $k > 0$ — деяке число. Профіль гомоклінічної біжучої хвилі є розв'язком рівняння (24) з крайовими умовами на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = \pi. \qquad (26)$$

А профіль гетероклінічної хвилі задовольняє такі крайові умови

$$\lim_{s\to+\infty} u(s) = \pi,\ \lim_{s\to-\infty} u(s) = -\pi. \qquad (27)$$

Як і вище, під розв'язком рівняння (24) розуміється функція $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, яка задовольняє це рівняння.

Зауважимо, що за допомогою заміни $u(s) = v(s) + \pi$, рівняння (24) зводиться до рівняння

$$c^2 v''(s) = W_1'(v(s+\cos\varphi) - v(s)) - W_1'(v(s) - v(s-\cos\varphi)) +$$

$$+ W_2'(v(s+\sin\varphi) - v(s)) - W_2'(v(s) - v(s-\sin\varphi)) + K\sin v(s), \qquad (28)$$

розв'язки якого відрізняються на π від розв'язків рівняння (24). Більше того, крайові умови (26) зводяться до умов $\lim\limits_{s\to\pm\infty} v(s) = v(\pm\infty) = 0$, які накладалися на профіль відокремлених біжучих хвиль, що вивчалися у попередньому розділі. А умова періодичності для v залишається тією ж, що й для u. Тому для встановлення існування періодичних і гомоклінічних хвиль розглядається рівняння (28) з u замість v, а для гетероклінічних — (24).

У підрозділі 5.2 встановлено існування несталих періодичних біжучих хвиль. Тут розглядається рівняння

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) +$$

$$+ W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) + K\sin u(s). \qquad (29)$$

З рівнянням (29) та умовою (25) пов'язується функціонал

$$J_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) + \right.$$

$$\left. + K(1 - \cos u(s)) \right] ds, \qquad (30)$$

де

$$(Au(s)) := u(s+\cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$(Bu(s)) := u(s+\sin\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau.$$

Функціонал (30) визначений на просторі $E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \ u(s+2k) = u(s)\}$ з нормою $\|u\|_k = \left(\|u\|^2_{L^2(-k,k)} + \|u\|^2_{L^2(-k,k)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{-k}^{k} [(u(s))^2 + (u'(s))^2] ds\right)^{\frac{1}{2}}$.

Передбачається, що потенціали задовольняють умову:

(h_5) *$W_i(r) = \frac{c_i^2}{2} r^2 + f_i(r)$, $i = 1, 2$, де $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, причому $f_i(0) = f_i'(0) = 0$ і $f_i'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, та існує таке $\mu > 2$, що $0 < \mu f_i(r) \le f_i'(r) r$, $r \ne 0$.*

Для одержання основного результату, як і в розділі 4, використано варіаційний підхід із використанням теореми про гірський перевал. Критичні точки функціоналу J_k є періодичними розв'язками рівняння (29). Однак, в силу його особливості, довести виконання умови Пале-Смейла в аналогічний спосіб, як це зроблено в розділі 4, неможливо (тут не виконується умова Амброзетті-Рабіновіца). Тому для цього побудовано спеціальний допоміжний функціонал $\tilde{J}_k$, який збігається з J_k для всіх u при $\|u\|_{L^\infty([-k,k])} \le \frac{\pi}{2}$:

$$\tilde{J}_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) + \right.$$

$$\left. + K[1 - \cos u(s) + f(u(s))]\right] ds,$$

де $f(r) = \frac{1}{2}\left(\max\left\{0; |r| - \frac{\pi}{2}\right\}\right)^2$. Крім того, f є неперервно диференційовною функцією, $1 - \cos r + f(r) \le \frac{r^2}{2}$ та існує таке $\omega = \omega(\mu) > 0$, що для всіх $r \in \mathbb{R}$

$$\omega r^2 \le 1 - \cos r + f(r) - \frac{1}{\mu} r \sin r - \frac{1}{\mu} r f'(r). \tag{31}$$

Далі вводяться такі величини:

$$c_0^2 = c_0^2(\varphi) := c_1^2 \cos^2\varphi + c_2^2 \sin^2\varphi$$

та

$$\alpha = \min\left\{\frac{\mu - 2}{2\mu}(c^2 - c_0^2), \omega K\right\}.$$

Зафіксуємо $u_0 \in E_k$ і покладемо

$$M := \sup_{\tau \ge 0} \tilde{J}_k(\tau u_0).$$

Припускається, що задані величини, задовольняють нерівність

$$\frac{1}{\alpha\mu} + \sqrt{\frac{M+1}{\alpha}} < \frac{\pi}{2}. \tag{32}$$

За допомогою функціоналу $\tilde{J}_k$ встановлено обмеженість послідовності Пале-Смейла функціоналу J_k.

Наступна теорема є основним результатом даного підрозділу.

Теорема 5.1. *Нехай виконується умова* (h_5)*, нерівність (32),* $c^2 > c_0^2$*,* $k > 0$ *і* $M < 4kK$*. Тоді рівняння (29) має несталий розв'язок* $u \in E_k$*, а отже, існують дві несталі* $2k$*-періодичні біжучі хвилі з профілем* u *і швидкостями* $\pm c$*.*

У підрозділі 5.3, в аналогічний до попереднього підрозділу спосіб, одержано умови існування несталих гомоклінічних біжучих хвиль. Тут розглядається рівняння (29) з крайовими умовами

$$\lim_{s \to \pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{33}$$

Теорема 5.2. *Нехай виконується умова* (h_5), *нерівність (32) і* $c^2 > c_0^2$. *Тоді рівняння (29) має несталий розв'язок* u, *який задовольняє умови (33), а отже, існують дві несталі гомоклінічні (відокремлені) біжучі хвилі з профілем* u *і швидкостями* $\pm c$.

Потужною технікою для дослідження варіаційних задач є використання принципу концентрованої компактності Ліонса.

Принцип концентрованої компактності. *Нехай* $\{f_k\}$ *така послідовність невід'ємних функцій простору* $L^1(\mathbb{R})$, *що* $\|f_k\|_{L^1} = \theta > 0$. *Тоді, після переходу до підпослідовності, виконується одна з таких трьох можливостей:*

(*i*) *(концентрація): існує послідовність* $\{y_k\} \subset \mathbb{R}$ *така, що для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $r > 0$ *таке, що* $\int\limits_{y_k-r}^{y_k+r} f_k(x)dx \geq \theta - \varepsilon$;

(*ii*) *(розпливання):* $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{y\in\mathbb{R}} \int\limits_{y-r}^{y+r} f_k(x)dx = 0$ *для всіх* $r > 0$;

(*iii*) *(розщеплення): знайдуться* $\alpha \in (0, \theta)$ *і послідовності невід'ємних функцій* $\{f_k^{(1)}\}, \{f_k^{(2)}\} \subset L^1(\mathbb{R})$ *з компактними носіями, такі, що* $\operatorname{dist}\left[\operatorname{supp}\{f_k^{(1)}\}, \operatorname{supp}\{f_k^{(1)}\}\right] \to \infty$, *при* $k \to \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - (f_k^{(1)} + f_k^{(2)})\|_{L^1} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k^{(1)}\|_{L^1} = \alpha$ *і* $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k^{(2)}\|_{L^1} = \theta - \alpha$.

Зауважимо, що можливість (*i*) часто також називають компактністю (іноді жорсткістю).

У підрозділі 5.4 доведено існування гетероклінічних біжучих хвиль. В силу особливості крайових умов для профілю таких хвиль, використати підхід, реалізований для періодичних і гомоклінічних хвиль неможливо. В даному випадку використано варіаційний метод із використанням принципу концентрованої компактності.

Спочатку розглянуто випадок квадратичних потенціалів взаємодії

$$W_1(r) = \frac{c_1^2}{2} r^2,\ W_2(r) = \frac{c_2^2}{2} r^2,$$

де $c_1^2, c_2^2 > 0$. У цьому випадку рівняння (24) набуде вигляду

$$c^2 u''(s) = c_1^2(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) +$$
$$+ c_2^2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) - K\sin u(s). \tag{34}$$

З рівнянням (34) пов'язується функціонал

$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 - \right.$$

$$-\frac{c_2^2}{2}(u(s+\sin\varphi)-u(s))^2+K(1+\cos u(s))\Bigg]\,ds, \qquad (35)$$

визначений на гільбертовому просторі $X = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \ u' \in L^2(\mathbb{R})\}$ зі скалярним добутком $(u,v) = u(0)v(0) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s)ds$.

Позначимо через

$$M_{-\pi,\pi} = \{u \in X : \ u(-\infty) = -\pi, \ u(+\infty) = \pi\}.$$

Нехай $v_0 : \mathbb{R} \to [-\pi, \pi]$ — монотонна функція в $C^\infty(\mathbb{R})$ така, що $v_0(s) = -\pi$ для $s < -1$ і $v_0(s) = \pi$ для $s > 1$. Тоді означимо функціонал $\Psi : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\Psi(v) := J(v_0 + v).$$

Неважко переконатися, що $\Psi(v) < \infty$ для всіх $v \in H^1(\mathbb{R})$ і точку мінімуму u функціоналу J на $M_{-\pi,\pi}$ можна записати у вигляді $u = v_0 + v$ для деякого $v \in H^1(\mathbb{R})$. Більше того, якщо v є критичною точкою функціоналу Ψ і $u = v_0 + v \in M_{-\pi,\pi}$, то $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ є розв'язком рівняння (34), який задовольняє умови (27). Таким чином, точки глобального мінімуму з множини $M_{-\pi,\pi}$ функціоналу J виражаються через критичні точки функціоналу Ψ, і є розв'язками даного рівняння з гетероклінічними крайовими умовами. Показано, що для функціоналу J і відповідної мінімізуючої послідовності з $M_{-\pi,\pi}$ виконується можливість (i) (концентрація) принципу концентрованої компактності, що дає обмеженість мінімізуючої послідовності, а отже, слабку збіжність до деякої функції. Ця функція і є розв'язком вихідної задачі.

Теорема 5.3. *Нехай $c^2 > \frac{9}{8}c_0^2$. Тоді рівняння (34) має розв'язок $u \in X$, який задовольняє умови (27), а отже, існують дві гетероклінічні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.*

Далі в цьому підрозділі поширено одержаний вище результат на випадок суперквадратичних потенціалів. Припускається, що виконуються такі умови:

(i_5) *$W_i \in C^1(\mathbb{R})$, $W_i(0) = 0$ та $W_i(r) \geq 0$ для всіх $r \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$;*

(ii_5) *$\lim\limits_{r\to\pm\infty} W_i(r) = +\infty$;*

(iii_5) *існує скінченна границя $\lim\limits_{r\to 0} \frac{W_i(r)}{r^2}$.*

За допомогою аналогічної техніки (як і у випадку квадратичних потенціалів) одержується наступний результат:

Теорема 5.4. *Нехай виконуються умови (i_5)—(iii_5). Тоді існує $c_0 > 0$ таке, що для всіх $c > c_0$ рівняння (24) має розв'язок u, який задовольняє крайові умови (27), а отже, існують дві гетероклінічні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.*

У **шостому розділі** дисертації вивчається питання існування біжучих хвиль в системі типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = W_1'(q_{n+1,m}(t) - q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t) - q_{n-1,m}(t)) +$$
$$+ W_2'(q_{n,m+1}(t) - q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t) - q_{n,m-1}(t)), \ (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (36)$$

де $W_1, W_2 \in C^1(\mathbb{R})$.

У підрозділі 6.1 наводиться формулювання задачі про біжучі хвилі для таких систем. Зокрема, підставляючи (14) в систему (36), для профілю $u(s)$ біжучої хвилі маємо рівняння

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s + \cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s - \cos\varphi)) +$$
$$+ W_2'(u(s + \sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s - \sin\varphi)), \qquad (37)$$

де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$.

Під розв'язком рівняння (37) розуміється функція $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, яка задовольняє це рівняння.

Зауважимо, що в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці, як і у одновимірному випадку, мають зміст монотонні хвилі. Проте монотонні хвилі не можуть задовольняти умову періодичності (16) та крайові умови (17). Тому, як і в четвертому розділі, будемо вивчати два види біжучих хвиль. Але у першому випадку на профіль хвилі накладемо таку умову періодичності:

$$u'(s + 2k) = u'(s), \ s \in \mathbb{R}, \qquad (38)$$

де $k > 0$ — деяке число. Зауважимо, що профіль такої хвилі не обов'язково періодичний. Проте періодичними є його профілі відносних зміщень $r_i^{\pm}$, які є аргументами W_1' та W_2' в рівнянні (37):

$$r_1^+(s) = \int\limits_s^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau, \ r_2^+(s) = \int\limits_s^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$r_1^-(s) = \int\limits_{s-\cos\varphi}^{s} u'(\tau)d\tau, \ r_2^-(s) = \int\limits_{s-\sin\varphi}^{s} u'(\tau)d\tau.$$

Тому такі хвилі також називають періодичними.

А в другому випадку профіль біжучої хвилі є розв'язком рівняння (37) з крайовими умовами на нескінченності:

$$\lim_{s\to\pm\infty} u'(s) = u'(\pm\infty) = 0. \qquad (39)$$

У підрозділі 6.2 доведено існування нетривіальних біжучих хвиль з періодичною похідною профілю. Для цього, як і в розділі 4, використано варіаційний метод. Зокрема, за допомогою теореми про гірський перевал встановлено існування нетривіальних надзвукових монотонних і необов'язково монотонних біжучих хвиль.

Спочатку, за допомогою одного з варіантів теореми про гірський перевал, доведено існування монотонних хвиль за виконання таких умов:

(i_6) *$W_i(r) = \frac{c_i^2}{2}r^2 + f_i(r)$, де $c_i \geq 0$, $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, причому $f_i(0) = f_i'(0) = 0$ і $f_i'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, $i = 1, 2$;*

і також

(ii_6^+) *існують $r_0 > 0$ і $\mu > 2$ такі, що $f_i(r_0) > 0$ і для $r \geq 0$: $0 \leq \mu f_i(r) \leq r f_i'(r)$;*

або

(ii_6^-) *існують $r_0 < 0$ і $\mu > 2$ такі, що $f_i(r_0) > 0$ і для $r \leq 0$: $0 \leq \mu f_i(r) \leq r f_i'(r)$.*

Позначимо через

$$c_0 = c_0(\varphi) := \sqrt{c_1^2 \cos^2 \varphi + c_2^2 \sin^2 \varphi}$$

швидкість звуку. Наступна теорема встановлює існування надзвукових біжучих хвиль, які мають неспадний або незростаючий профіль.

Теорема 6.1. *Нехай виконується умова (i_6), $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ($\varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$) і $k > 0$. Тоді*

(a) *за виконання умови (ii_6^+) для будь-якого $c > c_0$ рівняння (37) має неспадний (незростаючий) несталий розв'язок u, що задовольняє умову (38);*

(b) *за виконання умови (ii_6^-) для будь-якого $c > c_0$ рівняння (37) має незростаючий (неспадний) несталий розв'язок u, що задовольняє умову (38).*

Більше того, в обох випадках існують сталі $\delta > 0$ і $C > 0$, які не залежать від k, такі, що критичне значення $J_k(u)$ задовольняє нерівності $\delta \leq J_k(u) \leq C$.

Зауважимо, що з точки зору фізики, зростаючі хвилі є *хвилями розширення*, а спадні — *хвилями стиснення*.

Далі замінено умови, вказані вище, такими:

(i_6') *$W_i(r) = \frac{c_i}{2}r^2 + f_i(r)$, де $c_i \in \mathbb{R}$, $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, причому $f_i(0) = f_i'(0) = 0$ і $f_i'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, $i = 1, 2$;*

(ii_6') *існують $r_0 \in \mathbb{R}$ і $\mu > 2$ такі, що $f_i(r_0) > 0$ і $\mu f_i(r) \leq r f_i'(r)$, $r \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.*

Позначимо через $a := \max\{c_1, c_2, 0\}$. Тоді за допомогою теореми про гірський перевал одержується версія теореми 6.1 для необов'язково монотонних хвиль.

Теорема 6.2. *Нехай виконуються умови* (i_6') *та* (ii_6'). *Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c^2 > a$ *рівняння (37) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (38). Більше того, існують сталі* $\delta > 0$ *і* $C > 0$, *які не залежать від* k, *такі, що критичне значення* $J_k(u)$ *задовольняє нерівності* $\delta \le J_k(u) \le C$.

Далі, за допомогою теореми про зачеплення встановлено існування біжучих хвиль з довільною швидкістю $c > 0$, зокрема, дозвукових біжучих хвиль, які задовольняють умову (38).

Теорема 6.3. *Нехай виконуються умови* (i_6), (ii_6^+) *та* (ii_6^-). *Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c > 0$ *рівняння (37) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (38).*

У підрозділі 6.3 за допомогою методу періодичних апроксимацій доведено існування нетривіальних монотонних і необов'язково монотонних біжучих хвиль з профілем, похідна якого збігається до нуля на нескінченності.

Теорема 6.4. *Нехай виконується умова* (i_6) *та* $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $(\varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}])$. *Тоді*

(a) *за виконання умови* (ii_6^+) *для будь-якого* $c > c_0$ *рівняння (37) має неспадний (незростаючий) несталий розв'язок* u, *що задовольняє умови (39);*

(b) *за виконання умови* (ii_6^-) *для будь-якого* $c > c_0$ *рівняння (37) має незростаючий (неспадний) несталий розв'язок* u, *що задовольняє умови (39).*

Теорема 6.5. *Нехай виконуються умови* (i_6'), (ii_6') *та* $c^2 > a$. *Тоді рівняння (37) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умови (39).*

У підрозділі 6.4 вивчаються періодичні та відокремлені біжучі хвилі, які означаються аналогічно до розділу 4. Зокрема, профіль періодичної хвилі задовольняє умову періодичності

$$u(s + 2k) = u(s), \; s \in \mathbb{R}, \tag{40}$$

де $k > 0$ — деяке число, а профіль відокремленої хвилі задовольняє крайові умови на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{41}$$

За допомогою теореми про гірський перевал і теореми про зачеплення одержано такі результати:

Теорема 6.6. *Нехай виконуються умови* (i_6') *та* (ii_6'). *Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c^2 > a$ *рівняння (37) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (40).*

Теорема 6.7. *Нехай виконуються умови* (i_6), (ii_6^+) *та* (ii_6^-). *Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c > 0$ *рівняння (37) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (40).*

Теорема 6.8. *Нехай виконуються умови* (i_6'), (ii_6') *і* $c^2 > a$. *Тоді рівняння (37) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умови (41).*

У **сьомому розділі** дисертації досліджується питання існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці.

У підрозділі 7.1 вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці з кубічною нелінійністю:

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) + (\Delta\psi)_{n,m}(t) + \theta\mu_{n,m}|\psi_{n,m}(t)|^2\psi_{n,m}(t) = 0,\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{42}$$

де $\psi_{n,m}(t)$ — хвильова функція (n,m)-ї частинки, $\theta = \pm 1$, а

$$(\Delta\psi)_{n,m} = \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 4\psi_{n,m}$$

двовимірний дискретний оператор Лапласа, $\{\mu_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$. Рівняння (42) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Такі системи використовують, наприклад, для опису двовимірних систем зв'язаних волоконних світлодіодів і, зокрема, явищ самофокусування і розфокусування. Зауважимо, що параметр θ введено для того, щоб розрізняти *самофокусований* ($\theta = 1$) та *розфокусований* ($\theta = -1$) випадки.

В перших двох пунктах цього підрозділу розглядається формулювання задачі про стоячі хвилі та варіаційне формулювання задачі.

Стоячою хвилею в даному випадку є розв'язок вигляду

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m}\exp(-i\omega t), \tag{43}$$

де $u_{n,m} \in \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ — частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами (за аналогією до лакунарних солітонів у фотонних кристалах).

Підставляючи стоячу хвилю (43) в систему (42) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержуємо систему

$$-(\Delta u)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta\mu_{n,m}|u_{n,m}|^2 u_{n,m},\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{44}$$

Під розв'язком системи (44) розуміється послідовність $\{u_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$, яка задовольняє цю систему.

Всюди далі припускається, що послідовність $\{\mu_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$ є N-періодичною, тобто $\mu_{n+N,m} = \mu_{n,m+N} = \mu_{n,m}$, де N — деяке натуральне число.

Позначимо через

$$(Lu)_{n,m} = a_{n,m}u_{n+1,m} + a_{n-1,m}u_{n-1,m} + b_{n,m}u_{n,m+1} + b_{n,m-1}u_{n,m-1} + c_{n,m}u_{n,m}$$

і розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta\mu_{n,m}|u_{n,m}|^2 u_{n,m},\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{45}$$

де послідовності дійсних чисел $\{a_{n,m}\}$, $\{b_{n,m}\}$, $\{c_{n,m}\}$ є також N-періодичними.

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків. Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються *спектральними проміжками.*

Позначимо через (a, b) — довільний фіксований спектральний проміжок оператора L.

Далі вивчаються стоячі хвилі двох видів: з kN-періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв'язки), тобто

$$u_{n+kN,m} = u_{n,m+kN} = u_{n,m}, \ (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{46}$$

де k — фіксоване натуральне число, та

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} u_{n,m} = 0 \tag{47}$$

відповідно.

Залежно від типу стоячої хвилі, розглядаються функціонали J_k та J. Показано, що критичні точки цих функціоналів є розв'язками відповідних задач.

У пункті 7.1.3 доведено існування нетривіальних періодичних розв'язків системи (45), а в пункті 7.1.4 – локалізованих розв'язків для самофокусованого випадку.

Теорема 7.1. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = 1$, $\omega \in (a, b)$ та $b \neq +\infty$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ система (45) має нетривіальний kN-періодичний розв'язок u. Більше того, існують такі додатні сталі ε_0, C_0, ε і C, які не залежать від k, що $\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0$, $\varepsilon \leq J_k(u) \leq C$.*

Теорема 7.2. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = 1$, $\omega \in (a, b)$ та $b \neq +\infty$. Тоді система (45) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.*

Тут також, як і в попередніх розділах, використано теорему про зачеплення для періодичних розв'язків та метод періодичних апроксимацій для локалізованих розв'язків.

У пункті 7.1.5 наведено аналогічні результати до одержаних вище для розфокусованого випадку ($\theta = -1$), які одержуються аналогічними методами.

Теорема 7.3. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = -1$, $\omega \in (a, b)$ та $a \neq -\infty$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ система (45) має нетривіальний kN-періодичний розв'язок u. Більше того, існують такі додатні сталі ε_0, C_0, ε і C, які не залежать від k, що $\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0$, $\varepsilon \leq J_k(u) \leq C$.*

Теорема 7.4. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = -1$, $\omega \in (a, b)$ та $a \neq -\infty$. Тоді система (45) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.*

З теорем 7.2 та 7.4 випливає основний результат підрозділу 7.1.

Теорема 7.5. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ та $\omega \in (a, b)$. І нехай $b \neq +\infty$, якщо $\theta = 1$, або $a \neq -\infty$, якщо $\theta = -1$. Тоді система (45) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.*

Оскільки спектр оператора $-\Delta$ є відрізком $[0,8]$, то з теореми 7.5 одержуємо наслідок:

Наслідок 7.1. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. І нехай $\omega < 0$, якщо $\theta = 1$, або $\omega > 0$, якщо $\theta = -1$. Тоді система (44) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.*

Підрозділ 7.2 присвячений питанню існування нетривіальних стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці із насичуваною нелінійністю:

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) - a_1(\Delta_{(1)}\psi)_{n,m}(t) - a_2(\Delta_{(2)}\psi)_{n,m}(t) + \theta f(\psi_{n,m}(t)) = 0,\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (48)$$

де $\psi_{n,m}(t)$ — хвильова функція (n,m)-ї частинки, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$, $\theta = \pm 1$, $\Delta_{(1)}$ і $\Delta_{(2)}$ дискретні оператори Лапласа відповідно за змінними n і m, $f(z)$ — насичувана нелінійність. Це означає, що на нескінченності $f(z)$ росте як $const \cdot |z|$. Важливими прикладами таких нелінійностей є

$$f(u) = \frac{\nu |u|^p}{1 + \mu |u|^p} u,\ \mu > 0,\ \nu > 0,\ p > 1, \quad (49)$$

та

$$f(u) = \chi\,(1 - \exp(-a|u|^p))\,u,\ \chi > 0,\ a > 0,\ p > 0. \quad (50)$$

У пункті 7.2.1 розглядається формулювання задачі та основні припущення. Підставляючи стоячу хвилю (43) в систему (48) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержуємо систему

$$(Lu)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta f(u_{n,m}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (51)$$

де $(Lu)_{n,m} = -a_1(\Delta_{(1)}u)_{n,m} - a_2(\Delta_{(2)}u)_{n,m}$.

Як і вище, вивчаються стоячі хвилі двох видів: з k-періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто

$$u_{n+k,m} = u_{n,m+k} = u_{n,m},\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (52)$$

де k — деяке натуральне число, та

$$\lim_{n,m \to \pm\infty} u_{n,m} = 0 \quad (53)$$

відповідно.

Нехай $F(r)$ первісна функція для функції $f(r)$, тобто

$$F(r) = \int_0^r f(s)ds.$$

Тоді всюди далі припускається, що виконуються такі умови:

(i_7) *$f(r) = o(r)$ при $r \to 0$;*

(ii_7) $\lim\limits_{r\to\pm\infty}\frac{f(r)}{r}=l<+\infty;$

(iii_7) $f\in C^1(\mathbb{R})$ *і* $f(r)r<f'(r)r^2$, $r\neq 0$;

Крім того, приймемо одну з таких умов:

(iv_7) $\lim\limits_{r\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}f(r)r-F(r)\right)=+\infty;$

або

(v_7) *функція* $g(r)=f(r)-lr$ *обмежена.*

Легко перевірити, що нелінійності (49) і (50) задовольняють умови (i_7)—(iii_7). Крім того, (49) задовольняє (iv_7) при $1<p\le 2$ та (v_7) для всіх $p>1$ (зокрема, при $p>2$). А нелінійність (50) задовольняє (v_7) для всіх $p>0$.

У пункті 7.2.2 подано варіаційне формулювання задачі і введено многовиди Нехарі.

Позначимо через E_k простір всіх k-періодичних послідовностей $\{u_{n,m}\}$, які задовольняють умову (52). Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком $(u,v)_k=\sum\limits_{(n,m)\in Q_k}u_{n,m}v_{n,m}$ та відповідною нормою $\|u\|_k=(u,u)^{\frac{1}{2}}$, де $Q_k=\left\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2:\ -\left[\frac{k}{2}\right]\le n,m\le k-\left[\frac{k}{2}\right]-1\right\}$, і $\left[\frac{k}{2}\right]$ — ціла частина $\frac{k}{2}$. Через E позначимо простір l^2.

На просторах E_k та E розглядаються відповідно функціонали

$$J_k(u)=\frac{1}{2}(L_ku-\omega u,u)_k-\sum_{(n,m)\in Q_k}\theta F(u_{n,m}),$$

$$J(u)=\frac{1}{2}(Lu-\omega u,u)-\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta F(u_{n,m}),$$

де L_k — оператор L, який діє в просторі E_k. Позначимо через σ_k спектр оператора L_k в просторі E_k. Критичні точки функціоналів J_k та J є розв'язками системи (51), що задовольняють умови (52) та (53) відповідно. Зауважимо, що оскільки функціонал J_k не задовольняє умову Пале-Смейла, то до нього не можна застосувати теорему про зачеплення (як це було зроблено вище). Тому в даному випадку для встановлення існування розв'язків використано підхід із використанням многовиду Нехарі.

Далі для функціоналів J_k та J означаються відповідні многовиди Нехарі

$$N_k:=\{u\in E_k|\ \langle J_k'(u),u\rangle=0,\ u\neq 0\}\subset E_k$$

та

$$N:=\{u\in E|\ \langle J'(u),u\rangle=0,\ u\neq 0\}\subset E.$$

У пункті 7.2.3 за допомогою методу критичних точок і многовиду Нехарі встановлено існування періодичних розв'язків для самофокусовного випадку $(\theta=1)$.

Теорема 7.6. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iv_7)*,* $\theta = 1$*,* $\omega < 0$ *та* $\omega + l > 0$*. Тоді для будь-якого* $k \geq 1$ *система (51) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u \in E_k$*. Більше того, якщо функція* f *непарна, то система (51) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E_k$*, один з яких невід'ємний.*

У пункті 7.2.4 для самофокусовного випадку доведено існування локалізованих розв'язків за допомогою многовиду Нехарі і методу періодичних апроксимацій.

Теорема 7.7. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iv_7)*,* $\theta = 1$*,* $\omega < 0$ *та* $\omega + l > 0$*. Тоді система (51) має нетривіальний розв'язок* $u \in E$*. Більше того, якщо функція* f *непарна, то система (51) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E$*, один з яких невід'ємний.*

Однією з умов існування періодичних і локалізованих розв'язків є умова (iv_7), яку задовольняє нелінійність $f(u) = \frac{\nu|u|^p}{1+\mu|u|^p}u$ при $1 < p \leq 2$.

У пункті 7.2.5 умову (iv_7) замінено на (v_7), яка дозволяє довести виконання умови Пале–Смейла. Тому для встановлення існування періодичних розв'язків використано теорему про гірський перевал.

Теорема 7.9. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iii_7) *та* (v_7)*. І нехай* $\theta = 1$*,* $\omega < 0$*,* $\omega + l > 0$ *та* $\omega + l \notin \sigma_k$*. Тоді для будь-якого* $k \geq 1$ *система (51) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u \in E_k$*. Більше того, якщо функція* f *непарна, то система (51) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E_k$*, один з яких невід'ємний.*

Тут також за допомогою граничного переходу одержано результат про існування локалізованих розв'язків.

Теорема 7.10. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iii_7) *та* (v_7)*. І нехай* $\theta = 1$*,* $\omega < 0$ *та* $\omega + l > 0$*. Тоді система (51) має нетривіальний розв'язок* $u \in E$*. Більше того, якщо функція* f *непарна, то система (51) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E$*, один з яких невід'ємний.*

Крім того, в цьому пункті наведено аналогічні результати до одержаних вище для розфокусованого випадку ($\theta = -1$).

Теорема 7.11. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iii_7) *та* (iv_7) *або* (v_7)*. І нехай* $\theta = -1$*,* $\omega > 4(a_1+a_2)$ *та* $\omega - l < 4(a_1+a_2)$*. Крім того, у випадку умови* (v_7) $\omega - l \notin \sigma_k$*. Тоді для будь-якого* $k \geq 1$ *система (51) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u \in E_k$*. Більше того, якщо функція* f *непарна, то система (51) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E_k$*.*

Теорема 7.12. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iii_7) *та* (iv_7) *або* (v_7)*. І нехай* $\theta = -1$*,* $\omega > 4(a_1 + a_2)$ *та* $\omega - l < 4(a_1 + a_2)$*. Тоді система (51) має нетривіальний розв'язок* $u \in E$*. Більше того, якщо функція* f *непарна, то система (51) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E$*.*

З теорем 7.7, 7.10 та 7.12 випливає основний результат підрозділу 7.2.

Теорема 7.13. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iii_7) *та* (iv_7) *або* (v_7)*. І нехай* $\omega < 0$ *та* $\omega + l > 0$*, якщо* $\theta = 1$*, або* $\omega > 4(a_1 + a_2)$ *та* $\omega - l < 4(a_1+a_2)$*, якщо* $\theta = -1$*. Тоді система (51) має нетривіальний розв'язок* $u \in E$*.*

Більше того, якщо функція f непарна, то система (51) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in E$, один з яких при $\theta = 1$ невід'ємний.

Наслідок 7.5. *Нехай $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$, якщо $\theta = 1$, або $\omega > 4(a_1 + a_2)$ та $\omega - l < 4(a_1 + a_2)$, якщо $\theta = -1$. Тоді система (51) з нелінійностями (49) та (50) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in E_k$, один з яких при $\theta = 1$ невід'ємний.*

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена побудові класів існування розв'язків таких дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем як: нескінченні системи нелінійних осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, системи типу Фермі-Пасти-Улама та дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Враховуючи специфіку таких систем, в роботі набули розвитку і були застосовані методи функціонального аналізу та теорії критичних точок гладких функціоналів.

Відповідно до поставлених завдань у дисертації зроблено огляд відомих результатів з теми дослідження та одержано такі нові результати:

1) Встановлено умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку нескінченних систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Встановлено умови обмеженості глобального розв'язку. Окремо досліджено випадок степеневих потенціалів, які у загальному випадку не задовольняють одержані умови. Для таких потенціалів встановлено умови існування та неіснування глобальних розв'язків відповідної задачі Коші.

2) Досліджено умови існування періодичних за часовою змінною розв'язків у нескінченних системах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. За допомогою методу критичних точок встановлено існування нетривіальних періодичних розв'язків. Доведено, що для достатньо великих періодів ці розв'язки не сталі. Показано, що у випадку степеневих потенціалів періодичні розв'язки можна побудувати за допомогою методу умовної мінімізації.

3) Встановлено умови існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в нескінченних системах лінійно та нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Досліджено існування несталих надзвукових і дозвукових біжучих хвиль.

4) Доведено існування несталих періодичних, гомоклінічних і гетероклінічних біжучих хвиль для дискретних рівнянь типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці з нелінійним зв'язком.

5) Знайдено умови існування несталих періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Окремо досліджено існування біжучих хвиль з профілем, похідна якого є періодичною

та збігається до нуля на нескінченності. У цьому випадку, зокрема, встановлено умови існування монотонних хвиль.

6) Досліджено існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера з кубічною та насичуваною нелінійностями на двовимірній ґратці. Встановлено умови існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля на нескінченності. Досліджено самофокусований та розфокусований випадки рівняння.

Одержані в дисертації результати є поширенням вже відомих для подібних систем, мають теоретичний характер і можуть бути застосованими в теорії звичайних диференціальних рівнянь та у нелінійній фізиці.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry.* 2018. Vol. 14, № 1. P. 16–26.

2. Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Український математичний вісник.* 2019. Т.16, №4. С. 465–476. Engl. transl.: *Journal of Mathematical Sciences.* 2020. Vol. 246, № 5 (May). P. 593–601.

3. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii.* 2019. Vol. 52, № 2. P. 176–184.

4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii.* 2018. Vol. 50, № 1. P.75–87.

5. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis.* 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.

6. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Український математичний журнал.* 2017. Т. 69, № 4. С. 435–444. Engl. transl.: *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, № 4. P. 509–520.

7. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2014. Т. 57, № 3. С. 45-52. Engl. transl.: *J. Math. Sc.* 2016. Vol. 217, № 2 (August). P. 187-197.

8. Бак С. М. Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній гратці. *Карпатські математичні публікації.* 2012. Т. 4, № 2. С. 175–196.

9. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 17–23.

10. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 5–12.

11. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2011. Т. 35, № 1. С. 60–65.

12. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.

13. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. Вип. 16. С. 21–29.

14. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. Вип. 5. С. 3–9.

15. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. Вип. 9. С. 5–10.

16. Бак С. М. Про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні

науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. Вип. 20. С. 5–12.

17. Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 4. С. 18–24.

18. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 5–13.

19. Бак С. М., Рум'янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 29–36.

20. Бак С. М., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник.* 2010. Т. 7, №2. С. 154-175. Engl. transl.: *J. Math. Sci.* 2011. Vol. 174, № 4 (April). P. 437–452.

21. Bak S. Existence of the periodic and heteroclinic travelling waves for the discrete sine-Gordon equation on 2d-lattice. *X International V. Skorobohatko Mathematical Conference* : book of abstracts. (Drohobych, 2015 August 25–28). Lviv : Lviv Politech., 2015. P. 9.

22. Bak S. M. Existence of heteroclinic travelling waves for the discrete sine-Gordon equation on 2d-lattice with nonlinear interaction. *International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky* : book of abstracts. (Lviv, 2016 September 20–24). Lviv, 2016. P. 23.

23. Bak S. M. Existence of the periodic and solitary travelling waves in the systems of oscillators on 2d-lattices. *5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky* : book of abstracts. (Kyiv, 2016 November 09–11). Vinnytsia, 2016. P. 41.

24. Bak S. M. About heteroclinic travelling waves in discrete sine-Gordon type equation. *Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь* : ма-

теріали Міжнар. наук. конфер. (Київ, 13–14 грудня 2017 р.). Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2017. С. 24–25.

25. Бак С. М. Про періодичні біжучі хвилі для нескінченної системи нелінійних осциляторів. *Дванадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука* : матеріали конференції. (Київ, 15–17 травня 2008 р.). Київ, 2008. С. 27.

26. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Український математичний конгрес – 2009* (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова). Інститут математики НАН України. (Київ, 27–29 серпня 2009 р.). URL: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Bak.pdf (дата звернення: 28.07.2020).

27. Бак С. М., Домбровська Д. М. Умови існування біжучих хвиль в системі осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 21–22 квітня 2010 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2010. С. 44–48.

28. Бак С. М. Про біжучі хвилі для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Тринадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука* : матеріали конференції. (Київ, 13–15 травня 2010 р.). Київ, 2010. Т. 1. С. 53.

29. Бак С. М., Баранова О. О. Існування та єдиність локального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 20–21 квітня 2011 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2011. С. 30–34.

30. Бак С. М., Білик Ю. П. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 20–21 квітня 2011 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2011. С. 34–38.

31. Бак С. М. Про періодичні розв'язки системи осциляторів на двовимірній ґратці. *Teoretyczne i praktyczne innowacje naukowe* : матеріали Міжнар. наук. конфер. (Krakow, 29–31 stycznia 2013 r.). Krakow: Wydawca Sp. z o.o. «Diamond traiding tour», 2013. T. 8. S. 72-74.

32. Бак С. М., Окопна Т. М. Застосування принципу концентрованої компактності в задачі про існування гетероклінічних біжучих хвиль в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 17–18 квітня 2013 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2013. С. 10–13.

33. Бак С. М., Кудрич Ю. С. Застосування методу критичних точок в задачі про існування періодичних біжучих хвиль в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 16–17 квітня 2014 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2014. С. 12–15.

34. Бак С. М., Магдич В. І. Існування гомоклінічних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 22–23 квітня 2015 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2015. С. 11–16.

35. Бак С. М. Біжучі хвилі в моделі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей VII міжнар. наук. конфер. (Кам'янець-Подільський, 21–22 квітня 2016 р.). Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. С. 11–13.

36. Бак С. М. Про існування відокремлених біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності* : зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. науково-практ. конфер. (Вінниця, 18–19 травня 2017 р.). Вінниця : ФОП Рогальська І. О., 2017. С. 42–44.

37. Бак С. М. Гетероклінічні біжучі хвилі в дискретному рівнянні синус-Ґордон з нелінійною взаємодією на двовимірній ґратці. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей 8-ї Міжнар. наук. конфер., присвяч. 100-річчю Нац. Акад. наук України та 100-річчю КПНУ ім. І. Огієнка. (Кам'янець-Подільський, 18–20 квітня 2018 р.). Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. С. 91–92.

38. Бак С. М. Про існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. *Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності* : матеріали Міжнар. наук.-метод.

конференції (Вінниця, 17–18 травня 2018 р.). Вінниця : ВНТУ, 2018. С. 179–181.

39. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Застосування многовиду Нехарі в задачі про існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологій* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 18–19 квітня 2019 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2019. С. 10–15.

40. Бак С., Ковтонюк Г., Печериця І. Про існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності* : матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції (Вінниця, 15–16 травня 2019 р.). Вінниця, 2019. С. 13–16.

41. Бак С. М. Про біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей IX міжнар. наук. конфер. (Кам'янець-Подільський, 14–15 травня 2020 р.). Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. С. 25-26.

42. Бак С. М. Метод умовної мінімізації в задачі про існування періодичних розв'язків в системах осциляторів на двовимірній ґратці. *Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності* : матеріали Міжнар. наук.-метод. конференції (Вінниця, 18–20 травня 2020 р.). Вінниця : ВНТУ, 2020. С. 93-96.

АНОТАЦІЯ

Бак С. М. *Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці.* — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 "Диференціальні рівняння"(111 Математика). — Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2020.

Дисертаційна робота присвячена побудові класів існування розв'язків дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем на двовимірній ґратці. Зокрема, у дисертації досліджено нескінченні системи зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Одержано достатні умови існування та єдиності локального і глобального розв'язку для систем осциляторів з лінійним

зв'язком. Також встановлено умови обмеженості глобального розв'язку. Одержано умови неіснування глобального розв'язку у випадку степеневих потенціалів. Для таких систем встановлено умови існування періодичних за часовою змінною розв'язків. Встановлено існування несталих надзвукових періодичних та відокремлених біжучих хвиль в системах осциляторів з лінійним і нелінійним зв'язком. Доведено, що профіль відокремленої біжучої хвилі експоненціально спадає на нескінченності. Одержано результати про існування дозвукових періодичних біжучих хвиль. Крім того, у дисертації встановлено існування несталих біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона та системах типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. Також у роботі досліджено питання існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Розглянуто такі рівняння з кубічною і насичуваною нелінійностями.

Ключові слова: гамільтонові системи, нелінійні осцилятори, системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера, двовимірна ґратка, задача Коші, періодичні розв'язки, біжучі хвилі, стоячі хвилі, критичні точки, теорема про гірський перевал, теорема про зачеплення, принцип концентрованої компактності, періодичні апроксимації, многовид Нехарі.

АННОТАЦИЯ

Бак С. Н. *Дискретные бесконечномерные гамильтоновы системы на двумерной решетке.* — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 "Дифференциальные уравнения"(111 Математика). — Винницкий государственный педагогический университет имени Михаила Коцюбинского, Винница. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2020.

Диссертационная работа посвящена построению классов существования решений дискретных бесконечномерных гамильтоновых систем на двумерной решетке. В частности, в диссертации исследованы бесконечные системы связанных нелинейных осцилляторов на двумерной решетке. Получены достаточные условия существования и единственности локального и глобального решения для систем осцилляторов с линейной связью. Также установлены условия ограниченности глобального решения. Получены условия несуществования глобального решения в случае степенных потенциалов. Также для таких систем установлены условия существования периодических по временной переменной решений. Установлено существование непостоянных сверхзвуковых периодических и уединнёных бегущих волн в системах осцилляторов с линейной и нелинейной связью. Доказано, что профиль уединнёной бегущей волны экспоненциально убывает на бесконечности. Получены результаты о существовании дозвуковых периодических бегущих волн. Кроме того, в диссертации установлено существование непостоянных бегущих волн в дискретных уравнениях типа синус-Гордона и системах типа Ферми-Пасты-Улама на двумерной решетке. Также в работе исследован вопрос существования стоячих волн в дискретных нелинейных уравнениях типа Шредингера на двумерной решетке. Рассмотрены такие уравнения с кубической и насыщаемой нелинейностями.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, нелинейные осцилляторы, системы типа Ферми-Пасты-Улама, дискретные уравнения типа синус-Гордона, дискретные нелинейные уравнения типа Шредингера, двумерная решетка, задача Коши, периодические решения, бегущие волны, стоячие волны, критические точки, теорема о горном перевале, теорема о зацеплении, принцип концентрированной компактности, периодические аппроксимации, многообразие Нехари.

ABSTRACT

Bak S. M. *Discrete infinite-dimensional Hamiltonian systems on a two-dimensional lattice.* — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of the Doctor of Sciences in Physics and Mathematics in speciality 01.01.02 "Differential equations"(111 Mathematics). — Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2020.

The dissertation is devoted to the construction of existence classes for solutions of discrete infinite-dimensional Hamiltonian systems on a two-dimensional lattice.

In particular, the dissertation investigates infinite systems of coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of local and global solutions are obtained for systems of oscillators with linear coupling. The conditions for the boundedness of the global solution are also established. Conditions for the non-existence of a global solution in the case of power potentials are obtained. For this, the classical theorems of existence and uniqueness in Banach spaces and the representation of the system in Hamiltonian form are used.

Also, conditions for the existence of periodic solutions in a time variable are established for such systems. For this, the method of critical points and the method of periodic approximations were used. It is shown that in the case of a power potential function, the constrained minimization method can be used to construct periodic solutions.

Using the mountain pass theorem and the method of periodic approximations, the existence of non-constant supersonic periodic and solitary traveling waves for systems of oscillators with linear and nonlinear coupling is established. It is proved

that the profile of a solitary traveling wave decreases exponentially at infinity. Using the linking theorem, the results on the existence of subsonic periodic traveling waves are obtained.

In addition, the dissertation established the existence of non-constant traveling waves in discrete sine-Gordon type equations on a two-dimensional lattice. Three types of traveling waves are considered: periodic, homoclinic and heteroclinic. To prove the existence of periodic traveling waves, a variational method is used using the mountain pass theorem. The existence of homoclinic traveling waves is proved using the method of periodic approximations, and heteroclinic ones, using the concentration compactness principle.

By the variational technique, the existence of traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems on a two-dimensional lattice is established. In particular, the existence of monotonic and not necessarily monotonic traveling waves has been established. First, traveling waves of two types are considered. In the first case, the derivative of the profile is a $2k$-periodic function, and in the second — the derivative of the profile vanishes at infinity. Further, the existence of traveling waves with similar conditions was established, which are imposed on the wave profile itself, and not on its derivative.

The dissertation also investigates the existence of standing waves in discrete nonlinear Schrödinger type equations on a two-dimensional lattice. Such equations with cubic and saturable nonlinearities are studied. Two types of standing waves are considered: with a periodic amplitude (periodic solutions) and an amplitude that converges to zero (localized solutions). First, the question of the existence of nontrivial standing waves in discrete nonlinear Schrödinger type equations on a two-dimensional lattice with cubic nonlinearity is studied. The existence of nontrivial periodic and localized solutions is established. Here, as in previous chapters, we used the linking theorem for periodic solutions and the periodic approximation method for localized solutions. Next, the question of the existence of nontrivial standing waves in such equations with saturable nonlinearity is studied. To obtain the main results, the critical points method and Nehari manifolds are used.

The results of the dissertation are theoretical. They can be used in the theory of ordinary differential equations and in nonlinear physics.

Key words: Hamiltonian systems, nonlinear oscillators, Fermi-Pasta-Ulam type systems, discrete sine-Gordon type equations, discrete nonlinear Schrödinger type equations, two-dimensional lattice, Cauchy problem, periodic solutions, traveling waves, standing waves, critical points, mountain pass theorem, linking theorem, concentration compactness principle, periodic approximations, Nehari manifold.

Підписано до друку 29.09.2020 р.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 1,75
Папір офсетний. Друк різографічний.
Наклад 100 прим. Замовлення № 100
Виготовлювач ФОП Рогальська І.О.
м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 145
тел. (0432) 43-51-39, 65-80-80
E-mail: dilo_vd@ukr.net
Свідоцтво ВОЗ № 635744 від 01.03.2010 р.