МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

імені ІВАНА ФРАНКА

ВЛАСОВ Віталій Андрійович

УДК 517.95

КОЕФІЦІЄНТНІ ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь
Львівського національного університету імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України

Наукові керівники: доктор фізико-математичних наук, професор
Іванчов Микола Іванович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Бугрій Олег Миколайович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
виконувач обов’язків завідувача кафедри математичної
статистики та диференціальних рівнянь

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Нитребич Зіновій Миколайович,
Національний університет «Львівська політехніка»,
завідувач кафедри вищої математики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Гузик Надія Миколаївна,
доцент кафедри інженерної механіки (озброєння та
техніки інженерних військ) Національної академії
сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

Захист відбудеться ______ грудня 2020 року о _________ на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий: ______ листопада 2020р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доцент Ю. Д. Головатий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню питань існування та єдиності розв'язків коефіцієнтних обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням.

Обернені задачі, на відміну від класичних прямих, виникають тоді, коли є потреба визначити додаткові параметри рівняння, крім власне невідомої функції. Зокрема, коефіцієнтні обернені задачі полягають у знаходженні невідомих коефіцієнтів або вільних членів рівняння. З фізичної точки зору такі задачі виникають тоді, коли необхідно визначити невідомі характеристики досліджуваних процесів в умовах, коли складно або неможливо встановити їх прямим вимірюванням. Наприклад, технічно неможливо прямо виміряти температуру металу у соплі ракети, або визначити форму та специфіку залягання корисних копалин.

Перші дослідження по теорії обернених задач виникли внаслідок розв'язання практичних проблем геофізики, сейсмології, астрономії, теорії квантового розсіяння, та ін., які виникли у першій половині XX ст. Однією із перших праць є стаття В.А. Амбарзумяна (1929), в якій розглядається обернена задача, що виникає у теорії квантового розсіяння. У 1935 році А.М.Тихонов дослідив наступну задачу: встановити доісторичний температурний розподіл у приповерхневих шарах земної кори на основі сучасних температурних вимірювань. Тобто, було досліджено задачу, обернену до задачі Коші для рівняння теплопровідності. Пізніше ці результати було узагальнено і використано при дослідженні властивостей поверхні Місяця.

Початок активного розвитку теорії обернених задач припадає на другу половину XX ст. У 60-70-их рр. у роботах Б.Ф. Джонса (B.F. Jones) та Дж.Р. Кеннона (J.R. Cannon) було встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі для одновимірного рівняння теплопровідності, де невідомий старший коефіцієнт залежить лише від часу.

Коефіцієнтні обернені задачі для параболічних рівнянь досліджувались багатьма авторами. Серед них слід згадати роботи М.І. Іванчова, С.І. Кабаніхіна, М.В. Клібанова, О.І. Прилєпка, В. Ісакова (V. Isakov), А. Лоренці (A. Lorenzi), В. Рандела (W. Rundell), М. Чоуллі (M. Choulli), Г.-М. Їна (H.-M. Yin), П. ДуШато (P. DuChateau) та інших.

Цікавими з практичної зору є задачі для вироджених рівнянь. Вони виникають при описі таких різних процесів, як дифузія в пористому середовищі, рух в'язких рідин, опріснення морських вод, поведінка фінансових ринків, динаміка популяцій, та ін. Прямі задачі для таких рівнянь досліджувались в працях О.О. Ладиженської, О.С. Калашникова, Т.Д. Джураєва, А. Фрідмана (A. Friedman), Е. ДіБенедетто (E. DiBenedetto), А.В. Глушака, С.Д. Шмулевича, М.М. Гаджієва, С. Д. Івасишена, М.І. Матійчука, І.Д. Пукальського, та ін.

Обернені задачі для вироджених рівнянь в частинних похідних досліджувались у працях Т.Елдесбаєва для гіперболічного рівняння та М.М. Гаджієва для еліптичного рівняння. П. Каннарса

(P. Cannarsa) досліджував обернені задачі знаходження невідомого джерела у параболічних рівняннях з виродженням.

Випадок, коли невідомим є вироджений старший коефіцієнт параболічного рівняння, було досліджено у праці М.І. Іванчова, Н.В. Салдіної, А. Лоренці (A. Lorenzi) у випадку багатовимірного рівняння і, зокрема, у працях І.Г. Малишева, М.І Іванчова, Н.В. Салдіної у випадку одновимірного рівняння. У областях з вільними межами обернені задачі для параболічних рівнянь вивчались у роботах Н.М. Гузик, Г.А. Снітко, І.Є. Баранської.

Коефіцієнтні обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь без виродження вивчались у працях Р.В. Сагайдака, Г.А. Снітко, І.Є. Баранської, Н.Є. Кінаш, Д. Лесніка (D. Lesnic), та ін. Задачі з виродженням для таких рівнянь наразі вивчені мало. Тому дослідження обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь зі слабким та сильним виродженням є актуальним.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка. Дисертація виконана в рамках науково-дослідних державних тем "Розробка методів дослідження якісних характеристик математичних моделей, які описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних" (номер держреєстрації 0106U001284), "Розробка теорії класичних та некласичних задач для диференціальних рівнянь та методів дослідження математичних моделей" (номер держреєстрації 0103U001908).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є встановлення коректної розв'язності обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням.

Безпосередніми *завданнями* дослідження є:

1) встановлення умов існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач для двовимірних ізотропних параболічних рівнянь зі слабким степеневим виродженням невідомого старшого коефіцієнта;
2) встановлення умов існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач для двовимірних анізотропних параболічних рівнянь з різними слабкими степеневими виродженнями невідомих старших коефіцієнтів;
3) встановлення умов існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач з диференціальними та інтегральними умовами перевизначення для двовимірних ізотропних та анізотропних параболічних рівнянь з сильним виродженням.

Об'єкт дослідження: коефіцієнтні обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь з вироджуваними старшими коефіцієнтами.

Предмет дослідження: умови існування та єдиності коефіцієнтних обернених задач знаходження старших коефіцієнтів у двовимірних параболічних рівняннях з виродженням.

Методи дослідження: метод функцій Гріна (при зведенні оберненої задачі до еквівалентної системи операторних рівнянь); метод теореми про нерухому точку (при доведенні існування розв'язків операторних рівнянь); метод інтегральних рівнянь (при доведенні єдиності розв'язків обернених задач); метод інтегральних нерівностей (при встановленні допоміжних оцінок).

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації вперше отримано такі результати з теорії коефіцієнтних обернених задач для вироджених двовимірних параболічних рівнянь:

1) встановлено умови існування та єдиності глобального розв’язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле і слабким виродженням;
2) знайдено умови локального існування та глобальної єдиності розв’язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана для повного параболічного рівняння зі слабким виродженням;
3) встановлено умови однозначної розв’язності оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле для анізотропного повного параболічного рівняння зі слабким виродженням;
4) доведено існування і єдиність глобального розв’язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана та диференціальними умовами перевизначення для ізотропного параболічного рівняння з сильним виродженням;
5) знайдено умови локального існування і глобальної єдиності розв’язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана та інтегральними умовами перевизначення для анізотропного параболічного рівняння з сильним виродженням.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційні дослідження мають теоретичний характер і є внеском в теорію коефіцієнтних обернених задач для параболічних рівнянь. Їх результати можуть бути використані при подальших дослідженнях обернених задач з виродженням та практичному розв’язанні таких задач.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації одержані автором самостійно. У спільних з науковим керівником роботах [1], [3], [4], [5] М.І. Іванчову належить постановка розглядуваних задач та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включено до дисертації, доповідалися на:

- Львівському міському семінарі із диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Б.Й. Пташник, проф. М.І. Іванчов, проф. П.І. Каленюк, проф. М.М. Бокало) (Львів, 2009-2019рр.);
- XIII Міжнародній науковій конференції ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 2010);
- Конференції "Nonlinear Partial Differential Equations"(Дніпро, 2010);
- Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2011);

- XIV Міжнародній науковій конференції ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 2012);
- Конференції "8th International Conference on Inverse Problems in Engineering"(Краків, 2014);
- Конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"(Чернівці, 2018);
- Конференції "CAIM-2018"(Кишинів, 2018);
- Конференції "24th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis"(Таллінн, 2019)

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 5 статтях ([1] – [5]) у фахових наукових журналах, серед яких 1 ([4]) опубліковано в журналі, що входить до міжнародної науково-метричної бази Scopus. Результати додатково висвітлено в 1 статті ([6]) у науковому журналі і 8 тезах ([7] – [14]) наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел. Список використаних джерел налічує 124 найменування і викладений на 11 сторінках. Загальний обсяг роботи – 148 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Усі задачі розглядаються у області $\mathrm{Q_T} \coloneqq \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{t}) : 0 < \mathrm{x} < \mathrm{h},\ 0 < \mathrm{y} < \mathrm{l},\ 0 < \mathrm{t} < \mathrm{T}\}$ і полягають у знаходженні невідомих старших коефіцієнтів рівняння, що залежать лише від часової змінної. Використовуємо також позначення $D = \{(x, y): 0 < x < h, 0 < h < l\}$.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об’єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв’язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У **розділі 1** наведено огляд літератури, що стосується теми дисертації, та дано короткий опис результатів дисертаційної роботи.

У **розділі 2** розглянуто обернені задачі для двовимірних ізотропних рівнянь зі слабким виродженням. У **підрозділі 2.1** розглянуто задачу знаходження пари функцій (a, u), що задовольняють співвідношення

$$u_t = t^{\beta} a(t) \Delta u + f(x, y, t), (x, y, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), (x, y) \in \overline{D}, \tag{2}$$

$$u(0, y, t) = \mu_1(y, t), u(h, y, t) = \mu_2(y, t), y \in [0, l], t \in [0, T], \tag{3}$$

$$u(x, 0, t) = \nu_1(x, t), u(x, l, t) = \nu_2(x, t), x \in [0, h], t \in [0, T], \tag{4}$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t)=\varkappa(t), \tag{5}$$

де $0 < \beta < 1, 0 < y_0 < l$.

Означення 2.1. Розв'язком оберненої задачі (1) – (5) називається пара функцій $(a,u) \in C[0,T] \times \left(C(\overline{Q_T}) \cap C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0,0}([0,h) \times (0,l) \times [0,T])\right)$, $a(t) > 0$ для $t \in [0,T]$,яка задовольняє рівності (1) – (5) поточково.

Припускаємо, що

(A1) $\varphi \in C^2(\overline{D})$; $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,l] \times [0,T])$, існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to+0} t^\beta \mu_{i_{yy}}, i = 1,2$; $\nu_i \in C^{1,0}([0,h] \times [0,T]), i = 1,2$; $\varkappa \in C[0,T]$; $f \in C^{1,0,0}(\overline{Q_T})$;

(A2) $\varphi_x(x,y) > 0, (x,y) \in \overline{D}$; $\mu_{1_t}(y,t) - f(0,y,t) \le 0, \mu_{2_t}(y,t) - f(h,y,t) \ge 0, (y,t) \in [0,l] \times [0,T]$, $\mu_{1_{yy}}(y,t) \ge 0, \mu_{2_{yy}}(y,t) \le 0, (y,t) \in [0,l] \times (0,T], i = 1,2$; $\nu_{1_x}(x,t) \ge 0$, $\nu_{2_x}(x,t) \ge 0, (x,t) \in [0,h] \times [0,T]$; $f_x(x,y,t) \ge 0, (x,y,t) \in \overline{Q_T}$; $\varkappa(t) > 0, t \in [0,T]$;

(A3) $\mu_1(y,0) = \varphi(0,y), \mu_2(y,0) = \varphi(h,y), \nu_1(x,0) = \varphi(x,0), \nu_2(x,0) = \varphi(x,l)$, $\mu_1(0,t) = \nu_1(0,t), \mu_1(l,t) = \nu_2(0,t), \mu_2(0,t) = \nu_1(h,t), \mu_2(l,t) = \nu_2(h,t)$.

Теорема 2.1. Якщо виконуються умови **(A1) – (A3),** то обернена задача (1) – (5) має розв'язок.

Для доведення єдиності розв'язку задачі ми потребуватимемо таких умов:

(A4) $\varphi \in C^{2,2}([0,h] \times [0,l])$; $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,l] \times [0,T])$, існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to+0} t^\beta \mu_{i_{yy}}, i = 1,2$; $\nu_i \in C^{2,1}([0,h] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,h] \times [0,T])$, існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to+0} t^\beta \nu_{i_{yy}}, i = 1,2$; $f \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$;

(A5) $\varkappa(t) \neq 0, t \in [0,T]$.

Теорема 2.2. Якщо виконуються умови **(A4) – (A5),** то обернена задача (1) – (5) не може мати більше одного розв'язку.

Коефіцієнтні обернені задачі для багатовимірних параболічних рівнянь без виродження досліджувалися, зокрема, Р.В. Сагайдаком. Початок дослідженню обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь з виродженням було покладено в працях І.Г. Малишева, М.І. Іванчова та Н.В. Салдіної. У роботі М.І. Іванчова, А. Лоренці (A. Lorenzi), Н.В. Салдіної було розглянуто обернену задачу зі слабким виродженням і сингулярністю для багатовимірного параболічного рівняння, причому умова перевизначення була інтегральною. Було доведено локальне існування та глобальну єдиність розв'язку розглядуваної задачі із використанням методу напівгруп.

Глобальні існування та єдиність розв'язку оберненої задачі (1) – (5) з диференціальною умовою перевизначення встановлено вперше.

У **підрозділі 2.2** досліджено обернену задачу для повного параболічного рівняння, яка полягає у знаходженні пари функцій (a, u), що задовольняють рівності:

$$u_t = t^{\beta} a(t)\Delta u + b_1(x,y,t)u_x + b_2(x,y,t)u_y + c(x,y,t)u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{7}$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u(h,y,t) = \mu_2(y,t), (y,t) \in [0,l] \times [0,T],$$
$$u_y(x,0,t) = \nu_1(x,t), \quad u_y(x,l,t) = \nu_2(x,t), (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{8}$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \varkappa(t), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

де $0 < \beta < 1, 0 < y_0 < l$.

Означення 2.2. Пара функцій $(a,u) \in C[0,T_0] \times \left(C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q_{T_0}})\right), a(t) > 0$ для $t \in [0,T_0]$, яка задовольняє співвідношення (6) – (9) поточково для всіх $t \le T_0$, називається локальним розв'язком оберненої задачі (6) – (9) при $T_0 < T$ та глобальним розв'язком цієї задачі при $T_0 = T$.

Припускаємо, що

(A1) $\varphi \in C^1(\overline{D})$; $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times [0,T])$, $\nu_i \in C^{1,0}([0,h] \times [0,T]), b_i, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$, $i = 1,2$, $\varkappa \in C[0,T]$;

(A2) $\varphi_x(x,y) > 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \varkappa(t) > 0, \quad t \in [0,T]$;

(A3)} $\mu_1(y,0) = \varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0) = \varphi(h,y), y \in [0,l], \nu_1(x,0) = \varphi_y(x,0)$, $\nu_2(x,0) = \varphi_y(x,l), x \in [0,h], \mu_{1y}(0,t) = \nu_1(0,t)$, $\mu_{1y}(l,t) = \nu_2(0,t), \mu_{2y}(0,t) = \nu_1(h,t)$, $\mu_{2y}(l,t) = \nu_2(h,t), t \in [0,T]$.

Теорема 2.3. Якщо виконуються умови **(A1)** – **(A3)**, то існує локальний розв’язок (a,u) оберненої задачі (6) – (9).

Для доведення єдиності розв'язку задачі ми потребуватимемо таких умов:

(A4) $\varphi \in C^2(\overline{D})$, $b_i, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$, $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]) \cap C^{1,0}([0,l] \times [0,T])$, $\nu_i \in C^{2,1}([0,h] \times (0,T]) \cap C^{1,0}([0,h] \times [0,T])$, існують скінченні границі $\lim\limits_{t\to+0} t^{\beta}\, \mu_{iyy}(y,t)$, $\lim\limits_{t\to+0} t^{\beta}\, \nu_{ixx}(x,t), i \in \{1,2\}$;

(A5)} $\varkappa(t) \neq 0,\ t \in [0, T]$.

Теорема 2.4. Якщо виконуються умови **(A4) – (A5)**, то обернена задача (6) – (9) не може мати більше одного глобального розв'язку.

Обернені задачі визначення старшого коефіцієнта багатовимірного параболічного рівняння зі слабким виродженням, молодшими членами рівняння і залежними від часової та просторових змінних коефіцієнтами рівняння, раніше не вивчались.

У **розділі 3** встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле для анізотропного повного параболічного рівняння зі слабким виродженням. Невідомими є два коефіцієнти $a_1(t), a_2(t)$ з різними показниками виродження. Тому виникає необхідність накладання двох додаткових умов перевизначення.

У **підрозділі 3.1** задача полягає у знаходженні трійки функцій (u, a_1, a_2) таких, що задовольняють рівності

$$u_t = t^{\beta_1} a_1(t) u_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t) u_{yy} + b_1(x,y,t) u_x + b_2(x,y,t) u_y + c(x,y,t) u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{10}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), (x,y) \in \overline{D}, \tag{11}$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{12}$$

$$u(x,0,t) = \nu_1(x,t), u(x,l,t) = \nu_2(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{13}$$

$$a_1(t) u_x(0, y_0, t) = \varkappa_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

$$a_2(t) u_y\left(x_{0,} 0, t\right) = \varkappa_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{15}$$

де $0 < \beta_i < 1$, $i = 1,2$, $0 < y_0 < l, 0 < x_0 < h$.

Означення 3.1. Локальним розв'язком оберненої задачі (10) – (15) називається трійка функцій $\big(u(x,y,t), a_1(t), a_2(t)\big)$, що належить до класу $\left(C^{2,1}\big(\overline{D} \times (0,T_0]\big) \cap C^{1,0}\left(\overline{Q}_{T_0}\right)\right) \times C[0,T_0] \times C[0,T_0]$, причому $a_i(t) > 0$, $i = 1,2$, $t \in [0, T_0]$, яка задовольняє (10) – (15) поточково для $t \in [0, T_0]$, де $T_0 \in (0, T)$.

Припускаємо, що

(A1) $\varphi \in C^1(\overline{D})$; $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,l] \times [0,T])$; $\nu_i \in C^{2,1}([0,h] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,h] \times [0,T])$; $\varkappa_i \in C[0,T]$, $b_i, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$, $i = 1,2$;

(A2) $\varphi_x(x,y) > 0$, $\varphi_y(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{D}$; $\mu_{1_y}(y,t) \geq 0$, $\mu_{2_y}(y,t) \geq 0$, $(y,t) \in [0,l] \times [0,T]$; $\left|t^{\beta_2}\mu_{kyy}(y,t)\right| \leq A_k < \infty$, $k = 1,2$, $(y,t) \in [0,l] \times [0,T]$; $\nu_{1_x}(x,t) \geq 0$, $\nu_{2_x}(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in [0,h] \times [0,T]$; $\left|t^{\beta_1}\nu_{kxx}(x,t)\right| \leq B_k < \infty$, $k = 1,2$, $(x,t) \in [0,h] \times [0,T]$; $\varkappa_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2$;

(A3) $\mu_1(y,0) = \varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0) = \varphi(h,y)$, $\nu_1(x,0) = \varphi(x,0)$, $\nu_2(x,0) = \varphi(x,l)$, $\mu_1(0,t) = \nu_1(0,t)$, $\mu_1(l,t) = \nu_2(0,t)$, $\mu_2(0,t) = \nu_1(h,t)$, $\mu_2(l,t) = \nu_2(h,t)$.

Теорема 3.1. Нехай виконуються умови **(A1) – (A3)**. Тоді існує локальний розв'язок $(u(x,y,t), a_1(t), a_2(t))$ оберненої задачі (10) – (15).

Коефіцієнтні обернені задачі для анізотропних багатовимірних параболічних рівнянь з різними показниками виродження при різних просторових компонентах раніше не вивчались.

У **підрозділі 3.2** встановлено умови існування та єдиності глобального розв’язку оберненої задачі (10) – (15).

Означення 3.2. Глобальним розв'язком оберненої задачі (10) – (15) називається трійка функцій $(u(x,y,t), a_1(t), a_2(t))$, що належить до класу $\left(C^{2,1}(\overline{D} \times (0,T]) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})\right) \times C[0,T] \times C[0,T]$, де $a_i(t) > 0$, $i = 1,2$, $t \in [0,T]$.

Припускаємо, що виконуються наступні додаткові умови:

(A4) $\varphi(x,y) \geq 0$, $\varphi_x(x,y) > 0$, $\varphi_y(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{D}$; $\mu_{1_t}(y,t) - b_2(0,y,t)\mu_{1_y}(y,t) - c(0,y,t)\mu_1(y,t) - f(0,y,t) < 0$, $\mu_{2_t}(y,t) - b_2(h,y,t)\mu_{2_y}(y,t) - c(h,y,t)\mu_2(y,t) - f(h,y,t) > 0$, $\mu_i(y,t) \geq 0$, $\mu_{i_y}(y,t) > 0$, $i = 1,2$, $\mu_{1_{yy}}(y,t) \geq 0$, $\mu_{2_{yy}}(y,t) \leq 0$, $b_1(0,y,t) < 0$, $b_1(h,y,t) > 0$, $(y,t) \in [0,l] \times (0,T]$; $\nu_{1_t}(x,t) - b_1(x,0,t)\nu_{1_x}(x,t) - c(x,0,t)\nu_1(x,t) - f(x,0,t) < 0$, $\nu_{2_t}(x,t) - b_1(x,l,t)\nu_{2_x}(x,t) - c(x,l,t)\nu_2(x,t) - f(x,l,t) > 0$, $\nu_i(x,t) \geq 0$, $\nu_{i_x}(x,t) > 0$, $i = 1,2$, $\nu_{1_{xx}}(x,t) \geq 0$, $\nu_{2_{xx}}(x,t) \leq 0$, $b_2(x,0,t) < 0$, $b_2(x,l,t) > 0$, $(x,t) \in [0,h] \times [0,T]$; $b_{1_y}(x,y,t) \geq 0$, $b_{2_x}(x,y,t) \geq 0$, $f(x,y,t) \geq 0$, $f_x(x,y,t) \geq 0$, $f_y(x,y,t) \geq 0$, $c_x(x,y,t) \geq 0$, $c_y(x,y,t) \geq 0$, $(x,y,t) \in \overline{Q_T}$.

Теорема 3.2. Нехай виконуються умови **(A1) – (A4)**. Тоді існує глобальний розв'язок (u, a_1, a_2) оберненої задачі (10) – (15).

Припускаємо, що виконуються умови:

(A5) $\varphi \in C^2(\overline{D})$, $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,l] \times [0,T]), \nu_i \in C^{2,1}([0,h] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,h] \times [0,T]); \left|t^{\beta_2}\mu_{kyy}(y,t)\right| \leq A_k < \infty, k = 1,2, (y,t) \in [0,l] \times [0,T]$; $\left|t^{\beta_1}\nu_{kxx}(y,t)\right| \leq B_k < \infty, k = 1,2, (x,t) \in [0,h] \times [0,T]; b_i, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $i = 1,2$;

(A6) $\varkappa_i(t) \neq 0$, $i = 1,2, \quad t \in [0,T]$.

Теорема 3.3. Якщо виконуються умови **(A5) – (A6)**, то обернена задача (10) – (15) не може мати більше одного глобального розв'язку.

У **розділі 4** розглянуто обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь зі сильним виродженням. У **підрозділі 4.1** розглянуто обернену задачу знаходження пари функцій (a, u), що задовольняють співвідношення

$$u_t = t^{\beta}a(t)\Delta u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{16}$$

початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y,0), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{17}$$

крайові умови

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t),\, u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{18}$$

$$u_y(x,0,t) = \nu_1(x,t),\, u_y(x,l,t) = \nu_2(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{19}$$

та умову перевизначення

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \kappa(t), \quad t \in (0,T], \tag{20}$$

де $\beta \geq 1, 0 < y_0 < l$.

Означення 4.1. Розв'язком оберненої задачі (16) – (20) називається пара функцій $(a, u) \in C[0,T] \times \left(C^{2,2,1}(Q_T) \cap C^{0,1,1}(\overline{Q}_T)\right)$, де $a(t) > 0$ при $t \in [0,T]$, яка задовольняє (16) – (20) поточково.

Припускаємо, що

(A1) $\beta \geq 1, \varphi \in C^2(\overline{D}), \mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,l] \times [0,T]), \nu_i \in C^{1,0}([0,h] \times (0,T]) \cap$ $C([0,h] \times [0,T]), i = 1,2; f \in C^{2,2,0}(\overline{Q}_T), \kappa(t) = \kappa_0(t) t^{\frac{1-\beta}{2}}, \kappa_0 \in C[0,T];$

(A2) $\varphi_x(x,y) \geq 0, (x,y) \in \overline{D}; \mu_{1_t}(y,t) - f(0,y,t) < 0, \mu_{2_t}(y,t) - f(h,y,t) \geq 0,$ $\mu_{1_{yy}}(y,t) \geq 0, \mu_{2_{yy}}(y,t) \leq 0, (y,t) \in [0,l] \times (0,T]; \nu_{1_x}(x,t) \leq 0, \nu_{2_x}(x,t) \geq 0, (x,t) \in [0,h] \times [0,T];$ $f_x(x,y,t) \geq 0, (x,y,t) \in \overline{Q_T}; \kappa_0(t) > 0, t \in [0,T];$

(A3) $\mu_1(y,0) = \varphi(0,y), \mu_2(y,0) = \varphi(h,y), y \in [0,l]; \nu_1(x,0) = \varphi_y(x,0),$ $\nu_2(x,0) = \varphi_y(x,l), x \in [0,h]; \mu_{1y}(0,t) = \nu_1(0,t), \mu_{1y}(l,t) = \nu_2(0,t), \mu_{2y}(0,t) = \nu_1(h,t),$ $\mu_{2y}(l,t) = \nu_2(h,t), t \in [0,T].$

Теорема 4.1. Якщо виконуються припущення **(A1) – (A3)**, то існує єдиний розв'язок (a,u) оберненої задачі (16) – (20).

Обернені задачі для одновимірних параболічних рівнянь з сильним виродженням досліджувалися у працях М.І. Іванчова та Н.В. Салдіної. Обернені задачі для багатовимірних параболічних рівнянь з сильним виродженням раніше не вивчались.

У **підрозділі 4.2** розглянуто задачу знаходження трійки функцій (a_1, a_2, u), що задовольняють рівності

$$u_t = a_1(t) t^{\beta_1} u_{xx} + a_2(t) t^{\beta_2} u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{21}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y,0), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{22}$$

$$u(0,y,t) = \mu_{11}(y,t),\ u(h,y,t) = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{23}$$

$$u_y(x,0,t) = \mu_{21}(x,t),\ u_y(x,l,t) = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{24}$$

$$\iint_D u(x,y,t)dx\ dy = \mu_{31}(t), \quad \iint_D x u(x,y,t) dx\ dy = \mu_{32}(t), \quad t \in (0,T], \tag{25}$$

де $\beta_i \geq 1,\ i = 1,2$.

Означення 4.2. Трійка функцій $(a_1, a_2, u) \in \left(C([0,T_0])\right)^2 \times C^{2,2,1}(D \times (0,T_0)) \cap C^{1,0,0}(\overline{D} \times (0,T_0]), a_i(t) > 0, t \in [0,T_0], i \in \{1,2\}$, яка задовольняє співвідношення (21) – (25) поточково для всіх $t \leq T_0$, називається локальним розв'язком оберненої задачі (21) – (25), якщо $T_0 \in (0,T)$, і глобальним розв'язком цієї задачі, якщо $T_0 = T$.

Коефіцієнтні обернені задачі для анізотропних багатовимірних параболічних рівнянь з різними показниками сильного виродження при різних просторових компонентах раніше не вивчались.

Знайдено умови локального існування і глобальної єдиності розв'язку даної оберненої задачі з інтегральними умовами перевизначення. Метод доведення вимагає накладання зв'язку між показниками виродження для різних просторових компонент у старших коефіцієнтах рівняння, тому в теоремах існування та єдиності розв'язку на вхідні дані задачі, зокрема, накладається додаткова умова $\beta_2 = \frac{\beta_1+1}{2}$.

Припускаємо, що виконуються такі умови на гладкість вхідних даних:

(А1) $\varphi \in C^{1,0}(\overline{D}), \mu_{1i} \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]), \mu_{2i} \in C^{1,0}([0,h] \times (0,T]), f \in C^{1,0,0}(\overline{Q_T}),$
$\mu_{3i} \in C^1([0,T]), i \in \{1,2\},$

а також деякі додаткові умови. При їх виконанні та при виконанні умови $\beta_2 = \frac{\beta_1+1}{2}$ у **теоремі 4.2** доведено існування локального розв'язку оберненої задачі (21) – (25).

Для доведення глобальної єдиності розв'язку потребуватимемо таку додаткову умову:

(А5) $\int_0^h (h-x)\big(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t)\big)dx \int_0^l \Big(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau)\Big)\, d\eta - \int_0^h x\big(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t)\big)dx \int_0^l \Big(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau)\Big)\, d\eta > 0, \mu_{31}'(t) - \iint_D f(x,y,t)dx\ dy \equiv \varkappa_1(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}}, \mu_{32}'(t) - \iint_D xf(x,y,t)dx\ dy \equiv \varkappa_2(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}},$

де $\varkappa_i(t) > 0, t \in [0,T], i \in \{1,2\}.$

При накладанні, зокрема, умови $\beta_2 = \frac{\beta_1+1}{2}$, у **теоремі 4.3** доведено єдиність глобального розв'язку оберненої задачі (21) – (25).

ВИСНОВКИ

У дисертації досліджено обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням і вперше отримано такі результати:

- встановлено умови існування та єдиності глобального розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле і слабким виродженням;
- знайдено умови локального існування та глобальної єдиності розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана для повного параболічного рівняння зі слабким виродженням;
- встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле для анізотропного повного параболічного рівняння зі слабким виродженням;

- доведено існування і єдиність глобального розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана та диференціальними умовами перевизначення для ізотропного параболічного рівняння зі сильним виродженням;
- знайдено умови локального існування і глобальної єдиності розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана та інтегральними умовами перевизначення для анізотропного параболічного рівняння зі сильним виродженням.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Іванчов М.І., Власов В.А. Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2009; 70: 91-102.
2. Власов В.А. Обернена задача для двовимірного анізотропного параболічного рівняння зі слабким виродженням. Буковинський математичний журнал. 2017; 5 (1-2): 37-48.
3. Іванчов М., Власов В. Єдиність розв'язку оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з сильним виродженням. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2018; 85: 120-131.
4. Ivanchov M., Vlasov V. Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation. Electronic Journal of Differential Equations. 2018; 77: 1-17. Available from: ejde.math.txstate.edu
5. Власов В.А., Іванчов М.І. Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі сильним виродженням. Випадок інтегральних умов перевизначення. Буковинський математичний журнал. 2019; 7 (1): 32-47.
6. Власов В.А. Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння зі слабким виродженням. Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.- мат. науки. 2017; 871: 33–39.
7. Власов В. А. Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння з виродженням. XIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука; 13-15 травня, 2010; Київ, Україна. Київ; 2010. С. 87.
8. Власов В. А. An inverse problem for a weakly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. Nonlinear Partial Differential Equations; September 6-11, 2010; Dnipro, Ukraine. Dnipro; 2010. P. 55-56.
9. Vlasov V. An inverse problem for a strongly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька; 19-23 вересня, 2011; Дрогобич, Україна. Дрогобич; 2011. С. 39.
10. Власов В. А. Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння з сильним виродженням. XIV Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука; 19-21 квітня, 2012; Київ, Україна. Київ; 2012. С. 106.

11. Vlasov V. An inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation in a rectangular domain. 8th International Conference on Inverse Problems in Engineering; May 12-15, 2014; Krakow, Poland. Krakow; 2014. С. 177-178.
12. Ivanchov M., Vlasov V. Inverse problem for a 2D strongly degenerate heat equation. Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях; 17-18 вересня, 2018; Чернівці, Україна. Чернівці; 2018. С. 26.
13. Ivanchov M., Vlasov V. Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation. Book of abstracts of CAIM-2018. – Chisinau, 2018. – P. 18.
14. Ivanchov M., Vlasov V. Inverse problem for strongly degenerate heat equation. Abstracts of 24th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis. – Tallinn, 2019. – P. 29.

АНОТАЦІЯ

Власов В.А. Коефіцієнтні обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 – “Диференціальні рівняння”. – Львівський національний університет імені Івана Франка. – Львів, 2020.

У дисертаційній роботі розглянуто коефіцієнтні обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням. Усі задачі полягають у знаходженні невідомих старших коефіцієнтів рівняння, що залежать лише від часу, і вироджуються у початковий момент часу за степеневим законом. Досліджено ізотропні та анізотропні типи рівнянь, де під анізотропією мається на увазі наявність різних показників виродження при різних просторових компонентах у старшому коефіцієнті рівняння. Розглянуто випадки слабкого та сильного виродження.

Встановлено умови існування та єдиності глобального розв’язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле і слабким виродженням.

Знайдено умови локального існування та глобальної єдиності розв’язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана для повного параболічного рівняння зі слабким виродженням.

Встановлено умови однозначної розв’язності оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле для анізотропного повного параболічного рівняння зі слабким виродженням.

Доведено існування і єдиність глобального розв’язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана для ізотропного параболічного рівняння зі сильним виродженням.

Знайдено умови локального існування і глобальної єдиності розв’язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана та інтегральними умовами перевизначення для анізотропного параболічного рівняння зі сильним виродженням.

Ключові слова: параболічне рівняння, обернена задача, рівняння з виродженням, функція Гріна, інтегральні рівняння Вольтерра, цілком неперервний оператор, теорема Шаудера.

АННОТАЦИЯ

Власов В.А. Коэффициентные обратные задачи для двумерных вырожденных параболических уравнений. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.02 – “дифференциальные уравнения”. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко. – Львов, 2020.

В диссертационной работе рассмотрены коэффициентные обратные задачи для двумерных вырожденных параболических уравнений. Во всех задачах неизвестными являются старшие коэффициенты уравнений, зависящие только от временной переменной, которые вырождаются в начальный момент времени за степенным законом. Изучены изотропные и анизотропные типы уравнений, где под анизотропией имеется в виду наличие разных показателей вырождения при разных пространственных компонентах в старшем коэффициенте уравнения. Рассмотрены случаи слабого и сильного вырождения.

Установлены условия существования и единственности глобального решения обратной задачи с краевыми условиями Дирихле и слабым вырождением. Найдены условия локального существования и глобальной единственности решения обратной задачи с краевыми условиями Дирихле-Неймана для полного параболического уравнения со слабым вырождением.

Установлены условия однозначной разрешимости обратной задачи с краевыми условиями Дирихле для анизотропного полного параболического уравнения со слабым вырождением.

Доказано существование и единственность глобального решения обратной задачи с краевыми условиями Дирихле-Неймана для изотропного параболического уравнения с сильным вырождением.

Найдены условия локального существования и глобальной единственности решения обратной задачи с краевыми условиями Дирихле-Неймана и интегральними условиями переопределенности для анизотропного параболического уравнения с сильным вырождением.

Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, вырожденное уравнение, функция Грина, интегральные уравнения Вольтерра, вполне непрерывный оператор, теорема Шаудера.

ABSTRACT

Vlasov V.A. Coefficient inverse problems for two-dimensional degenerate parabolic equations. – Manuscript.

The thesis is presented for the degree of the Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 "Differential equations", Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2020.

The thesis deals with coefficient inverse problems for two-dimensional degenerate parabolic equations. In all problems unknown major coefficients of the equation are time-dependent and behave as t^{β} in the initial time t, where β is the degree of degeneration.

Both isotropic and anisotropic equation types are studied, where anisotropy means a presence of varying degrees of degeneration at different spatial components in the major coefficient of the equation. Cases of weak ($0 < \beta < 1$) and strong ($\beta \geq 1$) degeneration are considered.

Methodology used for existence and uniqueness proofs presents an evolution of methods that have been used for one-dimensional degenerate equations. Existence of solutions is proven via a reduction of the inverse problem to an integral equation or a system of equations. An explicit expression for the solution of the relevant direct problem is used, which is derived using the Green function for the corresponding parabolic equation without minor coefficients. Then Schauder fixed-point theorem is applied in order to prove the existence of the solution.

Therefore, the inverse problem is reduced to an operator equation or a system of equations, and it is then proven that the aforementioned operator satisfies conditions of the Schauder fixed- point theorem. A solution of the inverse problem can be either global or local (such that exists only on a reduced time interval). Uniqueness of solutions is established using properties of Volterra integral equations of the second kind.

An inverse problem for a weakly degenerate two-dimensional parabolic equation with Dirichlet boundary conditions and overdetermination condition in form of heat flux is considered. Conditions for global existence and uniqueness of a solution to such problem are established.

A weakly degenerate parabolic equation with minor coefficients is studied. An inverse problem for such equation with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions is considered. Local existence and global uniqueness of a solution are proven.

An inverse problem for a an anisotropic weakly degenerate parabolic equation with minor coefficients is considered. In this case two major time-dependent coefficients are unknown. Conditions for the solvability of such inverse problem are established in case of Dirichlet boundary conditions and when heat flux is used in the overdetermination condition. Local existence of a solution is proven, and by imposing additional conditions existence of a global solution is established. Additionally, uniqueness of a global solution is proven.

Existence and uniqueness of a global solution for an inverse problem with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions for a strongly degenerate isotropic parabolic equation is proven. In this problem heat flux is used for the overdetermination condition.

Conditions for local existence and global uniqueness of a solution to an inverse problem with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions and integral overdetermination conditions for a strongly degenerate anisotropic parabolic equation are established. In this problem two major time-dependent coefficients are unknown. Proof rests on the assumption that there exists a relation between the degrees of degeneration at different spatial components of the major coefficient.

In case of strong degeneration, uniqueness is initially proven on a narrowed time interval, and then is expanded to include the complete interval.

The results obtained in the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the theory of partial differential equations and inverse problems. They can be applied to practical problems as diverse as physics, economics, population theory, biology etc.

Keywords: parabolic equation, inverse problem, degenerate equation, Green function, Volterra integral equations, completely continuous operator, Schauder fixed-point theorem.