Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Власов Віталій Андрійович

УДК 517.95

ДИСЕРТАЦІЯ

КОЕФІЦІЄНТНІ ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

01.01.02 – диференціальні рівняння
01 – фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ________________________________

Наукові керівники:
Іванчов Микола Іванович
доктор фізико-математичних наук,
професор
Бугрій Олег Миколайович
доктор фізико-математичних наук,
доцент

Львів – 2020

АНОТАЦІЯ

Власов В.А. *Коефіцієнтні обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням.* – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – "Диференціальні рівняння". – Львівський національний університет імені Івана Франка. – Львів, 2020.

У дисертаційній роботі розглянуто коефіцієнтні обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням. Досліджено ізотропні та анізотропні типи рівнянь, де під анізотропією мається на увазі наявність різних показників виродження при різних просторових компонентах у старших коефіцієнтах рівняння. Розглянуто випадки слабкого та сильного виродження.

Усі задачі розглядаються у області $Q_T := \big\{(x, y, t) \ : \ \ 0 < x < h, \ \ 0 < y < l, \ \ 0 < t < T\big\}$ і полягають у знаходженні невідомих старших коефіцієнтів рівняння, що залежать лише від часу.

Методика доведення існування та єдиності розв'язків у розділах дисертаційної роботи є розвитком методів, що застосовуються в одновимірному випадку для рівнянь з виродженням.

Існування розв'язку доводиться за допомогою зведення оберненої задачі до інтегрального рівняння чи системи рівнянь. Для цього використовується явний вигляд розв'язку прямої задачі, записаний з допомогою функції Гріна для відповідного рівняння без молодших членів. Далі із застосуванням теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора доводиться існування розв'язку. Отже, обернена задача зводиться до рівняння або системи рівнянь

$$a(t) = \mathcal{P}a(t),$$

і доводиться, що оператор $\mathcal{P}$ задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку.

Розв'язок задачі може бути як глобальним, так і локальним (таким, що існує лише на звуженому часовому проміжку).

Єдиність розв'язку встановлюється, зокрема, із використанням властивостей однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури, що стосується теми дисертації, та дано короткий опис результатів дисертаційної роботи.

У підрозділі 1.1 розглянуто праці та публікації, які стосуються обернених задач для параболічних рівнянь. Зокрема, наведено приклади досліджень прямих задач для параболічних рівнянь та рівнянь з виродженням, обернених задач для параболічних рівнянь (одно- та багатовимірні випадки), рівнянь з виродженням, та задач у областях з вільною межею. Крім того, розглянуто праці, що містять чисельні розв'язки деяких з вищезгаданих типів задач.

У підрозділі 1.2 наведено короткий опис результатів дисертаційної роботи.

У розділі 2 розглянуто двовимірні ізотропні параболічні рівняння зі слабким виродженням. Обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням такого вигляду раніше не вивчались.

У підрозділі 2.1 розглянуто задачу із крайовими умовами Діріхле для рівняння вигляду

$$u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

де $0 < \beta < 1$ – показник виродження, Δ – оператор Лапласа. Використано умову перевизначення у вигляді теплового потоку

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \varkappa(t), \quad t \in [0,T],$$

де $0 < y_0 < l$ – деяка фіксована точка. Встановлено умови існування та єдиності глобального класичного розв'язку такої задачі.

У підрозділі 2.2 розглянуто задачу із крайовими умовами Діріхле-Неймана для повного параболічного рівняння

$$u_t = t^{\beta} a(t) \Delta u + b_1(x,y,t) u_x + b_2(x,y,t) u_y +$$

$$+ c(x,y,t) u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

де $0 < \beta < 1$. Також використано умову перевизначення у вигляді теплового потоку

$$a(t) u_x(0, y_0, t) = \varkappa(t), \quad t \in [0,T].$$

Доведено локальне існування та глобальну єдиність розв'язку цієї задачі.

У розділі 3 досліджено двовимірні анізотропні параболічні рівняння зі слабким виродженням. Обернені задачі для таких рівнянь розглянуто вперше. Досліджується обернена задача з крайовими умовами Діріхле та різними показниками виродження ($0 < \beta_i < 1,\ i = 1,2$) для рівняння вигляду

$$u_t = t^{\beta_1} a_1(t) u_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t) u_{yy} + b_1(x,y,t) u_x + b_2(x,y,t) u_y + c(x,y,t) u +$$

$$+ f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

де невідомими є два коефіцієнти $a_1(t), a_2(t)$. Відповідно, виникає необхідність накладання двох додаткових умов перевизначення, в якості яких обрано умови у вигляді теплового потоку

$$a_1(t) u_x(0, y_0, t) = \varkappa_1(t), \quad a_2(t) u_y(x_0, 0, t) = \varkappa_2(t), \quad t \in [0,T],$$

де $0 < x_0 < h$, $0 < y_0 < l$.

Умови локального існування класичного розв'язку цієї задачі встановлено в підрозділі 3.1. У підрозділі 3.2 за допомогою накладання додаткових умов на вхідні дані задачі встановлено глобальне існування розв'язку. Із допомогою теорії інтегральних рівнянь Вольтерра встановлено глобальну єдиність розв'язку задачі.

У розділі 4 розглянуто рівняння зі сильним виродженням. Обернені задачі для двовимірних рівнянь зі сильним виродженням такого вигляду раніше не вивчались.

У підрозділі 4.1 досліджено задачу із крайовими умовами Діріхле-Неймана для ізотропного параболічного рівняння зі сильним виродженням

$$u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

де $\beta \geq 1$. Використано умову перевизначення у вигляді теплового потоку

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \kappa(t), \quad t \in (0,T].$$

Доведено теорему про існування та єдиність глобального розв'язку цієї задачі. Єдиність доводиться спершу на звуженому часовому проміжку, а потім розширюється на весь інтервал $[0,T]$.

У підрозділі 4.2 досліджено задачу із умовами Діріхле-Неймана для анізотропного параболічного рівняння вигляду

$$u_t = a_1(t)t^{\beta_1}u_{xx} + a_2(t)t^{\beta_2}u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

де $\beta_i \geq 1,\ i = 1,2$. Обрано умови перевизначення інтегрального типу

$$\iint\limits_D u(x,y,t)dx\,dy = \mu_{31}(t), \qquad \iint\limits_D xu(x,y,t)dx\,dy = \mu_{32}(t), \quad t \in (0,T].$$

Доведено локальне існування та глобальну єдиність розв'язку цієї задачі. У цьому випадку метод доведення вимагає існування зв'язку між показниками виродження для різних просторових компонент у старшому коефіцієнті рівняння, тому в теоремах існування та єдиності на вхідні дані задачі накладається умова $\beta_2 = \frac{\beta_1+1}{2}$.

Єдиність доводиться спершу на звуженому часовому проміжку, а потім розширюється на весь інтервал $[0,T]$.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними і обернених задач. Їх можна застосувати при розв'язуванні прикладних задач у фізиці, економетрії, теорії популяцій, біології тощо.

Ключові слова: параболічне рівняння, обернена задача, рівняння з виродженням, функція Гріна, інтегральні рівняння Вольтерра, цілком неперервний оператор, теорема Шаудера.

Список публікацій здобувача по тематиці дисертації

[1] *Іванчов М.І., Власов В.А.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2009; 70: 91-102.

[2] *Власов В.А.* Обернена задача для двовимірного анізотропного параболічного рівняння зі слабким виродженням. Буковинський матем. журн. 2017; 5 (1-2): 37-48.

[3] *Іванчов М., Власов В.* Єдиність розв'язку оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з сильним виродженням. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018; 85: 120-131.

[4] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation. Electronic J. Diff. Equat. 2018; 77: 1-17. Available from: ejde.math.txstate.edu

[5] *Власов В.А., Іванчов М.І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі сильним виродженням. Випадок інтегральних умов перевизначення. Буковинський матем. журн. 2019; 7 (1): 32-47.

[6] *Власов В.А.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння зі слабким виродженням. Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. 2017; 871: 33–39.

[7] *Власов В. А.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння з виродженням. XIII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука; 13-15 травня, 2010; Київ, Україна. Київ; 2010. С. 87.

[8] *Власов В. А.* An inverse problem for a weakly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. International Conf. "Nonlinear Partial Differential Equations"; September 6-11, 2010; Dnipro, Ukraine. Book of abstracts. – Dnipro, 2010. – P. 55-56.

[9] *Vlasov V.* An inverse problem for a strongly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. Міжнародна математ. конф. ім. В.Я. Скоробогатька; 19-23 вересня, 2011; Дрогобич, Україна. Дрогобич; 2011. С. 39.

[10] *Власов В. А.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння з сильним виродженням. XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука; 19-21 квітня, 2012; Київ, Україна. Київ; 2012. С. 106.

[11] *Vlasov V.* An inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation in a rectangular domain. 8th International Conference on Inverse Problems in Engineering; May 12-15, 2014; Krakow, Poland. Krakow; 2014. C. 177-178.

[12] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a 2D strongly degenerate heat equation. Міжнародна наукова конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"; 17-18 вересня, 2018; Чернівці, Україна. Матеріали конф. – Чернівці, 2018. – С. 26.

[13] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation. Book of abstracts of CAIM-2018. – Chisinau, 2018. – P. 18.

[14] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for strongly degenerate heat equation. Abstracts of 24th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis. – Tallinn, 2019. – P. 29.

ABSTRACT

Vlasov V.A. *Coefficient inverse problems for two-dimensional degenerate parabolic equations*, – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis is presented for the degree of the Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 “Differential equations”, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2020.

The thesis deals with coefficient inverse problems for two-dimensional degenerate parabolic equations. Both isotropic and anisotropic equation types are studied, where anisotropy means a presence of varying degrees of degeneration at different spatial components in the major coefficients of the equation. Cases of weak and strong degeneration are considered.

All problems are considered in the domain $Q_T := \{(x, y, t) \ : \ 0 < x < h, \ 0 < y < l, \ 0 < t < T\}$ and involve finding unknown major coefficients that are time-dependent.

Methodology used for existence and uniqueness proofs presents an evolution of methods that have been used for one-dimensional degenerate equations.

Existence of a solution is proven via a reduction of the inverse problem to an integral equation or a system of equations. An explicit expression for the solution of the relevant direct problem is used, which is derived using the Green function for the corresponding parabolic equation without minor coefficients. Then Schauder fixed-point theorem is applied in order to prove the existence of the solution. Therefore, the inverse problem is reduced to the equation or a system of equations

$$a(t) = \mathcal{P}a(t),$$

and it is then proven that operator $\mathcal{P}$ satisfies conditions of the Schauder fixed-point theorem.

A solution of the inverse problem can be either global or local (such that exists only on a reduced time interval).

Uniqueness of the solution is established using properties of Volterra integral equations of the second kind.

The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusions and references.

The introduction demonstrates the relevance of the research topic, and establishes the goal, problems, subject, object and research methods of the study. Scientific novelty, practical significance of the results, a relation to scientific topics and applicant's contribution are indicated. The introduction also lists scientific papers and conferences that include main results of the thesis.

Chapter 1 provides a literature review concerning the topic of the thesis, and includes a short overview of results obtained.

Section 1.1 lists papers and publications dealing with inverse problems for parabolic equations. These include existing research in direct problems for parabolic equations (non-degenerate and degenerate ones), inverse problems for one- and multi-dimensional cases, degenerate equations, and free-boundary domains. Additionally, some papers providing numeric solutions to some of the aforementioned problems are listed.

Section 1.2 provides an overview of results obtained in the thesis.

Chapter 2 deals with two-dimensional isotropic weakly degenerate parabolic equations. Inverse problems for such equations have never been considered before.

In Section 2.1 a problem with Dirichlet boundary conditions is studied for the equation

$$u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T,$$

where $0 < \beta < 1$ is the degree of degeneration, Δ is the Laplace operator. Here heat flux is used in the overdetermination condition:

$$a(t)u_x(0, y_0, t) = \varkappa(t), \quad t \in [0, T],$$

where $0 < y_0 < l$ is some fixed point. Conditions for the existence and uniqueness of a global classical solution are established.

In Section 2.2 a problem with Dirichlet-Neumann conditions is considered for the following equation

$$u_t = t^\beta a(t)\Delta u + b_1(x, y, t)u_x + b_2(x, y, t)u_y +$$

$$+ c(x, y, t)u + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T,$$

where $0 < \beta < 1$. Here we also use heat flux for the overdetermination condition:

$$a(t)u_x(0, y_0, t) = \varkappa(t), \quad t \in [0, T].$$

Local existence and global uniqueness of a solution is proven.

Chapter 3 is devoted to two-dimensional anisotropic weakly degenerate parabolic equations. Such problems have never been investigated before. An inverse problem with Dirichlet boundary conditions and varying degrees of degeneration ($0 < \beta_i < 1$, $i = 1, 2$) is considered for the equation

$$u_t = t^{\beta_1} a_1(t)u_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t)u_{yy} + b_1(x, y, t)u_x + b_2(x, y, t)u_y + c(x, y, t)u +$$

$$+ f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T, \quad (x, y, t) \in Q_T,$$

where two major coefficients $a_1(t), a_2(t)$ are unknown. Hence two additional overdetermination conditions are required, and heat flux at two distinct points on the domain boundary is used:

$$a_1(t)u_x(0, y_0, t) = \varkappa_1(t), \quad a_2(t)u_y(x_0, 0, t) = \varkappa_2(t), \quad t \in [0, T],$$

where $0 < x_0 < h$, $0 < y_0 < l$.

In Section 3.1 local solvability of such problems is investigated, and the theorem of existence of a classical solution is proven. In Section 3.2 global existence of the solution is established by specifying additional requirements on the input data. Theory of Volterra integral equation is used for the proof of global uniqueness of the solution.

In Chapter 4 two-dimensional strongly degenerate parabolic equations are considered. Inverse problems for such equations have never been considered before.

In Section 4.1 an inverse problem is considered for a strongly degenerate isotropic parabolic equation of the form

$$u_t = t^{\beta} a(t)\Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T,$$

where $\beta \geq 1$. Here mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions are chosen, and heat flux is used for the overdetermination condition:

$$a(t)u_x(0, y_0, t) = \kappa(t), \quad t \in (0, T].$$

A theorem establishing global existence and uniqueness of the solution is proven. Uniqueness is initially proven on a narrowed time interval, and later is expanded to $[0,T]$.

In Section 4.2 a following anisotropic strongly degenerate parabolic equation is considered:

$$u_t = a_1(t)t^{\beta_1}u_{xx} + a_2(t)t^{\beta_2}u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

where $\beta_i \geq 1,\, i = 1,2$. Dirichlet-Neumann boundary conditions are used. Overdetermination conditions are of integral type:

$$\iint\limits_D u(x,y,t)dx\,dy = \mu_{31}(t), \quad \iint\limits_D xu(x,y,t)dx\,dy = \mu_{32}(t), \quad t \in (0,T].$$

Local existence and global uniqueness of the solution is established. In this case proof rests on the assumption that there exists a relation between the degrees of degeneration at different spatial components of the major coefficient, and therefore both existence and uniqueness theorems use the condition $\beta_2 = \frac{\beta_1+1}{2}$.

Uniqueness is initially proven on a narrowed time interval, and later is expanded to $[0,T]$.

The practical significance of the results. The results of the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the theory of partial differential equations and inverse problems.

They can be applied to practical problems as diverse as physics, economics, population theory, biology etc.

Keywords: parabolic equation, inverse problem, degenerate equation, Green function, Volterra integral equations, completely continuous operator, Schauder fixed-point theorem.

Publications list of the applicant

[1] *Ivanchov M.I., Vlasov V.A.* An inverse problem for a weakly degenerate two-dimensional heat equation. Visn. Lviv Univ. (Herald of Lviv University). Ser. Mech.-Math. 2009; 70: 91-102.

[2] *Vlasov V.A.* An inverse problem for a weakly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. Bukovinian Mathematical Journal. 2017; 5 (1-2): 37-48.

[3] *Ivanchov M.I., Vlasov V.A.* Uniqueness of solution of an inverse problem for the two-dimensional strongly degenerate heat equation. Visn. Lviv Univ. (Herald of Lviv University). Ser. Mech.-Math. 2018; 85: 120-131.

[4] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation. Electronic Journal of Differential Equations. 2018; 77: 1-17. Available from: ejde.math.txstate.edu

[5] *Vlasov V.A., Ivanchov M.I.* Inverse problem for a 2D strongly degenerate heat equation with integral overdetermination conditions. Bukovinian Mathematical Journal. 2019; 7 (1): 32-47.

[6] *Vlasov V.A.* Inverse problem for a weakly degenerate two-dimensional parabolic equation. Visn. Lviv Polytechnic (Herald of Lviv Polytechnic). Ser. Phys.-Math. 2017; 871: 33–39.

[7] *Власов В. А.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння з виродженням. XIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука; 13-15 травня, 2010; Київ, Україна. Київ; 2010. С. 87.

[8] *Власов В. А.* An inverse problem for a weakly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. Nonlinear Partial Differential Equations; September 6-11, 2010; Dnipro, Ukraine. Dnipro; 2010. P. 55-56.

[9] *Vlasov V.* An inverse problem for a strongly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька; 19-23 вересня, 2011; Дрогобич, Україна. Дрогобич; 2011. С. 39.

[10] *Власов В. А.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння з сильним виродженням. XIV Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука; 19-21 квітня, 2012; Київ, Україна. Київ; 2012. С. 106.

[11] *Vlasov V.* An inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation in a rectangular domain. 8th International Conference on Inverse Problems in Engineering; May 12-15, 2014; Krakow, Poland. Krakow; 2014. C. 177-178.

[12] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a 2D strongly degenerate heat equation. Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях; 17-18 вересня, 2018; Чернівці, Україна. Чернівці; 2018. С. 26.

[13] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation. Book of abstracts of CAIM-2018. – Chisinau, 2018. – P. 18.

[14] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for strongly degenerate heat equation. Abstracts of 24th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis. – Tallinn, 2019. – P. 29.

Присвячується

моєму вчителю

Миколі Івановичу Іванчову

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню питань існування та єдиності розв'язків коефіцієнтних обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням.

Обернені задачі, на відміну від класичних прямих, виникають тоді, коли є потреба визначити додаткові параметри рівняння, крім власне невідомої функції. Зокрема, коефіцієнтні обернені задачі полягають у знаходженні невідомих коефіцієнтів або вільних членів рівняння.

З фізичної точки зору такі задачі виникають тоді, коли необхідно визначити невідомі характеристики досліджуваних процесів в умовах, коли складно або неможливо встановити їх прямим вимірюванням. Наприклад, технічно неможливо прямо виміряти температуру металу у соплі ракети, або визначити форму та специфіку залягання корисних копалин.

Перші дослідження по теорії обернених задач виникли внаслідок розв'язання практичних проблем геофізики, сейсмології, астрономії, теорії квантового розсіяння, та ін., які виникли у першій половині XX ст.

Однією із перших праць є стаття В.А. Амбарзумяна (1929), в якій розглядається обернена задача, що виникає у теорії квантового розсіяння. У 1935 році А.М. Тихонов дослідив наступну задачу: встановити доісторичний температурний розподіл у приповерхневих шарах земної кори на основі сучасних температурних вимірювань. Тобто, було досліджено задачу обернену до задачі Коші для рівняння теплопровідності. Пізніше ці результати було узагальнено і використано при дослідженні властивостей поверхні Місяця.

Початок активного розвитку теорії обернених задач припадає на другу половину XX ст. У 60-70-их рр. у роботах Б.Ф. Джонса (B.F. Jones) та Дж.Р. Кеннона (J.R. Cannon) було встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі для одновимірного рівняння теплопровідності, де невідомий старший коефіцієнт залежить лише від часу.

Коефіцієнтні обернені задачі для параболічних рівнянь досліджувались багатьма авторами. Серед них слід згадати роботи М.І. Іванчова, М.М. Бокала, А.О. Лопушанського, Г. П. Лопушанської, Н.В. Пабирівської, С.І. Кабаніхіна, М.В. Клібанова, О.І. Прилєпка, В. Ісакова (V. Isakov), А. Лоренці (A. Lorenzi), В. Рандела (W. Rundell), М. Чоуллі (M. Choulli), Г.-М. Їна (H.-M. Yin), П. ДуШато (P. DuChateau) та інших.

Цікавими з практичної зору є задачі для вироджених рівнянь. Вони виникають при описі таких різних процесів, як дифузія в пористому середовищі, рух в'язких рідин, опріснення морських вод, поведінка фінансових ринків, динаміка популяцій, та ін. Прямі задачі для таких рівнянь досліджувались в працях О.О. Ладиженської, О.С. Калашникова, Т.Д. Джураєва, А. Фрідмана (A. Friedman), Е. ДіБенедетто (E. DiBenedetto), А.В. Глушака, С.Д. Шмулевича, М.М. Гаджієва, С. Д. Івасишена, М.І. Матійчука, І.Д. Пукальського, та ін.

Обернені задачі для вироджених рівнянь в частинних похідних досліджувались у працях Т. Елдесбаєва для гіперболічного рівняння та М.М. Гаджієва для еліптичного рівняння. П. Каннарса (P. Cannarsa) досліджував обернені задачі знаходження невідомого джерела у параболічних рівняннях з виродженням.

Випадок, коли невідомим є вироджений старший коефіцієнт параболічного рівняння, було досліджено у праці М.І. Іванчова, Н.В. Салдіної, А. Лоренці (A. Lorenzi) у випадку багатовимірного рівняння і, зокрема, у працях І.Г. Малишева, М.І Іванчова, Н.В. Салдіної у випадку одновимірного рівняння. У областях з вільними межами обернені задачі для параболічних рівнянь вивчались у роботах Н.М. Гузик, Г.А. Снітко, І.Є. Баранської.

Коефіцієнтні обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь без виродження вивчались у працях Р.В. Сагайдака, Г.А. Снітко, І.Є. Баранської, Н.Є. Кінаш, Д. Лесніка (D. Lesnic), та ін. Задачі з виродженням для таких рівнянь наразі вивчені мало. Тому дослідження обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь зі слабким та сильним виродженням є актуальним.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка. Дисертація виконана в рамках науково-дослідних державних тем "Розробка методів дослідження якісних характеристик математичних моделей, які описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних"(номер держреєстрації 0106U001284), "Розробка теорії класичних та некласичних задач для диференціальних рівнянь та методів дослідження математичних моделей"(номер держреєстрації 0103U001908).

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є встановлення однозначної розв'язності обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням.

Безпосередніми *завданнями* дослідження є:

1) встановлення умов існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач для двовимірних ізотропних параболічних рівнянь з слабким степеневим виродженням невідомого старшого коефіцієнта;
2) встановлення умов існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач для двовимірних анізотропних параболічних рівнянь з різними слабкими степеневими виродженнями невідомих старших коефіцієнтів;
3) встановлення умов існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач з диференціальними та інтегральними умовами перевизначення для двовимірних ізотропних та анізотропних параболічних рівнянь з сильним виродженням.

Об'єкт дослідження: коефіцієнтні обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь з вироджуваними старшими коефіцієнтами.

Предмет дослідження: умови існування та єдиності коефіцієнтних обернених задач знаходження старших коефіцієнтів у двовимірних параболічних рівняннях з виродженням.

Методи дослідження: метод функцій Гріна (при зведенні оберненої задачі до еквівалентної системи операторних рівнянь); метод теореми про нерухому точку (при доведенні існування розв'язків операторних рівнянь); метод інтегральних рівнянь (при доведенні єдиності розв'язків обернених задач); метод інтегральних нерівностей (при встановленні допоміжних оцінок).

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації вперше отримано такі результати з теорії коефіцієнтних обернених задач для вироджених двовимірних параболічних рівнянь:

1) встановлено умови існування та єдиності глобального розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле і слабким виродженням;
2) знайдено умови локального існування та глобальної єдиності розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана для повного параболічного рівняння зі слабким виродженням;
3) встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле для анізотропного повного параболічного рівняння зі слабким виродженням;
4) доведено існування і єдиність глобального розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана та диференціальними умовами перевизначення для ізотропного параболічного рівняння з сильним виродженням;
5) знайдено умови локального існування і глобальної єдиності розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана та інтегральними умовами перевизначення для анізотропного параболічного рівняння з сильним виродженням.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційні дослідження мають теоретичний характер і є внеском в теорію коефіцієнтних обернених задач для параболічних рівнянь. Їх результати можуть бути використані при подальших дослідженнях обернених задач з виродженням та практичному розв'язанні таких задач.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації одержані автором самостійно. У спільних з науковим керівником роботах [1], [3], [4], [5] М.І. Іванчову належить постановка розглядуваних задач та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включено до дисертації, доповідалися на:

– Львівському міському семінарі із диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Б.Й. Пташник, проф. М.І. Іванчов, проф. П.І. Каленюк, проф. М.М. Бокало) (Львів, 2009-2019рр.);
– XIII Міжнародній науковій конференції ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 2010);
– Конференції "Nonlinear Partial Differential Equations"(Дніпро, 2010);
– Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2011);
– XIV Міжнародній науковій конференції ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 2012);
– Конференції "8th International Conference on Inverse Problems in Engineering"(Краків, 2014);
– Конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"(Чернівці, 2018);
– Конференції "CAIM-2018"(Кишинів, 2018);
– Конференції "24th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis"(Таллінн, 2019)

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 5 статтях ([1]-[5]) у фахових наукових журналах, серед яких 1 ([4]) опубліковано в журналі, що входить до міжнародної науково-метричної бази Scopus. Результати додатково висвітлено в 1 статті ([6]) у науковому журналі і 8 тезах ([7]-[14]) наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел. Список використаних джерел налічує 124 найменування і викладений на 11 сторінках. Загальний обсяг роботи – 148 сторінок.

1. РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

У цьому розділі зроблено огляд праць, що стосуються обернених задач для параболічних рівнянь, та наведено короткий опис результатів дисертаційної роботи.

1.1. **Огляд літератури за тематикою дисертації.** Обернені задачі виникають в тих ситуаціях, коли відповідна пряма задача не є повністю визначеною. Наприклад, невідомими є властивості середовища, в якому відбувається описуваний процес. Відповідно, виникає необхідність знайти певні параметри задачі за допомогою накладання додаткових умов - так званих умов перевизначення.

Розв'язання обернених задач дозволяє, зокрема, визначити розміри та форму дефектів, визначити структуру невідомих джерел (таких як тепло, різниця потенціалів, забруднення домішками, і т. д.), знайти невідомі властивості середовищ, в яких відбуваються досліджувані процеси.

Теорія обернених задач, зокрема, знаходить своє застосування [101] у:

- фізиці (квантова механіка, електродинаміка, акустика)
- геофізиці (сейсмічні, електричні, магнітні та гравіметричні дослідження)
- медицині (томографія, ультразвукові дослідження)
- економіці (теорія оптимального керування, фінансова математика)

Також слід згадати застосування у теорії матеріалів з пам'яттю [112], дифузії біотепла [89], динаміці популяцій [102], [79], тощо.

Перші дослідження по обернених задачах з'явились у першій половині XX ст. Вони стосувалися задач теорії квантового розсіяння [59], [58], задач геофізики (геологічна розвідка, сейсмологія, теорія потенціалів) [115], [117], астрономії [82], та інших наук.

Для параболічних рівнянь А.М. Тихонов [121] розглянув питання єдиності розв'язку оберненої задачі для рівняння теплопровідності $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, в якій необхідно знайти розв'язок рівняння при $t \le t_0$, якщо відомий розв'язок рівняння при $t = t_0$: $u(x, t_0) = \varphi(x)$.

Слід зазначити, що здебільшого обернені задачі є некоректно поставленими [86]. Зазвичай важко забезпечити неперервну залежність розв'язку від вхідних даних.

Існує декілька типів класифікації обернених задач [101], серед яких слід зазначити:

- по невідомих функціях
  - ретроспективні або еволюційні - невідомими є початкові умови
  - крайові - невідомими є крайові умови
  - з невідомим джерелом
  - коефіцієнтні - невідомими є коефіцієнти рівняння
  - геометричні - невідомою є область визначення рівняння
- по типу додаткових умов
- по типу рівнянь

Серед основних праць по теорії обернених задач слід зазначити праці О.І. Прилєпка [116], В. Ісакова (V. Isakov) [92], [93], С.І. Кабаніхіна [100], [101], А. Кірша (A. Kirsch) [103], А.Х. Хасаноглу (A.H. Hasanoglu) та В.Г. Романова (V.G. Romanov) [87].

1.1.1. *Коефіцієнті обернені задачі.* Коефіцієнтні обернені задачі полягають у визначення невідомих коефіцієнтів, які можуть бути:

- залежні від часу
- залежні від просторових змінних
- залежні від частини просторових змінних і від часу
- залежні від невідомої функції

Вперше обернену задачу знаходження невідомого коефіцієнта $a = a(t)$, залежного від часу у параболічному рівнянні розглянув Б.Ф. Джонс (B.F. Jones) [99]:

$$u_t = a(t)u_{xx}, \quad 0 < x < \infty,\ 0 < t < T;$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x < \infty;$$

$$u(0,t) = f(t), 0 \le t < T;\ f(0) = 0;$$

$$-a(t)u_x(0,t) = g(t), \quad 0 < t < T.$$

Задача зводиться до нелінійного інтегрального рівняння. З використанням теореми Шаудера встановлюється існування класичного розв'язку оберненої задачі. Також доводиться єдиність та неперервна залежність розв'язку від вхідних даних, що є доволі нетиповим для обернених задач, які зазвичай є некоректно поставленими.

Дж.Р. Кеннон (J.R. Cannon) [66] для такого ж рівняння теплопровідності та інших крайових умов та умови перевизначення

$$u(0,t) \equiv \varphi_0,\ u(1,t) = \psi(t),\ 0 \le t < T,$$

$$a(t) \lim_{x \to 0} u_x(x,t) = h(t),\ 0 < t < T,$$

встановив існування, єдиність, неперервну залежність розв'язку $a(t)$ цієї задачі. Також було виведено формулу явного вигляду для невідомої функції $a(t)$.

Розширення цієї задачі на багатовимірний випадок є у праці Дж.Р. Кеннона (J.R. Cannon) та В. Рандела (W. Rundell) [69]:

$$u_t = a(t)\Delta u, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T],$$

$$u(x,0) = h(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T],$$

$$-a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \nu} = g(t), \quad t \in [0,T].$$

Із використанням принципу максимуму та методу послідовних наближень доводиться існування та єдиність її розв'язку. Також в цій праці було розглянуто випадок інтегральних умов перевизначення.

Єдиність та стійкість розв'язку оберненої задачі визначення коефіцієнтів $a_{ij}(t)$ у рівнянні

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) u_{x_i x_j} = \mu(x,t)$$

вивчались у працях А.К. Ратині [44], [45], [46].

Випадок залежних від часу невідомих коефіцієнтів для параболічних рівнянь в області $Q_T = (0,h) \times (0,T)$ досліджувався, зокрема, М.І. Іванчовим у працях [28], [29], [30], [26], [31].

А. Лоренці (A. Lorenzi) займався розв'язанням коефіцієнтних обернених задач із використанням теорії півгруп [109], [110], [72]. Зокрема, у праці [111] досліджується обернена задача для рівняння

$$u'(t) + \lambda A u(t) = \mu u(t)$$

із невідомими цілими числами λ та μ.

Приклад оберненої задачі для параболічного рівняння, в якому старший коефіцієнт шукається у вигляді квадратичної функції щодо просторової змінної, вивчено у [42]:

$$u_t = (a(t)x^2 + b(t)x + c(t))u_{xx}(x,t) + f(x,t).$$

Тут невідомими є функції $a(t), b(t), c(t)$.

Визначенням коефіцієнтів у обернених задачах також займалися М. Чоуллі (M. Choulli) [73], [74], Г.-М. Їн (H.-M. Yin) [70], [71], [124], П. ДуШато (P. DuChateau) [67], [84], [68], [88], та ін.

Д. Леснік (D. Lesnic), С.А. Юсефі (S.A. Yousefi), М.І. Іванчов (M.I. Ivanchov) [106] досліджували клас обернених коефіцієнтних задач для параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

з крайовими умовами Діріхле і різноманітними типами умов перевизначення. Ними також проведено чисельні розрахунки розв'язків розглядуваних задач.

Обернені задачі у просторах узагальнених функцій розглядались, наприклад, у статті А.О. Лопушанського, Г.П. Лопушанської, В.Р. Рапіти [108], де доведено існування та єдиність розв'язку (u, b) оберненої задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - u_{xx} - b(t)u = g(t)F_0(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

де $\beta \in (0,2)$ – показник дробової похідної, F_0 – узагальнена функція.

1.1.2. *Прямі задачі з виродженням.* Прямі задачі з виродженням виникають як математичні моделі процесів опріснення морських вод, руху рідини у пористому середовищі, динаміки популяцій, поведінки фінансових ринків, та ін. ([63], [60], [64], [85]). Загальний огляд прямих задач для параболічних рівнянь з виродженням є, зокрема, у монографії Е. ДіБенедетто (E. DiBenedetto) [78]. Нагадаємо лише кілька праць з цієї тематики.

О.О. Ладиженська [105] розглянула задачі для виродженого рівняння

$$v_t - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} [A(v_x) v_{x_i}] + \sum_{k=1}^{3} v_k v_{x_k} = -\operatorname{grad} p + f(x,t),$$

де $A(v_x) = \nu_0 + \nu_1 |v_x|^{2\mu}$.

В.П. Глушко досліджував задачі з виродженням для лінійних рівнянь [20]:

$$a(x)u'' + b_1(x)u' + c(x)u = f(x),$$

$$a(x)u' + b_1(x)u = f(x),$$

які вироджуються в рівняння нижчого порядку на межі області або в її околиці.

А. Фрідман (A. Friedman) у [83] досліджував системи параболічних рівнянь з виродженням із диференціальним оператором вигляду

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

де матриця $(a_{ij}(x))$ вироджується на деякій множині S. Ним побудовано фундаментальні розв'язки таких рівнянь.

У статті [61] Ф. Берніс (F. Bernis) та А. Фрідман (A. Friedman) розглянули випадок параболічних рівнянь з виродженням з похідними вищих порядків:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(f(u)\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}}\right) = 0.$$

Т.Д. Джураєв [23] розглядав в області $Q = \{0 < t \le T, 0 < x < \infty\}$ рівняння

$$u_{xx} - a(t,x)u_t - b(t,x)u_x = f(t,x),$$

яке вироджувалося при $t = 0,\ x = 0$.

А.В. Глушак та С.Д. Шмулевич [19] розглядали задачу в області $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ для параболічного рівняння високого порядку з сильним виродженням

$$\alpha(t)u_t = \sum_{|k|<2b} a_k(t)(-i)^{|k|}\frac{\partial^{|k|}u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}} - \lambda u + F(t,x),$$

$$\alpha(t) \in C[0,T],\ \alpha(0) = 0, \alpha(t) > 0, t > 0, \int\limits_0^T \frac{dt}{\alpha(t)} = +\infty.$$

А.С. Калашников у [35] розглядав рівняння вигляду:

$$-\varphi(t,x)u_t + a^{ij}(t,x)u_{x_ix_j} + b^i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u = f(t,x).$$

Зокрема, він дав визначення слабкого та сильного виродження для таких рівнянь.

У праці С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, А.Н. Кочубея [80] розглянуто вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова, для яких побудовано фундаментальні розв'язки і встановлено коректну розв'язність задачі Коші. В роботах Г.П. Малицької [39] ці результати поширено на випадок систем параболічних рівнянь

$$\partial_t u_j(t,X) - x\partial_y u_j(t,X) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{2b} a_k^{js}(t,X)\partial_x^k u_s(t,X).$$

І.Д. Пукальський досліджував задачі для параболічних рівнянь із степеневим виродженням у своїй монографії [43]. У роботі [94] ним розглянуто рівняння із виродженими коефіцієнтами

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right] u = f(t,x).$$

Задачами для параболічних систем з виродженням займався М.І. Матійчук [40], [41]. Зокрема, у праці М.І. Конаровської та М.І. Матійчука [37] досліджено задачу Коші для системи параболічних рівнянь з подвійним степеневим виродженням

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D_{x'}^{k} B_{x_n}^{j} u - \sum_{l=1}^{n} x_l \frac{\partial u}{\partial x_l} -$$

$$- \sum_{|r|+2s<b} a_{rs}(t,x) D_{x'}^{r} B_{x_n}^{s} u = f,$$

$$u(t,x)|_{x=0} = \varphi(x), \; \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}|_{x_n=0} = 0,$$

в якій коефіцієнти $a_{rs}(t,x)$ мають особливість в деякій точці $x_0' \in E_{n-1}$.

1.1.3. *Обернені задачі з виродженням.* Обернені задачі для рівнянь в частинних похідних мабуть вперше почали досліджувались у праці Т. Елдесбаєва [24] для гіперболічного рівняння

$$y^m u_{xx} - u_{yy} + \alpha y^{\frac{m}{2}-1} u_x + c(x,y)u = 0,$$

а у [25] тим самим автором у області $\Omega = \{(x,t) : 0 \le x < \infty, \, 0 \le y < \infty\}$ розглянуто обернену задачу для гіперболічного рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c(x)u.$$

М.М. Гаджієв у [18] дослідив обернену задачу визначення вільного члена (джерела) в еліптичному рівнянні з виродженням.

І.Г. Малишев у [113], [114] розглядав, зокрема, обернену задачу визначення невідомого старшого коефіцієнта у рівнянні:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \; x > 0, t > 0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u(0,t)=0,$$

з умовою перевизначення $u(q,t)=h(t)$, де $\alpha(t)$ може перетворюватись в 0 при $t=0$.

М.І. Іванчов та Н.В. Салдіна досліджували обернені задачі для слабко та сильно виродженого рівняння теплопровідності [27], [98]:

$$u_t=t^\beta a(t)u_{xx}+f(x,t),$$

а у [97] було розглянуто обернену задачу для сильно виродженого параболічного рівняння:

$$u_t=a(t)u_{xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u+f(x,t).$$

Н.В. Салдіна вивчала обернені задачі зі слабким та сильним виродженням [48], [50], [52], [118] для параболічних рівнянь з однією просторовою змінною, зокрема, у [49] вивчалася задача для рівняння вигляду

$$u_t=a(t)\psi_0(t)u_{xx}+b(x,t)\psi_1(t)u_x+c(x,t)\psi_2(t)u+f(x,t)$$

із невідомим коефіцієнтом $a(t)$ та загальним степеневим виродженням, де $\psi_i(t)$ – деякі додатні монотонно зростаючі функції.

У праці М.І. Іванчова (M.I. Ivanchov), А. Лоренці (A. Lorenzi), Н.В. Салдіної (N.V. Saldina) [96] розглядалася обернена задача для виродженого багатовимірного параболічного рівняння у банаховому просторі:

$$D_tv(t,x)=a(t)\mathcal{A}v(t,x)+f(t,x),\quad (t,x)\in[0,T]\times\Omega,$$

із умовою перевизначення вигляду $a(t)\Phi[v(t,\cdot)]=g(t)$, де Φ – лінійний та неперервний функціонал на $C(\overline{\Omega})$. Зокрема, в якості Φ розглянуто інтеграл Лебега. Для такої задачі було встановлено локальне існування та глобальну єдиність розв'язку із використанням методу напівгруп.

П. Каннарса (P. Cannarsa) [65] розглядав обернену задачу визначення невідомого джерела g у параболічному рівнянні з виродженням за просторовою змінною:

$$u_t-(x^\alpha u_x)_x=g,\quad \alpha\in[0,2).$$

Крім того, випадок виродження за просторовою змінною розглянуто, наприклад, в статтях З. Денга (Z. Deng), Л. Янга (L. Yang) [77] та Дж. Торта (J. Tort) [120].

1.1.4. *Багатовимірні рівняння.* Одним із перших досліджень для багатовимірних рівнянь є праця В.В. Соловйова [55] із визначення невідомого джерела ($x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$) у рівнянні

$$u_t(x,t) - (Lu)(x,t) = F(x,t),$$

де умова перевизначення задається у кінцевий момент часу: $u(x,T) = \chi(x)$.

Задачі визначення невідомого старшого коефіцієнта, залежного від часу, почали досліджуватись М.І. Іванчовим та Р.В. Сагайдаком у [47], [33]:

$$u_t = a(t)\Delta u + b_1(x,y,t)u_x + b_2(x,y,t)u_y + c(x,y,t)u + f(x,y,t),$$

а в [34] було розглянуто анізотропний випадок.

Обернені задачі визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні в області з вільною межею вивчалися І.Є. Баранською [15], [16], [17]:

$$u_t = a(t)(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})+b(x_1,x_2,t)u_{x_1}+c(x_1,x_2,t)u_{x_2}+d(x_1,x_2,t)u+f(x_1,x_2,t).$$

Задачі визначення молодшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні розглядалися Г.А. Снітко [53], [54] для рівняння:

$$u_t = \Delta u + c(t)u + f(x_1,x_2,t).$$

Н.Є. Кінаш [36] досліджувала обернену задачу для двовимірного рівняння теплопровідності з крайовими умовами Діріхле та нелокальною умовою перевизначення:

$$u_t = a(t)\Delta u + f(x,y,t),$$

$$\nu_1(t)u_x(0,y_0,t) + \nu_2(t)u_x(h,y_0,t) = \mu_3(t).$$

В полярних координатах М.І. Іванчов та Н.В. Пабирівська досліджували обернену задачу для рівняння [32]:

$$u_t = a(t)\Delta u + f(r,\varphi,t)$$

в області з вільною межею $\{(r,\varphi,t) : 0 \le r < h(t)g(\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 < t < T\}$.

М.С. Гуссейн (M.S. Hussein), Д. Леснік (D. Lesnic), М.І. Іванчов (M.I. Ivanchov) у [91] розглядали обернену задачу знаходження невідомого старшого анізотропного коефіцієнта у параболічному рівнянні

$$u_t = a(y,t)u_{xx} + b(x,t)u_{yy} + f(x,y,t)$$

із крайовими умовами типу теплового потоку. У роботі [90] ними разом з М.Дж. Гунтул (M.J. Huntul) та Н.Є. Кінаш (N. Kinash) результати було узагальнено на випадок нелокальних крайових умов вигляду:

$$a(y,t)\left[\nu_{11}(y,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) + \nu_{12}(y,t)\frac{\partial u}{\partial x}(h,y,t)\right] = \kappa_1(y,t),\ (y,t) \in [0,l]\times[0,T],$$

$$b(x,t)\left[\nu_{21}(x,t)\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) + \nu_{22}(x,t)\frac{\partial u}{\partial y}(x,l,t)\right] = \kappa_2(x,t),\ (x,t) \in [0,h]\times[0,T].$$

Також слід згадати праці, в яких проводиться чисельне розв’язання розглядуваних обернених задач. У праці М. Лакестані (M. Lakestani), М. Дегхан (M. Dehghan) [104] розглянуто обернену задачу для параболічного рівняння з виродженням

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p(t)w + f(x,t),$$

з умовою перевизначення $w(x_0,t) = k(t)$, де невідомим є молодший коефіцієнт p.

Чисельний пошук невідомого молодшого коефіцієнта (джерела) методом скінченних різниць проведено у працях М. Дегхан (M. Dehghan) [75], [76], та Ф. Лі (F. Li), Ц. Ву (Z. Wu), Ч. Є (C. Ye) [107] для рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p(t)u + \phi(x,y,t).$$

У праці П.Н. Вабищевича (P.N. Vabishchevich) [122] було здійснено чисельний пошук невідомого залежного від часу молодшого коефіцієнта $p(t)$ у рівнянні:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div(k(x)\,\mathrm{grad}\,u) + p(t)u = f(x,t),$$

а в статті [123] розглядалася обернена задача визначення невідомої правої частини у рівнянні

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div(k(x)\,\mathrm{grad}\,u) + c(x)u = f(x),$$

де умова перевизначення задається у кінцевий момент часу: $u(x,T) = u_T(x)$.

1.2. **Короткий опис результатів дисертації.** Дисертаційну роботу присвячено дослідженню розв'язності обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням. Її основні результати викладено у розділах 2-4.

Досліджено ізотропні та анізотропні типи рівнянь, де під анізотропією мається на увазі наявність різних показників виродження при різних просторових компонентах у старших коефіцієнтах рівняння. Розглянуто випадки слабкого та сильного виродження.

Методи доведення існування та єдиності розв'язків є розвитком методів, що застосовуються до одновимірних рівнянь. Існування розв'язку встановлюється за допомогою зведення оберненої задачі до інтегрального рівняння і наступного застосування теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Отже, обернена задача зводиться до рівняння або системи рівнянь

$$a(t) = \mathcal{P}a(t),$$

і доводиться, що оператор $\mathcal{P}$ задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку.

Єдиність розв'язку доводиться, зокрема, із використанням властивостей однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Усі задачі розглядаються у області $Q_T := \big\{(x, y, t) \ : \ \ 0 < x < h, \ \ 0 < y < l, \ \ 0 < t < T\big\}$ і полягають у знаходженні невідомих старших коефіцієнтів рівняння, що залежать лише від часової змінної.

Розділ 1 дисертаційної роботи містить огляд літератури за тематикою досліджень та короткий опис результатів дисертації.

У другому розділі дисертації розглянуто обернені задачі для двовимірних ізотропних рівнянь зі слабким виродженням.

У підрозділі 2.1 розглянуто задачу знаходження пари функцій (a, u), що задовольняють такі співвідношення:

$$u_t = t^{\beta} a(t)\Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T,$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in(0,h)\times(0,l),$$

$$u(0,y,t)=\mu_1(y,t),\quad u(h,y,t)=\mu_2(y,t),\quad y\in[0,l],\quad t\in[0,T],$$

$$u(x,0,t)=\nu_1(x,t),\quad u(x,l,t)=\nu_2(x,t),\quad x\in[0,h],\quad t\in[0,T],$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t)=\varkappa(t),\quad t\in[0,T],$$

де $0<\beta<1$, $0<y_0<l$. Для цієї задачі з крайовими умовами Діріхле встановлено умови існування та єдиності глобального класичного розв'язку.

У підрозділі 2.2 досліджено обернену задачу для повного параболічного рівняння, яка полягає у знаходженні пари функцій (a,u), що задовольняють такі рівності:

$$u_t=t^\beta a(t)\Delta u+b_1(x,y,t)u_x+b_2(x,y,t)u_y+$$

$$+c(x,y,t)u+f(x,y,t),\quad (x,y,t)\in Q_T,$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in(0,h)\times(0,l),$$

$$u(0,y,t)=\mu_1(y,t),\quad u(h,y,t)=\mu_2(y,t),\ (y,t)\in[0,l]\times[0,T],$$

$$u_y(x,0,t)=\nu_1(x,t),\quad u_y(x,l,t)=\nu_2(x,t),\ (x,t)\in[0,h]\times[0,T],$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t)=\varkappa(t),\quad t\in[0,T],$$

де $0<\beta<1$, $0<y_0<l$. Знайдено умови локального існування та глобальної єдиності розв'язку цієї задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана.

У третьому розділі встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле для анізотропного повного параболічного рівняння зі слабким виродженням. Невідомими є два коефіцієнти $a_1(t)$,

$a_2(t)$ з різними показниками виродження. Тому виникає необхідність накладання двох додаткових умов перевизначення. Отже, задача полягає у знаходженні трійки функцій (u, a_1, a_2) таких, що задовольняють співвідношення:

$$u_t = t^{\beta_1} a_1(t) u_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t) u_{yy} + b_1(x,y,t) u_x + b_2(x,y,t) u_y + c(x,y,t) u +$$

$$+ f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in (0,h) \times (0,l),$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t),\ u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

$$u(x,0,t) = \nu_1(x,t),\ u(x,l,t) = \nu_2(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T],$$

$$a_1(t) u_x(0, y_0, t) = \varkappa_1(t), \quad t \in [0,T],$$

$$a_2(t) u_y(x_0, 0, t) = \varkappa_2(t), \quad t \in [0,T],$$

де $0 < \beta_i < 1,\ i = 1,2,\ 0 < x_0 < h,\ 0 < y_0 < l$.

У підрозділі 3.1 встановлено умови існування локального розв'язку даної оберненої задачі, а у підрозділі 3.2 за допомогою накладання додаткових умов на вхідні дані задачі встановлено умови існування її глобального розв'язку.

Також, зокрема, із допомогою теорії інтегральних рівнянь Вольтерра встановлено глобальну єдиність розв'язку даної задачі.

У четвертому розділі розглянуто обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь зі сильним виродженням.

У підрозділі 4.1 розглянуто обернену задачу знаходження пари функцій (a, u), що задовольняють такі співвідношення:

$$u_t = t^{\beta} a(t) \Delta u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y,0), \quad (x,y) \in (0,h) \times (0,l),$$

$$u(0,y,t)=\mu_1(y,t),\, u(h,y,t)=\mu_2(y,t),\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T],$$

$$u_y(x,0,t)=\nu_1(x,t),\, u_y(x,l,t)=\nu_2(x,t),\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T],$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t)=\kappa(t),\quad t\in(0,T],$$

де $\beta\geq 1$, $0<y_0<l$. Доведено існування і єдиність глобального розв'язку цієї оберненої задачі з диференціальною умовою перевизначення.

У підрозділі 4.2 розглянуто обернену задачу знаходження трійки функцій (a_1,a_2,u), що задовольняють співвідношення

$$u_t=a_1(t)t^{\beta_1}u_{xx}+a_2(t)t^{\beta_2}u_{yy}+f(x,y,t),\quad (x,y,t)\in Q_T,$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y,0),\quad (x,y)\in(0,h)\times(0,l),$$

$$u(0,y,t)=\mu_{11}(y,t),\, u(h,y,t)=\mu_{12}(y,t),\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T],$$

$$u_y(x,0,t)=\mu_{21}(x,t),\, u_y(x,l,t)=\mu_{22}(x,t),\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T]$$

$$\iint\limits_D u(x,y,t)dx\,dy=\mu_{31}(t),\quad \iint\limits_D xu(x,y,t)dx\,dy=\mu_{32}(t),\quad t\in(0,T],$$

де $\beta_i\geq 1,\ i=1,2$. Знайдено умови локального існування і глобальної єдиності розв'язку даної оберненої задачі з інтегральними умовами перевизначення. Метод доведення вимагає накладання зв'язку між показниками виродження для різних просторових компонент у старших коефіцієнтах рівняння, тому в теоремах існування та єдиності розв'язку на вхідні дані задачі, зокрема, накладається умова $\beta_2=\frac{\beta_1+1}{2}$.

2. РОЗДІЛ 2
ІЗОТРОПНІ ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

У цьому розділі розглянуто обернені задачі для двовимірних (тобто рівнянь з двома просторовими змінними) параболічних рівнянь зі слабким виродженням. У цих рівняннях старший коефіцієнт вироджується у початковий момент часу за степеневим законом t^{β}. Виродження вважається слабким, тобто, показник степеня виродження $\beta \in (0,1)$.

Результати цього розділу опубліковано у [1] і додатково висвітлено у працях [6], [7], [11].

2.1. **Обернена задача з крайовими умовами Діріхле.**

Спершу введемо необхідні нам далі загальні позначення. Нехай $h, l, T > 0$ – деякі фіксовані числа,

$$D := \big\{(x, y) \ : \ 0 < x < h, \ 0 < y < l\big\},$$

$$Q_T := \big\{(x, y, t) \ : \ 0 < x < h, \ 0 < y < l, \ 0 < t < T\big\}.$$

Через $\overline{D}$ та $\overline{Q_T}$ позначатимемо замикання областей D та Q_T відповідно. Нехай $C^{k,m,n}(Q_T) \equiv C^{k,m,n}_{x,y,t}(Q_T)$ – множина функцій, які k разів є неперервно диференційовними за змінною x, m разів – за y, n разів – за t (тут традиційно $k, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Якщо, наприклад, $k = m$, то замість $C^{m,m,n}(Q_T)$ писатимемо просто $C^{m,n}(Q_T)$. Аналогічні позначення вживатимемо і для множин функцій, визначених на $\overline{Q_T}$, D, $\overline{D}$ тощо.

2.1.1. *Формулювання задачі і отриманих результатів.*

Розглянемо обернену задачу знаходження пари функцій (a, u) таких, що

$$u_t = t^{\beta} a(t) \Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{2.2}$$

$$u(0, y, t) = \mu_1(y, t), \quad u(h, y, t) = \mu_2(y, t), \quad y \in [0, l], \quad t \in [0, T], \tag{2.3}$$

$$u(x,0,t)=\nu_1(x,t),\quad u(x,l,t)=\nu_2(x,t),\quad x\in[0,h],\quad t\in[0,T], \tag{2.4}$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t)=\varkappa(t),\quad t\in[0,T], \tag{2.5}$$

де $0<\beta<1$, $0<y_0<l$.

Означення 2.1. *Розв'язком задачі (2.1)-(2.5) називається пара функцій*

$$(a,u)\in C[0,T]\times\Big(C(\overline{Q_T})\cap C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0,0}\big([0,h)\times(0,l)\times[0,T]\big)\Big),$$

$a(t)>0$ *для* $t\in[0,T]$, *яка задовольняє рівності (2.1)-(2.5) поточково.*

Припустимо, що вхідні дані задачі задовольняють такі умови:

(A1) $\varphi\in C^2(\overline{D})$; $\mu_i\in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,l]\times[0,T])$, існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to+0}t^\beta\mu_{i_{yy}}$, $i=1,2$; $\nu_i\in C^{1,0}([0,h]\times[0,T])$, $i=1,2$; $\varkappa\in C[0,T]$; $f\in C^{1,0,0}(\overline{Q_T})$;

(A2) $\varphi_x(x,y)>0$, $(x,y)\in\overline{D}$; $\mu_{1_t}(y,t)-f(0,y,t)\le 0$, $\mu_{2_t}(y,t)-f(h,y,t)\ge 0$, $(y,t)\in[0,l]\times[0,T]$, $\mu_{1_{yy}}(y,t)\ge 0$, $\mu_{2_{yy}}(y,t)\le 0$, $(y,t)\in[0,l]\times(0,T]$, $i=1,2$; $\nu_{1_x}(x,t)\ge 0$, $\nu_{2_x}(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in[0,h]\times[0,T]$; $f_x(x,y,t)\ge 0$, $(x,y,t)\in\overline{Q_T}$; $\varkappa(t)>0$, $t\in[0,T]$;

(A3) $\mu_1(y,0)=\varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0)=\varphi(h,y)$, $\nu_1(x,0)=\varphi(x,0)$, $\nu_2(x,0)=\varphi(x,l)$, $\mu_1(0,t)=\nu_1(0,t)$, $\mu_1(l,t)=\nu_2(0,t)$, $\mu_2(0,t)=\nu_1(h,t)$, $\mu_2(l,t)=\nu_2(h,t)$.

Встановлено такий результат.

Теорема 2.1. ***(існування)****. Якщо виконуються умови* ***(A1)-(A3)****, то задача (2.1)-(2.5) має розв'язок.*

Для доведення єдиності розв'язку нашої задачі ми потребуватимемо таких умов:

(A4) $\varphi\in C^{2,2}([0,h]\times[0,l])$; $\mu_i\in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,l]\times[0,T])$, існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to+0}t^\beta\mu_{i_{yy}}(y,t)$, $i=1,2$;
$\nu_i\in C^{2,1}([0,h]\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,h]\times[0,T])$,
існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to+0}t^\beta\nu_{i_{xx}}(x,t)$, $i=1,2$; $f\in C^{1,0}(\overline{Q_T})$;

(A5) $\varkappa(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$.

Теорема 2.2. ***(єдиність)****. Якщо виконуються умови* ***(A4)-(A5)****, то задача (2.1)-(2.5) не може мати більше одного розв'язку.*

Обернені задачі з виродженням досліджувалися, зокрема, М. М. Гаджієвим у [18], де вивчалася задача визначення вільного члена в еліптичному рівнянні зі слабким виродженням. Т. Елдесбаєв у [25] розглядав обернену задачу для виродженого гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + c(x)u,\ 0 < \alpha < 2,$$

з невідомим молодшим коефіцієнтом $c(x)$.

Коефіцієнтні обернені задачі для багатовимірних параболічних рівнянь без виродження досліджувалися, зокрема, Р.В. Сагайдаком [33], [34]. Початок дослідженню обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь з виродженням було покладено в працях І.Г. Малишева [113], М.І. Іванчова та Н.В. Салдіної [27], [97], [98]. Обернена задача визначення старшого коефіцієнта багатовимірного параболічного рівняння досліджувалась М.І. Іванчовим, А. Лоренці (A. Lorenzi), Н.В. Салдіною у [96] методом напівгруп. У [96] було розглянуто задачу зі слабким виродженням і сингулярністю, причому умова перевизначення була інтегральною. Було доведено локальне існування та глобальну єдиність розв'язку розглядуваної задачі.

Глобальні існування та єдиність розв'язку оберненої задачі (2.1)-(2.5) з диференціальною умовою перевизначення встановлено вперше.

2.1.2. *Доведення основних результатів.* Спершу нагадаємо деякі необхідні нам далі факти та введемо додаткові позначення. Нехай

$$\theta(t) := \int\limits_0^t \tau^{\beta} a(\tau)\, d\tau, \tag{2.6}$$

$$G_{ij}^a(x,y,t,\xi,\eta,\tau) := \frac{1}{4\pi(\theta(t)-\theta(\tau))} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \Bigg\{ \Bigg[\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big) +$$

$$+ (-1)^i \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\Bigg] \cdot \Bigg[\exp\Big(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big) +$$

$$+ (-1)^j \exp\Big(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\Big]\Big]\Big\}, \quad i,j=1,2. \tag{2.7}$$

Скрізь далі індекс "a" біля функцій G_{ij}^a опускатимемо. Нагадаємо, що введена тут функція G_{ij} є функцією Гріна задачі з крайовими умовами i-го роду за змінною x та j-го роду за змінною y для рівняння (2.1). Крім того, відомо, що функцію Гріна $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$, $i,j=1,2$ можна подати у вигляді добутку функцій $G_i^x(x,t,\xi,\tau)G_j^y(y,t,\eta,\tau)$ (див., наприклад, [95]), де G_i^x і G_j^y – функції Гріна i-ї і j-ї крайових задач відповідно для рівнянь

$$u_t = t^\beta a(t) u_{xx}, \quad (x,t) \in (0,h)\times(0,T),$$

та

$$v_t = t^\beta a(t) v_{yy}, \quad (y,t) \in (0,l)\times(0,T).$$

Нагадаємо також, що множина M нормованого простору Y називається компактною, якщо з довільного відкритого покриття M можна вибрати скінченне підпокриття. Множина M називається передкомпактною (див. [57, с. 154]), якщо її замикання $\overline{M}$ є компактним.

Нехай X,Y – нормовані простори, $P: X \to Y$. Лінійний чи нелінійний оператор P називається цілком неперервним (див. [57, с. 229]), якщо він неперервний і переводить кожну обмежену множину з X в передкомпактну множину з Y.

Ми користуватимемося таким твердженням, яке вперше отримали в [119] (теорема Шаудера про нерухому точку [57, с. 229]): якщо X – банахів простір, $P: M \to X$ – цілком неперервний оператор, $M \subset X$ – непорожня замкнена обмежена опукла множина і $P(M) \subset M$, то відображення P має нерухому точку.

Доведемо тепер основні результати цього підрозділу. Спершу зупинимося на існуванні розв'язку задачі (2.1)-(2.5).

Доведення теореми 2.1. Якщо функція $a = a(t)$ є відомою, то розв'язок прямої задачі (2.1)-(2.4) запишеться у вигляді:

$$u(x,y,t) = \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta + \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau) \times$$

$$\times \tau^\beta a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{2.8}$$

Використовуючи властивості функцій Гріна та інтегруючи частинами, продиференціюємо (2.8) по x:

$$u_x(x,y,t) = \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)\Big(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)\Big(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \qquad (2.9)$$

Підставивши (2.9) в умову перевизначення (2.5), отримаємо рівняння для невідомої функції $a(t)$:

$$a(t)=\varkappa(t)\left(\sum_{i=1}^{6}I_i(t)\right)^{-1}, \quad t\in[0,T], \qquad (2.10)$$

де

$$I_1=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{21}(0,y_0,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$I_2=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{21}(0,y_0,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau,$$

$$I_3=-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{21}(0,y_0,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau,$$

$$I_4=\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{21_\eta}(0,y_0,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$I_5=-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{21_\eta}(0,y_0,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$I_6=\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{21}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau.$$

Таким чином, ми звели обернену задачу (2.1)-(2.5) до задачі знаходження розв'язку рівняння (2.10) – функції a. Якщо ми знайдемо a з (2.10), то формула (2.8) дасть нам функцію u.

Для зручності позначимо праву частину (2.10) через $Pa(t)$.

Спершу встановимо допоміжні оцінки, зокрема, оцінимо $Pa(t)$ зверху. Для цього припустимо, що $a\in C[0,T]$ – відома функція, і встановимо оцінки інтегралів I_i, $i=\overline{1,6}$ знизу.

Розглянемо I_1. Запишемо I_1 наступним чином:

$$I_1 = \int_0^l \int_0^h G_2^x(0,t,\xi,0) G_1^y(y_0,t,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Використовуючи вигляд функції Гріна $G_2^x(x,t,\xi,\tau)$, легко бачити, що

$$\int_0^h G_2^x(x,t,\xi,\tau)d\xi = 1. \tag{2.11}$$

Звідси отримаємо

$$I_1 \geq \min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y) \int_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta.$$

Оцінимо I_4 та I_5:

$$I_4 = \int_0^t \int_0^h G_2^x(0,t,\xi,\tau) G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau \geq$$

$$\geq \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t) \int_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau,$$

$$I_5 \geq \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t)\left(-\int_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau \right).$$

Із умов **(A2)** випливає невід'ємність доданків I_2, I_3, I_6. Тоді

$$\sum_{i=1}^6 I_i \geq I_1 + I_4 + I_5 \geq \min\Big\{ \min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t)\Big\} \times$$

$$\times\Big(\int_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta + \int_0^t G_{1\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau - \int_0^t G_{1\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau\Big).$$

Вираз у дужках є розв'язком такої задачі:

$$w_t = t^\beta a(t) w_{yy},\ (y,t)\in(0,l)\times(0,T),$$

$$w(y,0) = 1,\ y\in[0,l],$$

$$w(0,t) = w(l,t) = 1, \ t \in [0,T]. \tag{2.12}$$

Розв'язок цієї задачі тотожно дорівнює 1. Тому

$$\sum_{i=1}^{6} I_i \geq \min\Big\{ \min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t)\Big\} \equiv C_1.$$

Отже,

$$Pa(t) \leq \frac{\max\limits_{[0,T]} \varkappa(t)}{C_1} \equiv A_1, \ t \in [0,T], \tag{2.13}$$

де стала $A_1 > 0$ залежить від вхідних даних і не залежить від $a(t)$.

Оцінимо $Pa(t)$ знизу. Для цього встановимо оцінки кожного з інтегралів I_i зверху. Розглянемо I_1. Використовуючи (2.11), матимемо:

$$I_1 \leq \max_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y) \int\limits_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta.$$

Для інтегралів I_4 та I_5 отримаємо:

$$I_4 \leq \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t) \int\limits_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau,$$

$$I_5 \leq \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t) \Bigg(- \int\limits_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau \Bigg).$$

Тоді для суми $I_1 + I_4 + I_5$ справедлива наступна нерівність:

$$I_1 + I_4 + I_5 \leq \max\Bigg\{ \max_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y), \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \max_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t)\Bigg\} \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_0^l G_1^y(y_0,t,\eta,0)d\eta + \int\limits_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t G_{1_\eta}^y(y_0,t,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau \Bigg) \leq C_2.$$

Оцінимо I_2:

$$I_2 \leq \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{22}(0, y_0, t, h, \eta, \tau)(\mu_{2_\tau}(\eta, \tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta, \tau) - f(h, \eta, \tau))d\eta d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_2^x(0, t, h, \tau) G_2^y(y_0, t, \eta, \tau)(\mu_{2_\tau}(\eta, \tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta, \tau) - f(h, \eta, \tau))d\eta d\tau.$$

Функція $G_2^x(0, t, h, \tau)$ обмежена зверху виразом $\frac{4}{h}$ [95, с. 12]. Тоді, використовуючи умови **(A2)** і рівність (2.11), отримаємо:

$$\int\limits_0^l G_2^y(y_0, t, \eta, \tau)(\mu_{2_\tau}(\eta, \tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta, \tau) - f(h, \eta, \tau))d\eta \leq C_3.$$

Тому

$$I_2 \leq \frac{4C_3 t}{h}.$$

Встановимо оцінку для I_3. Відомо [95], що виконується оцінка:

$$G_2^x(0, t, 0, \tau) \leq \frac{1}{h} + \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}}.$$

Із умов **(A2)**, рівності (2.11) та з того, що

$$\int\limits_0^l G_2^y(y_0, t, \eta, \tau)\Big(\mu_{1_\tau}(\eta, \tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta, \tau) - f(0, \eta, \tau)\Big)d\eta \leq C_4,$$

випливатиме оцінка

$$I_3 \leq \int\limits_0^t \Big(C_5 + \frac{C_6}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}\Big)d\tau.$$

Доданок I_6 оцінюємо так само, як I_1:

$$I_6 \leq \int\limits_0^t \max_{[0,h]\times[0,l]} f_x(x, y, \tau)d\tau \leq C_7.$$

Застосуємо отримані оцінки:

$$Pa(t) \geq \frac{\varkappa(t)}{C_8 + C_9 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}} \tag{2.14}$$

Розглянемо інтеграл у знаменнику (2.14):

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\int\limits_\tau^t \sigma^\beta a(\sigma) d\sigma}} \leq \sqrt{\frac{\beta+1}{a_{min}}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}},$$

де $a_{min} = \min\limits_{[0,T]} a(t)$. Оцінимо останній інтеграл:

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} = t^{\frac{1-\beta}{2}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}} \leq C_{10}.$$

Тоді з (2.14) матимемо:

$$Pa(t) \geq \frac{C_{11}}{C_8 + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{min}}}}.$$

Тепер перейдемо до безпосереднього доведення теореми. Нехай

$$\mathcal{N} = \left\{ a \in C[0,T] : \; A_0 \leq a(t) \leq A_1 \right\}.$$

Тут сталу $A_1 > 0$ взято з (2.13) і вона залежить лише від вхідних даних задачі, а стала $A_0 > 0$ поки буде довільним досить малим числом.

Нехай $a \in \mathcal{N}$. Тоді $a_{min} \geq A_0$ і тому

$$Pa(t) \geq \frac{C_{11}}{C_8 + \frac{C_{12}}{\sqrt{A_0}}} = \frac{C_{11}\sqrt{A_0}}{C_8\sqrt{A_0} + C_{12}} \geq \frac{C_{11}}{C_8\sqrt{A_1} + C_{12}} \sqrt{A_0} = C_{13}\sqrt{A_0},$$

де стала $C_{13} > 0$ не залежить від A_0, хоча залежить від A_1.

Знайдемо A_0 з умови

$$C_{13}\sqrt{A_0} \geq A_0.$$

Зрозуміло, що тоді виконуються нерівності $C_{13} \geq \sqrt{A_0}$, $A_0 \leq C_{13}^2$. Отже, якщо взяти A_1 з (2.13), а потім $A_0 \in (0, \min\left\{A_1, C_{13}^2\right\})$, то оператор P володітиме такою властивістю: $P\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$.

Рівняння (2.10) запишемо у вигляді операторного рівняння

$$a(t) = Pa(t), \tag{2.15}$$

де оператор P переводить множину N в себе. Доведення того, що оператор P є цілком неперервним, проводиться аналогічно до одновимірного випадку, враховуючи той факт, що функцію Гріна для двовимірного рівняння можна подати у вигляді добутку відповідних функцій Гріна для одновимірного рівняння. Тому з теореми Шаудера матимемо, що оператор P має нерухому точку, і тому існує розв'язок задачі (2.1)-(2.5). Теорему 2.1 доведено. $\square$

Тепер доведемо єдиність розв'язку задачі (2.1)-(2.5).

Доведення теореми 2.2. Припустимо, що існує два розв'язки задачі $(a_1(t)$, $u_1(x,y,t))$, $(a_2(t), u_2(x,y,t))$. Позначимо

$$A(t) = a_1(t) - a_2(t), \quad U(x,y,t) = u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t).$$

Тоді для (A, U) матимемо наступну задачу:

$$U_t = t^\beta a_1(t)\Delta U + t^\beta A(t)\Delta u_2,\ (x,y,t) \in Q_T, \tag{2.16}$$

$$U|_{t=0} = U|_{x=0} = U|_{x=h} = U|_{y=0} = U|_{y=l} = 0, \tag{2.17}$$

$$a_1(t)U_x(0,y_0,t) = -A(t)u_{2_x}(0,y_0,t),\ t \in [0,T]. \tag{2.18}$$

Подамо розв'язок прямої задачі (2.16),(2.17) у вигляді

$$U(x,y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h \int\limits_0^l G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta A(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,$$

де G_{11}^* – функція Гріна для однорідних рівняння (2.16) та умов (2.17). Підставивши його в умову перевизначення, отримаємо рівняння для $A(t)$:

$$A(t)u_{2_x}(0,y_0,t) = -a_1(t)\int\limits_0^t \int\limits_0^h \int\limits_0^l G_{11_x}^*(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta A(\tau) \times$$

$$\times \Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{2.19}$$

Отримали інтегральне рівняння Вольтерра другого роду. Оцінимо ядро цього інтегрального рівняння. Спершу розглянемо вираз для $u_{2_{xx}}$:

$$u_{2_{xx}}(x,y,t)=\sum_{i=1}^{6}J_i, \tag{2.20}$$

де

$$J_1=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$J_2=-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11_\xi}^*(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau,$$

$$J_3=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11_\xi}^*(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau,$$

$$J_4=\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11_\eta}^*(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{1_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$J_5=-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11_\eta}^*(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$J_6=-\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11_\xi}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau.$$

Знайдемо оцінки інтегралів $J_i, i=\overline{1,6}$.

Спочатку оцінимо J_1:

$$\left|J_1\right|\le\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}^*(x,y,t,\xi,\eta,0)|\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)|d\xi d\eta\le\max_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}}|\varphi_{xx}(x,y)|.$$

Має місце оцінка [48]

$$\int\limits_0^t G_{1_\xi}^{x*}(x,t,0,\tau)d\tau\le\frac{C_{14}}{t^\beta}. \tag{2.21}$$

Звідси для доданка J_3 матимемо:

$$\left|J_3\right| \le C_{15} \int\limits_0^t G^{x*}_{1_\xi}(x,t,0,\tau)d\tau \le \frac{C_{16}}{t^\beta}.$$

Так само оцінюється інтеграл J_2. Аналогічно, застосовуючи (2.11) і (2.21) до інтегралів J_4, J_5, матимемо:

$$\left|J_4\right| \le C_{17} \int\limits_0^t G^{y*}_{1_\eta}(x,t,0,\tau)\tau^\beta d\tau \le C_{18},$$

$$\left|J_5\right| \le C_{19} \int\limits_0^t |G^{y*}_{1_\eta}(x,t,l,\tau)|\tau^\beta d\tau \le C_{20}.$$

Розглянемо J_6:

$$\left|J_6\right| \le \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \max_{\overline{Q_T}} |f_x(x,t)| \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{1}{\big(\theta_2(t)-\theta_2(\tau)\big)^{3/2}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg(|x-\xi+2nh| \exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\Big) +$$

$$+ |x+\xi+2nh| \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\Big)\Bigg) d\xi d\tau \equiv J_{6,1} + J_{6,2}.$$

В інтегралі $J_{6,1}$ зробимо заміну змінних $z = \dfrac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}$:

$$J_{6,1} \le C_{21} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \int\limits_{\frac{x-\xi+(2n-1)h}{2\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}}^{\frac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}} |z| \exp(-z^2) dz \le$$

$$\le C_{21} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |z|\exp(-z^2)dz \le C_{22} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} d\tau \le$$

$$\le C_{23} t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Інтеграл $J_{6,2}$ можна оцінити так само. Тоді

$$|u_{2_{xx}}(x,y,t)| \le C_{24} + C_{25} t^{\frac{1-\beta}{2}} + C_{26} t^{-\beta}. \qquad (2.22)$$

Доданок $u_{2_{yy}}$ можна оцінити аналогічно. Звідси маємо

$$|t^{\beta}\Delta u_2| = |t^{\beta}(u_{2_{xx}} + u_{2_{yy}})| \leq C_{27}. \tag{2.23}$$

Згідно із цією оцінкою ядро інтегрального рівняння (2.19) є обмеженим, а тому це рівняння має тільки тривіальний розв'язок. Звідси випливає, що задача (2.16)-(2.18) має тривіальний розв'язок. Теорему 2.2 доведено. □

2.1.3. *Висновки до підрозділу 2.1.* Для доведення існування та єдиності розв'язку необхідно накладати додаткові умови на вхідні дані задачі. Завдяки накладанню цих додаткових умов отримуємо глобальні існування та єдиність розв'язку.

2.2. **Обернена задача з крайовими умовами Діріхле-Неймана.** Тепер розглянемо задачу з умовами Діріхле-Неймана для повного параболічного рівняння.

2.2.1. *Формулювання задачі і отриманих результатів.* В області Q_T розглянемо обернену задачу знаходження невідомої пари функцій (a, u) таких, що

$$u_t = t^\beta a(t)\Delta u + b_1(x,y,t)u_x + b_2(x,y,t)u_y +$$

$$+ c(x,y,t)u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{2.24}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{2.25}$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \ (y,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

$$u_y(x,0,t) = \nu_1(x,t), \quad u_y(x,l,t) = \nu_2(x,t), \ (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{2.26}$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \varkappa(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.27}$$

де $0 < \beta < 1$ і $0 < y_0 < l$ – деяка фіксована точка.

Зауважимо, що замість умов Діріхле (2.4) з підрозділу 2.1 ми тепер маємо умови Неймана (2.26). В порівнянні з попереднім підрозділом змінилося також і рівняння - воно тепер містить молодші члени і, як ми побачимо далі, це становитиме основну складність в наших дослідженнях.

Означення 2.2. *Пара функцій* $(a,u) \in C[0,T_0] \times (C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0}))$, $a(t) > 0$ *для* $t \in [0,T_0]$, *яка задовольняє співвідношення* (2.24)-(2.27) *поточково для всіх* $t \le T_0$, *називається локальним розв'язком задачі* (2.24)-(2.27) *при* $T_0 < T$ *та глобальним розв'язком цієї задачі при* $T_0 = T$.

Припустимо, що вхідні дані задачі задовольняють такі умови:

(A1) $\varphi \in C^1(\overline{D}); \mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times [0,T]), \ \nu_i \in C^{1,0}([0,h] \times [0,T]), b_i, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T), \ i = 1,2, \ \varkappa \in C[0,T];$

(A2) $\varphi_x(x,y) > 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \ \varkappa(t) > 0, \quad t \in [0,T];$

(A3) $\mu_1(y,0)=\varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0)=\varphi(h,y)$, $\quad y\in[0,l]$,
$\nu_1(x,0)=\varphi_y(x,0)$, $\nu_2(x,0)=\varphi_y(x,l)$, $\quad x\in[0,h]$,
$\mu_{1y}(0,t)=\nu_1(0,t)$, $\mu_{1y}(l,t)=\nu_2(0,t)$,
$\mu_{2y}(0,t)=\nu_1(h,t)$, $\mu_{2y}(l,t)=\nu_2(h,t)$, $\quad t\in[0,T]$.

Теорема 2.3. ***(існування)*** *Якщо виконуються умови* ***(A1)*** - ***(A3)****, то існує локальний розв'язок* (a,u) *задачі (2.24)-(2.27).*

Для доведення єдиності розв'язку потребуватимемо таких умов:

(A4) $\varphi\in C^2(\overline{D})$, $b_i,c,f\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\mu_i\in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap C^{1,0}([0,l]\times[0,T])$, $\nu_i\in C^{2,1}([0,h]\times(0,T])\cap C^{1,0}([0,h]\times[0,T])$, існують скінченні границі $\lim\limits_{t\to+0}t^\beta\mu_{iyy}(y,t)$, $\lim\limits_{t\to+0}t^\beta\nu_{ixx}(x,t), i\in\{1,2\}$;

(A5) $\varkappa(t)\neq0$, $\quad t\in[0,T]$.

Теорема 2.4. ***(єдиність)*** *Якщо виконуються умови* ***(A4)*** - ***(A5)****, то задача (2.24)-(2.27) не може мати більше одного глобального розв'язку.*

У [96] вивчалася коефіцієнтна обернена задача для багатовимірного параболічного рівняння відмінного від (2.24) вигляду (молодші коефіцієнти рівняння залежали від $a(t)$) та інтегральною умовою перевизначення.

Обернені задачі визначення старшого коефіцієнта багатовимірного параболічного рівняння зі слабким виродженням, молодшими членами рівняння і залежними від часової та просторових змінних коефіцієнтами рівняння, раніше не вивчались.

2.2.2. *Доведення основних результатів.* Спершу доведемо теорему про існування розв'язку.

Доведення теореми 2.3. Якщо функція $a=a(t)$ є відомою, то розв'язок прямої задачі (2.24)-(2.26) має вигляд

$$u(x,y,t)=u_0(x,y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Big(b_1(\xi,\eta,\tau)v_1(\xi,\eta,\tau)+$$

$$+b_2(\xi,\eta,\tau)v_2(\xi,\eta,\tau)+c(\xi,\eta,\tau)u(\xi,\eta,\tau)\Big)d\xi d\eta d\tau, \qquad (2.28)$$

де похідні $u_x(x,y,t)$ та $u_y(x,y,t)$ позначено через v_1 та v_2, відповідно, і

$$u_0(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,$$

де функції G_{ij} взято з (2.7).

Використовуючи властивості функцій Гріна та інтегруючи частинами, з (2.28) обчислимо v_1 та v_2:

$$v_1(x,y,t)=u_{0x}(x,y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Big(b_1(\xi,\eta,\tau)v_1(\xi,\eta,\tau)+$$

$$+b_2(\xi,\eta,\tau)v_2(\xi,\eta,\tau)+c(\xi,\eta,\tau)u(\xi,\eta,\tau)\Big)d\xi d\eta d\tau, \qquad (2.29)$$

$$v_2(x,y,t)=u_{0y}(x,y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Big(b_1(\xi,\eta,\tau)v_1(\xi,\eta,\tau)+$$

$$+b_2(\xi,\eta,\tau)v_2(\xi,\eta,\tau)+c(\xi,\eta,\tau)u(\xi,\eta,\tau)\Big)d\xi d\eta d\tau, \qquad (2.30)$$

де

$$u_{0x}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)\Big(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-$$

$$-f(h,\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Big(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \qquad (2.31)$$

$$u_{0y}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\eta(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \qquad (2.32)$$

Отримали систему інтегральних рівнянь (2.28), (2.29), (2.30). Для приєднання до цієї системи рівняння, що отримується з умови перевизначення (2.27) , оцінимо знизу $v_1(0,y_0,t)$. Розглянемо перший інтеграл з рівності для u_{0x}. Використовуючи рівність (2.11) та умови **(A2)**, отримаємо

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta \geq \min_{\overline{D}}\varphi_x(x,y) := M_1 > 0.$$

Беручи до уваги, що всі інші інтеграли в формулі (2.29) прямують до нуля при $t\to+0$, встановлюємо існування такого числа $T_1\in(0,T]$, що на проміжку $[0,T_1]$ виконуватиметься нерівність

$$\Big|\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t,h,\eta,\tau)\Big(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-$$

$$-f(h,\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t,0,\eta,\tau)\Big(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-$$

$$-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(0,y_0,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(0,y_0,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1(\xi,\eta,\tau)v_1(\xi,\eta,\tau)+$$

$$+ b_2(\xi,\eta,\tau)v_2(\xi,\eta,\tau) + c(\xi,\eta,\tau)u(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau\Bigg| \leq \frac{M_1}{2}. \tag{2.33}$$

Тоді

$$v_1(0,y_0,t) \geq \frac{M_1}{2} > 0, \quad t \in [0,T_1], \tag{2.34}$$

і умову (2.27) можна подати у вигляді

$$a(t) = \frac{\varkappa(t)}{v_1(0,y_0,t)}, \quad t \in [0,T_1]. \tag{2.35}$$

Отже, задачу (2.24)-(2.27) зведено до системи рівнянь (2.28), (2.29), (2.30), (2.35), у якій час належить звуженому проміжку $[0,T_1]$. Позначимо праві частини рівностей (2.28), (2.29), (2.30), (2.35) через P_0, P_1, P_2, P_3 відповідно. Тоді ці співвідношення набудуть вигляду

$$u = P_0(u,v_1,v_2,a), \tag{2.36}$$

$$v_1 = P_1(u,v_1,v_2,a), \tag{2.37}$$

$$v_2 = P_2(u,v_1,v_2,a), \tag{2.38}$$

$$a = P_3(u,v_1,v_2,a). \tag{2.39}$$

Надалі для зручності аргументи (u,v_1,v_2,a) операторів $P_i, i=\overline{0,3}$ опускатимемо.

Легко переконатись, що у певному сенсі ця система еквівалентна оберненій задачі (2.24)-(2.27). Дійсно, якщо $(a(t),u(x,y,t))-$ розв'язок задачі (2.24)-(2.27) з класу $C[0,T_1]\times(C^{2,1}(Q_{T_1})\cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_1})$, то зі способу отримання системи (2.36), (2.37), (2.38), (2.39) функції $(a(t),u(x,y,t),v_1=u_x(x,y,t),v_2=u_y(x,y,t))$ будуть неперервним розв'язком цієї системи.

З іншого боку, якщо $(a(t)$, $u(x,y,t)$, $v_1(x,y,t)$, $v_2(x,y,t))$ – неперервний розв'язок системи рівнянь (2.36), (2.37), (2.38), (2.39), то, диференціюючи послідовно рівняння (2.28) за змінними x та y, переконуємось у тому, що $v_1(x,y,t)\equiv u_x(x,y,t), v_2(x,y,t)\equiv u_y(x,y,t)$. Тоді з рівняння (2.36) випливатиме, що $u(x,y,t)$ належить до класу $C^{2,1}(Q_{T_1})\cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_1})$ і задовольняє умови (2.24)-(2.26) для будь-якої функції $a(t) > 0$ з класу $C[0, T_1]$. Виконання умови (2.27) є очевидним внаслідок рівняння (2.39).

Доведемо існування розв'язку системи рівнянь (2.36), (2.37), (2.38), (2.39), використовуючи теорему Шаудера. Для цього спершу встановимо допоміжні оцінки, припустивши, що $a \in C[0, T]$ – відома функція. Для оцінки P_3 зверху використаємо рівняння (2.35) та нерівність (2.34) :

$$P_3 \leq \frac{2 \max\limits_{[0,T]} \varkappa(t)}{M_1} := A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_1]. \tag{2.40}$$

Перейдемо до оцінки P_3 знизу. Введемо позначення:

$$U(t) := \max_{(x,y)\in\overline{D}} |u(x, y, t)|,$$

$$V_k(t) := \max_{(x,y)\in\overline{D}} |v_k(x, y, t)|, k \in \{1, 2\}.$$

Використовуючи (2.11) та оцінки функцій Гріна [95]

$$G_k(x, t, \xi, \tau) \leq C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \quad k \in \{1, 2\},$$

$$\int\limits_0^h G_1(x, t, \xi, \tau) d\xi \leq 1,$$

оцінимо інтеграли, які входять у вираз для u_0:

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{12\xi}(x, y, t, 0, \eta, \tau) \tau^\beta a(\tau) \mu_1(\eta, \tau) d\eta d\tau \right| \leq$$

$$\leq \max_{[0,l]\times[0,T]} |\mu_1(y, t)| \int\limits_0^t G_{1\xi}(x, t, 0, \tau) \tau^\beta a(\tau) d\tau \int\limits_0^l G_2(y, t, \eta, \tau) d\eta \leq C_3,$$

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{12}(x, y, t, \xi, 0, \tau) \tau^\beta a(\tau) \nu_1(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \leq$$

$$\leq \max_{[0,h]\times[0,T]} |\nu_1(x, t)| \int\limits_0^t G_2(y, t, 0, \tau) \tau^\beta a(\tau) d\tau \times \int\limits_0^h G_1(x, t, \xi, \tau) d\xi \leq$$

$$\leq C_4 + C_5 \int\limits_0^t \frac{\tau^\beta a(\tau) d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leq C_4 + C_6\sqrt{\theta(t)} \leq C_7.$$

Зауважимо, що тут було використано (2.40). Отже,

$$|u_0(x, y, t)| \leq M_0 < \infty, \quad (x, y, t) \in \overline{Q}_{T_1},$$

де стала M_0 визначається вхідними даними. З аналогічних міркувань знаходимо

$$|u_{0y}(x, y, t)| \leq M_1 < \infty,$$

$$|u_{0x}(x, y, t)| \leq C_8 + C_9 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \quad (x, y, t) \in \overline{Q}_{T_1}.$$

Використовуючи знайдені оцінки, з рівнянь (2.28), (2.29), (2.30) отримаємо

$$P_0 \leq C_{10} + C_{11} \int\limits_0^t (V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau))\, d\tau,\ t \in [0, T_1], \tag{2.41}$$

$$P_1 \leq C_{12} + C_{13} \int\limits_0^t \frac{(V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau) + 1) d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}},\ t \in [0, T_1], \tag{2.42}$$

$$P_2 \leq C_{14} + C_{15} \int\limits_0^t \frac{(V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau)) d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}},\ t \in [0, T_1]. \tag{2.43}$$

Домножимо і поділимо підінтегральний вираз у (2.41) на $\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}$. Використавши (2.40), матимемо

$$P_0 \leq C_{10} + C_{16} \int\limits_0^t \frac{V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, T_1]. \tag{2.44}$$

Ввівши позначення $W := U + V_1 + V_2 + 1$, прийдемо до нерівності

$$P_0 \leq C_{17} + C_{18} \int\limits_0^t \frac{W(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, T_1]. \tag{2.45}$$

Із умови перевизначення (2.27) маємо

$$a(t) W(t) \geq \varkappa(t)$$

тобто

$$1 \leq \frac{a(t)W(t)}{\varkappa(t)}.$$

Враховуючи, що $\varkappa(t)$ – обмежена на $[0,T]$ функція, підставимо отриману нерівність у (2.45) :

$$P_0 \leq C_{19} + C_{20} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)W^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau. \qquad (2.46)$$

Оцінимо останній інтеграл в цій нерівності. Беручи до уваги нерівність

$$\theta(t) \leq \frac{t^{\beta+1}}{\beta+1} A_1, \quad \text{тобто} \quad \left(\frac{\theta(t)(\beta+1)}{A_1}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \leq t^{\beta},$$

матимемо

$$\int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau \leq C_{21} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)\tau^{\beta} d\tau}{(\theta(\tau))^{\frac{\beta}{\beta+1}} \sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Після заміни $z = \dfrac{\theta(\tau)}{\theta(t)}$ отримуємо

$$\int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau \leq C_{22} (\theta(t))^{\frac{1-\beta}{2(\beta+1)}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{z^{\frac{\beta}{\beta+1}} \sqrt{1-z}}.$$

Оскільки $\dfrac{\beta}{\beta+1} < \dfrac{1}{2}$ для $0 < \beta < 1$, то

$$\int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau \leq C_{23} (\theta(t))^{\frac{1-\beta}{2(\beta+1)}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} =$$

$$= C_{24} \left(\theta(t)\right)^{\frac{1-\beta}{2(\beta+1)}} \to +0 \text{ при } t \to +0.$$

Тоді для досить малого $T_0 > 0$ матимемо з (2.46) таку нерівність:

$$P_0 \leq C_{19} + C_{24} \left(\theta(t)\right)^{\frac{1-\beta}{2(\beta+1)}} \leq 2C_{19}, \ t \in [0, T_0]. \qquad (2.47)$$

Аналогічно проводимо оцінки виразів P_1 та P_2. Використавши (2.34), доводимо, що

$$P_1 \geq \frac{M_1}{2}, \quad t \in [0, T_0]. \qquad (2.48)$$

Для P_3 вже маємо оцінку (2.40). Крім того, якщо

$$|v_1(x,y,t)| \leq M_3,\ |v_2(x,y,t)| \leq M_3,$$

$$|u(x,y,t)| \leq M_3, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \tag{2.49}$$

то з (2.35) отримаємо оцінку:

$$P_3 \geq \frac{\min \varkappa(t)}{M_3} \geq A_0 > 0, \quad t \in [0,T_0], \tag{2.50}$$

де A_0 визначається вхідними даними.

Перейдемо накінець до безпосереднього доведення теореми. Систему рівнянь (2.36)-(2.39) подамо у вигляді

$$(a,u,v_1,v_2) = P(a,u,v_1,v_2), \tag{2.51}$$

де $P = (P_0,P_1,P_2,P_3)$. З оцінок типу (2.40), (2.47), (2.48), (2.50) випливає, що оператор P переводить множину

$$\mathcal{N} = \Big\{(a,u,v_1,v_2) \in C[0,T_0] \times \big(C(\overline{Q}_{T_0})\big)^3 :$$

$$A_0 \leq a(t) \leq A_1,\ |u(x,y,t)| \leq M_3,\ \frac{M_1}{2} \leq v_1(x,y,t) \leq M_3,\ |v_2(x,y,t)| \leq M_3\Big\}$$

саму в себе. Те, що цей оператор є цілком неперервним, доводимо аналогічно, як в [50]. Тому за теоремою Шаудера існує нерухома точка оператора P, а, отже, і неперервний розв'язок системи рівнянь (2.28), (2.29), (2.30), (2.35). Теорему 2.3 доведено. $\square$

Тепер доведемо єдиність розв'язку.

Доведення теореми 2.4. Нехай $(a_k,u_k), k \in \{1,2\}$ – два розв'язки задачі (2.24)-(2.27). Для їх різниці

$$a := a_1 - a_2, \quad u := u_2 - u_2$$

матимемо задачу

$$u_t = t^\beta a_1(t)\Delta u + t^\beta a(t)\Delta u_2 + b_1(x,y,t)u_x + b_2(x,y,t)u_y +$$

$$+ c(x,y,t)u, \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{2.52}$$

$$u(x,y,0)=0,\quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{2.53}$$

$$u(0,y,t)=u(h,y,t)=0,\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T],$$

$$u_y(x,0,t)=u_y(x,l,t)=0,\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{2.54}$$

$$a_1(t)u_x(0,y_0,t)=-a(t)u_{2x}(0,y_0,t),\quad t\in[0,T]. \tag{2.55}$$

Із використанням функції Гріна $\tilde{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ для параболічного рівняння

$$u_t=t^\beta a_1(t)\Delta u+b_1(x,y,t)u_x+b_2(x,y,t)u_y+c(x,y,t)u$$

задача (2.52)-(2.55) зведеться до інтегрального рівняння

$$a(t)=-\frac{a_1(t)}{u_{2x}(0,y_0,t)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h\tilde{G}_{12x}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\,\tau^\beta a(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,\quad t\in[0,T]. \tag{2.56}$$

Зауважимо, що з умови **(A5)** випливає, що $u_{2x}(0,y_0,t)\neq 0$. Оцінимо ядро цього рівняння. Позначимо через $G^*_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ функцію Гріна задачі (2.25), (2.26) для рівняння теплопровідності

$$u_t=t^\beta a_2(t)\Delta u.$$

Використовуючи для зображення u_2 формулу, аналогічну (2.28), та диференціюючи її, знаходимо

$$u_{2xx}(x,y,t)=u_{02xx}(x,y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G^*_{12\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Big(b_1(h,\eta,\tau)u_{2\xi}(h,\eta,\tau)+b_2(h,\eta,\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+\,c(h,\eta,\tau)\mu_2(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G^*_{12\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$

$$\times \Big(b_1(0,\eta,\tau)u_{2\xi}(0,\eta,\tau) + b_2(0,\eta,\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau) +$$

$$+ c(0,\eta,\tau)\mu_1(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{12\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) \times$$

$$\times (b_1(\xi,\eta,\tau)u_{2\xi\xi} + b_2(\xi,\eta,\tau)u_{2\eta\xi} + (b_{1_\xi}(\xi,\eta,\tau) +$$

$$+ c(\xi,\eta,\tau))u_{2\xi} + b_{2_\xi}(\xi,\eta,\tau)u_{2\eta} + c_\xi(\xi,\eta,\tau)u_2)d\xi d\eta d\tau, \tag{2.57}$$

$$u_{2yy}(x,y,t) = u_{02yy}(x,y,t) - \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{12\eta}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) \times$$

$$\times \Big(b_1(\xi,\eta,\tau)u_{2\xi\eta} + b_2(\xi,\eta,\tau)u_{2\eta\eta} + (b_{2_\eta}(\xi,\eta,\tau) +$$

$$+ c(\xi,\eta,\tau))u_{2\eta} + b_{1_\eta}(\xi,\eta,\tau)u_{2\xi} + c_\eta(\xi,\eta,\tau)u_2\Big)d\xi d\eta d\tau, \tag{2.58}$$

де

$$u_{02xx}(x,y,t) = \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^l G^*_{12\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\Big(\mu_{2\tau}(\eta,\tau) -$$

$$- \tau^\beta a_2(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^l G^*_{12\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\Big(\mu_{1\tau}(\eta,\tau) - \tau^\beta a_2(\tau) \times$$

$$\times \mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G^*_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau) \times$$

$$\times \tau^\beta a_2(\tau)\nu_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{1\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{12\xi}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,$$

$$u_{02yy}(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\int_0^t\int_0^l G_{12\xi}^*(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G_{12\xi}^*(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,l,\tau)\Big(\nu_{2\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\times$$

$$\times\,\nu_{2\xi\xi}(\xi,\tau)-f(\xi,l,\tau)\Big)d\xi d\tau-\int_0^t\int_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,0,\tau)\times$$

$$\times\Big(\nu_{1\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{1\xi\xi}(\xi,\tau)-f(\xi,0,\tau)\Big)d\xi d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{12\eta}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau.$$

Якщо в (2.56) підставити вираз Δu_2, знайдений з (2.57), (2.58), то утвориться інтегральне рівняння Вольтерра вигляду

$$a(t)=\int_0^t K(t,\tau)a(\tau)d\tau,\quad t\in[0,T] \tag{2.59}$$

стосовно невідомої $a(t)$. Дослідимо порядок особливості ядра $K(t,\tau)$. Для цього виділимо з ядра доданок K_0 з найвищою особливістю

$$K_0(t,\tau) := \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h \tilde{G}_{12x}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta d\xi d\eta d\tau \times$$

$$\times \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l G^*_{12\xi_1}(\xi,\eta,\tau,0,\eta_1,\tau_1) d\eta_1 d\tau_1.$$

Беручи до уваги (2.11), матимемо

$$|K_0(t,\tau)| \le C_1 \int\limits_0^t \tau^\beta d\tau \int\limits_0^h \tilde{G}_{1x}(0,t,\xi,\tau)d\xi \int\limits_0^\tau \times$$

$$\times G^*_{1\xi_1}(\xi,\tau,0,\tau_1)d\tau_1.$$

За властивостями функцій Гріна для встановлення порядку особливості K_0 достатньо оцінити аналогічний вираз, складений із параметриксів [56]:

$$K_1(t,\tau) := \int\limits_0^t \tau^\beta d\tau \int\limits_0^\tau d\tau_1 \int\limits_0^h \frac{\xi^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}} \times$$

$$\times \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}\right)}{(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/2}} d\xi.$$

Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, оцінимо внутрішній інтеграл з $K_1(t,\tau)$:

$$\int\limits_0^h \frac{\xi^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}} \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}\right)}{(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/2}} d\xi \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^h \frac{\xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2(\theta(t)-\theta(\tau))}}}{(\theta(t)-\theta(\tau))^3} d\xi\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^h \frac{\xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}}}{(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^3} d\xi\right)^{1/2}.$$

У кожному з інтегралів проведемо заміни змінних, відповідно $z = \frac{\xi}{\sqrt{2(\theta(t)-\theta(\tau))}}$ та $\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{2(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}}$:

$$\int\limits_0^h \frac{\xi^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}} \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}\right)}{(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/2}} d\xi \leq$$

$$\leq \frac{C_1}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/4}(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/4}} \left(\int\limits_0^\infty z^2 e^{-z^2} dz\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^\infty \zeta^2 e^{-\zeta^2} d\zeta\right)^{1/2} \leq \frac{C_2}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/4}(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/4}} \leq$$

$$\leq \frac{C_3}{(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})^{3/4}(\tau^{\beta+1}-\tau_1^{\beta+1})^{3/4}}.$$

Тоді

$$K_1(t,\tau) \leq C_3 \int\limits_0^t \tau^\beta d\tau \int\limits_0^\tau \frac{d\tau_1}{(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})^{3/4}(\tau^{\beta+1}-\tau_1^{\beta+1})^{3/4}}.$$

Змінимо порядок інтегрування і виконаємо заміну змінної $z = \dfrac{\tau^{\beta+1}-\tau_1^{\beta+1}}{t^{\beta+1}-\tau_1^{\beta+1}}$:

$$K_1(t,\tau) \leq C_4 \int\limits_0^t \frac{d\tau_1}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau_1^{\beta+1}}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{z^{3/4}(1-z)^{3/4}} \leq$$

$$\leq C_5 \int\limits_0^t \frac{d\tau_1}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau_1^{\beta+1}}}.$$

Після заміни $\sigma = \dfrac{\tau}{t}$ отримуємо оцінку

$$K_1(t,\tau) \leq C_6 t^{\frac{1-\beta}{2}},$$

і, отже, особливість ядра $K(t,\tau)$ інтегровна. Це означає, що рівняння (2.59) має тільки тривіальний розв'язок $a(t) \equiv 0, t \in [0,T]$. Тоді і $u(x,y,t) \equiv 0, (x,y,t) \in \overline{Q}_T$ як розв'язок однорідної задачі, що відповідає (2.52)-(2.54). Теорему 2.4 доведено. $\square$

2.2.3. *Висновки до підрозділу 2.2.* В цьому підрозділі розглянуто обернену задачу знаходження залежного від часу старшого коефіцієнта повного параболічного рівняння, що вироджується у початковий момент часу. У якості крайових умов обрано змішані умови Діріхле-Неймана.

2.3. **Висновки до розділу 2.** У цьому розділі вивчено обернені задачі для параболічних рівнянь зі слабким виродженням в головній частині рівняння. Доведено теореми існування та єдиності розв'язків розглянутих задач. У випадку параболічного рівняння з молодшими членами вдалося довести лише локальне існування розв'язку задачі. Для параболічного рівняння простішого вигляду вдалося отримати глобальний розв'язок задачі.

Результати цього розділу опубліковано у [1] і додатково висвітлено у працях [6], [7], [11].

3. РОЗДІЛ 3
АНІЗОТРОПНІ ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

У цьому розділі розглянуто анізотропне повне параболічне рівняння зі слабким виродженням. Старші коефіцієнти рівняння нерівномірно вироджуються при $t = 0$.

Результати цього розділу опубліковано у [2] і додатково висвітлено у [8].

3.1. **Локальна розв'язність оберненої задачі для повного параболічного рівняння.**

3.1.1. *Формулювання задачі і отриманих результатів.* Розглянемо таку задачу: знайти трійку функцій (u, a_1, a_2), що задовольняють рівності:

$$u_t = t^{\beta_1} a_1(t) u_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t) u_{yy} + b_1(x,y,t) u_x + b_2(x,y,t) u_y + c(x,y,t) u +$$

$$+ f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{3.1}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{3.2}$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t),\ u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3.3}$$

$$u(x,0,t) = \nu_1(x,t),\ u(x,l,t) = \nu_2(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{3.4}$$

$$a_1(t) u_x(0,y_0,t) = \varkappa_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.5}$$

$$a_2(t) u_y(x_0,0,t) = \varkappa_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.6}$$

де $0 < \beta_i < 1$, $i = 1, 2$, і x_0, y_0 – деякі фіксовані точки із $(0,h)$ та $(0,l)$ відповідно.

Означення 3.1. *Локальним розв'язком задачі (3.1)-(3.6) називається трійка функцій* $(u(x,y,t), a_1(t), a_2(t))$, *що належить до класу* $\big(C^{2,1}(\overline{D} \times (0,T_0]) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})\big) \times C[0,T_0] \times C[0,T_0]$, *причому* $a_i(t) > 0,\ i = 1,2,\ t \in [0,T_0]$, *яка задовольняє (3.1)-(3.6) поточково для* $t \in [0,T_0]$, *де* $T_0 \in (0,T)$.

Припустимо, що вхідні дані задачі задовольняють такі умови:

(A1) $\varphi \in C^1(\overline{D})$; $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,l] \times [0,T])$;

$\nu_i \in C^{2,1}([0,h] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,h] \times [0,T])$; $\varkappa_i \in C[0,T]$, $b_i, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $i = 1,2$;

(A2) $\varphi_x(x,y) > 0, \varphi_y(x,y) > 0,\ (x,y) \in \overline{D}$; $\mu_{1_y}(y,t) \geq 0, \mu_{2_y}(y,t) \geq 0,\ (y,t) \in [0,l] \times [0,T]$; $|t^{\beta_2}\mu_{kyy}(y,t)| \leq A_k < \infty,\ k = 1,2,\ (y,t) \in [0,l] \times [0,T]$; $\nu_{1_x}(x,t) \geq 0,\ \nu_{2_x}(x,t) \geq 0, (x,t) \in [0,h] \times [0,T]$;

$|t^{\beta_1}\nu_{kxx}(x,t)| \leq B_k < \infty,\ k = 1,2,\ (x,t) \in [0,h] \times [0,T]$; $\varkappa_i(t) > 0,\ t \in [0,T],\ i = 1,2$;

(A3) $\mu_1(y,0) = \varphi(0,y), \mu_2(y,0) = \varphi(h,y),\ \nu_1(x,0) = \varphi(x,0), \nu_2(x,0) = \varphi(x,l),\ \mu_1(0,t) = \nu_1(0,t), \mu_1(l,t) = \nu_2(0,t),\ \mu_2(0,t) = \nu_1(h,t), \mu_2(l,t) = \nu_2(h,t)$.

Теорема 3.1. ***(локальне існування)*** *Нехай виконуються умови* ***(A1)*** *-* ***(A3)***. *Тоді існує локальний розв'язок* $(u(x,y,t), a_1(t), a_2(t))$ *задачі (3.1)-(3.6).*

Коефіцієнтні обернені задачі для анізотропних багатовимірних параболічних рівнянь з різними показниками виродження при різних просторових компонентах раніше не вивчались.

3.1.2. *Доведення основних результатів.* Доведемо теорему існування.

Доведення теореми 3.1. Якщо функції $a_1 = a_1(t)$ та $a_2 = a_2(t)$ відомі, то розв'язок прямої задачі (3.1)-(3.4) має вигляд

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Big(b_1(\xi,\eta,\tau)v + b_2(\xi,\eta,\tau)w + \\ + c(\xi,\eta,\tau)u\Big)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{3.7}$$

де $v := u_x$, $w := u_y$,

$$u_0(x,y,t) = \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^{\beta_1} a_1(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^{\beta_1} a_1(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^{\beta_2} a_2(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^{\beta_2} a_2(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{3.8}$$

Тут і далі в цьому розділі через $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ позначено функції Гріна задачі з крайовими умовами i-го роду за змінною x та j-го роду за змінною y для рівняння теплопровідності

$$u_t = t^{\beta_1} a_1(t)u_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t)u_{yy} + f(x,y,t).$$

Відомо, що [17]:

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}} \times$$

$$\times \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \Bigg(\Big(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\Big) + (-1)^i \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\Big)\Big) \times$$

$$\times \Big(\exp\Big(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\Big) + (-1)^j \exp\Big(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\Big)\Big)\Bigg),\ i,j=1,2,$$

де

$$\theta_k(t)=\int\limits_0^t \tau^{\beta_k}a_k(\tau)d\tau,\ k=1,2.$$

Спершу проведемо певні допоміжні міркування, вважаючи відомими функції $a_i\in C[0,T]$, $i=1,2$. Диференціюючи (3.7) по x і y та використовуючи властивості функцій Гріна, матимемо:

$$v(x,y,t)=u_{0_x}(x,y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11_x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Big(b_1(\xi,\eta,\tau)v+b_2(\xi,\eta,\tau)w+c(\xi,\eta,\tau)u\Big)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{3.9}$$

$$w(x,y,t)=u_{0_y}(x,y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11_y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Big(b_1(\xi,\eta,\tau)v+b_2(\xi,\eta,\tau)w+c(\xi,\eta,\tau)u\Big)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{3.10}$$

де

$$u_{0_x}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)\big(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau)\big)d\eta d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)\big(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau)\big)d\eta d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\times$$

$$\times\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \tag{3.11}$$

$$u_{0_y}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\eta(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\mu_{1_\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\mu_{2_\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\big(\nu_{1_\tau}(\xi,\tau)-\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\nu_{1_{\xi\xi}}(\xi,\tau)-f(\xi,0,\tau)\big)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\big(\nu_{2_\tau}(\xi,\tau)-\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\nu_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)-f(\xi,l,\tau)\big)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{3.12}$$

Покажемо, що $v(0,y_0,t)>0$, $w(x_0,0,t)>0$. Підставимо (3.11) у (3.9) і позначимо інтеграли у отриманому виразі через $I_i, i=\overline{1,7}$. Встановимо оцінки для I_i, використовуючи умови **(A2)**.

Відомо, що функцію Гріна $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ можна подати як добуток двох одновимірних функцій Гріна $G_i(x,t,\xi,\tau)G_j(y,t,\eta,\tau)$, для яких безпосереднім обчисленням встановлюються рівності

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi=1,\ \int\limits_0^l G_2(y,t,\eta,\tau)d\eta=1.$$

Тоді для I_1, I_4, I_5 отримуємо:

$$I_1\geq\min_{(x,y)\in\overline{D}}\varphi_x(x,y)\int\limits_0^l G_1(y,t,\eta,0)d\eta,$$

$$I_4\geq\min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}}\nu_{1_x}(x,t)\int\limits_0^t G_{1_\eta}(y,t,0,\tau)\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau,$$

$$I_5\geq\min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}}\nu_{2_x}(x,t)\left(-\int\limits_0^t G_{1_\eta}(y,t,l,\tau)\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau\right).$$

Для їхньої суми виконується нерівність

$$I_1 + I_4 + I_5 \geq$$

$$\geq \min\Big\{ \min_{(x,y)\in\overline{D}} \varphi_x(x,y), \min_{\substack{x\in[0,h] \\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \min_{\substack{x\in[0,h] \\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t) \Big\} \times$$

$$\times \Bigg(\int_0^l G_1(y,t,\eta,0)d\eta + \int_0^t G_{1_\eta}(y,t,0,\tau)\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau - \int_0^t G_{1_\eta}(y,t,l,\tau)\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau \Bigg).$$

Вираз у дужках є розв'язком такої задачі:

$$u_t = t^{\beta_2}a_2(t)u_{yy},\ (y,t) \in (0,l)\times(0,T),$$

$$u(y,0) = 1,\ y \in [0,l],$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 1,\ t \in [0,T].$$

Він тотожно дорівнює 1. Тому

$$I_1 + I_4 + I_5 \geq$$

$$\geq \min\left\{ \min_{\substack{x\in[0,h] \\ y\in[0,l]}} \varphi_x(x,y), \min_{\substack{x\in[0,h] \\ t\in[0,T]}} \nu_{1_x}(x,t), \right.$$

$$\left. \min_{\substack{x\in[0,h] \\ t\in[0,T]}} \nu_{2_x}(x,t) \right\} := M_1 > 0.$$

З того, що інтеграли I_2, I_3, I_6, I_7 прямують до нуля при $t \to +0$, випливає існування такого $T_1 \in (0,T]$, що

$$\frac{M_1}{2} + I_2 + I_3 + I_6 + I_7 \geq 0, \quad (x,y,t) \in \overline{D}\times[0,T_1].$$

Звідси отримуємо

$$v(x,y,t) \geq \frac{M_1}{2}, \quad (x,y,t) \in \overline{D}\times[0,T_1]. \tag{3.13}$$

Застосувавши аналогічні міркування до $w(x,y,t)$, матимемо

$$w(x,y,t) \geq \frac{M_2}{2} > 0, \quad (x,y,t) \in \overline{D}\times[0,T_2]. \tag{3.14}$$

Враховуючи (3.13), (3.14), подамо (3.5), (3.6) у вигляді:

$$a_1(t) = \frac{\varkappa_1(t)}{v(0, y_0, t)}, \quad t \in [0, T_3], \tag{3.15}$$

$$a_2(t) = \frac{\varkappa_2(t)}{w(x_0, 0, t)}, \quad t \in [0, T_3], \tag{3.16}$$

де $T_3 = \min\{T_1, T_2\}$. Отже, задачу (3.1)-(3.6) зведено до системи рівнянь (3.7), (3.9), (3.10), (3.15), (3.16), яку ми перепишемо, відповідно, так:

$$u = P_1(u, v, w, a_1, a_2), \tag{3.17}$$

$$v = P_2(u, v, w, a_1, a_2), \tag{3.18}$$

$$w = P_3(u, v, w, a_1, a_2), \tag{3.19}$$

$$a_1 = P_4(u, v, w, a_1, a_2), \tag{3.20}$$

$$a_2 = P_5(u, v, w, a_1, a_2). \tag{3.21}$$

Для зручності ми надалі опускатимемо аргументи (u, v, w, a_1, a_2) операторів $P_i, i = \overline{1, 5}$.

Покажемо, що задачі (3.1)-(3.6) та (3.17)-(3.21) є еквівалентними у такому сенсі: якщо (u, a_1, a_2) – розв'язок задачі (3.1)-(3.6), що належить до класу $\big(C^{2,1}(\overline{D}\times(0,T_3])\cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_3})\big)\times C[0,T_3]\times C[0,T_3]$, то $(u, v = u_x, w = u_y, a_1, a_2)$ є розв'язком системи (3.17) - (3.21) з класу $(C(\overline{Q}_{T_3}))^3 \times (C[0, T_3])^2$; правильним є і зворотне твердження. Перше твердження є очевидним внаслідок способу отримання системи (3.17)-(3.21). Доведемо зворотне твердження. Диференціюючи рівняння (3.7) по x та y, бачимо, що $v = u_x$, $w = u_y$. Тоді u як розв'язок рівняння (3.7) задовольняє (3.1)-(3.4) і належить до класу $C^{2,1}(\overline{D} \times (0, T_3]) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_3})$. Виконання умов (3.5), (3.6) випливає з (3.20), (3.21).

Отже, достатньо встановити існування неперервного розв'язку системи рівнянь (3.17) - (3.21). Застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку. Для цього спершу встановимо допоміжні оцінки.

Використовуючи (3.13) та (3.14) у (3.15) і (3.16), отримуємо

$$P_4 \leq A_1,\ P_5 \leq A_2,\ t \in [0, T_3], \tag{3.22}$$

де A_1 та A_2 визначаються вхідними даними.

Беручи до уваги оцінки функцій Гріна, приходимо до нерівностей:

$$|u_{0_x}(x,y,t)| \leq C_1 + C_2 \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_{T_3},$$

$$|u_{0_y}(x,y,t)| \leq C_3 + C_4 \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_{T_3},$$

де сталі C_i, $i = \overline{1,4}$, залежать від вхідних даних та від чисел $a_{k_{max}} = \max\limits_{0 \leq t \leq T} a_k(t)$, $k = 1, 2$.

Введемо позначення

$$U(t) := \max_{(x,y) \in \overline{D}} |u(x,y,t)|,$$

$$V_1(t) := \max_{(x,y) \in \overline{D}} |v(x,y,t)|,$$

$$V_2(t) := \max_{(x,y) \in \overline{D}} |w(x,y,t)|.$$

Тоді

$$P_1 \leq C_5 + C_6 \int\limits_0^t \left(V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau)\right) d\tau,$$

$$P_2 \leq C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} \left(V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau)\right) d\tau,$$

$$P_3 \leq C_9 + C_{10} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \left(V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau)\right) d\tau.$$

Звідси отримаємо, що

$$P_i \le C_{11} +$$

$$+ C_{12} \int\limits_0^t \Big(\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} + \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \Big) V(\tau) d\tau,\ i = 1, 2, 3, \qquad (3.23)$$

де $V(t) := V_1(t) + V_2(t) + U(t)$, а сталі C_{11}, C_{12} залежать від $a_{1_{max}}$, $a_{2_{max}}$.

Із умов перевизначення випливає, що

$$a_i(t)V(t) \ge \varkappa_i(t),\ 1 \le \frac{a_i(t)V(t)}{\varkappa_i(t)}, \quad i = 1, 2,$$

а тому з (3.23) отримаємо

$$P_i \le C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t \Big(\frac{a_1(\tau)}{\varkappa_1(\tau)\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} + \frac{a_2(\tau)}{\varkappa_2(\tau)\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \Big) V^2(\tau) d\tau.$$

Тому, аналогічно як в підрозділі 2.2 при досить малому $t \in [0, T_0]$, де $T_0 \in (0, T_3]$, отримуємо, що

$$P_i \le 2C_{11}, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (3.24)$$

Крім того, якщо припустити, що $M_3 > 0$ – досить велике та

$$|u(x, y, t)| \le M_3,\ v(x, y, t) \le M_3,\ w(x, y, t) \le M_3, \quad (x, y, t) \in \overline{Q}_{T_0},$$

то (див. (3.15), (3.16))

$$P_i \ge \frac{\min \varkappa_i(t)}{M_3} \ge A_3 > 0, \quad i = 4, 5. \qquad (3.25)$$

Перейдемо нарешті до безпосереднього доведення теореми. Позначивши $\omega := (u, v, w, a_1, a_2)$, систему (3.17) - (3.21) подамо у вигляді:

$$\omega = \mathcal{P}\omega,\ \omega \in \mathcal{N}, \qquad (3.26)$$

де

$$\mathcal{N} := \Big\{ \omega \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^3 \times (C([0, T_0])^2 :\ |u| \le M_3, \frac{M_1}{2} \le v \le M_3,$$

$$\frac{M_2}{2} \le w \le M_3, A_3 \le a_1 \le A_1, A_3 \le a_2 \le A_2 \Big\}. \qquad (3.27)$$

Із побудови множини $\mathcal{N}$ та отриманих нами оцінок випливає, що оператор $\mathcal{P}$ відображає множину $\mathcal{N}$ саму в себе. Одностайна неперервність множини $\mathcal{PN}$ доводиться аналогічно до [50]. Тоді із теореми Шаудера випливає, що існує нерухома точка оператора $\mathcal{P}$, що доводить існування розв'язку задачі (3.1)-(3.6). Теорему 3.1 доведено. $\square$

3.1.3. *Висновки до підрозділу 3.1.* В цьому підрозділі розглянуто локальне існування розв'язку оберненої задачі для анізотропного параболічного рівняння зі слабким виродженням.

3.2. **Глобальна розв'язність оберненої задачі для повного параболічного рівняння.** Доведемо тепер глобальні існування та єдиність розв'язку. Глобальне існування вимагає накладання великої кількості додаткових умов на вхідні дані задачі.

3.2.1. *Формулювання задачі і отриманих результатів.*

Означення 3.2. *Глобальним розв'язком задачі (3.1)-(3.6) називається трійка функцій* $(u(x,y,t),a_1(t),a_2(t))$, *що належить до класу* $\left(C^{2,1}(\overline{D}\times(0,T])\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)\right)\times C[0,T]\times C[0,T]$, *де* $a_i(t)>0,\ i=1,2,\ t\in[0,T]$.

Припустимо, що вхідні дані задачі задовольняють такі умови:

(A4) $\varphi(x,y)\ge 0,\ \varphi_x(x,y)>0,\ \ \varphi_y(x,y)>0,\ \ (x,y)\in\overline{D};\ \ \mu_{1_t}(y,t)-b_2(0,y,t)\mu_{1_y}(y,t)-c(0,y,t)\mu_1(y,t)-f(0,y,t)<0,\ \mu_{2_t}(y,t)-b_2(h,y,t)\mu_{2_y}(y,t)-c(h,y,t)\mu_2(y,t)-f(h,y,t)>0,\ \mu_i(y,t)\ge 0,\ \mu_{i_y}(y,t)>0,\ i=1,2,\ \mu_{1_{yy}}(y,t)\ge 0,\ \mu_{2_{yy}}(y,t)\le 0,$

$b_1(0,y,t)<0,\ b_1(h,y,t)>0,\ (y,t)\in[0,l]\times(0,T];$

$\nu_{1_t}(x,t)-b_1(x,0,t)\nu_{1_x}(x,t)-c(x,0,t)\nu_1(x,t)-f(x,0,t)<0,\ \ \nu_{2_t}(x,t)-b_1(x,l,t)\nu_{2_x}(x,t)-c(x,l,t)\nu_2(x,t)-f(x,l,t)>0,\ \nu_i(x,t)\ge 0,\ \nu_{i_x}(x,t)>0, i=1,2,\ \nu_{1_{xx}}(x,t)\ge 0,\ \nu_{2_{xx}}(x,t)\le 0,$

$b_2(x,0,t)<0,\ b_2(x,l,t)>0,\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T];$

$b_{1_y}(x,y,t)\ge 0,\ b_{2_x}(x,y,t)\ge 0,\ \ f(x,y,t)\ge 0,\ f_x(x,y,t)\ge 0,\ \ f_y(x,y,t)\ge 0, c_x(x,y,t)\ge 0,\ c_y(x,y,t)\ge 0,\ (x,y,t)\in\overline{Q}_T.$

Теорема 3.2. ***(глобальне існування)*** *Нехай виконуються умови* ***(A1)*** *-* ***(A4)***. *Тоді існує глобальний розв'язок* (u,a_1,a_2) *задачі (3.1)-(3.6).*

Для доведення глобальної єдиності розв'язку ми потребуватимемо таких умов:

(A5) $\varphi\in C^2(\overline{D}),\ \mu_i\in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,l]\times[0,T]),\ \nu_i\in C^{2,1}([0,h]\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,h]\times[0,T]);\ \ |t^{\beta_2}\mu_{kyy}(y,t)|\le A_k<\infty,\ \ k=1,2,\ \ (y,t)\in[0,l]\times[0,T];$

$|t^{\beta_1}\nu_{kxx}(y,t)|\le B_k<\infty,\ \ k=1,2,\ \ (x,t)\in[0,h]\times[0,T];\ \ b_i,c,f\in C^{1,0}(\overline{Q}_T),\ i=1,2;$

(A6) $\varkappa_i(t) \neq 0,\ i = 1, 2, \quad t \in [0, T]$.

Теорема 3.3. ***(єдиність)*** *Якщо виконуються умови* ***(A5)*** *-* ***(A6)****, то задача (3.1)-(3.6) не може мати більше одного глобального розв'язку.*

Коефіцієнтні обернені задачі для анізотропних багатовимірних параболічних рівнянь з різними показниками виродження при різних просторових компонентах раніше не вивчались.

3.2.2. *Доведення основних результатів.* Доведемо теорему про глобальне існування розв'язку.

Доведення теореми 3.2. Для встановлення оцінок функцій $v = u_x$ та $w = u_y$ утворимо для них допоміжні задачі. Продиференціювавши (3.1) та (3.2) по x та y, отримаємо:

$$v_t = t^{\beta_1} a_1(t) v_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t) v_{yy} + b_1(x, y, t) v_x + b_2(x, y, t) v_y +$$

$$+ (b_{1_x}(x, y, t) + c(x, y, t)) v + b_{2_x}(x, y, t) w + c_x(x, y, t) u +$$

$$+ f_x(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T, \tag{3.28}$$

$$v(x, y, 0) = \varphi_x(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}, \tag{3.29}$$

$$w_t = t^{\beta_1} a_1(t) w_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t) w_{yy} + b_1(x, y, t) w_x + b_2(x, y, t) w_y +$$

$$+ (b_{2_y}(x, y, t) + c(x, y, t)) w + b_{1_y}(x, y, t) v + c_y(x, y, t) u +$$

$$+ f_y(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T, \tag{3.30}$$

$$w(x, y, 0) = \varphi_y(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}. \tag{3.31}$$

Поклавши в (3.1) $x = 0, x = h$ та $y = 0, y = l$, прийдемо до рівностей:

$$t^{\beta_1} a_1(t) v_x(0, y, t) + b_1(0, y, t) v(0, y, t) = \mu_{1t}(y, t) - t^{\beta_2} a_2(t) \mu_{1yy}(y, t) -$$

$$- b_2(0,y,t)\mu_{1y}(y,t) - c(0,y,t)\mu_1(y,t) - f(0,y,t), \qquad (3.32)$$

$$t^{\beta_1}a_1(t)v_x(h,y,t) + b_1(h,y,t)v(h,y,t) = \mu_{2t}(y,t) - t^{\beta_2}a_2(t)\mu_{2yy}(y,t) -$$

$$- b_2(h,y,t)\mu_{2y}(y,t) - c(h,y,t)\mu_2(y,t) - f(h,y,t), \qquad (3.33)$$

$$t^{\beta_2}a_2(t)w_y(x,0,t) + b_2(x,0,t)w(x,0,t) = \nu_{1t}(x,t) - t^{\beta_1}a_1(t)\nu_{1xx}(x,t) -$$

$$- b_1(x,0,t)\nu_{1x}(x,t) - c(x,0,t)\nu_1(x,t) - f(x,0,t), \qquad (3.34)$$

$$t^{\beta_2}a_2(t)w_y(x,l,t) + b_2(x,l,t)w(x,l,t) = \nu_{2t}(x,t) - t^{\beta_1}a_1(t)\nu_{2xx}(x,t) -$$

$$- b_1(x,l,t)\nu_{2x}(x,t) - c(x,l,t)\nu_2(x,t) - f(x,l,t). \qquad (3.35)$$

Крім того, продиференціювавши (3.3) та (3.4) по y та x, отримаємо співвідношення:

$$v(x,0,t) = \nu_{1x}(x,t),\ v(x,l,t) = \nu_{2x}(x,t), \qquad (3.36)$$

$$w(0,y,t) = \mu_{1y}(y,t),\ w(h,y,t) = \mu_{2y}(y,t). \qquad (3.37)$$

Отже, маємо задачу (3.28), (3.29), (3.32), (3.33), (3.36) стосовно v і задачу (3.30), (3.31), (3.34), (3.35), (3.37) стосовно w. Встановимо оцінки v та w. Подамо v як суму $v_0 + \tilde{v}$, де функція v_0 є розв'язком задачі

$$v_{0_t} = t^{\beta_1}a_1(t)v_{0_{xx}} + t^{\beta_2}a_2(t)v_{0_{yy}} + b_1(x,y,t)v_{0_x} + b_2(x,y,t)v_{0_y} +$$

$$+ (b_{1_x}(x,y,t) + c(x,y,t))v_0, \quad (x,y,t) \in Q_T, \qquad (3.38)$$

$$v_0(x,y,0) = \varphi_x(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \qquad (3.39)$$

$$t^{\beta_1}a_1(t)v_{0_x}(0,y,t) + b_1(0,y,t)v_0(0,y,t) = \mu_{1_t}(y,t) - t^{\beta_2}a_2(t)\mu_{1_{yy}}(y,t) -$$

$$-b_2(0,y,t)\mu_{1_y}(y,t)-c(0,y,t)\mu_1(y,t)-f(0,y,t), \quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \quad (3.40)$$

$$t^{\beta_1}a_1(t)v_{0_x}(h,y,t)+b_1(h,y,t)v_0(h,y,t)=\mu_{2_t}(y,t)-t^{\beta_2}a_2(t)\mu_{2_{yy}}(y,t)-$$

$$-b_2(h,y,t)\mu_{2_y}(y,t)-c(h,y,t)\mu_2(y,t)-f(h,y,t), \quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \quad (3.41)$$

$$v_0(x,0,t)=\nu_{1_x}(x,t), \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \quad (3.42)$$

$$v_0(x,l,t)=\nu_{2_x}(x,t), \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \quad (3.43)$$

а функція $\tilde{v}$ – розв'язком задачі:

$$\tilde{v}_t=t^{\beta_1}a_1(t)\tilde{v}_{xx}+t^{\beta_2}a_2(t)\tilde{v}_{yy}+b_1(x,y,t)\tilde{v}_x+b_2(x,y,t)\tilde{v}_y+$$

$$+(b_{1_x}(x,y,t)+c(x,y,t))\tilde{v}+b_{2_x}(x,y,t)w+c_x(x,y,t)u+$$

$$+f_x(x,y,t), \quad (x,y,t)\in Q_T, \quad (3.44)$$

$$\tilde{v}(x,y,0)=0, \quad (x,y)\in\overline{D}, \quad (3.45)$$

$$t^{\beta_1}a_1(t)\tilde{v}_x(0,y,t)+b_1(0,y,t)\tilde{v}(0,y,t)=0, \ (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \quad (3.46)$$

$$t^{\beta_1}a_1(t)\tilde{v}_x(h,y,t)+b_1(h,y,t)\tilde{v}(h,y,t)=0, \ (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \quad (3.47)$$

$$\tilde{v}(x,0,t)=0, \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \quad (3.48)$$

$$\tilde{v}(x,l,t)=0, \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T]. \quad (3.49)$$

Для w використаємо аналогічне зображення $w_0+\tilde{w}$. Задачі для w_0 та $\tilde{w}$ є аналогічними до задач для v_0 та $\tilde{v}$.

Аналогічно як в [38], отримаємо

$$0<M_4\le v_0(x,y,t)\le M_5<\infty,$$

$$0 < M_6 \le w_0(x,y,t) \le M_7 < \infty, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{3.50}$$

де $M_k, k = 4,5,6,7$ – сталі, що визначаються вхідними даними.

Функцію $\tilde{v}$ подамо у вигляді

$$\tilde{v}(x,y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{31}^v(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\big(b_{2_\xi}(\xi,\eta,\tau)w + c_\xi(\xi,\eta,\tau)u +$$

$$+ f_\xi(\xi,\eta,\tau)\big)d\xi d\eta d\tau,$$

де $G_{31}^v(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ – функція Гріна для рівняння (3.28) з крайовими умовами (3.46)-(3.49). Аналогічно для $\tilde{w}$ матимемо

$$\tilde{w}(x,y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{13}^w(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\big(b_{1_\eta}(\xi,\eta,\tau)v + c_\eta(\xi,\eta,\tau)u +$$

$$+ f_\eta(\xi,\eta,\tau)\big)d\xi d\eta d\tau.$$

Отже, отримали систему інтегральних рівнянь Вольтерра

$$v(x,y,t) = v_0(x,y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{31}^v(x,y,t,\xi,\eta,\tau) \times$$

$$\times \big(b_{2_\xi}(\xi,\eta,\tau)w + c_\xi(\xi,\eta,\tau)u + f_\xi(\xi,\eta,\tau)\big)d\xi d\eta d\tau, \tag{3.51}$$

$$w(x,y,t) = w_0(x,y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{13}^w(x,y,t,\xi,\eta,\tau) \times$$

$$\times \big(b_{1_\eta}(\xi,\eta,\tau)v + c_\eta(\xi,\eta,\tau)u + f_\eta(\xi,\eta,\tau)\big)d\xi d\eta d\tau. \tag{3.52}$$

Із припущень теореми та принципу максимуму випливає, що $u(x,y,t) \ge 0$, і ядра цих рівнянь є невід'ємними. Тому, застосувавши до цієї системи метод послідовних наближень, отримаємо

$$v(x,y,t) \ge v_0(x,y,t) \ge M_4,\ w(x,y,t) \ge w_0(x,y,t) \ge M_6, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_T.$$

З (3.15), (3.16) знаходимо

$$a_1(t) \le A_1,\ a_2(t) \le A_2, \quad t \in [0,T].$$

Позначимо $V(t) := \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} v(x,y,t)$, $W(t) := \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} w(x,y,t)$. Використовуючи принцип максимуму для u, оцінки (3.50) та припущення **(A4)**, з (3.51), (3.52) матимемо:

$$V(t) \leq C_{13} + C_{14} \int\limits_0^t W(\tau)d\tau,$$

$$W(t) \leq C_{15} + C_{16} \int\limits_0^t V(\tau)d\tau.$$

Додамо останні дві нерівності:

$$V(t) + W(t) \leq C_{17} + C_{18} \int\limits_0^t (V(\tau) + W(\tau))\, d\tau.$$

Застосувавши нерівність Гронуолла, матимемо:

$$V(t) + W(t) \leq M_8, \quad t \in [0,T]. \tag{3.53}$$

Завершення доведення проводиться аналогічно до теореми 3.1. Теорему 3.2 доведено. □

Доведемо тепер єдиність розв'язку.

Доведення теореми 3.3. Припустимо, що існує два розв'язки $(u^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$ та $(u^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)})$ задачі (3.1)-(3.6). Позначимо

$$U := u^{(1)} - u^{(2)}, \quad A_1 := a_1^{(1)} - a_1^{(2)}, \quad A_2 := a_2^{(1)} - a_2^{(2)}.$$

Тоді для (U, A_1, A_2) матимемо задачу

$$U_t = t^{\beta_1} a_1^{(1)}(t) U_{xx} + t^{\beta_2} a_2^{(1)}(t) U_{yy} + b_1(x,y,t)U_x + b_2(x,y,t)U_y +$$

$$+ c(x,y,t)U + t^{\beta_1} A_1(t) u_{xx}^{(2)} + t^{\beta_2} A_2(t) u_{yy}^{(2)}, \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{3.54}$$

$$U(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{3.55}$$

$$U(0,y,t) = U(h,y,t) = 0, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3.56}$$

$$U(x,0,t)=U(x,l,t)=0, \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{3.57}$$

$$a_1^{(1)}(t)U_x(0,y_0,t)=-A_1(t)u_x^{(2)}(0,y_0,t), \quad t\in[0,T], \tag{3.58}$$

$$a_2^{(2)}(t)U_y(x_0,0,t)=-A_2(t)u_y^{(2)}(x_0,0,t), \quad t\in[0,T]. \tag{3.59}$$

Використовуючи функцію Гріна $\tilde{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ для рівняння

$$U_t=t^{\beta_1}a_1^{(1)}(t)U_{xx}+t^{\beta_2}a_2^{(1)}(t)U_{yy}+b_1(x,y,t)U_x+b_2(x,y,t)U_y+$$

$$+\,c(x,y,t)U$$

з умовами (3.56), (3.57), зведемо задачу (3.54)-(3.59) до еквівалентної системи інтегральних рівнянь стосовно (A_1,A_2):

$$A_1(t)u_x^{(2)}(0,y_0,t)=-a_1^{(1)}(t)\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h \tilde{G}_{11_x}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\,(\tau^{\beta_1}A_1(\tau)u_{\xi\xi}^{(2)}+\tau^{\beta_2}A_2(\tau)u_{\eta\eta}^{(2)})d\xi d\eta d\tau, \tag{3.60}$$

$$A_2(t)u_y^{(2)}(x_0,0,t)=-a_2^{(1)}(t)\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h \tilde{G}_{11_y}(x_0,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\,(\tau^{\beta_1}A_1(\tau)u_{\xi\xi}^{(2)}+\tau^{\beta_2}A_2(\tau)u_{\eta\eta}^{(2)})d\xi d\eta d\tau, \quad t\in[0,T]. \tag{3.61}$$

Доведемо інтегровність ядер у рівняннях (3.60), (3.61). Проаналізуємо поведінку похідних $u_{xx}^{(2)}$, $u_{yy}^{(2)}$ при $t\to+0$. Використаємо функцію Гріна $G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ задачі (3.55)-(3.57) для рівняння теплопровідності

$$u_t^{(2)}=t^{\beta_1}a_1^{(2)}(t)u_{xx}^{(2)}+t^{\beta_2}a_2^{(2)}(t)u_{yy}^{(2)}. \tag{3.62}$$

Знайдемо зображення $u_{xx}^{(2)}$, виходячи з (3.7), (3.8) :

$$u_{xx}^{(2)}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G^*_{11_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-a_2^{(2)}(\tau)\tau^{\beta_2}\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-$$

$$-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau-\int_0^t\int_0^l G^*_{11_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-a_2^{(2)}(\tau)\tau^{\beta_2}\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-$$

$$-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau+\int_0^t\int_0^h G^*_{11_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\times$$

$$\times\tau^{\beta_2}a_2^{(2)}(\tau)\nu_{1_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^h G^*_{11_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^{\beta_2}a_2^{(2)}(\tau)\nu_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^h G^*_{11_\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G^*_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\Big(b_1(h,\eta,\tau)u_\xi^{(2)}(h,\eta,\tau)+b_2(h,\eta,\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+c(h,\eta,\tau)\mu_2(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-\int_0^t\int_0^l G^*_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Big(b_1(0,\eta,\tau)u_\xi^{(2)}(0,\eta,\tau)+b_2(0,\eta,\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)+c(0,\eta,\tau)\mu_1(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^h G^*_{11_\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1(\xi,\eta,\tau)u^{(2)}_{\xi\xi}+b_2(\xi,\eta,\tau)u^{(2)}_{\eta\xi}+$$

$$+(b_{1_\xi}(\xi,\eta,\tau)+c(\xi,\eta,\tau))u_\xi^{(2)}+b_{2_\xi}(\xi,\eta,\tau)u_\eta^{(2)}+c_\xi(\xi,\eta,\tau)u^{(2)})d\xi d\eta d\tau. \quad (3.63)$$

Аналогічне зображення має $u_{yy}^{(2)}$. Підставимо ці вирази в (3.60), (3.61). Дослідимо поведінку доданка ядра рівняння (3.60), що відповідає другому інтегралу у виразі для $u_{xx}^{(2)}$:

$$I = \Bigg| \int_0^t \int_0^l \int_0^h \tilde{G}_{11x}(0, y_0, t, \xi, \eta, \tau)\tau^{\beta_1} d\xi d\eta d\tau \int_0^\tau \int_0^l G^*_{11\xi_1}(\xi, \eta, \tau, 0, \eta_1, \tau_1) \times$$

$$\times \left(\mu_{1\tau_1}(\eta_1, \tau_1) - a_2^{(2)}(\tau_1)\tau_1^{\beta_2}\mu_{1\eta_1\eta_1}(\eta_1, \tau_1) - f(0, \eta_1, \tau_1) \right) d\eta_1 d\tau_1 \Bigg| \leq$$

$$\leq C_{19} \int_0^t \tau^{\beta_1} d\tau \int_0^h \tilde{G}_{1x}(0, t, \xi, \tau) d\xi \int_0^\tau G^*_{1\xi_1}(\xi, \tau, 0, \tau_1) d\tau_1.$$

Знайдемо похідну

$$G^*_{1\xi_1}(\xi, \tau, 0, \tau_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(\tau) - \theta(\tau_1))^3}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(\xi + 2nh)^2}{4(\theta(\tau) - \theta(\tau_1))} \right),$$

де $\theta(t) = \int\limits_0^t \tau^{\beta_1} a_1^{(2)}(\tau) d\tau$. Використовуючи відому оцінку функції Гріна [38], отримаємо

$$|\tilde{G}_{1x}(0, t, \xi, \tau)| \leq C_{20} \frac{\xi}{(\theta(t) - \theta(\tau))^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\theta(t) - \theta(\tau)} \right).$$

Тоді

$$I \leq C_{21} \int_0^t \tau^{\beta_1} d\tau \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^h \tilde{G}_{1x}(0, t, \xi, \tau) \frac{1}{\sqrt{(\theta(\tau) - \theta(\tau_1))^3}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\xi + 2nh| \exp\left(-\frac{(\xi + 2nh)^2}{4(\theta(\tau) - \theta(\tau_1))} \right) d\xi.$$

Виділимо з підінтегрального ряду I_0, що відповідає $n = 0$:

$$I_0 \leq C_{22} \int_0^t \tau^{\beta_1} d\tau \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^h \frac{\xi^2}{(\theta(t) - \theta(\tau))^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))} - \frac{\xi^2}{4(\theta(\tau) - \theta(\tau_1))} \right) \times$$

$$\times\,(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{-\frac{3}{2}}d\xi.$$

Зробимо заміну $z=\dfrac{\xi}{2\sqrt{\theta(\tau)-\theta(\tau_1)}}$, тоді

$$I_0\le\int\limits_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\int\limits_0^\tau d\tau_1\int\limits_0^\infty\frac{z^2}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-z^2-\frac{z^2(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)dz=$$

$$=\int\limits_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\int\limits_0^\tau d\tau_1\int\limits_0^\infty\frac{z^2}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-z^2\frac{\theta(t)-\theta(\tau_1)}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)dz.$$

Покладемо $y=z\sqrt{\dfrac{\theta(t)-\theta(\tau_1)}{\theta(t)-\theta(\tau)}}$:

$$I_0\le\int\limits_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\int\limits_0^\tau d\tau_1\int\limits_0^\infty\frac{\theta(t)-\theta(\tau)}{(\theta(t)-\theta(\tau_1))(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac{3}{2}}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\theta(t)-\theta(\tau)}{\theta(t)-\theta(\tau_1)}}y^2\exp(-y^2)dy=C_{23}\int\limits_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\int\limits_0^\tau\frac{d\tau_1}{(\theta(t)-\theta(\tau_1))^{\frac{3}{2}}}\le$$

$$\le C_{24}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\beta_1+1}d\tau}{(t^{\beta_1+1}-\tau^{\beta_1+1})^{\frac{3}{2}}}=C_{24}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}\int\limits_0^1\frac{z^{\beta_1+1}dz}{(1-z^{\beta_1+1})^{\frac{3}{2}}}\le C_{25}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}.$$

Аналогічно оцінюємо інші інтеграли у виразах для $u^{(2)}_{xx}$, $u^{(2)}_{yy}$. Отже, ядра у (3.60), (3.61) є інтегровними. Оскільки інтегральні рівняння (3.60), (3.61) є однорідними, то вони мають тільки тривіальний розв'язок $A_1(t)\equiv 0$, $A_2(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$. Звідси та з (3.54)-(3.57) випливає, що $U(x,y,t)\equiv 0,(x,y,t)\in\overline{Q}_T$. Отже, розв'язок задачі (3.1)-(3.6) єдиний. Теорему 3.3 доведено. $\Box$

3.2.3. *Висновки до підрозділу 3.2.* У цьому підрозділі знайдено умови глобальних існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для анізотропного параболічного рівняння зі слабким виродженням.

3.3. **Висновки до розділу 3.** У цьому розділі вивчено обернену задачу відшукання двох старших коефіцієнтів анізотропного параболічного рівняння зі слабким виродженням. Спершу доведено існування локального розв'язку розглядуваної задачі. При накладанні додаткових умов на вхідні дані отримано існування та єдиність її глобального розв'язку.

Результати цього розділу опубліковано у [2] і додатково висвітлено у [8].

4. РОЗДІЛ 4
ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З СИЛЬНИМ ВИРОДЖЕННЯМ

У цьому розділі розглянуто обернені задачі для параболічних рівнянь зі сильним виродженням. У цих рівняннях старший коефіцієнт поводить себе як степенева функція t^β із показником $\beta \geq 1$. Розглянуто ізотропний та анізотропні випадки. В якості крайових умов використовуються змішані умови Діріхле-Неймана.

Результати цього розділу опубліковано у [3], [4], [5] та додатково висвітлено у [12], [13], [14].

4.1. **Обернена задача для ізотропного рівняння з диференціальними умовами перевизначення.**

Розглянемо обернену задачу для двовимірного рівняння теплопровідності з виродженням у прямокутній області.

4.1.1. *Формулювання задачі і основних результатів.* Обернена задача полягає у знаходженні пари функцій (a, u), які задовольняють рівняння теплопровідності з виродженням

$$u_t = t^\beta a(t)\Delta u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{4.1}$$

початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y,0), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{4.2}$$

крайові умови

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t),\, u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{4.3}$$

$$u_y(x,0,t) = \nu_1(x,t),\, u_y(x,l,t) = \nu_2(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{4.4}$$

та умову перевизначення

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \kappa(t), \quad t \in (0,T], \tag{4.5}$$

де $\beta \geq 1$, $y_0 \in (0,l)$.

Означення 4.1. *Розв'язком задачі (4.1)–(4.5) називається пара функцій* $(a,u) \in C[0,T] \times (C^{2,2,1}(Q_T) \cap C^{0,1,1}(\overline{Q}_T))$, *де* $a(t) > 0$ *при* $t \in [0,T]$, *яка задовольняє (4.1)–(4.5) поточково.*

Припустимо, що вхідні дані задачі задовольняють такі умови:

(A1) $\beta \geq 1$, $\varphi \in C^2(\overline{D})$, $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]) \cap C^{1,1}([0,l] \times [0,T])$, $\nu_i \in C^{1,0}([0,h] \times (0,T]) \cap C([0,h] \times [0,T])$, $i = 1,2$; $f \in C^{2,2,0}(\overline{Q}_T)$, $\kappa(t) = \kappa_0(t)t^{\frac{1-\beta}{2}}$, $\kappa_0 \in C[0,T]$;

(A2) $\varphi_x(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in \overline{D}$; $\mu_{1_t}(y,t) - f(0,y,t) < 0$, $\mu_{2_t}(y,t) - f(h,y,t) \geq 0$, $\mu_{1_{yy}}(y,t) \geq 0$, $\mu_{2_{yy}}(y,t) \leq 0$, $(y,t) \in [0,l] \times (0,T]$; $\nu_{1_x}(x,t) \leq 0$, $\nu_{2_x}(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in [0,h] \times [0,T]$; $f_x(x,y,t) \geq 0$, $(x,y,t) \in \overline{Q}_T$; $\kappa_0(t) > 0$, $t \in [0,T]$;

(A3) $\mu_1(y,0) = \varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0) = \varphi(h,y)$, $y \in [0,l]$; $\nu_1(x,0) = \varphi_y(x,0)$, $\nu_2(x,0) = \varphi_y(x,l)$, $x \in [0,h]$; $\mu_{1y}(0,t) = \nu_1(0,t)$, $\mu_{1y}(l,t) = \nu_2(0,t)$, $\mu_{2y}(0,t) = \nu_1(h,t)$, $\mu_{2y}(l,t) = \nu_2(h,t)$, $t \in [0,T]$.

Теорема 4.1. *Якщо виконуються припущення* **(A1)–(A3)**, *то існує єдиний розв'язок* (a,u) *задачі (4.1)–(4.5).*

Обернені задачі для одновимірних параболічних рівнянь з сильним виродженням досліджувалися у [97], [98].

Обернені задачі для багатовимірних параболічних рівнянь з сильним виродженням раніше не вивчались.

4.1.2. *Доведення основних результатів.* Доведемо теорему про існування єдиного розв'язку.

Доведення теореми 4.1. Якщо функція $a = a(t)$ є відомою, то розв'язок прямої задачі (4.1)–(4.4) має вигляд:

$$u(x,y,t) = \int_0^l \int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^t \int_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta\ a(\tau)\mu_2(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau. \qquad (4.6)$$

Тут через $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$, $i\in\{1,2\}$ ми позначаємо функції Гріна для рівняння теплопровідності (4.1), визначені у підрозділі 2.1.

Використовуючи властивості функцій Гріна та інтегруючи частинами, знайдемо похідну $u_x(x,y,t)$:

$$u_x(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))\,d\eta\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))\,d\eta\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Підставивши цей вираз у (4.5), отримаємо рівняння

$$a(t) = \frac{\kappa(t)}{\sum\limits_{i=1}^{6} I_i(t)}, \tag{4.7}$$

де

$$I_1 = \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(0, y_0, t, \xi, \eta, 0)\varphi_\xi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$I_2 = -\int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{22}(0, y_0, t, 0, \eta, \tau)(\mu_{1_\tau}(\eta, \tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta, \tau) -$$

$$- f(0, \eta, \tau))\, d\eta\, d\tau,$$

$$I_3 = \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{22}(0, y_0, t, h, \eta, \tau)(\mu_{2_\tau}(\eta, \tau) - \tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta, \tau) -$$

$$- f(h, \eta, \tau))\, d\eta\, d\tau,$$

$$I_4 = -\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{22}(0, y_0, t, \xi, 0, \tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$I_5 = \quad + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{22}(0, y_0, t, \xi, l, \tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$I_6 = \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(0, y_0, t, \xi, \eta, \tau) f_\xi(\xi, \eta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau\Big)^{-1}, \quad t \in (0, T].$$

Легко бачити, що це рівняння та задача (4.1)–(4.5) є еквівалентними. Справді, якщо $(a(t), u(x, y, t))$ є розв'язком (4.1)–(4.5), тоді функція $a(t)$ задовольняє (4.7), як показано вище. З іншого боку, якщо $a(t)$ є розв'язком (4.7), тоді ми підставимо її у (4.1) і знайдемо розв'язок задачі (4.1)–(4.4) у вигляді (4.6). Умова (4.5) випливає із (4.7).

Спершу встановимо допоміжні оцінки. Припустимо спочатку, що функція $a \in C[0,T]$ відома, і введемо позначення $a_{\min} := \min\limits_{[0,T]} a(t)$, $a_{\max} := \max\limits_{[0,T]} a(t)$. Праву частину (4.7) позначимо через $Pa(t)$.

Розглянемо наступний інтеграл:

$$\int_0^t \int_0^l G_{22}(0, y_0, t, 0, \eta, \tau)(f(0, \eta, \tau) - \mu_{1\tau}(\eta, \tau))\, d\eta\, d\tau \geq$$

$$\geq \min_{[0,l]\times[0,T]} (f(0, y, t) - \mu_{1_t}(y, t)) \int_0^t \int_0^l G_{22}(0, y_0, t, 0, \eta, \tau)\, d\eta\, d\tau \geq$$

$$\geq C_1 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \geq \frac{C_2}{\sqrt{a_{\max}}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} \geq \frac{C_3}{t^{\frac{\beta-1}{2}} \sqrt{a_{\max}}}. \tag{4.8}$$

Тут ми використали рівність

$$\int_0^l G_2(y, t, \eta, \tau) d\eta = 1, \tag{4.9}$$

яку можна перевірити безпосереднім обчисленням. Тут G_2 – одновимірна функція Гріна, визначена у підрозділі 2.1, а сталі C_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ залежать від вхідних даних. Із **(A2)** випливає, що всі інші доданки у знаменнику (4.7) є невід'ємними, тому

$$Pa(t) \leq \frac{\kappa(t) t^{\frac{\beta-1}{2}} \sqrt{a_{\max}}}{C_3}.$$

Враховуючи припущення $\kappa(t) = \kappa_0(t) t^{\frac{1-\beta}{2}}$, $\kappa_0(t) > 0$, $t \in [0,T]$, отримаємо

$$Pa(t) \leq \frac{\kappa_0(t)\sqrt{a_{\max}}}{C_3}, \quad t \in [0,T].$$

Отже, маємо оцінку

$$Pa(t) \leq A_1 < \infty, \quad t \in [0,T], \tag{4.10}$$

де A_1 є відомою сталою, що залежить від вхідних даних.

Тепер оцінимо $Pa(t)$ знизу. Враховуючи (4.9), знайдемо

$$I_1 \leq \max_{\overline{D}} \varphi_x(x, y) := C_4.$$

Далі, отримуємо оцінку

$$I_2 = \int_0^t \int_0^l G_{22}(0, y_0, t, 0, \eta, \tau)(f(0, \eta, \tau) - \mu_{1\tau}(\eta, \tau) + \tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta, \tau))\, d\eta\, d\tau \leq$$

$$\leq \max_{[0,l]\times[0,T]} (f(0, y, t) - \mu_{1_t}(y, t)) \int_0^t \int_0^l G_{22}(0, y_0, t, 0, \eta, \tau)\, d\eta\, d\tau +$$

$$+ \max_{[0,l]\times[0,T]} t^\beta \mu_{1_{yy}}(y, t) \int_0^t \int_0^l G_{22}(0, y_0, t, 0, \eta, \tau) a(\tau)\, d\eta\, d\tau.$$

Використовуючи (4.9), (4.10) та відомі оцінки функції Гріна [95]

$$G_2(0, t, 0, \tau) \leq \frac{C_5}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_6, \tag{4.11}$$

отримуємо

$$I_3 \leq \frac{C_7}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{a_{\min}}} + C_8.$$

Враховуючи оцінки [95]

$$G_2(0, t, h, \tau) \leq C_7$$

та (4.9), маємо $I_2 \leq C_9$.

Щоб оцінити I_4, використаємо рівність (4.9) та оцінку (4.11):

$$I_4 \leq C_{10} \int_0^t G_2(y_0, t, 0, \tau)\tau^\beta a(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{C_{10}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\exp\Big(- \frac{(y_0 - \eta + 2ml)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))}\Big) +$$

$$+ \exp\Big(- \frac{(y_0 + \eta + 2ml)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))}\Big)\Big)\tau^\beta a(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{C_{10}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\exp\Big(- \frac{(y_0 - \eta + 2ml)^2}{4z}\Big) +$$

$$+ \exp\Big(- \frac{(y_0 + \eta + 2ml)^2}{4z}\Big)\Big) dz \leq C_{11}\sqrt{\theta(t)} \leq C_{12}.$$

Інтеграл I_5 оцінюється аналогічно. Із (4.9) отримуємо, що $I_6 \leq C_{13}$.

Із вище отриманих оцінок випливає нерівність

$$Pa(t) \geq \frac{\kappa(t)}{\frac{C_{14}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{a_{\min}}} + C_{15}}.$$

Враховуючи припущення стосовно $\kappa(t)$, зведемо цю нерівність до вигляду

$$Pa(t) \geq \frac{\kappa_0(t)\sqrt{a_{\min}}}{C_{14} + C_{15}t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{a_{\min}}} \geq \frac{C_{16}\sqrt{a_{min}}}{C_{14} + C_{17}\sqrt{a_{\min}}} \geq$$

$$\geq \frac{C_{16}\sqrt{a_{min}}}{C_{14} + C_{17}\sqrt{a_{\max}}} = C_{18}\sqrt{a_{min}}, \quad t \in [0, T]. \tag{4.12}$$

Нехай

$$\mathcal{N} := \{a \in C[0, T] : A_0 \leq a(t) \leq A_1\},$$

де $A_1 > 0$ – досить велике число, а сталу $A_0 > 0$ виберемо з умови $A_0 < \min\left\{A_1, C_{18}^2\right\}$. Тоді $C_{18}\sqrt{A_0} \geq A_0$, і з (4.12) отримаємо, що

$$Pa(t) \geq A_0 > 0, \quad t \in [0, T], \tag{4.13}$$

де A_0 визначається вхідними даними і, зокрема, залежить від A_1.

Перейдемо до безпосереднього доведення теореми. Подамо рівняння (4.7) у вигляді

$$a(t) = Pa(t), \quad t \in [0, T]. \tag{4.14}$$

Із (4.10), (4.13) випливає, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ саму в себе. Із теореми Арцела-Асколі та вище отриманих оцінок зрозуміло, що цілком неперервність P буде встановлено, якщо ми доведемо, що $\forall \varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що нерівність $|Pa(t_2) - Pa(t_1)| < \varepsilon$ виконується, якщо $|t_1 - t_2| < \delta$ для всіх $t_1, t_2 \in [0, T]$ і для всіх $a \in \mathcal{N}$.

Спочатку покажемо, що існує $\lim\limits_{t\to 0} a(t)$. Із отриманих вище оцінок і припущень **(A2)** випливає, що границя знаменника у (4.7) є рівною $\lim\limits_{t\to 0} I_2(t)$. Враховуючи рівності

$$\lim_{\tau\to t}\int_0^l G_2(y_0, t, \eta, \tau)(f(0, \eta, \tau) - \mu_{1_\tau}(\eta, \tau))d\eta = f(0, y_0, t) - \mu_{1_t}(y_0, t),$$

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} = t^{\frac{1-\beta}{2}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}} \tag{4.15}$$

і використовуючи теорему про середнє, із (4.7) маємо:

$$\lim_{t\to 0} a(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta+1}} \frac{\kappa_0(0)\sqrt{\lim_{t\to 0} a(t^*)}}{(f(0,y_0,0)-\mu_{1_t}(y_0,0))\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}},$$

де $t^* \in [0,t]$. Звідси отримуємо

$$\lim_{t\to 0} a(t) = \frac{\pi}{\beta+1}\Big(\frac{\kappa_0(0)}{(f(0,y_0,0)-\mu_{1_t}(y_0,0))\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}}\Big)^2.$$

Розглянемо різницю

$$|Pa(t_1)-Pa(t_2)| = \Big|\frac{\kappa_0(t_1)}{t_1^{\frac{\beta-1}{2}} u_x(0,y_0,t_1)} - \frac{\kappa_0(t_2)}{t_2^{\frac{\beta-1}{2}} u_x(0,y_0,t_2)}\Big| =$$

$$= \frac{|\kappa_0(t_1)t_2^{\frac{\beta-1}{2}} u_x(0,y_0,t_2) - \kappa_0(t_2)t_1^{\frac{\beta-1}{2}} u_x(0,y_0,t_1)|}{t_1^{\frac{\beta-1}{2}} u_x(0,y_0,t_1)t_2^{\frac{\beta-1}{2}} u_x(0,y_0,t_2)}.$$

Із (4.8) та умов **(A2)** випливає, що

$$t_1^{\frac{\beta-1}{2}} u_x(0,y_0,t_1)t_2^{\frac{\beta-1}{2}} u_x(0,y_0,t_2) > 0.$$

Таким чином, достатньо оцінити різницю $u_x(0,y_0,t_1)t_2^{\frac{\beta-1}{2}} - u_x(0,y_0,t_2)t_1^{\frac{\beta-1}{2}}$. Розглянемо спершу вираз

$$\Delta := \Big|t_2^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_2}\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t_2,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau -$$

$$- t_1^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t_1,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau\Big|,$$

де $\mu(y,t)$ – деяка неперервна на $[0,l]\times[0,T]$ функція. Щоб знайти границю

$$\lim_{t\to 0} t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau,$$

розкладемо функцію Гріна на два доданки

$$G_{22}(0,y_0,t,0,\eta,\tau)=\frac{1}{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}\exp\Big(-\frac{(y_0-\eta)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)+$$

$$+G_{22}^0(0,y_0,t,0,\eta,\tau).$$

Із оцінок функції Гріна (4.11) випливає, що

$$\lim_{t\to 0} t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}^0(0,y_0,t,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau=0.$$

З іншого боку, використовуючи (4.15), знаходимо

$$\lim_{t\to 0} t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\int\limits_0^l \frac{1}{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big(\exp\Big(-\frac{(y_0-\eta)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)+$$

$$+\exp\Big(-\frac{(y_0+\eta)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\Big)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau=\sqrt{\frac{\beta+1}{\pi}}\frac{\mu(y_0,0)}{\sqrt{a(0)}}\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}.$$

Це означає, що $\forall\varepsilon>0$ існує таке $t_0\in(0,T]$, що

$$\Big|t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau-\sqrt{\frac{\beta+1}{\pi}}\frac{\mu(y_0,0)}{\sqrt{a(0)}}\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}\Big|<\varepsilon,$$

коли $0<t<t_0$. Отже, якщо $t_i<t_0, i\in\{1,2\}$, то $\Delta<2\varepsilon$.

Розглянемо випадок, коли $t_i\geq t_0, i\in\{1,2\}$, і припустимо для визначеності, що $t_1<t_2$. Подамо Δ у вигляді:

$$\Delta=\Big|t_2^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t_2,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^l\Big(t_2^{\frac{\beta-1}{2}}G_{22}(0,y_0,t_2,0,\eta,\tau)-t_1^{\frac{\beta-1}{2}}G_{22}(0,y_0,t_1,0,\eta,\tau)\Big)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau\Big|. \tag{4.16}$$

Використовуючи (4.11), отримаємо:

$$\Big|t_2^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t_2,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau\Big| \leq$$

$$\leq t_2^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^l\Big(\frac{C_{19}}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}+C_{20}\Big)d\tau \leq$$

$$\leq C_{21}|t_2-t_1|+C_{22}t_2^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{d\tau}{\sqrt{t_2^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} =$$

$$= C_{21}|t_2-t_1|+C_{22}\int\limits_{\frac{t_1}{t_2}}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}} \leq$$

$$\leq C_{21}|t_2-t_1|+C_{22}\int\limits_{\frac{t_1}{t_2}}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z}} \leq$$

$$\leq C_{21}|t_2-t_1|+C_{23}\sqrt{t_2-t_1}.$$

Розглянемо другий доданок із(4.16):

$$|\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^l\big(t_2^{\frac{\beta-1}{2}}G_{22}(0,y_0,t_2,0,\eta,\tau)-t_1^{\frac{\beta-1}{2}}G_{22}(0,y_0,t_1,0,\eta,\tau)\big)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau\Big| \leq$$

$$\leq \big|t_2^{\frac{\beta-1}{2}}-t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\big|\,\Big|\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^l G_{22}(0,y_0,t_2,0,\eta,\tau)\mu(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau\Big| +$$

$$+\,t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^l|G_{22}(0,y_0,t_2,0,\eta,\tau)-G_{22}(0,y_0,t_1,0,\eta,\tau)||\mu(\eta,\tau)|\,d\eta\,d\tau :=$$

$$:= \Delta_1+\Delta_2.$$

Підставивши добуток одновимірних функцій Гріна замість функції Гріна $G_{22}(0, y_0, t_2, 0, \eta, \tau)$, і враховуючи (4.9), (4.11), знайдемо:

$$\Delta_1 \le C_{24}\Big|t_2^{\frac{\beta-1}{2}} - t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\Big| \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{l} G_2(0,t_2,0,\tau)G_2(y_0,t_2,\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau \le$$

$$\le C_{24}\Big|t_2^{\frac{\beta-1}{2}} - t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\Big| \int\limits_0^{t_1} G_2(0,t_2,0,\tau)d\tau \le$$

$$\le C_{25}\Big|t_2^{\frac{\beta-1}{2}} - t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\Big|t_1^{\frac{1-\beta}{2}} = C_{25}\Big|\Big(\frac{t_2}{t_1}\Big)^{\frac{\beta-1}{2}} - 1\Big| < \epsilon\,,$$

де $|t_2 - t_1| < \delta_1$. За допомогою аналогічних міркувань отримаємо

$$\Delta_2 \le C_{24}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\Big(\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{l} |G_2(0,t_2,0,\tau) - G_2(0,t_1,0,\tau)|G_2(y_0,t_2,\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{l} G_2(0,t_1,0,\tau)|G_2(y_0,t_2,\eta,\tau) - G_2(y_0,t_1,\eta,\tau)|\,d\eta\,d\tau\Big) \le$$

$$\le C_{24}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\Big(\int\limits_0^{t_1} |G_2(0,t_2,0,\tau) - G_2(0,t_1,0,\tau)|d\tau +$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{l} G_2(0,t_1,0,\tau)|G_2(y_0,t_2,\eta,\tau) - G_2(y_0,t_1,\eta,\tau)|\,d\eta\,d\tau\Big) :=$$

$$:= \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2}\,.$$

Тепер подамо функцію Гріна $G_2(0, t, 0, \tau)$ у вигляді

$$G_2(0,t,0,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} + \frac{2}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\Big).$$

Тоді

$$\Delta_{2,1} \le C_{24}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t_1}\Big(\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\Big)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{\sqrt{\pi(\theta(t_1)-\theta(\tau))}}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{\theta(t_1)-\theta(\tau)}\Big) -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi(\theta(t_2)-\theta(\tau))}}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{\theta(t_2)-\theta(\tau)}\Big)\Big)\big|d\tau\Big). \qquad (4.17)$$

Перетворимо і оцінимо перший доданок:

$$C_{26}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^{t_1}\Big(\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}-\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\Big)d\tau=$$

$$=C_{26}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^{t_1}\frac{\theta(t_2)-\theta(t_1)}{\sqrt{(\theta(t_1)-\theta(\tau))}}\frac{d\tau}{(\theta(t_2)-\theta(\tau))(\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}+\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\leq$$

$$\leq C_{27}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_2^{\beta+1}-t_1^{\beta+1})d\tau}{\big(\sqrt{t_1^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}+\sqrt{t_2^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}\big)\sqrt{\big(t_1^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}\big)\big(t_2^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}\big)}}=$$

$$=C_{27}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^{t_1}\Big(\frac{1}{\sqrt{t_1^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}-\frac{1}{\sqrt{t_2^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\Big)d\tau.$$

Після заміни змінної $z=\tau/t_1$ отримаємо:

$$C_{26}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^{t_1}\Big(\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}-\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\Big)d\tau\leq$$

$$\leq C_{27}\int\limits_0^1\Big(\frac{1}{\sqrt{1-z^{\beta+1}}}-\frac{1}{\sqrt{(\frac{t_2}{t_1})^{\beta+1}-z^{\beta+1}}}\Big)dz<\epsilon, \quad \text{де } |\frac{t_2}{t_1}-1|<\delta_2, \qquad (4.18)$$

так як функція

$$I(\sigma):=\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{\sigma-z^{\beta+1}}}$$

є неперервною при $\sigma\geq 1$.

Тепер оцінимо другий доданок із (4.17):

$$C_{26}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^{t_1}\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{\sqrt{\pi(\theta(t_1)-\theta(\tau))}}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{\theta(t_1)-\theta(\tau)}\Big)-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi(\theta(t_2)-\theta(\tau))}}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{\theta(t_2)-\theta(\tau)}\Big)\Big)\Big|d\tau=$$

$$= \frac{2C_{26}}{\sqrt{\pi}} t_1^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_1} \Big| \int\limits_{\theta(t_2)-\theta(\tau)}^{\theta(t_1)-\theta(\tau)} \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{n^2h^2}{z}\Big) dz \Big| d\tau \leq$$

$$\leq C_{28}(\theta(t_2) - \theta(t_1)) \leq C_{29}(t_2^{\beta+1} - t_1^{\beta+1}) < \epsilon, \quad \text{де } |t_2 - t_1| < \delta_3.$$

Щоб оцінити $\Delta_{2,2}$, виділимо основну частину із функції Гріна:

$$\Delta_{2,2} \leq C_{24} t_1^{\frac{\beta-1}{2}} \Big(\int\limits_0^{t_1} G_2(0, t_1, 0, \tau) d\tau \int\limits_0^{l} \Big| \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} \times$$

$$\times \exp\Big(-\frac{(\eta - y_0)^2}{4(\theta(t_2) - \theta(\tau))}\Big) - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_1) - \theta(\tau)}} \exp\Big(-\frac{(\eta - y_0)^2}{4(\theta(t_1) - \theta(\tau))}\Big) \Big| d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} G_2(0, t_1, 0, \tau) d\tau \int\limits_0^{l} |G_2^0(y_0, t_2, \eta, \tau) - G_2^0(y_0, t_1, \eta, \tau)| d\eta \Big). \tag{4.19}$$

Враховуючи той факт, що $G_2^0(y_0, t, \eta, \tau)$ не має особливостей, знайдемо

$$\int\limits_0^{l} |G_2^0(y_0, t_2, \eta, \tau) - G_2^0(y_0, t_1, \eta, \tau)| d\eta \leq \int\limits_0^{l} \Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} G_{2_t}^0(y_0, t, \eta, \tau) dt \Big| d\eta \leq$$

$$\leq C_{30}|t_1 - t_2|.$$

Розглянемо вираз

$$\int\limits_0^{l} \Big| \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} \exp\Big(-\frac{(\eta - y_0)^2}{4(\theta(t_2) - \theta(\tau))}\Big) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\theta(t_1) - \theta(\tau)}} \exp\Big(-\frac{(\eta - y_0)^2}{4(\theta(t_1) - \theta(\tau))}\Big) \Big| d\eta \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{l} \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} \Big(\exp\Big(-\frac{(\eta - y_0)^2}{4(\theta(t_2) - \theta(\tau))}\Big) -$$

$$- \exp\Big(-\frac{(\eta - y_0)^2}{4(\theta(t_1) - \theta(\tau))}\Big)\Big) d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^{l} \exp\Big(-\frac{(\eta - y_0)^2}{4(\theta(t_1) - \theta(\tau))}\Big) \Big(\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1) - \theta(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} \Big) d\eta. \tag{4.20}$$

Після заміни змінної $z=\frac{\eta-y_0}{2\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}$ у першому доданку матимемо:

$$\int\limits_0^l \Big|\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\exp\Big(-\frac{(\eta-y_0)^2}{4(\theta(t_2)-\theta(\tau))}\Big)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}\exp\Big(-\frac{(\eta-y_0)^2}{4(\theta(t_1)-\theta(\tau))}\Big)\Big|d\eta=$$

$$=2\int\limits_{\frac{-y_0}{2\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}}^{\frac{l-y_0}{2\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}}\Big(\exp(-z^2)-\exp\Big(-z^2\frac{\theta(t_2)-\theta(\tau)}{\theta(t_1)-\theta(\tau)}\Big)\Big)dz\le$$

$$\le 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\exp(-z^2)-\exp\Big(-z^2\frac{\theta(t_2)-\theta(\tau)}{\theta(t_1)-\theta(\tau)}\Big)\Big)dz=$$

$$=2\sqrt{\pi}\Big(1-\frac{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\Big).$$

Після заміни змінної $z=\frac{\eta-y_0}{2\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}$ у другому доданку, отримуємо:

$$\int\limits_0^l \exp\Big(-\frac{(\eta-y_0)^2}{4(\theta(t_1)-\theta(\tau))}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}-\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\Big)d\eta=$$

$$=2\Big(1-\frac{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\Big)\int\limits_{\frac{-y_0}{2\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}}^{\frac{l-y_0}{2\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}} e^{-z^2}dz\le$$

$$\le 2\sqrt{\pi}\Big(1-\frac{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\Big).$$

Тепер повернемось до оцінки першого доданку у (4.19), використовуючи (4.11) та (4.18):

$$C_{24}t_1^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^{t_1}G_2(0,t_1,0,\tau)d\tau\int\limits_0^l\Big|\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}}\exp\Big(-\frac{(\eta-y_0)^2}{4(\theta(t_2)-\theta(\tau))}\Big)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}\exp\Big(-\frac{(\eta-y_0)^2}{4(\theta(t_1)-\theta(\tau))}\Big)\Big|d\eta\le$$

$$\leq C_{31} t_1^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_1} \Big(\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} \Big) d\tau +$$

$$+ C_{32} t_1^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^{t_1} \Big(1 - \frac{\sqrt{\theta(t_1)-\theta(\tau)}}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} \Big) d\tau < \epsilon,$$

коли $|\frac{t_2}{t_1} - 1| < \delta_4$.

Таким чином, ми отримали оцінку Δ. Інші вирази із $Pa(t)$ оцінюються аналогічно. Отже, умови теореми Шаудера про нерухому точку виконуються для (4.14), і існування розв'язку задачі (4.1)–(4.4) доведено.

Розглянемо тепер питання єдиності розв'язку цієї задачі.

Розглянемо функцію

$$H(t) := \frac{\sqrt{\pi}\kappa(t)}{\sqrt{\beta+1} \int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau) d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}}},$$

де

$$\mu_0(t) := \int\limits_0^l G_2(y_0, t, \eta, \tau)(f(0, \eta, \tau) - \mu_{1_\tau}(\eta, \tau)) d\eta. \tag{4.21}$$

Легко бачити, що існує границя

$$\lim_{t \to +0} H(t) = \frac{\sqrt{\pi}\kappa_0(0)}{\sqrt{\beta+1}\mu_0(0) \int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}} > 0,$$

а тому $H(t)$ є неперервною функцією на $[0, T]$.

Використовуючи $H(t)$, встановимо оцінки розв'язків рівняння (4.7). Враховуючи припущення **(A2)** та явний вигляд функції Гріна $G_2(0, t, 0, \tau)$, із (4.7) матимемо

$$a(t) \leq \frac{\kappa(t)}{\int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{22}(0, y_0, t, 0, \eta, \tau)(f(0, \eta, \tau) - \mu_{1_\tau}(\eta, \tau))\, d\eta\, d\tau} =$$

$$= \frac{\kappa(t)}{\int\limits_0^t G_2(0, t, 0, \tau)\mu_0(\tau) d\tau} \leq \frac{\kappa(t)\sqrt{\pi \tilde{a}_{\max}(t)}}{\sqrt{\beta+1} \int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau) d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\tilde{a}_{\max}(t)}H_{\max}(t),$$

де $\tilde{a}_{\max}(t) := \max\limits_{[0,t]} a(\tau)$, $H_{\max}(t) := \max\limits_{[0,t]} H(\tau)$. Звідси випливає, що

$$a(t) \leq H^2_{\max}(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4.22}$$

Щоб оцінити $a(t)$ знизу, подамо знаменник у (4.7) як суму

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + S(t).$$

Використовуючи позначення $\tilde{a}_{\min}(t) := \min\limits_{[0,t]} a(\tau)$, $H_{\min}(t) := \min\limits_{[0,t]} H(\tau)$ отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leq \frac{\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi\tilde{a}_{\min}(t)}} \int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} = \frac{\kappa(t)}{H(t)\sqrt{\tilde{a}_{\min}(t)}}.$$

Повторюючи міркування, застосовані при оцінці знаменника (4.7) згори, знайдемо, що $S(t) \leq C_{33}$. Тоді

$$a(t) \geq \frac{\kappa(t)}{\frac{\kappa(t)}{H(t)\sqrt{\tilde{a}_{\min}(t)}} + C_{33}} = \frac{H(t)\sqrt{\tilde{a}_{\min}(t)}}{1 + \frac{C_{33}H(t)\sqrt{\tilde{a}_{\min}(t)}}{\kappa(t)}}.$$

Із припущень (A2) та оцінки (4.22) випливає, що

$$\frac{C_{33}H(t)\sqrt{\tilde{a}_{\min}(t)}}{\kappa(t)} \leq C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}}.$$

Отже,

$$a(t) \geq \frac{H_{\min}(t)\sqrt{\tilde{a}_{\min}(t)}}{1 + C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \quad t \in [0,T],$$

або

$$a(t) \geq \frac{H^2_{\min}(t)}{(1 + C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}})^2}, \quad t \in [0,T]. \tag{4.23}$$

Маючи оцінки (4.22) та (4.23) розв'язків рівняння (4.7), можемо перейти до доведення єдиності розв'язку. Подамо рівняння (4.7) у вигляді

$$a(t) = \frac{\kappa(t)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + S(t, a(t))}, \quad t \in [0,T]. \tag{4.24}$$

Припустимо, що це рівняння має два розв'язки $a_1(t)$ та $a_2(t)$. Позначимо $b(t) := a_1(t) - a_2(t)$. Функція $b(t)$ задовольняє рівняння

$$b(t) = \kappa(t)\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \Big(\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\Big)\mu_0(\tau)d\tau + S(t,a_2(t)) -$$

$$- S(t,a_1(t))\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} + S(t,a_1(t))\Big)^{-1} \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} + S(t,a_2(t))\Big)^{-1}. \qquad (4.25)$$

Із вище наведених міркувань зрозуміло, що $S(t,a_i(t)) \geq 0, i \in \{1,2\}$. Тоді із (4.25) випливає, що

$$|b(t)| \leq$$

$$\leq \kappa(t)\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \Big|\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\Big|\mu_0(\tau)d\tau + |S(t,a_2(t)) -$$

$$- S(t,a_1(t))|\Big)\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\int\limits_0^t \frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\Big)^{-1}. \qquad (4.26)$$

Перетворимо вираз

$$\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} =$$

$$= \frac{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}{\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}+\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}.$$

Використовуючи оцінку (4.23), знайдемо

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\Big| \leq \frac{\sqrt{\beta+1}(1+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}})^3}{2H^3_{\min}(t)\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}b_{\max}(t),$$

де $b_{\max}(t) := \max\limits_{[0,t]}|b(\tau)|$. Таким чином, отримуємо

$$\frac{\kappa(t)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \Big|\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\Big|\mu_0(\tau)d\tau \leq$$

$$\leq \frac{\kappa^2(t)(1+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}})^3}{2H^4_{\min}(t)} b_{\max}(t). \tag{4.27}$$

Тепер оцінимо різницю $S(t,a_2(t)) - S(t,a_1(t))$. Розглянемо вираз

$$\Delta_1 := \frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_0^h\int\limits_0^l \Big(\frac{1}{\theta_2(t)}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\theta_2(t)}\Big)\times$$

$$\times\Big(\exp\Big(-\frac{(y_0-\eta+2ml)^2}{4\theta_2(t)}\Big)+\exp\Big(-\frac{(y_0+\eta+2ml)^2}{4\theta_2(t)}\Big)\Big)-$$

$$-\frac{1}{\theta_1(t)}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\theta_1(t)}\Big)\Big(\exp\Big(-\frac{(y_0-\eta+2ml)^2}{4\theta_1(t)}\Big)+$$

$$+\exp\Big(-\frac{(y_0+\eta+2ml)^2}{4\theta_1(t)}\Big)\Big)\Big)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta d\xi\Big|\leq$$

$$\leq C_{35}\int\limits_0^h\int\limits_0^l\Big|\int\limits_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{z}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4z}\Big)\times$$

$$\times\Big(\exp\Big(-\frac{(y_0-\eta+2ml)^2}{4z}\Big)+\exp\Big(-\frac{(y_0+\eta+2ml)^2}{4z}\Big)\Big)\Big)dz\Big|d\eta d\xi.$$

Диференціюючи та використовуючи (4.9), отримуємо

$$\Delta_1\leq C_{36}\Big|\int\limits_{\theta_2(t)}^{\theta_1(t)}dz\int\limits_0^h\int\limits_0^l\Big(\frac{1}{z^2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4z}\Big)\times$$

$$\times\Big(\exp\Big(-\frac{(y_0-\eta+2ml)^2}{4z}\Big)+\exp\Big(-\frac{(y_0+\eta+2ml)^2}{4z}\Big)\Big)+$$

$$+\frac{1}{z^3}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(\xi+2nh)^2\exp\Big(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4z}\Big)\times$$

$$\times\Big((y_0-\eta+2ml)^2\exp\Big(-\frac{(y_0-\eta+2ml)^2}{4z}\Big)+(y_0+\eta+2ml)^2\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{(y_0+\eta+2ml)^2}{4z}\Big)\Big)\Big)d\eta d\xi\Big|\leq$$

$$\leq C_{37}\Big|\int\limits_{\theta_2(t)}^{\theta_1(t)}\frac{dz}{z}\Big|\leq C_{37}\frac{|\theta_1(t)-\theta_2(t)|}{\min\{\theta_1(t),\theta_2(t)\}}.$$

Застосовуючи (4.23), приходимо до оцінки

$$\Delta_1 \le C_{38}\Big(\frac{(1+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}})^2}{t^{\beta-1}H^2_{\min}(t)}+1\Big)t^{\beta-1}b_{\max}(t) \le C_{39}b_{\max}(t).$$

Тепер оцінимо вираз

$$\Delta_2 := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big|\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\Big)-\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\Big)\Big)\mu_0(\tau)d\tau\Big| \le$$

$$\le C_{40}\int\limits_0^t d\tau\Big|\int\limits_{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}^{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n^2h^2}{z}\Big)\Big|dz\Big| \le$$

$$\le C_{41}|\theta_1(t)-\theta_2(t)| \le C_{43}b_{\max}(t).$$

Інші доданки із $S(t,a_2(t))-S(t,a_1(t))$ оцінюються аналогічно. Отже,

$$|S(t,a_1(t))-S(t,a_2(t))| \le C_{42}b_{\max}(t). \tag{4.28}$$

Щоб оцінити знаменник у (4.26), зауважимо, що

$$\frac{\kappa(t)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_i(t)-\theta_i(\tau)}}} \le \frac{\kappa(t)\sqrt{a_{i_{\max}}(t)}}{\frac{\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\mu_0(\tau)d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}} \le H^2_{\max}(t), \tag{4.29}$$

для $i\in\{1,2\}$.

Застосовуючи оцінки (4.27)–(4.29) до (4.26), отримаємо

$$|b(t)| \le \Big(\frac{(1+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}})^3}{2H^4_{\min}(t)}+C_{42}t^{\frac{\beta-1}{2}}\Big)H^4_{\max}(t)b_{\max}(t) \le$$

$$\le \Big(\frac{(1+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}})^3H^4_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)}+C_{42}t^{\frac{\beta-1}{2}}H^4_{\max}(t)\Big)b_{\max}(t). \tag{4.30}$$

Так як $\lim\limits_{t\to0}H_{\min}(t)=\lim\limits_{t\to0}H_{\max}(t)$, існує таке число $t_0\in(0,T]$, що виконується наступна нерівність:

$$\Big(\frac{(1+C_{34}t^{\frac{\beta-1}{2}})^3H^4_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)}+C_{42}t^{\frac{\beta-1}{2}}H^4_{\max}(t)\Big)<1, \quad t\in[0,t_0]. \tag{4.31}$$

Тому із (4.30) випливає, що $b(t)\equiv0, t\in[0,t_0]$.

Із єдиності розв'язку задачі (4.1)–(4.5) випливає, що функція $u(x,y,t)$ є єдиною у $\overline{Q}_{t_0}$.

Тепер покажемо, що розв'язок (4.1)–(4.5) єдиний у всій області $\overline{Q}_T$. Припустимо, що існує два розв'язки задачі $(a_i(t), u_i(x,y,t))$, $i \in \{1,2\}$. Для їхньої різниці $a := a_1 - a_2, u := u_1 - u_2$ отримаємо задачу

$$u_t = t^\beta a_1(t)\Delta u + t^\beta a(t)\Delta u_2(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{4.32}$$

$$u(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{4.33}$$

$$u(0,y,t) = u(h,y,t) = 0, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{4.34}$$

$$u_y(x,0,t) = u_y(x,l,t) = 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{4.35}$$

$$a_1(t)u_x(0,y_0,t) = -a(t)u_{2x}(0,y_0,t), \quad t \in [0,T]. \tag{4.36}$$

Використовуючи функцію Гріна $\tilde{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ задачі (4.32)–(4.35), знайдемо

$$u(x,y,t) = \int_0^t \int_D \tilde{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau. \tag{4.37}$$

Підставивши цю рівність у умову перевизначення (4.36), матимемо:

$$a(t) = -\frac{a_1(t)}{u_{2x}(0,y_0,t)} \int_0^t \int_0^l \int_0^h \tilde{G}_{12_x}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau, \tag{4.38}$$

для $t \in [0,T]$. Таким чином, ми отримали однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду відносно $a(t)$. Подамо його у вигляді

$$a(t) = \int_0^t K(t,\tau)a(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{4.39}$$

Щоб дослідити поведінку ядра $K(t,\tau)$, знайдемо

$$u_2(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l \hat{G}_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l \hat{G}_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_2(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau, \tag{4.40}$$

де $\hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ – функція Гріна задачі (4.2)–(4.4) для рівняння

$$u_t=t^\beta a_2(t)\Delta u+f(x,y,t).$$

Диференціюючи (4.40) двічі по x,y та інтегруючи частинами, отримаємо:

$$u_{2_{xx}}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l \hat{G}_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))\,d\eta\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l \hat{G}_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))\,d\eta\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)t^\beta a_2(\tau)\nu_{1_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^{\beta}a_2(\tau)\nu_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_{\xi\xi}(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

$$u_{2yy}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l \hat{G}_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^{\beta}a_2(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l \hat{G}_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^{\beta}a_2(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)(\nu_{1_\tau}(\eta,\tau)-t^{\beta}a_2(\tau)\nu_{1_{\xi\xi}}(\xi,\tau)-f(\xi,0,\tau))d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)(\nu_{2_\tau}(\eta,\tau)-t^{\beta}a_2(\tau)\nu_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)-f(\xi,l,\tau))d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h \hat{G}_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Із попереднього виразу отримуємо наступну оцінку для ядра рівняння (4.39):

$$|K(t,\tau)|\le\frac{C_{44}}{\sqrt{t(t-\tau)}}.$$

Це означає, що

$$K(t,\tau)\equiv\frac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}}K_1(t,\tau),$$

і рівняння (4.39) можна подати у вигляді

$$a(t)=\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}}K_1(t,\tau)a(\tau)d\tau,\quad t\in[0,T],\tag{4.41}$$

де $|K_1(t,\tau)|\le C_{44}$.

Ми показали, що існує такий інтервал $[0, t_0]$, де $a(t) \equiv 0$. Тоді рівняння (4.41) набуде вигляду

$$a(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}} K_1(t,\tau) a(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, T], \tag{4.42}$$

і виконується наступна оцінка:

$$\Big| \frac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}} K_1(t,\tau) \Big| \le \frac{C_{45}}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [t_0, T].$$

Тоді із властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду випливає, що рівняння (4.42) має лише тривіальний розв'язок. Отже, $a(t) \equiv 0,\ t \in [0, T]$. Використовуючи цю тотожність у рівнянні (4.32), отримаємо, що із єдиності розв'язку задачі (4.32)–(4.34) випливає, що $u(x,y,t) \equiv 0, (x,y,t) \in \overline{Q}_T$. Теорему 4.1 доведено. $\square$

4.1.3. *Висновки до підрозділу 4.1.* У цьому підрозділі знайдено умови локальних існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для ізотропного параболічного рівняння зі сильним виродженням.

4.2. **Обернена задача для анізотропного рівняння з інтегральними умовами перевизначення.** У цьому підрозділі розглядається обернена задача для двовимірного анізотропного рівняння теплопровідності із сильним виродженням у прямокутній області.

4.2.1. *Формулювання задачі і отриманих результатів.* Обернена задача полягає в тому, щоб знайти трійку функцій (a_1, a_2, u), що задовольняють рівняння теплопровідності

$$u_t = a_1(t)t^{\beta_1}u_{xx} + a_2(t)t^{\beta_2}u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{4.43}$$

початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y,0), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{4.44}$$

крайові умови

$$u(0,y,t) = \mu_{11}(y,t),\, u(h,y,t) = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{4.45}$$

$$u_y(x,0,t) = \mu_{21}(x,t),\, u_y(x,l,t) = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T] \tag{4.46}$$

та умови перевизначення

$$\iint\limits_D u(x,y,t)dx\,dy = \mu_{31}(t), \quad \iint\limits_D xu(x,y,t)dx\,dy = \mu_{32}(t), \quad t \in (0,T], \tag{4.47}$$

де $\beta_i \geq 1,\ i = 1,2$. Нашою метою є встановлення умов існування та єдиності розв'язку оберненої задачі (4.43)-(4.47).

Припустимо, що вхідні дані задачі задовольняють такі умови:

(A1) $\varphi \in C^{1,0}(\overline{D}), \mu_{1i} \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]), \mu_{2i} \in C^{1,0}([0,h] \times (0,T]), f \in C^{1,0,0}(\overline{Q}_T), \mu_{3i} \in C^1([0,T]), i \in \{1,2\}$.

(A2) $\int\limits_0^l \varphi_x(x,y)dy > 0, \mu_{21_x}(x,t) \leq 0, \mu_{22_x}(x,t) \geq 0, \int\limits_0^l f_x(x,y,t)dy \geq 0,$

$\mu_{22}(x,t) \not\equiv \mu_{21}(x,t), \mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t) \geq 0, \int\limits_0^l (\varphi_x(h-x,\eta) - \varphi_x(x,\eta))d\eta \geq 0,$

$\int\limits_0^l (\mu_{11_t}(\eta,t) - f(0,\eta,t) + \mu_{12_t}(\eta,t) - f(h,\eta,t))d\eta \geq 0,$

$\mu_{22_x}(h-x,t) - \mu_{21_x}(h-x,t) - \mu_{22_x}(x,t) + \mu_{21_x}(x,t) \geq 0,$

$\int\limits_0^l (f_x(h-x,\eta,t) - f_x(x,\eta,t))d\eta \geq 0, (x,t) \in [0,h] \times (0,T],$

$\int\limits_0^l (\mu_{11}(y,t) - \mu_{12}(y,t))dy > 0, \int\limits_0^l (\mu_{11_t}(y,t) - f(0,y,t))dy < 0,$

$\int\limits_0^l (\mu_{12_t}(y,t) - f(h,y,t))dy > 0, \mu_{22}(0,t) - \mu_{21}(0,t) - \mu_{22}(h,t) + \mu_{21}(h,t) \geq 0,$

$\mu'_{31}(t) - \iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy > 0, \mu'_{32}(t) - \iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy > 0,$

$$h > \frac{\mu'_{32}(t) - \iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy,}{\mu'_{31}(t) - \iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy} > \frac{\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx}{\int\limits_0^h (\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx}, \quad t \in [0,T].$$

(A3) $h\mu'_{31}(t) - \mu'_{32}(t) + \iint\limits_D (x-h)f(x,y,t)dx\,dy > 0\,,$

$\mu'_{31}(t) - \iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy \equiv \varkappa_1(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}},$

$\mu'_{32}(t) - \iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy \equiv \varkappa_2(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}},$

$\varkappa_i(t) > 0, t \in [0,T], i \in \{1,2\};$

(A4) $\mu_1(y,0) = \varphi(0,y)\,,\ \mu_2(y,0) = \varphi(h,y),\ \ y \in [0,l]\,;\ \nu_1(x,0) = \varphi_y(x,0)\,,$ $\nu_2(x,0) = \varphi_y(x,l),\ \ x \in [0,h]\,;\ \mu_{1y}(0,t) = \nu_1(0,t)\,,\ \mu_{1y}(l,t) = \nu_2(0,t)\,,$ $\mu_{2y}(0,t) = \nu_1(h,t)\,,\ \mu_{2y}(l,t) = \nu_2(h,t),\ \ t \in [0,T]\,;$
$\iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy = \mu_{31}(0)\,,\ \iint\limits_D x\varphi(x,y)dx\,dy = \mu_{32}(0), \quad t \in (0,T]\,.$

Означення 4.2. *Трійка функцій* $(a_1,a_2,u) \in \big(C([0,T_0])\big)^2 \times C^{2,2,1}(D \times (0,T_0)) \cap C^{1,0,0}(\overline{D} \times (0,T_0]), a_i(t) > 0, t \in [0,T_0], i \in \{1,2\}$*, яка задовольняє співвідношення* (4.43)-(4.47) *поточково для всіх* $t \leq T_0$*, називається локальним розв'язком задачі* (4.43)-(4.47)*, якщо* $T_0 \in (0,T)$*, і глобальним розв'язком цієї задачі, якщо* $T_0 = T$ *.*

Теорема 4.2. ***(існування)*** *Нехай виконуються умови* ***(A1)*** *-* ***(A4)****. Тоді якщо* $\beta_2 = \frac{\beta_1+1}{2}$*, то існує локальний розв'язок задачі (4.43)-(4.47).*

Для доведення єдиності розв'язку ми потребуватимемо таку умову:

(A5) $\int\limits_0^h (h-x)(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx \int\limits_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta -$

$$-\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\int\limits_0^l(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta>0,$$

$$\mu_{31}'(t)-\iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy\equiv\varkappa_1(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}},$$

$$\mu_{32}'(t)-\iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy\equiv\varkappa_2(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}},$$

де $\varkappa_i(t)>0, t\in[0,T], i\in\{1,2\}$.

Теорема 4.3. ***(єдиність)*** *Нехай виконуються умови* ***(A1)***, ***(A4)***, ***(A5)***. *Тоді якщо* $\beta_2=\frac{\beta_1+1}{2}$, *то задача (4.43)-(4.47) не може мати більше одного глобального розв'язку.*

Коефіцієнтні обернені задачі для анізотропних багатовимірних параболічних рівнянь з різними показниками сильного виродження при різних просторових компонентах раніше не вивчались.

4.2.2. *Доведення основних результатів.* Доведемо теорему про існування локального розв'язку.

Доведення теореми 4.2. Зведемо задачу (4.43)-(4.47) до системи рівнянь стосовно $a_1(t), a_2(t)$ із допомогою умов перевизначення (4.47). Спершу, диференціюючи умови перевизначення по t, інтегруючи частинами, і використовуючи рівняння (4.43), отримаємо

$$a_1(t)t^{\beta_1}\int\limits_0^l(hu_x(h,y,t)+\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy+$$

$$+a_2(t)t^{\beta_2}\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx=$$

$$=\mu_{32}'(t)-\iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy,\quad t\in[0,T], \tag{4.48}$$

$$a_1(t)t^{\beta_1}\int\limits_0^l(u_x(h,y,t)-u_x(0,y,t))dy+$$

$$+a_2(t)t^{\beta_2}\int\limits_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx=$$

$$= \mu'_{31}(t) - \iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy, \quad t \in [0,T]. \tag{4.49}$$

Перетворимо систему рівнянь (4.48), (4.49), замінюючи вирази, що містять u. Якщо функції $a_1 = a_1(t)$ та $a_2 = a_2(t)$ відомі, то, використовуючи функцію Гріна $G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$, знайдемо розв'язок прямої задачі (4.43)-(4.46):

$$u(x,y,t) = \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta + \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau) \times$$

$$\times a_1(\tau)\tau^{\beta_1}\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)a_1(\tau)\tau^{\beta_1}\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \iint\limits_D G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{4.50}$$

Нагадаємо, що функція Гріна визначається рівністю

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}} \times$$

$$\times \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right) + (-1)^i \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\right) \times$$

$$\times \left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta21(\tau))}\right)\right) + (-1)^j \exp\left(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\Bigg),$$

$$i,j \in \{1,2\}, \quad \theta_k(t) := \int\limits_0^t a_k(\sigma)\sigma^{\beta_k}d\sigma,\ k \in \{1,2\},$$

де значення $i,j = 1$ відповідають умовам Діріхле та $i,j = 2$ – умовам Неймана по x та y відповідно. Відомо, що двовимірну функцію Гріна G_{ij} можна подати у вигляді добутку двох одновимірних функцій Гріна для відповідних рівнянь теплопровідності: $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=G_i(x,t,\xi,\tau)G_j(y,t,\eta,\tau)$. Більше того, легко перевірити, що $G_{1_x}(x,t,\xi,\tau)=-G_{2_\xi}(x,t,\xi,\tau)$.

Знайдемо похідну $u_x(x,y,t)$ і перетворимо отриманий вираз за допомогою інтегрування частинами:

$$u_x(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-a_2(\tau)\tau^{\beta_2}\mu_{11_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-a_2(\tau)\tau^{\beta_2}\mu_{12_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)\times$$
$$\times a_2(\tau)\tau^{\beta_2}\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\iint\limits_D G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \quad (4.51)$$

Щоб знайти $\int\limits_0^l u_x(x,y,t)dy$, зауважимо, що виконується наступна рівність:

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)dx=1.$$

яку легко перевірити безпосереднім обчисленням. Таким чином, матимемо:

$$\int\limits_0^l u_x(x,y,t)dy=\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)d\xi\int\limits_0^l\varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta-$$
$$-\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)d\tau\int\limits_0^l(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta+$$
$$+\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)d\tau\int\limits_0^l(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau))d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times a_2(\tau)\tau^{\beta_2}\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau\int\limits_0^l f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\eta. \qquad (4.52)$$

Повернемось до системи (4.48), (4.49). Щоб знайти додатній розв'язок цієї системи, розглянемо допоміжну алгебраїчну систему рівнянь:

$$a_1x+b_1y=c_1, \quad a_2x+b_2y=c_2, \qquad (4.53)$$

де $a_i>0, b_i>0, c_i>0,\ i\in\{1,2\}$. Розв'язок цієї системи визначається формулою:

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (4.54)$$

Ця система має додатній розв'язок, якщо, наприклад,

$$b_2c_1-b_1c_2>0, \quad a_1c_2-a_2c_1>0, \quad a_1b_2-a_2b_1>0.$$

Ці умови виконуються, якщо

$$\frac{a_1}{a_2}>\frac{c_1}{c_2}>\frac{b_1}{b_2}. \qquad (4.55)$$

Застосуємо цей результат до системи (4.48), (4.49). Додатній розв'язок системи (4.48), (4.49) існує, якщо виконуються наступні умови:

$$\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t)\geq 0, \mu_{22}(x,t)\not\equiv\mu_{21}(x,t), (x,t)\in[0,h]\times(0,T],$$

$$\int\limits_0^l(\mu_{11}(\eta,t)-\mu_{12}(\eta,t))d\eta>0, \quad \mu_{31}'(t)-\iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy>0,$$

$$\mu_{32}'(t) - \iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy > 0,$$

$$h > \frac{\mu_{32}'(t) - \iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy,}{\mu_{31}'(t) - \iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy} > \frac{\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx}{\int\limits_0^h (\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx},$$

$$\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy \geq 0, \quad \int\limits_0^l (u_x(h,y,t) - u_x(0,y,t))dy > 0, \quad t \in (0,T]. \qquad (4.56)$$

Ці умови випливають із **(A2)**. Зауважимо, що дві останні умови у (4.56) містять у своїх виразах $u(x,y,t)$. Для того, щоб дослідити першу з них, покладемо $x = 0$ у (4.52) і розглянемо вираз:

$$\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)a_2(\tau)(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau))d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_2(0,t,h,\tau)a_2(\tau)(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t (G_2(0,t,0,\tau) - G_2(0,t,h,\tau))a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau))d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t G_2(0,t,h,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau)-\mu_{22}(h,\tau)+\mu_{21}(h,\tau))d\tau.$$

Так як $G_2(0,t,0,\tau) - G_2(0,t,h,\tau) \geq 0$, маємо, що $\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy > 0$, бо виконуються наступні умови (див. **(A2)**):

$$\int\limits_0^l (\mu_{11_t}(y,t) - f(0,y,t))dy < 0, \int\limits_0^l (\mu_{12_t}(y,t) - f(h,y,t))dy > 0, t \in [0,T],$$

$$\int\limits_0^l \varphi_x(x,y)dy > 0,\ \mu_{21_x}(x,t) \leq 0, \mu_{22_x}(x,t) \geq 0, \mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t) \geq 0,$$

$$\mu_{22}(x,t) \not\equiv \mu_{21}(x,t), \int\limits_0^l f_x(x,y,t)dy \geq 0, (x,t) \in [0,h] \times (0,T],$$

$$\mu_{22}(0,t) - \mu_{21}(0,t) - \mu_{22}(h,t) + \mu_{21}(h,t) \geq 0. \tag{4.57}$$

Із (4.52) знайдемо:

$$\int\limits_0^l (u_x(h,y,t) - u_x(0,y,t))dy = \int\limits_0^h (G_2(h,t,\xi,0) - G_2(0,t,\xi,0)d\xi \int\limits_0^l \varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta -$$

$$- \int\limits_0^t (G_2(h,t,0,\tau) - G_2(0,t,0,\tau))d\tau \int\limits_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau) + \mu_{12_\tau}(\eta,\tau) -$$

$$- f(h,\eta,\tau))d\eta + \int\limits_0^t (G_2(h,t,0,\tau) - G_2(0,t,0,\tau)) \times$$

$$\times a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22}(0,\tau) - \mu_{21}(0,\tau) + \mu_{22}(h,\tau) - \mu_{21}(h,\tau))d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h (G_2(h,t,\xi,\tau) - G_2(0,t,\xi,\tau))a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau) - \mu_{21_\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h (G_2(h,t,\xi,\tau) - G_2(0,t,\xi,\tau))d\xi d\tau \int\limits_0^l f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\eta. \tag{4.58}$$

Враховуючи представлення функції Гріна, розглянемо наступний вираз:

$$G_2(0,t,\xi,\tau) - G_2(h,t,\xi,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(\xi + 2nh)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))} \right) - \exp\left(-\frac{(\xi + (2n+1)h)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi + nh)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))} \right) := \tilde{G}(0,t,\xi,\tau).$$

Легко перевірити, що $\tilde{G}(x,t,\xi,\tau)$ є функцією Гріна для рівняння теплопровідності

$$u_t = a_1(t)t^{\beta_1}u_{xx}, \quad (x,t) \in (0,h/2) \times (0,T)$$

із крайовими умовами

$$\tilde{G}_x(0,t,\xi,\tau)=0, \quad \tilde{G}(h/2,t,\xi,\tau)=0.$$

Із властивостей функцій Гріна випливає, що $\tilde{G}(x,t,\xi,\tau) \geq 0, (x,t),(\xi,\tau) \in [0,h/2]\times[0,T]$.

Для деякої неперервної на $[0,h]$ функції ψ, перетворимо інтеграл

$$\int_0^h (G_2(h,t,\xi,\tau)-G_2(0,t,\xi,\tau))\psi(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}}\int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\psi(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}}\int_0^{h/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}}\int_{h/2}^{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\psi(\xi)d\xi.$$

Після заміни $\zeta=h-\xi$ у другому інтегралі, матимемо:

$$\int_0^h (G_2(h,t,\xi,\tau)-G_2(0,t,\xi,\tau))\psi(\xi)d\xi = \int_0^{h/2}\tilde{G}(0,t,\xi,\tau)(\psi(h-\xi)-\psi(\xi))d\xi.$$

Аналогічне перетворення застосуємо також до останнього інтеграла у (4.58). Отже, вираз (4.58) зведемо до вигляду

$$\int_0^l (u_x(h,y,t)-u_x(0,y,t))dy = \int_0^{h/2}\tilde{G}(0,t,\xi,\tau)d\xi\int_0^l(\varphi_\xi(h-\xi,\eta)-\varphi_\xi(\xi,\eta))d\eta +$$

$$+\int_0^t \tilde{G}(0,t,0,\tau)d\tau\int_0^l(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau)+\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta -$$

$$-\int_0^t \tilde{G}(0,t,\xi,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau)+\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{h/2}\tilde{G}(0,t,\xi,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22_\xi}(h-\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(h-\xi,\tau)-\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+\mu_{21_\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^{h/2}\tilde{G}(0,t,\xi,\tau)d\xi d\tau\int\limits_0^l(f_\xi(h-\xi,\eta,\tau)-f_\xi(\xi,\eta,\tau))d\eta. \tag{4.59}$$

Враховуючи (4.56)-(4.59), приходимо до висновку, що система (4.48), (4.49) має додатній розв'язок, якщо виконуються умови **(A2)**.

Отже, із системи (4.48), (4.49) та з (4.54) одержимо, що

$$a_1(t)t^{\beta_1}=\Bigg(\Bigg(\mu_{32}'(t)-\iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy\Bigg)\int\limits_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx-\Bigg(\mu_{31}'(t)-$$

$$-\iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy\Bigg)\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\Bigg)\Delta^{-1}(t),t\in[0,T], \tag{4.60}$$

$$a_2(t)t^{\beta_2}=\Bigg(\Bigg(\mu_{31}'(t)-\iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy\Bigg)\int\limits_0^l(hu_x(h,y,t)+\mu_{11}(y,t)-$$

$$-\mu_{12}(y,t))dy-\Bigg(\mu_{32}'(t)-\iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy\Bigg)\int\limits_0^l(u_x(h,y,t)-$$

$$-u_x(0,y,t))dy\Bigg)\Delta^{-1}(t),t\in[0,T], \tag{4.61}$$

де

$$\Delta(t):=\int\limits_0^l(hu_x(h,y,t)+\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\int\limits_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx-$$

$$-\int\limits_0^l(u_x(h,y,t)-u_x(0,y,t))dy\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx. \tag{4.62}$$

Дослідимо функції з (4.60)-(4.61).

Щоб встановити поведінку функції $\Delta(t)$ при $t \to 0$, подамо її у вигляді:

$$\Delta(t) = \int_0^l u_x(h,y,t)dy \int_0^h (h-x)(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx +$$

$$+ \int_0^l u_x(0,y,t)dy \int_0^h x(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx +$$

$$+ \int_0^l (\mu_{11}(y,t) - \mu_{12}(y,t))dy \int_0^h (\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx. \qquad (4.63)$$

Знайдемо $\int_0^l u_x(0,y,t)dy$ із (4.52) і оцінимо вирази

$$\int_0^h G_2(0,t,\xi,0)d\xi \int_0^l \varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta \le C_1 \int_0^h G_2(0,t,\xi,0)d\xi,$$

$$-\int_0^t G_2(0,t,0,\tau)d\tau \int_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta \le C_2 \int_0^t G_2(0,t,0,\tau)d\tau,$$

$$\int_0^t G_2(0,t,h,\tau)d\tau \int_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta \le C_3 \int_0^t G_2(0,t,h,\tau)d\tau,$$

$$\int_0^t G_2(0,t,0,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22}(0,\tau) - \mu_{21}(0,\tau))d\tau \le C_4 \int_0^t G_2(0,t,0,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}d\tau,$$

$$\int_0^t G_2(0,t,h,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}(\mu_{22}(h,\tau) - \mu_{21}(h,\tau))d\tau \le C_5 \int_0^t G_2(0,t,h,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}d\tau,$$

$$-\int_0^t \int_0^h G_2(0,t,\xi,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^h G_2(0,t,\xi,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2} \times$$

$$\times \mu_{22_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau \le C_6 \int_0^t \int_0^h G_2(0,t,\xi,\tau)a_2(\tau)\tau^{\beta_2}d\xi d\tau,$$

$$\int_0^t \int_0^h G_2(0,t,\xi,\tau)d\xi d\tau \int_0^l f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\eta \le C_7 \int_0^t \int_0^h G_2(0,t,\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Тут і далі $C_i, i = 1, 2, 3, ...,$ позначають константи, залежні від вхідних даних. Нехай $a_{i_{min}} = \min\limits_{t\in[0,T]} a_i(t)\,,\; a_{i_{max}} = \max\limits_{t\in[0,T]} a_i(t)\,.$

Враховуючи оцінки функцій Гріна [95], отримаємо:

$$\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)d\tau \leq \int\limits_0^t \left(\frac{C_{11}}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} + C_{12}\right)d\tau \leq \frac{C_{13}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{min}}}} + C_{12}T,$$

$$G_2(0,t,h,\tau) \leq C_{14}.$$

З іншого боку,

$$\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)d\tau \geq \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}} \geq \frac{C_{15}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{max}}}}.$$

Таким чином, матимемо

$$\frac{C_{16}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{max}}}} \leq \int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy \leq \frac{C_{17}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{min}}}} + \frac{C_{18}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t^{\beta_1+1}-\tau^{\beta_1+1}}} +$$

$$+ C_{19}\int\limits_0^t \tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau.$$

Перетворимо інтеграл

$$\int\limits_0^t \frac{\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t^{\beta_1+1}-\tau^{\beta_1+1}}} \leq t^{\beta_2-\beta_1/2}\int\limits_0^t \frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau\left(\dfrac{\tau}{t}\right)^{\beta_1}}} \leq t^{\beta_2-\beta_1/2}\int\limits_0^t \frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Далі, отримуємо

$$\frac{C_{16}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{max}}}} \leq \int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy \leq \frac{C_{17}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{min}}}} + \frac{C_{20}t^{\beta_2-\beta_1/2}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}\int\limits_0^t \frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} +$$

$$+ C_{21}t^{\beta_2}\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau \quad t \in (0,T]. \tag{4.64}$$

Аналогічно, знаходимо

$$\frac{C_{22}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{max}}}} \le \int_0^l u_x(h,y,t)dy \le \frac{C_{23}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{min}}}} + \frac{C_{24}t^{\beta_2-\beta_1/2}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}\int_0^t \frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} +$$

$$+ C_{25}t^{\beta_2}\int_0^t a_2(\tau)d\tau \quad t \in (0,T]. \tag{4.65}$$

Це означає, що виконується наступна нерівність:

$$\frac{C_{26}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{max}}}} \le \Delta(t) \le \frac{C_{27}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{min}}}} + \frac{C_{28}t^{\beta_2-\beta_1/2}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}\int_0^t \frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + C_{29}t^{\beta_2}\times$$

$$\times\int_0^t a_2(\tau)d\tau,\ t \in (0,T]. \tag{4.66}$$

Повернемося до системи (4.60), (4.61). Подамо (4.60) у вигляді:

$$a_1(t)t^{\beta_1} = \Delta^{-1}(t)\int_0^h (\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\left(\mu_{31}'(t) - \iint_D f(x,y,t)dx\,dy\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\mu_{32}'(t) - \iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy,}{\mu_{31}'(t) - \iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy} - \frac{\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx}{\int_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx}\right),\quad t\in(0,T]. \tag{4.67}$$

Подамо (4.61) у вигляді:

$$a_2(t)t^{\beta_2} = \Bigg(\int_0^l u_x(h,y,t)dy\big(h\mu_{31}'(t) - h\iint_D f(x,y,t)dx\,dy - \mu_{32}'(t) +$$

$$+\iint_D xf(x,y,t)dx\,dy\big) + \int_0^l u_x(0,y,t)dy\left(\mu_{32}'(t) - \iint_D xf(x,y,t)dx\,dy\right) +$$

$$+\left(\mu_{31}'(t) - \iint_D f(x,y,t)dx\,dy\right)\int_0^l(\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\Bigg)\Delta^{-1}(t),\quad t\in(0,T]. \tag{4.68}$$

З умови **(A3)** випливає, що мають місце наступні тотожності:

$$\mu'_{31}(t) - \iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy \equiv \varkappa_1(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}},$$

$$\mu'_{32}(t) - \iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy \equiv \varkappa_2(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}}, \tag{4.69}$$

де $\varkappa_i(t) > 0, t \in [0,T], i \in \{1,2\}$.

Тому зведемо систему (4.67), (4.68) до вигляду

$$a_1(t) = t^{\frac{1-\beta_1}{2}}\varkappa_1(t)\int\limits_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\left(\frac{\varkappa_2(t)}{\varkappa_1(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx}{\int\limits_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx}\right)\Delta^{-1}(t), \quad t \in (0,T], \tag{4.70}$$

$$a_2(t) = \left((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy + \varkappa_2(t)\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy + \right.$$

$$\left. + \varkappa_1(t)\int\limits_0^l(\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\right)\Delta^{-1}(t), \quad t \in (0,T]. \tag{4.71}$$

Позначимо праву частину (4.70) через $P_1(a_1,a_2)$, а праву частину (4.71) – через $P_2(a_1,a_2)$. Аргументи операторів P_1 та P_2 надалі опускатимемо. Використовуючи припущення **(A2)** та (4.69), із (4.65) отримуємо:

$$P_1 \le C_{30}\sqrt{a_{1_{max}}}.$$

Якщо припустити, що $a_{1_{max}} \le A_1$, де $A_1 \ge C_{30}^2$, то звідси випливає, що

$$P_1 \le A_1 < \infty, \quad t \in [0,T], \tag{4.72}$$

де стала A_1 залежить від вхідних даних.

Додатково до наведених вище припущень, з **(A3)** матимемо наступну умову:

$$h\mu_{31}'(t)-\mu_{32}'(t)+\iint\limits_{D}(x-h)f(x,y,t)dx\,dy>0,\quad t\in(0,T]. \tag{4.73}$$

Зауважимо, що із (4.59), **(A2)** маємо нерівність

$$\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy\geq\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy.$$

Враховуючи цю нерівність та (4.63), із (4.68) отримаємо:

$$P_2\leq t^{-\beta_2}\left(\mu_{31}'(t)-\iint\limits_{D}f(x,y,t)dx\,dy\right)\left(h\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^l(\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\right)\left(\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\right)^{-1}.$$

З допомогою (4.64), (4.65), (4.69), (4.72) знайдемо

$$P_2\leq t^{\beta_1-\beta_2}\Bigg(\frac{C_{31}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}+\frac{C_{32}t^{\beta_2-\beta_1/2}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+C_{33}t^{\beta_2}\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau+C_{34}\Bigg)\times$$

$$\times\sqrt{a_{1_{max}}}\leq t^{\frac{\beta_1+1}{2}}\Bigg(\frac{C_{35}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}+\frac{C_{36}t^{\beta_2-1/2}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+$$

$$+C_{37}t^{\frac{\beta_1-1}{2}+\beta_2}\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau+C_{38}t^{\frac{\beta_1-1}{2}}\Bigg)$$

або

$$P_2\leq\frac{C_{35}t^{\frac{\beta_1+1}{2}-\beta_2}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}+\frac{C_{36}t^{\frac{\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+C_{37}t^{\beta_1}\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau+C_{38}t^{\beta_1-\beta_2}.$$

Нагадаємо, що $\beta_2=\frac{\beta_1+1}{2}$. Тоді отримуємо

$$P_2\leq\frac{C_{35}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}+\frac{C_{36}t^{\frac{\beta_1}{2}}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+C_{37}t^{\beta_1}\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau+$$

$$+C_{38}t^{\frac{\beta_1-1}{2}},\ t\in[0,T]. \tag{4.74}$$

Перетворимо інтеграл

$$\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau=\int\limits_0^t\frac{\sqrt{t-\tau}a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\le C_{39}\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

і зведемо нерівність (4.74) до вигляду

$$P_2\le\frac{C_{35}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}+\left(\frac{C_{40}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}+C_{41}\right)\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+C_{42}\le$$

$$\le\frac{C_{35}}{\sqrt{a_{1_{min}}}}+2C_{42}\le A_2,\quad t\in[0,T_1]. \tag{4.75}$$

Оцінимо P_1 знизу, використовуючи **(A2)**, (4.66), (4.69):

$$P_1\ge\frac{C_{43}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}\sqrt{a_{1_{min}}}}{C_{27}t^{\frac{1-\beta_1}{2}}+C_{28}t^{\beta_2-\beta_1/2}\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+C_{29}t^{\beta_2}\sqrt{a_{1_{min}}}\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau}.$$

Завдяки припущенню $\beta_2=\frac{\beta_1+1}{2}$, отримуємо

$$P_1\ge\frac{C_{43}\sqrt{a_{1_{min}}}}{C_{27}+C_{28}\sqrt{t}\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+C_{44}t^{\beta_1}\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau}. \tag{4.76}$$

Зауважимо, що $C_{28}\sqrt{t}\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+C_{44}t^{\beta_1}\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau\to0$ при $t\to0$. Тоді $\exists T_2\in(0,T]$:

$$C_{28}\sqrt{t}\int\limits_0^t\frac{a_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+C_{44}t^{\beta_1}\int\limits_0^t a_2(\tau)d\tau\le C_{27},\quad t\in[0,T_2]. \tag{4.77}$$

Звідси легко отримати оцінку

$$P_1\ge\frac{C_{43}}{2C_{27}}\sqrt{a_{1_{min}}}.$$

Тому якщо $a_1(t)\ge A_3>0,\ t\in[0,T_3]$, де $A_3<\left(\frac{C_{43}}{2C_{27}}\right)^2$, то

$$P_1\ge A_3,\quad t\in[0,T_3]. \tag{4.78}$$

Щоб встановити оцінку P_2 знизу, із (4.68) знайдемо:

$$P_2(t) \geq t^{-\beta_2} \int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy \left(\mu'_{32}(t) - \iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy \right) \Delta^{-1}(t).$$

Оцінка $\Delta(t)$ із (4.66) зводиться до наступного вигляду:

$$\Delta(t) \leq C_{45} t^{\frac{1-\beta_1}{2}} + C_{46}.$$

Аналогічним чином, із (4.64) отримуємо:

$$\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy \geq C_{47} t^{\frac{1-\beta_1}{2}}.$$

Остаточно, знаходимо

$$P_2 \geq \frac{t^{-\beta_2} C_{47} t^{\frac{1-\beta_1}{2}} \varkappa_2(t) t^{\frac{\beta_1+1}{2}}}{C_{45} t^{\frac{1-\beta_1}{2}} + C_{46}} \geq$$

$$\geq \frac{C_{47} \min\limits_{t\in[0,T]} \varkappa_2(t)}{C_{45} + C_{46} T^{\frac{\beta_1-1}{2}}} \geq A_4 > 0, \quad t \in [0, T_4]. \tag{4.79}$$

Легко бачити, що система (4.70), (4.71) еквівалентна задачі (4.43)-(4.47). З іншого боку, оцінки (4.72), (4.78)-(4.79) справджуються для розв'язку цієї системи на $[0,T_0]$, де $T_0 = \min\{T_1,T_2,T_3,T_4\}$. Подамо систему (4.70), (4.71) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega, \tag{4.80}$$

де $(a_1,a_2) := \omega, (P_1,P_2) := P$, а оператори P_1, P_2 визначаються правими частинами рівнянь (4.70) та (4.71) відповідно. Розглянемо рівняння (4.80) у множині

$$\mathcal{N} := \{(a_1,a_2) \in (C([0,T_0]))^2 : A_3 \leq a_1 \leq A_1, A_4 \leq a_2 \leq A_2\}$$

банахового простору $(C([0,T_0]))^2$. Із оцінок (4.72), (4.78)-(4.79) випливає, що оператор P відображає $\mathcal{N}$ в себе. У [97], [4] показано, що цей оператор є компактним на $\mathcal{N}$. Тоді із теореми Шаудера про нерухому точку випливає, що оператор P має принаймні одну нерухому точку у $\mathcal{N}$. Це означає, що система (4.70), (4.71) має розв'язок $(a_1, a_2) \in (C([0, T_0]))^2$. Підставивши його у (4.50), отримуємо розв'язок прямої задачі (4.43)-(4.46) із потрібною гладкістю [38]. Теорему 4.2 доведено. $\square$

Розглянемо тепер єдиність розв'язку.

Доведення теореми 4.3.

Перепозначимо $\beta_1 := \beta$ і подамо рівняння (4.43) у вигляді

$$u_t = a_1(t)t^{\beta}u_{xx} + a_2(t)t^{\frac{1+\beta}{2}}u_{yy} + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T. \tag{4.81}$$

Диференціюючи умови (4.47) за змінною t та використовуючи рівняння (4.81), отримаємо систему рівнянь стосовно $a_1(t), a_2(t)$:

$$a_1(t)t^{\beta}\int\limits_0^l (hu_x(h, y, t) + \mu_{11}(y, t) - \mu_{12}(y, t))dy +$$

$$+ a_2(t)t^{\frac{1+\beta}{2}}\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x, t) - \mu_{21}(x, t))dx =$$

$$= \mu_{32}'(t) - \iint\limits_D xf(x, y, t)dx\,dy, \quad t \in [0, T], \tag{4.82}$$

$$a_1(t)t^{\beta}\int\limits_0^l (u_x(h, y, t) - u_x(0, y, t))dy +$$

$$+ a_2(t)t^{\frac{1+\beta}{2}}\int\limits_0^h (\mu_{22}(x, t) - \mu_{21}(x, t))dx =$$

$$= \mu_{31}'(t) - \iint\limits_D f(x, y, t)dx\,dy, \quad t \in [0, T]. \tag{4.83}$$

Умови теореми дозволяють розв'язати систему (4.82), (4.83) стосовно $a_1(t)$, $a_2(t)$:

$$a_1(t) = t^{-\beta}\Bigg(\Bigg(\mu_{32}'(t) - \iint\limits_D xf(x, y, t)dx\,dy\Bigg)\int\limits_0^h (\mu_{22}(x, t) - \mu_{21}(x, t))dx -$$

$$-\left(\mu_{31}'(t)-\iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy\right)\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\right)\Delta^{-1}(t), t\in[0,T], \tag{4.84}$$

$$a_2(t)=t^{-\frac{1+\beta}{2}}\left(\left(\mu_{31}'(t)-\iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy\right)\int\limits_0^l(hu_x(h,y,t)+\mu_{11}(y,t)-\right.$$
$$-\mu_{12}(y,t))dy-\left(\mu_{32}'(t)-\iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy\right)\times$$
$$\left.\times\int\limits_0^l(u_x(h,y,t)-u_x(0,y,t))dy\right)\Delta^{-1}(t), t\in[0,T], \tag{4.85}$$

де

$$\Delta(t)=\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy\int\limits_0^h(h-x)(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx+\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy\times$$
$$\times\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx+\int\limits_0^l(\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\times$$
$$\times\int\limits_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx. \tag{4.86}$$

Надамо системі (4.84), (4.85) наступного вигляду:

$$a_1(t)=\left(\varkappa_2(t)\int\limits_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx-\varkappa_1(t)\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\right)\times$$
$$\times t^{\frac{1-\beta}{2}}\Delta^{-1}(t), \tag{4.87}$$

$$a_2(t)=\left((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy+\varkappa_2(t)\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy+\right.$$
$$\left.+\varkappa_1(t)\int\limits_0^l(\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\right)\Delta^{-1}(t),\quad t\in(0,T]. \tag{4.88}$$

За допомогою функції Гріна знайдемо розв'язок задачі (4.43)-(4.46):

$$u(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a_1(\tau)\mu_{11}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a_1(\tau)\mu_{12}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{21}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{22}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_D G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{4.89}$$

Функція Гріна визначається з рівності

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\times$$

$$\times\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)+(-1)^i\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)+(-1)^j\exp\left(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right),$$

$$i,j\in\{1,2\},\theta_1(t):=\int\limits_0^t\sigma^\beta a_1(\sigma)d\sigma,\ \theta_2(t):=\int\limits_0^t\sigma^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\sigma)d\sigma,$$

де значення $i,j=1$ відповідають умовам Діріхле за змінними $x,y,$ а $i,j=2$ - умовам Неймана. Легко бачити, що

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=G_i(x,t,\xi,\tau)G_j(y,t,\eta,\tau),$$

де G_i - функції Гріна для одновимірних рівнянь теплопровідності за відповідними змінними. З (4.89) обчислимо

$$u_x(x,y,t) = \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - a_2(\tau)\mu_{11_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - a_2(\tau)\mu_{12_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau) \times$$

$$\times \tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int\limits_0^t \iint\limits_D G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \quad (4.90)$$

Беручи до уваги рівність

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)dx = 1,$$

яку легко перевірити, знаходимо

$$\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy = \int\limits_0^h G_2(0,t,\xi,0)d\xi \int\limits_0^l \varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta -$$

$$- \int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)d\tau \int\limits_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^t G_2(0,t,h,\tau)d\tau \int\limits_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22}(0,\tau) - \mu_{21}(0,\tau))d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_2(0,t,h,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau\int\limits_0^l f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\eta, \tag{4.91}$$

$$\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy=\int\limits_0^h G_2(h,t,\xi,0)d\xi\int\limits_0^l \varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta-$$

$$-\int\limits_0^t G_2(h,t,0,\tau)d\tau\int\limits_0^l(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t G_2(h,t,h,\tau)d\tau\int\limits_0^l(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t G_2(h,t,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau))d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t G_2(h,t,h,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(h,t,\xi,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(h,t,\xi,\tau)d\xi d\tau\int\limits_0^l f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\eta. \tag{4.92}$$

Підставимо у (4.90) рівності (4.93), (4.94) і подамо $\Delta(t)$ у вигляді

$$\Delta(t)=\Delta_0(t)\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}+R(t),$$

де

$$\Delta_0(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\int\limits_0^h (h-x)(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx \int\limits_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta -$$

$$-\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx \int\limits_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta\Big],$$

а до $R(t)$ входять всі інші доданки з $\Delta(t)$. Подамо рівняння (4.88) у вигляді

$$a_1(t) = \frac{F(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\Delta(t)}, \quad t \in [0,T], \tag{4.93}$$

де

$$F(t) := \varkappa_2(t)\int\limits_0^h (\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx - \varkappa_1(t)\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx.$$

Розглянемо функцію

$$H(t) := \frac{F(t)}{\sqrt{\beta+1}\Delta_0(t)\int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}}, \quad t \in [0,T]. \tag{4.94}$$

Виходячи з (4.93) та беручи до уваги припущення теореми, отримуємо

$$a_1(t) \le \frac{F(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\Delta_0(t)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}} \le \frac{F(t)\sqrt{a_{1\max}(t)}}{\sqrt{\beta+1}\Delta_0(t)\int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}} =$$

$$= H(t)\sqrt{a_{1\max}(t)}, \quad t \in [0,T],$$

де $a_{1\max}(t) := \max\limits_{\tau\in[0,t]} a_1(\tau)$. Звідси встановлюємо оцінку

$$a_1(t) \le H^2_{\max}(t), \quad t \in [0,T], \tag{4.95}$$

де $H_{\max}(t) := \max\limits_{\tau\in[0,t]} H(\tau)$.

Для оцінки $a_1(t)$ знизу зауважимо, що $\lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{\beta-1}{2}}\Delta_1(t) = 0$. Це оначає, що для довільного $q \in (0,1)$ існує таке $t_0 \in (0,]T$, що виконуватиметься нерівність

$$R(t) \le q\Delta_0(t) \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}, \quad t \in [0,t_0]. \qquad (4.96)$$

Тоді аналогічно до (4.93) знаходимо

$$a_1(t) \ge \frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}, \quad t \in [0,t_0]. \qquad (4.97)$$

Тут вжито позначення $H_{\min}(t) := \min\limits_{\tau\in[0,t]} H(\tau)$.

Припустимо, що система рівнянь (4.86), (4.87) має два розв'язки $(a_{1i}(t)$, $a_{2i}(t))$, $i \in \{1,2\}$. Позначимо $u(x,y,t) := u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t)$, $b_i(t) := a_{i1}(t) - a_{i2}(t)$, $\theta_{1i} = \int\limits_0^t \tau^\beta a_{1i}(\tau)d\tau, i \in \{1,2\}, \Delta(t) := \Delta_1(t) - \Delta_2(t), R(t) := R_1(t) - R_2(t)$. З рівняння (4.84) отримуємо

$$b_1(t) = \frac{F(t)(\Delta_2(t)-\Delta_1(t))}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)} = \frac{a_{11}(t)a_{12}(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}}{F(t)}\Bigg(\Delta_0(t)\int\limits_0^t \Bigg(\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\Bigg)d\tau + R_2(t) - R_1(t)\Bigg).$$

З міркувань, наведених при виведенні оцінки (4.96), можна вважати, що для тих самих значень q та t_0 справджується нерівність

$$|R_2(t) - R_1(t)| \le q\Delta_0(t)\int\limits_0^t \Bigg(\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\Bigg)d\tau, \quad t \in [0,t_0].$$

Тоді

$$|b_1(t)| \le \frac{(1+q)a_{11}(t)a_{12}(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}}{F(t)}\Delta_0(t)\int\limits_0^t \Bigg|\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\Bigg|d\tau. \qquad (4.98)$$

Перетворимо вираз

$$\int\limits_0^t \left| \frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}} \right| d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \frac{|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)|d\tau}{\sqrt{(\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau))(\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau))}(\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}+\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)})}.$$

Застосовуючи оцінки (4.95), (4.97), знаходимо

$$\int\limits_0^t \left| \frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}} \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \frac{|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)|d\tau}{\sqrt{(\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau))(\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau))}} \times$$

$$\times \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}+\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} \leq$$

$$\leq \frac{(1+q)^3\sqrt{\beta+1}\,b_{1\max}(t)}{2t^{\frac{\beta-1}{2}}H^3_{\min}(t)} \int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}.$$

Підставимо цю оцінку в (4.96):

$$|b_1(t)| \leq \frac{(1+q)^4 a_{11}(t)a_{12}(t)\sqrt{\beta+1}\,b_{1\max}(t)}{2F(t)H^3_{\min}(t)}\Delta_0(t) \int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}} \leq$$

$$\leq \frac{(1+q)^4 H^4_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)} b_{1\max}(t), \quad t \in [0, t_0]. \tag{4.99}$$

Оскільки

$$\lim_{t\to 0} H_{\min}(t) = \lim_{t\to 0} H_{\max}(t),$$

то існує таке значення $t_1 \in (0, t_0]$, що виконуватиметься нерівність

$$\frac{(1+q)^4 H^4_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)} \leq q_0 < 1, \quad t \in [0, t_1].$$

Тоді з (4.97) приходимо до висновку, що $b_1(t) \equiv 0, \quad t \in [0, t_1]$.

З рівняння (4.88) отримуємо

$$b_2(t)=\left((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy+\varkappa_2(t)\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy\right)(\Delta_1(t))^{-1}-$$

$$-\left((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int\limits_0^l u_{2_x}(h,y,t)dy+\varkappa_2(t)\int\limits_0^l u_{2_x}(0,y,t)dy+\right.$$

$$\left.+\varkappa_1(t)\int\limits_0^l(\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\right)\frac{\Delta(t)}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)},\quad t\in[0,T].\qquad(4.100)$$

Враховуючи те, що $a_{11}(t)=a_{12}(t), t\in[0,t_1]$, з (4.91), (4.92) знаходимо

$$\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy=\int\limits_0^t \tau^{\frac{1+\beta}{2}}b_2(\tau)\Big(G_2(0,t,0,\tau)(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau))-$$

$$-G_2(0,t,h,\tau)(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))+$$

$$+\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau))d\xi\Big)d\tau,$$

$$\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy=\int\limits_0^t \tau^{\frac{1+\beta}{2}}b_2(\tau)\Big(G_2(h,t,0,\tau)(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau))-$$

$$-G_2(h,t,h,\tau)(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))+$$

$$+\int\limits_0^h G_2(h,t,\xi,\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi\Big)d\tau,\quad t\in[0,t_1].\qquad(4.101)$$

Тут у функції Гріна покладено $\theta_1(t)=\int\limits_0^t a_{11}(\tau)d\tau$. Аналогічно з (4.86) маємо

$$\Delta(t)=\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy\int\limits_0^h(h-x)(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx+$$

$$+\int_0^l u_x(0,y,t)dy\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx. \tag{4.102}$$

Беручи до уваги (4.101), (4.102), зведемо рівняння (4.100) до вигляду

$$b_2(t)=\int_0^t K(t,\tau)b_2(\tau)d\tau, \quad t\in[0,t_1]. \tag{4.103}$$

Зважаючи на оцінку

$$\int_0^t \frac{\tau^{\frac{1+\beta}{2}}d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\le C_1\int_0^t \frac{\tau^{\frac{1+\beta}{2}}d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}_2},$$

робимо висновок про те, що ядро $K(t,\tau)$ не має особливостей, і тому рівняння (4.103) допускає тільки тривіальний розв'язок $b_2(t)\equiv 0, t\in[0,t_1]$.

Доведення того, що розв'язок (4.43)-(4.47) єдиний на всьому часовому проміжку $[0,T]$, проводиться аналогічно до [98]. Теорему 4.3 доведено. $\square$

4.2.3. *Висновки до підрозділу 4.2.* Розглянуто умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для двовимірного анізотропного параболічного рівняння зі сильним виродженням. В якості умов перевизначення використовуються інтегральні умови. Метод доведення вимагає існування зв'язку між показниками виродження для різних просторових компонент у старшому коефіцієнті рівняння.

4.3. **Висновки до розділу 4.** У цьому розділі розглянуто умови існування та єдиності розв'язків обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь зі сильним виродженням. Розглядаються задачі зі змішаними крайовими умовами Діріхле-Неймана та з різними типами умов перевизначення (у вигляді теплового потоку на частині межі та інтегрального типу).

У анізотропному випадку метод доведення вимагає існування зв'язку між показниками виродження для різних просторових компонент у старшому коефіцієнті рівняння.

Результати цього розділу опубліковано у [3], [4], [5] та додатково висвітлено у [12], [13], [14].

ВИСНОВКИ

У дисертації досліджено обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь з виродженням і вперше отримано такі результати:

- встановлено умови існування та єдиності глобального розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле і слабким виродженням;
- знайдено умови локального існування та глобальної єдиності розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана для повного параболічного рівняння зі слабким виродженням;
- встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле для анізотропного повного параболічного рівняння зі слабким виродженням;
- доведено існування і єдиність глобального розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана та диференціальними умовами перевизначення для ізотропного параболічного рівняння з сильним виродженням;
- знайдено умови локального існування і глобальної єдиності розв'язку оберненої задачі з крайовими умовами Діріхле-Неймана та інтегральними умовами перевизначення для анізотропного параболічного рівняння з сильним виродженням.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Іванчов М.І., Власов В.А.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2009; 70: 91-102.

[2] *Власов В.А.* Обернена задача для двовимірного анізотропного параболічного рівняння зі слабким виродженням. Буковинський математичний журнал. 2017; 5 (1-2): 37-48.

[3] *Іванчов М., Власов В.* Єдиність розв'язку оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з сильним виродженням. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2018; 85: 120-131.

[4] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation. Electronic Journal of Differential Equations. 2018; 77: 1-17. Available from: ejde.math.txstate.edu

[5] *Власов В.А., Іванчов М.І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі сильним виродженням. Випадок інтегральних умов перевизначення. Буковинський математичний журнал. 2019; 7 (1): 32-47.

[6] *Власов В.А.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння зі слабким виродженням. Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. 2017; 871: 33–39.

[7] *Власов В. А.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння з виродженням. XIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука; 13-15 травня, 2010; Київ, Україна. Київ; 2010. С. 87.

[8] *Власов В. А.* An inverse problem for a weakly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. Nonlinear Partial Differential Equations; September 6-11, 2010; Dnipro, Ukraine. Dnipro; 2010. P. 55-56.

[9] *Vlasov V.* An inverse problem for a strongly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька; 19-23 вересня, 2011; Дрогобич, Україна. Дрогобич; 2011. С. 39.

[10] *Власов В. А.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння з сильним виродженням. XIV Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука; 19-21 квітня, 2012; Київ, Україна. Київ; 2012. С. 106.

[11] *Vlasov V.* An inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation in a rectangular domain. 8th International Conference on Inverse Problems in Engineering; May 12-15, 2014; Krakow, Poland. Krakow; 2014. C. 177-178.

[12] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a 2D strongly degenerate heat equation. Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях; 17-18 вересня, 2018; Чернівці, Україна. Чернівці; 2018. С. 26.

[13] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation. Book of abstracts of CAIM-2018. – Chisinau, 2018. – P. 18.

[14] *Ivanchov M., Vlasov V.* Inverse problem for strongly degenerate heat equation. Abstracts of 24th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis. – Tallinn, 2019. – P. 29.

[15] *Баранська І., Іванчов М.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами. Український математичний вісник. 2007; 4 (4): 457-484.

[16] *Баранська І.* Обернена задача в області з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007; 50 (2): 17-28.

[17] *Баранська І.* Обернена задача в області з вільною межею для анізотропного рівняння параболічного типу. Науковий вісник Чернівецького університету. Сер. Математика. 2008; 374: 13–28.

[18] *Гаджиев М.М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения. Применение методов функционального анализа в методах математической физики. - Новосибирск. - 1987. - С. 66-71.

[19] *Глушак А.В., Шмулевич С.Д.* О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной. Дифф. уравн. 1986; 22(6): 1065-1068.

[20] *Глушко В.* Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения. 1968; 4 (9): 1584-1957.

[21] *Гринців Н.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням в області з вільною межею. Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, №4. – С. 28-40.

[22] *Гринців Н.* Обернена задача для сильно виродженого параболічного рівняння в області з вільними межами. Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2007. – **67**. – С. 84-97.

[23] *Джураев Т.* О краевых задачах для линейных параболических уравнений, вырождающихся на границе области Мат. заметки. 1972; 12(5): 643-652.

[24] *Елдесбаев Т.* О некоторых обратных задачах для вырождающихся гиперболических уравнений. Дифференц. уравнения. 1976; 12 (3): 502–510.

[25] *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. - 1987. - №3. - С. 27-29

[26] *Иванчов Н.И., Пабыривска Н.В.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении. Сиб. мат. журн. 2000; 43(2): 406-413.

[27] *Іванчов М.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням / Іванчов М., Салдіна Н. // Укр. мат. журнал. – 2005. – **57**, №11. – С. 1563–1570. doi: 10.1007/s11253-006-0032-6

[28] *Іванчов М.І.* Про одну обернену задачу визначення коефіцієнта температуропровідності Вісн. Льв. ун-ту. 1988; 30: 13-16.

[29] *Іванчов М.І.* Про одну обернену задачу для параболічного рівняння Вісн. Льв. ун-ту. 1997; 47: 63-71.

[30] *Іванчов М.І.* Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами Доповіді НАН України. 1997; 5: 63-71.

[31] *Іванчов М.І.* Обернена задача одночасного визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні. Укр. мат. журн. 2000; 52(3): 319-325.

[32] *Іванчов М. І., Пабирівська Н. В.* Обернена задача для двовимірного рівняння дифузії в області з вільною межею. Укр. Мат. журн. 2013; 65(7): 917-927.

[33] *Іванчов М.І., Сагайдак Р.В.* Обернена задача визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004; 47 (1): 7-16.

[34] *Іванчов М.І., Сагайдак Р.В.* Про існування та єдиність розв'язку оберненої задачі визначення старших коефіцієнтів у двовимірному параболічному рівнянні. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2005; 64: 236-244.

[35] *Калашников А.С.* О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Математические заметки. 1968; 3(2): 171-178.

[36] *Кінаш Н.* Нелокальна обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2016; 59 (2): 67-76.

[37] *Конаровська М.І., Матійчук М.І.* Задачі для параболічних систем з подвійним степеневим виродженням. Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Математика. 2012; 2(2-3): 96-101.

[38] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Наука, Москва, 1967.

[39] *Малицька Г. П.* Системи рівнянь типу Колмогорова. Укр. мат. журнал. 2008; 60(12): 1650-1663.

[40] *Матийчук М.И.* Задача Коши для одного класса вырождающихся параболических систем. Укр. мат. журн. 1984; 36(3): 321-327.

[41] *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. "Прут Чернівці. 2003: 248.

[42] *Пабирівська Н. В., Власов В. А.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні. Мат . методи і фіз.-мех. поля. 2006; 49(3): 18-25.

[43] *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. Рута, Чернівці; 2008: 253.

[44] *Ратыни А.* О восстановлении коэффициентов температуропроводности анизотропного тела. Краевые задачи. 1982: 146-147.

[45] *Ратыни А.* Задача определения матрицы коэффициентов при старших производных параболических уравнений. І. Краевые задачи. 1985: 82-86.

[46] *Ратыни А.* Условия корректности задачи определения матрицы коэффициентов при старших производных параболического уравнения. Дифф. уравн. 1992; 28 (8): 1419-1426.

[47] *Сагайдак Р.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу в прямокутнику Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 2003. - Вип. 62. - С. 117-128.

[48] *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 2005. - Вип. 64. - С. 245-257.

[49] *Салдіна Н.* Сильно вироджена обернена параболічна задача з загальною поведінкою коефіцієнтів Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 2006. - Вип. 66. - С. 186-202.

[50] *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 7–17.

[51] *Салдіна Н.В.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням, Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика. (2006), no. 288, 99–106.

[52] *Салдіна Н.В.* Сильно вироджена обернена параболічна задача із загальною поведінкою молодших членів рівняння, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. **12-13**, (2007), 109–122.

[53] *Снітко Г.* Визначення молодшого коефіцієнта двовимірного параболічного рівняння в області з вільною межею. Буковинський математичний журнал. 2015; 3 (2): 90-101.

[54] *Снітко Г.* Коефіцієнтна обернена задача для двовимірного параболічного рівняння в області з вільною межею. Укр. мат. журн. 2016; 68 (7): 972-982.

[55] *Соловьев В.В.* О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения. Дифференциальные уравнения. 1989; 25(9): 1577-1583.

[56] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / Фридман А. – М.: Мир, 1968.

[57] *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов – М.: Мир, 1983.

[58] *Agranovich Z., Marchenko V.* The inverse problem of scattering theory. Gordon and Breach; 1963.

[59] *Ambarzumian V.* Uber eine Frage der Eigenwerttheorie. Zeitschrift fur Physik. 1929; 53 (9-10): 690-695.

[60] *Berestycki H.* An inverse parabolic problem arising in finance / Berestycki H., Busca J., Florent I. // C. R. Acad. Sci. Paris. – 2000. – **331**. – P. 965—969.

[61] *Bernis F., Friedman A.* Higher order nonlinear degenerate parabolic equations. Journal of differential equations. 1990; 83: 179-206.

[62] *Bokalo M., Lorenzi A.* Linear evolution first-order problems without initial conditions. Milan J. Math. 2009; 77: 437-494.

[63] *Bouchouev I., Isakov V.* The inverse problem of option pricing // Inverse Problems. – 1997. – **13**. – P. 7–11.

[64] *Caffarelli L., Friedman A.* Continuity of the density of a gas flow in a porous medium, Trans. Amer. Math. Soc., 1979, 252, 99-113.

[65] *Cannarsa P., Tort J., Yamamoto M.* Determination of source terms in a degenerate parabolic equation. Inverse Problems. 2010; 26 (10): 105003.

[66] *Cannon J.* Determination of an unknown coeffient in a parabolic differential equation. Duke Math. J. 1963; 30 (2): 313-323.

[67] *Cannon J.R., DuChateau P.* An inverse problem for an unknown source in a heat equation. J. Math. Anal. Appl. 1980; 75(2): 465-485.

[68] *Cannon J.R., DuChateau P.* Structural identification of an unknown source term in a heat equation. Inverse Problems. 1998; 14(3): 535-551.

[69] *Cannon J.R., Rundell W.* Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation. J. Math. Anal. Appl. 1991; 160: 572-582.

[70] *Cannon J.R., Yin H.-M.* A uniqueness theorem for a class of nonlinear parabolic inverse problems. Inverse Problems. 1988; 4(3): 411-416.

[71] *Cannon J.R., Yin H.-M.* On a class of nonlinear parabolic equation with nonlinear trace type functionals. Inverse Problems. 1991; 7(1): 149-161.

[72] *Cassani D., Kaltenbacher B., Lorenzi A.* Direct and inverse problems related to MEMS. Inverse Problems. 2009; 25(10) doi:10.1088/0266-5611/25/10/105002

[73] *Choulli M.* An inverse problem for a semilinear parabolic equation. Inverse Problems. 1994; 10(5): 1123–1132. doi:10.1088/0266-5611/10/5/009

[74] *Choulli M., Kian Y.* Logarithmic stability in determining the time-dependent zero order coefficient in a parabolic equation from a partial dirichlet-to-neumann map. Application to the determination of a nonlinear term. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 2018; 114: 235-261.

[75] *Dehghan M.* Numerical methods for two-dimensional parabolic inverse problem with energy overspecification. International Journal of Computer Mathematics. 2001; 77(3): 441–455. doi:10.1080/00207160108805077

[76] *Dehghan M.* Implicit solution of a two-dimensional parabolic inverse problem with temperature overspecification. Journal of Computational Analysis and Applications. 2001; 3(4): 383–398. doi:10.1023/a:1017593708321

[77] *Deng Z., Yang L.* An inverse problem of identifying the coefficient of first-order in a degenerate parabolic equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2011. – **235**. – P. 4404-4417.

[78] *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations. New York: Springer; 1993.

[79] *Di Blasio G., Lorenzi A.* An Identification Problem in Age-Dependent Population Diffusion // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2013. – **34**, №1. – P. 36-73.

[80] *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic Methods In The Theory Of Differential And Pseudo-Differential Equations Of Parabolic Type. Birdhouser; 2004.

[81] *Eldesbayev T.* On an inverse problem for a degenerate hyperbolic equation of the second order. Proceedings of Academy of Sciences of KazSSR. Series of physics and mathematics. 1987, **3**, 27–29.

[82] *Evans D. S.* An Analysis of Solar Atmospheric structure. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1947; 107: 433-451.

[83] *Friedman A.* Fundamental solutions for degenerate parabolic equations. Acta mathematica. 1974; 133: 171-217.

[84] *Gottlieb J., DuChateau P.* Parameter Identification and Inverse Problems in Hydrology, Geology and Ecology. Springer; 1996.

[85] *Grebenev V.* On a system of degenerate parabolic equations that arises in fluid dynamics, Sib. Mat. J., 1994, 35, 753-767.

[86] *Hadamard J.* Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, New Haven; 1923.

[87] *Hasanoglu A. H., Romanov V. G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Springer; 2017.

[88] *Hasanov A., Duchateau P., Pektas B.* An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2006; 14(5): 435–463. doi:10.1515/156939406778247615

[89] *Hazanee A., Lesnic D.* Determination of a time-dependent coefficient in the bioheat equation // International Journal of Mechanical Sciences. – 2014. – **88**. – P. 259-266.

[90] *Huntul M. J., Hussein M. S., Lesnic D., Ivanchov, M. I., Kinash N.* Reconstruction of an orthotropic thermal conductivity from non-local heat flux measurement. Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation. 2020; 10(1): 102-122.

[91] *Hussein M. S., Lesnic D., Ivanchov, M. I.* Identification of a heterogeneous orthotropic conductivity in a rectangular domain. International Journal of Novel Ideas:Mathematics. 2017. ISSN 2331-5210

[92] *Isakov V.* Inverse Source Problems. AMS; 1990.

[93] *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. 3rd ed. Springer; 2017.

[94] *Isaryuk I. M., Pukal'skii I. D.* The boundary-value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations. Journal of Mathematical Sciences. 2015; 207: 26–38.

[95] *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. VNTL Publishers. - 2003.

[96] *Ivanchov M., Lorenzi A., Saldina N.* Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in Banach space. J. Inv. Ill-Posed Problems. 2008; 16 (4): 397-415.

[97] *Ivanchov M., Saldina N.* Inverse problem for a parabolic equation with strong power degeneration. Ukrainian Math. Journal. 2006;58:1487–1500. Ukranian. doi: 10.1007/s11253-006-0162-x

[98] *Ivanchov M., Saldina N.* Inverse problem for strongly degenerate heat equation. J. Inv. Ill-Posed Problems. 2006;14(5):465–480. doi: 10.1515/1569394 06778247598

[99] *Jones B.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness. J. Math. Mech. 1962; 11 (5): 907-918.

[100] *Kabanikhin S.I.* Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2008. – **16**. – P. 317–357.

[101] *Kabanikhin S.* Inverse and ill-posed problems: theory and applications. De Gruyter; 2012.

[102] *Kaltenbacher B., Klibanov M.* An Inverse Problem for a Nonlinear Parabolic Equation with Applications in Population Dynamics and Magnetics // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – **39**, №6. – P. 1863–1889.

[103] *Kirsch A.* An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. 2nd ed. Springer; 2011.

[104] *Lakestani M., Dehghan M.* A new technique for solution of a parabolic inverse problem. Kybernetes. 2008; 37(2): 352 - 364 http://dx.doi.org/10.1108/03684920810851230

[105] *Ladyzhenskaya O. A.* New equations for the description of the motions of viscous incompressible fluids, and global solvability for their boundary value problems. Trudy Mat. Inst. Steklov. 1967; 102: 85–104.

[106] *Lesnic D., Yousefi S. A., Ivanchov, M.* Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions. Journal of Applied Mathematics and Computing. 2012; 41(1-2): 301–320. doi:10.1007/s12190-012-0606-4

[107] *Li Fu-le, Wu Zi-ku, Ye Chao-rong* A finite difference solution to a two-dimensional parabolic inverse problem. Applied Mathematical Modelling. 2012; 36: 2303-2313.

[108] *Лопушанський А., Лопушанська Г., Рапіта В.* Обернена задача у просторі узагальнених функцій. Укр. мат. журн. 2016; 68(2): 241-253.

[109] *Lorenzi A.* An inverse problem for a semilinear parabolic equation. Annali Di Matematica Pura Ed Applicata. 1982; 131(1): 145–166. doi:10.1007/bf01765150

[110] *Lorenzi A.* An introduction to identification problems via functional analysis. Inverse and Ill-Posed Problems Series. VSP, Utrecht.— 2001.—256 p.

[111] *Lorenzi A., Mola G.* Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equation Inverse Problems. 2012; 28(7).

[112] *Lorenzi A., Paparoni E.* Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // Rend. Sem. Univ. Padova. – 1992. – **87**. – P. 105-138.

[113] *Malyshev I.* On the inverse problem for a heat-like equation. Journal of Applied Mathematics and Simulation. 1987; 1(2): 81-97.

[114] *Malyshev I.* On the parabolic potentials in degenerate-type heat equation. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1991; 4(2): 147-160.

[115] *Novikov P.S.* On unicity of the inverse problem of the potential theory. Dokl. Akad. Nauk USSR 18. 1938; 3: 165-168.

[116] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics, Marcel Dekker, New York, 1999.

[117] *Richter M.* Inverse problems. Basics, theory and applications in geophysics. Birkhauser; 2016.

[118] *Saldina N. V.* Inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation, Math. Methods and Phys.-Mech. Fields, 2006, 49, 7-7.

[119] *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funftionalraumen. Studia Mathematica (Lwow). – 1930. – Vol. 2. – P. 171-180.

[120] *Tort J.* Determination of source terms in a degenerate parabolic equation from a locally distributed observation // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. – 2010. – **348**. – P. 1287-1291.

[121] *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. Математический сборник. 1935; 42(2): 199-216.

[122] *Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. I.* Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations. Inverse Probl. Sci. Engin. 2016; 24(1): 42–59.

[123] *Vabishchevich P. N.* Iterative computational identification of a spacewise dependent the source in a parabolic equations. Inverse Probl. Sci. Engin. 2017; 25(8): 1168–1190.

[124] *Yin H.-M.* Solvability of a class of parabolic inverse problems. Advances in Differential Equations. 1996; 1.