

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію

Бака Сергія Миколайовича

*«Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи
на двовимірній ґратці».*

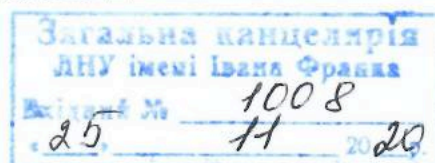
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертаційну роботу присвячено вивченню систем дискретних диференціальних рівнянь спеціального вигляду. Неперервним аналогом цих дискретних систем є, зокрема, гіперболічні рівняння з частинними похідними – рівняння нелінійних осциляторів, рівняння синус-Гордона, рівняння Фермі-Пасті-Улама, нелінійні рівняння Шредінгера, тощо. Для отримання розглядуваних в дисертації дискретних систем згадані неперервні рівняння слід дискретизувати за просторовими змінними, зокрема, замінивши оператор Лапласа одним з його дискретних аналогів. Таким чином, розв'язок дискретних систем можна шукати, наприклад, в просторі $C^2(\mathbb{R}; \ell^2)$ двічі неперервно диференційованих функцій, які визначено на дійсній прямій \mathbb{R} і значення яких лежить в банаховому просторі ℓ^2 дійсних двосторонніх послідовностей.

Розглядувані в дисертаційній роботі нескінченні дискретні системи та їхні скінченні аналоги широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. Важливою сучасною галуззю їхнього застосування є побудова нейронних мереж, розробка штучного інтелекту і квантовий комп'ютинг.

З фізичної точки зору такі системи досліджувало багато вчених, зокрема, О. Браун, Ю. Ківшар, Т. Конторова, Й. Курамото, Р. Маккей, С. Обрі, Я. Френкель та ін. З математичної точки зору досліджень проведено значно менше. Важливі результати в цій галузі отримали Г. Аріолі, Дж. Ваттіс, М. Віллем, Й. Зіммер, О. Панков, В. Ротос, П. Срікант та ін.

Є два математичних аспекти, які часто вишикають при дослідженні систем



нелінійних осциляторів. З одного боку це безумовно встановлення розв'язності задач для таких систем. Мається на увазі доведення теорем про існування і(або) єдиність класичного(узагальненого) розв'язку, наприклад, задачі Коші для таких систем. З іншого боку важливим є побудова чи доведення існування автомодельних розв'язків систем, тобто розв'язків, які мають наперед заданий вигляд чи задані властивості. До таких розв'язків належать періодичні розв'язки (бризери), біжучі і стоячі хвилі, тощо. Строге математичне обґрунтування цих та інших фізичних процесів зроблено недостатньо, тому тематика дисертаційної роботи є актуальною.

Робота складається з переліку умовних позначень, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи – 336 сторінок, з яких список використаних джерел займає 25 сторінок і налічує 220 посилань. Додатки займають 11 сторінок.

Перший розділ містить чудово і цікаво написаний огляд літератури та короткий огляд результатів дисертації.

У другому розділі розглянуто задачу Коші для систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. В ньому знайдено різноманітні умови на вхідні дані задачі, які гарантують існування та єдиність локального та глобального розв'язків задачі у випадку степеневого потенціалу і потенціалу загального вигляду.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено задачі з умовами періодичності за часовою змінною для систем нелінійних осциляторів. За допомогою варіаційного підходу доведено існування нетривіальних розв'язків задачі за умов додаткової просторової періодичності системи осциляторів, додатності оператора лінійної взаємодії осциляторів та умови типу Амброзетті-Рабіновича, яка накладається на нелінійний член системи.

У четвертому розділі показано існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль в системах осциляторів, кожен з яких лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Встановлено, зокрема, експоненціаль-

ну оцінку профілю відокремленої хвилі, показано, що профіль періодичної біжучої хвилі є періодичною функцією, а профіль відокремленої хвилі перетворюється в нуль на нескінченності.

П'ятий розділ роботи містить результати, що описують певні якісні властивості розв'язків дискретних рівнянь типу синус-Гордона на двовимірній ґратці. Доведено існування відмінних від констант профілів $u = u(s)$ періодичних біжучих хвиль, які, зокрема, задовольняють умови

$$u(s + 2k) = u(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

де $k > 0$, профілів гомоклінічних біжучих хвиль, для яких

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = \pi,$$

та профілів гетероклінічних хвиль, для яких

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = -\pi, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = \pi.$$

У шостому розділі вивчено системи типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Показано існування біжучих хвиль з профілем, який має періодичну похідну, з профілем, похідна якого збігається до нуля на нескінченності, доведено існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

Сьомий розділ дисертаційної роботи присвячено дискретним нелінійним рівнянням Шредінґера з кубічною та насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. Доведено існування стоячих хвиль, періодичних розв'язків (розв'язків з періодичною амплітудою) та локалізованих розв'язків (з амплітудою, яка збігається до нуля).

Результати роботи наведено у вигляді лем і теорем, які строго математично доведено. Доведення опираються на потужний апарат функціонального аналізу, зокрема, на теорему про гірський перевал, теорему про зачеплення, використано метод періодичних апроксимацій, многовиди Нехарі, тощо. Отримані результати проілюстровано багатьма прикладами.

Дисертація є завершеною науковою працею в якій, зокрема, розв'язано проблему існування автотельних розв'язків деяких дискретних систем диференціальних рівнянь математичної фізики. Отримані результати є новим і вагомим внеском у розвиток теорії нескінченних систем диференціальних рівнянь. Робота носить теоретичний характер, її результати можуть бути використаними при розв'язуванні прикладних задач, моделями яких є розглянуті в дисертації задачі.

Автореферат цілком і правильно відображає зміст дисертації. Основні результати дисертації в достатній мірі опубліковано в 20 наукових статтях в належних фахових наукових виданнях. Вони пройшли добру апробацію на наукових конференціях і семінарах. Окремо хочу зазначити, що автор дисертації є відомим вченим, який має багато публікацій в провідних українській та зарубіжних фахових наукових журналах.

Робота написана математично грамотно. Маю до неї лише кілька побажань і зауважень.

1) Перш за все хочу попросити автора в подальшому оформити результати дисертаційної роботи у вигляді україномовної монографії, бо вважаю, що результати є надзвичайно цікавими; це сприятиме популяризації наукових досліджень, зокрема, в цьому напрямку.

2) Дисертація містить низку опісок. Деякі з них такі: пропущено вертикальну риску майже у всіх інтегралах на стор. 140-141 та двічі на стор. 188; пропущено фігурну дужку майже у всіх інтегралах на стор. 224-225; написано " $u_n \rightarrow n$ " (стор. 185); пропущено знак похідної в означенні норми (стор. 196).

3) Використано кілька невдалих висловів: "представляє собою" (стор. 53, 60, 137); "в смислі узагальнених функцій" (стор. 176, 209).

4) Перелік умовних позначень займає лише одну сторінку. Його слід було або зовсім не включати в роботу, або доповнити специфічними позначеннями, які часто використано в дисертації.

Безумовно, що ці недоліки не зменшують наукової цінності дисертаційної

роботи і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації.

У підсумку вважаю, що дисертація Бака Сергія Миколайовича «Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці» повною мірою задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів № 567 від 24.07.2013 р. зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМ України № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р., № 943 від 20.11.2019 р. і Наказом МОН України № 40 від 12.01.2017 р., щодо докторських дисертацій, а її автор – Бак Сергій Миколайович – заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, доцент,

в.о. завідувача кафедри

математичної статистики і диференціальних рівнянь

Львівського національного університету

імені Івана Франка

О.М. Бугрій

Підпис О.М. Бугрія підтверджую.

Вчений секретар

Львівського національного університету

імені Івана Франка

О.С. Грабовецька

