ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Бака Сергія Миколайовича "Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці", поданої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальності 01.01.02 – диференціальні рівняння, 111 – математика

Різноманітні реальні динамічні процеси в переважній більшості мають нелінійний характер і описуються складними нелінійними еволюційними рівняннями. Нелінійність рівнянь суттєво ускладнює дослідження таких процесів. Тому вони вивчені недостатньо. Прикладами таких еволюційних рівнянь є системи диференціальних рівнянь, що описують динаміку нескінченних систем нелінійних осциляторів, системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера. Такі моделі використовуються в сучасній нелінійній фізиці. Є багато робіт, присвячених даній тематиці, однак математична сторона питань для таких систем на двовимірній ґратці досліджена досить слабко. Тому **актуальною** є розробка методів дослідження таких математичних моделей і **практична значимість** досліджень у цьому напрямку не викликає сумнівів.

Дисертаційна робота С. М. Бака присвячена дослідженню дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем, зокрема, дослідженню коректності задачі Коші, існування періодичних за часом розв'язків та існування розв'язків у вигляді біжучих і стоячих хвиль.

Дисертація складається з анотацій, переліку умовних позначень, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, висвітлено зв'язок роботи з науковими програмами, вказано мету, завдання й методи дослідження, наукову новизну результатів дисертації, теоретичне та практичне значення одержаних результатів.

У **першому розділі** наведено огляд праць за темою дисертації та основні результати дисертації.

Другий розділ присвячено питанню коректності задачі Коші для системи, що описує нескінченну систему лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Дану систему природно розглядати, як диференціально-операторне рівняння другого порядку з обмеженим оператором у просторі l^2. Із відомих результатів для нелінійних диференціальних рівнянь у банахових просторах випливає існування та єдиність локального розв'язку. Існування ж глобальних розв'язків представляє собою складну задачу. У дисертації отримано достатні умови існування глобальних розв'язків для будь-яких початкових даних (теорема 2.5). Також тут встановлено умови обмеженості глобального розв'язку (Теорема 2.6). Окремо розглянуто випадок степеневих потенціалів, що не задовольняють отриманим достатнім умовам. Показано, що якщо початкові дані достатньо малі в l^2-нормі, то глобальний розв'язок існує

(Теорема 2.7, Наслідок 2.3). Однак, для достатньо великої множини початкових даних глобальний розв'язок не існує (Теорема 2.9).

Третій розділ присвячено питанню існування періодичних за часом розв'язків в системах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Одержано результати про існування T-періодичних за часом розв'язків, які не є сталими для всіх достатньо великих значень періоду T. Основними умовами в даному розділі є просторова періодичність розглядуваного ланцюга з періодом N та додатність оператора лінійної взаємодії осциляторів. Такі системи часто виникають в застосуванні, зокрема, в нелінійній оптиці. Показано, що до дослідження таких задач можуть бути реалізовані два підходи. Перший підхід передбачає використання теореми про гірський перевал. Тут розв'язки знаходяться як критичні точки деякого функціоналу. Цей функціонал задовольняє всі умови теореми про гірський перевал, однак не задовольняє так звану умову Пале-Смейла. Тому тут використовується метод періодичних апроксимацій із періодом kN. Відповідний апроксимуючий функціонал задовольняє умову Пале-Смейла, що дозволяє побудувати розв'язки допоміжної задачі, періодичні за просторовою змінною з періодом kN і за часом з періодом T (Теорема 3.1). Далі необхідні розв'язки будуються за допомогою граничного переходу при $k \to \infty$ у критичних точках апроксимуючого функціоналу (Теорема 3.2). Другий підхід діє у випадку осциляторів зі степеневою потенціальною функцією. Тут використовується метод умовної мінімізації (підрозділ 3.5).

Четвертий розділ присвячений питанню існування розв'язків в системах осциляторів на двовимірній ґратці з лінійним та нелінійним зв'язком, що мають вигляд біжучих хвиль. Розглядаються біжучі хвилі двох видів: періодичні та відокремлені. Відповідно до цього розв'язки знаходяться як критичні точки деяких функціоналів. Встановлено умови існування надзвукових періодичних і відокремлених біжучих хвиль (Теореми 4.1, 4.2, 4.6, 4.7). Тут також застосовується теорема про гірський перевал у випадку періодичного профілю, а у випадку відокремлених хвиль відбувається перехід до границі в критичних точках функціоналу, що відповідає задачі про знаходження періодичних хвиль. Отримано також експоненціальну оцінку для профілю відокремленої біжучої хвилі. Крім того, за допомогою теореми про зачеплення встановлено існування дозвукових періодичних біжучих хвиль (Теореми 4.4, 4.5, 4.8).

У **п'ятому розділі** досліджено питання існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці. Зокрема, встановлено існування періодичних (Теорема 5.1), гомоклінічних (Теорема 5.2) і гетероклінічних (Теореми 5.3 і 5.4) біжучих хвиль. Тут також застосовується теорема про гірський перевал в комбінації з періодичними апроксимаціями для встановлення існування відповідно періодичних і відокремлених біжучих хвиль. А у випадку гетероклінічних хвиль використано принцип концентрованої компактності.

У **шостому розділі** за допомогою варіаційної техніки встановлено існування біжучих хвиль в дискретних системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Зокрема, встановлено існування монотонних і не обов'язково монотонних біжучих хвиль. Спочатку встановлено існування біжучих хвиль з періодичною похідною профілю (Теореми 6.1, 6.2, 6.3) за допомогою теореми про гірський перевал і теореми про зачеплення. Далі за допомогою методу періодичних апроксимацій встановлено існування біжучих хвиль, похідна профілю яких збігається до нуля на нескінченності (Теореми 6.4 і 6.5). У підрозділі 6.4 встановлено існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль (Теореми 6.6, 6.7, 6.8).

У **сьомому розділі** вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці та відшуковуються розв'язки у вигляді стоячих хвиль. Розглядаються такі рівняння з кубічною (підрозділ 7.1) та насичуванню (підрозділ 7.2) нелінійностями. У першому випадку для встановлення існування стоячих хвиль використано теорему про зачеплення і метод періодичних апроксимацій, а в другому - многовиди Нехарі, теорему про гірський перевал і періодичні апроксимації.

Основними результатами дисертації є:

• Умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку нескінченних систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці;

• Умови існування періодичних за часовою змінною розв'язків нескінченних систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці;

• Умови існування нетривальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль у нескінченних системах лінійно та нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці;

• Умови існування несталих періодичних, гомоклінічних і гетероклінічних біжучих хвиль для рівнянь типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці з нелінійним зв'язком;

• Умови існування несталих періодичних і відокремлених біжучих хвиль у системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці;

• Умови існування стоячих хвиль для нелінійних рівнянь типу Шредінгера з кубічною та насичуваною нелінійностями на двовимірній ґратці.

Зауваження та побажання:

• У дисертації немає посилань на публікації опонентів. Зазначу, що список публікацій опонента містить багато робіт, присвячених дослідженню дискретних систем;

• Вважаю, що для дисертації краще підійшла інша назва – "Дослідження деяких класів нелінійних диференціальних рівнянь у просторі сумовних з квадратом на $\mathbb{Z}^2$ функцій". Зазначу, що в назвах своїх публікацій дисертант уникає конструкції "дискретні ... на двовимірній ґратці".

• Обґрунтування теореми 2.1 про існування локального розв'язку задачі Коші є зайвим, оскільки це твердження є окремим випадком загальної теореми [185];

• Є огріхи редакційного характеру.

Однак наведені недоліки та побажання не знижують цінності дисертаційної роботи і не впливають на її позитивну оцінку.

Одержані в дисертації результати є новими, наведені в ній ідеї і твердження сформульовано чітко, теореми супроводжуються детальними доведеннями, що засвідчує їх достовірність.

Основні результати дисертації опубліковано в 20 роботах у накових фахових виданнях України та у періодичних іноземних виданнях, що відповідають вимогам МОН України щодо публікації результатів дисертаційних робіт у фахових наукових виданнях із фізико-математичних наук. 8 статей увійшло до міжнародної наукометричної бази Scopus, 22 роботи – матеріали та тези доповідей на наукових конференціях.

Автореферат повно і правильно відображає зміст дисертації.

Враховуючи актуальність обраної теми дослідження, наукову новизну результатів, теоретичну цінність, обґрунтованість одержаних наукових результатів та кількість і якість публікацій, вважаю, що дисертаційна робота "Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці" є завершеним науковим дослідженням і відповідає вимогам пп. 9, 10, 12-14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів № 567 від 24.07.2013 р. зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМ України № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р., № 943 від 20.11.2019 р. і Наказом МОН України № 40 від 12.01.2017 р., щодо докторських дисертацій, а її автор – Бак Сергій Миколайович – заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння (111 – математика).

Офіційний опонент –
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри вищої математики
Національного університету водного
господарства та природокористування Слюсарчук В. Ю.

Підпис Слюсарчука В. Ю. засвідчую

Учений секретар Подлевський А. А.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ
02071116