Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Бешлей Андрій Володимирович

УДК 519.63

Чисельне розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь

01.01.07 — обчислювальна математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів — 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Хапко Роман Степанович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
завідувач кафедри обчислювальної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Солодкий Сергій Григорович,
Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторією оптимальних методів
для обернених задач;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Кутнів Мирослав Володимирович,
Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
числових методів математичної фізики.

Захист відбудеться «19» березня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 35.051.07 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79000 м. Львів, вул. Університетська 1, ауд 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка.

Автореферат розісланий «10» лютого 2021 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради доц. Головатий Ю. Д.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Крайові задачі для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (ЕРЗК) виникають при математичному моделюванні різних фізичних процесів. Зокрема, особливий інтерес вони складають у таких прикладних застосуваннях як електрична імпедансна томографія (EIT), контроль руйнування, геофізика тощо. Наявність у диференціальному рівнянні змінних коефіцієнтів приводить до труднощів при застосуванні ряду чисельних методів. У загальному випадку для таких крайових задач не вдається використати метод граничних інтегральних рівнянь, який має цілу низку безсумнівних переваг. Однак для певного класу еліптичних рівнянь, наприклад, тих, що виникають в EIT, завдяки параметрикс функції (функції Леві) можна отримати гранично-просторові інтегральні рівняння (ГПІР). В результаті диференціальна задача редукується до системи інтегральних рівнянь, що дає можливість застосувати наявний досвід чисельного розв'язування інтегральних рівнянь з різними типами особливостей. Таким чином актуальність обраної теми дослідження не викликає сумнівів.

Загалом, підхід для наближеного розв'язування крайових задач для ЕРЗК за допомогою інтегральних рівнянь є менш дослідженим та розкритим у порівнянні з випадком сталих коефіцієнтів. Деякі результати в цьому напрямку отримали AL-Jawary M.A., Ang W.T., Chkadua O., Clements D.L., Dufera T.T., Mikhailov S., Natroshvili D.,Wrobel L.C. та інші.

Для наближеного розв'язування граничних інтегральних рівнянь з параметрично заданою межею ефективним чисельним методом виявився метод Нистрьома з використанням квадратурних формул, що будуються на основі тригонометричної інтерполяції. Цей підхід до інтегральних рівнянь з різними типами особливостей використовували Atkinson K.E., Johansson B.T., Kress R., Sloan I.H., Хапко Р. та інші. Складає інтерес поширення цієї методики на випадок гранично-просторових інтегральних рівнянь, які виникають при розгляді крайових задач для ЕРЗК.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота була виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка на кафедрі обчислювальної математики у рамках науково-дослідницької теми "Методи обчислювальної математики для прямих та обернених задач" (державний реєстраційний номер 0113U001901).

Мета та задачі дослідження. Метою даної роботи є розробка і дослідження чисельних методів розв'язування гранично-просторових інтегральних рівнянь, що отримуються для коректних і некоректних крайових задач для рівняння еліптичного типу зі змінними коефіцієнтами в обмежених одно- та двозв'язних плоских областях.

Об'єктом дослідження є плоскі задачі для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Предметом дослідження є чисельні методи для наближеного розв'язування плоских задач.

Методами досліджень є непрямий метод гранично-просторових інтегральних рівнянь, метод Нистрьома, метод регуляризації Тіхонова, метод L-кривої, альтернуючий метод, метод Ландвебера.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Крайові задачі Діріхле та Неймана в однозв'язних плоских областях, мішані крайові задачі та задачу Коші у двозв'язних плоских областях для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами редуковано до систем гранично-просторових інтегральних рівнянь з різними типами особливостей за допомогою відповідних параметрикс-потенціалів. Досліджено коректність отриманих систем інтегральних рівнянь у відповідних просторах.
2. Здійснено параметризацію отриманих інтегральних рівнянь та проаналізовано наявні особливості в ядрах. Розроблено чисельний метод квадратур для наближеного розв'язування систем інтегральних рівнянь шляхом зведення їх до систем лінійних алгебричних рівнянь. Здійснено чисельні експерименти, що підтверджують збіжність запропонованого методу.
3. Мішані крайові задачі у двозв'язних областях, що обмежені гомотетичними та негомотетичними кривими, з використанням параметрикс-потенціалів зведено до систем інтегральних рівнянь, отримано формули для знаходження даних Коші на граничних кривих. Побудовано апроксимаційні формули для обчислення наближеного розв'язку в області та проведено відповідні чисельні експерименти.
4. Застосовано регуляризуючий метод Тіхонова з вибором параметра регуляризації методом L-кривої до системи лінійних рівнянь, отриманих при розв'язуванні задачі Коші. Використано альтернуючий метод та метод Ландвебера у поєднанні з гранично-просторовими інтегральними рівняннями для наближеного розв'язування задачі Коші. Досліджено збіжність альтернуючого методу. Здійснено програмну реалізацію всіх запропонованих методів і перевірено їх ефективність на модельних прикладах.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані результати можуть бути використані у прикладних застосуваннях при наближеному розв'язуванні прямих і обернених задач EIT. Також запропонований підхід зведення крайових задач для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами складає й теоретичний інтерес, а розроблені алгоритми чисельного розв'язування гранично-просторових інтегральних рівнянь є розвитком методів обчислювальної математики.

Дані результати мають широке прикладне застосування в електростатиці, геофізиці, неруйнівному тестуванні і т. д.

Отримані результати увійшли в звіти НДЧ Львівського національного університету імені Івана Франка (2018-2020 рр.).

Особистий внесок здобувача. Результати, які виносяться на захист, отримані автором дисертації самостійно. У публікаціях [3-5] Р. Хапко брав участь у постановці задач, обговоренні застосування функції Леві для їх зведення до систем інтегральних рівнянь та займався аналізом отриманих результатів. У працях [3-5] B. T. Johansson займався оглядом існуючих методів розв'язування диференціальних задач, відповідав за структуру, зміст робіт та оформлення чисельних результатів, а також брав участь в обговоренні алгоритмів розв'язування гранично-просторових інтегральних рівнянь. У працях [3-5] здобувачеві належить застосування непрямого підходу інтегральних рівнянь з використанням параметрикса для зведення диференціальних задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь, параметризація системи, виділення особливостей в ядрах, застосування дискретизації на основі методу Нистрьома та знаходження наближеного розв'язку, використання регуляризації Тіхонова і методу L-кривої, імплементація як прямих, так й ітераційних алгоритмів для апроксимації розв'язку, а також проведення всіх чисельних експериментів. Роботи [1-2] написані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на наукових семінарах кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка протягом 2015-2019 рр., на IV конференції "Обчислювальні методи і системи перетворення інформації" у Фізико-механічному інституті імені Г. В. Карпенка (м. Львів) у 2016 р., на XXII Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" у Львівському національному університеті імені Івана Франка у 2016 р., на міжнародній науковій конференції UCAM в Львівському національному університеті імені Івана Франка у 2017 р., на міжнародній конференції 11th ISAAC congress у Linnaeus University, Sweden у 2017 р., на Міжнародній конференції молодих математиків в Інституті математики НАН

України (м. Київ) у 2017 р., на Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій" в НУВГП, РДГУ (м. Рівне) у 2018 р.

Публікації. Результати дисертації опубліковано в двох статтях [1,2] у фахових виданнях із переліку, затвердженого ВАК України, у трьох статтях [3-5] у закордонних фахових журналах. Статті [3-5] входять до наукометричної бази даних Scopus, а [2] – до Web of Science. У матеріалах наукових конференцій опубліковано шість тез.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з таких структурних елементів: вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку зі списком публікацій здобувача. Загальний обсяг роботи становить 135 сторінок, містить 14 таблиць, 29 рисунків, 108 найменувань у списку використаних джерел.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено актуальність теми дисертації, наукову новизну одержаних результатів, зв'язок теми з науковими програмами, сформульовано мету та задачі дослідження, наведено апробацію результатів роботи та список публікацій.

У **першому розділі** наведено короткий огляд крайових задач для ЕРЗК та розглянуто наближені методи їх розв'язування. Зокрема, у ***підрозділі 1.1*** розглянуто огляд фізичних явищ, що описуються ЕРЗК та їх використання. У ***підрозділі 1.2*** описано основні математичні моделі та наведено загальний вигляд рівняння, яке є об'єктом досліджень:

$$Lu := \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0. \tag{1.1}$$

Методи розв'язування однорідного та неоднорідного рівняння (1.1), а також їх аналіз подано у ***підрозділі 1.3***.

У **другому розділі** запропоновано чисельний метод розв'язування внутрішніх крайових задач Діріхле та Неймана для рівняння (1.1) в однозв'язній області.

У ***підрозділі 2.1*** розглянуто задачу Діріхле. Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена однозв'язна область з межею $\Gamma \in C^2$. Потрібно знайти функцію $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, що задовольняє рівняння

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \ \text{ в } D \tag{2.1}$$

та крайову умову

$$u = f \ \text{ на } \Gamma, \tag{2.2}$$

де $\sigma \in C^\infty(\overline{D})$, $\sigma > 0$ і $f \in C(\Gamma)$ – задані функції. Відомо, що задача (2.1)-(2.2) має єдиний розв'язок. Зведення до системи інтегральних рівнянь здійснено за допомогою параметрикса. Для визначення параметрикса будемо вважати, що $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ та $\sigma > 0$.

Означення 2.1. *Функція $P(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, називається параметриксом (або функцією Леві) диференціального оператора L, якщо*

$$L_x P(x, y) = \delta(x - y) + R(x, y),$$

де δ – дельта-функція Дірака і функція залишку R має слабку особливість при $x = y$.

Для оператора в (2.1) функцію Леві взято у вигляді

$$P(x, y) = \frac{\ln|x - y|}{2\pi\sigma(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y.$$

У цьому випадку функція залишку є такою:

$$R(x, y) = \frac{(x - y) \cdot \nabla\sigma(x)}{2\pi\sigma(y)|x - y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y.$$

Використовуючи введені параметрикс-потенціал простого шару та об'ємний параметрикс-потенціал, і враховуючи їх властивості, задачу (2.1)-(2.2) можна редукувати до системи інтегральних рівнянь.

Теорема 2.2. *Розв'язок задачі* (2.1)–(2.2) *можна подати у вигляді суми об'ємного параметрикс-потенціалу та параметрикс-потенціалу простого шару*

$$u(x) = \int\limits_D \mu(y) P(x, y) dy + \int\limits_\Gamma \psi(y) P(x, y) ds(y), \quad x \in D, \tag{2.3}$$

де густини визначаються зі системи ГПІР

$$\begin{cases} \mu(x) + \displaystyle\int\limits_D \mu(y) R(x, y)\, dy + \int\limits_\Gamma \psi(y) R(x, y)\, ds(y) = 0, \quad x \in D, \\[2ex] \displaystyle\int\limits_D \mu(y) P(x, y)\, dy + \int\limits_\Gamma \psi(y) P(x, y)\, ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma. \end{cases} \tag{2.4}$$

Вважаємо, що межа Γ має логарифмічну ємність не рівну одиниці, тобто $cap(\Gamma) \neq 1$. Тоді є справедливою теорема про існування та єдиність розв'язку.

Теорема 2.3. *Для* $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ *система IP* (2.4) *має єдиний розв'язок* $\mu \in C(D),\ \psi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

Нехай межа Γ має таке параметричне подання

$$\Gamma = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t)),\ t \in \mathbb{R}\},$$

де $x_k \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R}),\ k = 1, 2,\ |x'(t)| > 0$, а D містить початок координат і будь-який промінь, що виходить звідти, перетинає межу області лише один раз. Визначимо $D^* = D \setminus \{(0,0)\}$. Для області D^* існує взаємнооднозначне відображення

$$p(\eta, t) = (p_1(\eta, t), p_2(\eta, t)) = (\eta x_1(t), \eta x_2(t)) : \Pi \to D^*,$$

$\Pi = (0, 1) \times [0, 2\pi)$ з якобіаном $J(\xi, \tau) = \xi(x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x_1'(\tau))$.

Здійснимо параметризацію ГПІР в (2.4) через заміну змінних $y = p(\xi, \tau)$ та $x = p(\eta, t)$. Отримаємо

$$\begin{cases} \varphi(\eta, t) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\Pi} \varphi(\xi, \tau)\widetilde{R}(\eta, t; \xi, \tau)\, d\tau d\xi + \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_0(\tau)\widehat{R}(\eta, t; \tau)\, d\tau = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\Pi} \varphi(\xi, \tau)\breve{P}(t; \xi, \tau)\, d\tau d\xi + \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_0(\tau)\breve{P}(t; \tau)\, d\tau = \widetilde{f}(t), \end{cases} \tag{2.5}$$

де $(\eta, t) \in \Pi$ та $t \in [0, 2\pi)$.

Ядро $\breve{P}$ в системі (2.5) має логарифмічну особливість, яку виділимо у вигляді відповідної вагової 2π-періодичної функції. Особливість в ядрі $\widetilde{R}$ при $\eta = \xi$ виділено у вигляді ctg функції.

Теорема 2.4. *Ядро* $\widetilde{R}(\eta, t; \eta, \tau)$ *можна подати у вигляді*

$$\widetilde{R}(\eta, t; \eta, \tau) = \widetilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) + \widetilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2}$$

з

$$\widetilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) = \frac{\nabla\sigma(\eta x(t)) \cdot \nu(x(t))K_1(t, \tau)}{\eta\sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau) -$$

$$- \frac{1}{|x'(t)|} \frac{\nabla\sigma(\eta x(t)) \cdot \theta(x(t))K_2(t, \tau)}{\eta\sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau),$$

та

$$\widetilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) = -\frac{1}{2|x'(t)|} \frac{\nabla\sigma(\eta x(t)) \cdot \theta(x(t))}{\eta\sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau),$$

де θ – одиничний вектор дотичної, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ, K_1, K_2 – деякі відомі гладкі функції.

Для апроксимації інтегралів використаємо такі квадратурні формули:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Pi} g(\xi,\tau)d\tau d\xi \approx \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=0}^{2n-1}\alpha_k g(\eta_k,t_i), \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Pi} g(\xi,\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}d\tau d\xi \approx \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=0}^{2n-1}\alpha_k T_i(t) g(\eta_k,t_i), \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(\tau)\,d\tau \approx \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k), \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau \approx \sum_{k=0}^{2n-1} F_k(t)\,f(t_k), \tag{2.9}$$

з квадратурними вагами $\alpha_k \in \mathbb{R}$ та квадратурними вузлами $\eta_k \in (0,1)$, $k=1,\ldots,N$, $t_j = \frac{j\pi}{n}$, $j=0,\ldots,2n-1$, $N,n\in\mathbb{N}$, і ваговими функціями

$$F_k(t) = -\frac{1}{2n}\left(1+2\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}\cos m(t-t_k)+\frac{1}{n}\cos n(t-t_k)\right),$$

$$T_k(t) = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\sin m(t-t_k)-\frac{1}{2n}\sin n(t-t_k).$$

Застосовуючи метод Нистрьома до (2.5), з врахуванням виділених особливостей у відповідних ядрах, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2n-1}\left(\varphi_{0j}A_{0j}^{mi}+\sum_{k=1}^{N}\varphi_{kj}\left[\delta_{ij}^{(mk)}+A_{kj}^{mi}\right]\right)=0, \quad m=1,\ldots,N,\\ &\sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{k=0}^{N}\varphi_{kj}A_{kj}^{0i}=\widetilde{f}_i, \;\; i=0,\ldots,2n-1, \end{aligned}\right. \tag{2.10}$$

з невідомими наближеними значеннями густин у квадратурних вузлах.

Наближений розв'язок задачі Діріхле (2.1)–(2.2) можна отримати з подання (2.3), використовуючи відповідні квадратурні формули та наближені значення густин, як розв'язок системи (2.10).

У ***підрозділі 2.2*** розглянуто крайову задачу Неймана:

$$\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = 0 \ \text{ в } D, \tag{2.11}$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \ \text{ на } \Gamma, \tag{2.12}$$

де $\sigma \in C^{\infty}(\overline{D})$, $\sigma > 0$, $g \in C(\Gamma)$ – задані функції, u – невідома функція, причому

$$\int\limits_{\Gamma} g(y) ds(y) = 0, \tag{2.13}$$

$$u(0) = 0. \tag{2.14}$$

Задача (2.11)-(2.14) має єдиний класичний розв'язок. Подаючи розв'язок цієї крайової задачі у формі (2.3), і враховуючи властивості відповідних параметрикс-потенціалів, отримуємо систему ГПІР

$$\begin{cases} \mu(x) + \int\limits_{D} \mu(y) R(x,y) dy + \int\limits_{\Gamma} \mu(y) R(x,y) ds(y) = 0, \quad x \in D, \\ -\frac{1}{2}\psi(x) + \int\limits_{D} \mu(y)\sigma(x) \frac{\partial P(x,y)}{\partial \nu(x)} dy + \\ + \int\limits_{\Gamma} \psi(y)\sigma(x) \frac{\partial P(x,y)}{\partial \nu(x)} ds(y) - \psi(x^*) = g(x), \ x, x^* \in \Gamma. \end{cases} \tag{2.15}$$

Для системи (2.15) справедлива теорема про коректність.

Теорема 2.5. *Для $g \in C(\Gamma)$ система ІР (2.15) має єдиний розв'язок $\mu \in C(D)$, $\psi \in C(\Gamma)$.*

Чисельне розв'язування системи (2.15) здійснено методом Нистрьома з використанням квадратур (2.6)-(2.9).

У ***підрозділі 2.3*** продемонстровано результати чисельних експериментів, що підтверджують застосовність запропонованого методу. Як приклад, для задачі Діріхле взято

$$\Gamma = \{x(t) = (0.2\cos t, 0.4\sin t - 0.3\sin^2 t), \ \ t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\sigma(x) = (2 + x_1 + x_2)^2, \ \ \Psi(x) = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 - 3x_2^2 x_1 - x_2^3, \quad x \in D,$$

з точним розв'язком

$$u_{ex}(x) = \frac{\Psi(x)}{\sigma^{1/2}(x)}, \quad x \in D$$

і f як звуження u_{ex} на Γ.

Похибки в рівномірній нормі, обчислені на множині трьох кривих

$$\tilde{\Gamma}_k = \{\tilde{x}_k(t) = (1 - 0.25k)x(t), \ \ t \in [0, 2\pi)\}, \ \ k = 1, 2, 3,$$

відображено в таблиці 2.1 для відповідних значень параметрів дискретизації N і n.

N	n	$\|u_{Nn} - u_{ex}\|_{C(\tilde{\Gamma}_1)}$	$\|u_{Nn} - u_{ex}\|_{C(\tilde{\Gamma}_2)}$	$\|u_{Nn} - u_{ex}\|_{C(\tilde{\Gamma}_3)}$
3	64	0.002628	0.001729	0.000093
	128	0.002637	0.001729	0.000093
7	128	0.000364	0.000421	0.000021
	256	0.000364	0.000421	0.000021
15	128	0.000056	0.000106	0.000004
	256	0.000056	0.000105	0.000004

Таблиця 2.1

У **третьому розділі** розглянуто чисельне розв'язування мішаних крайових задач у двозв'язній області.

У ***підрозділі 3.1*** наведено чисельне розв'язування мішаної крайової задачі Діріхле-Неймана для областей, внутрішня межа яких є гомотетичним стисненням зовнішньої граничної кривої.

Нехай D_0 – однозв'язна обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з межею $\Gamma_0 \in C^2$, D_{-1} – однозв'язна область обмежена кривою $\Gamma_{-1} \in C^2$ і $\overline{D}_{-1} \subset D_0$. Визначимо $D = D_0 \setminus \overline{D}_{-1}$.

Розглянемо таку крайову задачу у двозв'язній області D для ЕРЗК: знайти функцію $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, що задовольняє диференціальне рівняння

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \ \text{ в } D, \tag{3.1}$$

умову Діріхле на Γ_{-1}

$$u = f_1 \ \text{ на } \ \Gamma_{-1} \tag{3.2}$$

та умову Неймана на Γ_0

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \ \text{ на } \ \Gamma_0. \tag{3.3}$$

Тут $\sigma \in C^\infty(\overline{D})$, $\sigma > 0$, f_1, f_2 – відомі функції.

Теорема 3.1. *Розв'язок задачі* (3.1)–(3.3) *можна подати у вигляді*

$$u(x) = \int\limits_D \psi(y)P(x,y)\,dy + \int\limits_{\Gamma_{-1}} \psi_{-1}(y)P(x,y)\,ds(y) + \int\limits_{\Gamma_0} \psi_0(y)P(x,y)\,ds(y), \tag{3.4}$$

$x \in D$, *де невідомі густини* ψ, ψ_{-1}, ψ_0 *є розв'язками такої системи ГПІР, записаної в операторному вигляді*

$$\begin{cases} \psi + V\psi + V_{-1}\psi_{-1} + V_0\psi_0 = 0 \quad \text{в } D, \\ W^{(-1)}\psi + W^{(-1)}_{-1}\psi_{-1} + W^{(-1)}_0\psi_0 = f_1 \quad \text{на } \Gamma_{-1}, \\ -\dfrac{1}{2}\psi_0 + T^{(0)}\psi + T^{(0)}_{-1}\psi_{-1} + T^{(0)}_0\psi_0 = f_2 \quad \text{на } \Gamma_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Оператори визначаються як:

$$V_j g(x) := \int\limits_{\Gamma_j} g(y)R(x,y)\,ds(y),\ x \in D,\ j \in \{-1, 0\}, \tag{3.6}$$

$$W^{(i)}_j g(x) := \int\limits_{\Gamma_j} g(y)P(x,y)\,ds(y),\ x \in \Gamma_i,\ i,j \in \{-1, 0\}, \tag{3.7}$$

$$T^{(i)}_j g(x) := \int\limits_{\Gamma_j} g(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial \nu(x)}\,ds(y),\ x \in \Gamma_i,\ i,j \in \{-1, 0\}, \tag{3.8}$$

$$Vg(x) := \int\limits_D g(y)R(x,y)\,dy,\ x \in D, \tag{3.9}$$

$$W^{(i)}g(x) := \int\limits_D g(y)P(x,y)\,dy,\ x \in \Gamma_i,\ i \in \{-1, 0\}, \tag{3.10}$$

$$T^{(i)}g(x) := \int\limits_D g(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial \nu(x)}\,dy,\ x \in \Gamma_i,\ i \in \{-1, 0\}. \tag{3.11}$$

Схема наближеного розв'язування аналогічна до приведеної у розділі 2. Подібний підхід застосовано в ***підрозділі 3.2*** для чисельного розв'язування мішаної крайової задачі Неймана-Діріхле.

У ***підрозділі 3.3*** здійснено узагальнення на випадок двозв'язної області з негомотетичними межами.

Вважаємо, що криві Γ_{-1} та Γ_0 задані параметрично

$$\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = (x_{-11}(t), x_{-12}(t)),\ t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\Gamma_0 = \{x_0(t) = (x_{01}(t), x_{02}(t)),\ t \in [0, 2\pi)\}.$$

Тоді область D можна описати кривими Γ_k, що визначаються так

$$\Gamma_k = \left\{ x_k(t) = \left(\begin{array}{c} (1-\xi_k)x_{-11}(t) + \xi_k x_{01}(t), \\ (1-\xi_k)x_{-12}(t) + \xi_k x_{02}(t) \end{array} \right),\ t \in [0, 2\pi) \right\},$$

де $k = 1, \ldots,\ \xi_k \in (0, 1)$ – фіксований параметр.

Тобто, в подвійних інтегралах відповідної системи ГПІР робимо таку заміну змінних

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = p_1(\xi, \tau) = (1-\xi)x_{-11}(\tau) + \xi x_{01}(\tau), \\ y_2 = p_2(\xi, \tau) = (1-\xi)x_{-12}(\tau) + \xi x_{02}(\tau), \end{array} \right.$$

$(\xi, \tau) \in \Pi = (0, 1) \times [0, 2\pi)$. Тепер знову застосовуємо метод Нистрьома з попередніх підрозділів.

У ***підрозділі 3.4*** наведено чисельні результати для різних вхідних даних, зокрема для різних кривих Γ_{-1} та Γ_0. Нехай область D (див. рис. 3.1) обмежена негомотетичними одна відносно іншої кривими:

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 = \{x_0(t) = (\cos(t), \sin^2(t) + \sin(t) - 0.9),\ t \in [0, 2\pi)\}, \\ &\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = (0.4\cos(t), 0.5(\sin(t) - \sin^2(t) + 0.6)),\ t \in [0, 2\pi)\}. \end{aligned}$$

Функція σ визначена як $\sigma(x) = (4 + x_1 + x_2)^2,\ x \in D$. Легко бачити, що функція $u_{ex}(x) = (x_1^2 - x_2^2)/(4 + x_1 + x_2)$ задовольняє диференціальне рівняння. Вхідні дані візьмемо як звуження точного розв'язку на Γ_{-1} та його нормальної похідної на Γ_0 У таблиці 3.1 наведено похибки розв'язку для трьох кривих $\bar{\Gamma}_k,\ k = 1, 2, 3$, що лежать всередині області. На рис. 3.2 подано точний розв'язок в області D та його апроксимацію при параметрах дискретизації $N = 6$ та $n = 128$.

У **четвертому розділі** розглянуто чисельне розв'язування задачі Коші для ЕРЗК у двозв'язній області.

У ***підрозділі 4.1*** наведено постановку задачі Коші та вказано на її некоректність у сенсі відсутності стійкості розв'язку за вхідними даними.

Нехай $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена однозв'язна область з межею $\Gamma_0 \in C^2$, однозв'язна область $D_{-1} \subset \mathbb{R}^2$ обмежена кривою $\Gamma_{-1} \in C^2$, що повністю лежить всередині D_0, тобто $D_{-1} \subset D_0$. Визначимо область розв'язку $D = D_0 \setminus \overline{D}_{-1}$. Нехай u – розв'язок ЕРЗК

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \text{ в } D, \tag{4.1}$$

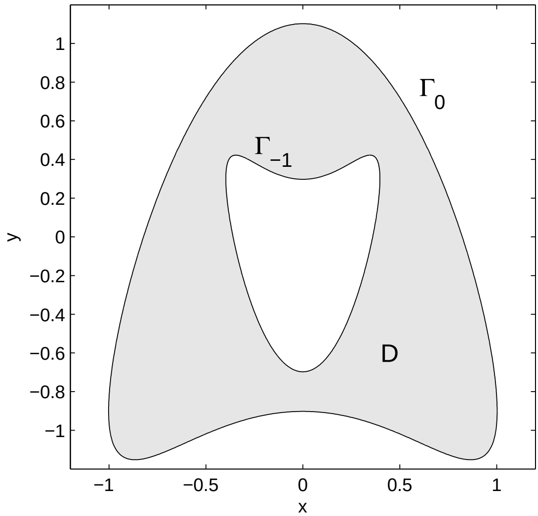


Рис. 3.1. Область D.

що задовольняє умову Діріхле

$$u = g_2 \text{ на } \Gamma_0 \tag{4.2}$$

та умову Неймана

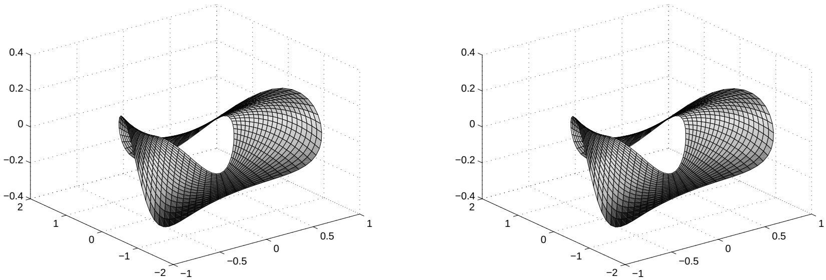
$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \text{ на } \Gamma_0 \tag{4.3}$$

з відомими функціями g_2 та f_2, $\sigma \in C^\infty(\overline{D})$, $\sigma > 0$.

Зокрема, складає інтерес відновити (реконструювати) у стійкий спосіб дані Коші на Γ_{-1}.

У ***підрозділі 4.2*** до задачі Коші застосовано непрямий метод ГПІР, розглянутий у попередніх розділах, та здійснено регуляризацію Тіхонова для отримання стійкого розв'язку.

Отже, для розв'язування задачі (4.1)–(4.3) використаємо непрямий метод інтегральних рівнянь, тобто подаємо розв'язок у вигляді суми об'ємного параметрикс-потенціалу та параметрикс-потенціалів простих шарів.



а) точний розв'язок   б) наближений розв'язок

Рис. 3.2. Точний та наближений розв'язки в D.

N	n	$\|u_{Nn} - u_{ex}\|_{C(\bar{\Gamma}_1)}$	$\|u_{Nn} - u_{ex}\|_{C(\bar{\Gamma}_2)}$	$\|u_{Nn} - u_{ex}\|_{C(\bar{\Gamma}_3)}$
3	32	1.19E-03	1.16E-03	5.26E-03
	64	1.10E-03	1.03E-03	2.10E-03
6	64	2.44E-04	6.44E-04	1.23E-03
	128	2.42E-04	5.97E-04	5.89E-04
12	128	2.21E-04	3.39E-04	6.21E-04
	256	2.21E-04	6.96E-05	1.54E-04

Таблиця 3.1

Теорема 4.1. *Розв'язок задачі* (4.1)–(4.3) *можна подати у вигляді*

$$u(x) = \int\limits_D \psi(y) P(x,y)\, dy + \int\limits_{\Gamma_{-1}} \psi_{-1}(y) P(x,y)\, ds(y) + \int\limits_{\Gamma_0} \psi_0(y) P(x,y)\, ds(y), \tag{4.4}$$

$x \in D$, *де невідомі густини* ψ, ψ_{-1} *і* ψ_0 *є розв'язками системи*

$$\begin{cases} \psi + V\psi + V_{-1}\psi_{-1} + V_0\psi_0 = 0 \quad \text{в } D, \\[2ex] W^{(0)}\psi + W^{(0)}_{-1}\psi_{-1} + W^{(0)}_0\psi_0 = g_2 \quad \text{на } \Gamma_0, \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\psi_0 + T^{(-1)}\psi + T^{(-1)}_{-1}\psi_{-1} + T^{(-1)}_0\psi_0 = f_2 \quad \text{на } \Gamma_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

з визначеними операторами формулами (3.6)-(3.11).

З властивостей параметрикс-потенціалів випливає такий наслідок.

Наслідок 4.2. *Якщо розв'язок задачі Коші* (4.1)–(4.3) *подається у вигляді* (4.4), *тоді невідомі дані Коші на внутрішній межі області* Γ_{-1} *мають таке подання:*

$$\begin{aligned} u &= W^{(-1)}\psi + W_{-1}^{(-1)}\psi_{-1} + W_0^{(-1)}\psi_0 && \text{на } \Gamma_{-1}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{2}\psi_{-1} + T^{(-1)}\psi + T_{-1}^{(-1)}\psi_{-1} + T_0^{(-1)}\psi_0\right) && \text{на } \Gamma_{-1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Застосовуючи описаний раніше підхід, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{2n-1}\left(\varphi_{-1j}A_{-1j}^{mi} + \varphi_{0j}A_{0j}^{mi} + \sum_{k=1}^{N}\varphi_{kj}\left[\delta_{ij}^{(mk)} + A_{kj}^{mi}\right]\right) = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{2n-1}\left(\varphi_{-1j}A_{-1j}^{0i} + \varphi_{0j}A_{0j}^{0i} + \sum_{k=1}^{N}\varphi_{kj}A_{kj}^{0i}\right) = \widetilde{g}_{2i}, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{2n-1}\left(\varphi_{-1j}A_{-1j}^{0i} + \varphi_{0j}\left[A_{0j}^{0i} - \frac{\delta_{ij}}{2}\right] + \sum_{k=1}^{N}\varphi_{kj}A_{kj}^{0i}\right) = \widetilde{f}_{2i}, \end{cases} \tag{4.7}$$

де $m = 1, \ldots, N,\ i = 0, \ldots, 2n-1$.

Через некоректність задачі Коші матриця A лінійної системи (4.7) має велике число обумовленості. Тому для отримання стійкого розв'язку застосуємо певний регуляризуючий метод. Скористаємось регуляризацією Тіхонова для отримання наближеного розв'язку x_α регуляризуючого нормального рівняння

$$(A^\top A + \alpha I)x_\alpha = A^\top b, \tag{4.8}$$

де $A^\top$ – транспонована до A матриця, I – одинична матриця, b – права частина системи (4.7), x_α – вектор невідомих наближених значень густин у точках, $\alpha > 0$ – регуляризуючий параметр, отриманий методом L-кривої. Апроксимацію розв'язку і даних Коші на Γ_{-1} можна отримати з (4.4) та (4.6), відповідно, використовуючи квадратурні формули та знайдені наближені значення густин зі системи (4.8).

У ***підрозділі 4.3*** представлено короткий опис та алгоритм альтернуючого методу розв'язування задачі Коші (4.1)–(4.3). На кожній ітерації необхідно розв'язати дві мішані крайові задачі (Неймана-Діріхле та Діріхле-Неймана):

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = 0 \ \text{ в } D, \tag{4.9}$$

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial\nu} = h \quad \text{на } \Gamma_{-1}, \qquad u = g_2 \quad \text{на } \Gamma_0 \tag{4.10}$$

та

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = 0 \ \text{ в } D, \tag{4.11}$$

$$u = g \quad \text{на } \Gamma_{-1}, \qquad \sigma\frac{\partial u}{\partial\nu} = f_2 \quad \text{на } \Gamma_0. \tag{4.12}$$

Ітераційна процедура альтернуючого методу для побудови розв'язку (4.1)–(4.3) складається з таких кроків:

— перше наближення u_0 розв'язку u задачі (4.1)–(4.3) отримується як розв'язок (4.9)–(4.10) з $h = h_0$, де h_0 – довільне початкове наближення;

— маючи значення u_{2k}, знаходимо u_{2k+1} як розв'язок (4.11)–(4.12) з $g = u_{2k}|_{\Gamma_{-1}}$;

— тоді функцію u_{2k+2} отримуємо, розв'язуючи (4.9)–(4.10) з

$$h = \sigma\frac{\partial u_{2k+1}}{\partial\nu}|_{\Gamma_{-1}}.$$

Алгоритм виконується ітераційно у двох останніх пунктах. Доведено збіжність альтернуючого методу.

Алгоритм методу Ландвебера, побудованого на основі ітераційної процедури для рівняння Лапласа, наведено у ***підрозділі 4.4***. На кожній ітерації необхідно розв'язати дві мішані задачі Діріхле-Неймана:

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = 0 \quad \text{в } D, \tag{4.13}$$

$$u = h \quad \text{на } \Gamma_{-1}, \quad \sigma\frac{\partial u}{\partial\nu} = f_2 \quad \text{на } \Gamma_0 \tag{4.14}$$

та

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla v) = 0 \quad \text{в } D, \tag{4.15}$$

$$v = 0 \quad \text{на } \Gamma_{-1}, \quad \sigma\frac{\partial v}{\partial\nu} = z \quad \text{на } \Gamma_0. \tag{4.16}$$

Ітераційна процедура методу складається з таких кроків:

— вибрати довільну функцію h_0; знайти u_0 як розв'язок задачі (4.13)–(4.14) з $h = h_0$;

— знайти v_0, розв'язавши (4.15)–(4.16) з $\sigma\frac{\partial v_0}{\partial\nu} = z_0$ на Γ_0, де $z_0 = u_0 - g_2$;

— маючи u_{k-1}, v_{k-1} знайти u_k як розв'язок задачі (4.13)–(4.14) з $u_k = h_k$ на Γ_{-1}, де $h_k = h_{k-1} - \gamma\frac{\partial v_{k-1}}{\partial\nu}|_{\Gamma_{-1}}$, $\gamma > 0$;

— знайти v_k як розв'язок задачі (4.15)–(4.16) з $\sigma\frac{\partial v_k}{\partial\nu} = z_k$ на Γ_0, де $z_k = u_k - g_2$.

Алгоритм виконується ітераційно у двох останніх пунктах.

У наведених ітераційних методах для розв'язування відповідних мішаних задач використано методи, розроблені у розділі 3.

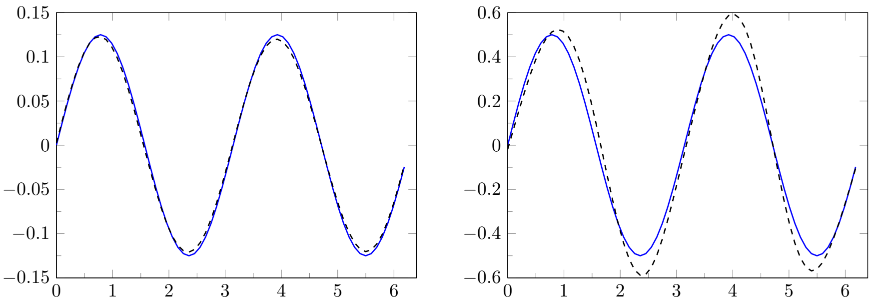
Результати роботи методів для різних вхідних даних (збурених та точних) наведено у ***підрозділі 4.5***.

Для непрямого методу розглянемо двозв'язну кільцеподібну область D, що обмежена двома колами радіусів 1 та 0.5. Функція провідності σ та дані Коші мають вигляд

$$\sigma(x) = 4 - x_1^2 + x_2^2, \quad x \in D,$$

$$g_2(x) = x_1 x_2, \quad f_2(x) = 2x_1 x_2 (4 - x_1^2 + x_2^2), \quad x \in \Gamma_0.$$

На рис. 4.1 наведено точні та наближені значення даних Коші на внутрішній межі для збурених вхідних даних з рівнем шуму в 3%.



а) функція та її наближення б) нормальна похідна та її наближення

Рис. 4.1. Точні (–) та відновлені (– – –) дані Коші на Γ_{-1}, отримані непрямим підходом ГПІР ($\alpha = 10e - 5,\ N = 7,\ n = 128$).

Для альтернуючого методу вхідними даними є

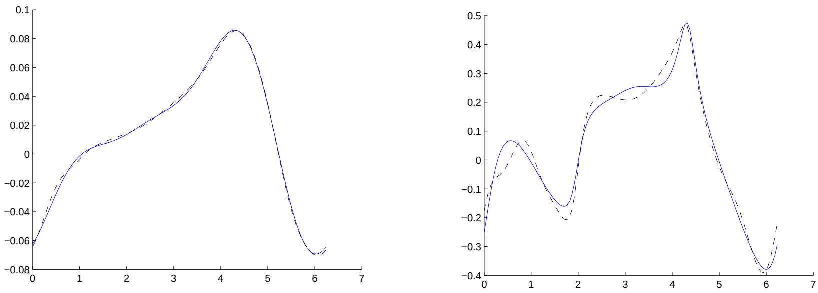
$$\Gamma_0 = \{x_0(t) = (0.5\cos(t), 0.4\sin(t) - 0.3\sin^2(t)),\ t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = (0.2\cos(t) + 0.1\cos(2t) - 0.05, 0.2\sin(t) - 0.25),\ t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\sigma(x) = 0.4(4 - x_1^2 + x_2^2), \quad x \in D,$$

$$g_2(x) = x_1 x_2, \quad f_2(x) = \sigma(x)\nabla g_2(x) \cdot \nu(x), \quad x \in \Gamma_0.$$

Для вхідних даних зі збуренням у 3% отримані результати після $k = 200$ ітерацій продемонстровано на рисунку 4.2.



а) функція та її наближення　　　б) нормальна похідна та її наближення

Рис. 4.2. Точні ($-$) та відновлені ($- - -$) дані Коші на Γ_{-1}, отримані альтернуючим методом ($N = 3,\ n = 64$).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розроблено, застосовано й обґрунтовано ефективні чисельні методи для наближеного розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. Одержано такі основні результати:

1. Крайові задачі Діріхле та Неймана в однозв'язних плоских областях, мішані крайові задачі та задачу Коші у двозв'язних плоских областях для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами редуковано до систем гранично-просторових інтегральних рівнянь з різними типами особливостей за допомогою відповідних параметрикс-потенціалів. Досліджено коректність отриманих систем інтегральних рівнянь у відповідних просторах.
2. Здійснено параметризацію отриманих інтегральних рівнянь та проаналізовано наявні особливості в ядрах. Розроблено чисельний метод квадратур для наближеного розв'язування систем інтегральних рівнянь шляхом зведення їх до систем лінійних алгебричних рівнянь. Здійснено чисельні експерименти, що підтверджують збіжність запропонованого методу.
3. Мішані крайові задачі у двозв'язних областях, що обмежені гомотетичними та негомотетичними кривими, з використанням параметрикс-потенціалів зведено до систем інтегральних рівнянь. Побудовано апроксимаційні формули для обчислення наближеного розв'язку в області та на внутрішній межі. Проведено відповідні чисельні експерименти.

4. Застосовано регуляризуючий метод Тіхонова з вибором параметра регуляризації методом L-кривої до системи лінійних рівнянь, отриманих при розв'язуванні задачі Коші. Використано альтернуючий метод та метод Ландвебера у поєднанні з гранично-просторовими інтегральними рівняннями для наближеного розв'язування задачі Коші. Досліджено збіжність альтернуючого методу. Здійснено програмну реалізацію всіх запропонованих методів і перевірено їх ефективність на модельних прикладах.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ НАУКОВИХ ПРАЦЬ

Наукові статті у вітчизняних фахових виданнях:

1. Бешлей А. Про використання методу інтегральних рівнянь для розв'язування задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей // Вісник Львівського університету, серія прикладна математика та інформатика. – 2018. – Вип. 26. – С. 9-19.
2. Beshley A. On the numerical solution of a mixed boundary value problem for the elliptic equation with variable coefficients in doubly connected planar domains. / A. Beshley // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2018. – Т. 128. – С. 3-15.

Наукові статті у закордонних виданнях:

3. Beshley A. An integral equation method for the numerical solution of a Dirichlet problem for second order elliptic equations with variable coefficients. / A. Beshley, R. Chapko, B.T. Johansson // Journal of Engineering Mathematics. – 2018. – Vol. 112, Issue 1. – P. 63-73.
4. Beshley A. A boundary-domain integral equation method for an elliptic Cauchy problem with variable coefficients. / A. Beshley, R. Chapko, B.T. Johansson // In: Lindahl K., Lindström T., Rodino L., Toft J., Wahlberg P. (eds) Analysis, Probability, Applications, and Computation. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. – 2019. – P. 493-501.
5. Beshley A. On the alternating method and boundary-domain integrals for elliptic Cauchy problems. / A. Beshley, R. Chapko, B.T. Johansson // Computers and Mathematics with Applications. – 2019. – Vol. 78, Issue 11. – P. 3514-3526.

Матеріали конференцій:

6. Бешлей А. Про метод інтегральних рівнянь для задачі Діріхле з еліптичним рівнянням зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей, Р. Хапко // Матеріали IV науково-технічної конференції "Обчислювальні методи і системи перетворення інформації", присвяченої пам'яті професора

Б. О. Попова, Львів: ФМІ імені Г.В. Карпенка НАН України, 2016. – С. 16-20.

7. Бешлей А. Про застосування методу інтегральних рівнянь для задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей, Р. Хапко // Матеріали XXII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2016. – С. 31-34.
8. Beshley A. On the numerical solution of the Neumann problem for an elliptic equation with variable coefficients by an integral equation approach. / A. Beshley // Proceedings of the International Conference UCAM-2017 “Ukrainian Conference on Applied Mathematics”, Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2017. – P. 20-21.
9. Beshley A. An integral equation approach for numerical solution of elliptic equations with spacewise dependent coefficients. / A. Beshley, R. Chapko, B. T. Johansson // Abstract of the 11th ISAAC congress, 14-18 August 2017, Linnaeus University, Sweden, 2017. – P. 130.
10. Бешлей А. Чисельне розв’язування задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь. / А. Бешлей // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 55.
11. Бешлей А. Про чисельне розв’язування задачі Коші для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій”, Рівне: НУВГП, РДГУ, 2018. – С. 115-116.

АНОТАЦІЇ

Бешлей А. В. *Чисельне розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь.* – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2020.

Дисертаційна робота присвячена чисельному розв'язуванню плоских задач для еліптичниого рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. У даній праці розглянуто крайові задачі Діріхле та Неймана в обмеженій однозв'язній області, мішані крайові задачі та задачу Коші у двозв'язній обмеженій області. Для розв'язування крайових задач Діріхле та Неймана, використовуючи поняття параметрикса та непрямий підхід інтегральних рівнянь, диференціальні задачі редуковано до систем гранично-просторових інтегральних рівнянь (ГПІР). Досліджено коректність отриманих систем. Через заміну змінних на основі гомотетичного стиснення граничної кривої області розв'язку одержано параметризовану систему ГПІР, яку повністю дискретизовано методом Нистрьома. Для мішаних крайових задач, подібно до задач Діріхле та Неймана, розв'язки подано у вигляді суми параметрикс-потенціалів простого шару та об'ємного параметрикс-потенціалу з невідомими густинами. Розглянуто випадки двозв'язних областей, що обмежені гомотетичними та негомотетичними кривими. Для чисельного розв'язування некоректної задачі Коші застосовано непрямий метод інтегральних рівнянь з регуляризацією Тіхонова, а також два ітераційні методи (альтернуючий метод та метод Ландвебера). Розглянуто алгоритми ітераційних методів та досліджено збіжність альтернуючого методу. Для всіх методів виконано чисельні експерименти, результати яких підтверджують теоретичні дослідження.

Ключові слова: еліптичне рівняння зі змінними коефіцієнтами, параметрикс (функція Леві), плоскі крайові задачі, задача Коші, непрямий метод інтегральних рівнянь, гранично-просторове інтегральне рівняння, параметризація області, метод Нистрьома.

Бешлей А. В. *Численное решение плоских задач для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами методом интегральных уравнений.* – На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – вычислительная математика. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2020.

Диссертационная работа посвящена численному решению плоских задач для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В работе рассмотрено краевые задачи Дирихле и Неймана в ограниченной односвязной области, смешанные краевые задачи и задачу Коши в двусвязной ограниченной области. Для решения краевых задач Дирихле и Неймана, используя понятие параметрикса и непрямой подход интегральных уравнений, дифференциальные задачи редуцированы к системе гранично-пространственных интегральных уравнений (ГПИУ). Исследована корректность полученных систем. Из-за замены переменных на основе гомотетического сжатия граничной кривой получено параметризованную систему ГПИУ, которую полностью дискретизированно с помощью метода Нистрьома. Для смешанных краевых задач, подобно задач Дирихле и Неймана, решения представлены в виде суммы параметрикс-потенциалов простого слоя и объемного параметрикс-потенциала с неизвестными плотностями. Рассмотрены случаи двусвязних областей, ограниченных гомотетическими и негомотетическими кривыми. Для численного решения некорректной задачи Коши применен непрямой метод интегральных уравнений с регуляризацией Тихонова, а также два итерационные методы (альтернирующий метод и метод Ландвебера). Рассмотрены алгоритмы итерационных методов и исследована сходимость альтернирующего метода. Для всех методов выполнены численные эксперименты, результаты которых подтверждают теоретические исследования.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение с переменными коэффициентами, параметрикс (функция Леви), плоские краевые задачи, задача Коши, непрямой метод интегральных уравнений, гранично-пространственное интегральное уравнение, параметризация области, метод Ныстрема.

Beshley A. V. *Numerical solution of planar boundary value problems for an elliptic equation with variable coefficients by integral equations approach.* – On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.07 – Computational mathematics. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2020.

The thesis is devoted to the numerical solution of planar problems for a second-order elliptic equation with variable coefficients (EEVC). A brief overview of its applications in different areas together with existing approaches for numerical solving have been provided.

There have been considered Dirichlet and Neumann boundary value problems in a bounded simply connected domain, mixed boundary value problems

and Cauchy problem in a bounded doubly connected domain in current work.

A numerical approximation involving integral equations technique for the solution of the Dirihlet and Neumann boundary value problems for EEVC has been developed. Using the concept of a parametrix and indirect integral equations approach that represents the solution as a sum of potentials, the problems are reduced to a system of boundary-domain integral equations (BDIEs) to be solved for two unknown densities.

Via a change of variables based on shrinkage of the boundary curve of the solution domain a parameterized system of BDIEs is obtained. The strong and logarithmic singularities in kernels have been examined. It is shown how to write these singularities in the system in an explicit form for further discretization. An effective full discretization by the Nyström method is given.

Solving the system of linear algebraic equations, the approximate values of unknown densities over boundary and domain are calculated. The formulas of the approximate numerical solution in the domain are provided for both boundary value problems. The numerical experiments for different input data and domains are showing that the proposed approach can be turned into a practical working method.

As mixed boundary value problems, Dirichlet-Neumann and Neumann-Dirichlet boundary value problems in a doubly connected domain have been considered. Similarly to the Dirichlet and Neumann problems, a solution is represented as a sum of single layer potentials over the domain and over two boundary curves with unknown densities and Levi function (parametrix) as a kernel. Making the change of variables based on shrinkage of the outer boundary curve, the system of integral equations is rewritten in the parameterized form. Using the same steps including singularities exploring and rewriting them explicitly, quadratures application with collocation at specific points, solving the system of linear equations to get densities values, the approximate solution in the domain is obtained.

Separately, the numerical solution of the mixed boundary value problem for an arbitrary doubly connected domain is examined, where the change of variables in the system of BDIEs happens via the parametric representation of inner and outer boundaries.

For the numerical solution of the ill-posed Cauchy problem an indirect integral equations method with Tikhonov regularization and two iterative methods (alternating method and Landweber method) are considered.

For the integral based method for numerical solving the Cauchy problem, the solution is represented as a sum of parametrix-potentials with unknown densities to be identified. The densities are calculated from the system of BDIEs for the numerical solution of which an efficient Nyström scheme in combination with Tikhonov regularization and L-curve method for regularization parameter choosing is proposed. Having approximate values of densities it is possible to find approximate Cauchy data on the inner boundary using appropriate formulas based on the view of solution representation.

A numerical implementation of the alternating iterative method is presented for the Cauchy problem. On each step of the iterative procedure, two well-posed mixed problems investigated in the thesis are being solved. The convergence analysis of this method is also provided. An iterative Landweber method is considered at each iteration step of which two Dirichlet-Neumann problems are being solved.

Numerical results are presented for all three approaches, for different domains and conductivities, using exact as well as noisy Cauchy data, showing that a stable solution can be obtained with good accuracy and small computational cost.

Key words: elliptic equation with variable coefficients, parametrix (Levi function), planar boundary value problems, Cauchy problem, indirect integral equations approach, boundary-domain integral equation, domain parameterization, Nyström method.