

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**БЕШЛЕЙ АНДРІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ**

УДК 519.63

## **ДИСЕРТАЦІЯ**

### **ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

01.01.07 – обчислювальна математика

Математика і статистика

Подається на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і  
текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ (А.В. Бешлей)

Науковий керівник  
Халко Роман Степанович  
доктор фізико-математичних наук,  
професор

Львів–2020

## АНОТАЦІЯ

**Бешлей А.В.** *Чисельне розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь.* – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2020.

Дисертаційна робота присвячена чисельному розв'язуванню плоских задач для еліптичного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами (ЕРЗК). Розглянуте ЕРЗК, яке також називають рівнянням електричної імпедансної томографії (ЕІТ), рівнянням провідності або узагальненим рівнянням Лапласа, часто зустрічається у багатьох інженерних задачах. Наведено короткий огляд його застосування у різних областях, відповідні математичні моделі разом з існуючими методами та підходами для чисельного розв'язування.

У даній праці розглянуто крайові задачі Діріхле та Неймана в обмеженій однозв'язній області, мішані крайові задачі та задачу Коші у двозв'язній обмеженій області.

Для розв'язування крайових задач Діріхле та Неймана для ЕРЗК розроблено чисельну апроксимацію, що включає в себе застосування методу інтегральних рівнянь. Використовуючи поняття параметрикса та непрямий підхід інтегральних рівнянь, в якому розв'язок подається у вигляді суми потенціалів, диференціальні задачі редуковано до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь (ГПР) з двома невідомими густинами.

Через заміну змінних на основі гомотетичного стиснення граничної кривої області розв'язку одержано параметризовану систему ГПР. Досліджено наявність сильної та логарифмічної особливостей в ядрах. Показано як запи-

сати ці особливості у явному вигляді для подальшої дискретизації. Наведено ефективну схему повної дискретизації методом Нистрьома.

Розв'язуючи систему лінійних алгебричних рівнянь, знайдено наближені значення невідомих густин на межі та в області. Для обох крайових задач наведено формули для наближеного обчислення розв'язку в області. Чисельні експерименти для різних вхідних даних та областей показують, що запропонований підхід може бути застосованим на практиці.

Мішаними крайовими задачами, що розглянуті в роботі є задачі Діріхле-Неймана та Неймана-Діріхле у двозв'язній області. Подібно до задач Діріхле та Неймана, розв'язок подано у вигляді суми параметрикс-потенціалів простого шару та об'ємного параметрикс-потенціалу з невідомими густинами. Зведення задачі до системи ГПР розглянуто спочатку для кільцеподібних областей. Роблячи заміну змінних через гомотетичне стиснення зовнішньої граничної кривої області, систему інтегральних рівнянь переписано у параметричній формі. Використовуючи подібні кроки, як і для задачі Діріхле чи Неймана, що включають дослідження особливостей та їх запис у явному вигляді, застосування квадратур разом з колокацією у відповідних вузлах, розв'язування системи лінійних рівнянь для знаходження значень густин, можна отримати наближений розв'язок в області.

Окремо розглянуто чисельне розв'язування мішаної крайової задачі для довільної двозв'язної області, де заміна змінних у системі ГПР відбувається через параметричне подання внутрішньої та зовнішньої граничних кривих. Наведено формули для знаходження наближеного розв'язку в області разом з його значеннями та значеннями нормальної похідної на граничних кривих.

Для чисельного розв'язування некоректної задачі Коші застосовано непрямий метод інтегральних рівнянь з регуляризацією Тіхонова, а також два ітераційні методи (альтернуючий метод та метод Ландвебера).

Для розв'язування задачі Коші у першому методі шукану функцію подано як суму параметрикс-потенціалів з невідомим густинами. Оскільки пода-

ння розв'язку має задовольняти диференціальне рівняння та крайові умови, то густини будуть визначатися з відповідної системи ГПР, для чисельного розв'язування якої запропоновано ефективну схему Нистрьома разом з регуляризацією Тіхонова та методом  $L$ -кривої для вибору параметра регуляризації. Маючи наближені значення густин, можна знайти апроксимацію даних Коші на внутрішній границі, використовуючи відповідні формули, виведені на основі подання розв'язку.

Запропоновано чисельну імплементацію альтернуючого ітераційного методу для задачі Коші. На кожному кроці ітераційної процедури розв'язуються дві коректні мішані задачі, розглянуті раніше. Наведено аналіз збіжності даного методу. Розглянуто також ітераційний метод Ландвебера, на кожній ітерації якого розв'язуються дві задачі Діріхле-Неймана. Алгоритми для альтернуючого методу та методу Ландвебера можуть розглядатись як модифікації цих методів для рівняння Лапласа. Критерієм зупинки ітераційної процедури для обох методів можна обрати принцип нев'язки Морозова.

Чисельні результати, представлені для всіх трьох підходів для різних областей та функцій з використанням як точних вхідних даних Коші, так і даних зі шумом, показують, що стійкий розв'язок може бути отриманий з хорошою точністю та малими обчислювальними затратами.

**Ключові слова:** еліптичне рівняння зі змінними коефіцієнтами, параметрикс (функція Леві), непрямий метод інтегральних рівнянь, гранично-просторове інтегральне рівняння, параметризація області, метод Нистрьома, плоскі крайові задачі, задача Коші.

**Beshley A. V.** *Numerical solution of planar boundary value problems for elliptic equation with variable coefficients by integral equations approach.* – On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.07 – Computational mathematics. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2020.

The thesis is devoted to the numerical solution of planar problems for a second-order elliptic equation with variable coefficients (EEVC). Considered EEVC also called electrical impedance tomography (EIT) equation, conductivity equation, or generalized Laplace equation is widely spread in many engineering problems. A brief overview of its applications in different areas, corresponding mathematical models together with existing methods and approaches for numerical solving have been provided.

There have been considered Dirichlet and Neumann boundary value problems in a bounded simply connected domain, mixed boundary value problems, and Cauchy problem in a bounded doubly connected domain in current work.

A numerical approximation involving integral equations technique for the solution of the Dirichlet and Neumann boundary value problems for EEVC has been developed. Using the concept of a parametrix and indirect integral equations approach that represents the solution as a sum of potentials, the problems are reduced to a system of boundary-domain integral equations (BDIEs) to be solved for two unknown densities.

Via a change of variables based on shrinkage of the boundary curve of the solution domain a parameterized system of BDIEs is obtained. The strong and logarithmic singularities in kernels have been examined. It is shown how to write these singularities in the system in an explicit form for further discretization. An effective full discretization by the Nyström method is given.

Solving the system of linear algebraic equations, the approximate values of unknown densities over boundary and domain are calculated. The formulas of the approximate numerical solution in the domain are provided for both boundary value problems. The numerical experiments for different input data and domains are showing that the proposed approach can be turned into a practical working method.

As mixed boundary value problems, Dirichlet-Neumann and Neumann-Dirichlet boundary value problems in a doubly connected domain have been consi-

dered. Similarly to the Dirichlet and Neumann problems, a solution is represented as a sum of single layer potentials over the domain and over two boundary curves with unknown densities and Levi function (parametrix) as a kernel. Reducing the problem to a system of BDIEs has been reviewed for annular domains at first. Making the change of variables based on shrinkage of the outer boundary curve, the system of integral equations is rewritten in the parameterized form. Using the same steps including singularities exploring and rewriting them explicitly, quadratures application with collocation at specific points, solving the system of linear equations to get densities values, the approximate solution in the domain is obtained.

Separately, a numerical solution of a mixed boundary value problem for an arbitrary doubly connected domain is examined, where the change of variables in the system of BDIEs happens via the parametric representation of inner and outer boundaries. The formula for the numerical solution in the domain and approximations of the solution and its normal derivative on boundary curves are provided.

For the numerical solution of the ill-posed Cauchy problem an indirect integral equations method with Tikhonov regularization and two iterative methods (alternating method and Landweber method) are considered.

For the integral based method for numerical solving the Cauchy problem, the solution is represented as a sum of parametrix-potentials with unknown densities to be identified. Since that representation satisfies the differential equation and boundary conditions, the densities are calculated from the system of BDIEs for the numerical solution of which an efficient Nyström scheme in combination with Tikhonov regularization and  $L$ -curve method for regularization parameter choosing is proposed. Having approximate values of densities it is possible to find approximate Cauchy data on the inner boundary using appropriate formulas based on the view of solution representation.

A numerical implementation of the alternating iterative method is presented for the Cauchy problem. On each step of the iterative procedure, two well-posed

mixed problems investigated in the thesis are being solved. The convergence analysis of this method is also provided. An iterative Landweber method is considered at each iteration step of which two Dirichlet-Neumann problems are being solved. The algorithms for alternating and Landweber methods can be considered as modifications of these methods for the Laplace equation. As criteria to stop iterative procedure for both methods Morozov residual principle can be taken.

Numerical results are presented for all three approaches, for different domains and conductivities, using exact as well as noisy Cauchy data, showing that a stable solution can be obtained with good accuracy and small computational cost.

**Key words:** elliptic equation with variable coefficients, parametrix (Levi function), indirect integral equations approach, boundary-domain integral equation, domain parameterization, Nyström method, planar boundary value problems, Cauchy problem.

*Наукові статті у вітчизняних фахових виданнях:*

1. Бешлей А. Про використання методу інтегральних рівнянь для розв'язування задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2018. – Вип.26. – С. 9-19.
2. Beshley A. On the numerical solution of a mixed boundary value problem for the elliptic equation with variable coefficients in doubly connected planar domains. / A. Beshley // Journal of Numerical and Applied Mathematics (Kyiv). – 2018. – Vol.2. – P.3-15.

*Наукові статті у закордонних виданнях:*

3. Beshley A. An integral equation method for the numerical solution of a Dirichlet problem for second order elliptic equations with variable coeffi-

cients. / A. Beshley, R. Chapko, B. T. Johansson // Journal of Engineering Mathematics. – 2018. – Vol.112, no. 1. – P. 63-73.

4. Beshley A. A boundary-domain integral equation method for an elliptic Cauchy problem with variable coefficients. / A. Beshley, R. Chapko, B. T. Johansson // In: Lindahl K., Lindström T., Rodino L., Toft J., Wahlberg P. (eds) Analysis, Probability, Applications, and Computation. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. – 2019. – P. 493-501.
5. Beshley A. On the alternating method and boundary-domain integrals for elliptic Cauchy problems. / A. Beshley, R. Chapko, B. T. Johansson // Computers & Mathematics with Applications. – 2019. – Vol.78, no. 11. – P. 3514-3526.

#### *Матеріали конференцій:*

6. Бешлей А. Про метод інтегральних рівнянь для задачі Діріхле з еліптичним рівнянням зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей, Р. Чапко // Матеріали IV науково-технічної конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, присвяченої пам’яті професора Б.О.Попова, Львів: ФМІ імені Г.В. Карпенка НАН України, 2016. – С. 16-20.
7. Бешлей А. Про застосування методу інтегральних рівнянь для задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей, Р. Чапко // Матеріали XXII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2016. – С. 31-34.
8. Beshley A. On the numerical solution of the Neumann problem for an elliptic equation with variable coefficients by an integral equation approach. / A. Beshley // Proceedings of the International Conference UCAM-2017



“Ukrainian Conference on Applied Mathematics”, Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2017. – P. 20-21.

9. Beshley A. An integral equation approach for numerical solution of elliptic equations with spacewise dependent coefficients. / A. Beshley, R. Chapko, B. T. Johansson // Abstract of the 11th ISAAC congress, 14-18 August 2017, Linnaeus University, Sweden, 2017. – P. 130.
10. Бешлей А. Чисельне розв’язування задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь. / А. Бешлей // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 55.
11. Бешлей А. Про чисельне розв’язування задачі Коші для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій”, Рівне: НУВГП, РДГУ, 2018. – С. 115-116.

## ЗМІСТ

<b>АНОТАЦІЯ</b>	<b>2</b>
<b>ВСТУП</b>	<b>12</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ</b>	<b>16</b>
1.1. Огляд фізичних явищ, що описуються еліптичним рівнянням зі змінними коефіцієнтами (ЕРЗК), та їх використання . . . . .	16
1.2. Основні математичні моделі для ЕРЗК. Прямі та обернені плоскі задачі . . . . .	18
1.3. Методи розв'язування ЕРЗК та їх аналіз . . . . .	20
Висновки до розділу 1 . . . . .	27
<b>РОЗДІЛ 2. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ ТА НЕЙМАНА В ОДНОЗВ'ЯЗНІЙ ОБЛАСТІ</b>	<b>28</b>
2.1. Задача Діріхле та її розв'язування . . . . .	28
2.1.1. Постановка задачі та зведення до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь . . . . .	28
2.1.2. Параметризація та виділення особливостей . . . . .	34
2.1.3. Дискретизація системи інтегральних рівнянь та апроксимація розв'язку . . . . .	39
2.2. Задача Неймана та її розв'язування . . . . .	44
2.2.1. Постановка задачі . . . . .	44
2.2.2. Параметризація системи інтегральних рівнянь . . . . .	47
2.2.3. Метод Нистрьома . . . . .	48
2.3. Чисельні експерименти . . . . .	50
Висновки до розділу 2 . . . . .	58

<b>РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МІШАНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ДВОЗВ'ЯЗНІЙ ОБЛАСТІ</b>	<b>60</b>
3.1. Задача Діріхле-Неймана та її наближене розв'язування . . . . .	60
3.1.1. Постановка задачі у двозв'язній області . . . . .	60
3.1.2. Параметризація та подання ядер . . . . .	62
3.1.3. Дискретизація системи IP . . . . .	64
3.2. Задача Неймана-Діріхле та її наближене розв'язування . . . . .	66
3.2.1. Постановка задачі та зведення до системи інтегральних рівнянь . . . . .	66
3.2.2. Параметризація системи інтегральних рівнянь . . . . .	68
3.2.3. Дискретизація системи IP . . . . .	69
3.3. Узагальнення для двозв'язної області . . . . .	72
3.4. Чисельні експерименти . . . . .	79
Висновки до розділу 3 . . . . .	89
<b>РОЗДІЛ 4. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ</b>	<b>91</b>
4.1. Постановка задачі Коші . . . . .	91
4.2. Метод інтегральних рівнянь для розв'язування задачі Коші (непрямий підхід) . . . . .	93
4.3. Альтернуючий метод . . . . .	99
4.4. Метод Ландвебера . . . . .	101
4.5. Чисельні експерименти . . . . .	102
Висновки до розділу 4 . . . . .	116
<b>ВИСНОВКИ</b>	<b>117</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	<b>118</b>
<b>ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА</b>	<b>133</b>

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Крайові задачі для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами виникають при математичному моделюванні різних фізичних процесів. Зокрема, особливий інтерес вони складають у таких прикладних застосуваннях як електрична імпедансна томографія (ЕІТ), контроль руйнування, геофізика тощо. Наявність у диференціальному рівнянні змінних коефіцієнтів приводить до труднощів при застосуванні ряду чисельних методів. У загальному випадку для таких крайових задач не вдається використати метод граничних інтегральних рівнянь, який має цілу низку безсумнівних переваг. Однак для певного класу еліптичних рівнянь, наприклад, тих, що виникають в ЕІТ, завдяки параметрикс функції (функції Леві) можна отримати гранично-просторові інтегральні рівняння. В результаті диференціальна задача редукується до системи інтегральних рівнянь, що дає можливість застосувати наявний досвід чисельного розв'язування інтегральних рівнянь з різними типами особливостей. Таким чином актуальність обраної теми дослідження не викликає сумнівів.

Загалом тема диференціальних задач для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами є менш дослідженою та розкритою у порівнянні із задачами для еліптичних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, частковим випадком яких, зокрема, є рівняння Лапласа чи Пуассона.

Розробкою алгоритмів для розв'язування таких задач у площині та просторі займалися Mikhailov [85–91], Chkadua [53–58], Clements [59, 60], Ang [20], Ayele [22–24], Dufera [62, 63], Babenko [1, 25] та інші.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота була виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка на кафедрі обчислювальної математики у рамках науково-дослідницької теми “Методи обчислювальної математики для прямих та обернених задач”

(державний реєстраційний номер 0113U001901).

**Мета та задачі дослідження.** Метою даної роботи є розробка і дослідження чисельних методів розв'язування гранично-просторових інтегральних рівнянь, що отримуються для коректних і некоректних крайових задач для рівняння еліптичного типу зі змінними коефіцієнтами в обмежених одна- та двозв'язних плоских областях.

**Об'єктом дослідження** є плоскі задачі для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами.

**Предметом дослідження** є чисельні методи для наближеного розв'язування плоских задач.

**Методами досліджень** є непрямий метод гранично-просторових інтегральних рівнянь, метод Нистрьома, метод Тіхонова, метод  $L$ -кривої, альтернуючий метод, метод Ландвебера.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у наступному:

1. Крайові задачі Діріхле та Неймана в однозв'язних плоских областях, мішані крайові задачі та задачу Коші у двозв'язних плоских областях для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами редуковано до систем гранично-просторових інтегральних рівнянь з різними типами особливостей за допомогою відповідних потенціалів.
2. Здійснено параметризацію отриманих інтегральних рівнянь та проаналізовано наявні особливості в ядрах. Розроблено чисельний метод квадратур для наближеного розв'язування систем інтегральних рівнянь шляхом зведення їх до систем лінійних алгебричних рівнянь.
3. Застосовано регуляризуючий метод Тіхонова з вибором параметра регуляризації методом  $L$ -кривої до системи лінійних рівнянь, отриманих при розв'язуванні задачі Коші.
4. Розроблено альтернуючий метод у поєднанні з гранично-просторовими

інтегральними рівняннями для наближеного розв'язування задачі Коші. Досліджено його збіжність. Розроблено метод Ландвебера у поєднанні з гранично-просторовими інтегральними рівняннями для наближеного розв'язування задачі Коші.

5. Здійснено програмну реалізацію всіх запропонованих методів і перевірено їх збіжність на значній кількості чисельних експериментів.

**Практичне значення отриманих результатів.** Отримані результати можуть бути використані у прикладних застосуваннях при наближеному розв'язуванні прямих і обернених задач ЕІТ. Також запропонований підхід зведення крайових задач для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами складає й теоретичний інтерес, а розроблені алгоритми чисельного розв'язування просторово-граничних інтегральних рівнянь є розвитком методів обчислювальної математики.

Одержані результати увійшли до звітів НДЧ Львівського національного університету імені Івана Франка (2018р.).

**Особистий внесок здобувача.** Результати, що виносяться на захист дисертації отримані автором самостійно. У публікаціях [36–38] Р. Хапко брав участь у постановці задач, обговоренні застосування функції Леві для зведення до систем інтегральних рівнянь та займався аналізом отриманих результатів. У працях [36–38] В. Т. Johansson займався оглядом існуючих методів розв'язування диференціальних задач, відповідав за структуру, зміст робіт та оформлення чисельних результатів, а також брав участь в обговоренні алгоритмів розв'язування інтегральних рівнянь. У роботах [36–38] здобувачеві належить застосування непрямого підходу інтегральних рівнянь, з використанням параметрикса для зведення диференціальних задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь, параметризація системи, виділення особливостей в ядрах, застосування дискретизації на основі методу Нистрьома та знаходження на-

ближеного розв'язку, використання регуляризації Тихонова і методу  $L$ -кривої, імплементація як прямих, так й ітераційних алгоритмів для чисельної апроксимації розв'язку, а також побудова всіх чисельних експериментів до відповідних розглянутих задач. Роботи [6, 34] написані здобувачем самостійно.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідались і обговорювались на наукових семінарах кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка протягом 2015-2019рр, на IV конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації” у Фізико-механічному інституті імені Г.В. Карпенка м.Львів у 2016р., на XXII Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” у Львівському національному університеті імені Івана Франка у 2016р., на міжнародній науковій конференції USAM в Львівському національному університеті імені Івана Франка у 2017р., на міжнародній конференції 11th ISAAC congress у Linnaeus University, Sweden у 2017 р., на Міжнародній конференції молодих математиків в Інституті математики НАН України, м. Київ у 2017р., на Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій” в НУВГП, РДГУ у м.Рівне у 2018р.

**Публікації.** Результати дисертації опубліковано в двох статтях [6, 34] у фахових виданнях із переліку, затвердженого ВАК України, у трьох статтях [36–38] у закордонних фахових журналах. Статті [36–38] входять до наукометричної бази даних Scopus, а [34] – до Web of Science. У матеріалах наукових конференцій опубліковано шість тез [2–5, 33, 35].

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається з таких структурних елементів: вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку зі списком публікацій здобувача. Загальний обсяг роботи становить 135 сторінок, містить 14 таблиць, 29 рисунків, 108 найменувань у списку використаних джерел.

## РОЗДІЛ 1

# ОГЛЯД КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

У цьому розділі буде розглянуто фізичні явища, що описуються еліптичним рівнянням зі змінними коефіцієнтами та їх застосування у різноманітних галузях. Також будуть представлені основні типи математичних моделей, що асоціюються з відповідними процесами. Детальний опис чисельних методів для розв'язування плоских задач, їх характеристика, недоліки та переваги буде наведено наприкінці розділу.

### 1.1. Огляд фізичних явищ, що описуються еліптичним рівнянням зі змінними коефіцієнтами (ЕРЗК), та їх використання

Крайові задачі для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами часто виникають під час моделювання різноманітних фізичних процесів, зокрема теплоперенесення, електростатики, дифузії для функціонально градуйованих матеріалів, а також потоку у пористих середовищах. Зазвичай, коефіцієнт (функція), що присутній у диференціальному операторі, відповідає за характеристики матеріалу (речовини, тіла) у цьому процесі. Для прикладу, такими характеристиками можуть бути електро-, гідро- чи теплопровідність. Рівняння зі змінними коефіцієнтами описують також стійкі потоки ґрунтових вод у неоднорідних середовищах за законом Дарсі чи у випадку електрики – модель гальванічної корозії у неоднорідних електролітах [52, 94].

Таке рівняння зустрічається, зокрема, і в електричній імпедансній томографії (ЕІТ) або просто імпедансній томографії – техніці медичної візуаліза-



ції, в якій провідність частини тіла визначається з електричних вимірювань на поверхні цього тіла. Метою імпедансної томографії є з'ясування електричного опору органів тіла (електричний опір інколи називають імпедансом). Одне з можливих застосувань ЕІТ полягає у спостереженні за пацієнтами після трансплантації органів. Наприклад відомо, що трансплантована нирка значно змінює свій електричний опір задовго до того, як відбувається відторгнення її тілом. Так, фізичний процес полягає в тому, що ми маємо тіло на якому прикріплені електроди; на деякі електроди подається струм, а на решті вимірюється напруга. Такі вимірювання повторюються доти, поки на всі електроди не буде подано струм. У такий спосіб спостерігаємо розподіл напруги на поверхні тіла, який викликаний електричним опором всередині тіла і через підведений струм. Більше деталей можна знайти в [77].

Застосування ЕІТ можна знайти в таких галузях:

- медицина (моніторинг функції легень, виявлення раку шкіри або раку молочної залози, візуалізація мозку) [77];
- геофізика (розташування підземних родовищ, виявлення витоків в підземних резервуарах для зберігання) [72, 73];
- контроль руйнування (визначення тріщин у матеріалах, діагностика функціонально градуйованих матеріалів) [105, 106].

Іншим прикладом фізичного явища, що описується еліптичним рівнянням зі змінними коефіцієнтами, є стаціонарна задача теплоперенесення в ізотропному неоднорідному середовищі для плоскої обмеженої області із заданими температурою та/чи тепловим потоком на межі цієї області. Присутність чи відсутність джерела тепла визначатиме однорідність основного диференціального рівняння. Для цього прикладу відомий коефіцієнт теплопровідності середовища є функцією, що залежить від координат. Цей приклад є спрощенням нестаціонарної задачі, що описується рівнянням дифузії. Нижче буде

детальніше описано математичні моделі для цих фізичних процесів.

## 1.2. Основні математичні моделі для ЕРЗК. Прямі та обернені плоскі задачі

Для початку розглянемо більш загальне рівняння зі змінними коефіцієнтами. Рівняння дифузії в ізотропному неоднорідному середовищі для обмеженої області  $D \subset \mathbb{R}^2$  має вигляд

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sigma(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \right] = f(x, t) + d(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad x \in D, \quad t > 0, \quad (1.2.1)$$

де  $u(x, t)$  – температура,  $\sigma(x)$  – відомий коефіцієнт теплопровідності,  $f(x, t)$  – джерело тепла,  $d(x, t)$  – відомий коефіцієнт дифузії, що може залежати, як від просторових координат, так і від часової змінної. Дане рівняння є лінійним параболічним рівнянням в часткових похідних другого порядку. Якщо джерело тепла відсутнє, то (1.2.1) можна переписати так

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{d(x, t)} \operatorname{div}(\sigma(x) \nabla u(x, t)), \quad x \in D, \quad t > 0, \quad (1.2.2)$$

де  $\operatorname{div}$  – оператор дивергенції,  $\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$  – оператор набла або градієнт (вектор часткових похідних по змінній  $x$ ).

У стаціонарному випадку, вважаючи що  $d$  є константою, це рівняння зводиться до

$$Lu := \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{в } D. \quad (1.2.3)$$

Розв'язування плоских задач для рівняння (1.2.3) є об'єктом дослідження в цій роботі. Надалі для (1.2.3) будемо використовувати скорочення ЕРЗК (еліптичне рівняння зі змінними коефіцієнтами). Зауважимо, що ЕРЗК називають також рівнянням провідності, рівнянням ЕІТ [77] або узагальненим рівнянням Лапласа [92, 101, 102]. Неоднорідне ЕРЗК називають стаціонарним рівнянням теплопровідності [16].

Для оператора  $L$ , як і для оператора Лапласа, можна записати відповідні формули Гріна [7]. Нехай область  $D$  обмежена гладкою замкненою межею  $\Gamma$ . Тоді, для довільних функцій  $u, v \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ ,  $\sigma \in C^\infty(\bar{D})$  справедливою є рівність

$$\int_D vLu \, dx = \int \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int_D \sigma \nabla u \nabla v \, dx. \quad (1.2.4)$$

Формулу (1.2.4) називають першою формулою Гріна. Провівши нескладні перетворення можна отримати другу формулу Гріна

$$\int_D \{vLu - uLv\} \, dx = \int \sigma \left\{ v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} \, dS. \quad (1.2.5)$$

Використовуючи термінологію з [76, 77], дві задачі будемо називати оберненими одна відносно іншій, якщо формулювання кожної з них вимагає повного чи часткового знання про розв'язок іншої. Зазвичай, більш досліджену задачу називають прямою, тоді, як іншу задачу називають оберненою, і яка часто є некоректною за Адамаром у сенсі відсутності стійкості розв'язку за вхідними даними.

У цій роботі буде розглянуто:

- прямі плоскі задачі в однозв'язних та двозв'язних областях (крайові задачі Діріхле, Неймана; мішані крайові задачі Діріхле-Неймана та Неймана-Діріхле);
- обернену задачу у двозв'язній області (задача Коші у двозв'язній області).

Математичною моделлю, що відповідає стаціонарній задачі теплоперенесення в ізотропному неоднорідному середовищі для двовимірної однозв'язної обмеженої області із заданою температурою на межі є крайова задача Діріхле. У випадку, коли на межі є відоме значення потоку ( $\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}$ ) – отримаємо задачу Неймана.

Мішані крайові задачі для двозв'язних областей полягають у знаходженні розподілу температури в області за відомими значеннями температури та теплового потоку на частині межі.

Основною оберненою задачею для ЕРЗК є задача імпедансної томографії, яка полягає у тому, що маючи виміряні значення  $u$  та потоку  $\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}$  на межі  $\Gamma$  потрібно знайти невідоме значення функції  $\sigma$  в  $D$ , про що йшлося раніше. Задача імпедансної томографії є прикладом задачі з параметром ідентифікації для диференціального рівняння в часткових похідних [77].

Іншою оберненою задачею, яку можна розглядати, аналогічно до випадку для рівняння Лапласа [46, 49], у двозв'язній області є задача Коші. У контексті задачі ЕІТ її можна трактувати так: за даними значеннями напруги та струму на зовнішній границі, а також відомим коефіцієнтом провідності, потрібно знайти розподіл напруги та струму на внутрішній границі.

### 1.3. Методи розв'язування ЕРЗК та їх аналіз

Одним зі способів розв'язування плоских задач для рівняння (1.2.3) є метод сіток, який полягає у побудові відповідних різницевих схем [10]. У цьому випадку площину покривають прямокутною сіткою та розглядають вузли, що належать області або лежать на межі (а також, можливо, вузли суміжні з ними), а диференціальний оператор замінюють на різницевий через наближення скінченними різницями на основі певного шаблону, що визначає порядок апроксимації. При цьому також потрібно враховувати крайові умови. Даний метод має перевагу у застосуванні для областей з простими конфігураціями межі (квадрат, прямокутник). Використання цього підходу для рівнянь зі змінними коефіцієнтами наведено, зокрема, в [31, 104].

Іншим способом, що часто використовується для розв'язування різноманітних задач є метод скінченних елементів (МСЕ). Ідея методу полягає в тому, що розв'язок подають у вигляді лінійної комбінації базисних функцій, при

цьому розглядають варіаційну постановку задачі, а саму область розбивають на елементи (триангулюють). Залежно від вигляду скінченних елементів та властивостей базисних функцій можна отримувати різні апросимаційні схеми. Застосування цього методу реалізовано в багатьох математичних пакетах, серед яких MATLAB та COMSOL. Модифікації МСЕ для розв'язування неоднорідного рівняння можна знайти в [28, 74].

Окремо можна виділити застосування теорії функції комплексної змінної. Так, у [19, 96] використано інтегральну формулу Коші для приведення до методу граничних елементів комплексної змінної та подальше розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь.

Загалом, для розв'язування еліптичних задач ефективним та добре дослідженим є метод граничних інтегральних рівнянь, який має ряд переваг порівняно з іншими чисельними методами. Однією з основних переваг є зменшення розмірності задачі. Для використання цього методу необхідно знати фундаментальний розв'язок, основні способи знаходження якого розглянуто в [41]. Фундаментальні розв'язки для деяких еліптичних рівнянь у часткових похідних наведені у [40, 61, 78, 95], проте у випадку ЕРЗК фундаментальний розв'язок можна знайти лише для деяких  $\sigma$ .

Для рівняння (1.2.3), де функція  $\sigma$  залежить лише від однієї просторової змінної було знайдено вигляд фундаментального розв'язку, що містить в собі ряд [59]. Однак, застосовність цього розв'язку залежить від збіжності ряду, яку було доведено лише для певного вигляду  $\sigma$  (деталі в [42]), а отже накладаються деякі обмеження. Згодом знаходження фундаментального розв'язку було розширено до класу рівнянь, де змінні коефіцієнти подаються у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї просторової змінної відмінної від іншої, тобто  $\sigma(x_1, x_2)$  можна подати як  $\sigma_1(x_1)\sigma_2(x_2)$  [20].

Ще одним варіантом є використання фундаментального розв'язку не для ЕРЗК, але до рівняння, до якого було зведено ЕРЗК, і для якого, відповідно, є відомий фундаментальний розв'язок [101, 102]. Перший крок у такій проце-

дурі полягає в уникненні перших часткових похідних невідомої функції після запису рівняння (1.2.3) через оператор Лапласа та скалярний добуток градієнтів. Наступним кроком є наближення перетвореного рівняння зі змінними коефіцієнтами до рівняння зі сталими. Проте, таке можливо здійснити лише в деяких випадках, а саме тоді, коли деяка допоміжна функція не сильно змінюється в області.

Отже, для заданого диференціального рівняння в часткових похідних зі змінними коефіцієнтами фундаментальний розв'язок загалом неможливо знайти в явному вигляді, а звідси, підходи на основі інтегральних рівнянь застосовуються значно рідше для таких задач.

Іншим методом, що використовується для розв'язування ЕРЗК є метод подвійного заміщення (МПЗ, англ. DRM - dual reciprocity method), розроблений Nardini, Brebbia у [93]. МПЗ був запропонований в задачах еластодинаміки, а згодом розширений і на інші типи задач. Даний підхід часто розглядають разом з методом граничних елементів (МГЕ) та називають методом граничних елементів з подвійним заміщенням (МГЕ-ПЗ, англ. DR-BEM – dual reciprocity-boundary element method). Основна його ідея в тому, що МГЕ застосовують не до основного рівняння, але до суміжного (переважно це рівняння Лапласа). Замість ЕРЗК розглядають рівняння Пуассона, де права частина рівності є так званою форсуючою функцією (англ. forcing function), яка може залежати від просторових змінних, змінної по часу чи функції, на яку діє оператор Лапласа (фактично, результат дії оператора Лапласа прирівнюють до форсуючої функції). Далі форсуючу функцію подають у вигляді лінійної комбінації деяких апроксимуючих функцій, які потрібно правильно підібрати. Часто їх обирають у вигляді радіальних базисних функцій (РБФ, англ. RBF – radial basis functions), що є узагальненнями кубічних сплайнів у багатовимірному випадку. По суті, МГЕ-ПЗ будує наближений розв'язок, як суму локальних часткових розв'язків [42]. Отже, загалом, для вхідного рівняння зі змінними коефіцієнтами, використовуючи фундаментальний розв'язок

для рівняння зі сталими коефіцієнтами, можна отримати граничне інтегральне рівняння.

Варто відзначити, що МПЗ використовують і для параболічних задач. Застосування МГЕ-ПЗ до ЕРЗК наведено в [72, 73]. Перевагою цього методу є уникнення обчислень подвійних інтегралів, а також достатність вхідних даних у дискретному вигляді, тобто значень в деяких точках. Недоліком є те, що в деяких випадках відшукування часткових розв'язків є складною задачею і для відомих функцій застосовують апроксимацію РБФ. Крім того, у випадку сильно неоднорідних середовищ для покращення точності потрібно значно збільшувати кількість вузлів, що призводить до витратності в застосуванні. Детальніше про МПЗ див. в [97, 100].

Описані вище методи намагаються уникнути обчислення подвійних інтегралів при зведенні диференціальної задачі до інтегрального рівняння, проте, можна розглядати загальний випадок, що не зменшує розмірність задачі, однак ставить у відповідність інтегральне рівняння (чи систему) з інтегралами по області. Тому, окрім фундаментального розв'язку, для задач зі змінними коефіцієнтами використовують так званий параметрикс [98]. У випадку еліптичних рівнянь другого порядку параметрикс також відомий як функція Леві [9]. Стратегія застосування другої формули Гріна (1.2.5) у поєднанні з функцією Леві для отримання гранично-просторових інтегральних (чи інтегро-диференціальних) рівнянь наведена в працях Al-Jawary, Mikhailov [17, 18, 53, 85, 86]. І хоча, загалом, у цих працях розглядають неоднорідне рівняння, основна ідея полягає у тому, що, підставляючи у другу формулу Гріна (1.2.5) уявно відомий фундаментальний розв'язок як функцію  $v$ , отримують третю тотожність Гріна, до якої, вже замість фундаментального розв'язку використовують параметрикс  $P$ , властивості якого будуть описані у наступному розділі. Отримана тотожність застосовується для формулювання гранично-просторового інтегрального (ГПІР) чи інтегро-диференціального рівняння.

Варто зазначити, що розглядають два типи ГПІР. ГПІР називають об'єднаним (англ. *united*), якщо невідома функція на границі є просто слідом функції з області, на противагу, так званому, відокремленому (англ. *segregated*) ГПІР, де невідомі граничні функції розглядають як формально незалежні (див. [87, 89]).

Далі, враховуючи крайові умови одержують відповідні системи інтегральних рівнянь. Один зі способів розв'язування таких систем полягає у дискретизації (триангуляції) області та застосуванні методу колокації, що приводить до повністю заповненої системи лінійних алгебричних рівнянь. Для обчислення подвійних інтегралів та уникнення в них слабкої особливості використовують перетворення Даффі (Duffy) [64].

Оскільки отримують повністю заповнену систему рівнянь, то для того, щоб зробити метод ефективним на рівні з МСЕ, де матриця є розріджена, вводять та використовують локалізовані параметрики (англ. *localized parameters*). Фактично, застосування модифікацій параметрика відбувається через множення на функцію, що забезпечить потрібні властивості, необхідні для розрідження матриці системи рівнянь. Деякі результати на основі такого підходу є наведені для задачі Неймана в [90].

У праці [89] дискретизація області здійснюється складнішими елементами (чотирикутниками). Подібно до апроксимації скінченними елементами невідома функція інтерполюється лінійною комбінацією наближених значень у деяких визначених вузлах та базисними функціями спеціального вигляду. Для обчислення подвійних інтегралів використовують квадратурні формули Гаусса-Лежандра та згадане раніше перетворення Даффі.

Окрім стандартних підходів для обчислення подвійних інтегралів та чисельного розв'язування ГПІР, можна також скористатись методом радіального інтегрування МРІ (англ. *radial integration method – RIM*), що був розроблений відносно нещодавно Гао [66]. Цей метод дає змогу обчислювати замість подвійних інтегралів граничні, і під час цієї трансформації усувати різні типи



особливостей. Перевагою цього методу є й те, що його кроки є універсальні та однотипні для різних подвійних інтегралів. Застосування цього методу є доволі поширеним, наприклад, див. [18, 65, 67, 68], зважаючи на його простоту. Корисним МРІ є для задач з неоднорідним ЕРЗК, де з використанням третьої формули Гріна у правій частині отримують подвійний інтеграл з відомою підінтегральною функцією, який можна легко звести до граничного інтеграла. Обмеженням МРІ є те, що у випадку невідомої функції під інтегралом, потрібно робити апроксимацію інтегранда деякими базисними функціями, наприклад РБФ.

У цій роботі пропонується використання непрямого методу інтегральних рівнянь з використанням теорії потенціалу та функції Леві. Такий підхід виглядає менш вивченим, ніж пов'язана з ним стратегія використання формул Гріна. Зазначимо, що приведення крайової задачі до ГПР не зменшує розмірність задачі, проте це приведення може бути корисним, оскільки воно включає інтегралі. Наприклад, у методах регуляризації для обернених некоректних задач, часто потрібно знайти і використовувати спряжений оператор. Маючи крайову задачу у вигляді інтегрального подання можна полегшити пошук спряженого оператора.

Для дискретизації та чисельної реалізації граничних інтегральних рівнянь успішно використовувався метод Нистрьома [45–47, 50, 78], тому в дисертації буде окреслено одну модифікацію такого методу, що є зручною та простою у комп'ютерній імплементації для відповідного гранично-просторового формулювання.

Крім коректних плоских крайових задач, основні методи розв'язування яких наведено вище, буде розглянуто також задачу Коші для ЕРЗК, яка полягає у знаходженні даних Коші на внутрішній границі за відомим значенням на зовнішній у випадку двозв'язної області. Задача Коші для еліптичних рівнянь є класичним прикладом некоректної оберненої проблеми. Некоректність задачі полягає у відсутності стійкості розв'язку за вхідними даними,

а отже необхідна регуляризація. Так, наприклад, у [46] продемонстровано регуляризуючий метод з використанням потенціалу простого шару для отримання стійкого чисельного розв'язку задачі Коші для рівняння Лапласа у випадку двовимірних та тривимірних областей. Цей метод побудований на основі ідей наведених у [43, 80]. У [14] досліджено складність проєкційних методів для некоректних задач. У дисертації буде розглянуто в певній мірі продовження роботи [46] через розгляд рівняння з просторово залежними коефіцієнтами (ЕРЗК замість рівняння Лапласа) та використання параметрикс-потенціалів у непрямому методі разом з регуляризацією Тіхонова.

Ще одним методом для розв'язування задачі Коші є альтернуючий ітераційний метод [12], який може бути застосовано для розв'язування деяких некоректних задач, зокрема для задачі Коші для самоспряжених строго еліптичних операторів. Чисельні реалізації альтернуючого методу для задачі Коші на даний момент було здійснено лише для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, наприклад, див. [26, 32]. Загалом, будь-який стандартний спосіб дискретизації області може бути застосовано для чисельного розв'язування мішаних крайових задач, що з'являються на кожному кроці ітераційного процесу. В альтернуючому методі отримується послідовність наближень невідомих функцій на внутрішній границі, і на кожній ітерації лише дані на межі потребують оновлення. Тому, для рівнянь зі сталими коефіцієнтами вигідно використовувати метод інтегральних рівнянь для розв'язування цих мішаних задач, оскільки так ми зменшуємо розмірність задачі, див. [39, 82].

У дисертації для чисельного розв'язування мішаних крайових задач для ЕРЗК буде наведено метод інтегральних рівнянь, де, використовуючи концепцію параметрикса, задача зводиться до системи ГПІР з невідомими густинами на границі та в області. Розроблений підхід добре підходить для застосування у поєднанні з альтернуючим методом, оскільки через подання розв'язку у вигляді суми параметрикс-потенціалів на кожній ітерації, маємо явні вирази для розв'язку на внутрішній границі.

Іншим ітераційним регуляризуючим методом, що застосовується для розв'язування задачі Коші є метод Ландвебера [49, 81]. На кожному кроці цього методу також розв'язуються дві мішані крайові задачі. Для використання цього методу потрібно мати інформацію про спряжений оператор до оператора задачі Коші. У роботі буде розглянуто схему методу Ландвебера для ЕРЗК та її чисельну реалізацію.

## **Висновки до розділу 1**

У цьому розділі було зроблено короткий огляд основних фізичних явищ для ЕРЗК та наведено відповідні математичні моделі для плоских задач. Розглянуто основні методи розв'язування таких диференціальних задач, що, зокрема, приводять до роботи над еквівалентною системою інтегральних рівнянь. Запропоновано новий підхід на основі використання функції Леві і відповідних параметрикс-потенціалів.

## РОЗДІЛ 2

# ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ ТА НЕЙМАНА В ОДНОЗВ'ЯЗНІЙ ОБЛАСТІ

У даному розділі розглянемо чисельне розв'язування внутрішніх крайових задач Діріхле та Неймана для ЕРЗК в однозв'язній області. У підрозділі 2.1 розглянуто крайову задачу Діріхле. Використовуючи поняття параметрикса, її зведено до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь, яку потрібно розв'язати для двох невідомих густин. Через заміну змінних у подвійних інтегралах, де використано гомотетичне стиснення граничної кривої області, отримано параметризовану систему інтегральних рівнянь. Для використання квадратурних формул виділено особливості у відповідних ядрах, для повної дискретизації системи застосовано метод Нистрьома, а також наведено подання наближеного розв'язку в області. Подібний алгоритм знаходження наближеного розв'язку для задачі Неймана наведено у підрозділі 2.2. Чисельні експерименти для обох задач для різних вхідних даних, включно з відповідними похибками в області, наведено у підрозділі 2.3.

### 2.1. Задача Діріхле та її розв'язування

#### 2.1.1. Постановка задачі та зведення до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь

Нехай  $D \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена однозв'язна область з межею  $\Gamma \in C^2$ . Розглянемо внутрішню крайову задачу Діріхле для еліптичного рівняння (1.2.3), а саме

$$\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(x)) = 0, \quad x \in D, \quad (2.1.1)$$

$$u = f \text{ на } \Gamma, \quad (2.1.2)$$

де  $\sigma \in C^\infty(\overline{D})$ ,  $\sigma > 0$  і  $f \in C(\Gamma)$  – задані функції,  $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$  – шукана функція.

**Теорема 2.1.1.** *Задача Діріхле (2.1.1)-(2.1.2) має не більше одного розв'язку.*

*Доведення.* Доведення на основі принципу максимуму (див. [9, с. 17]).  $\square$

**Теорема 2.1.2.** *Для  $f \in C(\Gamma)$  задача Діріхле (2.1.1)-(2.1.2) має єдиний розв'язок.*

*Доведення.* Див. [69, т. 6.13].  $\square$

Оскільки, загалом, явного вигляду фундаментального розв'язку для основного диференціального рівняння (2.1.1) немає, окрім випадків, коли  $\sigma$  є сталою, то немає і способу, щоб звести крайову задачу (2.1.1)-(2.1.2) до граничного інтегрального рівняння. Проте, для рівняння (2.1.1) можна використати альтернативу – так званий параметрикс.

Для визначення параметрикса, а згодом і відповідних потенціалів, будемо вважати, що  $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  та  $\sigma > 0$ .

**Означення 2.1.3.** *Функція  $P(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , називається параметриксом (або функцією Леві) диференціального оператора  $L$ , якщо*

$$L_x P(x, y) = \delta(x - y) + R(x, y),$$

де  $\delta$  – дельта-функція Дірака і функція залишку  $R$  має слабку особливість при  $x = y$ .

Для оператора в (2.1.1) функцію Леві можна взяти у вигляді

$$P(x, y) = \frac{\ln|x - y|}{2\pi\sigma(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y. \quad (2.1.3)$$

У цьому випадку функція залишку є такою

$$R(x, y) = \frac{(x - y) \cdot \nabla\sigma(x)}{2\pi\sigma(y)|x - y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y. \quad (2.1.4)$$

**Зауваження 2.1.4.** У формулі (2.1.4) і далі, символ “ $\cdot$ ” позначає скалярний добуток двох елементів у  $\mathbb{R}^2$ .

Даний вигляд функції Леві та детальне знаходження функції залишку можна знайти в [9, 16].

**Зауваження 2.1.5.** Відзначимо, що функція Леві не є єдиною. Зокрема, як функцію Леві можна взяти

$$P(x, y) = \frac{\ln |x - y|}{2\pi\sigma(x)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y \quad (2.1.5)$$

з відповідною функцією залишку

$$R(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \ln \sigma(x)}{\partial x_i} \ln |x - y| \right), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y. \quad (2.1.6)$$

**Означення 2.1.6.** Функції

$$v(x) = \int \psi(y)P(x, y)ds(y), \quad x \in D, \quad (2.1.7)$$

$$w(x) = \int_D \mu(y)P(x, y)dy, \quad x \in D, \quad (2.1.8)$$

будемо називати параметрикс-потенціалом простого шару та об'ємним параметрикс-потенціалом рівняння (2.1.1) з густинами  $\psi \in C(\Gamma)$  і  $\mu \in C(D)$ , відповідно.

**Теорема 2.1.7.** Потенціали (2.1.7), (2.1.8) мають такі властивості:

1. Нехай  $\Gamma \in C^2$ ,  $\psi \in C(\Gamma)$ . Параметрикс-потенціал простого шару  $v$  з густиною  $\psi$  є неперервним в  $\mathbb{R}^2$ . На межі маємо

$$v(x) = \int \psi(y)P(x, y)ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (2.1.9)$$

де інтеграл існує як невластивий;

2. Нехай  $\Gamma \in C^2$ ,  $\psi \in C(\Gamma)$ . Тоді для параметрикс-потенціалу простого шару  $v$  з густиною  $\psi$  справедливою є формула

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \pm \frac{1}{2} \frac{\psi(x)}{\sigma(x)} + \int \psi(y) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (2.1.10)$$

де інтеграл існує як невласний;  $v_+$  – функція поза областю  $D$ , тобто в  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ,  $v_-$  – функція в області  $D$ ;

3. Для об'ємного параметрикс-потенціалу  $w$  виконується така рівність

$$Lw(x) = \mu(x) + \int_D \mu(y) R(x, y) dy, \quad x \in D; \quad (2.1.11)$$

*Доведення.* 1. Введемо нову густину  $\tilde{\psi} = -\frac{\psi(y)}{\sigma(y)}$  у (2.1.7). Тоді можна записати, що

$$v(x) = \int \psi(y) P(x, y) ds(y) = \int \tilde{\psi}(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D,$$

де  $\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}$  – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа. Інтеграл з густиною  $\tilde{\psi}$  є потенціалом простого шару для рівняння Лапласа, який можна неперервно продовжити на  $\Gamma$  (див. [78]).

2. Формула стрибків нормальної похідної параметрикс-потенціалу простого шару (2.1.10) отримується з теореми про стрибки для нормальної похідної потенціалу простого шару (див. [78]) з використанням густини  $-\frac{\psi(y)}{\sigma(y)}$ .
3. Впливає з означення параметрикса та властивостей дельта-функції.

□

**Зауваження 2.1.8.** Для  $\sigma = 1$  розв'язок задачі можна подати у вигляді потенціалу (2.1.7). Однак для деяких кривих  $\Gamma$  існують розв'язки, що не мають подання через потенціал простого шару. Це питання зводиться до того чи відмінна від нуля стала в  $D$  має подання у формі (2.1.7). Це має місце, якщо логарифмічна ємність  $\Gamma$  відмінна від 1 (див. [103, 108]).

Отже, в подальшому (для задач Діріхле та Неймана) будемо вважати, що межа  $\Gamma$  має логарифмічну ємність не рівну одиниці. Відомо [75], що в цьому випадку однорідне граничне інтегральне рівняння

$$\int \psi(y)P(x, y)ds(y) = 0, \quad x \in \Gamma$$

має лише тривіальний розв'язок.

**Теорема 2.1.9.** *Розв'язок задачі (2.1.1)–(2.1.2) можна подати у вигляді*

$$u(x) = \int_D \mu(y)P(x, y)dy + \int \psi(y)P(x, y)ds(y), \quad x \in D, \quad (2.1.12)$$

де густини визначаються зі системи гранично-просторових інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \mu(x) + \int_D \mu(y)R(x, y)dy + \int \psi(y)R(x, y)ds(y) = 0, & x \in D, \\ \int_D \mu(y)P(x, y)dy + \int \psi(y)P(x, y)ds(y) = f(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (2.1.13)$$

*Доведення.* Підставляючи подання розв'язку у диференціальне рівняння та крайову умову і враховуючи властивості параметрикс-потенціалу простого шару та об'ємного параметрикс-потенціалу, отримуємо систему гранично-просторових інтегральних рівнянь (2.1.13).  $\square$

Даний підхід можна трактувати як непрямий метод інтегральних рівнянь, на відміну від прямого, що полягає у використанні формули Гріна [53, 62, 85, 86]. Для випадку функції Леві (2.1.6) теоретичні результати наведено в [99].

**Теорема 2.1.10.** *Система IP (2.1.13) має не більше одного розв'язку.*

*Доведення.* Від супротивного. Оскільки система рівнянь є лінійною, нам достатньо показати, що при  $f = 0$  система (2.1.13) має лише тривіальний розв'язок. Скористаємось міркуваннями з [98, с. 51]. Нехай  $\tilde{L}$  – еліптичний



диференціальний оператор, для якого функція Леві  $P$  (2.1.3) є фундаментальним розв'язком, тобто  $\tilde{L}_x P(x, y) = \delta(|x - y|)$ . З єдиності розв'язку задачі Діріхле (теорема 2.1.2) маємо, що  $u = 0$  в  $D$ . Подіємо оператором  $\tilde{L}$  на (2.1.12). Очевидно, тоді маємо

$$0 = \int_D \mu(y) \tilde{L}_x P(x, y) dy + \int \psi(y) \tilde{L}_x P(x, y) ds(y), \quad x \in D.$$

Отже,  $\mu = 0$  в  $D$ . В результаті отримуємо однорідне граничне інтегральне рівняння і, відповідно, до вищезазначеного припущення про  $\Gamma$ , маємо, що й  $\psi = 0$ .  $\square$

**Теорема 2.1.11.** Для  $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$  система IP (2.1.13) має єдиний розв'язок  $\mu \in C(D)$ ,  $\psi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ .

*Доведення.* Розглянемо спершу граничний інтегральний оператор

$$(P \cdot \psi)(x) = \int \psi(y) P(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma.$$

При введених обмеженнях на  $\Gamma$  оператор  $P \cdot : C^{0,\alpha}(\Gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\Gamma)$  має обмежений обернений (див. [75]). Введемо оператори

$$(R^D \mu)(x) = \int_D \mu(y) R(x, y) dy, \quad x \in D,$$

$$(R \cdot \psi)(x) = \int \psi(y) R(x, y) ds(y), \quad x \in D,$$

і

$$(P^D \mu)(x) = \int_D \mu(y) P(x, y) dy, \quad x \in \Gamma.$$

Систему IP (2.1.13) можна подати у такому операторному вигляді

$$(I + A)\phi = F,$$

де  $\phi = (\mu, \psi)^\top$ ,  $F = (0, (P \cdot)^{-1} f)^\top$ ,  $A = \begin{pmatrix} R^D & R \cdot \\ (P \cdot)^{-1} P^D & I \end{pmatrix}$ . Так, як оператор  $A$  є компактним у відповідних просторах, то з теорії Рісса отримуємо коректність нашої системи IP.  $\square$

### 2.1.2. Параметризація та виділення особливостей

Вважаємо, що межа  $\Gamma$  має таке параметричне подання

$$\Gamma = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t)), t \in \mathbb{R}\}, \quad (2.1.14)$$

де  $x_k \in C_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, 2$ ,  $|x'(t)| > 0$ . Нехай  $D$  містить початок координат і будь-який промінь, що виходить звідти, перетинає межу області лише один раз. Визначимо  $D^* = D \setminus \{(0, 0)\}$ . Тоді для  $D^*$  існує взаємнооднозначне відображення

$$p(\eta, t) = (p_1(\eta, t), p_2(\eta, t)) = (\eta x_1(t), \eta x_2(t)) : \Pi \rightarrow D^*,$$

де  $\Pi = (0, 1) \times [0, 2\pi)$ . Здійснимо параметризацію гранично-просторового інтегрального рівняння в (2.1.13) через заміну змінних  $y = p(\xi, \tau)$  та  $x = p(\eta, t)$ , і граничного інтегрального рівняння в (2.1.13), враховуючи, що  $y = x(\tau)$  і  $x = x(t)$ . Тоді систему (2.1.13) можна переписати в еквівалентній формі з відповідними параметрами

$$\begin{cases} \varphi(\eta, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \hat{R}(\eta, t; \tau) d\tau = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \check{P}(t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \check{P}(t; \tau) d\tau = \tilde{f}(t), \end{cases} \quad (2.1.15)$$

де  $(\eta, t) \in \Pi$  та  $t \in [0, 2\pi)$ .

Тут  $\varphi(\eta, t) = \mu(p(\eta, t))$ ,  $\varphi_0(t) = \psi(x(t))|x'(t)|/\sigma(x(t))$ ,  $\tilde{f}(t) = f(x(t))$ , якобіан перетворення має вигляд

$$J(\xi, \tau) = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} & \frac{\partial p_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \xi} & \frac{\partial p_2}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \xi(x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x_1'(\tau)), \quad (2.1.16)$$

та ядра є задані як

$$\tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) = 2\pi R(p(\eta, t), p(\xi, \tau))J(\xi, \tau), \quad (2.1.17)$$

$$\widehat{R}(\eta, t; \tau) = 2\pi R(p(\eta, t), x(\tau))\sigma(x(\tau)), \quad (2.1.18)$$

$$\check{P}(t; \xi, \tau) = 2\pi P(x(t), p(\xi, \tau))J(\xi, \tau), \quad (2.1.19)$$

$$\check{P}(t; \tau) = 2\pi P(x(t), x(\tau))\sigma(x(\tau)). \quad (2.1.20)$$

Перепишемо ці ядра, явно виділяючи особливості, для подальшого застосування квадратурних формул.

Запишемо спочатку явний вигляд ядра  $\widetilde{R}$  при  $\eta = \xi$ :

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(\eta, t; \eta, \tau) &= 2\pi R(p(\eta, t), p(\eta, \tau))J(\eta, \tau) = \\ &= \frac{(p(\eta, t) - p(\eta, \tau)) \cdot \nabla\sigma(p(\eta, t))}{\sigma(p(\eta, \tau))|p(\eta, t) - p(\eta, \tau)|^2} J(\eta, \tau) = \frac{(\eta x(t) - \eta x(\tau)) \cdot \nabla\sigma(\eta x(t))}{\sigma(\eta x(\tau))|\eta x(t) - \eta x(\tau)|^2} J(\eta, \tau). \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$|\eta x(t) - \eta x(\tau)|^2 = \eta^2 |x(t) - x(\tau)|^2$$

отримаємо

$$\widetilde{R}(\eta, t; \eta, \tau) = \frac{(x(t) - x(\tau)) \cdot \nabla\sigma(\eta x(t))}{\eta\sigma(\eta x(\tau))|x(t) - x(\tau)|^2} J(\eta, \tau). \quad (2.1.21)$$

**Зауваження 2.1.12.** Функція  $R$  мала слабку (інтегровну) особливість значаючись під подвійним інтегралом по області  $D$ . Після параметризації ми аналізуємо цю функцію для фіксованих  $\eta$  на кривих, розміщених в  $D$ . Очевидно, що тоді в  $R$  є сильна особливість.

**Теорема 2.1.13.** Ядро  $\widetilde{R}(\eta, t; \eta, \tau)$ , визначене в (2.1.21), можна подати у вигляді

$$\widetilde{R}(\eta, t; \eta, \tau) = \widetilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) + \widetilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) \cot \frac{\tau - t}{2} \quad (2.1.22)$$

з гладкими ядрами

$$\begin{aligned} \widetilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) &= \frac{\nabla\sigma(\eta x(t)) \cdot \nu(x(t))K_1(t, \tau)}{\eta\sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau) - \\ &- \frac{1}{|x'(t)|} \frac{\nabla\sigma(\eta x(t)) \cdot \theta(x(t))K_2(t, \tau)}{\eta\sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau), \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

та

$$\tilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) = -\frac{1}{2|x'(t)|} \frac{\nabla\sigma(\eta x(t)) \cdot \theta(x(t))}{\eta\sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau), \quad (2.1.24)$$

де  $\theta$  – одиничний вектор дотичної і  $\nu$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до  $\Gamma$ . Тут

$$K_1(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x(t) - x(\tau)) \cdot \nu(x(t))}{|x(t) - x(\tau)|^2}, & \text{якщо } t \neq \tau, \\ \frac{-x_2'(t)x_1''(t) + x_1'(t)x_2''(t)}{2|x'(t)|^3}, & \text{якщо } t = \tau, \end{cases}$$

та

$$K_2(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot x'(t)}{|x(t) - x(\tau)|^2} - \frac{\sin(\tau - t)}{2(1 - \cos(\tau - t))}, & \text{якщо } t \neq \tau, \\ \frac{x'(t) \cdot x''(t)}{2|x'(t)|^2}, & \text{якщо } t = \tau. \end{cases}$$

*Доведення.* Виділимо сильну особливість в ядрі  $\tilde{R}(\eta, t; \eta, \tau)$ , використовуючи подання вектор-функції, визначеної на  $\Gamma$ , через її тангенціальну та нормальну складові, тобто через вектори дотичної та нормалі до цієї границі.

Крива  $\Gamma$ , задана (2.1.14), є такою, що існують визначений одиничний вектор дотичної  $\theta$  (орієнтований у порядку зростання параметра  $t$  кривої  $\Gamma$ ) і одиничний вектор зовнішньої нормалі  $\nu$ . Тоді вектор-функція  $\omega$ , визначена на  $\Gamma$ , може бути подана так

$$\omega = (\omega \cdot \nu)\nu + (\omega \cdot \theta)\theta.$$

Зокрема, обираючи  $\omega$  як градієнт, отримаємо

$$\nabla\sigma = (\nabla\sigma \cdot \nu)\nu + (\nabla\sigma \cdot \theta)\theta.$$

Інтеграл від  $\tilde{R}$  у (2.1.15) по змінній  $\tau$  відповідає за інтегрування по кривій, визначеній параметром  $\xi$ . Звідси, використовуючи наведений вище розклад вектор-функції, та те, що

$$\nabla_{x(t)} \ln |x(t) - x(\tau)| = \frac{x(t) - x(\tau)}{|x(t) - x(\tau)|^2},$$

ми можемо записати таку тотожність

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{(x(t) - x(\tau)) \cdot \nabla \sigma(x(t))}{|x(t) - x(\tau)|^2} d\tau = -\nabla \sigma(x(t)) \cdot \nabla \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln |x(t) - x(\tau)| d\tau = \\
& -\nabla \sigma(x(t)) \cdot \left( \nu(x(t)) \frac{\partial}{\partial \nu(x(t))} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln |x(t) - x(\tau)| d\tau + \right. \\
& \left. + \theta(x(t)) \frac{\partial}{\partial \theta(x(t))} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln |x(t) - x(\tau)| d\tau \right) = I_1(t) + I_2(t).
\end{aligned}$$

Другий інтеграл  $I_2$  розуміється в сенсі головного значення Коші, з якого можна виділити вагову функцію, використовуючи перетворення, наведені в [79], зокрема, додати та відняти  $\frac{\sin(\tau-t)}{2(1-\cos(\tau-t))}$ . Звідси, справедливими є такі перетворення

$$\begin{aligned}
& -\nabla \sigma(x(t)) \cdot \left( \theta(x(t)) \frac{\partial}{\partial \theta(x(t))} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln |x(t) - x(\tau)| d\tau \right) = \\
& -\frac{\nabla \sigma(x(t)) \cdot x'(t)}{|x'(t)|^2} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{(x(t) - x(\tau)) \cdot x'(t)}{|x(t) - x(\tau)|^2} d\tau; \\
& f(\tau) \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot x'(t)}{|x(t) - x(\tau)|^2} d\tau \pm f(\tau) \frac{\sin(\tau - t)}{2(1 - \cos(\tau - t))} = \\
& \underbrace{f(\tau) \left( \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot x'(t)}{|x(t) - x(\tau)|^2} - \frac{\sin(\tau - t)}{2(1 - \cos(\tau - t))} \right)}_{\text{гладка}} + f(\tau) \frac{\sin(\tau - t)}{2(1 - \cos(\tau - t))};
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{\sin(\tau - t)}{2(1 - \cos(\tau - t))} d\tau = \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{2 \sin \frac{\tau-t}{2} \cos \frac{\tau-t}{2}}{4 \left( \sin^2 \left( \frac{\tau-t}{2} \right) \right)} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cot \frac{\tau - t}{2} d\tau.$$

Враховуючи наведені вище перетворення, можна подати ядро  $\tilde{R}(\eta, t; \eta, \tau)$  у вигляді

$$\tilde{R}(\eta, t; \eta, \tau) = \tilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) + \tilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) \cot \frac{\tau - t}{2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) = & \frac{\nabla\sigma(\eta x(t)) \cdot \nu(x(t)) K_1(t, \tau)}{\eta\sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau) - \\ & - \frac{1}{|x'(t)|} \frac{\nabla\sigma(\eta x(t)) \cdot \theta(x(t)) K_2(t, \tau)}{\eta\sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau), \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

та

$$\tilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) = -\frac{1}{2|x'(t)|} \frac{\nabla\sigma(\eta x(t)) \cdot \theta(x(t))}{\eta\sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau), \quad (2.1.26)$$

де

$$K_1(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x(t) - x(\tau)) \cdot \nu(x(t))}{|x(t) - x(\tau)|^2}, & \text{якщо } t \neq \tau, \\ \frac{-x_2'(t)x_1''(t) + x_1'(t)x_2''(t)}{2|x'(t)|^3}, & \text{якщо } t = \tau, \end{cases}$$

$$K_2(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot x'(t)}{|x(t) - x(\tau)|^2} - \frac{\sin(\tau - t)}{2(1 - \cos(\tau - t))}, & \text{якщо } t \neq \tau, \\ \frac{x'(t) \cdot x''(t)}{2|x'(t)|^2}, & \text{якщо } t = \tau. \end{cases}$$

□

Зауважимо, що ядра  $\tilde{R}^{(1)}$  і  $\tilde{R}^{(2)}$  мають також особливість при  $\eta = 0$ . Ця особливість буде нами врахована через вибір квадратурної формули по змінній  $\eta$ .

Ядро  $\check{P}$ , визначене формулою (2.1.20), має логарифмічну особливість, яку виділимо явно для подальшого використання відповідних квадратурних формул.

**Теорема 2.1.14.** *Ядро  $\check{P}$  можна подати у такій формі*

$$\check{P}(t, \tau) = \check{P}^{(1)} \ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}\right) + \check{P}^{(2)}(t, \tau) \quad (2.1.27)$$

$$\check{P}^{(2)}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{|x(t) - x(\tau)|^2}{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}, & \text{якщо } t \neq \tau, \\ \frac{1}{2} \ln (e|x'(t)|^2), & \text{якщо } t = \tau \end{cases}$$

$$ma \check{P}^{(1)} = \frac{1}{2}.$$

*Доведення.* Для виділення цієї особливості використано підхід, описаний в [78, Chapter 12.3].  $\square$

Ядра без особливостей мають такий вигляд:

$$\tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) = \frac{(\eta x(t) - \xi x(\tau)) \cdot \nabla \sigma(\eta x(t))}{\sigma(\xi x(\tau)) |\eta x(t) - \xi x(\tau)|^2} J(\xi, \eta), \quad \eta \neq \xi, \quad (2.1.28)$$

$$\hat{R}(\eta, t; \tau) = \frac{(\eta x(t) - x(\tau)) \cdot \nabla \sigma(\eta x(t))}{|\eta x(t) - x(\tau)|^2}, \quad (2.1.29)$$

$$\check{P}(t; \xi, \tau) = \frac{\ln |x(t) - \xi x(\tau)|}{\sigma(\xi x(\tau))} J(\xi, \tau). \quad (2.1.30)$$

### 2.1.3. Дискретизація системи інтегральних рівнянь та апроксимація розв'язку

Розглянемо такі квадратурні формули побудовані на основі інтерполяції підінтегральної функції та подальшого точного інтегрування

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} g(\xi, \tau) d\tau d\xi \approx \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{2n-1} \alpha_k g(\eta_k, t_i), \quad (2.1.31)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} g(\xi, \tau) \cot \frac{\tau - t}{2} d\tau d\xi \approx \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{2n-1} \alpha_k T_i(t) g(\eta_k, t_i), \quad (2.1.32)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k), \quad (2.1.33)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) d\tau \approx \sum_{k=0}^{2n-1} F_k(t) f(t_k), \quad (2.1.34)$$

з квадратурними вагами  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  та квадратурними вузлами  $\eta_k \in (0, 1)$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $t_j = \frac{j\pi}{n}$ ,  $j = 0, \dots, 2n - 1$ ,  $N, n \in \mathbb{N}$ , і ваговими функціями

$$F_k(t) = -\frac{1}{2n} \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t - t_k) + \frac{1}{n} \cos n(t - t_k) \right),$$

$$T_k(t) = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sin m(t - t_k) - \frac{1}{2n} \sin n(t - t_k).$$

Зокрема, квадратури (2.1.33), (2.1.34) визначені для  $2\pi$ -періодичних функцій. Формула (2.1.33) є складеною формулою трапецій, тоді, як (2.1.34) отримано заміною неперервної підінтегральної функції  $f$  її тригонометричним інтерполяційним поліномом з подальшим точним інтегруванням для отримання квадратурних вагових функцій  $F_k$ . У випадку аналітичних функцій дані квадратурні формули мають експоненційний порядок збіжності.

Кубатурні формули (2.1.31), (2.1.32) наближено обчислюють повторні інтеграли, де межі для змінних інтегрування  $\xi$  та  $\tau$  визначені в  $\Pi$ , і окрім цього підінтегральна функція  $g \in 2\pi$ -періодичною по змінній  $\tau$ . Для отримання формули (2.1.31) послідовно використовуємо складені квадратури для знаходження одновимірного визначеного інтеграла по змінній  $\xi$  та по змінній  $\tau$ . Так, для змінної  $\xi$  застосовуємо квадратуру з  $N$  вузлами, що належать інтервалу  $(0, 1)$ . Далі використовуємо складену формулу трапецій (2.1.33) по змінній  $\tau$ . Кубатуру (2.1.32) отримано подібно до (2.1.31) лише з тією відмінністю, що по змінній  $\tau$  функція інтерполюється тригонометричним поліномом і для знаходження ваг точно обчислюються інтеграли від добутку базисних функцій на  $\cos \frac{\tau-t}{2}$ . Вигляд вагових функцій  $T_k$  можна знайти в [25]. Похибка та збіжність кубатурних формул (2.1.31), (2.1.32) залежить від вибору квадратурної формули для змінної  $\xi$  та гладкості функції  $g$  по змінних  $\xi$  та  $\tau$ . Надалі для формул (2.1.31), (2.1.32) також будемо вживати термін “квадратурні формули”.

Ми будемо використовувати квадратуру середніх прямокутників для інте-



гралів по змінній  $\xi$ , тоді як для змінної  $\tau$  застосовуємо квадратурні формули для інтегрування  $2\pi$ -періодичних функцій, оскільки  $\tau$  відповідає за інтегрування на кривій в області розв'язку.

Застосовуючи квадратурні формули (2.1.31)-(2.1.34) до (2.1.15), з врахуванням виділених особливостей у відповідних ядрах, отримуємо таку систему апроксимаційних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(\eta, t) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \bar{R}(\eta, t; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \hat{R}(\eta, t; t_j) = 0, \\ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \check{P}(t; \eta_k, t_j) + \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \left[ \check{P}^{(1)} F_j(t) + \frac{1}{2n} \check{P}^{(2)}(t; t_j) \right] = \tilde{f}(t), \end{array} \right. \quad (2.1.35)$$

де  $(\eta, t) \in \Pi$ ,  $\tilde{\varphi}(\eta, t) \approx \varphi(\eta, t)$ ,  $\tilde{\varphi}_0(t) \approx \varphi_0(t)$ ,  $\varphi_{kj} = \tilde{\varphi}(\eta_k, t_j)$ ,  $\varphi_{0j} = \tilde{\varphi}_0(t_j)$  і

$$\bar{R}(\eta, t; \eta_k, t_j) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \tilde{R}(\eta, t; \eta_k, t_j), & \text{якщо } \eta \neq \eta_k, \\ \frac{1}{2n} \tilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta_k, t_j) + T_j(t) \tilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta_k, t_j), & \text{якщо } \eta = \eta_k. \end{cases}$$

Колокуючи апроксимаційні рівняння (2.1.35) у відповідних квадратурних вузлах  $(\eta_m, t_i)$ ,  $m = 1, \dots, N$ ,  $i = 0, \dots, 2n - 1$ , отримуємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \varphi_{0j} A_{0j}^{mi} + \sum_{k=1}^N \varphi_{kj} \left[ \delta_{ij}^{(mk)} + A_{kj}^{mi} \right] \right) = 0, \quad m = 1, \dots, N, \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{k=0}^N \varphi_{kj} A_{kj}^{0i} = \tilde{f}_i, \quad i = 0, \dots, 2n - 1, \end{array} \right. \quad (2.1.36)$$

з матрицею розмірності  $(N + 1)2n \times (N + 1)2n$ , коефіцієнтами

$$A_{0j}^{mi} = \frac{1}{2n} \hat{R}(\eta_m, t_i; t_j),$$

$$A_{kj}^{0i} = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{2n} \check{P}(t_i; \eta_k, t_j), & k = 1, \dots, N, \\ \check{P}^{(1)} F_j(t_i) + \frac{1}{2n} \check{P}^{(2)}(t_i, t_j), & k = 0, \end{cases}$$

$$A_{kj}^{mi} = \alpha_k \begin{cases} \frac{1}{2n} \tilde{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j), & k \neq m, \\ \frac{1}{2n} \tilde{R}^{(1)}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) + \tilde{R}^{(2)}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) T_j(t_i), & k = m \end{cases}$$

та правою частиною

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}(t_i).$$

У системі використано позначення  $\delta_{ij}^{(mk)}$ , для якого справедливим є наступне визначення

$$\delta_{ij}^{(mk)} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ при } m = k, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Наближений розв'язок задачі Діріхле (2.1.1)–(2.1.2) можна отримати з подання (2.1.12), використовуючи відповідні квадратурні формули та наближені значення невідомих густин, як розв'язок системи (2.1.36). Оскільки подання розв'язку містить інтеграл по області, потрібно це врахувати при наближеному обчисленні функції  $u$ . Легко бачити, що у випадку, коли точка, в якій ми шукаємо наближене значення, лежить на кривій, що відповідає параметру  $\eta_k$ , ми отримаємо логарифмічну особливість. Отже, враховуючи заміну змінних у інтегралах, розв'язок в області має вигляд

$$u(p(\eta, t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \dot{P}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \ddot{P}(\eta, t; \tau) d\tau, \quad (\eta, t) \in \Pi,$$

з ядрами

$$\dot{P}(\eta, t; \xi, \tau) = 2\pi P(p(\eta, t), p(\xi, \tau)) J(\xi, \tau), \quad \ddot{P}(\eta, t; \tau) = 2\pi P(p(\eta, t), x(\tau)) \sigma(x(\tau)).$$

Ядро  $\dot{P}(\eta, t; \xi, \tau)$  має логарифмічну особливість при  $\eta = \xi$ , яку можна явно виділити у ваговій функції  $\ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right)$ . Отже,

$$\dot{P}(\eta, t; \eta, \tau) = \dot{P}^{(1)}(\eta, \tau) \ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) + \dot{P}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau), \quad (2.1.37)$$

де

$$\dot{P}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) = \begin{cases} \dot{P}^{(1)}(\eta, \tau) \ln \frac{\eta^2 |x(t) - x(\tau)|^2}{e^{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2}}}, & t \neq \tau, \\ \dot{P}^{(1)}(\eta, t) \ln(e\eta^2 |x'(t)|^2), & t = \tau. \end{cases}$$

При цьому  $\dot{P}^{(1)}(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \frac{J(\eta, \tau)}{\sigma(\eta x(\tau))}$ .

Підсумовуючи, після використання відповідних квадратурних формул наближений розв'язок в області можна подати у такому вигляді

$$u_{Nn}(p(\eta, t)) = \sum_{j=0}^{2n-1} \left[ \tilde{A}_{0j}(\eta, t) \varphi_{0j} + \sum_{k=1}^N \tilde{A}_{kj}(\eta, t) \varphi_{kj} \right], \quad (\eta, t) \in \Pi, \quad (2.1.38)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{0j}(\eta, t) &= \frac{1}{2n} \ddot{P}(\eta, t; t_j), \\ \tilde{A}_{kj}(\eta, t) &= \alpha_k \begin{cases} \frac{1}{2n} \dot{P}(\eta, t; \eta_k, t_j), & \eta \neq \eta_k, \\ \dot{P}^{(1)}(\eta_k, t_j) F_j(t) + \frac{1}{2n} \dot{P}^{(2)}(\eta, t; \eta_k, t_j), & \eta = \eta_k. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

Як бачимо, нами було використано метод Нистрьома для наближеного розв'язування отриманої системи гранично-просторових інтегральних рівнянь. Його безсумнівною перевагою є приналежність до повністю дискретних алгоритмів, що суттєво пришвидшує комп'ютерні обчислення. Для обґрунтування збіжності методу і оцінки його похибки можуть бути використані два підходи. Один з них передбачає застосування теорії колективно-компактних операторів (див., наприклад, [51]), а інший ґрунтується на оцінках інтерполяції (у нашому випадку функцій двох змінних) [78]. Однак через значні труднощі з обчисленням подвійних інтегралів з різними типами особливостей, застосування цих підходів у нашому випадку не видається можливим. Тому достовірність розроблених алгоритмів підтверджується нами великою кількістю чисельних експериментів.

**Зауваження 2.1.15.** Варто відзначити, що, окрім подвійних інтегралів з особливостями, в системі  $IP$  присутні так звані майже сингулярні інтеграли (див. [30]), обчислення яких вимагає застосування спеціальних методів для отримання результатів з кращою похибкою. Найпростішим способом обчислення таких інтегралів є відступ від межі області на деяку константу  $\varepsilon_1 > 0$  (а також на константу  $\varepsilon_2 > 0$  від початку координат, де гомотетичні криві вироджуються в точку) та використання квадратур по змінній  $\xi$  на відповідному відрізку.

## 2.2. Задача Неймана та її розв'язування

### 2.2.1. Постановка задачі

Нехай  $D$  – обмежена однозв'язна область в  $\mathbb{R}^2$  з межею  $\Gamma \in C^2$ . Необхідно знайти функцію  $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ , що задовольняє диференціальне рівняння

$$\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(x)) = 0, \quad x \in D \quad (2.2.1)$$

та умову Неймана

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.2.2)$$

де  $\sigma \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $\sigma > 0$ ,  $g \in C(\Gamma)$  – задані функції, причому

$$\int g(y) ds(y) = 0. \quad (2.2.3)$$

Умова (2.2.3) називається умовою розв'язності (сумісності) для задачі Неймана і вона є частковим випадком більш загальної умови, де розглядається неоднорідне диференціальне рівняння, див. [22, 89, 90].

**Теорема 2.2.1.** Розв'язок задачі Неймана (2.2.1)-(2.2.3) єдиний з точністю до адитивної сталої.

*Доведення.* Див. [69, т. 3.6], [9, с. 18]. □

Єдиний розв'язок цієї задачі можна отримати, наклавши додаткову умову на шукану функцію  $u$ . Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що область  $D$  містить початок координат і

$$u(0) = 0. \quad (2.2.4)$$

**Теорема 2.2.2.** *Для  $g \in C(\Gamma)$  задача Неймана (2.2.1)-(2.2.4) має єдиний розв'язок.*

*Доведення.* Відповідно до [9, с. 87] розв'язок задачі (2.2.1)-(2.2.3) існує з точністю до адитивної сталої. Завдяки додатковій умові (2.2.4) визначаємо єдиний розв'язок. □

**Теорема 2.2.3.** *Розв'язок задачі (2.2.1)-(2.2.3) можна подати у вигляді*

$$u(x) = \int_D \mu(y)P(x, y)dy + \int \psi(y)P(x, y)ds(y), \quad x \in D, \quad (2.2.5)$$

де невідомі густини  $\mu$  та  $\psi$  є розв'язками системи гранично-просторових інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \mu(x) + \int_D \mu(y)R(x, y)dy + \int \psi(y)R(x, y)ds(y) = 0, & x \in D, \\ -\frac{1}{2}\psi(x) + \int_D \mu(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)}dy + \int \psi(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)}ds(y) = g(x), \end{cases} \quad (2.2.6)$$

де в другому рівнянні  $x \in \Gamma$ .

*Доведення.* Підставивши (2.2.5) у рівняння (2.2.1) та крайову умову (2.2.2) і враховуючи властивості параметрикс-потенціалів, отримаємо систему інтегральних рівнянь другого роду (2.2.6). □

**Зауваження 2.2.4.** У випадку  $\sigma = 1$  функція залишок тотожно дорівнює нулю і система (2.2.6) вироджується у граничне інтегральне рівняння

$$-\frac{1}{2}\psi(x) + \frac{1}{2\pi} \int \psi(y) \frac{\partial \ln |x - y|}{\partial \nu(x)} ds(y) = g(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2.2.7)$$

що відповідатиме внутрішній задачі Неймана для рівняння Лапласа.

Розв'язок рівняння (2.2.7) існує, коли крива  $\Gamma$  не є так званим  $\Gamma$ -контуром (іншими словами, коли логарифмічна ємність не дорівнює одиниці) [21, 108]. Достатньою умовою цього є вибір області  $D$  досить малого розміру, такого, що  $\text{diam } D < 1$  [1]. Проте, в цьому випадку рівняння (2.2.7) має безліч розв'язків і для досягнення єдиності розглядають рівняння

$$-\frac{1}{2}\psi(x) + \frac{1}{2\pi} \int \psi(y) \frac{\partial \ln |x - y|}{\partial \nu(x)} ds(y) - \psi(x^*) = g(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2.2.8)$$

де  $x^*$  – фіксована точка на граничній кривій  $\Gamma$ .

Відомо [21], що інтегральне рівняння (2.2.8) має єдиний розв'язок  $\psi \in C(\Gamma)$  для будь-яких  $g \in C(\Gamma)$ , і, що розв'язок рівняння (2.2.8) є серед розв'язків рівняння (2.2.7). Тому розглядатимемо таку модифіковану систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(x) + \int_D \mu(y) R(x, y) dy + \int \mu(y) R(x, y) ds(y) = 0, \quad x \in D, \\ -\frac{1}{2}\psi(x) + \int_D \mu(y) \sigma(x) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} dy + \\ + \int \psi(y) \sigma(x) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) - \psi(x^*) = g(x), \quad x, x^* \in \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.2.9)$$

**Теорема 2.2.5.** Для  $g \in C(\Gamma)$  система IP (2.2.9) має єдиний розв'язок  $\mu \in C(D)$ ,  $\psi \in C(\Gamma)$ .

*Доведення.* Отримується аналогічно до доведення теореми про задачу Діріхле. □

### 2.2.2. Параметризація системи інтегральних рівнянь

Як і для випадку задачі Діріхле, вважаємо, що межа  $\Gamma \in C^2$  має параметричне подання (2.1.14), з відповідними властивостями функцій  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ . Область  $D$  містить початок координат і виконується аналогічна умова, як і для задачі Діріхле, про перетин променем однієї точки на межі  $\Gamma$ . Зробимо заміну змінних у подвійних інтегралах, зокрема, точка  $y = (y_1, y_2) = p(\xi, \tau)$ , де  $(\xi, \tau) \in \Pi = (0, 1) \times [0, 2\pi)$  з якобіаном наведеним у (2.1.16).

Вектор-функція  $p = (p_1, p_2)$  позначає відображення з області  $\Pi$  в область  $D^*$ , тому, подібно, точку  $x$  можна записати як  $x = p(\eta, t)$ . Звідси, систему (2.2.9) можна переписати в еквівалентній параметризованій формі

$$\begin{cases} \varphi(\eta, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{R}_0(\eta, t; \tau) d\tau = 0, \\ -\frac{1}{2} \varphi_0(t) - \varphi_0(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{P}(t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{P}_0(t; \tau) d\tau = \tilde{g}(t), \end{cases} \quad (2.2.10)$$

де  $\varphi(\eta, t) = \mu(p(\eta, t))$ ,  $\varphi_0(t) = \psi(x(t))$ ,  $\tilde{g}(t) = g(x(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi)$  ( $\eta, t \in \Pi$ ). За точку  $x^*$  взято точку на межі  $\Gamma$ , що відповідає значенню параметра  $t = 0$ , тобто  $x^* = x(0)$ .

Ядра інтегралів системи (2.2.10) мають такий вигляд

$$\tilde{R}_0(\eta, t; \tau) = 2\pi R(p(\eta, t), x(\tau)) |x'(\tau)|, \quad (2.2.11)$$

$$\tilde{P}(t; \xi, \tau) = 2\pi \sigma(x(t)) \frac{\partial P(x(t), \xi x(\tau))}{\partial \nu(x(t))} J(\xi, \tau), \quad (2.2.12)$$

$$\tilde{P}_0(t; \tau) = 2\pi \sigma(x(t)) \frac{\partial P(x(t), x(\tau))}{\partial \nu(x(t))} |x'(\tau)|, \quad (2.2.13)$$

а  $\tilde{R}$  задане формулою (2.1.17). Ядро  $\tilde{R}$  має особливість, якщо  $\eta = \xi$ , виділення якої наведено в задачі Діріхле, зокрема, в теоремі 2.1.13, а явний вигляд  $\tilde{R}$  ( $\eta \neq \xi$ ) визначено в (2.1.28). Ядра  $\tilde{R}_0$ ,  $\tilde{P}$  мають такий явний вигляд

$$\tilde{R}_0(\eta, t; \tau) = \frac{(\eta x(t) - x(\tau)) \cdot \nabla \sigma(\eta x(t))}{\sigma(x(\tau)) |\eta x(t) - x(\tau)|^2} |x'(\tau)|, \quad (2.2.14)$$

$$\tilde{P}(t; \xi, \tau) = \frac{\sigma(x(t))}{\sigma(\xi x(\tau))} \frac{(x(t) - \xi x(\tau)) \cdot \nu(x(t))}{|x(t) - \xi x(\tau)|^2} J(\xi, \tau). \quad (2.2.15)$$

Можна показати (наприклад, використавши правило Лопіталя), що  $\tilde{P}_0$  не має особливості та визначається так

$$\tilde{P}_0(t, \tau) = \begin{cases} \frac{-x''(t) \cdot \nu(x(t))}{2|x'(t)|}, & t = \tau, \\ \frac{\sigma(x(t)) |x'(\tau)| (x(t) - x(\tau)) \cdot (x_2'(t), -x_1'(t))}{\sigma(x(\tau)) |x'(t)| |x(t) - x(\tau)|^2}, & t \neq \tau. \end{cases} \quad (2.2.16)$$

### 2.2.3. Метод Нистрьома

Для чисельного розв'язування системи (2.2.10) використаємо метод Нистрьома з квадратурами (2.1.31)-(2.1.33), наведеними в задачі Діріхле. Після застосування цих квадратур до інтегралів у системі (2.2.10) і колокації отриманих апроксимаційних рівнянь у точках, що відповідають квадратурним вузлам, маємо таку повністю дискретизовану систему рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_{mi} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \bar{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \tilde{R}_0(\eta_m, t_i; t_j) = 0, \\ -\frac{1}{2} \varphi_{0i} - \varphi_{00} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \tilde{P}(t_i; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \tilde{P}_0(t_i, t_j) = \tilde{g}_i, \end{cases} \quad (2.2.17)$$

де  $\varphi_{mi} \approx \varphi(\eta_m, t_i)$ ,  $m = 1 \dots N$ ,  $\varphi_{0i} \approx \varphi_0(t_i)$ ,  $\tilde{g}_i = \tilde{g}(t_i)$ ,  $i = 0 \dots 2n - 1$ ,

$$\bar{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \tilde{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) & \text{при } m \neq k, \\ \frac{1}{2n} \tilde{R}^{(1)}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) + T_j(t_i) \tilde{R}^{(2)}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) & \text{при } m = k. \end{cases}$$

Вигляд функцій  $\tilde{R}^{(1)}$  та  $\tilde{R}^{(2)}$  наведено у формулах (2.1.23) та (2.1.24), відповідно.



Систему (2.2.17) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{2n-1} \left( A_{0j}^{mi} \varphi_{0j} + \sum_{k=1}^N \left[ \delta_{ij}^{(mk)} + A_{kj}^{mi} \right] \varphi_{kj} \right) = 0, \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \left[ A_{0j}^{0i} - \frac{\delta_{ij}}{2} - \delta_{i0} \right] \varphi_{0j} + \sum_{k=1}^N A_{kj}^{0i} \varphi_{kj} \right) = \tilde{g}_i, \end{cases} \quad (2.2.18)$$

$m = 1, \dots, N; i = 0, \dots, 2n - 1$ , з матричними коефіцієнтами

$$A_{0j}^{mi} = \frac{1}{2n} \frac{(\eta_m x(t_i) - x(t_j)) \cdot \nabla \sigma(\eta_m x(t_i))}{\sigma(x(t_j)) |\eta_m x(t_i) - x(t_j)|^2} |x'(t_j)|,$$

$$A_{kj}^{mi} = \alpha_k \begin{cases} \frac{1}{2n} \frac{(\eta_m x(t_i) - \eta_k x(t_j)) \cdot \nabla \sigma(\eta_m x(t_i))}{\sigma(\eta_k x(t_j)) |\eta_m x(t_i) - \eta_k x(t_j)|^2} J(\eta_k, t_j), & m \neq k, \\ \frac{1}{2n} \tilde{R}^{(1)}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) + \tilde{R}^{(2)}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) T_j(t_i), & m = k, \end{cases}$$

$$A_{0j}^{0i} = \frac{1}{2n} \begin{cases} \frac{-x''(t_i) \cdot \nu(x(t_i))}{2|x'(t_i)|}, & i = j, \\ \frac{\sigma(x(t_i)) |x'(t_j)| (x(t_i) - x(t_j)) \cdot (x_2'(t_i), -x_1'(t_i))}{\sigma(x(t_j)) |x'(t_i)| |x(t_i) - x(t_j)|^2}. & i \neq j, \end{cases}$$

$$A_{kj}^{0i} = \frac{\alpha_k \ln |x(t_i) - \eta_k x(t_j)|}{2n \sigma(\eta_k x(t_j))} J(\eta_k, t_j).$$

Бачимо, що як і для задачі Діріхле розмірність матриці дорівнює  $(N + 1)2n \times (N + 1)2n$ . Для знаходження наближеного розв'язку в області використаємо формулу (2.2.5), здійснюючи кроки аналогічні до кроків у задачі Діріхле.

$$u(p(\eta, t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \dot{P}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \ddot{P}(\eta, t; \tau) d\tau, \quad (\eta, t) \in \Pi,$$

з ядрами

$$\dot{P}(\eta, t; \xi, \tau) = 2\pi P(p(\eta, t), p(\xi, \tau)) J(\xi, \tau), \quad \ddot{P}(\eta, t; \tau) = 2\pi P(p(\eta, t), x(\tau)) |x'(\tau)|.$$

Ядро  $\ddot{P}$  має такий явний вигляд

$$\ddot{P}(\eta, t; \tau) = \frac{\ln |\eta x(t) - x(\tau)|}{\sigma(x(\tau))} |x'(\tau)|.$$

Ядро  $\dot{P}(\eta, t; \xi, \tau)$  для задачі Неймана має такий самий вигляд, як і для задачі Діріхле.

Тому, використовуючи відповідні квадратурні формули, наближений розв'язок в області подається такою формулою

$$u_{Nn}(p(\eta, t)) = \sum_{j=0}^{2n-1} \left[ \tilde{A}_{0j}(\eta, t) \varphi_{0j} + \sum_{k=1}^N \tilde{A}_{kj}(\eta, t) \varphi_{kj} \right], \quad (\eta, t) \in \Pi, \quad (2.2.19)$$

де

$$\tilde{A}_{0j}(\eta, t) = \frac{1}{2n} \frac{\ln |\eta x(t) - x(t_j)|}{\sigma(x(t_j))} |x'(t_j)|,$$

а  $\tilde{A}_{kj}(\eta, t)$  має вигляд (2.1.39).

### 2.3. Чисельні експерименти

У цьому підрозділі ми розглянемо чисельні результати розв'язування крайових задач Діріхле та Неймана для наведеного вище методу. Результати імплементованих програм для даного чисельного методу продемонстровано на декількох прикладах, що, загалом, не виключає використання розробленого підходу для інших вхідних даних.

#### Задача Діріхле

Для заданої функції провідності  $\sigma(x) = (\alpha + \beta x_1 + \gamma x_2)^2$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , такі, що  $\sigma > 0$  в  $\bar{D}$ , та гармонічної функції  $\Psi(x)$ , прості обчислення показують, що

$$u_{ex}(x) = \frac{\Psi(x)}{\sigma^{1/2}(x)}, \quad x \in D$$

задовольняє рівняння (2.1.1). У чисельних експериментах ми використовуємо функцію  $f(x) = u_{ex}(x)$ ,  $x \in \Gamma$ , згенеровану для різних випадків  $\sigma$  та  $\Psi$  та для різних граничних кривих  $\Gamma$ . Як квадратуру по змінній  $\xi \in (0, 1)$ ,

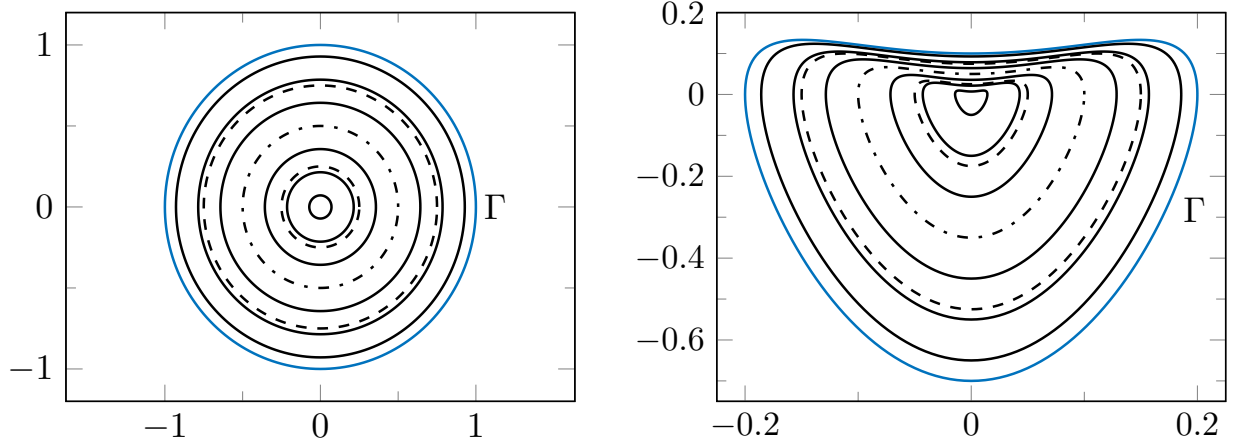
ми використаємо квадратуру середніх прямокутників з вагами  $\alpha_k = 1/N$  та вузлами  $\eta_k = 1 - \frac{2k-1}{2N}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Отже, квадратурні криві (тобто криві, що відповідають квадратурним вузлам  $\eta_k$ ), мають вигляд

$$\Gamma_k = \{x_k(t) = \eta_k x(t), t \in [0, 2\pi)\}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.3.1)$$

Похибка розв'язку буде обчислена на множині трьох кривих, які називатимемо кривими похибки, щоб відрізнити їх від  $\Gamma_k$ . Вони подаються так

$$\tilde{\Gamma}_k = \{\tilde{x}_k(t) = (1 - 0.25k)x(t), t \in [0, 2\pi)\}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.3.2)$$

Відзначимо, що  $\Gamma_{(N+1)/2}$  співпадає з  $\tilde{\Gamma}_2$ , коли  $N$  є непарним. Дві області з прикладів наведені на рис. 2.1. На рисунках також включено множини  $\Gamma_k$  (суцільні лінії разом зі штрих-пунктирною лінією) для  $N = 7$  та  $\tilde{\Gamma}_k$  (штрихові та штрих-пунктирні лінії). Штрих-пунктирна лінія є водночас і квадратурною кривою і кривою похибки.



а) Область  $D$  у прикладі 1.

б) Область  $D$  у прикладі 2.

Рис. 2.1: Дві області розв'язку разом з множиною внутрішніх кривих.

### Приклад 1

Нехай область  $D$  обмежена колом  $\Gamma = \{x(t) = R(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi)\}$  радіуса  $R = 0.9$ . Функції  $\sigma$  та  $\Psi$  задані:

$$\sigma(x) = (2 + x_1 + x_2)^2 \quad \text{та} \quad \Psi(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad x \in D.$$

Похибки в максимум-нормі наближеного чисельного розв'язку крайової задачі Діріхле (2.1.1)-(2.1.2), отримані запропонованим методом, наведено в таблиці 2.1. Похибки представлені для трьох кривих, визначених в (2.3.2). Число  $N$  визначає кількість квадратурних кривих, що задаються формулою (2.3.1), тоді як число  $2n$  відповідає за кількість квадратурних вузлів на кожній з них. На рис. 2.1 (а) продемонстровано випадок  $N = 7$ .

Лінійний порядок збіжності відносно параметра  $N$  та експоненційний порядок збіжності відносно параметра  $n$  легко побачити в таблиці 2.1. Зауважимо, що похибки розв'язку у відповідних нормах обчислені, як між квадратурними кривими (похибки на  $\tilde{\Gamma}_1$  та  $\tilde{\Gamma}_3$ ), так і на одній з них (та, що співпадає з  $\tilde{\Gamma}_2$ ).

$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_3)}$
3	64	0.037253	0.023153	0.002490
	128	0.037283	0.023153	0.002490
7	128	0.006684	0.004691	0.000676
	256	0.006684	0.004692	0.000676
15	128	0.001399	0.001041	0.000166
	256	0.001394	0.001041	0.000166

Табл. 2.1: Абсолютні похибки для прикладу 1.

Відносні похибки в  $L_2$ -нормі в області  $D$  наведені в таблиці 2.2. Для обчислення похибки в  $L_2$ -нормі використано таку апроксимацію

$$\frac{\|u_{Nn} - u_{ex}\|_{L_2(D)}}{\|u_{ex}\|_{L_2(D)}} \approx \left( \frac{\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{j=0}^{2\tilde{n}-1} (u_{Nn} - u_{ex})^2(\tilde{\eta}_k, \tilde{t}_j) J(\tilde{\eta}_k, \tilde{t}_j)}{\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{j=0}^{2\tilde{n}-1} u_{ex}^2(\tilde{\eta}_k, \tilde{t}_j) J(\tilde{\eta}_k, \tilde{t}_j)} \right)^{1/2} \quad (2.3.3)$$

з  $\tilde{N} = 20$  та  $\tilde{n} = 32$ .

$N$	$n$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} \cdot 100\%$
3	64	5.216056
	128	5.41096
7	128	1.386761
	256	1.316576
15	128	0.261578
	256	0.249866

Табл. 2.2: Відносні похибки для прикладу. 1

## Приклад 2

У цьому прикладі було обрано область, що обмежена складнішою кривою

$$\Gamma = \{x(t) = (0.2 \cos t, 0.4 \sin t - 0.3 \sin^2 t), \quad t \in [0, 2\pi)\}.$$

Функція  $\Psi$  задана як

$$\Psi(x) = x_1^3 + 3x_1^2x_2 - 3x_2^2x_1 - x_2^3, \quad x \in D$$

і  $\sigma \in$  з попереднього прикладу.

Похибки в максимум-нормі відображені в таблиці 2.3 для трьох кривих похибок (2.3.2) та відповідних значень параметрів дискретизації  $N$  і  $n$ . Випадок, коли  $N = 7$  проілюстровано на рис. 2.1 (б). Як і для попереднього прикладу, похибки розв'язку у відповідних нормах обчислені як між квадратурними кривими  $\Gamma_k$ , так і на одній з цих кривих. Також і в цьому прикладі в таблиці 2.3 бачимо лінійний порядок збіжності відносно параметра  $N$  та експоненційний порядок збіжності відносно параметра  $n$ .

Відносні похибки в  $L_2$ -нормі в області  $D$ , використовуючи наближення (2.3.3) для прикладу 2, наведені в таблиці 2.4.

$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_3)}$
3	64	0.002628	0.001729	0.000093
	128	0.002637	0.001729	0.000093
7	128	0.000364	0.000421	0.000021
	256	0.000364	0.000421	0.000021
15	128	0.000056	0.000106	0.000004
	256	0.000056	0.000105	0.000004

Табл. 2.3: Абсолютні похибки для прикладу 2.

$N$	$n$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} \cdot 100\%$
3	64	1.86703
	128	1.86138
7	128	0.50473
	256	0.50266
15	128	0.08769
	256	0.08660

Табл. 2.4: Відносні похибки для прикладу 2.

### Приклад 3

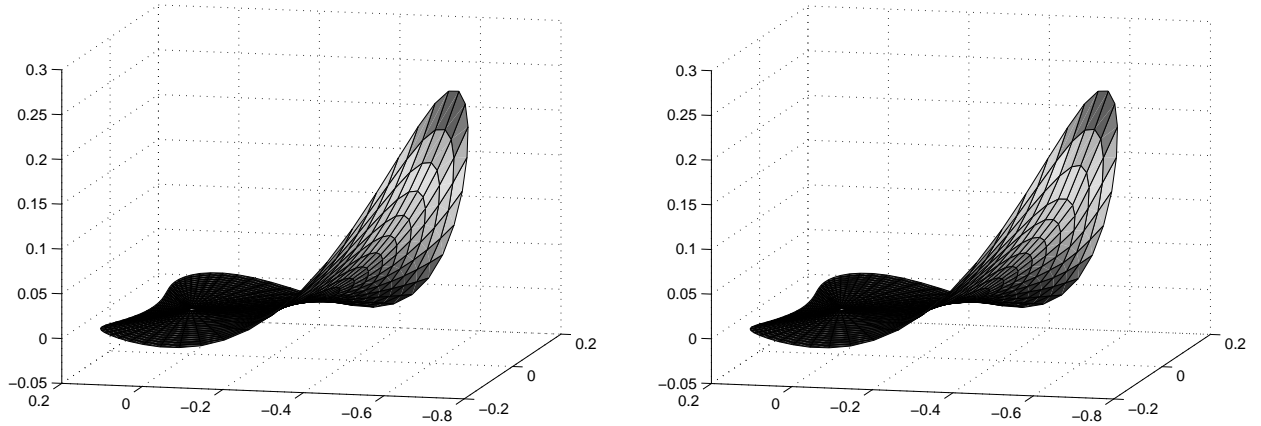
Нехай  $\bar{D}$  – круг радіуса  $R = 0.9$ , тобто

$$\Gamma = \{x(t) = 0.9(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)\},$$

а функції  $\sigma$  та  $f$  мають вигляд:

$$\sigma(x) = e^{x_1}(x_2 + 2)^2, \quad x \in D,$$

$$f(x) = e^{(x_1 + \sqrt{3}x_2)/4}(e^{x_1}(x_2 + 2)^2)^{-0.5}, \quad x \in \Gamma.$$



а). точний розв'язок

б). наближений розв'язок

Рис. 2.2: Точний (а) і наближений (б) розв'язки при  $N=3$ ,  $n=128$  для прикладу 2.

Легко перевірити, що

$$u_{ex}(x) = e^{(x_1 + \sqrt{3}x_2)/4} (e^{x_1} (x_2 + 2)^2)^{-0.5}, \quad x \in D.$$

Отже в цьому випадку  $u_{ex}(x)$  теж подано, як частку деякої функції  $\Psi(x)$  на  $\sqrt{\sigma(x)}$ , проте, в цьому випадку  $\Psi$  не є гармонічною, а  $\sigma$  не є поліномом.

Похибки розв'язку наведено в таблиці 2.5.

$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_3)}$
2	64	0.033131	0.003354	0.011966
	128	0.022698	0.003354	0.010334
6	128	0.004463	0.000707	0.001444
	256	0.002911	0.000389	0.001207
12	128	0.000079	0.000098	0.000106
	256	0.000078	0.000098	0.000106

Табл. 2.5: Абсолютні похибки для прикладу 3.

## Задача Неймана

Розглянемо два приклади для задачі Неймана з різними функціями провідності  $\sigma$ , крайовими функціями  $g$  та кривими, що обмежують область  $D$ .

### Приклад 4

Розглянемо область  $D$ , як внутрішність круга радіуса  $R = 0.9$ . При цьому інші вхідні дані мають такі значення:

$$\sigma(x) = 4 - x_1^2 + x_2^2, \quad x \in \bar{D};$$

та функція

$$g(x) = (4 - x_1^2 + x_2^2)2x_1x_2, \quad x \in \Gamma.$$

Легко бачити, що функція  $g$  задовольняє умову (2.2.3). Функція  $u_{ex}(x) = x_1x_2$ , є розв'язком задачі (2.2.1)-(2.2.4) для наведених вище даних. У таблиці 2.6 наведено похибки розв'язку за максимум-нормою на трьох кривих, що містяться в області  $D$  та визначаються формулою (2.3.2).

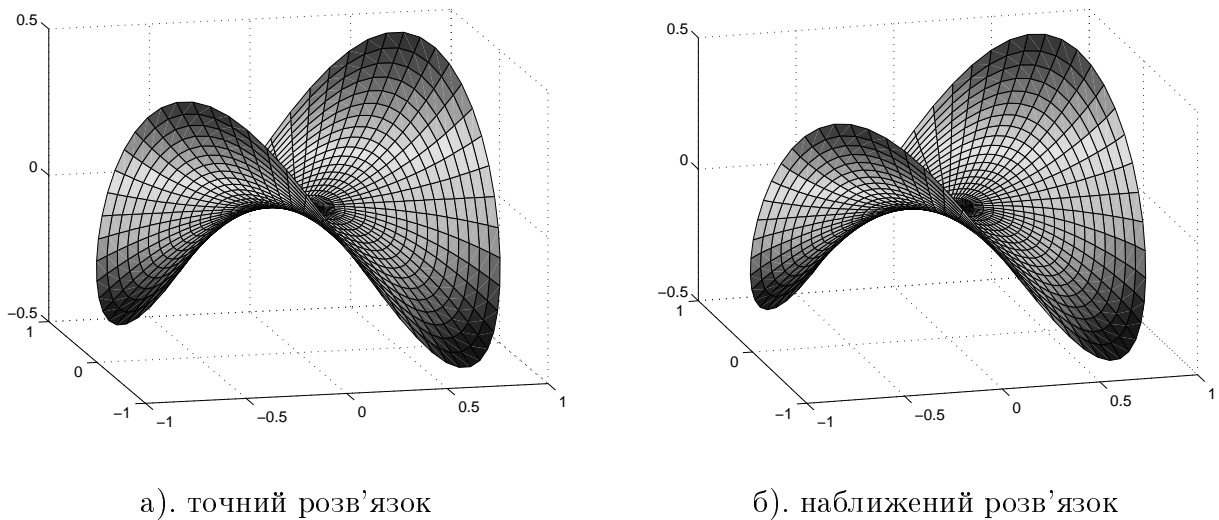
Параметри  $N$  та  $n$  відповідають за кількість квадратурних вузлів у системі (2.2.18). Також у таблиці наведено відносну похибку розв'язку в області, обчислену за формулою (2.3.3).

Варто відмітити, що, для даного прикладу, для зменшення похибки при збільшенні  $N$  необхідно збільшувати і параметр дискретизації  $n$ . Бачимо, що при збільшенні  $N$  вдвічі, значення  $n$  теж потрібно збільшити у два рази, щоб отримати зменшення відносної похибки, яка краще характеризує близькість наближеного розв'язку до точного, ніж абсолютна. Причиною такої залежності параметрів  $N$  та  $n$  може бути недостатня гладкість ядра  $\tilde{P}$  у системі (2.2.10) по змінній  $\xi$ .



$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_3)}$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} \cdot 100\%$
7	16	8.09E-004	1.65E-004	1.34E-005	3.40873
	32	6.44E-005	1.33E-005	1.18E-006	0.74813
	64	5.52E-007	1.14E-007	1.02E-008	0.06772
15	16	2.38E-003	4.59E-004	2.88E-005	3.56188
	32	4.57E-004	9.38E-005	8.01E-006	0.76257
	64	4.23E-005	8.79E-006	7.97E-007	0.06882

Табл. 2.6: Похибки для прикладу 4.

Рис. 2.3: Точний (а) і наближений (б) розв'язки при  $N=7$ ,  $n=32$  для прикладу 4.

### Приклад 5

Область  $D$  – еліпс з півосями  $a = 2$ ,  $b = 1$ , тобто область обмежує крива  $\Gamma = \{x(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), t \in [0, 2\pi)\}$ ,  $\sigma(x) = 8 + 2x_1x_2$ ,  $x \in D$ . Функцію  $g$  задано у параметризованому вигляді

$$\tilde{g}(t) = \frac{(8 + 2ab \cos(t) \sin(t))(2a \cos(t)b \sin(t) - 2b \sin(t)a \sin(t))}{\sqrt{b^2 \cos(t)^2 + a^2 \sin(t)^2}}.$$

Для таких вхідних даних легко переконатись, провівши відповідні обчислення, що точним розв'язком є  $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$ ,  $x \in D$ . Результати обчислень для даного прикладу наведено в таблиці 2.7.

Як і для прикладу 4, бачимо малі значення абсолютної та відносної похибок та необхідне збільшення параметра  $n$  при збільшенні параметра  $N$  для зменшення похибки.

$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_3)}$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} \cdot 100\%$
7	32	1.03E-006	9.51E-005	1.22E-004	1.81412
	64	3.37E-006	4.76E-006	1.12E-006	0.28746
15	128	4.32E-006	4.47E-006	1.29E-006	0.02262
	256	5.51E-010	1.04E-009	2.15E-009	0.00038

Табл. 2.7: Похибки для прикладу 5.

## Висновки до розділу 2

У даному розділі було запропоновано чисельний метод розв'язування крайових задач Діріхле та Неймана для ЕРЗК. Основним підходом для розв'язування цих задач є формулювання непрямого методу інтегральних рівнянь з використанням теорії потенціалів та функції Леві (параметрикса). Даний непрямий підхід є мало дослідженим у літературі, і, таким чином, представлені результати є певним внеском в область чисельних алгоритмів для розв'язування вищезгаданих задач.

Подання розв'язку у вигляді суми об'ємного параметрикс-потенціалу та параметрикс-потенціалу простого шару генерує систему гранично-просторових інтегральних рівнянь для знаходження невідомих густин. Цю систему було переписано за допомогою заміни змінних у подвійних інтегралах на основі гомотетичного стиснення граничної кривої, що має параметричне подання. Під час побудови відповідної системи для задачі Неймана було враховано неєдиність її розв'язку. Дискретизацію системи було здійснено на основі використання методу Нистрьома, з попереднім виділенням особливостей. При обчисленні наближеного розв'язку враховано логарифмічну особливість, що

виникає через специфіку подання цього розв'язку в області.

Перевага запропонованого підходу полягає в тому, що тут було використано метод інтегральних рівнянь, який успішно застосовується для розв'язування обернених задач для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, а отже розглянутий підхід відкриває можливість до застосування подібних методів до обернених задач для ЕРЗК. Чисельний алгоритм є простим для використання, а наведені чисельні експерименти вказують на збіжність даного методу. Зокрема, для обох задач характерною є експоненційна збіжність по одному з параметрів дискретизації, тоді, як збіжність для іншого залежить від вибору відповідної квадратури та гладкості підінтегральної функції.

Отримані результати опубліковані у працях [6, 36].

## РОЗДІЛ 3

# ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МІШАНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ДВОЗВ'ЯЗНІЙ ОБЛАСТІ

У цьому розділі розглянуто чисельне розв'язування мішаних крайових задач Діріхле-Неймана та Неймана-Діріхле для ЕРЗК у двозв'язній області. У підрозділах 3.1, 3.2 наведено мішані крайові задачі для областей, внутрішня границя яких є гомотетичним стисненням зовнішньої граничної кривої. Використовуючи подання розв'язку, як суму параметрикс-потенціалів простого шару та об'ємного параметрикс-потенціалу, отримано систему з трьох гранично-просторових інтегральних рівнянь, яку параметризовано через відповідні заміни змінних. Для знаходження наближених значень густин застосовано метод Нистрьома з відповідними квадратурами, а також наведено апроксимацію розв'язку в області. У підрозділі 3.3 представлено формули для застосування даного підходу до двозв'язної області з негомотетичними граничними кривими. Чисельні експерименти для двох крайових задач з різними вхідним даними наведено у підрозділі 3.4.

### 3.1. Задача Діріхле-Неймана та її наближене розв'язування

#### 3.1.1. Постановка задачі у двозв'язній області

Нехай  $D_0$  – однозв'язна обмежена область в  $\mathbb{R}^2$  з межею  $\Gamma_0 \in C^2$ ,  $D_{-1}$  – однозв'язна область обмежена кривою  $\Gamma_{-1} \in C^2$  і  $\overline{D}_{-1} \subset D_0$ . Визначимо область  $D = D_0 \setminus \overline{D}_{-1}$ .

Розглянемо таку плоску мішану крайову задачу у двозв'язній області  $D$  для ЕРЗК: знайти функцію  $u$ , що задовольняє диференціальне рівняння

$$\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(x)) = 0, \quad x \in D, \quad (3.1.1)$$

умову Діріхле на  $\Gamma_{-1}$

$$u = f_1 \quad \text{на } \Gamma_{-1} \quad (3.1.2)$$

та умову Неймана на  $\Gamma_0$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (3.1.3)$$

Тут,  $\sigma \in C^\infty(\overline{D})$ ,  $\sigma > 0$ ,  $f_1, f_2$  – відомі функції.

**Теорема 3.1.1.** *Задача (3.1.1)–(3.1.3) має щонайбільше один розв’язок.*

*Доведення.* Доведення від супротивного. Нехай  $u_1, u_2$  – розв’язки (3.1.1)–(3.1.3),  $u_1 \neq u_2$ . Позначимо  $u \stackrel{\text{def}}{=} u_1 - u_2$ . Далі, підставляючи  $v = u$  у першу формулу Гріна (1.2.4) для рівняння (3.1.1) (див. наприклад [7]) отримаємо, що  $u \equiv 0$ , а отже суперечність.  $\square$

**Теорема 3.1.2.** *Розв’язок задачі (3.1.1)–(3.1.3) можна подати у вигляді*

$$u(x) = \int_D \psi(y)P(x, y) dy + \int_{\Gamma_{-1}} \psi_{-1}(y)P(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_0} \psi_0(y)P(x, y) ds(y), \quad x \in D, \quad (3.1.4)$$

де невідомі густини  $\psi, \psi_{-1}, \psi_0$  є розв’язками такої системи гранично-просторових інтегральних рівнянь, записаної в операторному вигляді

$$\begin{cases} \psi + V\psi + V_{-1}\psi_{-1} + V_0\psi_0 = 0 & \text{в } D, \\ W^{(-1)}\psi + W_{-1}^{(-1)}\psi_{-1} + W_0^{(-1)}\psi_0 = f_1 & \text{на } \Gamma_{-1}, \\ -\frac{1}{2}\psi_0 + T^{(0)}\psi + T_{-1}^{(0)}\psi_{-1} + T_0^{(0)}\psi_0 = f_2 & \text{на } \Gamma_0, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

де оператори визначаються як:

$$V_j g(x) = \int_{\Gamma_j} g(y)R(x, y) ds(y), \quad x \in D, \quad j \in \{-1, 0\}, \quad (3.1.6)$$

$$W_j^{(i)} g(x) = \int_{\cdot j} g(y) P(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma_i, \quad i, j \in \{-1, 0\}, \quad (3.1.7)$$

$$T_j^{(i)} g(x) = \int_{\cdot j} g(y) \sigma(x) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y), \quad x \in \Gamma_i, \quad i, j \in \{-1, 0\}, \quad (3.1.8)$$

$$Vg(x) = \int_D g(y) R(x, y) dy, \quad x \in D, \quad (3.1.9)$$

$$W^{(i)} g(x) = \int_D g(y) P(x, y) dy, \quad x \in \Gamma_i, \quad i \in \{-1, 0\}, \quad (3.1.10)$$

$$T^{(i)} g(x) = \int_D g(y) \sigma(x) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} dy, \quad x \in \Gamma_i, \quad i \in \{-1, 0\}. \quad (3.1.11)$$

*Доведення.* Подання (3.1.4) має задовольняти (3.1.1)-(3.1.3), а отже, після підстановки (3.1.4) у (3.1.1)-(3.1.3), з врахуванням властивостей параметрикс-потенціалів у теоремі 2.1.7, отримаємо систему ГПР, що має вигляд (3.1.5) з відповідними операторами, визначеними формулами (3.1.6)-(3.1.11).  $\square$

**Зауваження 3.1.3.** *Загалом, нижній індекс в операторах визначає якій границі належить змінна інтегрування; верхній індекс визначає до якої границі належить змінна спостереження. Якщо ж значення індекса відсутнє, то відповідна змінна належить області  $D$ .*

Як і в попередньому розділі ми припускаємо, що при належній гладкості вхідних даних отримана система має єдиний розв'язок у відповідних просторах. Будемо вважати, що для  $f_1 \in C(\Gamma_{-1})$  і  $f_2 \in C(\Gamma_0)$  існує єдиний розв'язок системи (3.1.5) з густинами  $\psi \in C(D)$ ,  $\psi_{-1} \in C(\Gamma_{-1})$ ,  $\psi_0 \in C(\Gamma_0)$ .

### 3.1.2. Параметризація та подання ядер

Отже, область  $D$  – двозв'язна та обмежена кривими  $\Gamma_0$  і  $\Gamma_{-1}$ . Загалом, конфігурації кривих можуть бути довільними, однак, для початку, розглянемо випадок, коли  $\Gamma_{-1}$  є гомотетичним стисненням  $\Gamma_0$  з деяким коефіцієнтом  $\xi_{-1}$ , тобто область  $D$  є кільцеподібною. Окремо розглянемо випадок для двозв'язної області з негомотетичними граничними кривими.

Нехай  $\Gamma_0, \Gamma_{-1}$  мають таке параметричне подання

$$\Gamma_0 = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t)), t \in \mathbb{R}\}, \quad (3.1.12)$$

$$\Gamma_{-1} = \xi_{-1}x(t) = \{x_{-1}(t) = (\xi_{-1}x_1(t), \xi_{-1}x_2(t)), t \in \mathbb{R}\},$$

де  $\xi_{-1} \in (0, 1)$ ,  $x_k \in C_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, 2$ ,  $|x'(t)| > 0$ . Щоб отримати систему інтегральних рівнянь в параметризованому вигляді, використаємо заміну змінних, як для задачі Діріхле, у подвійних інтегралах системи (3.1.5), де  $(\xi, \tau) \in \Pi = (\xi_{-1}, 1) \times [0, 2\pi)$  і якобіан  $J(\xi, \tau) = \xi(x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x_1'(\tau))$ . Вважатимемо, що  $D_{-1}$  містить початок координат, а  $p = (p_1, p_2)$  визначає взаємнооднозначне відображення з  $\Pi$  в  $D^*$ .

Отримаємо систему

$$\left\{ \begin{aligned} & \varphi(\eta, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\xi_{-1}, \tau) \tilde{R}_{-1}(\eta, t; \xi_{-1}, \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{R}_0(\eta, t; \tau) d\tau = 0, \quad (\eta, t) \in \Pi, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \hat{P}(\xi_{-1}, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\xi_{-1}, \tau) \hat{P}_{-1}(\xi_{-1}, t; \xi_{-1}, \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \hat{P}_0(\xi_{-1}, t; \tau) d\tau = \tilde{f}_1(t), \quad t \in [0, 2\pi), \\ & -\frac{1}{2}\varphi_0(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{P}(t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\xi_{-1}, \tau) \tilde{P}_{-1}(t; \xi_{-1}, \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{P}_0(t; \tau) d\tau = \tilde{f}_2(t), \quad t \in [0, 2\pi), \end{aligned} \right. \quad (3.1.13)$$

з  $\varphi(\eta, t) = \psi(p(\eta, t))$ ,  $\varphi_{-1}(\xi_{-1}, t) = \psi_{-1}(x_{-1}(t))$ ,  $\varphi_0(t) = \psi_0(x(t))$ ,  $\tilde{f}_1(t) = f_1(x_{-1}(t))$ ,  $\tilde{f}_2(t) = f_2(x(t))$  і ядрами

$$\widehat{P}(\xi_{-1}, t; \xi, \tau) = 2\pi P(\xi_{-1}x(t), p(\xi, \tau))J(\xi, \tau), \quad (3.1.14)$$

$$\widehat{P}_0(\xi_{-1}, t; \tau) = 2\pi P(\xi_{-1}x(t), x(\tau))|x'(\tau)|, \quad (3.1.15)$$

$$\tilde{R}_{-1}(\eta, t; \xi_{-1}, \tau) = 2\pi R(p(\eta, t), \xi_{-1}x(\tau))\xi_{-1}|x'(\tau)|, \quad (3.1.16)$$

$$\widehat{P}_{-1}(\xi_{-1}, t; \xi_{-1}, \tau) = 2\pi P(\xi_{-1}x(t), \xi_{-1}x(\tau))\xi_{-1}|x'(\tau)|, \quad (3.1.17)$$

$$\tilde{P}_{-1}(t; \xi_{-1}, \tau) = 2\pi\sigma(x(t))\frac{\partial P(x(t), \xi_{-1}x(\tau))}{\partial\nu(x(t))}\xi_{-1}|x'(\tau)|, \quad (3.1.18)$$

$\tilde{R}$ ,  $\tilde{R}_0$ ,  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{P}_0$  визначені у формулах (2.1.17), (2.2.11), (2.2.12), (2.2.13), відповідно.

Легко бачити, що ядра  $\tilde{R}$  і  $\widehat{P}_{-1}$  мають особливості. Зокрема, особливість в  $\tilde{R}$  розглянуто у задачі Діріхле (див. теорему 2.1.13), тоді, як логарифмічна особливість в  $\widehat{P}_{-1}$  може бути виділена аналогічно до випадку теореми 2.1.14. А саме, подаємо  $\widehat{P}_{-1}$  у вигляді:

$$\widehat{P}_{-1}(\xi_{-1}, t; \xi_{-1}\tau) = \widehat{P}_{-1}^{(1)}(\xi_{-1}, \tau) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} + \widehat{P}_{-1}^{(2)}(\xi_{-1}, t; \xi_{-1}\tau) \quad (3.1.19)$$

з

$$\widehat{P}_{-1}^{(1)}(\xi_{-1}, \tau) = \frac{1}{2} \frac{\xi_{-1}|x'(\tau)|}{\sigma(\xi_{-1}x(\tau))}$$

і

$$\widehat{P}_{-1}^{(2)}(\xi_{-1}, t; \xi_{-1}, \tau) = \frac{\xi_{-1}|x'(\tau)|}{\sigma(\xi_{-1}x(\tau))} \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{|\xi_{-1}x(t) - \xi_{-1}x(\tau)|^2}{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2}} & \text{при } t \neq \tau, \\ \frac{1}{2} \ln (e|\xi_{-1}x'(t)|^2) & \text{при } t = \tau. \end{cases}$$

### 3.1.3. Дискретизація системи ІР

Для розв'язування системи (3.1.13) застосуємо метод Нистрьома з квадратними формулами, що наведені у другому розділі. Зокрема, для неперервних інтегрантів ми використовуємо квадртури (2.1.31), (2.1.33). Для інтегралів з особливостями будуть використовуватись формули (2.1.32), (2.1.34).



Використання цих квадратурних формул у (3.1.13) з врахуванням вигляду ядер та колокація апроксимаційних рівнянь у квадратурних вузлах приводять до повністю дискретизованої системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \varphi_{mi} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \bar{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) + \\
 & + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{-1j} \tilde{R}_{-1}(\eta_m, t_i; \xi_{-1}, t_j) + \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \tilde{R}_0(\eta_m, t_i; t_j) = 0, \\
 & \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \hat{P}(\xi_{-1}, t_i; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \hat{P}_0(\xi_{-1}, t_i, t_j) + \\
 & + \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{-1j} \left[ \hat{P}_{-1}^{(1)}(\xi_{-1}, t_j) F_j(t_i) + \frac{1}{2n} \check{P}_{-1}^{(2)}(\xi_{-1}, t_i; \xi_{-1}, t_j) \right] = \tilde{f}_{1i}, \\
 & -\frac{1}{2} \varphi_{0i} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \tilde{P}(t_i; \eta_k, t_j) + \\
 & + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{-1j} \tilde{P}_{-1}(t_i; \xi_{-1}, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \tilde{P}_0(t_i, t_j) = \tilde{f}_{2i},
 \end{aligned} \right. \quad (3.1.20)$$

з  $\bar{R}$  наведеним у крайовій задачі Діріхле, та правою частиною зі значеннями  $\tilde{f}_{1i} = \tilde{f}_1(t_i)$  і  $\tilde{f}_{2i} = \tilde{f}_2(t_i)$ . Легко бачити, що розмірність матриці отриманої системи є  $(N + 2)2n \times (N + 2)2n$ .

У (3.1.20) маємо  $\varphi_{mi} \approx \varphi(\eta_m, t_i)$ ,  $\varphi_{-1i} \approx \varphi_{-1}(\xi_{-1}, t_i)$  і  $\varphi_{0i} \approx \varphi_0(t_i)$  для  $m = 1, \dots, N$  та  $i = 0, \dots, 2n - 1$ .

Аналогічно, як і для розглянутої раніше задачі Діріхле, аналіз збіжності застосованого методу та оцінку похибки можна здійснити на основі загальної теорії для методу Нистрьома для інтегрального рівняння другого роду з компактним оператором. При цьому порядок похибки методу Нистрьома

буде співпадати з порядком похибки використаних квадратурних формул у випадку достатньої гладкості граничних кривих  $\Gamma_{-1}$ ,  $\Gamma_0$ , граничних та підінтегральних функцій (ядер).

Розв'язуючи систему (3.1.20), отримаємо наближені значення невідомих густин. Маючи ці значення, можна знайти апроксимацію розв'язку в області, використовуючи формулу

$$u_{Nn}(p(\eta, t)) = \sum_{j=0}^{2n-1} \left[ \tilde{A}_{-1j}(\eta, t)\varphi_{-1j} + \tilde{A}_{0j}(\eta, t)\varphi_{0j} + \sum_{k=1}^N \tilde{A}_{kj}(\eta, t)\varphi_{kj} \right], \quad (\eta, t) \in \Pi, \quad (3.1.21)$$

зі значеннями  $\tilde{A}_{kj}$  заданими формулою (2.1.39) і

$$\tilde{A}_{-1j}(\eta, t) = \frac{1}{2n} \frac{\ln |\eta x(t) - \xi_{-1}x(t_j)|}{\sigma(\xi_{-1}x(t_j))} |\xi_{-1}x'(t_j)|,$$

$$\tilde{A}_{0j}(\eta, t) = \frac{1}{2n} \frac{\ln |\eta x(t) - x(t_j)|}{\sigma(x(t_j))} |x'(t_j)|.$$

У порівнянні з крайовою задачею Діріхле чи Неймана функції  $\tilde{A}_{kj}(\eta, t)$  відрізняються лише областю визначення змінної  $\eta$ .

## 3.2. Задача Неймана-Діріхле та її наближене розв'язування

### 3.2.1. Постановка задачі та зведення до системи інтегральних рівнянь

Аналогічно до випадку задачі Діріхле-Неймана розглянемо мішану крайову задачу Неймана-Діріхле.

Як і для задачі (3.1.1)-(3.1.3), нехай  $D$  – двозв'язна плоска область, обмежена граничними кривими  $\Gamma_{-1}, \Gamma_0 \in C^2$ . Необхідно знайти функцію  $u$ , що

задовольняє диференціальне рівняння

$$\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(x)) = 0, \quad x \in D, \quad (3.2.1)$$

умову Неймана на  $\Gamma_{-1}$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1 \quad \text{на } \Gamma_{-1} \quad (3.2.2)$$

та умову Діріхле на  $\Gamma_0$

$$u = g_2 \quad \text{на } \Gamma_0 \quad (3.2.3)$$

з відомими функціями  $\sigma \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $\sigma > 0$  та  $g_1, g_2$ .

**Теорема 3.2.1.** *Задача (3.2.1)–(3.2.3) має щонайбільше один розв’язок.*

*Доведення.* Доведення проводиться аналогічно до випадку задачі Діріхле-Неймана. Використовуючи першу формулу Гріна (1.2.4) можна показати, що мішана задача для однорідного рівняння з однорідними крайовими умовами має лише тривіальний розв’язок, а отже задача має щонайбільше один розв’язок.  $\square$

**Зауваження 3.2.2.** *Дана теорема має місце і для випадку неоднорідного ЕРЗК, див. [23].*

**Теорема 3.2.3.** *Розв’язок задачі (3.2.1)–(3.2.3) можна подати у вигляді (3.1.4), з відповідними невідомими густинами, що є розв’язками системи*

$$\begin{cases} \psi + V\psi + V_{-1}\psi_{-1} + V_0\psi_0 = 0 & \text{в } D, \\ \frac{1}{2}\psi_{-1} + T^{(-1)}\psi + T_{-1}^{(-1)}\psi_{-1} + T_0^{(-1)}\psi_0 = g_1 & \text{на } \Gamma_{-1}, \\ W^{(0)}\psi + W_{-1}^{(0)}\psi_{-1} + W_0^{(0)}\psi_0 = g_2 & \text{на } \Gamma_0, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

де оператори визначені формулами (3.1.6)–(3.1.11)

*Доведення.* Оскільки розв'язок має задовольняти як диференціальне рівняння, так і крайові умови, то, враховуючи це, стрибок відповідного параметрикс-потенціалу простого шару разом з властивостями об'ємного параметрикс-потенціалу з теореми 2.1.7 та підставивши (3.1.4) в (3.2.1)–(3.2.3), отримаємо систему гранично-просторових інтегральних рівнянь (3.2.4).  $\square$

### 3.2.2. Параметризація системи інтегральних рівнянь

Аналогічно до випадку задачі Діріхле-Неймана, проводимо заміну змінних та отримуємо таку параметризовану систему

$$\left\{ \begin{aligned} & \varphi(\eta, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{R}_0(\eta, t; \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\xi_{-1}, \tau) \tilde{R}_{-1}(\eta, t; \xi_{-1}, \tau) d\tau = 0, \quad (\eta, t) \in \Pi, \\ & \frac{1}{2} \varphi_{-1}(\xi_{-1}, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \bar{P}(\xi_{-1}, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \varphi_0(\tau) \bar{P}_0(\xi_{-1}, t; \tau) + \varphi_{-1}(\xi_{-1}, \tau) \bar{P}_{-1}(\xi_{-1}, t; \xi_{-1}, \tau) \right) d\tau = \tilde{g}_1(t), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \check{P}(t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\xi_{-1}, \tau) \check{P}_{-1}(t; \xi_{-1}, \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \check{P}_0(t; \tau) d\tau = \tilde{g}_2(t), \end{aligned} \right. \quad (3.2.5)$$

з  $t \in [0, 2\pi)$  для другого та третього рівнянь, функціями  $\varphi(\eta, t) = \psi(p(\eta, t))$ ,  $\varphi_{-1}(\xi_{-1}, t) = \psi_{-1}(\xi_{-1}x(t))$ ,  $\varphi_0(t) = \psi_0(x(t))$ ,  $\tilde{g}_1(t) = g_1(\xi_{-1}x(t))$ ,  $\tilde{g}_2(t) = g_2(x(t))$ , та ядрами

$$\check{P}_0(t; \tau) = 2\pi P(x(t), x(\tau))|x'(\tau)|, \quad (3.2.6)$$

$$\bar{P}(\xi_{-1}, t; \xi, \tau) = 2\pi\sigma(\xi_{-1}x(t)) \frac{\partial P(\xi_{-1}x(t), \xi x(\tau))}{\partial \nu(x_{-1}(t))} J(\xi, \tau), \quad (3.2.7)$$

$$\bar{P}_0(\xi_{-1}, t; \tau) = 2\pi\sigma(\xi_{-1}x(t)) \frac{\partial P(\xi_{-1}x(t), x(\tau))}{\partial \nu(x_{-1}(t))} |x'(\tau)|, \quad (3.2.8)$$

$$\check{P}_{-1}(t; \xi_{-1}, \tau) = 2\pi P(x(t), \xi_{-1}x(\tau))\xi_{-1}|x'(\tau)|, \quad (3.2.9)$$

$$\bar{P}_{-1}(\xi_{-1}, t; \xi_{-1}, \tau) = 2\pi\sigma(\xi_{-1}x(t)) \frac{\partial P(\xi_{-1}x(t), \xi_{-1}x(\tau))}{\partial \nu(x_{-1}(t))} \xi_{-1}|x'(\tau)| \quad (3.2.10)$$

і  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{R}_0$ ,  $\tilde{R}_{-1}$ ,  $\check{P}$ , що визначені у формулах (2.1.17), (2.2.11), (3.1.16), (2.1.19), відповідно. Виділення особливості в  $\tilde{R}$  було розглянуто раніше. Логарифмічну особливість в  $\check{P}_0$  виділимо аналогічно до випадку  $\check{P}_{-1}$  для задачі Діріхле-Неймана. А саме, подібно до формули (3.1.19), ядро  $\check{P}_0$  можна записати так:

$$\check{P}_0(t; \tau) = \check{P}_0^{(1)}(t, \tau) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} + \check{P}_0^{(2)}(t, \tau) \quad (3.2.11)$$

з

$$\check{P}_0^{(1)}(t, \tau) = \frac{1}{2} \frac{|x'(\tau)|}{\sigma(x(\tau))}$$

і

$$\check{P}_0^{(2)}(t, \tau) = \frac{|x'(\tau)|}{\sigma(x(\tau))} \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{|x(t) - x(\tau)|^2}{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}, & \text{якщо } t \neq \tau, \\ \frac{1}{2} \ln (e|x'(t)|^2), & \text{якщо } t = \tau. \end{cases}$$

### 3.2.3. Дискретизація системи IP

Застосування квадратурних формул з колокацією отриманих апроксимаційних рівнянь у квадратурних вузлах дає таку систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \varphi_{-1j} \left[ \frac{1}{2} \delta_{ij} + A_{-1j}^{(-1i)} \right] + \varphi_{0j} A_{0j}^{(-1i)} + \sum_{k=1}^N \varphi_{kj} A_{kj}^{(-1i)} \right) = \tilde{g}_{1i} \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \varphi_{-1j} A_{-1j}^{(0i)} + \varphi_{0j} A_{0j}^{(0i)} + \sum_{k=1}^N \varphi_{kj} A_{kj}^{(0i)} \right) = \tilde{g}_{2i}, \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \varphi_{-1j} A_{-1j}^{(mi)} + \varphi_{0j} A_{0j}^{(mi)} + \sum_{k=1}^N \varphi_{kj} \left[ \delta_{ij}^{(mk)} + A_{kj}^{(mi)} \right] \right) = 0, \end{array} \right. \quad (3.2.12)$$

де  $m = 1, \dots, N$ . Система алгебричних рівнянь (3.2.12) визначається матричними коефіцієнтами  $A_{lj}^{(qi)}$ ,  $l, q = -1, \dots, N$ ,  $i, j = 0, \dots, 2n - 1$  та правою частиною з  $\tilde{g}_{1i} = \tilde{g}_1(t_i)$  і  $\tilde{g}_{2i} = \tilde{g}_2(t_i)$ . Тут для шуканих наближених значень густин у квадратурних вузлах ми використовуємо позначення  $\varphi_{0j} \approx \varphi_0(t_j)$ ,  $\varphi_{-1j} \approx \varphi_{-1}(\xi_{-1}, t_j)$  і  $\varphi_{kj} \approx \varphi(\eta_k, t_j)$ , для  $k = 1, \dots, N$  і  $j = 0, \dots, 2n - 1$ .

Наведені елементи матриці можуть бути виражені через відповідні ядра

$$A_{lj}^{(-1i)} = \begin{cases} \frac{1}{2n} \bar{P}_{-1}(\xi_{-1}, t_i; \xi_{-1}, t_j), & l = -1, \\ \frac{1}{2n} \bar{P}_0(\xi_{-1}, t_i; t_j), & l = 0, \\ \frac{\alpha_l}{2n} \bar{P}(\xi_{-1}, t_i; \eta_l, t_j), & l = 1, \dots, N; \end{cases}$$

$$A_{lj}^{(0i)} = \begin{cases} \frac{1}{2n} \check{P}_{-1}(t_i; \xi_{-1}, t_j), & l = -1, \\ \check{P}_0^{(1)}(t_i, t_j) F_j(t_i) + \frac{1}{2n} \check{P}_0^{(2)}(t_i, t_j), & l = 0, \\ \frac{\alpha_l}{2n} \check{P}(t_i; \eta_l, t_j), & l = 1, \dots, N; \end{cases}$$

$$A_{lj}^{(mi)} = \begin{cases} \frac{1}{2n} \tilde{R}_{-1}(\eta_m, t_i; \xi_{-1}, t_j), & l = -1, \\ \frac{1}{2n} \tilde{R}_0(\eta_m, t_i; t_j), & l = 0, \\ \alpha_l \bar{R}(\eta_m, t_i; \eta_l, t_j), & l = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Перепишемо дані коефіцієнти у явному вигляді:

$$A_{lj}^{(-1i)} = \begin{cases} l = -1 : \\ \frac{1}{2n} \begin{cases} \frac{\sigma(\xi_{-1}x(t_i)) (x(t_i) - x(t_j)) \cdot \nu(\xi_{-1}x(t_i))}{\sigma(\xi_{-1}x(t_j)) |x(t_i) - x(t_j)|^2} |x'(t_j)|, & \text{якщо } i \neq j, \\ \frac{-x'_2(t_i)x''_1(t_i) + x'_1(t_i)x''_2(t_i)}{2|x'(t_i)|^2}, & \text{якщо } i = j, \end{cases} \\ l = 0 : \\ \frac{1}{2n} \frac{\sigma(\xi_{-1}x(t_i)) (\xi_{-1}x(t_i) - x(t_j)) \cdot \nu(\xi_{-1}x(t_i))}{\sigma(x(t_j)) |\xi_{-1}x(t_i) - x(t_j)|^2} |x'(t_j)|, \\ l = 1, \dots, N : \\ \frac{\alpha_l \sigma(\xi_{-1}x(t_i)) (\xi_{-1}x(t_i) - \eta_l x(t_j)) \cdot \nu(\xi_{-1}x(t_i))}{2n \sigma(\eta_l x(t_j)) |\xi_{-1}x(t_i) - \eta_l x(t_j)|^2} J(\eta_l, t_j), \end{cases}$$

$$A_{lj}^{(0i)} = \begin{cases} l = -1 : \\ \frac{1}{2n} \frac{\ln |x(t_i) - \xi_{-1}x(t_j)|}{\sigma(\xi_{-1}x(t_j))} |\xi_{-1}x'(t_j)|, \\ l = 0 : \\ \frac{1}{2} \frac{|x'(t_j)|}{\sigma(x(t_j))} F_j(t_i) + \frac{1}{2n} \frac{|x'(t_j)|}{\sigma(x(t_j))} \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{|x(t_i) - x(t_j)|^2}{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t_i - t_j}{2}}, & \text{якщо } i \neq j, \\ \frac{1}{2} \ln (e|x'(t_i)|^2), & \text{якщо } i = j, \end{cases} \\ l = 1, \dots, N : \\ \frac{\alpha_l \ln |x(t_i) - \eta_l x(t_j)|}{2n \sigma(\eta_l x(t_j))} J(\eta_l, t_j), \end{cases}$$

та

$$A_{lj}^{(mi)} = \begin{cases} l = -1 : \\ \frac{1}{2n} \frac{(\eta_m x(t_i) - \xi_{-1} x(t_j)) \cdot \nabla \sigma(\eta_m x(t_i))}{\sigma(\xi_{-1} x(t_j)) |\eta_m x(t_i) - \xi_{-1} x(t_j)|^2} \xi_{-1} |x'(t_j)|, \\ \\ l = 0 : \\ \frac{1}{2n} \frac{(\eta_m x(t_i) - x(t_j)) \cdot \nabla \sigma(\eta_m x(t_i))}{\sigma(x(t_j)) |\eta_m x(t_i) - x(t_j)|^2} |x'(t_j)|, \\ \\ l = 1, \dots, N : \\ \alpha_l \begin{cases} \frac{1}{2n} \frac{(\eta_m x(t_i) - \eta_l x(t_j)) \cdot \nabla \sigma(\eta_m x(t_i))}{\sigma(\eta_l x(t_j)) |\eta_m x(t_i) - \eta_l x(t_j)|^2} J(\eta_l, t_j), & \text{якщо } m \neq l, \\ \\ \frac{1}{2n} \tilde{R}^{(1)}(\eta_m, t_i; \eta_l, t_j) + \tilde{R}^{(2)}(\eta_m, t_i; \eta_l, t_j) T_j(t_i), & \text{якщо } m = l. \end{cases} \end{cases}$$

**Зауваження 3.2.4.** Для елементів  $A_{mj}^{(mi)}$  вигляд функцій  $\tilde{R}^{(1)}$  та  $\tilde{R}^{(2)}$  наведено у формулах (2.1.23) та (2.1.24) відповідно.

Маючи наближені значення густин у квадратурних вузлах з (3.2.12), можна знайти апроксимацію розв'язку мішаної крайової задачі в області, використовуючи його подання. Знову зауважимо, що це подання містить інтеграл по області, де ядро має логарифмічну особливість, яку явно виділяємо. Отже, для наближеного розв'язку задачі Неймана-Діріхле можемо використати формулу (3.1.21).

### 3.3. Узагальнення для двозв'язної області

Розглянемо тепер випадок, коли двозв'язна область  $D$  обмежена двома кривими, не обмежуючись випадком, коли вони володіють властивістю гомотетії одна відносно іншої. Вважаємо, що криві  $\Gamma_{-1}$  та  $\Gamma_0$  можна задати параметрично

$$\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = (x_{-11}(t), x_{-12}(t)), t \in [0, 2\pi)\}, \quad (3.3.1)$$



$$\Gamma_0 = \{x_0(t) = (x_{01}(t), x_{02}(t)), t \in [0, 2\pi)\}, \quad (3.3.2)$$

Тоді область  $D$  можна описати кривими  $\Gamma_k$ , що визначаються так

$$\Gamma_k = \left\{ x_k(t) = \begin{pmatrix} (1 - \xi_k)x_{-11}(t) + \xi_k x_{01}(t), \\ (1 - \xi_k)x_{-12}(t) + \xi_k x_{02}(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi) \right\}, \quad (3.3.3)$$

де  $k = 1, \dots$ ,  $\xi_k \in (0, 1)$  – фіксований параметр.

Тобто, в подвійних інтегралах систем (3.1.5) та (3.2.4) будемо робити таку заміну змінних

$$\begin{cases} y_1 = p_1(\xi, \tau) = (1 - \xi)x_{-11}(\tau) + \xi x_{01}(\tau), \\ y_2 = p_2(\xi, \tau) = (1 - \xi)x_{-12}(\tau) + \xi x_{02}(\tau), \end{cases} \quad (3.3.4)$$

де  $(\xi, \tau) \in \Pi = (0, 1) \times [0, 2\pi)$ ; функція відображення  $p(\xi, \tau) = (p_1(\xi, \tau), p_2(\xi, \tau))$ .

Якобіан для такого перетворення має вигляд

$$J(\xi, \tau) = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} & \frac{\partial p_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \xi} & \frac{\partial p_2}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (-x_{-11}(\tau) + x_{01}(\tau))[(1 - \xi)x'_{-12}(\tau) + \xi x'_{02}(\tau)] - \\ (-x_{-12}(\tau) + x_{02}(\tau))[(1 - \xi)x'_{-11}(\tau) + \xi x'_{01}(\tau)]. \end{pmatrix}$$

**Зауваження 3.3.1.** При  $\xi_k \rightarrow 0$  крива  $\Gamma_k$  з (3.3.3) вироджується у внутрішню граничну криву  $\Gamma_{-1}$ . У випадку  $\xi_k \rightarrow 1$  – у  $\Gamma_0$ .

**Зауваження 3.3.2.**  $\Gamma_k$  можна описати й іншим способом. А саме

$$\Gamma_k = \left\{ x_k(t) = \begin{pmatrix} \xi_k x_{-11}(t) + (1 - \xi_k)x_{01}(t), \\ \xi_k x_{-12}(t) + (1 - \xi_k)x_{02}(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi) \right\}. \quad (3.3.5)$$

У цьому випадку

$$\begin{cases} y_1 = p_1(\xi, \tau) = \xi x_{-11}(\tau) + (1 - \xi)x_{01}(\tau), \\ y_2 = p_2(\xi, \tau) = \xi x_{-12}(\tau) + (1 - \xi)x_{02}(\tau), \end{cases} \quad (3.3.6)$$

*i*

$$J(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} (x_{-11}(\tau) - x_{01}(\tau))[\xi x'_{-12}(\tau) + (1 - \xi)x'_{02}(\tau)] - \\ (x_{-12}(\tau) - x_{02}(\tau))[\xi x'_{-11}(\tau) + (1 - \xi)x'_{01}(\tau)]. \end{pmatrix}$$

**Зауваження 3.3.3.** Для значення  $\xi = 0.5$  якобіани заміни змінних для (3.3.4) та (3.3.6) будуть відрізнятися знаком, хоча крива буде та сама.

Подвійні інтеграли, які виникають при розв'язуванні відповідних систем гранично-просторових інтегральних рівнянь для мішаних крайових задач, містять функцію залишку  $R$ , параметрикс  $P$  чи нормальну похідну параметрикса  $\frac{\partial P}{\partial \nu}$ . Зауважимо, що виділення особливостей проводиться аналогічно до випадку кільцеподібних областей. Розглянемо випадок виділення особливості в ядрі  $\tilde{R}$ .

**Теорема 3.3.4.** Ядро  $\tilde{R}(\eta, t; \eta, \tau)$ , визначене в системах (3.1.13), (3.2.5) можна подати у вигляді

$$\tilde{R}(\eta, t; \eta, \tau) = \tilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) + \tilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) \cot \frac{\tau - t}{2} \quad (3.3.7)$$

з функціями

$$\tilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) = \frac{\nabla \sigma(\tilde{x}(t)) \cdot \nu(\tilde{x}(t)) K_1(t, \tau)}{\sigma(\tilde{x}(\tau))} J(\eta, \tau) - \frac{1}{|\tilde{x}'(t)|} \frac{\nabla \sigma(\tilde{x}(t)) \cdot \theta(\tilde{x}(t)) K_2(t, \tau)}{\sigma(\tilde{x}(\tau))} J(\eta, \tau), \quad (3.3.8)$$

$$\tilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) = -\frac{1}{2|\tilde{x}'(t)|} \frac{\nabla \sigma(\tilde{x}(t)) \cdot \theta(\tilde{x}(t))}{\sigma(\tilde{x}(\tau))} J(\eta, \tau), \quad (3.3.9)$$

зокрема

$$K_1(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(\tilde{x}(t) - \tilde{x}(\tau)) \cdot \nu(\tilde{x}(t))}{|\tilde{x}(t) - \tilde{x}(\tau)|^2}, & \text{якщо } t \neq \tau, \\ \frac{-\tilde{x}'_2(t)\tilde{x}''_1(t) + \tilde{x}'_1(t)\tilde{x}''_2(t)}{2|\tilde{x}'(t)|^3}, & \text{якщо } t = \tau; \end{cases}$$

і

$$K_2(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(\tilde{x}(\tau) - \tilde{x}(t)) \cdot \tilde{x}'(t)}{|\tilde{x}(t) - \tilde{x}(\tau)|^2} - \frac{\sin(\tau - t)}{2(1 - \cos(\tau - t))}, & \text{якщо } t \neq \tau, \\ \frac{\tilde{x}'(t) \cdot \tilde{x}''(t)}{2|\tilde{x}'(t)|^2}, & \text{якщо } t = \tau, \end{cases}$$

де  $\tilde{x}(t) = p(\eta, t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$  для фіксованого  $\eta$ .

*Доведення.* Для фіксованого  $\eta$  позначимо  $\tilde{x}(t) = p(\eta, t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$  криву, на якій точка інтегрування може співпасти з точкою спостереження. Тоді, провівши перетворення, аналогічні до описаних у розділі 2, ядро  $\tilde{R}(\eta, t; \eta, \tau)$  можна подати у вигляді (3.3.7) з відповідними функціями (3.3.8) та (3.3.9). Вигляд функцій  $K_1, K_2$  при  $t = \tau$ , як значення границі, було отримано з допомогою пакету Wolfram Mathematica.  $\square$

**Зауваження 3.3.5.** У наведених вище формулах позначення  $\nu(\tilde{x}(t)), \theta(\tilde{x}(t))$  відносяться до кривої, визначеної відображенням  $p(\eta, t)$ , при фіксованому  $\eta$ . Так, наприклад, одиничний вектор дотичної  $\theta(\tilde{x}(t))$  буде обчислюватись за формулою

$$\theta(\tilde{x}(t)) = \frac{\tilde{x}'(t)}{|\tilde{x}'(t)|} = \frac{(\tilde{x}'_1(t), \tilde{x}'_2(t))}{|\tilde{x}'(t)|}.$$

Для повноти викладу наведемо вигляд й інших ядер для задач Діріхле-Неймана та Неймана-Діріхле.

1. Ядра що відносяться до диференціального рівняння (спільні для обох задач):

$$\tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) = 2\pi R(p(\eta, t), p(\xi, \tau))J(\xi, \tau); \quad (3.3.10)$$

$$\tilde{R}_0(\eta, t; \tau) = 2\pi R(p(\eta, t), x_0(\tau))|x'_0(\tau)|; \quad (3.3.11)$$

$$\tilde{R}_{-1}(\eta, t; \tau) = 2\pi R(p(\eta, t), x_{-1}(\tau))|x'_{-1}(\tau)|. \quad (3.3.12)$$

2. Ядра для системи (3.1.13) задачі Діріхле-Неймана:

$$\hat{P}(t; \xi, \tau) = 2\pi P(x_{-1}(t), p(\xi, \tau))J(\xi, \tau); \quad (3.3.13)$$

$$\hat{P}_0(t; \tau) = 2\pi P(x_{-1}(t), x_0(\tau))|x'_0(\tau)|; \quad (3.3.14)$$

$$\hat{P}_{-1}(t; \tau) = 2\pi P(x_{-1}(t), x_{-1}(\tau))|x'_{-1}(\tau)|; \quad (3.3.15)$$

$$\tilde{P}(t; \xi, \tau) = 2\pi\sigma(x_0(t))\frac{\partial P(x_0(t), p(\xi, \tau))}{\partial\nu(x_0(t))}J(\xi, \tau); \quad (3.3.16)$$

$$\tilde{P}_0(t; \tau) = 2\pi\sigma(x_0(t))\frac{\partial P(x_0(t), x_0(\tau))}{\partial\nu(x_0(t))}|x'_0(\tau)|; \quad (3.3.17)$$

$$\tilde{P}_{-1}(t; \tau) = 2\pi\sigma(x_0(t))\frac{\partial P(x_0(t), x_{-1}(\tau))}{\partial\nu(x_0(t))}|x'_{-1}(\tau)|. \quad (3.3.18)$$

3. Ядра для системи (3.2.5) задачі Неймана-Діріхле:

$$\check{P}(t; \xi, \tau) = 2\pi P(x_0(t), p(\xi, \tau))J(\xi, \tau); \quad (3.3.19)$$

$$\check{P}_0(t; \tau) = 2\pi P(x_0(t), x_0(\tau))|x'_0(\tau)|; \quad (3.3.20)$$

$$\check{P}_{-1}(t; \tau) = 2\pi P(x_0(t), x_{-1}(\tau))|x'_{-1}(\tau)|; \quad (3.3.21)$$

$$\bar{P}(t; \xi, \tau) = 2\pi\sigma(x_{-1}(t))\frac{\partial P(x_{-1}(t), p(\xi, \tau))}{\partial\nu(x_{-1}(t))}J(\xi, \tau); \quad (3.3.22)$$

$$\bar{P}_0(t; \tau) = 2\pi\sigma(x_{-1}(t))\frac{\partial P(x_{-1}(t), x_0(\tau))}{\partial\nu(x_{-1}(t))}|x'_0(\tau)|; \quad (3.3.23)$$

$$\bar{P}_{-1}(t; \tau) = 2\pi\sigma(x_{-1}(t))\frac{\partial P(x_{-1}(t), x_{-1}(\tau))}{\partial\nu(x_{-1}(t))}|x'_{-1}(\tau)|. \quad (3.3.24)$$

Ядра  $\widehat{P}_{-1}(t; \tau)$  для задачі Діріхле-Неймана та  $\check{P}_0(t; \tau)$  для задачі Неймана-Діріхле мають логарифмічну особливість, яку легко виділити у вигляді вагової функції, через подання ядра у вигляді суми двох доданків (див., наприклад, (3.2.11)). Явний вигляд для інших ядер можна отримати провівши відповідні підстановки та нескладні обчислення.

Далі проводимо повну дискретизацію систем інтегральних рівнянь методом Нистрьома та знаходимо наближені значення густин. Для апроксимації розв'язку в області використаємо формулу

$$u_{Nn}(p(\eta, t)) = \sum_{j=0}^{2n-1} \left[ \tilde{A}_{-1j}(\eta, t)\varphi_{-1j} + \tilde{A}_{0j}(\eta, t)\varphi_{0j} + \sum_{k=1}^N \tilde{A}_{kj}(\eta, t)\varphi_{kj} \right], \quad p(\eta, t) \in D, \quad (3.3.25)$$

де

$$\tilde{A}_{-1j}(\eta, t) = \frac{1}{2n} \frac{\ln |p(\eta, t) - x_{-1}(t_j)|}{\sigma(x_{-1}(t_j))} |x_{-1}(t_j)|,$$

$$\tilde{A}_{0j}(\eta, t) = \frac{1}{2n} \frac{\ln |p(\eta, t) - x_0(t_j)|}{\sigma(x_0(t_j))} |x'_0(t_j)|.$$

Для  $\tilde{A}_{kj}(\eta, t)$  маємо

$$\tilde{A}_{kj}(\eta, t) = \frac{\alpha_k \ln |p(\eta, t) - p(\eta_k, t_j)|}{2n \sigma(p(\eta_k, t_j))} J(\eta_k, t_j), \quad \eta \neq \eta_k, \quad (3.3.26)$$

$$\tilde{A}_{kj}(\eta, t) = \alpha_k \left[ \dot{P}^{(1)}(\eta_k, t_j) F_j(t) + \frac{1}{2n} \dot{P}^{(2)}(\eta, t; \eta_k, t_j) \right], \quad \eta = \eta_k, \quad (3.3.27)$$

3

$$\dot{P}^{(2)}(\eta, t; \eta_k, t_j) = \begin{cases} \dot{P}^{(1)}(\eta_k, t_j) \ln \frac{|p(\eta, t) - p(\eta, t_j)|^2}{e^{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-t_j}{2}}}, & t \neq t_j, \\ \dot{P}^{(1)}(\eta_k, t_j) \ln(e|p'_t(\eta, t)|^2), & t = t_j, \end{cases}$$

та

$$\dot{P}^{(1)}(\eta_k, t_j) = \frac{1}{2} \frac{J(\eta_k, t_j)}{\sigma(p(\eta_k, t_j))}.$$

Варто відзначити, що окрім значень розв'язку в області можна також знайти його дані Коші на граничних кривих  $\Gamma_{-1}$  та  $\Gamma_0$ . Зокрема, ці значення використовуються для побудови наближеного розв'язку задачі Коші ітеративними методами, що буде розглянуто у наступному розділі.

**Теорема 3.3.6.** Дані Коші на граничних кривих  $\Gamma_{-1}$  і  $\Gamma_0$  визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\psi_{-1}(x)}{\sigma(x)} + \int_D \psi(y) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} dy + \int_{\cdot -1} \psi_{-1}(y) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \\ &+ \int_{\cdot 0} \psi_0(y) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y), \quad x \in \Gamma_{-1}, \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= -\frac{1}{2} \frac{\psi_0(x)}{\sigma(x)} + \int_D \psi(y) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} dy + \int_{\cdot -1} \psi_{-1}(y) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \\ &+ \int_{\cdot 0} \psi_0(y) \frac{\partial P(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y), \quad x \in \Gamma_0, \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_D \psi(y) P(x, y) dy + \int_{\cdot -1} \psi_{-1}(y) P(x, y) ds(y) + \\ &+ \int_{\cdot 0} \psi_0(y) P(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma_{-1} \text{ чи } x \in \Gamma_0. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

*Доведення.* Використовуючи подання розв'язку (3.1.4) та враховуючи властивості параметрикс-потенціалу простого шару та об'ємного параметрикс-потенціалу з теореми 2.1.7, отримаємо формули (3.3.28)-(3.3.30).  $\square$

Провівши заміну змінних, виділивши логарифмічні особливості у відповідних інтегралах та застосували квадратурні формули можна отримати наближені значення функції та нормальної похідної на  $\Gamma_{-1}$ ,  $\Gamma_0$ .

Для знаходження даних Коші на  $\Gamma_{-1}$  можна використати формули (3.3.28) та (3.3.30) та їх дискретні апроксимації

$$u_{Nn}(x_{-1}(t)) = \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \varphi_{-1j} \dot{A}_{-1j}(t) + \varphi_{0j} \dot{A}_{0j}(t) + \sum_{k=1}^N \varphi_{kj} \dot{A}_{kj}(t) \right), \quad (3.3.31)$$

$$\frac{\partial u_{Nn}}{\partial \nu}(x_{-1}(t)) = \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \varphi_{-1j} \left[ \frac{1}{2\sigma(x_{-1}(t))} + \ddot{A}_{-1j}(t) \right] + \varphi_{0j} \ddot{A}_{0j}(t) + \sum_{k=1}^N \varphi_{kj} \ddot{A}_{kj}(t) \right), \quad (3.3.32)$$

де

$$\dot{A}_{-1j}(t) = \left[ \widehat{P}_{-1}^{(1)}(t_j) F_j(t) + \frac{1}{2n} \widehat{P}_{-1}^{(2)}(t, t_j) \right],$$

а  $\widehat{P}_{-1}^{(1)}$ ,  $\widehat{P}_{-1}^{(2)}$  – функції, що можна отримати після виділення логарифмічної особливості у (3.3.15), про що згадувалось раніше;

$$\begin{aligned} \dot{A}_{0j}(t) &= \frac{1}{2n} \frac{\ln |x_{-1}(t) - x_0(t_j)|}{\sigma(x_0(t_j))} |x'_0(t_j)|; \\ \dot{A}_{kj}(t) &= \frac{\alpha_k}{2n} \frac{\ln |x_{-1}(t) - p(\eta_k, t_j)|}{\sigma(p(\eta_k, t_j))} J(\eta_k, t_j); \\ \ddot{A}_{-1j}(t) &= \frac{1}{2n} \begin{cases} \frac{1}{\sigma(x_{-1}(t))} \frac{(x_{-1}(t) - x_{-1}(t_j)) \cdot \nu(x_{-1}(t))}{|x_{-1}(t) - x_{-1}(t_j)|^2} |x'_{-1}(t_j)|, & t \neq t_j \\ \frac{1}{\sigma(x_{-1}(t))} \frac{-x'_{-12}(t)x''_{-11}(t) + x'_{-11}(t)x''_{-12}(t)}{2|x'_{-1}(t)|^2}, & t = t_j, \end{cases} \\ \ddot{A}_{0j}(t) &= \frac{1}{2n} \frac{1}{\sigma(x_0(t_j))} \frac{(x_{-1}(t) - x_0(t_j)) \cdot \nu(x_{-1}(t))}{|x_{-1}(t) - x_0(t_j)|^2} |x'_0(t_j)| \\ \ddot{A}_{kj}(t) &= \frac{\alpha_k}{2n} \frac{1}{\sigma(p(\eta_k, t_j))} \frac{(x_{-1}(t) - p(\eta_k, t_j)) \cdot \nu(x_{-1}(t))}{|x_{-1}(t) - p(\eta_k, t_j)|^2} J(\eta_k, t_j) \end{aligned}$$

### 3.4. Чисельні експерименти

У цьому підрозділі представлено чисельні результати задач Діріхле-Неймана та Неймана-Діріхле для різних вхідних даних та різних конфігурацій двозв'язних областей. Разом з апроксимацією розв'язку в області будуть наведені наближені значення нормальної похідної на кривій  $\Gamma_{-1}$  та значення шуканої функції на  $\Gamma_0$  для задачі Діріхле-Неймана, а також значення розв'язку і її нормальної похідної на  $\Gamma_{-1}$  та  $\Gamma_0$ , відповідно, у випадку задачі Неймана-Діріхле.

#### Задача Діріхле-Неймана

##### Приклад 1

Нехай область  $D$  (див. рис. 3.1) обмежена двома колами:

$$\Gamma_0 = \{x(t) = (1.2 \cos(t), 1.2 \sin(t)), t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = (0.6 \cos(t), 0.6 \sin(t)), t \in [0, 2\pi)\}.$$

Очевидно, що у цьому випадку маємо  $\xi_{-1} = 0.5$ .

Функція  $\sigma$  має вигляд

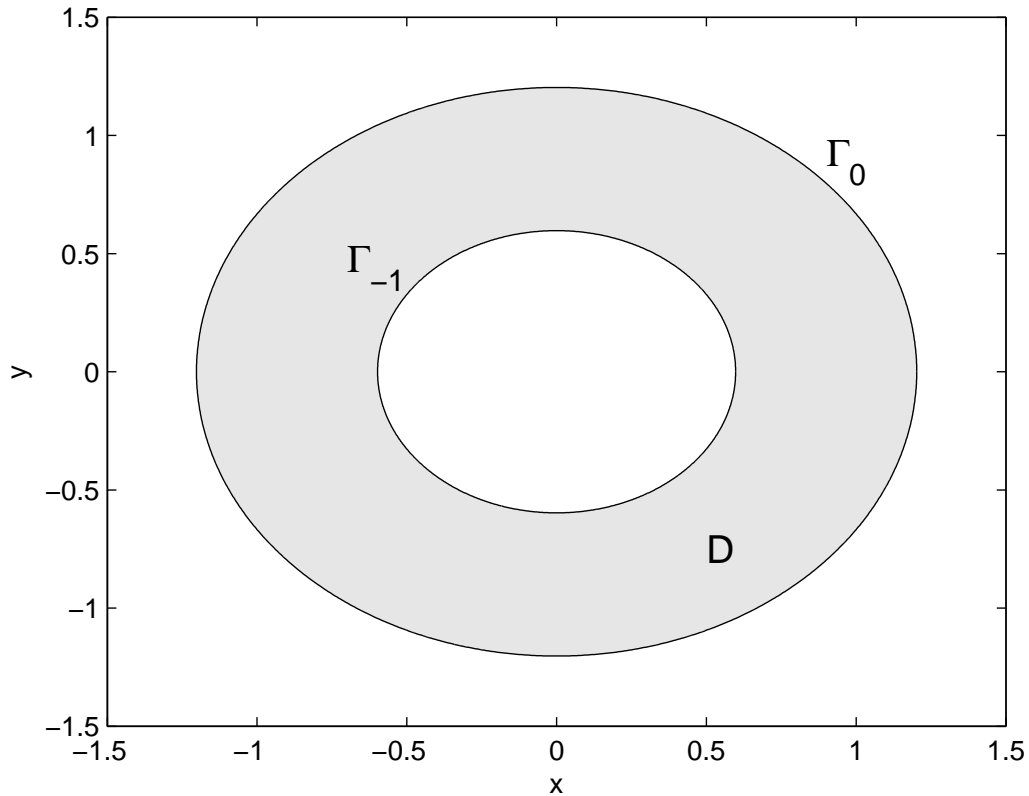
$$\sigma(x) = 4 - x_1^2 + x_2^2, \quad x \in D.$$

Функції  $f_1$  та  $f_2$  для мішаної задачі є такі:

$$f_1(x) = x_1 x_2, \quad x \in \Gamma_{-1}, \quad f_2(x) = 0.6 x_1 x_2 (4 - x_1^2 + x_2^2), \quad x \in \Gamma_0.$$

Легко бачити, що  $u_{ex}(x) = x_1 x_2$ ,  $x \in D$  є точним розв'язком задачі (3.1.1)–(3.1.3).

У квадратурних формулах для повторних інтегралів ми використовуємо квадратуру середніх прямокутників до змінної  $\xi \in (\xi_{-1}, 1)$  з вагами  $\alpha_k = \frac{1-\xi_{-1}}{N}$  та квадратурнимим вузлами  $\eta_k = 1 - \frac{1-\xi_{-1}}{2N}(2k-1)$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Рис. 3.1: Область  $D$  для прикладу 1.

$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma}_3)}$
3	32	2.33E-05	6.64E-05	1.31E-04
	64	8.86E-08	2.52E-07	5.47E-07
6	64	1.16E-05	3.45E-05	7.51E-05
	128	4.97E-08	1.47E-07	3.21E-07
12	128	5.80E-06	1.76E-05	3.85E-05
	256	2.63E-08	7.97E-08	1.74E-07

Табл. 3.1: Абсолютна похибка на внутрішніх кривих  $\tilde{\Gamma}_1$ – $\tilde{\Gamma}_3$  для прикладу 1.

Похибка розв'язку наведена для трьох кривих, що лежать всередині області, володіють властивістю гомотетії відносно зовнішньої граничної кривої області та мають таке параметричне подання

$$\tilde{\Gamma}_k = \{\tilde{x}_k(t) = (\xi_{-1} + \frac{1 - \xi_{-1}}{40}(12k - 5))x(t), t \in [0, 2\pi)\}, k = 1, 2, 3. \quad (3.4.1)$$



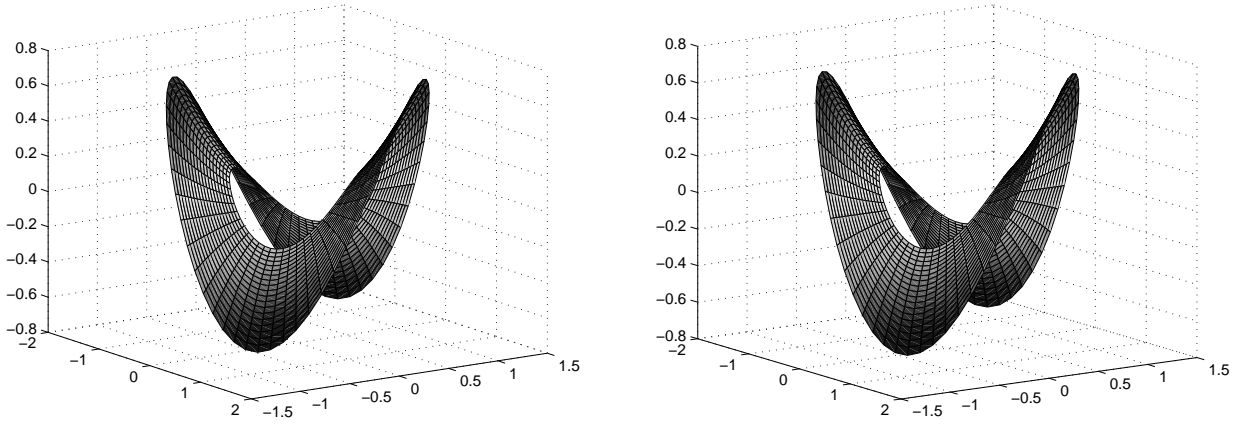
Нескладні обчислення показують, що параметр гомотетії (параметр  $\xi_{-1}$ ), який відноситься до кривих  $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Gamma}_3 \in 0.5875, 0.7375$  та  $0.8875$ , відповідно. Ці значення відповідають 4-ій, 10-ій та 16-ій кривій, якщо лічити починаючи з першої внутрішньої кривої після  $\Gamma_{-1}$  у випадку параметра дискретизації  $N = 20$ . Абсолютні похибки для різних дискретизаційних параметрів  $N$  та  $n$  представлені в таблиці 3.1.

У таблиці 3.2 відображено абсолютну похибку нормальної похідної на  $\Gamma_{-1}$  та функції розв'язку на  $\Gamma_0$  разом з відносною похибкою в  $L_2$ -нормі в області  $D$  для тих же параметрів  $N$  та  $n$ , що в таблиці 3.1. Для обчислення відносної похибки в області використовуємо формулу (2.3.3) з  $\tilde{N} = 20$  та  $\tilde{n} = 32$

$N$	$n$	$\left\  \frac{\partial u_{Nn}}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{ex}}{\partial \nu} \right\ _{C(\cdot, -1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\cdot, 0)}$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} \cdot 100\%$
3	32	2.10E-04	1.55E-04	1.455
	64	7.97E-07	5.85E-07	0.271
6	64	1.09E-04	1.02E-04	0.270
	128	4.67E-07	4.33E-07	0.025
12	128	5.62E-05	5.79E-05	0.025
	256	2.54E-07	2.62E-07	4.8E-04

Табл. 3.2: Абсолютна похибка нормальної похідної та функції на  $\Gamma_{-1}, \Gamma_0$ , відповідно, і відносна похибка в  $D$  для прикладу 1.

Чисельна апроксимація (для параметрів  $N = 6, n = 64$ ) та точний розв'язок в області  $D$  показано на рис. 3.2. З чисельних експериментів можна побачити, що параметри  $N$  і  $n$  пов'язані між собою – збільшення  $N$  вдвічі потребує збільшення параметра  $n$  принаймні у два рази, щоб зменшити похибку. Загалом, наведена відносна похибка (у відсотках) в області зменшується на порядок при збільшенні параметрів  $N$  та  $n$  вдвічі, що підтверджує збіжність запропонованого методу чисельного розв'язування задачі.



а). точний розв'язок

б). наближений розв'язок

Рис. 3.2: Точний та наближений розв'язки в області  $D$  для прикладу 1.

## Приклад 2

Нехай область  $D$  (див рис. 3.3) обмежена граничними кривими:

$$\Gamma_0 = \{x_0(t) = (\cos(t), \sin^2(t) + \sin(t) - 0.9), t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = (0.4 \cos(t), 0.5(\sin(t) - \sin^2(t) + 0.6)), t \in [0, 2\pi)\}.$$

Функція  $\sigma$  визначена як  $\sigma(x) = (4 + x_1 + x_2)^2$ ,  $x \in D$ . Легко бачити, що функція  $u_{ex}(x) = (x_1^2 - x_2^2)/(4 + x_1 + x_2)$  задовольняє основне диференціальне рівняння і є точним розв'язком мішаної крайової задачі з вхідними функціями, згенерованими на основі цього подання:

$$f_1(x) = (x_1^2 - x_2^2)/(4 + x_1 + x_2), x \in \Gamma_{-1},$$

$$f_2(x) = (4 + x_1 + x_2)^2 \nabla u_{ex}(x) \cdot \nu(x), x \in \Gamma_0.$$

Для прикладу наведено похибку розв'язку для трьох кривих, що лежать всередині області, але визначаються через лінійну комбінацію  $\Gamma_{-1}$  та  $\Gamma_0$

$$\bar{\Gamma}_k = \{\bar{x}_k(t) = (1 - \frac{12k-5}{40})x_{-1}(t) + \frac{12k-5}{40}x_0(t), t \in [0, 2\pi)\}, k = 1, 2, 3. \quad (3.4.2)$$

Фактично,  $\bar{\Gamma}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  є 4-ою, 10-ою та 16-ою кривою, відповідно, які можна отримати з (3.3.3), де  $\xi_i = \frac{2i-1}{2N}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , а  $N = 20$ . Абсолютні

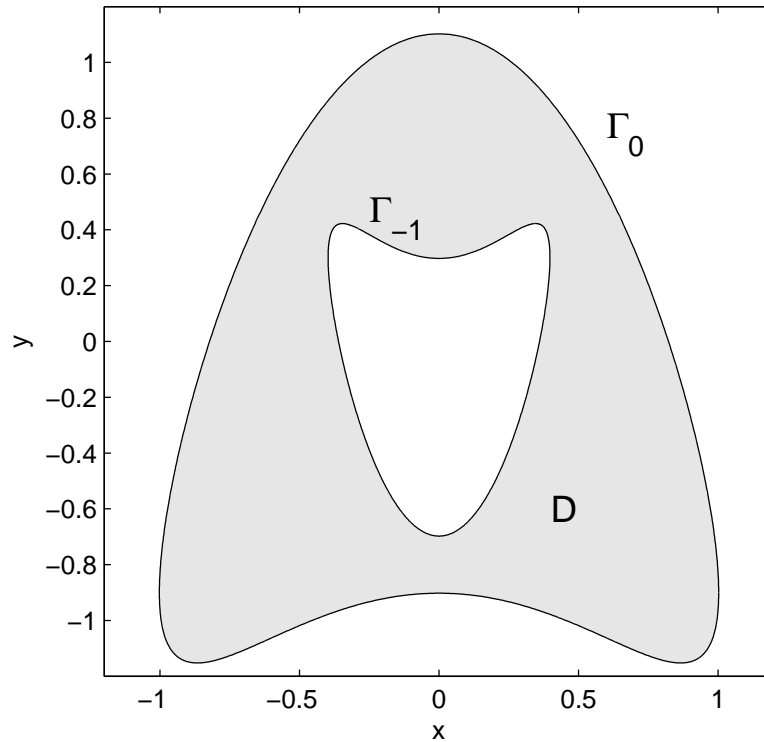


Рис. 3.3: Область  $D$  для прикладу 2.

похибки на  $\bar{\Gamma}_k$  наведені в таблиці 3.3. Відносна похибка розв'язку в області  $D$ , абсолютна похибка нормальної похідної на  $\Gamma_{-1}$  та похибка розв'язку на  $\Gamma_0$  відображені в таблиці 3.4. На рис. 3.4 подано точний розв'язок в області  $D$  та його апроксимацію при параметрах дискретизації  $N = 6$  та  $n = 128$ . Результати продемонстровані в таблиці 3.3 показують, що, на відміну від попереднього прикладу, де збільшення параметра  $n$  суттєво впливало на зменшення похибки, тут, збільшення кількості квадратурних вузлів на кривих приводить лише до уточнення значень – похибка практично не змінюється, тоді, як для параметра  $N$  маємо квадратичний порядок збіжності. Відносна похибка наведена в таблиці 3.4 демонструє збіжність методу. Різницю швидкості збіжності для параметрів  $N, n$  у прикладах 1 та 2 можна пояснити наближеністю ЕРЗК у деякому сенсі до рівняння Лапласа (див. [102]), використанням методу інтегральних рівнянь та гладкістю підінтегральних функцій.

$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\bar{\Gamma}_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\bar{\Gamma}_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\bar{\Gamma}_3)}$
3	32	1.19E-03	1.16E-03	5.26E-03
	64	1.10E-03	1.03E-03	2.10E-03
6	64	2.44E-04	6.44E-04	1.23E-03
	128	2.42E-04	5.97E-04	5.89E-04
12	128	2.21E-04	3.39E-04	6.21E-04
	256	2.21E-04	6.96E-05	1.54E-04

Табл. 3.3: Абсолютна похибка на  $\bar{\Gamma}_1$ - $\bar{\Gamma}_3$  для прикладу 2.

$N$	$n$	$\ \frac{\partial u_{Nn}}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{ex}}{\partial \nu}\ _{C(\cdot_{-1})}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\cdot_0)}$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} \cdot 100\%$
3	32	1.51E-02	9.59E-03	3.550
	64	8.12E-03	9.78E-03	1.489
6	64	2.41E-03	2.67E-03	0.871
	128	3.39E-03	2.79E-03	0.343
12	128	1.39E-03	8.22E-04	0.211
	256	2.58E-03	7.55E-04	0.076

Табл. 3.4: Абсолютна похибка нормальної похідної та функції на  $\Gamma_{-1}$ ,  $\Gamma_0$ , відповідно, разом з відносною похибкою  $D$  для прикладу 2.

## Задача Неймана-Діріхле

### Приклад 3

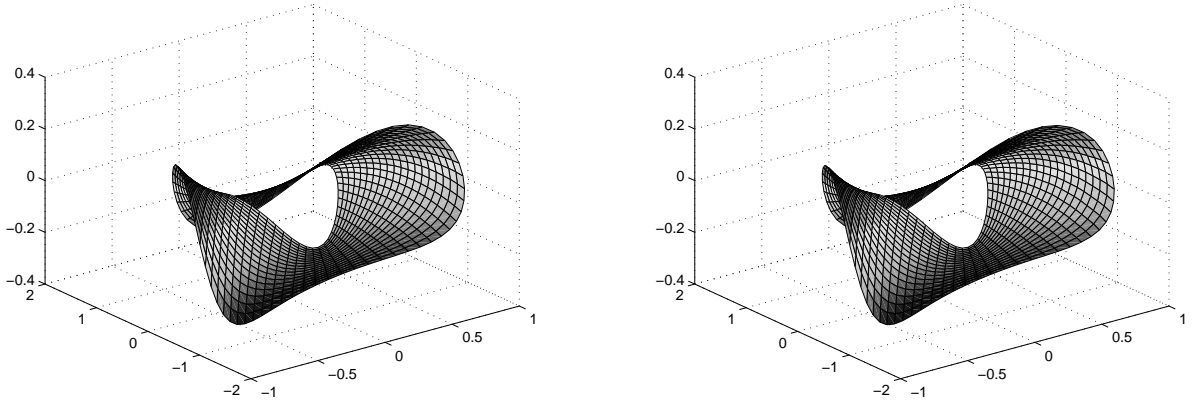
Нехай область  $D$  обмежена двома кривими (див. рис. 3.5):

$$\Gamma_0 = \{x(t) = \sqrt{(0.5 \cos(t))^2 + (0.25 \sin(t))^2}(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = 0.4\sqrt{(0.5 \cos(t))^2 + (0.25 \sin(t))^2}(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi)\}.$$

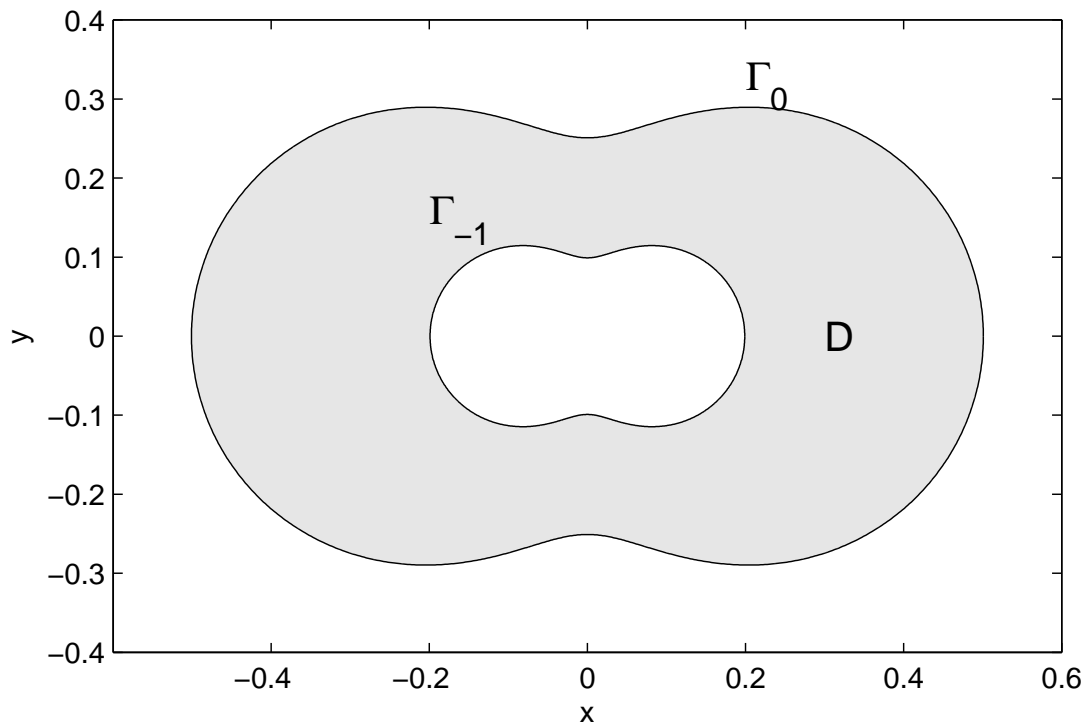
Порівнюючи дані з поданням граничних кривих у формулі (3.1.12) можна побачити, що, параметр  $\xi_{-1} = 0.4$ . Функція провідності  $\sigma$  визначається як

$$\sigma(x) = e^{-x_1 x_2}, \quad x \in D.$$



а). точний розв'язок

б). наближений розв'язок

Рис. 3.4: Точний та наближений розв'язки в  $D$  для прикладу 2.Рис. 3.5: Область  $D$  для прикладу 3.

Функції  $g_1$  та  $g_2$  є відомими та задані як

$$g_1(x) = e^{-x_1 x_2} (2x_1, 2x_2) \cdot \nu(x), \quad x \in \Gamma_{-1},$$

$$g_2(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad x \in \Gamma_0.$$

Легко переконатись, що для таких вхідних даних  $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$  є точним розв'язком (3.2.1)–(3.2.3). У квадратурних формулах використано правило середніх прямокутників до змінної  $\xi \in (\xi_{-1}, 1)$ .

Отримані чисельні результати наведені в таблиці 3.5. Зокрема, в таблиці відображено максимум-похибку розв'язку на кривій  $\tilde{\Gamma}$ , що лежить між (а точніше, посередині)  $\Gamma_{-1}$  та  $\Gamma_0$ , та визначається так

$$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{x}(t) = (0.5(1 + \xi_{-1}))x(t), \quad t \in [0, 2\pi)\}. \quad (3.4.3)$$

Зауважимо, що жодна з  $N$  квадратурних кривих, отриманих під час дискретизації, не співпадає з  $\tilde{\Gamma}$ . Також, у таблиці наведено максимум-похибку на  $\Gamma_{-1}$  та відносну похибку розв'язку в області в  $L_2$ -нормі. Для обчислення відносної похибки використовувалась апроксимація (2.3.3) з  $\tilde{N} = 20$  та  $\tilde{n} = 32$ .

$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\Gamma})}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\Gamma_{-1})}$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} \cdot 100\%$
3	32	1.7757E-06	8.2788E-07	1.3722
	64	1.9659E-08	9.9670E-09	0.2160
6	64	3.8392E-07	1.7186E-07	0.2160
	128	4.4777E-09	2.2525E-09	0.0134
12	128	8.5645E-08	3.6518E-08	0.0134
	256	9.8397E-10	4.8968E-10	0.0005

Табл. 3.5: Абсолютна та відносна похибки прикладу. 3.

При збільшенні параметра  $n$  похибка зменшується більш ніж на порядок, тоді, як для досягнення лінійної збіжності за параметром  $N$  потрібно пропорційно збільшувати значення  $n$ , що може бути зумовлено недостатньою гладкістю підінтегральної функції. Відносна похибка у відсотках при одночасному збільшенні параметрів  $N$  та  $n$  суттєво зменшується. Для максимальних параметрів дискретизації  $N = 12$ ,  $n = 256$  маємо мале значення відносної похибки

в області (всього 0.0005%), що вказує на ефективність запропонованого методу.

#### Приклад 4

Область  $D$  обмежена кривими

$$\Gamma_0 = \{x_0(t) = (0.5 \cos(t), 0.4 \sin(t) - 0.3 \sin^2(t)), t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = (0.2 \cos(t) + 0.1 \cos(2t) - 0.05, 0.2 \sin(t) - 0.25), t \in [0, 2\pi)\}.$$

Вигляд області  $D$  наведено на рис. 3.6; параметризацію області  $D$  з відповідною дискретизацією ( $N = 20$  внутрішніх кривих та  $2n$  вузлів на кожній кривій, де  $n = 32$ ) для кращої візуалізації заміни змінних, наведено на рис. 3.7. Функція  $\sigma$  задана так

$$\sigma(x) = 0.4(4 - x_1^2 + x_2^2), \quad x \in D.$$

За точний розв'язок візьмемо  $u_{ex}(x) = x_1 x_2$ , за допомогою якого визначимо крайові умови на  $\Gamma_{-1}$  та  $\Gamma_0$

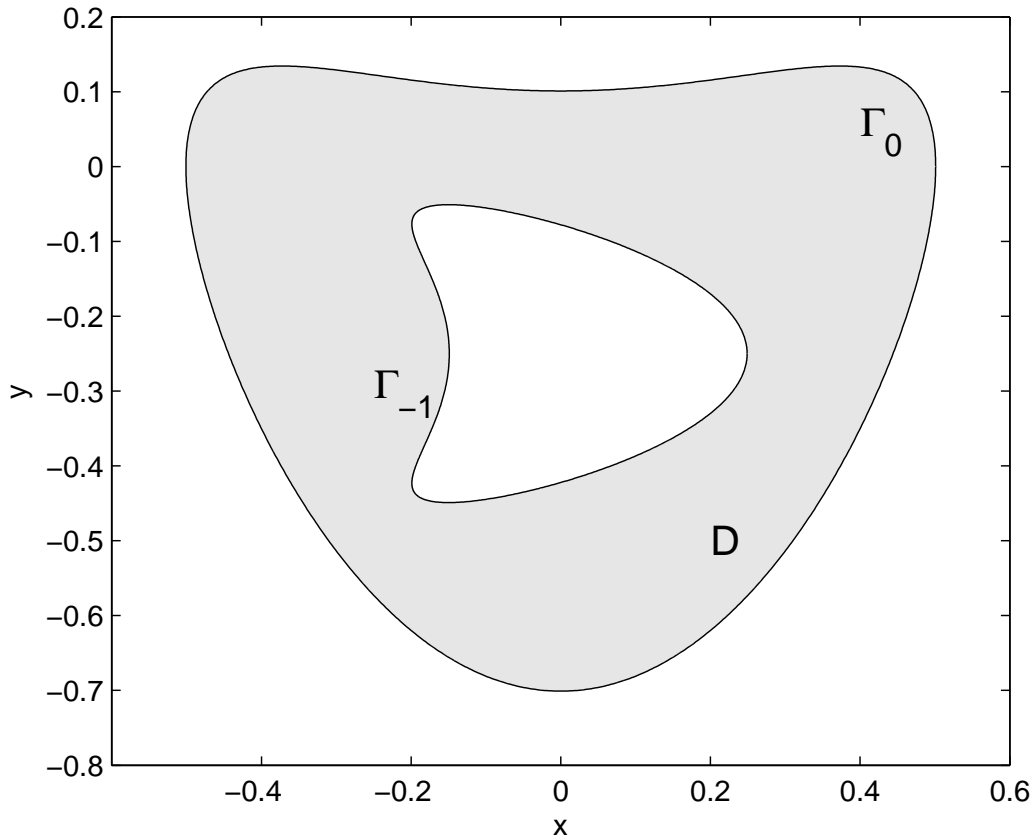
$$g_1(x) = \sigma(x) \nabla u_{ex}(x) \cdot \nu(x), \quad x \in \Gamma_{-1},$$

$$g_2(x) = x_1 x_2, \quad x \in \Gamma_0.$$

У таблиці 3.6 наведено відносну похибку розв'язку в області, максимум-похибку розв'язку на  $\Gamma_{-1}$ , а також на кривій  $\bar{\Gamma}$ , що визначається формулою

$$\bar{\Gamma} = \{\bar{x}(t) = 0.5(x_{-1}(t) + x_0(t)), t \in [0, 2\pi)\}. \quad (3.4.4)$$

Подібно до другого прикладу для задачі Діріхле-Неймана, крива  $\bar{\Gamma}$  є лінійною комбінацією границь  $\Gamma_{-1}$  і  $\Gamma_0$ . Результати в таблиці свідчать про зменшення відносної середньоквадратичної похибки розв'язку в області при збільшенні параметрів  $N$  та  $n$ , а також про їх співвідношення для досягнення

Рис. 3.6: Область  $D$  для прикладу 4.

меншої максимум-похибки на внутрішніх кривих. Зокрема, можна спостерігати квадратичний порядок збіжності на кривих  $\Gamma_{-1}$  та  $\bar{\Gamma}$ , якщо відбувається одночасне збільшення параметрів дискретизації.

$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\tilde{\gamma})}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\cdot, -1)}$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} \cdot 100\%$
3	32	1.4709E-05	6.5917E-06	1.9518
	64	4.1669E-07	1.1030E-07	0.4328
6	64	2.8143E-06	1.9046E-06	0.4327
	128	1.1540E-07	3.5903E-08	0.0651
12	128	7.3459E-07	5.1175E-07	0.0651
	256	3.1207E-08	1.0345E-08	0.0061

Табл. 3.6: Абсолютна та відносна похибки для прикладу 4.



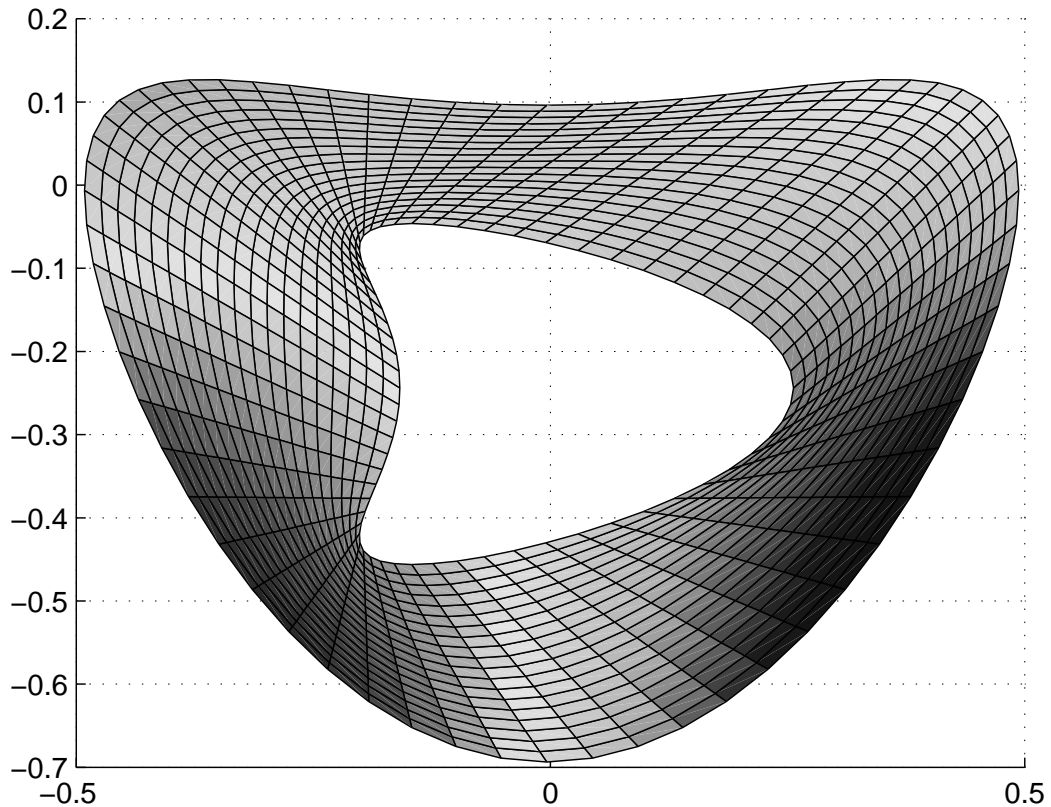


Рис. 3.7: Область  $D$  для прикладу 4.

### Висновки до розділу 3

У даному розділі було розглянуто чисельне розв'язування мішаних задач для ЕРЗК у двозв'язній області. Умови Діріхле та Неймана задані на двох граничних кривих, що обмежують область. Для зведення диференціальної задачі до системи інтегральних рівнянь було використано непрямий підхід, де розв'язок подано у вигляді суми параметрикс-потенціалів простого шару та об'ємного параметрикс-потенціалу. Здійснено зведення до параметризованої системи та виділено відповідні особливості у ядрах. На основі методу Нистрьома отримано повністю дискретизовану систему лінійних рівнянь. Знайдені наближені значення густин використано для апроксимації шуканої функції розв'язку в області та на граничних кривих разом зі значенням

її нормальної похідної. Застосовність запропонованого підходу підтверджується наведеними числовими результатами.

Отримані результати для чисельного розв'язування мішаних задачах опубліковані у [34, 38].

## РОЗДІЛ 4

# ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У цьому розділі розглянуто чисельне розв'язування задачі Коші для ЕРЗК у двозв'язній області. У підрозділі 4.1 наведено постановку задачі Коші та вказано на її некоректність у сенсі відсутності стійкості розв'язку за вхідними даними. У підрозділі 4.2 до задачі Коші застосовано непрямий метод інтегральних рівнянь, розглянутий у попередніх розділах, та здійснено регуляризацію Тіхонова для отримання стійкого розв'язку. У підрозділах 4.3-4.4 представлено короткий опис та алгоритми альтернуючого й ітераційного методу Ландвебера розв'язування задачі. Результати роботи методів для різних вхідних даних (збурених та точних) наведено у підрозділі 4.5

### 4.1. Постановка задачі Коші

Нехай  $D_0 \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена однозв'язна область з межею  $\Gamma_0 \in C^2$ , однозв'язна область  $D_{-1} \subset \mathbb{R}^2$  обмежена граничною кривою  $\Gamma_{-1} \in C^2$ , що повністю лежить всередині  $D_0$ , тобто  $D_{-1} \subset D_0$ . Визначимо область розв'язку  $D = D_0 \setminus \overline{D_{-1}}$ . Нехай  $u$  – розв'язок ЕРЗК

$$\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(x)) = 0, \quad x \in D, \quad (4.1.1)$$

що задовольняє умову Діріхле

$$u = g_2 \text{ на } \Gamma_0 \quad (4.1.2)$$

та умову Неймана

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \text{ на } \Gamma_0 \quad (4.1.3)$$

з відомими функціями  $g_2$  та  $f_2$ ,  $\sigma \in C^\infty(\overline{D})$ ,  $\sigma > 0$ .

Лінійна обернена задача, яку будемо розглядати є такою: знайти функцію  $u$ , що задовольняє (4.1.1)–(4.1.3), та, зокрема, відновити (реконструювати), у стабільний спосіб, дані Коші на внутрішній граничній кривій  $\Gamma_{-1}$ . Отже, маючи дані Коші на  $\Gamma_0$  і, також, значення провідності, потрібно знайти  $u$  та  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  на  $\Gamma_{-1}$ .

Іншою оберненою задачею, про яку згадувалось раніше, є, власне, задача імпедансної томографії. Так, для (4.1.1)–(4.1.3), де область  $D$  є однозв'язною, задача імпедансної томографії полягає у знаходженні функції провідності  $\sigma$  на основі відомих значень функції  $u$  в області та даних Коші на межі. Не обмежуючи загальності, ми будемо розглядати задачу Коші, тоді як задача ЕІТ може бути предметом подальших досліджень.

При розв'язуванні даної задачі важливо є врахувати її некоректність. Нагадаємо умови коректності задачі за Адамаром [70].

**Означення 4.1.1.** *Задача називається коректною (чи коректно поставленою), якщо виконуються наступні умови:*

1. *розв'язок задачі існує;*
2. *розв'язок задачі єдиний;*
3. *розв'язок задачі неперервно залежить від вхідних даних.*

Для задачі (4.1.1)–(4.1.3) некоректність задачі полягає саме у відсутності стійкості розв'язку за вхідними даними. У цьому легко переконатись, якщо розглянути частковий випадок задачі при  $\sigma(x) \equiv 1$ . Тоді ми отримаємо задачу Коші для рівняння Лапласа у двозв'язній області, для якої не виконується третя умова коректності (детальніше, див. [45, 46, 49, 83]).

Оскільки задача є некоректною у сенсі відсутності стійкості за вхідними даними, для її чисельного розв'язування будуть використані непрямий підхід із застосуванням регуляризації Тіхонова та ітераційні регуляризуючі методи.

## 4.2. Метод інтегральних рівнянь для розв'язування задачі Коші (непрямий підхід)

Для розв'язування задачі (4.1.1)–(4.1.3) використаємо непрямий метод інтегральних рівнянь, що базується на поданні розв'язку у вигляді суми об'ємного параметрикс-потенціалу і параметрикс-потенціалів простого шару. Сформулюємо це у теоремі, що також визначає систему гранично-просторових рівнянь, яку потрібно розв'язати для отримання розв'язку задачі Коші.

**Теорема 4.2.1.** *Розв'язок задачі задачі (4.1.1)–(4.1.3) можна подати у вигляді*

$$u(x) = \int_D \psi(y)P(x, y) dy + \int_{\Gamma_{-1}} \psi_{-1}(y)P(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_0} \psi_0(y)P(x, y) ds(y), \quad x \in D, \quad (4.2.1)$$

де невідомі густини  $\psi$ ,  $\psi_{-1}$  і  $\psi_0$  є розв'язками системи

$$\begin{cases} \psi + V\psi + V_{-1}\psi_{-1} + V_0\psi_0 = 0 & \text{в } D, \\ W^{(0)}\psi + W_{-1}^{(0)}\psi_{-1} + W_0^{(0)}\psi_0 = g_2 & \text{на } \Gamma_0, \\ -\frac{1}{2}\psi_0 + T^{(-1)}\psi + T_{-1}^{(-1)}\psi_{-1} + T_0^{(-1)}\psi_0 = f_2 & \text{на } \Gamma_0, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

з операторами визначеними формулами (3.1.6)–(3.1.11).

*Доведення.* Враховуючи властивості параметрикс-потенціалів, що наведені в теоремі 2.1.7, та, беручи до уваги те, що подання розв'язку (4.2.1) має задовольняти крайові умови разом з диференціальним рівнянням, отримаємо систему гранично-просторових інтегральних рівнянь (4.2.2), з відповідними операторами, представленими формулами (3.1.6)–(3.1.11).  $\square$

Варто зауважити, що введена теорема говорить лише про вигляд розв'язку в області  $D$ , тоді, як для задачі Коші цікавими та важливими є значення функції та її нормальної похідної на внутрішній граничній кривій  $\Gamma_{-1}$ .

**Наслідок 4.2.2.** *Якщо розв'язок задачі Коші (4.1.1)–(4.1.3) подається у вигляді (4.2.1), тоді невідомі дані Коші на внутрішній кривій  $\Gamma_{-1}$  області  $D$  мають таке подання:*

$$\begin{aligned} u &= W^{(-1)}\psi + W_{-1}^{(-1)}\psi_{-1} + W_0^{(-1)}\psi_0 && \text{на } \Gamma_{-1}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{2}\psi_{-1} + T^{(-1)}\psi + T_{-1}^{(-1)}\psi_{-1} + T_0^{(-1)}\psi_0 \right) && \text{на } \Gamma_{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

*Доведення.* Доведення впливає безпосередньо з теореми 3.3.6.  $\square$

Оскільки вихідна диференціальна задача (4.1.1)–(4.1.3) є некоректною у сенсі відсутності стійкості за вхідними даними, то й система інтегральних рівнянь (4.2.2) є нестійкою. Для забезпечення стійкості розв'язку у цьому підрозділі буде використано регуляризаційний метод Тіхонова. Зауважимо, що для його застосування необхідно, щоб оператор, який визначає систему (4.2.2) був ін'єктивним та мав щільний ранг. Для випадку сталих коефіцієнтів (тобто рівняння Лапласа) система гранично-просторових інтегральних рівнянь (4.2.2) вироджується у систему граничних інтегральних рівнянь, для якої оператор володіє згаданими вище властивостями, див. наприклад [46]. Не обмежуючись частковим випадком, будемо вважати, що регуляризація Тіхонова є законною і для випадку змінних коефіцієнтів, тобто функції  $\sigma$ . Загалом, для доведення ін'єктивності оператора потрібно показати, що у випадку однорідного рівняння (чи однорідної системи рівнянь, визначеної цим оператором) маємо лише тривіальний розв'язок. Щоб довести твердження про щільний ранг потрібно розглянути спряжений оператор та показати, що він ін'єктивний.

Параметризація граничних кривих така ж, як і для випадку мішаних крайових задач у попередньому розділі: (3.1.12) – межі, пов'язані між собою коефіцієнтом гомотетії, (3.3.1)–(3.3.2) – для довільних двозв'язних областей. Для початку розглянемо випадок, коли  $\Gamma_{-1}$  та  $\Gamma_0$  задані (3.1.12). Відповідна заміна змінних в (4.2.2) приводить до такої системи інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\xi_{-1}, \tau) \tilde{R}_{-1}(\eta, t; \xi_{-1}, \tau) d\tau + \\
& + \varphi(\eta, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{R}_0(\eta, t; \tau) d\tau = 0, \quad (\eta, t) \in \Pi, \\
& \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \check{P}(t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\xi_{-1}, \tau) \check{P}_{-1}(t; \xi_{-1}, \tau) d\tau + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \check{P}_0(t; \tau) d\tau = \tilde{g}_2(t), \quad t \in [0, 2\pi), \\
& -\frac{1}{2} \varphi_0(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{P}(t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{P}_0(t; \tau) d\tau + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\xi_{-1}, \tau) \tilde{P}_{-1}(t; \xi_{-1}, \tau) d\tau = \tilde{f}_2(t), \quad t \in [0, 2\pi),
\end{aligned} \right. \tag{4.2.4}$$

з  $\varphi(\eta, t) = \psi(p(\eta, t))$ ,  $\varphi_{-1}(\xi_{-1}, t) = \psi_{-1}(x_{-1}(t))$ ,  $\varphi_0(t) = \psi_0(x(t))$ ,  $\tilde{g}_2(t) = g_2(x(t))$ ,  $\tilde{f}_2(t) = f_2(x(t))$  та ядрами, визначеними формулами (3.2.6), (3.2.9), (2.1.19), (3.1.18), (2.2.12), (2.2.13), (2.1.17), (2.2.11), (3.1.16).

Ядра  $\tilde{R}$  і  $\check{P}_0$  містять сильну та логарифмічну особливості, відповідно, виділення яких наведено у задачі Діріхле у підрозділі 2.1 та у задачі Неймана-Діріхле у підрозділі 3.2.

Для розв'язування системи (4.2.4) використовуємо метод Нистрьома з відповідними квадратурними формулами, зокрема, по змінній  $\xi$  застосовано складену квадратуру середніх прямокутників з вагами  $\alpha_k = \frac{1-\xi_{-1}}{N}$  та вузлами  $\eta_k = 1 - \frac{1-\xi_{-1}}{2N}(2k-1)$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Для інтегрування по змінній

$\tau$  застосовано складену формулу трапецій для  $2\pi$ -періодичних функцій. Напівдискретизовану систему, отриману за допомогою формул (2.1.31)-(2.1.34), зведено до системи алгебричних рівнянь через колокацію апроксимаційних рівнянь у квадратурних вузлах

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{mi} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \bar{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \left[ \varphi_{-1j} \tilde{R}_{-1}(\eta_m, t_i; \xi_{-1}, t_j) + \right. \\ \left. + \varphi_{0j} \tilde{R}_0(\eta_m, t_i; t_j) \right] = 0, \\ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \check{P}(t_i; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{-1j} \check{P}_{-1}(t_i; \xi_{-1}, t_j) + \\ + \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \left[ \check{P}_0^{(1)}(t_i, t_j) F_j(t_i) + \frac{1}{2n} \check{P}_0^{(2)}(t_i; t_j) \right] = \tilde{g}_{2i}, \\ -\frac{1}{2} \varphi_{0i} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \tilde{P}(t_i; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \left[ \varphi_{-1j} \tilde{P}_{-1}(t_i; \xi_{-1}, t_j) + \right. \\ \left. + \varphi_{0j} \tilde{P}_0(t_i, t_j) \right] = \tilde{f}_{2i}, \end{array} \right. \quad (4.2.5)$$

з  $\bar{R}$  наведеним у задачі Діріхле, правою частиною  $\tilde{g}_{2i} = \tilde{g}_2(t_i)$  і  $\tilde{f}_{2i} = \tilde{f}_2(t_i)$ , невідомими значеннями густин у точках  $\varphi_{mi} \approx \varphi(\eta_m, t_i)$ ,  $\varphi_{0i} \approx \varphi_0(t_i)$  і  $\varphi_{-1i} \approx \varphi_{-1}(\xi_{-1}, t_i)$ , де  $t_i = \frac{i\pi}{n}$  для  $m = 1, \dots, N$  та  $i = 0, \dots, 2n - 1$ . При цьому  $\check{P}_0^{(1)}$  та  $\check{P}_0^{(2)}$  можна взяти з формули (3.2.11) для задачі Неймана-Діріхле.

Отриману систему (4.2.5) із застосуванням непрямого методу інтегральних рівнянь наведено для областей з граничними кривими, що володіють властивістю гомотетії одна відносно іншої, про що згадувалось раніше. Для довільної двозв'язної області з границями (3.3.1)-(3.3.2) можна використати аналогічні перетворення та ядра, описані в підрозділі 3.3. Так, параметризо-



вана система інтегральних рівнянь матиме вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\tau) \tilde{R}_{-1}(\eta, t; x_{-1}(\tau)) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{R}_0(\eta, t; x_0(\tau)) d\tau + \varphi(\eta, t) = 0, \quad (\eta, t) \in \Pi, \\ \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \check{P}(x_0(t); \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\tau) \check{P}_{-1}(x_0(t); x_0(\tau)) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \check{P}_0(x_0(t); x_0(\tau)) d\tau = \tilde{g}_2(t), \quad t \in [0, 2\pi), \\ \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{P}(x_0(t); \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{-1}(\tau) \tilde{P}_{-1}(x_0(t); x_{-1}(\tau)) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{P}_0(x_0(t); x_0(\tau)) d\tau - \frac{1}{2} \varphi_0(t) = \tilde{f}_2(t), \quad t \in [0, 2\pi), \end{array} \right. \quad (4.2.6)$$

де ядра визначені формулами (3.3.10)-(3.3.12), (3.3.19)-(3.3.21), (3.3.16)-(3.3.18).

Застосувавши метод Нистрьома та враховуючи особливості у ядрах  $\tilde{R}$  та  $\check{P}_0$ , можна отримати систему лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \varphi_{-1j} A_{-1j}^{mi} + \varphi_{0j} A_{0j}^{mi} + \sum_{k=1}^N \varphi_{kj} \left[ \delta_{ij}^{(mk)} + A_{kj}^{mi} \right] \right) = 0, \quad m = 1, \dots, N, \\ \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \varphi_{-1j} A_{-1j}^{0i} + \varphi_{0j} A_{0j}^{0i} + \sum_{k=1}^N \varphi_{kj} A_{kj}^{0i} \right) = \tilde{g}_{2i}, \quad i = 0, \dots, 2n-1, \\ \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \left( \varphi_{-1j} A_{-1j}^{0i} + \varphi_{0j} \left[ A_{0j}^{0i} - \frac{\delta_{ij}}{2} \right] + \sum_{k=1}^N \varphi_{kj} A_{kj}^{0i} \right) = \tilde{f}_{2i}, \quad i = 0, \dots, 2n-1, \end{array} \right. \quad (4.2.7)$$

де  $A_{qj}^{li}$ ,  $q = -1, \dots, N$ ,  $l = 0, \dots, N$ ,  $i, j = 0, \dots, 2n-1$  - деякі коефіцієнти,

що визначаються ядрами зі системи (4.2.6) (або їх модифікаціями у випадку виділення особливостей).

Через некоректність задачі Коші матриця  $A$  лінійної системи (4.2.5), або в загальному випадку системи (4.2.7), має велике число обумовленості. Тому, для отримання стійкого розв'язку застосуємо деякий регуляризуючий метод. Скористаємось регуляризацією Тіхонова (див. [107]), для отримання наближеного розв'язку  $x_\alpha$  регуляризуючого нормального рівняння

$$(A^\top A + \alpha I)x_\alpha = A^\top b, \quad (4.2.8)$$

де  $A^\top$  транспонована до  $A$  матриця,  $I$  – одинична матриця,  $b$  – права частина системи (4.2.5) (така ж, як і для (4.2.7)),  $x_\alpha$  – фактично вектор невідомих значень густин у точках, що залежить від  $\alpha$ , де  $\alpha > 0$  – регуляризуючий параметр.

Отже, для одержання стійкого наближеного розв'язку системи (4.2.5) чи загальної системи (4.2.7) потрібно використати (4.2.8) з деяким фіксованим параметром регуляризації  $\alpha$ . Вибір оптимального параметра регуляризації не є тривіальною задачею, і складність цієї задачі може перевищувати складність задачі, для якої власне й потрібна регуляризація (наприклад, для регуляризації інтегрального рівняння першого роду з оптимальним параметром регуляризації потрібно розв'язати інтегро-диференціальне рівняння). Звідси, доцільним є використання інших методів вибору параметра  $\alpha$ , найпростішим з яких є метод перебору. Іншим способом вибору параметра регуляризації є метод  $L$ -кривої (детальніше, див. [44, 71]). Його суть полягає у побудові кривої у логарифмічних координатах  $(\lg \|Ax_\alpha - b\|_2, \lg \|x_\alpha\|_2)$  для деякої множини значень параметра регуляризації  $\alpha$ . Отриманий графік має вигляд літери  $L$ , через що й отримав таку назву. Властивістю  $L$ -кривої є те, що найкраще значення параметра регуляризації розміщене поблизу кута кривої, як оптимальний вибір, що мінімізує норму розв'язку і норму нев'язки в евклідовій нормі. Наведені методи будуть використані у чисельних експериментах.

Апроксимацію розв'язку для (4.1.1)–(4.1.3) і даних Коші на  $\Gamma_{-1}$  можна отримати застосовуючи наведені вище кроки (параметризація разом із заміною змінних, виділення особливостей та чисельне інтегрування) до гранично-просторового подання розв'язку (4.2.1) разом зі знайденими наближеними значеннями густин у деяких точках. Для даних Коші можна використати формули (3.3.31), (3.3.32), наведені для випадку двозв'язної області з негомтетичними кривими, тоді, як для обчислення розв'язку в області можна використати формулу (3.1.21) чи її узагальнення у вигляді формули (3.3.25).

### 4.3. Альтернуючий метод

У даному підрозділі розглянемо алгоритм альтернуючого методу для задачі Коші (4.1.1)–(4.1.3). Варто відзначити, що оператор наведений в (4.1.1) є самоспряженим та строго еліптичним [15]. Для зручності введемо допоміжні функції  $h$  та  $g$ . В альтернуючому методі на кожній ітерації необхідно розв'язати дві мішані крайові задачі (Неймана-Діріхле та Діріхле-Неймана):

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{в } D, \quad (4.3.1)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{на } \Gamma_{-1}, \quad u = g_2 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (4.3.2)$$

та

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{в } D, \quad (4.3.3)$$

$$u = g \quad \text{на } \Gamma_{-1}, \quad \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (4.3.4)$$

Ітераційна процедура альтернуючого методу для побудови розв'язку (4.1.1)–(4.1.3) полягає в наступному:

- Перше наближення  $u_0$  розв'язку  $u$  задачі (4.1.1)–(4.1.3) отримується як розв'язок (4.3.1)–(4.3.2) з  $h = h_0$ , де  $h_0$  – довільне початкове наближення.

- Маючи значення  $u_{2k}$ , ми знаходимо  $u_{2k+1}$ , як розв'язок (4.3.3)–(4.3.4) з  $g = u_{2k}|_{\cdot -1}$ .
- Тоді функцію  $u_{2k+2}$  отримуємо, розв'язуючи (4.3.1)–(4.3.2) з

$$h = \sigma \frac{\partial u_{2k+1}}{\partial \nu} |_{\cdot -1}.$$

Алгоритм виконується ітераційно у двох останніх пунктах.

З [12] можна записати таку теорему

**Теорема 4.3.1.** *Припустимо, що задача Коші (4.1.1)–(4.1.3) має розв'язок  $u$ . Нехай  $u_k$  –  $k$ -та апроксимація розв'язку в альтернуючому методі. Тоді*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{H^1(D)} = 0$$

*для будь-якого достатньо гладкого початкового наближення  $h_0$ , з якого розпочинаються ітерації.*

*Доведення.* Доведення може бути здійснено через формулювання задачі Коші у вигляді деякого рівняння про нерухому точку зі самоспряженим, ін'єктивним, додатнім та нерозширюючим оператором. Наступний крок полягає у побудові ітераційного процесу для цього рівняння (детальніше, див. [12, 13]). Використовуючи отримані регуляризуючі властивості для еліптичних рівнянь, можна з'ясувати збіжність у просторах Соболева вищого порядку  $H^k(D)$ . Гладкість функції  $\sigma$  можна послабити до, наприклад, кусково-гладкої. Крім того, основне рівняння (4.1.1) може бути змінено до узагальненого строго еліптичного та самоспряженого рівняння другого порядку.  $\square$

Критерієм зупинки, у випадку вхідних даних із шумом, можна використати принцип нев'язки Морозова [8, 11]. Для зв'язку з методом Ландвебера, див. [27, 48, 84].

#### 4.4. Метод Ландвебера

Розглянемо ще один ітераційний метод розв'язування (4.1.1)–(4.1.3), а саме метод Ландвебера [29, 77], який було запропоновано для розв'язування некоректних задач з несамоспряженим оператором. Алгоритм методу Ландвебера для розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа у двозв'язній області можна знайти в [49] (збіжність процедури розглянуто в [77]). На основі цього алгоритму побудуємо ітераційну процедуру, де основне диференціальне рівняння задане формулою (4.1.1).

Отож, в ітераційному методі Ландвебера для задачі (4.1.1)–(4.1.3) на кожній ітерації необхідно розв'язати дві мішані крайові задачі Діріхле-Неймана:

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{в } D, \quad (4.4.1)$$

$$u = h \quad \text{на } \Gamma_{-1}, \quad \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (4.4.2)$$

та

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla v) = 0 \quad \text{in } D, \quad (4.4.3)$$

$$v = 0 \quad \text{на } \Gamma_{-1}, \quad \sigma \frac{\partial v}{\partial \nu} = z \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (4.4.4)$$

Сама ітераційна процедура методу Ландвебера для побудови розв'язку полягає у наступному:

- вибрати довільну функцію  $h_0$ ; знайти  $u_0$  як розв'язок задачі (4.4.1)–(4.4.2) з  $h = h_0$ .
- знайти  $v_0$ , розв'язавши (4.4.3)–(4.4.4) з  $\sigma \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = z_0$  на  $\Gamma_0$ , де  $z_0 = u_0 - g_2$ .
- маючи  $u_{k-1}$ ,  $v_{k-1}$  знайти  $u_k$  як розв'язок задачі (4.4.1)–(4.4.2) з  $u_k = h_k$  на  $\Gamma_{-1}$ , де  $h_k = h_{k-1} - \gamma \frac{\partial v_{k-1}}{\partial \nu} \Big|_{-1}$ ,  $\gamma > 0$ .
- знайти  $v_k$ , як розв'язок задачі (4.4.3)–(4.4.4) з  $\sigma \frac{\partial v_k}{\partial \nu} = z_k$  на  $\Gamma_0$ , де  $z_k = u_k - g_2$ .

Алгоритм виконується ітераційно у двох останніх пунктах. Критерієм зупинки, у випадку вхідних даних із шумом, як і для альтернуючого методу, можна використати принцип нев'язки Морозова.

## 4.5. Чисельні експерименти

Наведемо приклади розв'язування задачі Коші непрямым методом інтегральних рівнянь та ітераційними методами (альтернуючим та методом Ландвебера). У даному підрозділі будуть наведені чисельні результати для різних областей та різних вхідних даних (точних та зі шумом). Зауважимо, що збуреними вхідними даними для задачі будуть значення нормальної похідної, а точніше їх добуток на функцію  $\sigma$ , оскільки природнім є те, що ці дані отримують внаслідок вимірювань певними приладами, які апріорі допускають певну похибку. Отже, збуреними даними будуть значення функції  $f_2$ . Функцію зі шумом  $f_2^\delta$  будемо задавати так:

$$f_2^\delta = f_2 + \delta(2\beta - 1)\|f_2\|_{L_2(\cdot, 0)},$$

$\delta$  – рівень шуму (наприклад 3%),  $\beta$  – випадкове число,  $\beta \in (0, 1)$ .

### Непрямий метод інтегральних рівнянь

#### Приклад 1

Двозв'язна кільцеподібна область  $D$  обмежена двома граничними кривими

$$\Gamma_0 = \{x(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = (0.5 \cos(t), 0.5 \sin(t)), t \in [0, 2\pi)\}.$$

Маємо тут параметр  $\xi_{-1} = 0.5$ . Функція провідності  $\sigma$ , а також дані на  $\Gamma_0$  у вигляді функцій  $g_2$  та  $f_2$  подано нижче

$$\sigma(x) = 4 - x_1^2 + x_2^2, \quad x \in D,$$

$$g_2(x) = x_1x_2, \quad f_2(x) = 2x_1x_2(4 - x_1^2 + x_2^2) \quad x \in \Gamma_0.$$

Нескладно перевірити, що функція  $u_{ex}(x) = x_1x_2$  є точним розв'язком задачі (4.1.1)–(4.1.3).

У таблиці 4.1 наведено абсолютні похибки отриманих наближених даних Коші на внутрішній граничній кривій  $\Gamma_{-1}$  під час чисельного розв'язування задачі Коші (4.1.1)–(4.1.3). Непрямий метод гранично-просторових інтегральних рівнянь було використано для точних вхідних даних (функцій  $f_2$  та  $g_2$ ). У таблиці 4.1 змінна  $N$  це кількість внутрішніх квадратурних кривих, а  $2n$  – кількість квадратурних вузлів на кожній з таких кривих. Як графічна ілюстрація, на рис. 4.1 відображено точний розв'язок та чисельні реконструкції на  $\Gamma_{-1}$  для значень функції та її нормальної похідної у випадку точних вхідних даних. На рис. 4.2 наведено точні та наближені значення даних Коші для збурених вхідних даних з рівнем шуму у 3%. Відмітимо, що для даного прикладу параметр регуляризації  $\alpha$  був обраний способом звичайного перебору.

Обчислення для даного методу займають небагато часу на звичайному комп'ютері, а отже непрямий метод гранично-просторових інтегральних рівняння може бути використано для отримання стабільного чисельного розв'язку задачі Коші для ЕРЗК.

$N$	$n$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\Gamma_{-1})}$	$\ \frac{\partial u_{Nn}}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{ex}}{\partial \nu}\ _{C(\Gamma_{-1})}$
3	32	5.278E-004	1.747E-002
5	64	1.348E-004	4.457E-003
7	128	6.617E-006	3.323E-004

Табл. 4.1: Похибка у випадку точних вхідних даних для параметра регуляризації  $\alpha = 10e - 11$ .

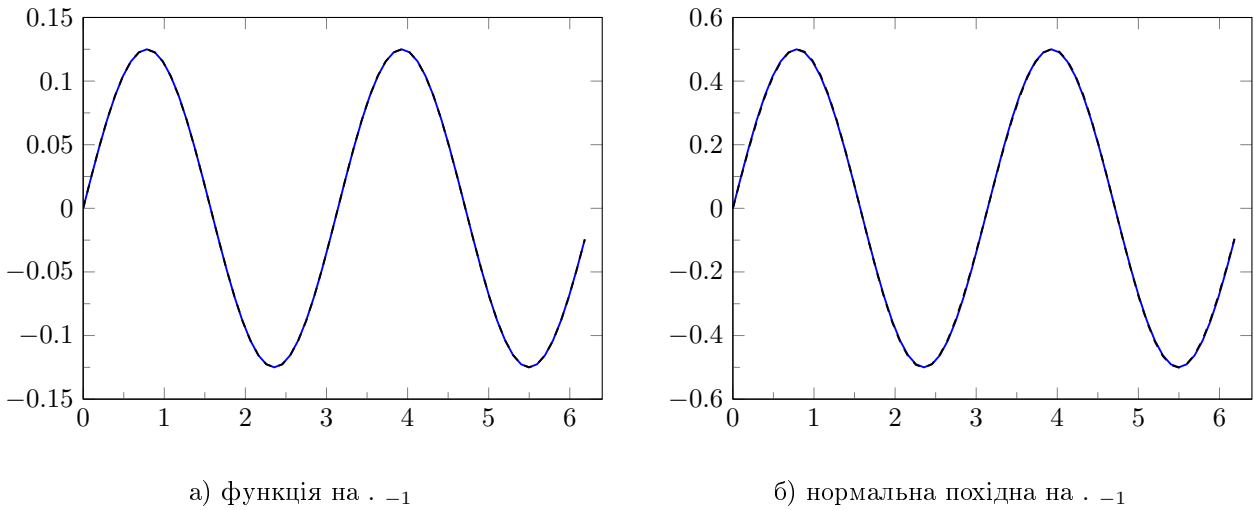


Рис. 4.1: Точний розв'язок (—) та чисельне наближення (---) з використанням непрямого підходу з параметром регуляризації Тіхонова  $\alpha = 10e - 11$  ( $N = 5$ ,  $n = 64$ ).

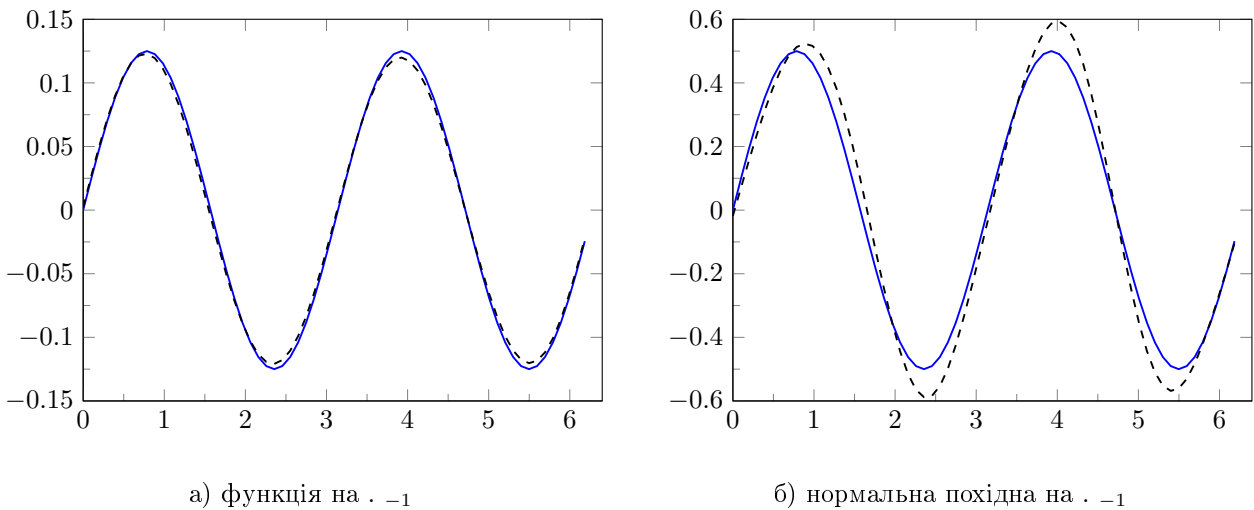


Рис. 4.2: Точний розв'язок (—) та чисельне наближення (---) з використанням непрямого підходу з параметром регуляризації Тіхонова  $\alpha = 10e - 5$  у випадку вхідних даних з 3% шуму ( $N = 7$ ,  $n = 128$ ).

## Приклад 2

Наведемо приклад застосування перетворень з підрозділу 3.3 для довільної двозв'язної області у задачі Коші, які, зокрема, приводять до розв'язування системи (4.2.7).



Двоzv'язна область  $D$  (див рис. 4.3) обмежена кривими

$$\Gamma_0 = \{x_0(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi)\},$$

$$\Gamma_{-1} = \{x_{-1}(t) = \sqrt{(0.5 \cos(t))^2 + (0.25 \sin(t))^2}(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi)\}.$$

Зауважимо, що на рис. 4.3 маємо одразу розбиття області при  $N = 20$  та  $n = 64$ . На даному рисунку можна побачити перехід внутрішньої границі у зовнішню на основі формули (3.3.3). Також дано, що

$$\sigma(x) = 4 - x_1^2 + x_2^2, \quad x \in D,$$

$$g_2(x) = x_1 x_2, \quad f_2(x) = 2x_1 x_2 (4 - x_1^2 + x_2^2), \quad x \in \Gamma_0,$$

і відомо, що

$$u_{ex}(x) = x_1 x_2 - \text{точний розв'язок.}$$

Отже вхідні дані є такі ж, як і для прикладу 1 – змінилась лише конфігурація границь.

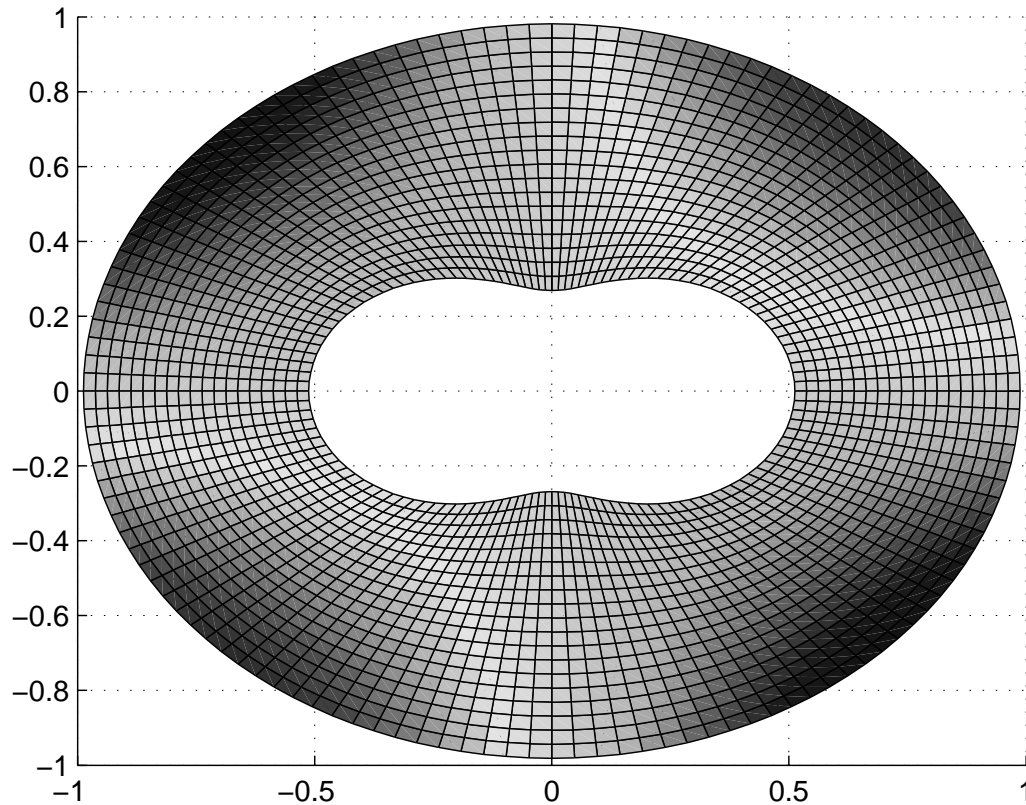
Вигляд точного розв'язку  $u$  та його апроксимації в області у випадку точних вхідних даних на зовнішній границі  $\Gamma_0$  зображено на рис. 4.4. Графіки точних та наближених даних Коші на  $\Gamma_{-1}$  наведено на рис. 4.5. Для відтворення цих даних було обрано параметр регуляризації  $\alpha = 10e - 11$ .

Для даних зі шумом (збурення функції  $f_2$  на 3%) було побудовано  $L$ -криву на основі 16-ти значень параметра  $\alpha$ : від 1 до  $10e - 15$  з кроком 0.1. На рис. 4.6 зображено  $L$ -криву з вузлами, що відповідають обраним значенням  $\alpha$ . На основі кривої за параметр  $\alpha$  взято значення  $10e - 09$ . Отримані результати, відображені на рис. 4.7.

## Альтернуючий метод

### Приклад 3

Область взято з першого прикладу для задачі Неймана-Діріхле (приклад 3 у чисельних експериментах для попереднього розділу). Коефіцієнт  $\sigma$  та точний

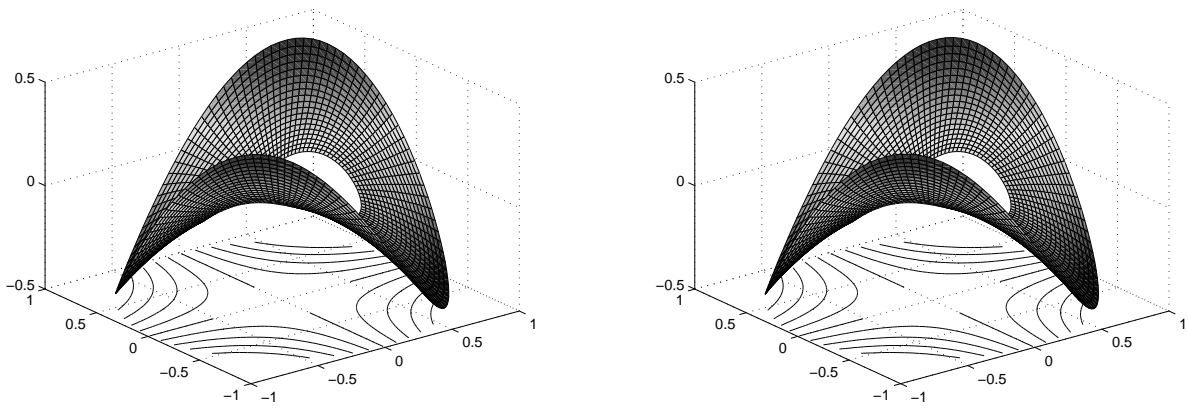
Рис. 4.3: Область  $D$  для прикладу 2.

розв'язок  $u_{ex}$  є такими ж, як у прикладі. Дані Коші на  $\Gamma_0$  отримуємо з точного розв'язку:

$$g_2(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad f_2(x) = e^{-x_1 x_2} (2x_1, 2x_2) \cdot \nu(x) \quad x \in \Gamma_0.$$

Збурення вхідних даних буде застосовано до умови Неймана, про що згадувалось раніше. Альтернуючий ітераційний метод розпочинається з вибору деяких значень (функції) для умови Неймана на внутрішній граничній кривій  $\Gamma_{-1}$ . Для спрощення, будемо вважати, що функція  $h = 0$  в (4.3.2). Варто зауважити, що краще початкове наближення буде пришвидшувати збіжність ітераційного процесу. Мішані задачі на кожній ітерації розв'язуються з використанням методу гранично-просторових інтегральних рівнянь, описаному в розділі 3. Для їх розв'язування обрано параметри  $n = 32$  та  $N = 3$ .

На рисунку 4.8 наведено графіки похибки функції та нормальної похі-



а) точний розв'язок

б) наближений розв'язок

Рис. 4.4: Точний розв'язок (а) та наближений (б) в області  $D$  для параметра регуляризації  $\alpha = 10e - 11$  ( $N = 5$ ,  $n = 64$ ) при точних вхідних даних.

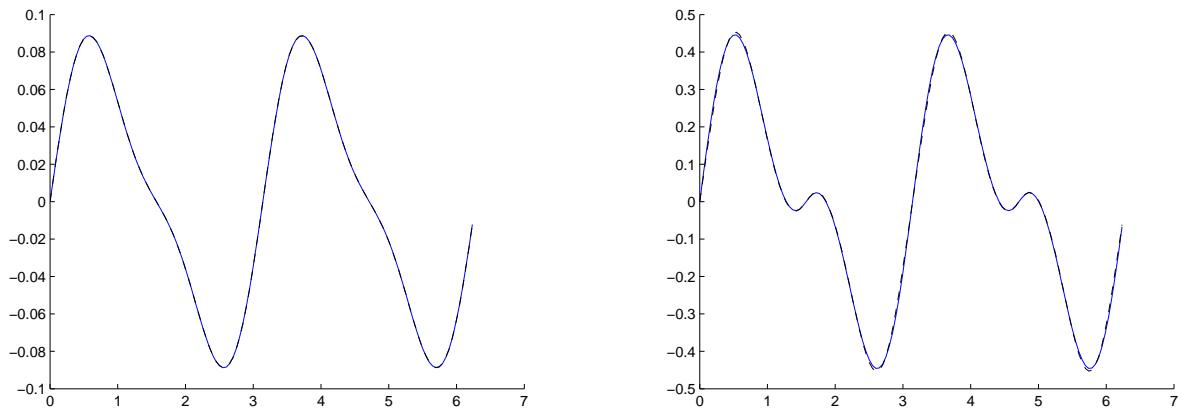
а) значення функції на  $\Gamma_{-1}$ б) нормальна похідна на  $\Gamma_{-1}$ 

Рис. 4.5: Точні дані Коші (—) та наближені (---) на  $\Gamma_{-1}$  для параметра регуляризації  $\alpha = 10e - 11$  ( $N = 5$ ,  $n = 64$ ) при точних вхідних даних.

дної на внутрішній граничній кривій в  $L_2$ -нормі у випадку точних вхідних даних. Ці графіки демонструють збіжність ітераційного процесу до точного розв'язку, що й передбачалось теорією. Отримані розв'язки після  $k = 200$  ітерацій проілюстровано на рис. 4.9. На цих рисунках пунктирна крива (---) визначає чисельне наближення до відповідного точного розв'язку, що відображається суцільною лінією (—).

Аналогічні результати для вхідних даних з випадковою похибкою в певних вузлах у 3% продемонстровано на рисунках 4.10–4.11. Загалом, нормальну

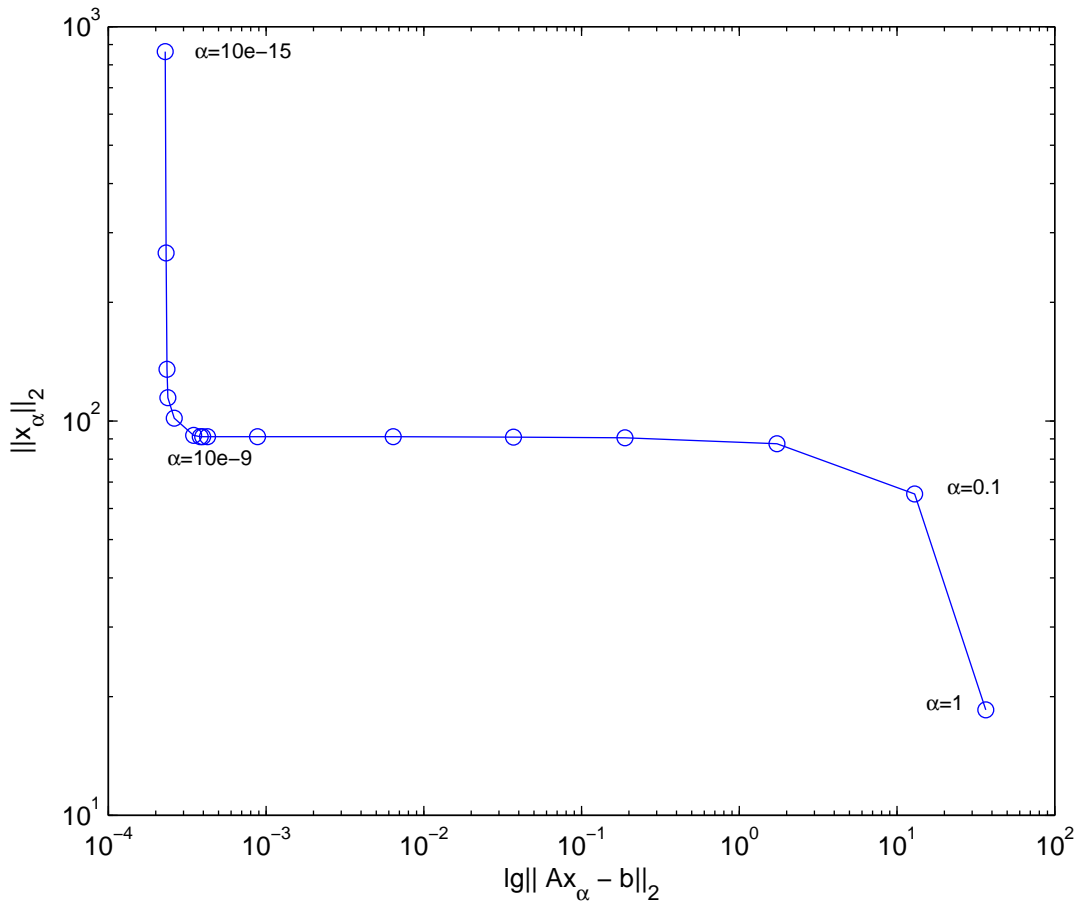


Рис. 4.6:  $L$ -крива для 3% збурених вхідних даних при  $N = 5$  та  $n = 128$  для прикладу 2.

похідну складніше реконструювати, проте, отримане наближення є досить близьким до точного, навіть у випадку збурених даних. Отже, для даного прикладу маємо досить точну та стабільну реконструкцію нормальної похідної та функції у випадку збурених даних.

У випадку вхідних даних зі шумом ітерації мають бути припинені перед тим, коли похибка почне зростати. Для розглянутого прикладу це зростання не є значним. Формально, принцип нев'язки може бути застосований для зупинки ітераційного процесу. Зауважимо, що функція  $\sigma$  не є константою, проте отримані результати добре узгоджуються з результатами отриманими для рівняння Лапласа, для прикладу див. [39, 82].

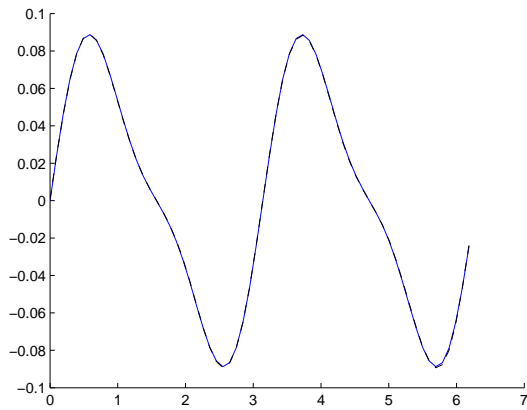
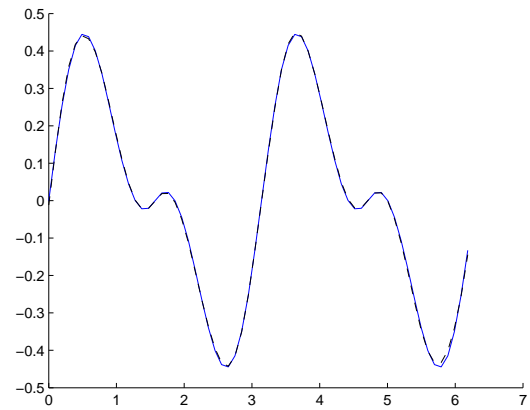
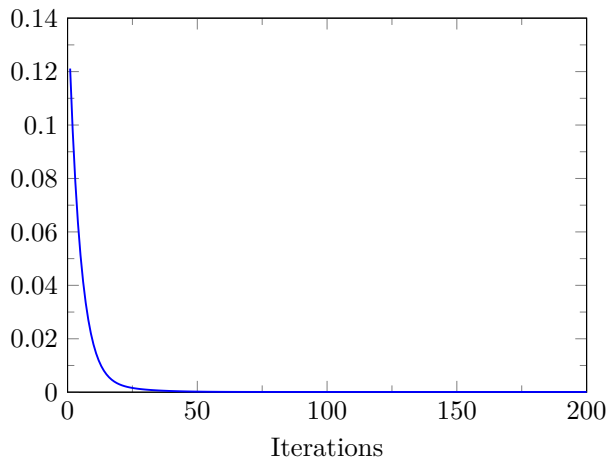
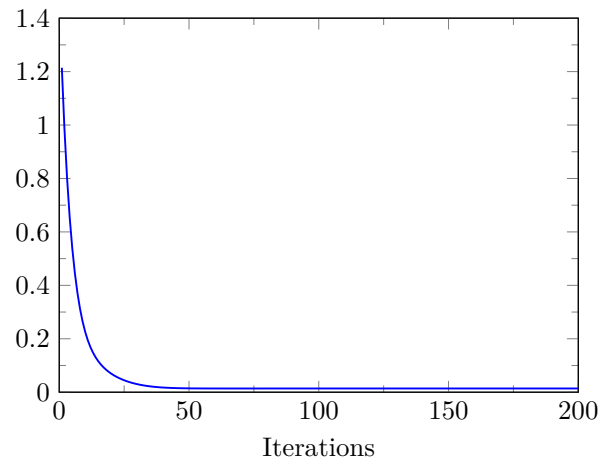
а) значення функції на  $\Gamma_{-1}$ б) нормальна похідна на  $\Gamma_{-1}$ 

Рис. 4.7: Точні дані Коші (—) та наближені (---) на  $\Gamma_{-1}$  для параметра регуляризації  $\alpha = 10e - 9$  ( $N = 5$ ,  $n = 128$ ) при вхідних даних з шумом 3%.



а) розв'язок, похибка



б) нормальна похідна, похибка

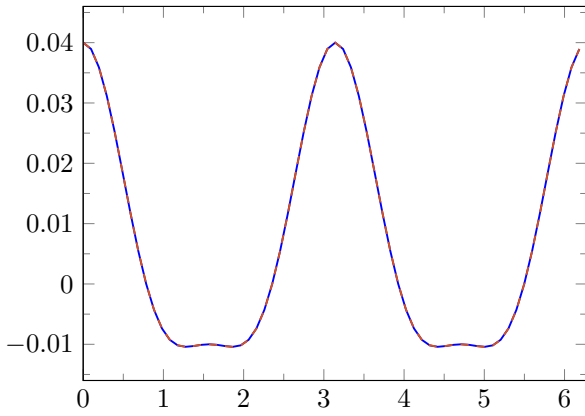
Рис. 4.8: Похибка даних Коші на  $\Gamma_{-1}$  після 200 ітерацій для прикладу 3.

#### Приклад 4

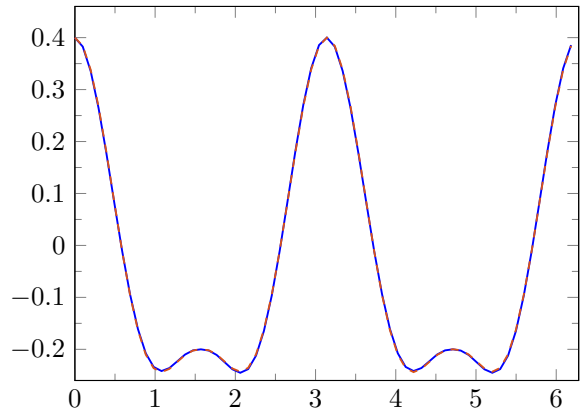
Конфігурації  $\Gamma_{-1}$  та  $\Gamma_0$ , що визначають область  $D$ , а також функцію  $\sigma$  та точний розв'язок обрано з прикладу 4 у чисельних експериментах розділу 3. За допомогою точного розв'язку генеруємо вхідні дані Коші на зовнішній граничній кривій  $\Gamma_0$ . Відповідно

$$g_2(x) = x_1 x_2, \quad f_2(x) = \sigma(x) \nabla u_{ex}(x) \cdot \nu(x) \quad x \in \Gamma_0.$$

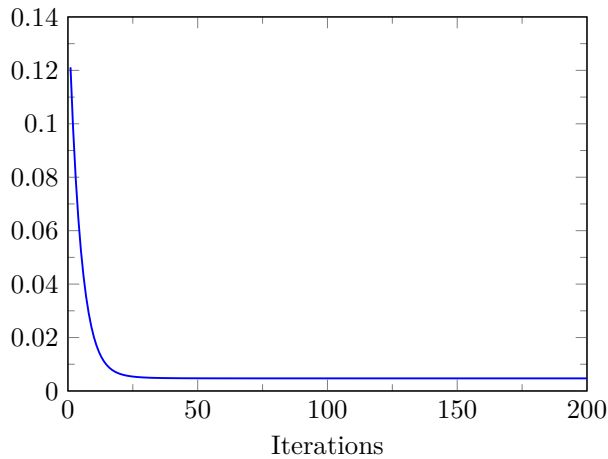
Для розв'язування мішаних задач обрано параметри дискретизації  $N = 3$



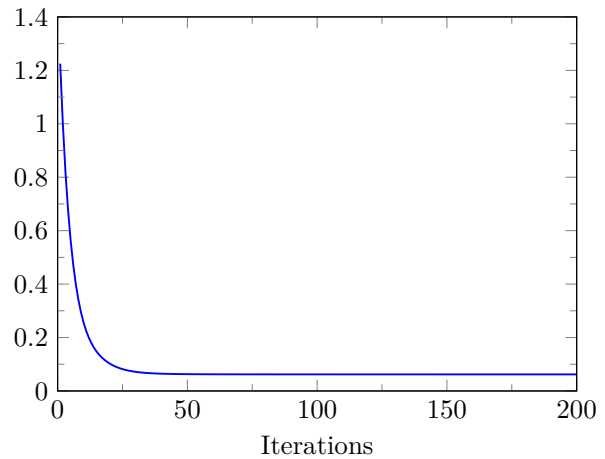
а) точний та наближений розв'язок



б) точне значення нормальної похідної та її наближення

Рис. 4.9: Дані Коші на  $\Gamma_{-1}$  для  $k = 200$  в прикладі 3.

а) розв'язок, похибка

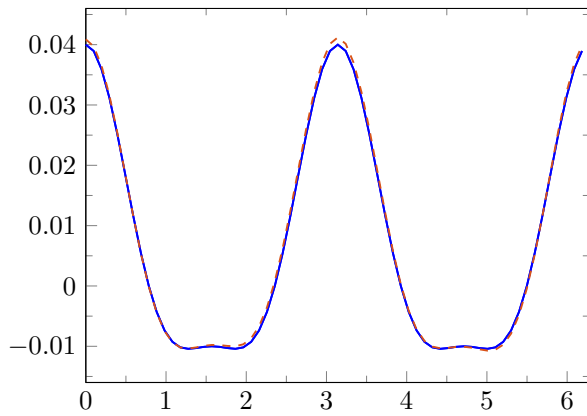


б) нормальна похідна, похибка

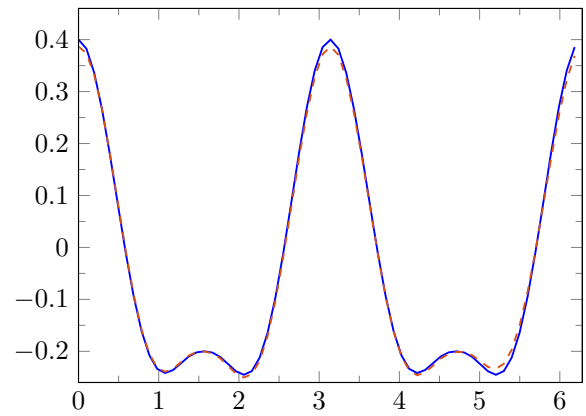
Рис. 4.10: Похибка даних Коші на  $\Gamma_{-1}$  після 200 ітерацій для прикладу 3. (шум 3%)

та  $n = 64$ . На рисунку 4.12 наведено  $L_2$ -похибку функції та нормальної похідної на внутрішній границі у випадку точних вхідних даних. Розв'язки, отримані після  $k = 200$  ітерацій, проілюстровано на рис. 4.13. Бачимо збіжність до точних даних Коші на  $\Gamma_{-1}$  при збільшенні кількості ітерацій, що відповідає теоретичним оцінкам. Для нормальної похідної чисельне наближення є гіршим у порівнянні з наближенням самої функції, що теж є очікуваним.

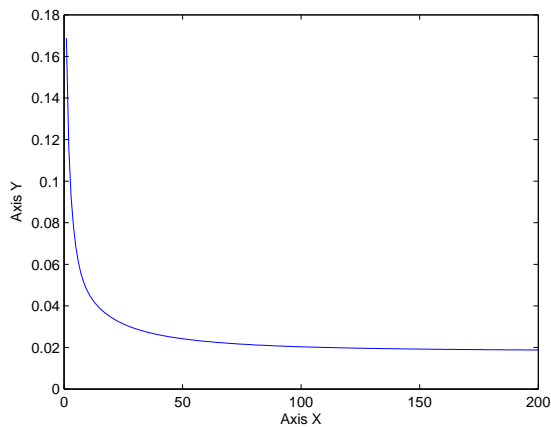
Для вхідних даних зі збуренням у 3% отримані результати після  $k = 200$  ітерацій продемонстровано на рисунках 4.14–4.15. Спостерігаємо подібну по-



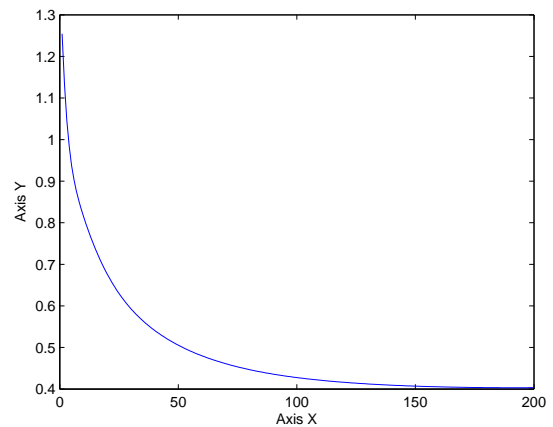
а) точний та наближений розв'язок



б) точне значення нормальної похідної та її наближення

Рис. 4.11: Дані Коші на  $\Gamma_{-1}$  для  $k = 200$  в прикладі 3. (шум 3%)

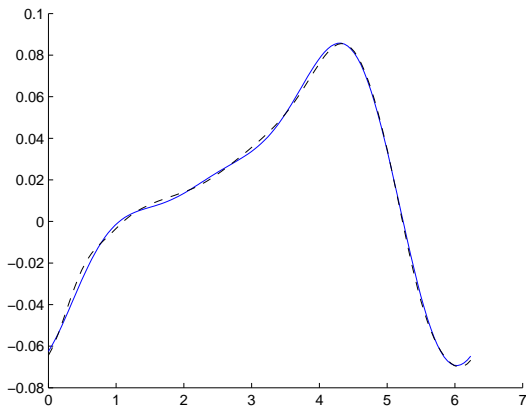
а) розв'язок, похибка



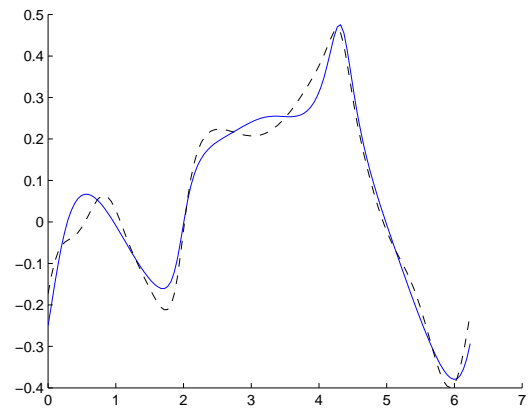
б) нормальна похідна, похибка

Рис. 4.12: Похибка даних Коші на  $\Gamma_{-1}$  після 200 ітерацій для прикладу 4.

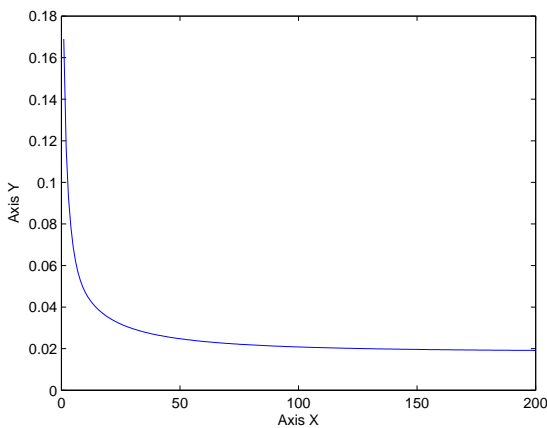
ведінку результатів, як і для попереднього прикладу, хоча, загалом, для випадку збурених даних можливе зростання похибки після певної ітерації. З рисунків також бачимо, що апроксимації розв'язку та нормальної похідної на останній 200-тій ітерації є хорошими. Отже, отримано досить точну реконструкцію даних Коші на  $\Gamma_{-1}$  навіть у випадку збурених даних.



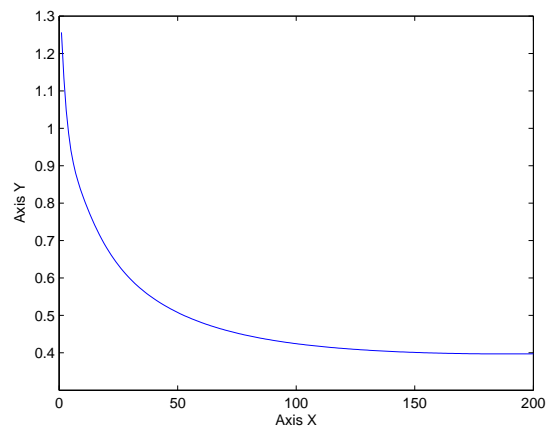
а) точний та наближений розв'язок



б) точне значення нормальної похідної та її наближення

Рис. 4.13: Дані Коші на  $\Gamma_{-1}$  для  $k = 200$  в прикладі 4.

а) розв'язок, похибка



б) нормальна похідна, похибка

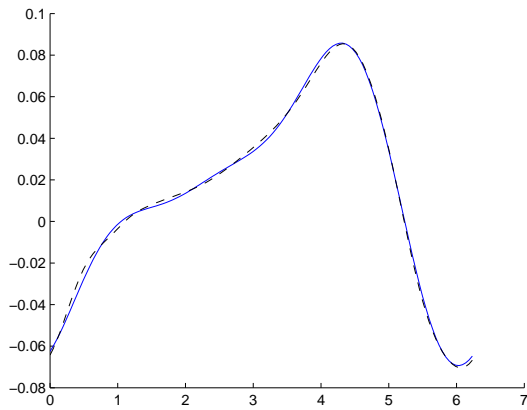
Рис. 4.14: Похибка даних Коші на  $\Gamma_{-1}$  після 200 ітерацій для прикладу 4. (шум 3%)

## Метод Ландвебера

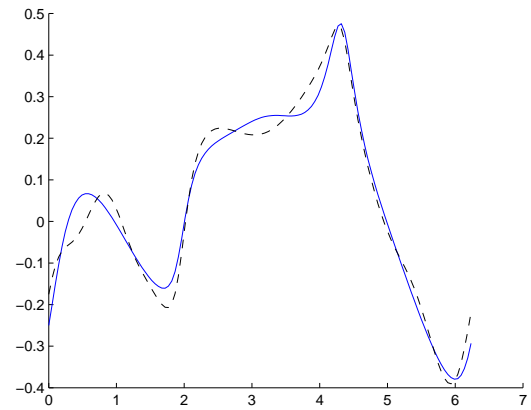
### Приклад 5

Розглянемо використання методу Ландвебера для розв'язування задачі Коші, наведеної у прикладі 3. Параметрами дискретизації для мішаних задач на кожному ітераційному кроці є значення  $N = 3$  та  $n = 32$ . Для додатнього параметра  $\gamma$ , що фігурує в алгоритмі, обрано значення 0.03. За початкове наближення  $h_0$  для старту ітераційної процедури взято функцію нуль, тобто





а) точний та наближений розв'язок



б) точне значення нормальної похідної та її наближення

Рис. 4.15: Дані Коші на  $\Gamma_{-1}$  для  $k = 200$  в прикладі 4. (шум 3%)

$h_0 \equiv 0$ . Для точних вхідних даних на рис. 4.16 наведено  $L_2$ -похибку розв'язку на  $\Gamma_{-1}$  для 400 ітерацій разом з виглядом точного та наближеного розв'язків на останній ітерації. Аналогічний за структурою рис. 4.17 містить результати для 3% збурених вхідних даних. Як згадувалось раніше, для вхідних даних зі шумом ітераційний процес потрібно зупинити перед зростанням похибки, однак для цього прикладу бачимо збіжність протягом 400-х ітерацій. Також зауважимо, що вихідними результатами методу Ландвебера на рисунках є лише значення на внутрішній граничній кривій, на противагу альтернуючому методу, де отримуємо також апроксимацію нормальної похідної.

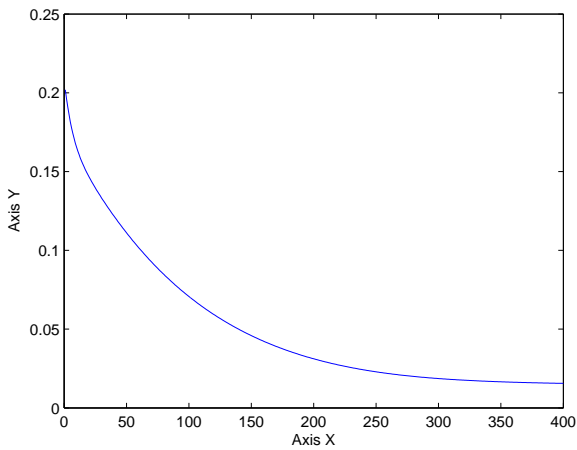
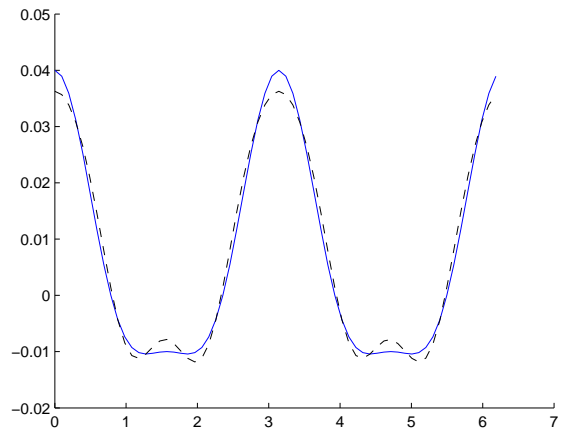
## Приклад 6

Область  $D$  визначена граничними кривими  $\Gamma_{-1}$  та  $\Gamma_0$  з прикладу 2 у попередньому розділі (другий приклад для мішаної задачі Діхіле-Неймана), див. рис. 3.3. Вхідні дані Коші також визначимо на основі цього прикладу. Так,

$$\sigma(x) = (4 + x_1 + x_2)^2, \quad x \in D,$$

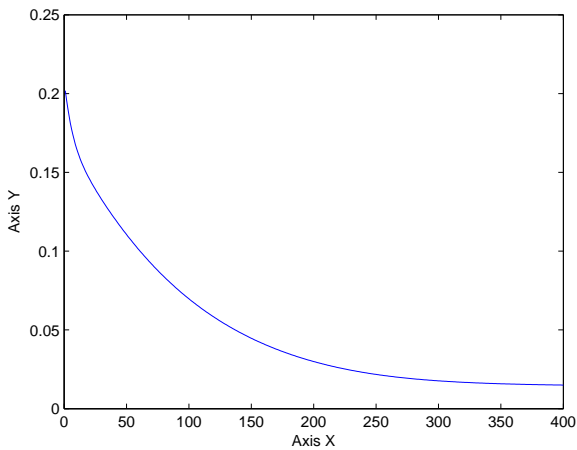
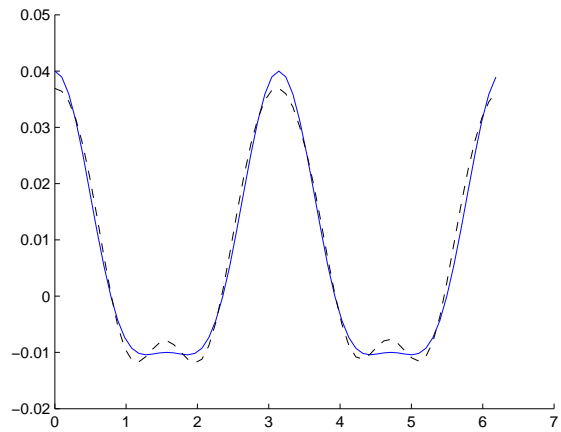
з

$$g_2(x) = (x_1^2 - x_2^2)/(4 + x_1 + x_2), \quad x \in \Gamma_0,$$

а). похибка розв'язку в  $L_2$ 

б). точний та наближений розв'язок

Рис. 4.16: Похибка розв'язку на 400 ітераціях та значення функції на останній ітерації для прикладу 5.

а). похибка розв'язку в  $L_2$ 

б). точний та наближений розв'язок

Рис. 4.17: Похибка розв'язку на 400 ітераціях та значення функції на останній ітерації для прикладу 5 (шум 3%)

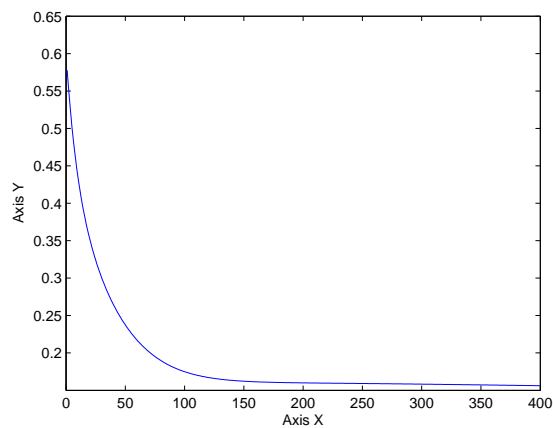
$$f_2(x) = (4 + x_1 + x_2)^2 \nabla u_{ex}(x) \cdot \nu(x), \quad x \in \Gamma_0,$$

де

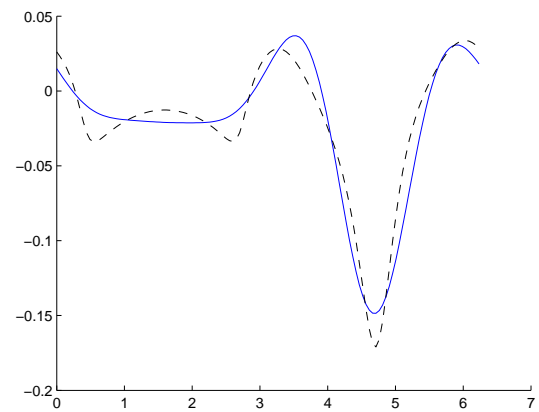
$$u_{ex}(x) = (x_1^2 - x_2^2)/(4 + x_1 + x_2) - \text{точний розв'язок.}$$

Для розв'язування мішаних задач обрано параметри дискретизації  $N = 3$  та  $n = 64$ . Для ітераційної процедури взято  $\gamma = 0.03$  та  $h_0 = 0$ , як і для попереднього прикладу. На рис. 4.18 наведено похибку розв'язку на  $\Gamma_{-1}$  протягом 400 ітерацій та точний і наближений розв'язки на останній ітерації

у випадку точних вхідних даних.



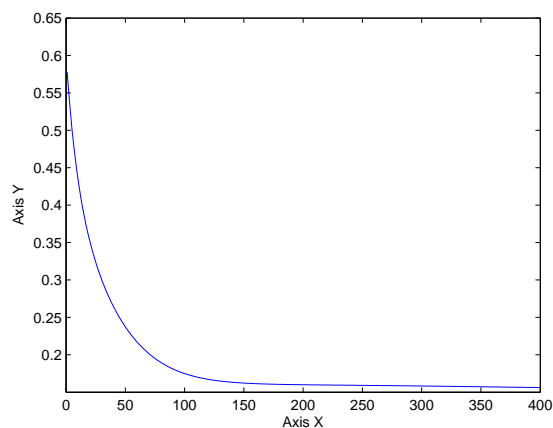
а). похибка розв'язку в  $L_2$



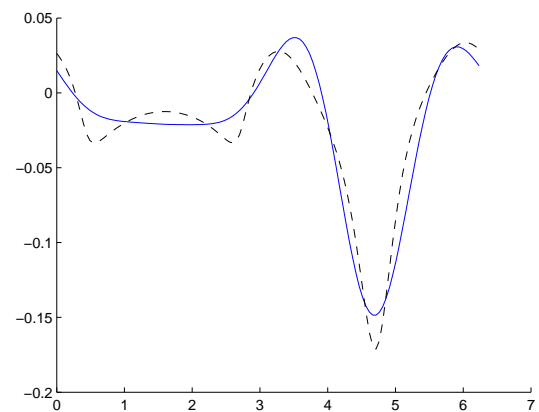
б). точний та наближений розв'язок

Рис. 4.18: Похибка розв'язку на 400 ітераціях та значення функції на останній ітерації для прикладу 6.

Результати для 3% збурених вхідних даних для 400 ітерацій наведено на рис. 4.19. Для точних вхідних даних спостерігаємо збіжність до розв'язку на  $\Gamma_{-1}$ . У випадку даних зі шумом для фіксованої кількості ітерацій також спостерігається збіжність, як і для попереднього прикладу, однак, здебільшого для таких даних ітераційний процес потрібно зупинити завчасно, про що згадувалось раніше.



а). похибка розв'язку в  $L_2$



б). точний та наближений розв'язок

Рис. 4.19: Похибка розв'язку на 400 ітераціях та значення функції на останній ітерації для прикладу 6 (шум 3%).

## Висновки до розділу 4

У даному розділі було розглянуто постановку та чисельне розв'язування задачі Коші для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами у двозв'язній області прямим та ітераційними методами.

До прямого методу відносимо непрямий підхід інтегральних рівнянь, де шукані дані Коші отримуються з представлення розв'язку через суму параметрикс-потенціалів. Одержана система гранично-просторових інтегральних рівнянь з невідомими густинами вимагає регуляризації внаслідок некоректності поставленої задачі. Регуляризацію розв'язку системи здійснено методом Тіхонова, де одним зі способів вибору параметра регуляризації було обрано метод  $L$ -кривої. Чисельні експерименти наведено для кільцеподібних областей та областей, що обмежені негомтетичними кривими. Отримані результати підтверджують ефективність запропонованого методу для точних та збурених вхідних даних.

Ітераційними методами, які були розглянуті, є альтернуючий метод та метод Ландвебера. На кожному кроці цих методів розв'язуються дві мішані крайові задачі. Дані методи є регуляризуючими, де кількість ітерацій є параметром цієї регуляризації. Наведені чисельні результати для різних конфігурацій областей та різних вхідних даних підтверджують застосовність та ефективність згаданих методів при розв'язуванні задачі Коші.

Отримані результати чисельного розв'язування задачі Коші непрямим методом інтегральних рівнянь та альтернуючим методом опубліковані у [37, 38].

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі було розроблено, застосовано і обґрунтовано ефективні чисельні методи для наближеного розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у наступному:

1. Крайові задачі Діріхле та Неймана в однозв'язних плоских областях, мішані крайові задачі та задачу Коші у двозв'язних плоских областях для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами редуковано до систем гранично-просторових інтегральних рівнянь з різними типами особливостей за допомогою відповідних потенціалів.
2. Здійснено параметризацію отриманих інтегральних рівнянь та проаналізовано наявні особливості в ядрах. Розроблено чисельний метод квадратур для наближеного розв'язування систем інтегральних рівнянь шляхом зведення їх до систем лінійних алгебричних рівнянь.
3. Застосовано регуляризуючий метод Тіхонова з вибором параметра регуляризації методом  $L$ -кривої до системи лінійних рівнянь, отриманих при розв'язуванні задачі Коші.
4. Розроблено альтернуючий метод у поєднанні з гранично-просторовими інтегральними рівняннями для наближеного розв'язування задачі Коші. Досліджено його збіжність. Розроблено метод Ландвебера у поєднанні з гранично-просторовими інтегральними рівняннями для наближеного розв'язування задачі Коші.
5. Здійснено програмну реалізацію всіх запропонованих методів і перевірено їх збіжність на значній кількості чисельних експериментів.

Усі теоретичні дослідження для запропонованих алгоритмів підтверджено різними чисельними експериментами.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Бабенко К., Хапко Р. Про чисельне розв'язування задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом граничних інтегральних рівнянь // Вісник Харківського національного університету. — 2012. — Т. 1015. — С. 25–32.
- [2] Бешлей А., Хапко Р. Про метод інтегральних рівнянь для задачі Діріхле з еліптичним рівнянням зі змінними коефіцієнтами // Матеріали IV конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації” присвяченої пам'яті професора Б.О.Попова, Львів: ФМІ імені Г.В. Карпенка НАН України. — 2016. — С. 16–20.
- [3] Бешлей А., Хапко Р. Про застосування методу інтегральних рівнянь для задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами // Матеріали XXII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Львів: ЛНУ імені Івана Франка. — 2016. — С. 31–34.
- [4] Бешлей А. Чисельне розв'язування задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Інститут математики НАН України. — 2017. — С. 55.
- [5] Бешлей А. Про чисельне розв'язування задачі Коші для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій”, Рівне: НУВГП, РДГУ. — 2018. — С. 115–116.
- [6] Бешлей А. Про використання методу інтегральних рівнянь для

розв'язування задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. — 2018. — Т. 26. — С. 9–19.

- [7] Свешников А., Боголюбов А., Кравцов В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. — Москва : МГУ, 1993.
- [8] Вайникко Г., Веретенников А. Итерационные процедуры в некорректных задачах. — Москва : Наука, 1986.
- [9] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. — Москва : ИЛ, 1957.
- [10] Самарский А. Теория разностных схем. — Москва : Наука, 1977.
- [11] Морозов В. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1966. — Т. 6. — С. 242–251.
- [12] Козлов В., Мазья В. О сохраняющих дифференциальные уравнения итерационных процедурах решения некорректных краевых задач // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1. — С. 144–170.
- [13] Козлов В., Мазья В., Фомин А. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1991. — Т. 31, № 1. — С. 64–74.
- [14] Солодкий С. Сложность проекционных методов решения некорректных задач // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. — 1996. — Т. 138. — С. 146–180.



- [15] Agranovich M. Sobolev spaces, their generalizations and elliptic problems in smooth and Lipschitz domains. — Springer Monographs in Mathematics, 2015. — 331 p.
- [16] AL-Jawary M.A. The radial integration boundary integral and integro-differential equation methods for numerical solution of problems with variable coefficients : Ph. D. thesis / M.A. AL-Jawary ; Brunel university. — 2012.
- [17] AL-Jawary M.A., Wrobel L.C. Numerical solution of two-dimensional mixed problems with variable coefficients by the boundary-domain integral and integro-differential equation methods // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2011. — Vol. 35, no. 12. — P. 1279–1287.
- [18] AL-Jawary M.A., Wrobel L.C. Radial integration boundary integral and integro-differential equation methods for two-dimensional heat conduction problems with variable coefficients // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2012. — Vol. 36, no. 5. — P. 685–695.
- [19] Ang W.T. Numerical solution of a linear elliptic partial differential equation with variable coefficients: A complex variable boundary element approach // Numerical Methods for Partial Differential Equations. — 2012. — Vol. 28, no. 3. — P. 954–965.
- [20] Ang W.T., Kusuma J., Clements D.L. A boundary element method for a second order elliptic partial differential equation with variable coefficients // Eng Anal Bound Elem. — 1996. — Vol. 18, no. 4. — P. 311–316.
- [21] Atkinson K. The numerical solution of integral equations of the second kind. — Cambridge : Cambridge University Press, 1997. — 552 p.
- [22] Ayele T.G., Dufera T.T., Mikhailov S.E. Analysis of boundary-domain in-

tegral equations for variable-coefficient Neumann BVP in 2D // Integral Methods in Science and Engineering. — 2017. — Vol. 1. — P. 21–33.

- [23] Ayele T.G., Dufera T.T., Mikhailov S.E. Analysis of boundary-domain integral equations for variable-coefficient mixed BVP in 2D // Analysis, Probability, Applications, and Computation. — 2019. — P. 467–480.
- [24] Ayele T.G., Mikhailov S.E. Analysis of two-operator boundary-domain integral equations for variable-coefficient mixed BVP // Eurasian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 2, no. 3. — P. 20–41.
- [25] Babenko Ch., Chapko R. On the combination of singular and hypersingular boundary integral equations for the Neumann boundary value problem for an elliptic equation with variable coefficients // Journal of Numerical and Applied Mathematics(Kyiv). — 2012. — Vol. 109. — P. 1–10.
- [26] Baranger T.N., Johansson B.T., Rischette R. On the alternating method for Cauchy problems and its finite element discretisation // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2013. — P. 183–197.
- [27] Baravdish G., Borachok I., Chapko R. et al. An iterative method for the Cauchy problem for second-order elliptic equations // International Journal of Mechanical Sciences. — 2018. — Vol. 142. — P. 216–223.
- [28] Barth A., Schwab Ch., Zollinger N. Multi-level Monte Carlo Finite Element method for elliptic PDEs with stochastic coefficients // Numerische Mathematik. — 2011. — Vol. 119. — P. 123–161.
- [29] Bastay G., Kozlov V., Turesson B. Iterative methods for an inverse heat conduction problem // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2001. — Vol. 9. — P. 375–388.

- [30] Beale J. Tomas, Lai Ming-Chih. A method for computing nearly singular integrals // Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2001. — Vol. 38, no. 6. — P. 1902–1925.
- [31] Berikelashvili G., Midodashvili B. Method of corrections by higher order differences for elliptic equations with variable coefficients // Georgian Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 23, no. 2. — P. 169–180.
- [32] Berntsson F., Kozlov V., Mpinganzima L., Turesson B.O. An alternating iterative procedure for the Cauchy problem for the Helmholtz equation // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2014. — Vol. 22. — P. 45–62.
- [33] Beshley A. On the numerical solution of the Neumann problem for an elliptic equation with variable coefficients by an integral equation approach // Proceedings of the International Conference UCAM-2017 “Ukrainian Conference on Applied Mathematics”, Lviv: Ivan Franko Lviv National University. — 2017. — P. 20–21.
- [34] Beshley A. On the numerical solution of a mixed boundary value problem for the elliptic equation with variable coefficients in doubly connected planar domains // Journal of Numerical and Applied Mathematics(Kyiv). — 2018. — Vol. 2. — P. 3–15.
- [35] Beshley A., Chapko R., Johansson B.T. An integral equation approach for numerical solution of elliptic equations with spacewise dependent coefficients // Abstract of the 11th ISAAC congress, Linnaeus University, Sweden. — 2017. — P. 130.
- [36] Beshley A., Chapko R., Johansson B.T. An integral equation method for the numerical solution of a Dirichlet problem for second-order elliptic equations with variable coefficients // Journal of Engineering Mathematics. — 2018. — Vol. 112, no. 1. — P. 63–73.

- [37] Beshley A., Chapko R., Johansson B.T. A boundary-domain integral equation method for an elliptic Cauchy problem with variable coefficients // In: Lindahl K., Lindström T., Rodino L., Toft J., Wahlberg P. (eds) Analysis, Probability, Applications, and Computation. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. — 2019. — P. 493–501.
- [38] Beshley A., Chapko R., Johansson B.T. On the alternating method and boundary-domain integrals for elliptic Cauchy problems // Computers and Mathematics with Applications. — 2019. — Vol. 78, no. 11. — P. 3514–3526.
- [39] Borachok I., Chapko R., Johansson B.T. Numerical solution of an elliptic 3-dimensional Cauchy problem by the alternating method and boundary integral equations // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2016. — Vol. 24. — P. 711–725.
- [40] Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Boundary element techniques. — Berlin : Springer, 1984.
- [41] Brebbia C.A., Walker S. Boundary element techniques in engineering. — Newnes-Butterworths, 1980.
- [42] Brunton I. Solving variable coefficient partial differential equations using the boundary element method : Ph. D. thesis / I Brunton ; University of Auckland. — 1996.
- [43] Cakoni F., Kress R. Integral equations for inverse problems in corrosion detection from partial Cauchy data // Inverse Problems and Imaging. — 2007. — Vol. 1. — P. 229–245.
- [44] Calvetti D., Morigi S. Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 123. — P. 423–446.

- [45] Chapko R., Johansson B.T. On the numerical solution of a Cauchy problem for the Laplace equation via a direct integral equation approach // *Inverse Problems and Imaging*. — 2012. — Vol. 6. — P. 25–36.
- [46] Chapko R., Johansson B.T. A boundary integral approach for numerical solution of the Cauchy problem for the Laplace equation // *Ukrainian Mathematical Journal*. Special Issue in Honour of Prof. V. L. Makarov. — 2016. — Vol. 68, no. 12. — P. 1665–1682.
- [47] Chapko R., Johansson B.T. A boundary integral equation method for numerical solution of parabolic and hyperbolic Cauchy problems // *Applied Numerical Mathematics*. — 2018. — Vol. 129. — P. 104–119.
- [48] Chapko R., Johansson B.T. An iterative regularizing method for an incomplete boundary data problem for the biharmonic equation // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. — 2018. — Vol. 98(11). — P. 2010–2021.
- [49] Chapko R., Johansson B.T., Savka Y. On the use of an integral equation approach for the numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in a doubly connected planar domain // *Inverse Problems in Science and Engineering*. — 2014. — Vol. 22. — P. 130–149.
- [50] Chapko R., Johansson B.T., Vavrychuk V. Numerical solution of parabolic Cauchy problems in planar corner domains // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2014. — Vol. 101. — P. 1–12.
- [51] Chapko R., Kress R. On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind // In: *World Scientific Series in Applicable Analysis. Contributions in Numerical Mathematics* (Agarwal, ed.) World Scientific. — 1993. — Vol. 2. — P. 127–140.

- [52] Cheng A.H.D. Darcy's flow with variable permeability: a boundary integral solution // *Water Resources Research*. — 1984. — Vol. 20, no. 7. — P. 980–984.
- [53] Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D. Analysis of direct boundary-domain integral equations for a mixed BVP with variable coefficient, I: equivalence and invertibility // *Journal of Integral Equations and Applications*. — 2009. — Vol. 21, no. 4. — P. 499–543.
- [54] Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D. Analysis of some localized boundary-domain integral equations // *Journal of Integral Equations and Applications*. — 2009. — Vol. 21. — P. 405–445.
- [55] Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D. Analysis of direct boundary-domain integral equations for a mixed BVP with variable coefficient, II: Solution regularity and asymptotics // *Journal of Integral Equations and Applications*. — 2010. — Vol. 22. — P. 19–37.
- [56] Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D. Localized boundary-domain integral equation formulation for mixed type problems // *Georgian Mathematical Journal*. — 2010. — Vol. 17. — P. 469–494.
- [57] Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D. Analysis of segregated boundary-domain integral equations for variable-coefficient problems with cracks // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. — 2011. — Vol. 27. — P. 121–140.
- [58] Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D. Analysis of direct segregated boundary-domain integral equations for variable-coefficient mixed BVPs in exterior domains // *Analysis and Applications*. — 2013. — Vol. 11, no. 4.
- [59] Clements D.L. A boundary integral equation method for the numerical solution of a second order elliptic equation with variable coefficients // *Journal*

- of the Australian Mathematical Society. — 1980. — Vol. 22, no. 2. — P. 218–228.
- [60] Clements D.L. A fundamental solution for linear second-order elliptic systems with variable coefficients // *Journal of Engineering Mathematics*. — 2004. — Vol. 49, no. 3. — P. 209–216.
- [61] Colton D., Kress R. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, 2nd ed. — Berlin : Springer, 1998.
- [62] Dufera T.T., Mikhailov S.E. Analysis of boundary-domain integral equations for variable-coefficient Dirichlet BVP in 2D // *Integral Methods in Science and Engineering Theoretical and Computational Advances*. — 2015. — P. 163–175.
- [63] Dufera T.T., Mikhailov S.E. Boundary-domain integral equations for variable coefficient Dirichlet BVP in 2D unbounded domain // *Analysis, Probability, Applications, and Computation*. — 2019. — P. 481–492.
- [64] Duffy M.G. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 1982. — Vol. 19. — P. 1260–1262.
- [65] Gao X.-W. A boundary element method without internal cells for two-dimensional and three-dimensional elastoplastic problems // *Journal of Applied Mathematics*. — 2002. — Vol. 69, no. 2. — P. 154–160.
- [66] Gao X.-W. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2002. — Vol. 26. — P. 905–916.
- [67] Gao X.-W. Boundary element analysis in thermoelasticity with and without

internal cells // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2003. — Vol. 57. — P. 975–990.

- [68] Gao X.-W., Zhang C.H., Guo L. Boundary-only element solutions of 2D and 3D nonlinear and nonhomogeneous elastic problems // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2007. — Vol. 31. — P. 974–982.
- [69] Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic partial differential equations of second order. — Berlin : Springer-Verlag, 2001. — 518 p.
- [70] Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. — New Haven : Yale University Press, 1923.
- [71] Hansen H. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems // Computational Inverse Problems in Electrophysiology. — 2000. — P. 119–142.
- [72] Harrouni K.E., Ouazar D., Wrobel L.C., Brebbia C.A. Dual reciprocity boundary element method for heterogeneous porous media // Boundary Element Technology VII. — 1992. — P. 151–159.
- [73] Harrouni K.E., Ouazar D., Wrobel L.C., Cheng A. Global interpolation function based DRBEM applied to Darcy's flow in heterogeneous media // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 1995. — Vol. 16. — P. 281–285.
- [74] Hou T.Y., Wu X.H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media // Journal of Computational Physics. — 1997. — Vol. 134. — P. 169–189.
- [75] Hsiao G., Wendland W. Boundary integral equations. — Berlin : Springer, 2008.



- [76] Keller J. Inverse problems. // The American Mathematical Monthly. — 1976. — Vol. 83. — P. 107–118.
- [77] Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. — Berlin : Springer, 2011.
- [78] Kress R. Linear integral equations, 3rd. ed. — New York : Springer, 2014. — 412 p.
- [79] Kress R. On Trefftz' integral equation for the Bernoulli free boundary value problem // Numerische Mathematik. — 2017. — Vol. 136, no. 2. — P. 503–522.
- [80] Kress R., Rundell W. Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem // Inverse Problems. — 2005. — Vol. 21, no. 4. — P. 1207–1223.
- [81] Landweber L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. // American Journal of Mathematics. — 1951. — Vol. 73. — P. 615–624.
- [82] Lesnic D., Elliott L., Ingham D. B. An iterative boundary element method for solving numerically the Cauchy problem for the Laplace equation // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 1997. — Vol. 20. — P. 123–133.
- [83] Liu J.C., Zhang Q.G. Cauchy problem for the laplace equation in 2D and 3D doubly connected domains // CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences. — 2013. — Vol. 93, no. 3. — P. 203–220.
- [84] Maxwell D., Kozlov V., Maz'ya V. Iteration as a form of Landweber iteration // Inverse Problems and Imaging. — 2014. — Vol. 8. — P. 537–560.

- [85] Mikhailov S.E. Localized boundary-domain integral formulations for problems with variable coefficients // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2002. — Vol. 26, no. 8. — P. 681–690.
- [86] Mikhailov S.E. Analysis of united boundary-domain integro-differential and integral equations for a mixed BVP with variable coefficient // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2006. — Vol. 29, no. 6. — P. 715–739.
- [87] Mikhailov S.E. Analysis of segregated boundary-domain integral equations for variable-coefficient Dirichlet and Neumann problems with general data // ArXiv: 1509.03501. — 2015. — P. 1–32.
- [88] Mikhailov S.E. Analysis of segregated boundary-domain integral equations for BVPs with non-smooth coefficient on Lipschitz domains // Boundary Value Problems. — 2018. — Vol. 87. — P. 1–52.
- [89] Mikhailov S.E., Mohamed N.A. Numerical solution and spectrum of boundary-domain integral equation for the Neumann BVP with variable coefficient // International Journal of Computer Mathematics. — 2012. — Vol. 89. — P. 1488–1503.
- [90] Mikhailov S.E., Nakhova I.S. Mesh-based numerical implementation of the localized boundary-domain integral equation method to a variable-coefficient Neumann problem // Journal of Engineering Mathematics. — 2005. — Vol. 51. — P. 251–259.
- [91] Mikhailov S.E., Portillo C.F. A new family of boundary-domain integral equations for the mixed exterior stationary heat transfer problem with variable coefficient // Integral Methods in Science and Engineering, Vol.1 Theoretical Techniques. — 2017. — P. 215–226.
- [92] Morse P.M., Feshbach H. Methods of theoretical physics. — New York: McGraw-Hill, 1953. — Vol. 1.

- [93] Nardini D., Brebbia C.A. A new approach for free vibration analysis using boundary elements // *Boundary Element Methods in Engineering*. — 1982. — P. 312–326.
- [94] Ortiz J.S., Gipson G.S. Boundary element modeling of galvanic corrosion in non-homogeneous electrolytes // *Advances in Boundary Elements*. — 1989. — P. 151–160.
- [95] Paris F., Canas J. *Boundary element method fundamentals and applications*. — New York : Oxford University Press, 1997.
- [96] Park Y.S., Ang W.T. A complex variable boundary element method for an elliptic partial differential equation with variable coefficients // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. — 2000. — Vol. 16. — P. 697–703.
- [97] Partridge P.W., Brebbia C.A., Wrobel L.C. *The dual reciprocity boundary element method*. — Springer Netherlands, 1991.
- [98] Pomp A. *The boundary-domain integral method for elliptic systems with an application to shells. Lecture notes in mathematics*. — Berlin : Springer, 1998.
- [99] Portillo C.F., Woldemicheal Z.W. On the existence of solution of the boundary-domain integral equation system derived from the 2D Dirichlet problem for the diffusion equation with variable coefficient // *arXiv:1907.07620*. — 2019. — P. 1–13.
- [100] Pozrikidis C. Reciprocal identities and integral formulations for diffusive scalar transport and Stokes flow with position-dependent diffusivity or viscosity // *Journal of Engineering Mathematics*. — 2016. — Vol. 96, no. 1. — P. 95–114.

- [101] Rangogni R. Numerical solution of the generalized Laplace equation by coupling the boundary element method and the perturbation method // Applied Mathematical Modelling. — 1986. — Vol. 10. — P. 266–270.
- [102] Rangogni R., Occhi R. Numerical solution of the generalized Laplace equation by the boundary element method // Applied Mathematical Modelling. — 1987. — Vol. 11. — P. 393–396.
- [103] Ransford T. Computation of Logarithmic Capacity // Comput. Methods Funct. Theory. — 2011. — Vol. 10. — P. 555–578.
- [104] Samarskii A., Fryazinov I. On finite-difference schemes for solving the Dirichlet problem for an elliptic equation with variable coefficients in an arbitrary region // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1971. — Vol. 11, no. 2. — P. 109–139.
- [105] Sladek V., Sladek J., Zhang Ch. Domain element local integral equation method for potential problems in anisotropic and functionally graded materials // Computational Mechanics. — 2005. — Vol. 37. — P. 78–85.
- [106] Suresh S., Mortensen A. Fundamentals of Functionally Graded Materials. — London: Institute of Materials, 1998.
- [107] Tikhonov A., Goncharky A., Stepanov V., Yagola A. Numerical methods for the solution of ill-posed problems. — Dordrecht : Kluwer academic, 1995.
- [108] Yan Y., Sloan I. On integral equations of the first kind with logarithmic kernels // J. Integral Eqns. Appl. — 1988. — Vol. 1. — P. 517–548.

## ДОДАТОК А.

### СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

#### *Наукові статті у вітчизняних фахових виданнях:*

1. Бешлей А. Про використання методу інтегральних рівнянь для розв'язування задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2018. – Вип.26. – С. 9-19.
2. Beshley A. On the numerical solution of a mixed boundary value problem for the elliptic equation with variable coefficients in doubly connected planar domains. / A. Beshley // Journal of Numerical and Applied Mathematics (Kyiv). – 2018. – Vol.2. – P.3-15.

#### *Наукові статті у закордонних виданнях:*

3. Beshley A. An integral equation method for the numerical solution of a Dirichlet problem for second order elliptic equations with variable coefficients. / A. Beshley, R. Chapko, B. T. Johansson // Journal of Engineering Mathematics. – 2018. – Vol.112, no. 1. – P. 63-73.
4. Beshley A. A boundary-domain integral equation method for an elliptic Cauchy problem with variable coefficients. / A. Beshley, R. Chapko, B. T. Johansson // In: Lindahl K., Lindström T., Rodino L., Toft J., Wahlberg P. (eds) Analysis, Probability, Applications, and Computation. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. – 2019. – P. 493-501.
5. Beshley A. On the alternating method and boundary-domain integrals for elliptic Cauchy problems. / A. Beshley, R. Chapko, B. T. Johansson // Computers & Mathematics with Applications. – 2019. – Vol.78, no. 11. – P. 3514-3526.

*Матеріали конференцій:*

6. Бешлей А. Про метод інтегральних рівнянь для задачі Діріхле з еліптичним рівнянням зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей, Р. Хапко // Матеріали IV науково-технічної конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, присвяченої пам’яті професора Б.О.Попова, Львів: ФМІ імені Г.В. Карпенка НАН України, 2016. – С. 16-20.
7. Бешлей А. Про застосування методу інтегральних рівнянь для задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей, Р. Хапко // Матеріали XXII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2016. – С. 31-34.
8. Beshley A. On the numerical solution of the Neumann problem for an elliptic equation with variable coefficients by an integral equation approach. / A. Beshley // Proceedings of the International Conference UCAM-2017 “Ukrainian Conference on Applied Mathematics”, Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2017. – P. 20-21.
9. Beshley A. An integral equation approach for numerical solution of elliptic equations with spacewise dependent coefficients. / A. Beshley, R. Chapko, B. T. Johansson // Abstract of the 11th ISAAC congress, 14-18 August 2017, Linnaeus University, Sweden, 2017. – P. 130.
10. Бешлей А. Чисельне розв’язування задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь. / А. Бешлей // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 55.
11. Бешлей А. Про чисельне розв’язування задачі Коші для еліптичного

рівняння зі змінними коефіцієнтами. / А. Бешлей // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій”, Рівне: НУВГП, РДГУ, 2018. – С. 115-116.