

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу  
Бешлея Андрія Володимировича  
«Чисельне розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння  
зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь»,  
подану на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика.

### Актуальність досліджень дисертаційної роботи

Плоскі задачі для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами часто виникають при моделюванні різноманітних фізичних процесів. Наявність змінних коефіцієнтів у диференціальному рівнянні ускладнює застосування ряду чисельних методів для їх розв'язування. У роботі Бешлея А. В. розглядається однорідне еліптичне рівняння зі змінними коефіцієнтами, а саме рівняння електричної імпедансної томографії, яке також ще називають узагальненим рівнянням Лапласа. Це рівняння є менш дослідженим, ніж рівняння Лапласа.

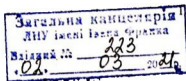
Одним із способів розв'язування крайових задач для цього рівняння є використання функції параметрикс та відповідних потенціалів, за допомогою яких диференціальні задачі редукуються до систем гранично-просторових інтегральних рівнянь. Саме такий підхід реалізовано в дисертаційній роботі та обґрунтовано можливість застосувати наявний досвід розв'язування інтегральних рівнянь з різними типами особливостей. Таким чином, отримані системи рівнянь складають теоретичний інтерес, а розроблені в дисертації Бешлея А. В. алгоритми їх чисельного розв'язування є розвитком методів обчислювальної математики. Оскільки розглянуті в дисертаційній роботі задачі мають широке застосування в електричній імпедансній томографії, геофізиці, тощо, то проведені дослідження є актуальними і мають практичну цінність.

### Оцінка змісту та завершеності дисертації

Структура дисертаційної роботи відповідає чинним вимогам МОН України. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку зі списком публікацій здобувача. Загальний обсяг дисертації становить 135 сторінок.

У вступі наведено актуальність теми роботи, показано зв'язок з науковими програмами та темами, сформульовано мету та задачі дослідження.

У першому розділі наведено огляд фізичних явищ, що описуються еліптичним рівнянням зі змінними коефіцієнтами. Розглянуто математичні моделі для еліптичного рівняння, типи плоских задач та зроблено короткий огляд методів розв'язування такого рівняння.



**Другий розділ** присвячений чисельному розв'язуванню плоских крайових задач Діріхле та Неймана в однозв'язних областях. Застосовуючи поняття параметрика та введених параметрикс-потенціалів, а також враховуючи їх властивості, кожна з двох коректних диференціальних задач редукують до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь. Доведено коректність отриманих систем у відповідних просторах, з врахуванням умови про логарифмічну сміність межі області. На основі гомотетичного стиснення кривої, що обмежує область, здійснено заміну змінних у подвійних інтегралах та проведено параметризацію систем інтегральних рівнянь. В ядрах інтегралів виділено логарифмічну особливість та особливість типу Коші у вигляді відповідних вагових функцій. Застосовано метод Нистрьома з використанням відповідних квадратурних формул для розв'язування інтегральних рівнянь та наведено результати чисельних експериментів для різних вхідних даних.

У **третьому розділі** розглянуто мішані крайові задачі у двозв'язних областях. Подібно до попереднього розділу, розв'язки задач подано у вигляді суми параметрикс-потенціалів простого шару та об'ємного параметрикс-потенціалу. Отримані системи гранично-просторових інтегральних рівнянь після відповідних заміни змінних та виділення особливостей розв'язано методом Нистрьома та наведено апроксимацію розв'язку в області. Особливо розглянуто застосування даного підходу для двозв'язних областей, що обмежені негомотетичними одна відносно іншої кривими. Наведено результати чисельних експериментів для різних областей.

**Четвертий розділ** присвячений чисельному розв'язуванню задачі Коші для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами у двозв'язній області. Наведено постановку задачі та вказано на некоректність задачі у сенсі відсутності стійкості за вхідними даними. Для розв'язування застосовано непрямої метод інтегральних рівнянь та використано регуляризацію Тіхонова з вибором параметра регуляризації методом L-кривої. Також представлено два ітераційні методи разом з їх алгоритмами: альтернуючий метод та метод Ландвебера. На кожній ітерації розв'язуються коректні мішані задачі для однорідного еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. При цьому використано метод інтегральних рівнянь, приведений у попередніх розділах. Результати розрахунків, отримані за допомогою розроблених методів, наведено для точних та збурених вхідних даних.

#### **Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків і рекомендацій**

Основні результати дисертаційного дослідження є новими та математично обґрунтованими, а робота має завершений характер.

#### **Достовірність результатів та їх новизна**

У дисертаційній роботі розроблено, застосовано та обґрунтовано чисельні методи для розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. При цьому отримано такі нові результати:

1. За допомогою параметрикс-потенціалів плоскі задачі редуковано до систем гранично-просторових інтегральних рівнянь та здійснено їх параметризацію з використанням відповідної заміни змінних.

2. Проаналізовано особливості в ядрах інтегральних рівнянь та застосовано метод Нистрьома з відповідними квадратурними формулами для розв'язування крайових задач.

3. Запропоновано непрямий метод гранично-просторових інтегральних рівнянь для розв'язування задачі Коші у двозв'язній області з регуляризацією Тіхонова та вибором параметра регуляризації методом L-кривої.

4. Використано альтернуючий метод та метод Ландвебера у поєднанні з гранично-просторовими інтегральними рівняннями для наближеного розв'язування задачі Коші. Досліджено збіжність альтернуючого методу та здійснено програмну реалізацію всіх запропонованих методів.

Отже, достовірність та обґрунтованість отриманих наукових результатів дисертації забезпечується математичною обґрунтованістю розроблених чисельних алгоритмів, а також підтверджується значною кількістю чисельних експериментів.

#### **Повнота викладу в опублікованих працях**

За матеріалами дисертації опубліковано 5 статей, з яких 4 праці у виданнях, що входять у міжнародні наукометричні бази Scopus та Web of Science. У матеріалах наукових конференцій опубліковано 6 тез, що відповідають тематиці дисертаційної роботи.

Зміст автореферату правильно відображає основні положення дисертації. В авторефераті та дисертації чітко зазначено особистий внесок здобувача у кожній опублікованій статті за тематикою роботи.

#### **Зауваження та побажання щодо дисертаційної роботи**

1. Складена формула середніх прямокутників має квадратичний порядок збіжності, а не лінійний, як це вказано, зокрема, на с. 52, 53.
2. Відсутнє обґрунтування збіжності методів та визначення порядку апроксимацій подвійних інтегралів складеними квадратурними формулами, що доцільно провести в майбутніх наукових дослідженнях.
3. Для зручності параметри дискретизації  $N$  та  $n$  варто було позначити різними літерами. Наприклад,  $M$  та  $N$ .
4. Чи можна використовувати описаний підхід до неоднорідного рівняння? Якщо так, то варто було б продемонструвати результати в цій роботі.
5. Загальний стиль написання дисертації є логічним та зрозумілим, незважаючи на те, що зустрічаються деякі описки та неточності стилістичного характеру в тексті, на які автору вказано особисто.

## Загальна оцінка дисертаційної роботи

Вищенаведені недоліки не є критичними та не впливають на загалом позитивну характеристику роботи, а побажання лише вказують на можливість розширення досліджень в даній тематиці у майбутніх наукових працях.

Результати, представлені в дисертаційній роботі, є новими, математично строго обґрунтованими й опублікованими у фахових журналах і доповідалися на наукових конференціях, а автореферат правильно та повно відображає зміст дисертації.

Робота написана на належному науковому рівні, містить нові наукові твердження та результати, що роблять внесок у розвиток методів обчислювальної математики.

За актуальністю теми, новизною та обсягом проведеної роботи, дисертація А. В. Бешлея на тему «Чисельне розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь» є завершеною науковою працею. Дисертаційна робота відповідає вимогам «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 р. зі змінами, внесеними згідно з Постановою Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 р. і наказу № 40 МОН України від 12 січня 2017 р. щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор – Бешлей Андрій Володимирович – заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика.

### Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,  
провідний науковий співробітник відділу  
числових методів математичної фізики  
Інституту прикладних проблем механіки і  
математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

М. В. Кутнів

Підпис *Кутнів М. В.*  
засвідчую  
Великий секретар ІППМ  
ім. Я. С. Підстригача НАНУ  
*Гриваченко О. З.*

