ВІДГУК НА ДИСЕРТАЦІЙНУ РОБОТУ
Бешлея Андрія Володимировича «Чисельне розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь»,
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.07 – обчислювальна математика

Дисертаційна робота Бешлея А.В. присвячена чисельному розв'язуванню крайових задач для еліптичного рівняння другого порядку методом інтегральних рівнянь. Характерною відмінністю розглядуваних задач є наявність змінних коефіцієнтів у рівнянні, що призводить до необхідності розробки нових підходів та модифікації відомих раніше методів розв'язування крайових задач для еліптичних рівнянь. Побудовані автором алгоритми є варіаціями непрямого методу інтегральних рівнянь, де шуканий розв'язок подається у вигляді суми об'ємного параметрикс-потенціалу та параметрикс-потенціалу простого шару. Потім заміною змінних досліджувана задача зводиться до параметризованої системи інтегральних рівнянь, для повної дискретизації якої використовується метод Нистрьома. Слід зазначити, що вперше цей метод дискретизації був запропонований Е.І. Нистрьомом в 1925 році для системи диференціальних рівнянь другого порядку як альтернатива методу Рунге-Кутти. Як виявилось (див., наприклад, монографію Э.Хайрер, С.Нерсетт, Г.Ваннер «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи», Москва, Изд-во Мир, 1990), саме для еліптичних рівнянь метод Нистрьома має перевагу над методом Рунге-Кутти у сенсі обсягу обчислень. Тому застосування методу Нистрьома для розв'язування розглядуваних в дисертації задач є цілком виправданим і свідчить про високу *ефективність* побудованих автором алгоритмів.

Структурно дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел (108 найменувань). Загальний обсяг роботи становить 135 сторінок, вона містить 14 таблиць та 29 рисунків.

У **вступі** сформульовано мету проведених досліджень, обґрунтовано їх актуальність та новизну, відзначені основні завдання роботи, особистий внесок здобувача і апробація результатів дисертації.

У **першому розділі** дисертації представлені основні типи математичних моделей, які відповідають багатьом практичним задачам для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (ЕРЗК). Велика кількість наведених прикладів таких задач безперечно свідчить про *актуальність досліджень* дисертанта. Крім того у розділі 1 наведений докладний опис відомих чисельних методів розв'язування ЕРЗК та надано ретельний порівняльний аналіз цих методів.

Загальна канцелярія
ЛНУ імені Івана Франка
Вх. № 248
05 03 21

Об'єктом досліджень **другого розділу** дисертаційної роботи є внутрішні крайові задачі Діріхле та Неймана для ЕРЗК в однозв'язній області. В пункті 2.1.1 встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі Діріхле, введено поняття об'ємного параметрикс-потенціалу та параметрикс-потенціалу простого шару, встановлено їх властивості, а також знайдено подання розв'язку задачі Діріхле у вигляді суми вказаних потенціалів. У пункті 2.1.2 розглянуто параметризацію задачі через заміну змінних, досліджено особливості ядер інтегральних рівнянь системи, що виникає під час розв'язування задачі методом інтегральних рівнянь, а також побудовано схеми повної дискретизації методом Нистрьома з урахуванням встановлених особливостей. Наприкінці пункту 2.1 обговорюються шляхи обґрунтування збіжності методу. Аналогічні дослідження для задачі Неймана наведені у пункті 2.2. Пункт 2.3 містить результати чисельних експериментів, що вказують на збіжність побудованих автором алгоритмів.

Третій розділ дисертації присвячений розв'язуванню мішаних задач Діріхле-Неймана та Неймана-Діріхле для ЕРЗК у двозв'язній області. Дослідження вказаних задач, а також побудова та обґрунтування відповідних варіантів методу інтегральних рівнянь проводиться за схемою із попереднього розділу: спочатку вивчаються питання існування та єдиності розв'язку досліджуваної задачі, далі встановлюється подання шуканого розв'язку у вигляді суми двох параметрикс-потенціалів, а потім за допомогою параметризації відбувається перехід до системи інтегральних рівнянь, повна дискретизація яких здійснюється із застосуванням методу Нистрьома. Наприкінці розділу наведено приклади чисельних розрахунків з докладним аналізом отриманих результатів.

В **останньому розділі** роботи розглядається задача Коші для ЕРЗК у двозв'язній області. Суттєвою відмінністю вказаної задачі від задач, розглянутих у попередніх розділах дисертації, є відсутність стійкості шуканого розв'язку від малих збурень вхідних даних. Цей факт робить досліджувану задачу некоректною, а відтак потребує регуляризацію як обов'язковий етап чисельного розв'язування цієї задачі. Відповідно до цього, у пункті 4.2 до непрямого методу інтегральних рівнянь автор додає регуляризатор з метою забезпечення стійкості побудованих наближень. За такий регуляризатор тут береться стандартний метод Тіхонова з правилом зупинки згідно правила L-кривої. У пунктах 4.3 і 4.4 досліджено ще дві ітераційні процедури розв'язування задачі Коші для ЕРЗК, що полягають у комбінації, відповідно, альтернуючого методу та методу Ландвебера з правилом зупинки згідно з принципом нев'язки Морозова. Слід додати, що вказані методи обґрунтовані автором шляхом встановлення збіжності за нормою наближень до шуканого розв'язку.

Зауважень принципового характеру щодо даного дисертаційного дослідження немає. Проте є кілька описок і огріхів щодо оформлення роботи, а також деякі побажання.

1. Стор.33, Теорема 2.1.11. Тут досліджується питання єдиності розв'язку системи інтегральних рівнянь для $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$. При цьому означення функціонального простору $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ в дисертації не наведено.
2. У перших двох розглянутих автором задачах стосовно функцій f (2.1.2), f_1 (3.1.2), f_2 (3.1.3), що задають крайові умови, припускається їх неперервність. Проте на функції g_1 (3.2.2), g_2 (3.2.3), g_2 (4.1.2), f_2 (4.1.3), що фігурують у крайових умовах останніх двох задач, не накладаються подібні припущення. На мій погляд «гладкісні» властивості вказаних функцій мають бути узгоджені.
3. Стор. 67. Аналіз збіжності побудованого методу наведено у вигляді схеми загального характеру. Бажано побачити замість тезисних вказівок більш строге доведення.
4. Для досліджених в дисертації алгоритмів встановлено факт збіжності побудованих наближень. Проте питання швидкості збіжності автором не розглядалось. Вважаю, що знаходження оцінок точності сприятиме підвищенню рівня відповідних результатів.
5. В четвертому розділі розглядаються 3 різні методи розв'язування задачі Коші для ЕРЗК. Для всіх цих методів проведено достатню кількість чисельних експериментів. Нажаль відсутній порівняльний аналіз досліджуваних методів.

Вказані зауваження не є істотними і суттєво не впливають на загальну високу позитивну оцінку роботи, яка оформлена якісно, добре структурована і логічно вибудувана.

Оцінюючи в цілому дисертаційну роботу Бешлея А.В., слід підкреслити, що вона є самостійною завершеною науковою працею, виконаною на високому теоретичному рівні на актуальну тему для обчислювальної математики та суміжних з нею областей. В дисертації автором встановлено ряд нових науково обґрунтованих результатів стосовно ефективності чисельних методів розв'язування крайових задач для еліптичного рівняння другого порядку, які можуть знайти своє подальше застосування і розвиток у

чисельному аналізі, теорії некоректних задач, загальній теорії оптимальних алгоритмів тощо. Отримані дисертантом результати достатньо повно опубліковані в 11 фахових роботах, серед яких 4 статті в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та Web of Science. Всі основні результати, що виносяться на захист, належать автору дисертації і апробовані на низці семінарів і конференцій.

Одержані результати є новими, достовірними і строго обґрунтованими, мають високий науковий рівень, майстерно викладені автором у роботі, що свідчить про значну математичну культуру і підготовку дисертанта. Автореферат повністю відповідає змісту дисертації.

Враховуючи все вище сказане, вважаю, що за обсягом проведених наукових досліджень, актуальністю, науковою новизною та значимістю отриманих результатів, а також за кількістю і якістю публікацій, дисертаційна робота Бешлея А.В. «Чисельне розв'язування плоских задач для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом інтегральних рівнянь», задовольняє вимоги, які висуваються до кандидатських дисертацій, та відповідає пп. 9, 11, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника» (постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор – Бешлей Андрій Володимирович заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук,
завідувач лабораторією
Інституту математики НАН України С.Г. Солодкий

Учений секретар
Інституту математики НАН України І.В. Соколенко

«4» грудня 2021 р.