

АНОТАЦІЯ

Бакса В.П. Властивості аналітичних вектор-функцій обмеженого L -індексу в двовимірній кулі. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії зі спеціальності 111 "Математика" галузі знань 11 "Математика та статистика". — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2020.

Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, що охоплюють 8 підрозділів, висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, теоретичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача. Також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У роботі об'єктом дослідження є аналітичні вектор-функції, як в одиничній двохвимірній кулі в \mathbb{C}^2 , так і у всьому просторі \mathbb{C}^n при довільному $n \in \mathbb{N}$, тобто, цілі вектор-функції $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$.

Побудовано основи теорії аналітичних вектор-функцій обмеженого L -індексу за сукупністю змінних в одиничній двохвимірній кулі в \mathbb{C}^2 . Доведено цілий ряд критеріїв обмеженого L -індексу за

сукупністю змінних, що є, зокрема, аналогами відповідних критеріїв Фріке, Хеймана, встановлених цими авторами у випадку цілих функцій обмеженого індексу на комплексній площині.

Перший розділ дисертації містить огляд основних результатів попередників за темою дисертаційного дослідження, а також опис основних результатів даного дисертаційного дослідження.

У другому розділі дисертації містяться 7 підрозділів, перший з яких є цілком допоміжним. У другому підрозділі встановлюються теореми, які містять необхідні і достатні умови обмеженості \mathbf{L} -індексу аналітичних в одиничній двохвимірній кулі в \mathbb{C}^2 вектор-функцій в термінах локально регулярного поведження їхніх часткових похідних (Теореми 2.1, 2.2, 2.5). Ці теореми в сукупності дають аналог одновимірного критерію Фріке обмеженості індексу у цілої функції від однієї комплексної змінної. Інші дві теореми цього підрозділу встановлюють співвідношення між обмеженостями \mathbf{L} -індексу відносно двох різних функцій $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2$ у випадку, якщо одна з них в певному сенсі більша за іншу, а також інваріантність поняття обмеженості \mathbf{L} -індексу у випадку узагальненої еквівалентності цих двох функцій.

У третьому підрозділі встановлені теореми, які містять як достатні умови (теорема 2.6), так і необхідні умови (теорема 2.7) обмеженості \mathbf{L} -індексу аналітичних в одиничній двохвимірній кулі в \mathbb{C}^2

вектор-функцій, в термінах локально регулярного поведження максимуму норми аналітичної вектор-функції на бікругах. Ці теорем, з одного боку, є базовими для наступного підрозділу, а з іншого боку, вони цікаві самі-по-собі, оскільки описують певну властивість вектор-функцій обмеженого \mathbf{L} -індексу, яка вказує на правильність (локальну регулярність) їхнього поведження. У цьому зв'язку виникає таке в даний час відкрите, навіть у випадку функцій від однієї змінної, питання про можливий зв'язок цієї локальної регулярності з певною глобальною регулярністю.

У четвертому підрозділі основним змістом є доведення наступного аналога теореми Хеймана (теорема 2.8), яка дає відносно простий апарат для встановлення обмеженості індексу аналітичних розв'язків диф. рівнянь: *Нехай $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. Аналітична вектор-функція $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ має обмежений \mathbf{L} -індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли знайдуться $p \in \mathbb{Z}_+$, та $c \in \mathbb{R}_+$, такі, що для всіх $(z, \omega) \in \mathbb{B}^2$*

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{\|F^{(i,j)}(z, \omega)\|}{l_1^i(z, \omega)l_2^j(z, \omega)} : i + j = p + 1 \right\} \leq \\ & \leq c \max \left\{ \frac{\|F^{(k,m)}(z, \omega)\|}{l_1^k(z, \omega)l_2^m(z, \omega)} : k + m \leq p \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

З цієї теореми виводиться один критерій, який характеризує обмеженість \mathbf{L} -індекс у термінах сум часткових похідних. Власне (теорема 2.9), аналітична вектор-функція F у \mathbb{B}^2 має обмежений \mathbf{L} -індекс

за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли існують $c \in (0; +\infty)$ та $N \in \mathbb{N}$ такі, що для кожного $(z, \omega) \in \mathbb{B}^2$ правильна нерівність

$$\sum_{k+m=0}^N \frac{\|F^{(k,m)}(z, \omega)\|}{k!m!l_1^k(z, \omega)l_2^m(z, \omega)} \geq c \sum_{k+m=N+1}^{\infty} \frac{\|F^{(k,m)}(z, \omega)\|}{k!m!l_1^k(z, \omega)l_2^m(z, \omega)}.$$

З точки зору можливої застосовності розвинутої у роботі теорії аналітичних вектор-функцій F в одиничній кулі \mathbb{B}^2 обмеженого \mathbf{L} -індексу до аналітичної теорії диференціальних рівнянь, аналог теореми Хеймана може мати ефективні застосування, позаяк її аналоги, встановлені раніше в різних класах аналітичних функцій, мають відомі ефективні застосування.

Хоча теорема 2.9 і має характер критерію, проте в ній “захована” ще тонша властивість ряду, що зображає аналітичну вектор-функцію F в одиничній кулі \mathbb{B}^2 обмеженого \mathbf{L} -індексу. Власне, обмеженість такого індексу виявляється рівносильною до існування так званого гоовного полінома. І доведення цього факту є основним змістом шостого підрозділу.

Сьомий підрозділ присвячений дослідженню можливої швидкості зростання аналітичних вектор-функцій F в одиничній кулі \mathbb{B}^2 обмеженого \mathbf{L} -індексу. Основні результати тут містяться в теоремах 2.16, 2.17, 2.18. Застосування того чи іншого варіанту поняття обмеженості індексу реалізується зазвичай за такою схемою: на основі одного з критеріїв доводиться обмеженість індексу розв’язків диф. рівнянь чи їхніх систем, а потім на основі результатів побудова-

ної теорії обмеженого індексу робиться висновок про властивості всіх розв'язків того чи іншого класу диф.рівнянь. Зокрема дається верхня оцінки швидкості зростання всіх розв'язків. Остання обставина дозволяє з оптимізмом очікувати результативних застосувань проведених у роботі досліджень до аналітичної теорії диф.рівнянь.

Розділ 3 присвячено встановленню аналогу одновимірного критерію Фріке обмеженості індексу цілої функції від однієї змінної в класі цілих вектор-функцій $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$. Варто зазначити, що отримання цього результату в роботі в настільки загальній постановці виявилось у певному сенсі доволі несподіваним, оскільки до цього часу як у випадку цілих вектор-функцій і обмеженого індексу, так і у випадку аналітичних вектор-функцій і обмеженого \mathbf{L} -індексу, як у даній дисертації, всі досягнення були пов'язані з вектор-функціями на \mathbb{C}^2 . Але спроби отримати, наприклад, аналог теореми Хеймана у найзагальнішому випадку, наштовхуються в даний час на технічні труднощі, які можливо є і принциповими.

Ключові слова: аналітична вектор-функція, обмежений індекс, головний поліном, комплексний векторний простір.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Baksa V.P. *Analytic vector-functions in the unit ball having bounded L -index in joint variables* // Carpathian Math. Publ. –

2019. – V.11, №2. – P.213–227. ([Scopus](#), [WoS](#))
doi:10.15330/cmp.11.2.213-227
2. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Growth estimates for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L -index in joint variables* // Constructive Mathematical Analysis. – 2020. V.3, №1. – P.9–19. doi: 10.33205/cma.650977 ([журнал в Туреччині - країна входить до Організації економічного співробітництва та розвитку, тому публікація фахова](#))
 3. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Hayman's Theorem and of logarithmic criterion for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L -index in joint variables* // Math. Slovaca. – 2020. V.70, №5. – P.1141–1152. ([Scopus](#), [WoS](#))
 4. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded L -index in the unit ball* // Bukovinian Math. Journal.– 2019. V.7, №2. – P.6–13. ([входить в категорію Б укр. фахових видань](#))
 5. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Fricke's theorems for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L -index in joint variables*// Proceedings of IAMM of NAS of Ukraine.– 2019. V.33, – P.16–26. doi: 10.37069/1683-4720-2019-33-1 ([входить в категорію Б укр. фахових видань](#))

6. Baksa V.P, Bandura A.I., *Entire multivariate vector-valued functions of bounded L-index: analog of Fricke's theorem*// Mat. Stud. – 2020 V.54, №1. – P.56–63. ([Scopus](#))

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Baksa V.P., Skaskiv O.B., Bandura A.I. Local behavior of analytic vector-valued functions of bounded L-index in joint variables //Int. conf. “Infinite dimensional analysis and topology” (Ivano-Frankivsk, October 16-20, 2019): Book of Abstracts. –Ivano-Frankivsk, 2019. – P.1—2.
2. Baksa V., Bandura A., Skaskiv O. Analytic in the unit ball vector-functions having bounded L-index in joint variables // Int. conference "On the trail of women in mathematics - in honor of Sofia Kowalewska" (Krakow, Poland, August 31 - September 2 2019): Book of abstracts. – Krakow, Poland, AGH University of Science and Technology, 2019. – P.16—17.
3. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. Estimate of maximum modulus on the skeleton of analytic vector-function in ball // Всеукр. наук. конф.“Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 26 лютого - 1 березня, 2020 р.): Тези доповідей.—Івано-Франківськ, 2020. — С.32–33.

4. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded l -index in the unit ball* // Abstracts of XI Inter. Skorobatkano math. conf. - Lviv, October 26-30, 2020. – P.11.

ABSTRACT

Baksa V.P. *Properties of analytical vector-functions of bounded L -index in a two-dimensional ball.* — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Philosophy, speciality 111 "Mathematics" field of studies 11 "Mathematics and statistics". Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2020.

The thesis consists of an introduction, 3 sections, conclusions, references. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

In the thesis, the object of investigation is the analytical vector-functions, both in a single two-dimensional ball in \mathbb{C}^2 ball, and in the whole space \mathbb{C}^n for arbitrary $n \in \mathbb{N}$, that is, integer vector functions $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$.

The basics of the theory of analytical vector-functions of bounded L -index in joint variables in a unit two-dimensional ball in \mathbb{C}^2 are constructed. A number of criteria of the bounded L -index in joint variables are proved, which are, in particular, analogs of the corresponding crite-

ria of Fricke, Hayman, established by these authors in the case of entire functions of the bounded index on the complex plane.

The first section of the dissertation contains an overview of the main results of the predecessors on the topic of the dissertation research, as well as a description of the main results of this dissertation research.

The second section of the dissertation contains 7 sections, the first of which is completely auxiliary. The second section establishes theorems that contain the necessary and sufficient conditions for the boundedness of the \mathbf{L} -index of analytics in a unit two-dimensional ball in \mathbb{C}^2 vector-functions in terms of locally regular behavior of their partial derivatives (Theorems 2.1, 2.2, 2.5). Together, these theorems give an analogue of the one-dimensional Fricke criterion of boundedness of an index of entire functions of complex variable. The other two theorems in this section establish the relationship between the constraints of the \mathbf{L} index on two different functions $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2$ if one of them is in a sense greater than the other, as well as the invariance of the notion of boundedness of the \mathbf{L} -index in the case of generalized equivalence of these two functions.

The third section establishes theorems that contain both sufficient conditions (Theorem 2.6) and necessary conditions (Theorem 2.7) for the boundedness of the \mathbf{L} -index of analytic in a unit two-dimensional ball in \mathbb{C}^2 vector-functions, in terms of locally regular behavior of the maximum norm of the analytical vector-function on the be-disks. These

theorems, on the one hand, are basic for the next section, and on the other hand, they are interesting in themselves because they describe a certain property of vector-functions of bounded \mathbf{L} -index, which indicates the correctness (local regularity) of their behavior. In this regard, there is a currently open, even in the case of functions from a one variable, the question of the possible relationship of this local regularity with a certain global regularity.

In the fourth subsection, the main content is to prove the following analogue of Hayman's theorem (Theorem 2.8), which gives a relatively simple apparatus for establishing the boundedness of the index of analytical solutions of diff. equations: Let $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. The analytical vector-function $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ has a bounded \mathbf{L} -index in joint variables if and only if there are $p \in \mathbb{Z}_+$, and $c \in \mathbb{R}_+$, such that for all $(z, \omega) \in \mathbb{B}^2$

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{\|F^{(i,j)}(z, \omega)\|}{l_1^i(z, \omega)l_2^j(z, \omega)} : i+j=p+1 \right\} \leq \\ & \leq c \max \left\{ \frac{\|F^{(k,m)}(z, \omega)\|}{l_1^k(z, \omega)l_2^m(z, \omega)} : k+m \leq p \right\}. \end{aligned}$$

One criterion is derived from this theorem, which characterizes the boundedness of the \mathbf{L} -index in terms of the sums of partial derivatives. Actually (Theorem 2.18), the analytical vector-function F in \mathbb{B}^2 has a bounded \mathbf{L} -index in joint variables if and only if there exist $c \in (0; +\infty)$

and $N \in \mathbb{N}$ are such that for each $(z, \omega) \in \mathbb{B}^2$ the inequality

$$\sum_{k+m=0}^N \frac{\|F^{(k,m)}(z, \omega)\|}{k!m!l_1^k(z, \omega)l_2^m(z, \omega)} \geq c \sum_{k+m=N+1}^{\infty} \frac{\|F^{(k,m)}(z, \omega)\|}{k!m!l_1^k(z, \omega)l_2^m(z, \omega)}$$

holds. From the point of view of possible applicability of the theory of analytical vector-functions F in the unit ball \mathbb{B}^2 of the bounded \mathbf{L} -index developed in the work to the analytical theory of differential equations, an analogue of Hayman's theorem can have effective applications, since its analogues, previously established in different classes of analytical functions, have known effective applications.

Although the theorem 2.9 has the character of a criterion, it "hides" an even thinner property of the power series of the analytic vector-function F in the unit ball \mathbb{B}^2 of bounded \mathbf{L} -index. In fact, the boundedness of such an index is equivalent to existence, the so-called main polynomial. And proving this fact is the main content of the sixth section.

The seventh section is devoted to the study of the possible growth rate of analytical vector functions F in the unit ball \mathbb{B}^2 of the bounded \mathbf{L} -index. The main results here are contained in the theorems 2.16, 2.17, 2.18. The application of one or another variant of the concept of index limitations is usually realized according to the following scheme: on the basis of one of the criteria the boundedness of the index of solutions of differential equations their systems is proved. And then on the basis of the results of the constructed theory of the limited index the conclusion on properties of all solutions of this or that class of differential equations

is made. In particular, the upper estimate of the growth rate of all solutions is given. The latter circumstance allows us to optimistically expect effective applications of the research conducted in the work to the analytical theory of differential equations.

Section 3 is devoted to the establishment of an analogue of the one-dimensional Fricke criterion of the boundedness of the index of an integer function from one variable in the class of integers vector of functions $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$. It should be noted that obtaining this result in the work in such a general formulation was in a sense quite unexpected, because so far both in the case of integer vector functions and a limited index, and in the case of analytical vector functions and a limited \mathbf{L} -index, as in this dissertation, all achievements were associated with vector functions on \mathbb{C}^2 . But attempts to obtain, for example, an analogue of Hayman's theorem in the most general case, currently encounter technical difficulties, which may be fundamental.

Keywords: analytic function, several complex variables, vector-valued function, main polynomial, bounded index.

LIST OF PUBLICATIONS:

1. Baksa V.P. *Analytic vector-functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Carpathian Math. Publ. – 2019. – V.11, no.2. – P.213–227. ([Scopus](#), [WoS](#))
doi:10.15330/cmp.11.2.213-227

2. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Growth estimates for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L -index in joint variables* // Constructive Mathematical Analysis. – 2020. V.3, no.1. – P.9–19. doi: 10.33205/cma.650977
(журнал в Туреччині – країна входить до Організації економічного співробітництва та розвитку, тому публікація фахова)
3. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Hayman's Theorem and of logarithmic criterion for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L -index in joint variables* // Math. Slovaca. – 2020. V.70, no.5. – P.1141–1152.
(Scopus, WoS)
4. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded L -index in the unit ball* // Bukovinian Math. Journal.– 2019. V.7, no.2. – P.6–13.
(входить в категорію Б укр. фахових видань)
5. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Fricke's theorems for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L -index in joint variables*// Proceedings of IAMM of NAS of Ukraine.– 2019. V.33, – P.16–26. doi: 10.37069/1683-4720-2019-33-1
(входить в категорію Б укр. фахових видань)
6. Baksa V.P, Bandura A.I., *Entire multivariate vector-valued functi-*

ons of bounded L-index: analog of Fricke's theorem// Mat. Stud.
– 2020 V.54, no.1. – P.56–63. ([Scopus](#))

LIST OF CONFERENCE ABSTRACTS:

1. Baksa V.P., Skaskiv O.B., Bandura A.I. *Local behavior of analytic vector-valued functions of bounded L-index in joint variables* // Int. conf. “Infinite dimensional analysis and topology” (Ivano- Frankivsk, October 16–20, 2019): Book of Abstracts. – Ivano-Frankivsk, 2019. – P.1–2.
2. Baksa V., Bandura A., Skaskiv O. *Analytic in the unit ball vector-functions having bounded L-index in joint variables* // Int. conference “On the trail of women in mathematics - in honor of Sofia Kowalewska” (Krakow, Poland, 31.08–2.09. 2019): Book of abstracts. – Krakow, Poland, AGH University of Science and Technology, 2019. – P.16–17.
3. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Estimate of maximum modulus on the skeleton of analytic vector-function in ball* // Vseukr. nauk. conf. “Contemporary problems of probability theory and mathematical analysis” (Vorokhta, 26.02–1.03. 2020): Book of Abstacts. – Ivano-Frankivsk, 2020. – P.32–33.
4. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded l-index in the unit ball* // Abstracts of XI Inter. Skorobatkan math.

conf. - Lviv, October 26-30, 2020. – P.11.