

АНОТАЦІЯ

Войтович Х. О. Апроксимаційні та асимптотичні властивості функцій з просторів Гарді в деяких областях. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — "Математика" (Галузь знань 11 - "Математика та статистика"). — Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Львівський національний університет імені Івана Франка, Дрогобич, 2020.

Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, висновків до кожного з розділів і загальних висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження. Також, обґрунтовано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами кафедри та особистий внесок автора дисертації. Наведено список конференцій і наукових семінарів, на яких апробовано результати дисертаційного дослідження та список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації.

Дисертаційне дослідження присвячене питанням асимптотичних та апроксимаційних наближень у просторах аналітичних функцій та їх застосуванням в теорії інформації.

У дисертаційній роботі основним об'єктом дослідження є класичні простори Гарді, вагові простори Гарді та простори Пелі - Вінера.

У першому розділі дисертації міститься огляд літератури за темою дисертації і описані важливі відомості з історії розвитку досліджень класичних просторів Гарді, вагових просторів Гарді, просторів Пелі - Вінера, теорії сигнальних процесів, теорії фільтрів Вінера та перетворення Гільберта. Також, описані основні результати дисертації.

У другому розділі розглядаються проблеми розщеплення функцій у просторі Пелі - Вінера W_σ^1 на суму двох функцій, модуль яких є "великим" у верхній та нижній півплощині відповідно. Простір W_σ^p , $\sigma > 0$, є простором Пелі - Вінера, тобто простором цілих функцій f експоненційного типу $\leq \sigma$, які належать $L^p(\mathbb{R})$.

Функцію f , що належить простору Пелі - Вінера W_σ^1 розглядаємо у вигляді

$$f(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \quad (c_k) \in l^1.$$

Ми розглядаємо наступну проблему.

Проблема А. Чи для кожної функції $f \in W_\sigma^1$ можливе розщеплення $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$, а також $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?

Зауважимо, що якщо розв'язок Проблеми А існує, то він не є єдиним. Один із розв'язків досліджувала Т. І. Гіщак. Функція за-

пропонована Гіщак Т. І. є цілою функцією експоненційного типу σ в півплощині \mathbb{C}_+ .

Основні результати підрозділу 2.1 представлені в Теоремі 2.1 та Наслідку 2.1. Показано, що розв'язок Проблеми А існує при умові, що всі коефіцієнти Фур'є c_k , $k > 0$, дорівнюють нулю.

В підрозділі 2.2 містяться результати щодо проблеми розщеплення функцій у верхній та нижній півплощині. Центральне місце у підрозділі 2.2 займає наступна проблема.

Проблема В. *Чи можливе розщеплення кожної функції $f \in W_\sigma^1$ у вигляді $f = \chi + \mu$, де χ і μ є цілими функціями і $\chi \in E^p[\mathbb{C}(0; \pi)]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\pi; 0)]$?*

В Теоремі 2.4 стверджується, що для функції з простору Пелі - Вінера W_σ^1 , існує розв'язок проблеми розщеплення, якщо для коефіцієнтів з послідовності $(c_k) \in l^1$ виконується рівність $c_{2k} = -c_{2k+1}$. Проблема В є аналогом задачі розщеплення функцій, яку розглядав В. М. Дільний, для випадку $p = 1$.

У підрозділі 2.3 отримані умови існування розв'язку проблеми розщеплення для цілої функції як завгодно малого експоненційного типу $\alpha > 0$ в комплексній півплощині.

Цілою функцією експоненційного типу $\alpha > 0$ в півплощині $\mathbb{C}_- = \{z : \Re z < 0\}$ називатимемо цілу функцію для якої виконує-

ться умова

$$(\forall \delta > 0)(\exists A > 0)(\forall z \in \mathbb{C}_-) : |f(z)| \leq Ae^{(\alpha+\delta)|z|}$$

і дана умова не виконується якщо замінити число α на менше.

Проблема С. Чи для кожної функції $f \in W_\sigma^1$, можливе розщеплення $f = \hat{\chi} + \hat{\mu}$, де функції $\hat{\chi}$ і $\hat{\mu}$ є цілими функціями як заведено малого, наперед заданого експоненційного типу $\alpha > 0$ в \mathbb{C}_- ?

Основні результати підрозділу 2.3 сформульовані в Теоремі 2.5 та Теоремі 2.6. У кожному з підрозділів наведені приклади цілих функцій, які визначають розв'язок згаданих вище проблем.

В розділі 3 досліджується теорія фільтрів Вінера, зокрема, розглядається аналог класичної теорії фільтрів Вінера для випадку півсмуги в комплексній області. У підрозділі 3.1 розглядається постановка однієї з важливих проблем обробки сигналів, а саме: визначити невідомий фільтр ("чорну скриньку"), який трансформує вхідний сигнал в певний вихідний сигнал. Ми розглядаємо дану проблему для випадку невідомого фільтру f в півсмузі

$D_\sigma = \{z : |\Im z| < \sigma, \Re z < 0\}$, $\sigma > 0$ і основною метою є побудувати всі можливі сигнали, які анулюють фільтри при деяких природних умовах. У Теоремі 3.2 показано, що розв'язок проблеми ідентифікації нетривіальності фільтру можливий при умовах, що існує сигнал, який не допускає голоморфне продовження до цілої функції або допускає, але воно є екстремально великим. У підрозді-

лі 3.2 наведені деякі допоміжні леми типу Фрагмена - Ліндельофа і викладено доведення Теорема 3.2.

Останній, четвертий розділ, присвячений дослідженням перетворення Гільберта в просторі Пелі - Вінера.

У підрозділі 4.1 отримано критерій обмеженості перетворення Гільберта. Встановлено умови за яких перетворення Гільберта функції з простору Пелі - Вінера W_{σ}^1 належить простору $L^1(\mathbb{R})$. Результат отримано в термінах розщеплення функції на суму двох функцій, кожна з яких належить простору H^1 у верхній та нижній комплексній півплощині відповідно. У підрозділі 4.2, на основі отриманих результатів (Теорема 4.1), наведено два прості способи обчислення перетворення Гільберта.

Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими, вони мають теоретичний характер та можуть бути використані у функціональному та комплексному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей. Отримані результати становлять певний інтерес і для досліджень в теорії інформації.

Ключові слова: ціла функція, аналітична функція, простори Гарді, простори Пелі - Вінера, розщеплення функції, вагові простори Гарді, перетворення Гільберта, сигнальні процеси, амплітудний спектр, перетворення Фур'є, фільтр, згортка.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

1. Дільний, В. М., Гук¹, Х. О.: Критерій розщеплення в просторі Пелі - Вінера. Буковинський математичний журнал. **5** (1-2), 87-91 (2017).
2. Dilnyi, V., Huk, Kh.: On decomposition problem in weighted Hardy space. Banach Center Publications. **119**, 151-155 (2019).
3. Dilnyi, V., Voitovych, Kh.: Hilbert transform on W_{σ}^p . Matematychni Studii. **52** (1), 32-37 (2019).
4. Dilnyi, V., Huk, K.: Identificaton of unknown filter in a half-strip. Acta Applicandae Mathematicae. **165**, 199-205 (2020).

Список праць здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Дільний В., Гук Х.: Критерій розщеплення в просторі Пелі - Вінера. Збірник тез доповідей міжнародної наукової конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу", Одеса, Україна, 31 травня - 5 червня 2017.
2. Huk, Kh.: On decomposition in the Paley - Wiener space. In: Book of Abstracts of International conference in functional analysis dedi-

¹дівоче прізвище.

- cated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017.
3. Dilnyi, V., Huk Kh.: Detecting of signals in half-strips. In: Book of Abstracts of International scientific and methodical conference "Modern scientific and methodical issues of mathematics in higher school", Kyiv, Ukraine, 21 -22 June 2018.
 4. Huk, Kh.: Hilbert transform on W_σ^p . In: Book of Abstracts of International conference dedicated to the 70th anniversary of Anatolij Plichko "Banach spaces and their applications", Lviv, Ukraine, 26-29 June 2019.
 5. Voitovych, Kh.: On problem of decomposition by functions of small exponential type. In: Book of Abstracts of International conference dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky "Infinite dimensional analysis and topology", Ivano-Frankivsk, Ukraine, 16-20 October 2019.
 6. Жук, О., Войтович, Х., Галь, Ю.: Про розщеплення парних функцій. Збірник тез доповідей міжнародної наукової конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу", Одеса, Україна, 26-30 травня, 2020.

ABSTRACT

Voitovych Kh. O. Approximate and asymptotic properties of functions in Hardy spaces on some domains. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis consists of an introduction, 4 sections, conclusions to each section and the general conclusions and the list of used references. The introduction substantiates the relevance of the research topic, highlights the purpose, task, subject, object and methods of the research. It also substantiates the scientific novelty, the practical significance of the obtained results, the relationship of manuscript with scientific topics and plans and the personal contributions of the author of the thesis. The introduction lists the conferences and scientific seminars where the results of the thesis were reported; it lists the publications in which the main results of the thesis were published.

The thesis is devoted to questions of approximation and asymptotic in spaces of analytical functions and their applications in information theory.

The main objects of investigation are the classic Hardy spaces, weighted Hardy spaces and Paley - Wiener spaces.

The first section of the thesis is introductory and contains a review of the literature and describes the important facts from classic Hardy spaces, weighted Hardy spaces, Paley - Wiener spaces, signal processi-

ng, Wiener filtering theory and Hilbert transform. Also described the main results of the thesis.

In second section we considered the problems of decomposition of functions in the Paley - Wiener space W_σ^1 into the sum of two functions, each of them being "large" only in upper and lower half-planes. The Paley - Wiener space W_σ^p , $\sigma > 0$, is the space of entire functions f of exponential type $\leq \sigma$ belonging to $L^p(\mathbb{R})$.

Function $f \in W_\sigma^1$ is considered as

$$f(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \quad (c_k) \in l^1.$$

We researched the following problem.

Problem A. *Do functions $f \in W_\sigma^1$, $1 \leq p \leq 2$, admit the decomposition $f = \chi + \mu$, with entire functions in $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$, where $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?*

One of the solution of the Problem A was researched by T. I. Hischak. One of the solutions was investigated by T. I. Hischak. The function proposed by T. I. Hischak is an entire function of exponential type σ in half-plane \mathbb{C}_+ .

The main results of subsection 2.1 where provided in Theorem 2.1 and Corollary 2.1. We found that there exists the solutions of the Problem A if all Fourier coefficients c_k , $k > 0$, are equal to zero.

In subsection 2.2 the results concerning the problem of decompositi-

on of functions in upper and lower half-planes for the case are contained. The key element in subsection 2.2 is the following problem.

Problem B. *Is it possible to decompose each $f \in W_\sigma^1$, $1 \leq p \leq 2$, as $f = \chi + \mu$ where χ, μ are entire functions and $\chi \in E^p[\mathbb{C}(0; \pi)]$, $\mu \in E^p[\mathbb{C}(-\pi; 0)]$?*

In theorem 2.4 we proved that for the function f there exists a solution of the Problem B if $(c_k) \in l^1$ and $c_{2k} = -c_{2k+1}$. This problem is an analogue of the decomposition problem which was investigated by V. M. Dilnyi for the case $p = 1$. Furthermore, in subsection 2.3 were obtained the solution of the decomposition problem for functions with small exponential type $\alpha > 0$ in half - plane. We say that an entire function f is an entire function of exponential type α in half-plane $C_- = \{z : \Re z < 0\}$ if

$$(\forall \delta > 0)(\exists A > 0)(\forall z \in \mathbb{C}_-) : |f(z)| \leq Ae^{(\alpha+\delta)|z|}$$

and the above inequality is false if replace the number α by a smaller one.

Problem C. *Do functions $f \in W_\sigma^1$, admit decomposition $f = \hat{\chi} + \hat{\mu}$, where $\hat{\chi}$ and $\hat{\mu}$ are entire functions with any small exponential type $\alpha > 0$ in \mathbb{C}_- ?*

The main results of subsection 2.3 where provided in Theorem 2.5 and Theorem 2.6. Every subsection provides examples of entire functions for which there exists the solutions of the above problems.

The third section deals with Wiener filtering theory. We consider the analogue of the classic Wiener filtering theory to a half-strip of complex domain. In subsection 3.1 we analyzed the major problem of signal processing: to determine an unknown filter ("black box"); in particular, to reconstruct, if possible, a filter knowing the energy densities of an input-output pair. We consider the above problem for the case of an unknown filter f on the half-strip $D_\sigma = \{z : |\Im z| < \sigma, \Re z < 0\}$, $\sigma > 0$. The main task of this section is to construct all detecting signals under some natural conditions. In Theorem 3.2 we proved that if signal does not admit a holomorphic continuation as an entire function or it admit a holomorphic continuation, but this continuation is extremely large, then there exists the solution of the filtering identification problem. In subsection 3.2 some auxiliary lemmas of Phragmen - Lindelof type were demonstrated and Theorem 3.2 was proved.

The last fourth section is devoted to the investigations of the Hilbert transform on the Paley - Wiener space. In subsection 4.1 is obtained a boundedness criterion for the Hilbert transform on the Paley - Wiener space. The results was found in terms of decomposition functions into the sum of two functions each of them belonging to the Hardy space H^1 in upper and lower half-plane respectively. Two simple methods of evaluation of the Hilbert transform were shown in the research basing on the reserved result.

The results of the dissertation are new and have theoretical meaning. They can be used in complex and functional analysis, differential equation, probability theory. They are of some interest for information theory as well.

Keywords: entire function, analytic function, Hardy space, Paley - Wiener space, decomposition, weighted Hardy space, signal processing, convolution, Fourier transform, amplitude spectrum, filter.

List of publications:

1. Dilnyi, V. M., Huk, Kh. O.: The criterion of decomposition problem in the Paley - Wiener space. Bukovinian Mathematical Journal. **5** (1-2), 87-91 (2017).
2. Dilnyi, V., Huk, Kh.: On decomposition problem in weighted Hardy space. Banach Center Publications. **119**, 151-155 (2019).
3. Dilnyi, V., Voitovych, Kh.: Hilbert transform on W_{σ}^p . Matematychni Studii. **52** (1), 32-37 (2019).
4. Dilnyi, V., Huk, K.: Identificaton of unknown filter in a half-strip. Acta Applicandae Mathematicae. **165**, 199-205 (2020).

List of conference abstracts:

1. Dilnyi, V., Huk, Kh.: The criterion of solution of decomposition problem in the Paley - Wiener space. In: Book of Abstracts

- of International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", Odessa, Ukraine, 31 May - 5 June 2017.
2. Huk, Kh.: On decomposition in the Paley - Wiener space. International conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach: Abstracts.- Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017.
 3. Dilnyi, V., Huk, Kh.: Detecting of signals in half-strips. International scientific and methodical conference : Modern scientific and methodical issues of mathematics in higher school: Abstracts.- Kyiv, Ukraine, 21 -22 June 2018.
 4. Huk, Kh.: Hilbert transform on W_{σ}^p . International conference "Banach spaces and their applications" dedicated to the 70th anniversary of Anatolij Plichko: Abstracts.- Lviv, Ukraine, 26-29 June 2019.
 5. Voitovych, Kh.: On problem of decomposition by functions of small exponential type. International conference "Infinite dimensional analysis and topology" dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky: Abstracts.- Ivano-Frankivsk, Ukraine, 16-20 October 2019.
 6. Zhuk, O., Voitovych, Kh., Gal, Yu.: On decomposition of even function. In: Book of Abstracts of International scientific

conference "Algebraic and geometric methods of analysis", Odessa, Ukraine, 26-30 May 2020.