Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Бакса Віта Петрівна

517.55

ДИСЕРТАЦІЯ

ВЛАСТИВОСТІ АНАЛІТИЧНИХ ВЕКТОР-ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ В ДВОВИМІРНІЙ КУЛІ

Спеціальність — 111 "Математика"
Галузь знань — 11 "Математика та статистика"

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії з математики

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _______ В.П. Бакса

Науковий керівник:
Скасків Олег Богданович
доктор фізико-математичних
наук, професор

Львів – 2020

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ

Бакса В.П. Властивості аналітичних вектор-функцій обмеженого L-індексу в двовимірній кулі. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії зі спеціальності 111 "Математика"галузі знань 11 "Математика та статистика". — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2020.

Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, що охоплюють 8 підрозділів, висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, теоретичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача. Також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У роботі об'єктом дослідження є аналітичні вектор-функції, як в одиничній двохвимірній кулі в $\mathbb{C}^2$ кулі, так і у всьому просторі $\mathbb{C}^n$ при довільному $n \in \mathbb{N}$, тобто, цілі вектор-функції $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

Побудовано основи теорії аналітичних вектор-функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних в одиничній двохвимірній кулі в $\mathbb{C}^2$. Доведено цілий ряд критеріїв обмеженого L-індексу за сукупністю змінних, що є, зокрема, аналогами відповідних критеріїв Фріке, Хеймана, встановлених цими авторами у випадку цілих функцій обмеженого індексу на комплексній площині.

Перший розділ дисертації містить огляд основних результатів попередників за темою дисертаційного дослідження, а також опис основних результатів даного дисертаційного дослідження.

У другому розділі дисертації містяться 7 підрозділів, перший

з яких є цілком допоміжним. У другому підрозділі встановлюються теореми, які містять необхідні і достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу аналітичних в одиничній двохвимірній кулі в $\mathbb{C}^2$ вектор-функцій в термінах локально регулярного поводження їхніх часткових похідних (Теореми 2.1, 2.2, 2.5). Ці теореми в сукупності дають аналог одновимірного критерію Фріке обмеженості індексу у цілої функції від однієї комплексної змінної. Інші дві теореми цього підрозділу встановлюють співвідношення між обмеженостями $\mathbf{L}$-індексу відносно двох різних функцій $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2$ у випадку, якщо одна з них в певному сенсі більша за іншу, а також інваріантність поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу у випадку узагальненої еквівалентності цих двох функцій.

У третьому підрозділі встановлені теореми, які містять як достатні умови (теорема 2.6), так і необхідні умови (теорема 2.7) обмеженості $\mathbf{L}$-індексу аналітичних в одиничній двохвимірній кулі в $\mathbb{C}^2$ вектор-функцій, в термінах локально регулярного поводження максимума норми аналітичної вектор-функції на бікругах. Ці теорем, з одного боку, є базовими для наступного підрозділу, а з іншого боку, вони цікаві самі-по-собі, оскільки описують певну властивість вектор-функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу, яка вказує на правильність (локальну регулярність) їхнього поводження . У цьому зв'язку виникає таке в даний час відкрите, навіть у випадку функцій від однієї змінної, питання про можливий зв'язок цієї локальної регулярності з певною глобальною регулярністю.

У четвертому підрозділі основним змістом є доведення наступного аналога теореми Хеймана (теорема 2.8), яка дає відносно простий апарат для встановлення обмеженості індексу аналітичних розв'язків диф. рівнянь: *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *Аналітична вектор-функція* $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *має обмежений* $\mathbf{L}$-*індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли знайдуться* $p \in \mathbb{Z}_+$, *та* $c \in \mathbb{R}_+$, *такі, що* *для всіх* $(z, \omega) \in \mathbb{B}^2$

$$\max\left\{\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{l_1^i(z,\omega)l_2^j(z,\omega)} : i+j=p+1\right\} \le$$
$$\le c\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k+m \le p\right\}. \qquad (1)$$

З цієї теореми виводиться один критерій, який характеризує обмеженість $\mathbf{L}$-індекс у термінах сум часткових похідних. Власне (теорема 2.9), аналітична вектор-функція F у $\mathbb{B}^2$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли існують $c \in (0; +\infty)$ та $N \in \mathbb{N}$ такі, що для кожного $(z, \omega) \in \mathbb{B}^2$ правильна нерівність

$$\sum_{k+m=0}^{N} \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} \ge c\sum_{k+m=N+1}^{\infty} \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}.$$

З точки зору можливої застосовності розвинутої у роботі теорії аналітичних вектор-функцій F в одиничній кулі $\mathbb{B}^2$ обмеженого $\mathbf{L}$-індексу до аналітичної теорії диференційних рівнянь, аналог теореми Хеймана може мати ефективні застосування, позаяк її аналоги, встановлені раніше в різних класах аналітичних функцій, мають відомі ефективні застосування.

Хоча теорема 2.9 і має характер критерію, проте в ній “захована” ще тонша властивість ряду, що зображає аналітичну вектор-функцію F в одиничній кулі $\mathbb{B}^2$ обмеженого $\mathbf{L}$-індексу. Власне, обмеженість такого індексу виявляється рівносильною до існування. так званого головного полінома. І доведення цього факту є основним змістом шостого підрозділу.

Сьомий підрозділ присвячений дослідженню можливої швидкості зростання аналітичних вектор-функцій F в одиничній кулі $\mathbb{B}^2$ обмеженого $\mathbf{L}$-індексу. Основні результати тут містяться в теоремах 2.16, 2.17, 2.18. Застосування того чи іншого варіанту поняття обмеженості індексу реалізується зазвичай за такою схемою: на основі одного з критеріїв доводиться обмеженість індексу розв'язків диф. рівнянь чи їхніх систем, а потім на основі результатів побудованої теорії обмеженого індексу робиться висновок про властивості всіх розв'язків того чи іншого класу диф.рівнянь. Зокрема дається верхня оцінки швидкості зростання всіх розв'язків. Остання обставина дозволяє з оптимізмом очікувати результативних застосувань проведених у роботі досліджень до аналітичної теорії диф.рівнянь.

Розділ 3 присвячено встановленню аналогу одновимірного критерію Фріке обмеженості індексу цілої функції від однієї змінної в класі цілих вектор-функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$. Варто зазначити, що отримання цього результату в роботі в настільки загальній постановці виявилося у певному сенсі доволі несподіваним, оскільки до цього часу як у випадку цілих вектор-функцій і обмеженого індексу, так і у випадку аналітичних вектор-функцій і обмеженого **L**-індексу, як у даній дисертації, всі досягнення були пов'язані з вектор-функціями на $\mathbb{C}^2$. Але спроби отримати, наприклад, аналог теореми Хеймана у найзагальнішому випадку, наштовхуються в даний час на технічні труднощі, які можливо є і принциповими.

Ключові слова: аналітична вектор-функція, обмежений індекс, головний поліном, комплексний векторний простір.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Baksa V.P. *Analytic vector-functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Carpathian Math. Publ. – 2019. – V.11, №2. – P.213–227. (Scopus, WoS) doi:10.15330/cmp.11.2.213-227
2. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Growth estimates for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Constructive Mathematical Analysis.

– 2020. V.3, №1. – P.9–19. doi: 10.33205/cma.650977 (журнал в Туреччині - країна входить до Організації економічного співробітництва та розвитку, тому публікація фахова)

3. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Hayman's Theorem and of logarithmic criterion for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Math. Slovaca. – 2020. V.70, №5. – P.1141–1152. (Scopus, WoS)
4. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded L-index in the unit ball* // Bukovinian Math. Journal.– 2019. V.7, №2. – P.6–13. (входить в категорію Б укр. фахових видань)
5. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Fricke's theorems for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables*// Proceedings of IAMM of NAS of Ukraine.– 2019. V.33, – P.16–26. doi: 10.37069/1683-4720-2019-33-1 (входить в категорію Б укр. фахових видань)
6. Baksa V.P, Bandura A.I., *Entire multivariate vector-valued functions of bounded L-index: analog of Fricke's theorem*// Mat. Stud. – 2020 V.54, №1. – P.56–63. (Scopus)

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Baksa V.P., Skaskiv O.B., Bandura A.I. Local behavior of analytic vector-valued functions of bounded L-index in joint variables //Int. conf. "Infinite dimensional analysis and topology" (Ivano-Frankivsk, October 16-20, 2019): Book of Abstracts. –Ivano-Frankivsk, 2019. – P.1—2.
2. Baksa V., Bandura A., Skaskiv O. Analytic in the unit ball vector-functions having bounded L-index in joint variables // Int.

conference "On the trail of women in mathematics - in honor of Sofia Kowalewska" (Krakow, Poland, August 31 - September 2 2019): Book of abstracts. – Krakow, Poland, AGH University of Science and Technology, 2019. – P.16—17.

3. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. Estimate of maximum modulus on the skeleton of analytic vector-function in ball // Всеукр. наук. конф.“Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 26 лютого - 1 березня, 2020 р.): Тези доповідей.—Івано-Франківськ, 2020. — С.32–33.
4. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded l-index in the unit ball* // Abstracts of XI Inter. Skorobatko math. conf. - Lviv, October 26-30, 2020. – P.11.

ABSTRACT

Baksa V.P. *Properties of analytical vector-functions of bounded L-index in a two-dimensional ball.* — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Philosophy, speciality 111 "Mathematics" field of studies 11 "Mathematics and statistics". Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2020.

The thesis consists of an introduction, 3 sections, conclusions, references. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

In the thesis, the object of investigation is the analytical vector-functions, both in a single two-dimensional ball in $\mathbb{C}^2$ ball, and in the whole space $\mathbb{C}^n$ for arbitrary $n \in \mathbb{N}$, that is, integer vector functions $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

The basics of the theory of analytical vector-functions of bounded L-index in joint variables in a unit two-dimensional ball in $\mathbb{C}^2$ are constructed. A number of criteria of the bounded L-index in joint variables are proved, which are, in particular, analogs of the corresponding criteria of Fricke, Hayman, established by these authors in the case of entire functions of the bounded index on the complex plane.

The first section of the dissertation contains an overview of the main results of the predecessors on the topic of the dissertation research, as well as a description of the main results of this dissertation research.

The second section of the dissertation contains 7 sections, the first of which is completely auxiliary. The second section establishes theorems

that contain the necessary and sufficient conditions for the boundedness of the **L**-index of analytics in a unit two-dimensional ball in $\mathbb{C}^2$ vector-functions in terms of locally regular behavior of their partial derivatives (Theorems 2.1, 2.2, 2.5). Together, these theorems give an analogue of the one-dimensional Fricke criterion of boundedness of an index of entire functions of complex variable. The other two theorems in this section establish the relationship between the constraints of the **L** index on two different functions $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2$ if one of them is in a sense greater than the other, as well as the invariance of the notion of boundedness of the **L**-index in the case of generalized equivalence of these two functions.

The third section establishes theorems that contain both sufficient conditions (Theorem 2.6) and necessary conditions (Theorem 2.7) for the boundedness of the **L**-index of analytic in a unit two-dimensional ball in $\mathbb{C}^2$ vector-functions, in terms of locally regular behavior of the maximum norm of the analytical vector-function on the be-disks. These theorems, on the one hand, are basic for the next section, and on the other hand, they are interesting in themselves because they describe a certain property of vector-functions of bounded **L**-index, which indicates the correctness (local regularity) of their behavior. In this regard, there is a currently open, even in the case of functions from a one variable, the question of the possible relationship of this local regularity with a certain global regularity.

In the fourth subsection, the main content is to prove the following analogue of Hayman's theorem (Theorem 2.8), which gives a relatively simple apparatus for establishing the boundedness of the index of analytical solutions of diff. equations: sl Let $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. The analytical vector-function $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ has a bonded **L**-index in joint variables if and only if there are $p \in \mathbb{Z}_+$, and $c \in \mathbb{R}_+$, such that for all $(z, \omega) \in \mathbb{B}^2$

$$\max\left\{ \frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{l_1^i(z,\omega) l_2^j(z,\omega)} : i+j=p+1 \right\} \le$$

$$\leq c\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\leq p\right\}.$$

One criterion is derived from this theorem, which characterizes the boundedness of the **L**-index in terms of the sums of partial derivatives. Actually (Theorem 2.18), the analytical vector-function F in $\mathbb{B}^2$ has a bounded **L**-index in joint variables if and only if there exist $c\in(0;+\infty)$ and $N\in\mathbb{N}$ are such that for each $(z,\omega)\in\mathbb{B}^2$ the inequality

$$\sum_{k+m=0}^{N}\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}\geq c\sum_{k+m=N+1}^{\infty}\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}$$

holds. From the point of view of possible applicability of the theory of analytical vector-functions F in the unit ball $\mathbb{B}^2$ of the bounded **L**-index developed in the work to the analytical theory of differential equations, an analogue of Hayman's theorem can have effective applications, since its analogues, previously established in different classes of analytical functions, have known effective applications.

Although the theorem 2.9 has the character of a criterion, it "hides" an even thinner property of the power series of the analytic vector-function F in the unit ball $\mathbb{B}^2$ of bounded **L**-index. In fact, the boundedness of such an index is equivalent to existence, the so-called main polynomial. And proving this fact is the main content of the sixth section.

The seventh section is devoted to the study of the possible growth rate of analytical vector functions F in the unit ball $\mathbb{B}^2$ of the bounded **L**-index. The main results here are contained in the theorems 2.16, 2.17, 2.18. The application of one or another variant of the concept of index limitations is usually realized according to the following scheme: on the basis of one of the criteria the boundedness of the index of solutions of differential equations their systems is proved. And then on the basis of the results of the constructed theory of the limited index the conclusion on properties of all solutions of this or that class of differential equations is made. In particular, the upper estimate of the growth rate of all solutions is given. The latter circumstance allows us to optimistically expect effective applications of the research conducted in the work to the analytical theory of differential equations.

Section 3 is devoted to the establishment of an analogue of the one-dimensional Fricke criterion of the boundedness of the index of an integer function from one variable in the class of integers vector of functions $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$. It should be noted that obtaining this result in the work in such a general formulation was in a sense quite unexpected, because so far both in the case of integer vector functions and a limited index, and in the case of analytical vector functions and a limited **L**-index, as in this dissertation, all achievements were associated with vector functions on $\mathbb{C}^2$. But attempts to obtain, for example, an analogue of Hayman's theorem in the most general case, currently encounter technical difficulties, which may be fundamental.

Keywords: analytic function, several complex variables, vector-valued function, main polynomial, bounded index.

LIST OF PUBLICATIONS:

1. Baksa V.P. *Analytic vector-functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Carpathian Math. Publ. – 2019. – V.11, no.2. – P.213–227. (Scopus, WoS) doi:10.15330/cmp.11.2.213-227
2. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Growth estimates for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Constructive Mathematical Analysis. – 2020. V.3, no.1. – P.9–19. doi: 10.33205/cma.650977 (журнал в Туреччині – країна входить до Організації економічного співробітництва та розвитку, тому публікація фахова)
3. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Hayman's Theorem and of logarithmic criterion for analytic vector-valued*

functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables // Math. Slovaca. – 2020. V.70, no.5. – P.1141–1152. (Scopus, WoS)

4. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded L-index in the unit ball* // Bukovinian Math. Journal.– 2019. V.7, no.2. – P.6–13.
(входить в категорію Б укр. фахових видань)
5. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Fricke's theorems for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables*// Proceedings of IAMM of NAS of Ukraine.– 2019. V.33, – P.16–26. doi: 10.37069/1683-4720-2019-33-1
(входить в категорію Б укр. фахових видань)
6. Baksa V.P, Bandura A.I., *Entire multivariate vector-valued functions of bounded L-index: analog of Fricke's theorem*// Mat. Stud. – 2020 V.54, no.1. – P.56–63. (Scopus)

LIST OF CONFERENCE ABSTRACTS:

1. Baksa V.P., Skaskiv O.B., Bandura A.I. *Local behavior of analytic vector-valued functions of bounded L-index in joint variables* // Int. conf. "Infinite dimensional analysis and topology" (Ivano- Frankivsk, October 16–20, 2019): Book of Abstracts. – Ivano-Frankivsk, 2019. – P.1–2.
2. Baksa V., Bandura A., Skaskiv O. *Analytic in the unit ball vector-functions having bounded L-index in joint variables* // Int. conference "On the trail of women in mathematics - in honor of Sofia Kowalewska" (Krakow, Poland, 31.08–2.09. 2019): Book of abstracts. – Krakow, Poland, AGH University of Science and Technology, 2019. – P.16–17.

3. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Estimate of maximum modulus on the skeleton of analytic vector-function in ball* // Vseukr. nauk. conf. "Contemporary problems of probability theory and mathematical analysis" (Vorokhta, 26.02–1.03. 2020): Book of Abstacts. – Ivano-Frankivsk, 2020. – P.32–33.
4. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded l-index in the unit ball* // Abstracts of XI Inter. Skorobatko math. conf. - Lviv, October 26-30, 2020. – P.11.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел; $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ — множина натуральних чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — множина дійсних чисел; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$;
- $\mathbb{R}^p = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ — $p-$вимірний дійсний векторний (евклідів) простір;
- $\mathbb{R}^p_+ = \mathbb{R}_+ \times \ldots \times \mathbb{R}_+$;
- $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел (комплексна площина);
- $\mathbb{C}^p$, $p \geq 2$ — p-вимірний векторний комплексний простір
- $K! = k_1!k_2! \cdots k_n!$ для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$.
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;
- $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, — нульовий вектор;
- $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$;
- $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j-\text{те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$;
- $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$;
- $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$;
- $z^K = z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \ldots, z_n^{k_n}$ для $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$
- $\mathbf{ab} = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$, $\mathbf{a}/\mathbf{b} = (a_1/b_1, a_2/b_2, \ldots, a_n/b_n)$ для $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ і $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ таких, що у випаджку другої рівності всі координати $b_j \neq 0$;
- $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ і $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ означає $a_j < b_j$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$ і $a_j \leq b_j (j \in \{1, \ldots, n\})$, відповідно;
- $\|K\| = k_1 + \ldots + k_n$ для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$;
- $\mathbb{D}^n(z^0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_j - z_j^0| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — полікруг;
- $\mathbb{D}^n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_j| < 1,\ j = 1, \ldots, n\}$ — одиничний полікруг;
- $\mathbb{D}^n[z^0, R] = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_j - z_j^0| \leq r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — замкнений полікруг;

- $\mathbb{T}^n(z^0,R) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_j - z_j^0| = r_j,\ j = 1,\dots,n\}$ — кістяк полікруга;
- $M(R,z_0,F) = \max\{\|F(z)\|_0 : z \in \mathbb{D}^n[z_0,R]\}$ для аналітичної на замкненому полікрузі вектор-функції $F\colon \mathbb{D}^n[z^0,R] \to \mathbb{C}^p$, $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $\|\cdot\|_0$ — деяка норма на $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$;
- $\frac{\partial^{\|K\|}F(z)}{\partial z^K} = \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}F(z)}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}$ — часткова похідна, $z = (z_1,\dots,z_n)$, $K = (k_1,\dots,k_n)$;
- $\lambda_{1,j}(R) = \inf\limits_{z^0\in\mathbb{D}^n} \inf\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)}\colon z \in \mathbb{D}^n\Big[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\Big]\right\}$;
- $\lambda_{2,j}(R) = \sup\limits_{z^0\in\mathbb{D}^n} \sup\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)}\colon z \in \mathbb{D}^n\Big[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\Big]\right\}$;
- $Q(\mathbb{D}^n)$ — клас функцій $\mathbf{L}(z) = (l_1(z),...,l_n(z))$, для яких

  $$(\forall r_j \in [0,\beta],\ j \in \{1,\dots,n\})\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(R) \leq \lambda_{2,j}(R) < \infty,$$

  де $l_j(z) : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_+$ – неперервні функції такі, що $\forall z \in \mathbb{D}^n$: $l_j(z) > \frac{\beta}{1-|z_j|}$, а $\beta > 1$ — фіксована стала.

В окремих підрозділах вводяться також додаткові позначення, які дійсні лише в них.

ВСТУП

Актуальність теми. Зазначимо, що хоча прийнято вважати, що ідея поняття цілої функції обмеженого індексу належить Б. Лепсону, це поняття швидше за все вперше появилося у дисертації Дж. Макдоннела ([7], 1957), а широкому загалові стало відомо з публікації Б.Лепсона ([8], 1968). Проте, у роботі [9, 1970], крім прізвища Лепсона є вказівка на статтю Ф. Гроса ([10], 1967), а також на статтю С. Шаха ([11], 1968) на цю ж тему, в яких поняття вводиться цілком подібно з однією лише, за твердженням авторів статті [9], відмінністю, що у Б.Лепсона ([12]) вимагається строгого виконання відповідної нерівності з означення, а у двох інших авторів нерівність нестрога. Тобто, з точністю до заміни знаку $<$ на знак $\leq$ нерівність з означення цілої функції обмеженого індексу є однією і тією ж. Це поняття виникло у зв'язку з дослідженням властивостей цілих розв'язків лінійного однорідного диференційного рівняння. Доведено при цьому ([11]), що кожний цілий розв'язок лінійного однорідного диференційного рівняння зі сталими коефіцієнтами є цілою функцією обмеженого індексу. А також було зроблено спробу довести, щоправда без особливого успіху, те ж саме про цілі розв'язки лінійного однорідного диф.рівняння нескінченного порядку (виглядає вірогідним, що ця остання проблема в загальній постановці питання залишається досі відкритою). У подальших дослідженнях було встановлено, що цілі функції обмеженого індексу мають ряд властивостей правильного локального поводження та правильного у певному сенсі розподілу значень, зокрема, мають властивість рівномірної у певному сенсі розподіленості послідовності їхніх нулів (В.Хейман [13], С.Шах, Г.Фріке, Р.Рой [14–16]). Власне, для кожної цілої функції обмеженого індексу існують такі додатне число і натуральне, що в довільному крузі цього радіусу на площині може бути число нулів, яке не перевищує, згаданого натурального числа. Для однієї змінної С.Шах [11] та У.Хейман [13], а для двох змінних Ф. Нурай і Р.Ф. Патерсон [17] (див. також [18]), довели, що цілі функції обмеженого індексу є функціями експоненційного типу. Тому, поняття обмеженості індексу в загальному є застосовним лише до класу цілих функцій експоненційного типу. Останнє означає, що його можна застосовувати до дослідження лише цілих розв'язків експоненційного типу лінійних диференційних рівнянь. Це ж стосується обмеженості індексу цілих розв'язків деяких лінійних диференційних рівнянь як з довільними цілими коефіцієнтами, так і з відмінною від тотожного нуля правою частиною ([15, 19]). Тому природно постала проблема пошуку вдалого й адекватного узагальнення цього поняття на класи цілих функцій довільного зростання. Пізніше М.М.Шеремета і А.Д.Кузик ([20], 1986; див. також [21, 22]) ввели і дослідили таке поняття цілої функції обмеженого L-індексу, що вже для довільної цілої функції з обмеженими в сукупності кратностями нулів існує додатна функція L, відносно якої, ціла функція є функцією обмеженого L-індексу ([23]). В подальшому виявилось, що поняття, введене Шереметою-Кузиком, нескладно за аналогією переноситься на різноманітні класи аналітичних функцій в довільних областях як на площині, так і в багатовимірному комплексному просторі, й практично кожного разу вдається довести аналоги основних результатів з теорії цілих функцій від однієї змінної обмеженого індексу ($L \equiv 1$). Для фіксованої додатної функції $L\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ ціла функція f називається цілою функцією обмеженого L-індексу, якщо існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність:

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p! L^p(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k! L^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\}.$$

При $L(r) \equiv 1$ L-індекс - це 1-індекс, тобто, дане означення стає означенням обмеженого індексу цілої функції за Макдоннелом-Лепсоном. Як довели М.М. Шеремета і А.Д. Кузик ([20]), необхідною умовою існування для даної функції L цілої трансцендентної функції обмеженого L-індексу є умова $rL(r) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$. Останнє випливає з того, що, $\ln M_f(r) = O(\int\limits_1^r L(t)dt)$ $(r \to +\infty)$ для кожної цілої функції обмеженого L-індексу, а також з того, що $\ln M_f(r)/\ln r \to +\infty$ $(r \to +\infty)$ для кожної цілої трансцендентної функції f, де $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$. А.А. Гольдберг і М.М. Шеремета ([24]) довели, що умова $rL(r) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$ є достатньою, для того, щоб існувала ціла трансцендентна функція обмеженого L-індексу. На відміну від поняття цілої функції обмеженого індексу, поняття функції обмеженого L-індексу допускає узагальнення як на клас аналітичних в одиничному крузі функцій, так і узагальнення на інші різноманітні класи аналітичних функцій від однієї і від багатьох комплексних змінних. Функції з таких класів допускають апріорні оцінки швидкості їхнього зростання ([18, 25–28]), а також є розв'язками диференціальних рівнянь за природних умов на аналітичні коефіцієнти цих рівнянь([8, 14, 18, 19, 21, 22, 25, 28–37]), що в сукупності у кожному конкретному випадку, коли вдається встановити обмеженість L-індексу аналітичних розв'язків диф. рівнянь, дає змогу негайно отримати для такого класу рівнянь твердження про максимально можливу швидкість зростання розв'язків, яка визначається максимально можливою швидкістю зростання коефіцієнтів. А це у свою чергу дає у кожному випадку в тому чи іншому класі рівнянь часткове вирішення проблеми У.Хеймана стосовно можливості отримання таких апріорних оцінок. Вже ця одна обставина робить проблему перенесення і поняття обмеженості індексу на все нові класи аналітичних функцій і дослідження властивостей таких функцій безумовно дуже актуальною.

В даній дисертаційній роботі вперше за аналогією з попереднім вводиться і досліджується поняття обмеженого $\mathbf{L}$-індесу в класі аналітичних вектор-функцій $F\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$, де $\mathbb{B}^2$ – куля з центром у початку координат радіуса 1 в двовимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^2$. З огляду на сказане вище не доводиться піддавати сумніву актуальність проведеного у дисертації дослідження. Зазначимо, що аналоги деяких основних тверджень з теорії цілих функцій обмеженого індексу від однієї змінної, недавно Ф. Нурай і Р.Ф. Патерсон ([30]) перенесли на цілі вектор-функції $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^p$, $p \geq 2$ обмеженого індексу (з $\mathbf{L} \equiv 1$). Тому, спроба перенесення всіх базових властивостей на дані класи вектор-функцій, сама-по-собі заслуговує на увагу. Тим паче, у випадку класу вектор-функцій розглянутого у дисертації, позаяк навіть для аналітичних функцій від однієї змінної в одиничному крузі, як вже частково відзначалося вище, ситуація є місцями істотно складнішою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей (тепер теорії функцій і функціонального аналізу). Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка.

Мета й завдання дослідження. *Мета дослідження* — розширення теорії аналітичних функцій обмеженого L-індексу на клас аналітичних вектор-функцій в одиничній двовимірній кулі.

Об'єкт дослідження: аналітичні вектор-функції обмеженого L-індексу.

Предмет дослідження: локальні і асимптотичні властивості вектор функцій з класів, що розглядаються.

Завдання дослідження:

1) для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій отримати критерій обмеженості L-індексу за сукупністю змінних в термінах локального регулярного поводження максимума норми вектор функції на полікругах;
2) для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій отримати критерій обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних в термінах локального регулярного поводження часткових похідних вектор-функції, який є аналогом одновимірного критерію Фріке;
3) для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій отримати аналог одновимірного критерію Хеймана, який означенні поняття обмеженого L-індексу за сукупністю змінних дає змогу замінити перевірку базової нерівності для всіх похідних перевіркою лише для деякої скінченної їх кількості;
4) отримати оцінки швидкості зростання аналітичних вектор-функцій в одиничній двовимірній кулі в $\mathbb{C}^2$ обмеженого L-індексу за сукупністю змінних;
5) для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій довести твердження про існування головного полінома у її степеневому розвиненні.

Методи дослідження: Для розв'язання поставлених задач використовуються методи одновимірного і багатовимірного комплексного аналізу, а також окремі ідеї і підходи з досліджень, які виконали В.Хейман, М.М. Шеремета і А.Д. Кузик, О.Б. Скасків і А.І. Бандура, а також Ф.Нурай і Р.Ф. Патерсон.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі основні наукові результати отримані в дисертації, і які виносяться на захист, є новими. У дисертаційній роботі:

1) вперше для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій отримано критерій обмеженості L-індексу за сукупністю змінних в термінах локального регулярного поводження максимума норми вектор функції на полікругах;
2) вперше для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій отримано критерій обмеженості L-індексу за сукупністю змінних в термінах локального регулярного поводження часткових похідних вектор-функції, який є аналогом одновимірного критерію Фріке;
3) вперше для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій отримано повний аналог одновимірного критерію Хеймана, який означенні поняття обмеженого L-індексу за сукупністю змінних дає змогу замінити перевірку базової нерівності для всіх перевіркою лише деякої скінченної їх кількості;
4) вперше отримано оцінки швидкості зростання аналітичних вектор-функцій в одиничній двовимірній кулі в $\mathbb{C}^2$ обмеженого L-індексу за сукупністю змінних;
5) вперше для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій досліджено властивості степеневого розвинення аналітичних вектор-функцій у двовимірній кулі і доведено твердження про існування головного полінома у цьому розвиненні.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть бути застосованими у подальших дослідженнях в теорії аналітичних функцій та в інших суміжних розділах математики, в яких виникають такі об'єкти, зокрема, в аналітичній теорії диференційних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені з повними доведеннями лише результати, які належать авторові дисертації. Доведення кількох тверджень допоміжного характеру, отриманих співавторами здобувача, наводяться для повноти картини у рукописі дисертації з люб'язного дозволу співавторів. Зі статей, виконаних у співавторстві, в дисертацію включені з повними доведеннями лише результати, які належать авторові дисертації. Науковому керівникові О.Б. Скасківу та співавтору А.І. Бандурі, обидвом в одинаковій мірі, в опублікованих статтях належать постановки задач, визначення напрямків дослідження і участь в обговоренні отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних та наукових конференціях та наукових семінарах:

1) On the Trails of Women in Mathematics 2019 In Honor of Sofia Kowalewska (Krakow, 31 August - 2 September, 2019).
2) Всеукраїнська наукова конференція „Сучасні проблем теорії ймовірностей та математичного аналізу“ (Ворохта, 26 лютого-1 березня 2020).
3) Міжнародна наукова конференція "Abstracts of XI International Skorobohatko mathematical conference"(Lviv, 26-30 October 2020).
4) Міжнародна наукова конференція "Infinite-Dimensional Analysis and Topology"(Ivano-Frankivsk, 16-20 Oktober 2019).
5) Семінарі з теорії потенціалу та застосувань у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (керівники проф. О. Б. Скасків, проф. І. Е. Чижиков, 2017).
6) Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. О. Б. Скасків, проф. І.Е. Чижиков, проф. М.В. Заболоцький, проф. П.В. Філевич у 2018-2020).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 10 статтях і наукових повідомленнях, з яких 2 статті [2], [4] в українських фахових виданнях зі списку б), стаття [1] у фаховому видання зі списку а), яке входить у науково-метричних баз Web of Science та Scopus, стаття [3] у закордонному виданні, яке входить в Web of Science та Scopus, стаття [5] у закордонному науковому журналі з країни (Туреччина), яка входить до Організації економічного співробітництва та розвитку, тому публікація фахова, ще одна стаття надрукована у виданні, що включене до міжнародної наукометричної бази Scopus, 4 у тезах конференцій різного рівня.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 135 ст. Список використаних джерел містить 90 найменувань та займає 10 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ВИХІДНІ ПОЛОЖЕННЯ, ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНІ НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У цьому розділі зробимо огляд результатів, які як безпосередньо стосуються результатів дисертації, так і є причетними до виникнення постановок конкретних задач, що розглядаються у ній, а також наведемо огляд основних результатів дисертаційної роботи.

1.1 Огляд відомих результатів, які відносяться до тематики дисертаційного дослідження

Ціла функція $f(z)$ має розвинення Тейлора в довільній точці a комплексної площини вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

Оскільки цей ряд абсолютно збіжний скрізь у площині, то $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$. Отже, для кожного $a \in \mathbb{C}$ знайдеться індекс $n_0 = n(a)$, такий, що $|a_{n_0}|$ є максимальним серед коефіцієнтів ряду. Б. Лепсон [12] запропонував описати властивості цілих функцій, для яких $\sup\{n_0(a)\colon a \in \mathbb{C} < +\infty\}$. Цілі функції з такою властивістю за Б. Лепсоном називаються функціями обмеженого індексу. Цілий ряд цікавих властивостей функцій обмеженого індексу довів Ф.Гросс ([10], 1967).

Першими працями, в яких досліджувалися цілі функції обмеженого індексу, ймовірно були [7, 8, 10, 11]. Сама поява поняття цілої функції обмеженого індексу й подальші зусилля багатьох дослідників у вивченні класу цілих функцій обмеженого індексу, що призвели до беззаперечних успіхів на цьому шляху і появи доволі стрункої і змістовної теорії, були інспіровані потребами дослідження цілих розв'язків диференційних рівнянь на комплексній площині.

А.Д.Кузик і М.М.Шеремета ([20], 1986), ввели загальне поняття цілої функції обмеженого l-індексу. Отже, нехай l – додатна, неперервна на $[0; +\infty)$ функція. Ціла функція $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, називається функцією *обмеженого* l*-індексу,* якщо існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ і для кожного $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!l^p(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} \colon 0 \le k \le N\right\}.$$

При $l(|z|) \equiv 1$ звідси отримаємо означення цілої функції обмеженого індексу за Макдонеллом-Лепсоном.

Вивченню властивостей функцій з цього класу присвятили свої праці багато відомих математиків математиків, серед яких Г.Фріке, С.М.Шах, В.Хейман та інші. Так, С.Шах [11] і В.Хейман [13] незалежно довели, що кожна ціла функція обмеженого індексу є функцією експоненційного типу, тобто її зростання не вище нормального типу скінченного порядку. Також С.Шах дослідив, що кожен цілий розв'язок лінійного однорідного зі сталими коефіцієнтами диференційного рівняння вигляду

$$f^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)}(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{C})$$

є функцією обмеженого індексу [11].

В.Хейман [13] довів, що ціла функція є функцією обмеженого розподілу значень, якщо її похідна є функцією обмеженого індексу. Огляд результатів, які відносяться до класу функцій обмеженого індексу, на момент написання огляду, знаходимо в [38, 1977]. А результати, що стосуються одновимірної теорії аналітичних функцій обмеженого l-індексу, знаходимо у монографії [22]. Зазначимо, що всі основні факти теорії функцій обмеженого індексу були успішно перенесені М.М.Шереметою зі співавторами як на клас цілих функцій обмеженого l-індексу, так і на клас аналітичних функцій в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ обмеженого l-індексу. Вкажемо на те, що самé поняття функції обмеженого індексу не можна перенести у звичайному вигляді на клас аналітичних в одиничному крузі функцій.

Означення Кузика-Шеремети природно переноситься і породжує при цьому доволі змістовну теорію, подібну до теорії цілих функцій обмеженого l-індексу, на найрізноманітніші класи як цілих, так і аналітичних функцій від багатьох змінних. В інтепретації для аналітичних вектор-функцій введемо поняття так.
Нехай задано область $G \subset \mathbb{C}^n$, $|\cdot|_p$ довільна фіксована норма на $\mathbb{C}^p$. Нехай

$$\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z)), \quad z = (z_1, \ldots, z_n),$$

де $l_j(z)\colon G \to \mathbb{R}_+$ додатні неперервні функції на G для кожного $j, 1 \le j \le n$. Аналітична вектор-функція $F\colon G \to \mathbb{C}^p$, де $F = (f_1, \ldots, f_p)$, f_j – аналітичні функції на G для кожного $j, 1 \le j \le n$, називається вектор-функцією *обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу (за сукупністю змінних) в області* G, якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $(\forall z \in G)(\forall J \in \mathbb{Z}^n_+)$:

$$\frac{|F^{(J)}(z)|_p}{J!\mathbf{L}^J(z)} \le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon K \in \mathbb{Z}^n_+, \|K\| \le n_0\right\}, \tag{1.1}$$

де для $m \in \mathbb{Z}^n_+$

$$F^{(m)}(z) := \left(f_1^{(m)}(z), \ldots, f_p^{(m)}(z)\right),$$
$$f_j^{(m)}(z) := \frac{\partial^{\|m\|} f_j(z)}{\partial z^m} = \frac{\partial^{\|m\|} f_j(z)}{\partial z_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \partial z_n^{m_n}}.$$

Найменше ціле число n_0 з властивістю такою, як в сформульованому означенні, називається $\mathbf{L}$-індексом за сукупністю змінних вектор-функції F та позначається через $N(F, \mathbf{L}, G, \mathbb{C}^p)$. Аналітична вектор-функція F називається *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу* $N(F, \mathbf{L}, G, \mathbb{C}^p)$. Для $G = \mathbb{C}^p$ позначимо $N(F, \mathbf{L}) := N(F, \mathbf{L}, \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p)$.

При $n = 2, p = 1$, $L(z) \equiv 1$, $G = \mathbb{C}^2$, отримаємо означення цілої функції від двох змінних обмеженого індексу (див. Ґ. Дж. Крішна і С.М.Шах [9], М.Салмассі [29, 39]). При $p = 1$, $L(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$, $G = \mathbb{C}^n$, отримаємо означення цілої функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу від n-змінних в сенсі М.Т.Бордуляк і М.М.Шеремети (див., наприклад, [25,40]). Якщо вважати, що функція $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z)), \quad z = (z_1, \ldots, z_n)$, тобто, має загальний вигляд, що означає, що функції $l_j(z)$ є функціями від всіх змінних, то отримаємо узагальнення попереднього поняття, яке має не лише формальний характер ([41–44]). Справді, з теореми ([45]) про максимально можливу швидкість зростання таких функцій, випливає, що, наприклад ціла функція від двох змінних

$$F(z_1, z_2) = e^{z_1 \cdot z_2}$$

ні для якої функції $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(z_1), l_2(z_2))$ не має обмеженого $\mathbf{L}$-індексу в сенсі означення Бордуляк-Шеремети , але є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}) = 0$ для функції $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (|z_2| + 1, |z_1| + 1)$ в сенсі другого означення ([41]).

Вибираючи $p = 1$, $L(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z)), \quad z = (z_1, \ldots, z_n),$, $G = \Pi^2$ і $n = 2$, $G = \Pi^2 := \{z = (z_1, z_2) \colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ отримаємо означення аналітичної функції обмеженого L-індексу в бікрузі, досліджене в [46–49]. А у випадку $p = 1$, $L(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z)), \quad z = (z_1, \ldots, z_n),$, $G = \mathbb{B}^n$, отримаємо означення аналітичної функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу в – одиничній кулі $\mathbb{B}^n = \{z \colon |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < 1\}$, досліджене в [26, 32, 36, 44, 50–55]. Вибираючи $p = 1, n = 2$, $L(z) = (l_1(z), l_2(z)), \quad z = (z_1, z_2)$, $G = \mathbb{D} \times \mathbb{C}$, отримаємо означення аналітичної функції обмеженого L-індексу в декартовому добутку одиничного круга та всієї комплексної площини $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, дослідження яких розпочато в ([56, 57]).

Значна кількість досліджень стосується цілих функцій і аналітичних в одиничній кулі функцій від багатьох комплексних змінних обмеженого L-індексу за напрямком ([27, 31–33, 35, 50, 52]). Розвинуті при цьому авторами підходи виявилися придатними для дослідження зрізка-цілих функцій ([58–61]), тобто таких функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, звуження яких на комплексні прямі $\{z = a + b\tau\colon \tau \in \mathbb{C}\}$ для деякого $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ і для кожного $a \in \mathbb{C}^n$ є цілими функціями від комплексної змінної τ.

В цьому оглядів результатів попередників, надалі обмежимося лише багатовимірним випадком, що безпосередньо стосується даної дисертаційної роботи. За потреби ми цитуватимемо чужі результати також в основній частині роботи.

У статтях [17, 62, 63] поняття цілої функції від двох змінних розглядалося в термінах означення Ф. Гроса ([10]). Власне, автори щойно згаданих статей кажуть, що ціла функція $F(z, w)\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ має обмежений індекс якщо існують числа M і N, $(M, N) \in \mathbb{Z}_+^2$, що не залежать від (z, w), для яких нерівність

$$\frac{|F^{(i,j)}(z, w)|}{i!j!} \le \max\left\{\frac{|F^{(k,l)}(z, w)|}{k!l!}\colon 0 \le k \le M, 0 \le l \le N\right\}$$

виконується для всіх $(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2$. Зрозуміло, що функція обмеженого індексу в щойно введеному сенсі, виявляється такою і в сенсі означення на основі нерівності (1.1) (при $\mathbf{L}(z_1, z_2) \equiv 1$). Для того, щоб у цьому переконатися досить взяти у нерівності (1.1) $n_0 = M + N$. Імплікація навпаки настільки ж очевидна. Якщо вибрати, $M = N = n_0$, то зрозуміло, що

$$\frac{|F^{(i,j)}(z, w)|}{i!j!} \le \max\left\{\frac{|F^{(k,l)}(z, w)|}{k!l!}\colon 0 \le k + l \le n_0\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|F^{(k,l)}(z, w)|}{k!l!}\colon 0 \le k \le n_0 = M, 0 \le l \le n_0 = N\right\}.$$

Означення поняття цілої функції від багатьох комплексних змінних обмеженого індексу находимо у статті [9], а також вкажемо у цьому зв'язку на статті [29, 39].

Поняття обмеженості індексу та l-індексу розглядалося також в класі цілих кривих, тобто вектор-функцій $F = (f_1, \dots, f_p) \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^p$ таких, що f_j – цілі функції від однієї змінної ([18, 28, 34, 64, 65]).

Ф.Нурай і Р.Патерсон досліджували обмеженість індексу цілих вектор-функцій від двох змінних $F = (f_1, \dots, l_p) \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^p$, що є розв'язками деяких систем диф. рівнянь [30]. При цьому вони посуті досліджують лише такі системи, до яких можна застосувати таке допоміжне твердження.

Лема 1.1. *Нехай $F = (f_1, \dots, f_p) \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^p$ – ціла вектор-функція така, що цілі функції $f_j(z_1, z_2)$ від двох змінних мають обмежені індекси $N(f_j) = N_j$, $1 \le j \le p$. Тоді ціла вектор-функція F має обмежений індекс $N(F) \le N = \max\{N_1, N_2, ..., N_p\}$.*

Зазначимо, що навіть ціла крива може мати обмежений індекс, в той час, як її компоненти можуть бути необмеженого індексу (див. [34]). Власне, існує така ціла функція необмеженого індексу від однієї змінної $f(z)$, що ціла крива $F = (1, f)$ має обмежений індекс. Зокрема ще й цією обставиною диктується потреба у доведенні аналогів всіх базових тверджень з теорії цілих функцій обмеженого індексу у випадку аналітичних вектор-функцій. На те, що таке перенесення (на перший погляд формальне) є далеко не формальним вказує хоча б та обставина, що у загальному випадку цілих вектор-функцій $F \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ досі нема аналогів всіх ключових теорем навіть у випадку обмеженого індексу. Ф.Нурай і Р.Патерсон доводять аналоги кількох критеріїв і обмежуються розглядом цілих вектор-функцій від двох змінних. Щоправда вони стверджують, що це робиться для простоти розгляду. Зазначимо, що якби це було так, то не було би потреби істотно обмежувати клас диф. рівнянь, що досліджуються, застосуванням леми 1.1, замість того, щоб отримати і застосовувати певний аналог критерію Хеймана. Наші подальші спроби у цьому напрямку дають вичерпні відповіді у випадку аналітичних вектор-функцій $F \colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ та у випадку аналога теореми Фріке для цілих вектор функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$.

Оскільки, у випадку аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій, нам вдається довести аналоги практично всіх основних теорем з одновимірної теорії, ми наведемо лише формулювання кількох теорем для аналітичних функцій в одиничній кулі, отриманих А.І. Бандурою і О.Б.Скасківим для того, щоб у подальшому викладі мати змогу посилатися на повну аналогію наших формулювань з формулюваннями теорем у наших попередників.

Доведення аналогів наступної теореми кожного разу є одним з базових кроків у побудові аналогів теорії цілих функцій обмеженого індексу (див., наприклад, [20, 22, 35, 66]). Ця теорема лежить в основі доведення всіх подальших критеріїв обмеженості індексу в тому або іншому сенсі.

Теорема 1.1 ([35], Theorem 1)**.** *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$*. Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли* $\forall R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \le \beta$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\exists p_0 > 0$ *такі, що* $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\exists K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \le n_0$:

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{D}^n\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

Для $r > 0$ і аналітичної в $\mathbb{B}^n$ функції F позначимо

$$M(r, z^0, F) = \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{D}^n[z^0, R]\}.$$

Наступна теорема вказує на локальну регулярність поводження аналітичної в $\mathbb{B}^n$ функції F обмеженого $\mathbf{L}$-індексу.

Теорема 1.2 ([35], Theorem 5)**.** *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$*. Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то* $\forall R'$, $\forall R'' \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{0} < R' < R''$, $|R''| < \beta$, $\exists p_1 = p_1(R', R'') \ge 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$:

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right) \le p_1 M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\right). \tag{1.2}$$

Разом з цим, властивість “локальної регулярності” є і характеристичною властивістю аналітичних в $\mathbb{B}^n$ функцій F обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Теорема 1.3 ([35], Theorem 6). *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$, *а* $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ – *аналітична функція. Якщо* $\exists R'$, $\exists R'' \in \mathbb{R}^n_+$, *такі, що або* $\mathbf{0} < R' < \mathbf{1} < R''$, $|R''| < \beta$, *або* $\mathbf{0} < R' < R''$, $|R' + R''| < \frac{2\beta}{\sqrt{n}}$, *і існує* $p_1 \geq 1$ *таке, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *виконується нерівність* (1.2), *то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Аналог теореми Хеймана

Наступна теорема є аналогом одновимірної теореми Хеймана, аналоги якої ефективно використовуються при доведенні обмеженості індексу в тому чи іншому сенсі аналітичних розв’язків диф. рівнянь або деяких їхніх систем.

Теорема 1.4 ([35], Theorem 9). *Let* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *An analytic function* F *in* $\mathbb{B}^n$ *has bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables if and only if there exist* $p \in \mathbb{Z}_+$ *and* $c \in \mathbb{R}_+$ *such that for each* $z \in \mathbb{B}^n$

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : \ \|J\| = p+1\right\} \leq c \cdot \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \ \|K\| \leq p\right\}.$$

Головний поліном ряду

Нехай $z^0 \in \mathbb{B}^n$. Розвинемо аналітичну в $\mathbb{B}^n$ функцію F в степеневий ряд за однорідними поліномами

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k((z - z^0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\|J\|=k} b_J (z - z^0)^J, \qquad (1.3)$$

де p_k – однорідні поліноми k-того степеня, $b_J = \frac{F^{(J)}(z^0)}{J!}$. Поліном $p_{k_0}, k_0 \in \mathbb{Z}_+$, назвемо домінатним (головним) поліномом на $\mathbb{T}^n(z^0, R)$ степеневого ряду (1.3), якщо для кожного $z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)$ виконується така нерівність

$$|\sum_{k \neq k^0} p_k(z - z^0)| \leq \frac{1}{2} \max\{|b_J| R^J : \|J\| = k^0\}.$$

Теорема 1.5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Якщо аналітична функція* F *в* $\mathbb{B}^n$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за суккупністю змінних, то існує* $p \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що для всіх* $d \in (0; \frac{\beta}{\sqrt{n}}]$ *існує* $\eta(d) \in (0; d)$ *таке, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *і деяких* $r = r(d, z^0) \in (\eta(d), d)$, $k^0 = k^0(d, z^0) \leq p$ *поліном* p_{k^0} *є домінантним (головним) поліномом ряду* (1.3) *на кістяку* $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{1}}{\mathbf{L}(z^0)})$.

Властивість існування головного полінома також є характеристичною властивістю степеневих розвинень аналітичних в $\mathbb{B}^n$ функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу.

Варто зазначити, що поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу з вектор-функцією загального вигляду $L(z) = (l_1(z), l_2(z), ..., l_n(z))$ замість $L(z) = (l_1(|z_1|), l_2(|z_2|), ..., l_n(|z_n|))$ вперше було розглянуто і досліджено для цілих функцій від багатьох змінних у статтях [42,67,68]. Це дає змогу проводити дослідження для ширшого класу функцій $\mathbf{L}$, а, отже, розширити клас цілих функцій, які мають властивість обмеженості $\mathbf{L}$-індексу. А в [41] автори не лише узагальнили відомі результати для таких функцій $\mathbf{L}$, але ще й отримали тонші і більш точні оцінки, що є новими навіть для цілих в $\mathbb{C}$ функцій. Як випливає з викладеного перед цим, А.І. Бандура і О.Б. Скасків подібну програму реалізували спочатку в класі аналітичних функцій від багатьох змінних в одиничній кулі.

Відзначимо також, що О.Б. Скасків та А.І.Бандура [43,66,69–80], запропонували також інший підхід до введення поняття обмеженості індексу у випадку аналітичних (і, зокрема, цілих) функцій від багатьох комплексних змінних. Вони розглянули теорію цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за напрямком, взявши за основу похідні за фіксованим напрямком. Такий підхід дозволив авторам не лише знайти встановити цілком нові результати, зокрема, для застосування таких функцій, але й довести аналог так званого логарифмічного критерію обмеженого індексу стосовно обмеженості

$\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Більш повну інформацію про цілі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за напрямом можна знайти в монографії А.І.Бандури та О.Б.Скасківа [35].

Варто також згадати, що А.І.Бандура, О.Б.Скасків та В. Л. Цвігун [81, 82] розглянули обмеженість $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних в класі аналітичних в $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ функцій. Найвідомішим представником цього класу функцій є так звана деформована показникова функція

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_1^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{z_2^n}{n!},$$

яка має різні застосування у комбінаториці, теорії графів, комплексному аналізі, статистичній механіці (див., наприклад, [83–86]).

1.2 Основні напрямки та результати дослідження

У дисертації досліджуються поняття обмеженості L-індексу для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, тобто, функцій вигляду $F(z,w) = (f_1(z,w), f_2(z,w))$, де $f_j(z,w)$ – аналітичні функції від двох комплексних змінних в одиничній двовимірній кулі. При цьому $L(z,w) = (l_1(z,w), l_2(z,w))$.

Введемо деякі позначення. Через $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ позначаємо, відповідно, множини дійсних, комплексних, натуральних і цілих чисел, а $\mathbb{R}_+ \overset{def}{=} [0, +\infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$. Використовуватимемо також наступні загально прийняті позначення. Позначимо $\mathbf{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{1} = (1,1) \in \mathbb{R}^2_+$, $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $|(z,\omega)| = \sqrt{|z|^2 + |\omega|^2}$. Для $z \in \mathbb{C}^2$, $w \in \mathbb{C}^2$ визначимо $\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2$, де $\overline{w}_1, \overline{w}_2$ — комплексно спряжені числа до w_1, w_2.

$\mathbb{D}^2((z_0,\omega_0), R)$ $=\{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 : |z - z_0| < r_1, |\omega-\omega_0| < r_2\}$ – полікруг,

$\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0), R) = \{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 : |z - z_0| = r_1, |\omega-\omega_0| = r_2\}$ – його кістяк,

$\mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0),R]$ $=\{(z,\omega)\in\mathbb{C}^2 : |z-z_0|\le r_1, |\omega-\omega_0|\le r_2\}$ – замкнений полікруг,
$\mathbb{D}^2=\mathbb{D}^2(\mathbf{0};\mathbf{1})$, $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. $\mathbb{B}^2((z_0,\omega_0),r)$ $=\{(z,\omega)\in\mathbb{C}^2 : \sqrt{|z-z_0|^2+|\omega-\omega_0|^2}<r\}$ – відкрита куля,

сфера $\mathbb{S}^2((z_0,\omega_0),r)=\{(z,\omega)\in\mathbb{C}^2 : \sqrt{|z-z_0|^2+|\omega-\omega_0|^2}=r\}$ – її топологічна межа,

$\mathbb{B}^2[(z_0,\omega_0),R]$ $=\{z\in\mathbb{C}^2 : \sqrt{|z-z_0|^2+|\omega_0-\omega_0|^2}\le r\}$ – замкнена куля,
$\mathbb{B}^2=\mathbb{B}^2(\mathbf{0},\mathbf{1})$, $\mathbb{D}=\mathbb{B}^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$.

Нехай $F(z,\omega)=(f_1(z,\omega),f_2(z,\omega))$—аналітична в $\mathbb{B}^2$ вектор-функція від двох змінних. Тоді в околі кожної точці $(a,b)\in\mathbb{B}^2$ функція $F(z,\omega)$ допускає двовимірне розвинення у ряд Тейлора:

$$F(z,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(z-a)^k(\omega-b)^m,$$

де $C_{km}=\frac{1}{k!m!}\left(\frac{\partial^{k+m}f_1(z,\omega)}{\partial\omega^k\partial z^m},\frac{\partial^{k+m}f_2(z,\omega)}{\partial\omega^k\partial z^m}\right)\Big|_{z=a,\omega=b}:=\frac{1}{k!m!}F^{(k,m)}(a,b)$.
Нехай $\mathbf{L}(z,\omega)=(l_1(z,\omega),l_2(z,\omega))$, де $l_j(z,\omega):\mathbb{B}^2\to\mathbb{R}_+^2$—додатна неперервна функція така, що:

$$\forall(z,\omega)\in\mathbb{B}^2:\quad l_j(z,\omega)>\frac{\beta}{1-\sqrt{|z|^2+|\omega|^2}},\tag{1.4}$$

$j\in\{1,2\}$, де $\beta>\sqrt{2}$—деяка стала.

Аналітична функція $F:\mathbb{B}^2\to\mathbb{C}^2$ називається функцією *обмеженого* **L**-*індексу (за сукупністю змінних),* якщо існує $n_0\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $\forall(z,\omega)\in\mathbb{B}^2$ і для всіх $(i,j)\in\mathbb{Z}_+^2$:

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!l_1^i(z,\omega)l_2^j(z,\omega)}\le\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\le n_0\right\},$$

де $\|\cdot\|$ в даному означенні позначає, взагалі кажучи, довільну норму на $\mathbb{C}^2$. Найменше з таких n_0 називається **L**-*індексом за сукупністю змінних і позначається* $N(F,L,\mathbb{B}^2)=n_0$.

Через $Q(\mathbb{B}^2)$ позначимо клас функцій

$$\mathbf{L}(z,\omega)=(l_1(z,\omega),l_2(z,\omega)):\mathbb{B}^2\to\mathbb{R}^2_+,$$

які задовольняють нерівність (1.4) та для довільних $j\in\{1,2\}$ і деякого $R=(r_1,r_2),|R|\le\beta$:

$$\sup_{(z_1,\omega_1),(z_2,\omega_2)\in\mathbb{B}^2}\left\{\frac{l_j(z_1,\omega_1)}{l_j(z_2,\omega_2)}:|z_1-z_2|\le\frac{r_1}{\min\{l_1(z_1,\omega_1),l_1(z_2,\omega_2)\}},\right\}.$$
$$\left\{|\omega_1-\omega_2|\le\frac{r_2}{\min\{l_2(z_1,\omega_1),l_2(z_2,\omega_2)\}}\right\}<\infty.$$

Наступна теорема є базовою для всієї подальшої нашої побудови аналогу теорії функцій обмеженого індексу.

Теорема 2.1. *Нехай $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^2)$. Аналітична вектор-функція $F:\mathbb{B}^2\to\mathbb{C}^2$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс тоді й тільки тоді, якщо для кожного $R\in\mathbb{R}^2$, $|R|\le\beta$ знайдуться $n_0\in\mathbb{Z}_+$, $p>0$ такі, що для всіх $(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$ існує пара $(k_0,m_0)\in\mathbb{Z}^2_+$, $k_0+m_0\le n_0$, для якої виконується*

$$\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}\right\}:$$

$$k+m\le n_0,(z,\omega)\in\mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)]\le$$
$$\le p_0\frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{k_0!m_0!l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}. \tag{1.5}$$

Доведення цієї теоремии здійснюється за схемою доведення подібної теореми для аналітичних функцій з $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{C}$ з [54]. Для аналітичних функцій від кількох комплексних змінних (в кулі $\mathbb{B}^n$, в n-вимірному полікрузі, в області $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$) аналоги цієї теореми доведено в цілому ряді статей А.Бандури і О.Скасківа разом з співавторами (про це більше див., наприклад, в [35, 36]).

Зазначимо, що можна розглядати як sup-норму

$$\|F(z,\omega)\|=\max_{1\le j\le 2}\{|f_j(z,\omega)|\},$$

так і евклідову норму

$$\|F(z,\omega)\|_E=\sqrt{|f_1(z,\omega)|^2+|f_2(z,\omega)|^2}.$$

Це не вплине на властивість цілої вектор-функції мати обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. Справджується таке твердження.
Наслідок 2.1. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^2)$. *Аналітична вектор-функція* $F:\mathbb{B}^2\to\mathbb{C}^2$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних за* sup-*нормою тоді й тільки тоді, коли вона має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за евклідовою нормою.*

У дисертації ми доводимо також критерій, який вказує на певну локальну правильність (регулярність) в поводженні цілої вектор-функції, що цілком відповідає подібній властивості аналітичних функцій обмеженого індексу в усіх розглянутих до наших публікацій випадках – поняття обмеженості індексу, виявляється еквівалентним до цієї правильності для деякої часткової її "похідної".

Теорема 2.2. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^2)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, щоб для кожного* $R\in\mathbb{R}^2_+$, $|R|\le\beta$ *знайшлися* $n_0\in\mathbb{Z}_+$, $p\ge 1$ *такі, що для всіх* $(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$ *існує пара* $(k_0,m_0)\in\mathbb{Z}^2_+$, $k_0+m_0\le n_0$ *та*

$$\max\{\|F^{(k_0,m_0)}(z,\omega)\|:(z,\omega)\in\mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)]\}\le$$
$$\le p\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\| \tag{1.6}$$

і досить, щоб для кожного $R\in\mathbb{R}^2_+$, $|R|\le\beta$ *знайшлися* $n_0\in\mathbb{Z}_+$, $p\ge 1$ $\forall(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$ $\exists k_1^0=(k_1^0,0)$, $\exists m_2^0=(0,m_2^0)$: $k_1^0\le n_0$, $m_2^0\le n_0$, *та*

$$\max\{\|F^{(k_1^0,0)}(z,\omega)\|:(z,\omega)\in\mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)]\}\le$$
$$\le p\|F^{(k_1^0,0)}(z_0,\omega_0)\| \tag{1.7}$$
$$\max\{\|F^{(0,m_2^0)}(z,\omega)\|:(z,\omega)\in\mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)]\}\le$$
$$\le p\|F^{(0,m_2^0)}(z_0,\omega_0)\| \tag{1.8}$$

Локальне поводження максимуму модуля аналітичної в кулі вектор-функції.

Для аналітичної в кулі $\mathbb{B}^2$ вектор-функції F покладемо

$$M(R,(z_0,\omega_0),F)=\max\left\{\|F(z,\omega)\|:(z,\omega)\in\mathbb{D}^2((z_0,\omega_0),R)\right\},$$

де $(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$, $R\in\mathbb{R}^2_+$. Тоді

$$M(R,(z_0,\omega_0),F)=\max\left\{\|F(z,\omega)\|:(z,\omega)\in\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R)\right\},$$

бо максимум модуля для аналітичної вектор-функції в замкненому полікрузі $\mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0),R]$ досягається на його кістяку $\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R)$, позаяк кістяк є межею Шилова для полікруга у випадку аналітичних на полікрузі функцій зі значеннями в комплексній площині.

Ми доводимо аналоги теореми Фріке для аналітичних в кулі $\mathbb{B}^2$ вектор-функцій $F\colon\mathbb{B}^2\to\mathbb{C}^2$. Вони дають необхідні і достатні умови для обмеженості L-індексу в термінах певного локально правильного (регулярного) поводження максимуму модуля на полікрузі.

Теорема 2.6. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^2)$, $F:\mathbb{B}^2\to\mathbb{C}^2$ *— аналітична вектор-функція. Якщо існують* $R',R''\in\mathbb{R}^2_+$, $R'<R$",$|R<\beta$ *та* $p_1=p_1(R',R'')\geq 1$ *такі, що для кожних* $(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right)\leq p_1M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right)\qquad(1.9)$$

то F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Теорема 2.7. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^2)$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то для будь-який* R',R" $\in\mathbb{R}^2_+$, $R'<R''$, $|R''|\leq\beta$ *знайдеться номер* $p_1=p_1(R',R'')\geq 1$ *такий, що для кожного* $(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$ *правильна нерівність* (1.9)

Аналог теореми Хеймана для аналітичної в кулі вектор-функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних.

Наведені вище теореми критеріального характеру, застосовуєму до доведення аналогу теореми Хеймана для вектор-функцій $F\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$. Теорема показує, що в означенні обмеженого $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних можна замінити оцінку усіх часткових похідних оцінкою похідної $(p+1)$ порядку. Ці критерії зручні для дослідження аналітичних розв'язків систем диференціальних рівнянь в частинних похідних на обмеженість їх $\mathbf{L}$ -індексу. Теорема дозволяє оцінити часткові похідні вищих порядків через часткові похідні нижчих порядків.

Теорема 2.8. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *Аналітична вектор-функція* $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли знайдуться* $p \in \mathbb{Z}_+$, *та* $c \in \mathbb{R}_+$, *такі, що для всіх* $(z, \omega) \in \mathbb{B}^2$

$$\max\left\{\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{l_1^i(z,\omega) l_2^j(z,\omega)} : i+j=p+1\right\} \le$$

$$\le c\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z,\omega) l_2^m(z,\omega)} : k+m \le p\right\}. \tag{1.10}$$

Властивості степеневого розвинення аналітичних в одиничній кулі вектор-функцій.

Нехай $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$. Запишемо аналітичну вектор-функцію $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ у вигляді степеневого векторнозначного ряду

$$F(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z-z_0, w-w_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} B_{ij}(z-z_0)^i (w-w_0)^j, \tag{1.11}$$

де P_k – однорідні вектор-поліноми степеня k, тобто, двовимірні вектор-функції, компоненти яких є однорідними поліномами степеня k.

Поліном (вектор-поліном) P_{k_0}, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, за аналогією з одновимірним випадком (див. також [26, 48, 49]) називаємо *головним поліномом* ряду (1.11) на кістяку $\mathbb{T}^2((z_0, w_0), R)$, якщо для кожного $(z, w) \in \mathbb{T}^2((z_0, w_0), R)$ виконується нерівність

$$\|\sum_{k\neq k_0} P_k(z-z_0, w-w_0)\| \leq \frac{1}{2}\max\left\{\|B_{i,j}\|r_1^i r_2^j : i+j=k_0\right\}.$$

Теорема 2.14. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* L*-індекс за сукупністю змінних, то існує* $p \in \mathbb{Z}_+$ *таке , що для всіх* $d \in \left(0; \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right]$ *знайдеться* $\eta(d) \in (0; d)$ *таке, що для кожного* $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ *та деяких* $r = r(d, (z_0, \omega_0)) \in \big(\eta(d), d\big)$ *і* $\nu_0 = \nu_0(d, (z_0, \omega_0)) \leq p$ *многочлен* P_{ν_0} *є головним у ряді* (1.11) *на* $\mathbb{T}^2\left((z_0, \omega_0), \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$.

Теорема 2.15. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *Якщо існують* $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \in (0; 1]$, $\eta \in (0; d)$ *такі, що для кожного* $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$, *деякого* $R = (r_1, r_2)$ *з* $r_j = r_j(d, (z_0, \omega_0)) \in (\eta, d)$, $j \in \{1, 2\}$ *та деякого* $\nu_0 = \nu_0(d, (z_0, \omega_0)) \leq p$ *на кістяку* $\mathbb{T}^2\left((z_0, \omega_0), \frac{R}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$ *поліном* P_{ν_0} *є головним поліномом ряду* (2.39), *то аналітична вектор-функція* $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *має обмежений* L*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення теорем 2.14 і 2.15 ідейно є подібними на доведення відповідних тверджень у статтях [26, 48, 49].

Крім наведених вище результатів, ми також доводимо аналоги теорем 2.1 і 2.2 (тобто, теореми Фріке також) для цілих вектор-функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНІ ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ В ОДИНИЧНІЙ ДВОВИМІРНІЙ КУЛІ.

2.1 Основні позначення і означення

Позначимо $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty)$, $\mathbf{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{1} = (1,1) \in \mathbb{R}^2_+$, $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $|(z,\omega)| = \sqrt{|z|^2 + |\omega|^2}$. Для $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, використовуємо формальні позначення без порушення умов існування відповідних виразів: $AB = (a_1b_1, a_2b_2)$, $A/B = (a_1/b_1, a_2/b_2)$, $A^B = (a_1^{b_1}, a_2^{b_2})$, а запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$, $j \in \{1,2\}$; подібним чином означається відношення $A \leq B$. Для $K = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2_+$ позначимо $K! = k_1! \cdot k_2!$. Додавання, скалярне множення та спряження визначені в $\mathbb{C}^2$ покомпонентно.

Для $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$ визначимо $\langle a, b\rangle = a_1\overline{b}_1 + a_2\overline{b}_2$, де $\overline{b}_1, \overline{b}_2$—комплексно спряжені числа до b_1, b_2.

Полікруг $\{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 : |z - z_0| < r_1, |\omega - \omega_0| < r_2\}$ позначимо через $\mathbb{D}^2((z_0,\omega_0), R)$, його кістяк $\{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 : |z - z_0| = r_1, |\omega - \omega_0| = r_2\}$ —- через $\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0), R)$, замкнений полікруг $\{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 : |z - z_0| \leq r_1, |\omega - \omega_0| \leq r_2\}$ — через $\mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0), R]$, $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D}^2(\mathbf{0}; \mathbf{1})$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Відкрита куля $\{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 : \sqrt{|z - z_0|^2 + |\omega - \omega_0|^2} < r\}$ позначається через $\mathbb{B}^2((z_0,\omega_0), r)$, її топологічна межа — це сфера $\mathbb{S}^2((z_0,\omega_0), R) = \{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 : \sqrt{|z - z_0|^2 + |\omega - \omega_0|^2} = r\}$, замкнена куля $\{z \in \mathbb{C}^2 : \sqrt{|z - z_0|^2 + |\omega_0 - \omega_0|^2} \leq r\}$ — через $\mathbb{B}^2[(z_0,\omega_0), R]$, $\mathbb{B}^2 = \mathbb{B}^2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\mathbb{D} = \mathbb{B}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Нехай $F(z,\omega) = (f_1(z,\omega), f_2(z,\omega))$ — аналітична в $\mathbb{B}^2$ векторфункція від двох змінних. Тоді в околі кожної точці $(a,b) \in \mathbb{B}^2$ функція $F(z,\omega)$ допускає двовимірне розвинення у ряд Тейлора:

$$F(z,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(z-a)^k(\omega-b)^m,$$

де

$$C_{km} = \frac{1}{k!m!}\left(\frac{\partial^{k+m} f_1(z,\omega)}{\partial\omega^k \partial z^m}, \frac{\partial^{k+m} f_2(z,\omega)}{\partial\omega^k \partial z^m}\right)\Bigg|_{z=a,\omega=b} = \frac{1}{k!m!}F^{(k,m)}(a,b).$$

Нехай $\mathbf{L}(z,\omega) = (l_1(z,\omega), l_2(z,\omega))$, де $l_j(z,\omega) : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^2_+$ — додатна неперервна функція така, що:

$$\forall (z,\omega) \in \mathbb{B}^2 : \quad l_j(z,\omega) > \frac{\beta}{1 - \sqrt{|z|^2 + |\omega|^2}}, \tag{2.1}$$

$j \in \{1,2\}$, де $\beta > \sqrt{2}$ — деяка стала.

Твердження 2.1. *При* $R \in \mathbb{R}^2_+$, $|R| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} < \beta$, $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ *та* $(z,\omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)]$ *маємо, що* $(z,\omega) \in \mathbb{B}^2$.

Справді,

$$\begin{gathered} |(z,\omega)| \le |(z,\omega) - (z_0,\omega_0)| + |(z_0,\omega_0)| \le \\ \le \sqrt{\frac{r_1^2}{l_1^2(z_0,\omega_0)} + \frac{r_2^2}{l_2^2(z_0,\omega_0)}} + |(z_0,\omega_0)| < \\ < \frac{1 - |(z_0,\omega_0)|}{\beta}\sqrt{r_1^2 + r_2^2} + |(z_0,\omega_0)| \le \\ \le \frac{1 - |(z_0,\omega_0)|}{\beta}\beta + |(z_0,\omega_0)| = 1. \end{gathered}$$

Норму для вектор-функції $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ введемо як sup-норму:

$$\|F(z,\omega)\| = \max\{|f_j(z,\omega)|\colon 1 \le j \le 2,\ F = (f_1, f_2)\}.$$

Надалі вважатимемо, що $\forall i,j \in \mathbb{Z}_+$:

$$F^{(i,j)}(z,\omega) ;= \frac{\partial^{i+j} F(z,\omega)}{\partial\omega^i \partial z^j} = \left(\frac{\partial^{i+j} f_1(z,\omega)}{\partial\omega^i \partial z^j}, \frac{\partial^{i+j} f_2(z,\omega)}{\partial\omega^i \partial z^j}\right)^T.$$

Аналітична вектор-функція $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ називається функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу (за сукупністю змінних), якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$

таке, що

$$\forall (z,\omega)\in\mathbb{B}^2 \ \ \forall (i,j)\in\mathbb{Z}^2_+ : \quad \frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!l_1^i(z,\omega)l_2^j(z,\omega)}\le$$

$$\le \max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k,m\in\mathbb{Z}_+, k+m\le n_0\right\}. \qquad (2.2)$$

Найменше ціле таке число n_0 називається $\mathbf{L}$-індексом за сукупністю змінних вектор-функції F та позначається нами через $N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^2)$.

Приклад 2.1. Функція

$$f(z,\omega)=\exp\left\{\frac{1}{(1/\sqrt{2}-z)(1/\sqrt{2}-\omega)}\right\}$$

має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних

$$N(F,\mathbf{L},\mathbb{D}^2((0,0),R))=0$$

в бікрузі $\mathbb{D}^2((0,0),R))$ з $R=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ і

$$\mathbf{L}(z,\omega)=\left(\frac{1}{(1/\sqrt{2}-|z|)^2(1/\sqrt{2}-|\omega|)},\frac{1}{(1/\sqrt{2}-|z|)(1/\sqrt{2}-|\omega|)^2}\right).$$

Але $|R|=1$, тому вектор-функція $F(z,\omega)=(f(z,\omega),1)$ має такий самий обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних $N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^2)=0$ у відкритій кулі $\mathbb{B}^2$.

Через $Q(\mathbb{B}^2)$ позначимо клас функцій $\mathbf{L}:\mathbb{B}^2\to\mathbb{R}^2_+$, які задовольняють нерівність (2.1) та для довільних $j\in\{1,2\}$ та деякого $R=(r_1,r_2), |R|\le\beta$:

$$\forall R\in\mathbb{R}^2_+, |R|\le\beta, j\in\{1,2\}:$$

$$0<\lambda_{1,j}(R)\le\lambda_{2,j}(R)<\infty$$

де

$$\lambda_{1,j}(R,S):=$$

$$= \inf_{(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2} \inf \left\{ \frac{l_j(z,\omega)}{l_j(z_0,\omega_0)} : (z,\omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)] \right\}, \quad (2.3)$$

$$\lambda_{2,j}(R,S) :=$$

$$= \sup_{(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2} \sup \left\{ \frac{l_j(z,\omega)}{l_j(z_0,\omega_0)} : (z,\omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)] \right\}. \quad (2.4)$$

Зауваження 2.1. Зауважимо, що

$$\lambda_{1,j}(R) \le 1 \le \lambda_{2,j}(R) \quad (l \in \{1,\ 2\}).$$

2.2 Локальне поводження похідних аналітичних вектор-функцій від двох змінних в одиничній кулі.

Наступна теорема є базовою в теорії функцій обмеженого індексу. Наше доведення аналогічне до доведення відповідної теореми [26] для аналітичних функцій з $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{C}$. Для функцій з інших класів це доведено в $[20, 22, 35, 46, 56, 63, 66]$.

Теорема 2.1. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *Аналітична вектор-функція* $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс тоді й тільки тоді, якщо для кожного* $R \in \mathbb{R}^2$, $|R| \le \beta$ *знайдуться* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p > 0$ *такі, що для всіх* $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ *існує пара* $(k_0, m_0) \in \mathbb{Z}_+^2$, $k_0 + m_0 \le n_0$, *для якої виконується нерівність*

$$\max\left\{ \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : \right.$$

$$\left. k + m \le n_0, (z,\omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)] \right\} \le$$

$$\le p_0 \frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{k_0!m_0!l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}. \qquad (2.5)$$

Доведення. Нехай F—аналітична вектор-функція від двох змінних має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, тобто,

$$N = N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^2) < \infty.$$

Для кожного $R \in \mathbb{R}_+^2$, $|R| < \beta$ означимо

$$q = q(R) := \left[2(N+1)(r_1 + r_2)\prod_{j=1}^{2}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N+1}\right] + 1,$$

де через $[x]$ позначаємо цілу частину дійсного числа x.

Для $p \in \{0, ..., q\}$ та $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ позначимо:

$$S_p((z_0,\omega_0), R) = \max\left\{ \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k + m \le N, \right.$$

$$(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]\Bigg\},$$

$$S_p^*((z_0,\omega_0),R)=\max\Bigg\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)}:k+m\le N,$$

$$(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]\Bigg\}.$$

Запишемо

$$S_p((z_0,\omega_0),R)=\max\Bigg\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\le N,$$

$$(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]\Bigg\}=$$

$$=\max\Bigg\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)}\cdot\frac{l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)}{l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\le N,$$

$$(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big].\Bigg\}$$

Звідси, за означенням $\lambda_{1,j}(R)$ (2.3) з огляду на включення $\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]\subset\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\frac{R}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]$ послідовно отримаємо

$$S_p((z_0,\omega_0),R)\le S_p^*((z_0,\omega_0),R)\max\Bigg\{\frac{l_1^k(z_0,\omega_0),l_2^m(z_0,\omega_0)}{l_1^k(z,\omega),l_2^m(z,\omega)}:$$

$$k+m\le N,(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]\Bigg\}\le$$

$$\le S_p^*((z_0,\omega_0),R)\max\Big\{(\lambda_{1,1}(R))^{-k}(\lambda_{1,2}(R))^{-m}:k+m\le N\Big\}\le$$

$$\le S_p^*((z_0,\omega_0),R)(\lambda_{1,1}(R))^{-N}(\lambda_{1,2}(R))^{-N}\le$$

$$\le S_p^*((z_0,\omega_0),R)\prod_{j=1}^{2}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}. \tag{2.6}$$

Подібно, за означенням $\lambda_{2,j}(R)$ (2.4) послідовно виводимо

$$S_p^*((z_0,\omega_0),R)=\max\Bigg\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}\cdot\frac{l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}{l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)}:$$

$$k+m \leq N, (z,\omega) \in \mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), \frac{(pr_1,pr_2)}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]\Big\} \leq$$

$$\leq \max\Big\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}(\lambda_{2,1}(R))^k(\lambda_{2,2}(R))^m : k+m \leq N,$$

$$(z,\omega) \in \mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), \frac{(pr_1,pr_2)}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]\Big\} \leq$$

$$\leq S_p((z_0,\omega_0),R)(\lambda_{2,1}(R))^N(\lambda_{2,2}(R))^N \leq$$

$$\leq S_p((z_0,\omega_0),R)\prod_{j=1}^{2}(\lambda_{1,j}(R))^N. \tag{2.7}$$

Виберемо $(k_p,m_p) \in \mathbb{Z}_+^2$, $k_p+m_p \leq N$ та $(z_p,\omega_p) \in \mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), \frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]$ так, щоб

$$S_p^*((z_0,\omega_0),R) = \frac{\|F^{(k_p,m_p)}(z_p,\omega_p)\|}{k_p!m_p!l_1^{k_p}(z_0,\omega_0)l_2^{m_p}(z_0,\omega_0)}. \tag{2.8}$$

За принципом максимуму модуля для аналітичних вектор-функцій, максимум норми досягається на кістяку бікруга, тобто,

$$(z_p,\omega_p) \in \mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0), \frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right),$$

Тому, зокрема, $(z_p,\omega_p) \neq (z_0,\omega_0)$. Нехай

$$\widetilde{z}_p = z_0 + \frac{p-1}{p}(z_p - z_0),$$

$$\widetilde{\omega}_p = \omega_0 + \frac{p-1}{p}(\omega_p - \omega_0).$$

Тоді нескладні викладки дають, що

$$|\widetilde{z}_p - z_0| = \frac{p-1}{p}|z_p - z_0| = \frac{p-1}{p}\frac{pr_1}{ql_1(z_0,\omega_0)}, \tag{2.9}$$

$$|\widetilde{z}_p - z_p| = |z_0 + \frac{p-1}{p}(z_p - z_0) - z_p| =$$

$$= \frac{1}{p}|z_0 - z_p| = \frac{r_1}{ql_1(z_0,\omega_0)}; \tag{2.10}$$

$$|\widetilde{\omega}_p-\omega_0|=\frac{p-1}{p}|\omega_p-\omega_0|=\frac{p-1}{p}\frac{pr_2}{ql_2(z_0,\omega_0)}, \tag{2.11}$$

$$|\widetilde{\omega}_p-\omega_p|=|\omega_0+\frac{p-1}{p}(\omega_p-\omega_0)-\omega_p|=$$

$$=\frac{1}{p}|\omega_0-\omega_p|=\frac{r_2}{ql_2(z_0,\omega_0)}. \tag{2.12}$$

Тобто, отримуємо, що

$$(\widetilde{z}_p,\widetilde{\omega}_p)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\frac{(p-1)R}{q(R)\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big],$$

а також

$$S^*_{p-1}((z_0,\omega_0),R)\geq\frac{\|F^{(k_p,m_p)}(\widetilde{z}_p,\widetilde{\omega}_p)\|}{k_p!m_p!l_1^{k_p}(z_0,\omega_0)l_2^{m_p}(z_0,\omega_0)}.$$

Звідси, застосовуючи рівність (2.8), отримуємо, що

$$0\leq S^*_p((z_0,\omega_0),R)-S^*_{p-1}((z_0,\omega_0),R)\leq$$

$$\leq\frac{\|F^{(k_p,m_p)}(z_p,\omega_p)\|-\|F^{(k_p,m_p)}(\widetilde{z}_p,\widetilde{\omega}_p)\|}{k_p!m_p!l_1^{k_p}(z_0,\omega_0)l_2^{m_p}(z_0,\omega_0)}=\frac{1}{k_p!m_p!l_1^{k_p}(z_0,\omega_0)l_2^{m_p}(z_0,\omega_0)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{d}{dt}\|F^{(k_p,m_p)}(\widetilde{z}_p+t(z_p-\widetilde{z}_p),\widetilde{\omega}_p+t(\omega_p-\widetilde{\omega}_p))\|dt.$$

Але,

$$\int\limits_0^1\frac{d}{dt}\|F^{(k_p,m_p)}(\widetilde{z}_p+t(z_p-\widetilde{z}_p),\widetilde{\omega}_p+t(\omega_p-\widetilde{\omega}_p))\|dt\leq$$

$$\leq\int\limits_0^1\Big(|z^{(p)}-\widetilde{z}_p|\|F^{(k_p+1,m_p)}(\widetilde{z}_p+t(z_p-\widetilde{z}_p),\widetilde{\omega}_p+t(\omega_p-\widetilde{\omega}_p))\|+$$

$$+|\omega^{(p)}-\widetilde{\omega}_p|\|F^{(k_p,m_p+1)}(\widetilde{z}_p+t(z_p-\widetilde{z}_p),\widetilde{\omega}_p+t(\omega_p-\widetilde{\omega}_p))\|\Big)dt.$$

Тому,

$$0\leq S^*_p((z_0,\omega_0),R)-S^*_{p-1}((z_0,\omega_0),R)\leq$$

$$\leq \frac{1}{k_p!m_p!l_1^{k_p}(z_0,\omega_0)l_2^{m_p}(z_0,\omega_0)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1\Bigg(|z^{(p)}-\widetilde{z}_p|\|F^{(k_p+1,m_p)}(\widetilde{z}_p+t(z_p-\widetilde{z}_p),\widetilde{\omega}_p+t(\omega_p-\widetilde{\omega}_p))\|+$$

$$+|\omega^{(p)}-\widetilde{\omega}_p|\|F^{(k_p,m_p+1)}(\widetilde{z}_p+t(z_p-\widetilde{z}_p),\widetilde{\omega}_p+t(\omega_p-\widetilde{\omega}_p))\|\Bigg)dt, \quad (2.13)$$

де $0\leq t^*\leq 1$, $(\widetilde{z}_p+t^*(z_p-\widetilde{z}_p),\widetilde{\omega}_p+t^*(\omega_p-\widetilde{\omega}_p))\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big]$. Використовуючи тепер означення $\lambda_{2,1}(R)$, $\lambda_{2,1}(R)$ і те, що $\lambda_{1,j}(R)\leq 1\leq\lambda_{2,j}(R)$ $(j\in\{1,\ 2\})$, для $(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big((z_0,\omega_0),\frac{pR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\Big)$ та $(j_1,j_2)\in\mathbb{Z}_+^2$: $j_1+j_2\leq N+1$ послідовно отримаємо

$$\frac{\|F^{(j_1,j_2)}(z,\omega)\|}{j_1!j_2!l_1^{j_1}(z_0,\omega_0)l_2^{j_2}(z_0,\omega_0)}=$$

$$=\frac{\|F^{(j_1,j_2)}(z,\omega)\|}{j_1!j_2!l_1^{j_1}(z_0,\omega_0)l_2^{j_2}(z_0,\omega_0)}\cdot\frac{l_1^{j_1}(z,\omega)l_2^{j_2}(z,\omega)}{l_1^{j_1}(z,\omega)l_2^{j_2}(z,\omega)}\leq$$

$$\leq\frac{\|F^{(j_1,j_2)}(z,\omega)\|}{j_1!j_2!l_1^{j_1}(z,\omega)l_2^{j_2}(z,\omega)}\times$$

$$\times\max\left\{\frac{l_1^{j_1}(z,\omega)}{l_1^{j_1}(z_0,\omega_0)}\cdot\frac{l_2^{j_2}(z,\omega)}{l_2^{j_2}(z_0,\omega_0)}:j_1+j_2\leq N+1\right\}\leq$$

$$\leq\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\leq N\right\}\times$$

$$\times\big(\lambda_{2,1}\big(\frac{pR}{q}\big)\big)^{N+1}\cdot\big(\lambda_{2,2}\big(\frac{pR}{q}\big)\big)^{N+1}.$$

Оскільки за монотонністю $\lambda_{2,j}\big(\frac{pR}{q}\big)\leq\lambda_{2,j}(R)$, то

$$\frac{\|F^{(j_1,j_2)}(z,\omega)\|}{j_1!j_2!l_1^{j_1}(z_0,\omega_0)l_2^{j_2}(z_0,\omega_0)}\leq$$

$$\leq(\lambda_{2,1}(R),\lambda_{2,2}(R))^{N+1}\cdot\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\leq N\right\}=$$

$$=(\lambda_{2,1}(R)\lambda_{2,2}(R))^{N+1}\cdot S_p((z_0,\omega_0),R).$$

Звідси, за нерівністю (2.6)

$$\frac{\|F^{(j_1,j_2)}(z,\omega)\|}{j_1!j_2!l_1^{j_1}(z_0,\omega_0)l_2^{j_2}(z_0,\omega_0)} \leq$$
$$\leq (\lambda_{2,1}(R)\lambda_{2,2}(R))^{N+1} \cdot S_p^*((z_0,\omega_0),R) \cdot (\lambda_{1,1}(R),\lambda_{1,2}(R))^{-N}.$$

Тепер зі співвідношень (2.13), (2.10) та (2.12) маємо

$$0 \leq S_p^*((z_0,\omega_0),R) - S_{p-1}^*((z_0,\omega_0),R) \leq$$
$$\leq \prod_{j=1}^{2}(\lambda_{2,j}(R))^{N+1}\lambda_{1,j}(R))^{-N}S_p^*((z_0,\omega_0),R)\times$$
$$\times\Bigg((k^{(p)}+1)(l_1(z_0,\omega_0))|z_j^{(p)} - \widetilde{z}_j^{(p)}|+$$
$$+(m^{(p)}+1)(l_2(z_0,\omega_0))|\omega_j^{(p)} - \widetilde{\omega}_j^{(p)}|\Bigg) =$$
$$= \prod_{j=1}^{2}(\lambda_{2,j}(R))^{N+1}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}\frac{S_p^*((z_0,\omega_0),R)}{q(R)}\times$$
$$\times\Big((k_p+1)r_1 + (m_p+1)r_2\Big) \leq$$
$$\leq \prod_{j=1}^{2}(\lambda_{2,j}(R))^{N+1}\lambda_{1,j}(R))^{-N}\frac{S_p^*((z_0,\omega_0),R)}{q(R)}(N+1)(r_1+r_2),$$

звідки за вибором $q(R)$, отримуємо, що

$$0 \leq S_p^*((z_0,\omega_0),R) - S_{p-1}^*((z_0,\omega_0),R) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}S_p^*((z_0,\omega_0),R).$$

Звідси

$$S_p^*((z_0,\omega_0),R) \leq 2S_{p-1}^*((z_0,\omega_0),R),$$

що разом з нерівностями (2.6) і (2.7) дає

$$S_p((z_0,\omega_0),R) \leq 2\prod_{j=1}^{2}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}S_{p-1}^*((z_0,\omega_0),R) \leq$$

$$\leq 2\prod_{j=1}^{2}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N}S_{p-1}((z_0,\omega_0),R).$$

Отже, застосовуючи цю нерівність q разів, послідовно отримуємо

$$\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\leq N,\right.$$
$$\left.(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\left[(z_0,\omega_0),\frac{R}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right]\right\}=$$
$$=\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\leq N,\right.$$
$$\left.(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\left[(z_0,\omega_0),\frac{qR}{q\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right]\right\}=S_q((z_0,\omega_0),R)\leq$$
$$\leq 2\prod_{j=1}^{2}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N}S_{q-1}((z_0,\omega_0),R)\leq\ldots$$
$$\ldots\leq 2\prod_{j=1}^{2}((\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N})^{q}S_0((z_0,\omega_0),R)=$$
$$=2\prod_{j=1}^{2}((\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N})^{q}\times$$
$$\times\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z_0,\omega_0)\|}{k!m!l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)}:k+m\leq N\right\}. \qquad (2.14)$$

З (2.14) тепер остаточно одержуємо нерівність (2.5) при

$$p_0=2\prod_{j=1}^{2}((\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N})^{q}$$

та деяких k_0, m_0, таких що $k_0+m_0\leq N$. Необхідність умови (2.5) доведено.

Доведемо достатність умови (2.5). Припустимо, для для кожного $R\in\mathbb{R}^2_+$, $|R|\leq\beta$, існують $n_0\in\mathbb{Z}_+$, $p_0>1$, такі, що для всіх $(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2_+$ та деяких $(k_0,m_0)\in\mathbb{Z}^2_+$, $(k_0+m_0\leq n_0)$, виконується

нерівність (2.5).
Запишемо інтегральну формулу Коші у наступному вигляді

$$(\forall (z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2)(\forall (k,m)\in\mathbb{Z}^2_+)(\forall (s,y)\in\mathbb{Z}^2_+)\colon \frac{F^{(k+s,m+y)}(z_0,\omega_0)}{s!y!}=$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0),\frac{R}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)}\frac{F^{(k,m)}(z,\omega)}{(z-z_0)^{s+1}(\omega-\omega_0)^{y+1}}dzd\omega.$$

Застосовуючи нерівність (2.5), а також означення $\lambda_{2,j}(R)$, отримаємо

$$\frac{\|F^{(k+s,m+y)}(z_0,\omega_0)\|}{s!y!}\leq$$
$$\leq\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0),\frac{R}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)}\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{|z-z_0|^{s+1}|\omega-\omega_0|^{y+1}}|dz\|d\omega|\leq$$
$$\leq\int_{\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),\frac{R}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)})}\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|\frac{l_1^{s+1}(z_0,\omega_0)l_2^{y+1}(z_0,\omega_0)}{(2\pi)^2r_1^{s+1}r_2^{y+1}}|dz\|d\omega|\leq$$
$$\leq\int_{\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),\frac{R}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)})}\|F^{(k,m)}(z_0,\omega_0)\|\frac{k!m!p_0(\lambda_{2,1}^k(R),\lambda_{2,2}^m(R))}{(2\pi)^2k_0!m_0!r_1^{s+1}r_2^{y+1}}\times$$
$$\times\frac{l_1^{s+k+1}(z_0,\omega_0)l_2^{y+m+1}(z_0,\omega_0)}{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}|dz\|d\omega|=$$
$$=\|F^{(k,m)}(z_0,\omega_0)\|\frac{k!m!p_0(\lambda_{2,1}^k(R),\lambda_{2,2}^m(R))l_1^{s+k}(z_0,\omega_0)l_2^{y+m}(z_0,\omega_0)}{k_0!m_0!r^sr^yl_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}=$$
$$=\|F^{(k,m)}(z_0,\omega_0)\|\frac{k!m!p_0\prod_{j=1}^2\lambda_{2,j}^{n_0}(R)l_1^{s+k}(z_0,\omega_0)l_2^{y+m}(z_0,\omega_0)}{k_0!m_0!r^sr^yl_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}.$$

Звідси випливає,що

$$\frac{\|F^{(k+s,m+y)}(z_0,\omega_0)\|}{(k+s)!(m+y)!l_1^{k+s}(z_0,\omega_0)l_2^{m+y}(z_0,\omega_0)}\leq$$
$$\leq\frac{\prod_{j=1}^2\lambda_{2,j}^{n_0}(R)k!m!p_0\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{r_1^sr_2^y(k+s)!(m+y)!k_0!m_0!l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}.\qquad(2.15)$$

Зрозуміло, що

$$\frac{k!s!}{(k+s)!} = \frac{s!}{(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+s)} \leq 1,$$

$$\frac{m!y!}{(m+y)!} = \frac{y!}{(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+y)} \leq 1.$$

Виберемо $r_j \in (1, \beta/\sqrt{2}]$, $j \in \{1,2\}$. За вибором $|R| = \sqrt{{r_1}^2 + r_2^2} \leq \beta$, тому,

$$\frac{p_0(\lambda_{2,1}^k(R)\cdot\lambda_{2,2}^m(R))}{r_1^s r_2^y} \to 0 \quad (s+y\to\infty)$$

при $k+m \leq n_0$. Звідси випливає, що існує s_0 таке, що для всіх $(s,y)\in\mathbb{Z}_+^2$ при $s+y\geq s_0$ виконується нерівність

$$\frac{p_0 k!m!s!y![\lambda_{2,1}^k(R), \lambda_{2,2}^m(R)]}{(k+s)!(m+y)!r_1^s r_2^y} = \frac{p_0 k!m!s!y!\prod_{j=1}^2 \lambda_{2,j}^{n_0}(R)}{(k+s)!(m+y)!r_1^s r_2^y} \leq 1.$$

З нерівності (2.15) тепер отримуємо

$$\frac{\|F^{(k+s,m+y)}(z_0,\omega_0)\|}{(k+s)!(m+y)!l_1^{k+s}(z_0,\omega_0)l_2^{m+y}(z_0,\omega_0)} \leq \frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{k_0!m_0!l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}.$$

Зробивши заміну параметрів, твердження про останню нерівність можна переписати у такому вигляді

$$\forall (j_1,j_2)\in\mathbb{Z}_+^2:\ \frac{\|F^{(j_1,j_2)}(z_0,\omega_0)\|}{j_1!j_2!l_1^{j_1}(z_0,\omega_0)l_2^{j_2}(z_0,\omega_0)} \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z_0,\omega_0)\|}{k!m!l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)} : k+m\leq s_0+n_0\right\},$$

де s_0 та n_0 незалежні від (z_0,ω_0). Останнє означає, що аналітична в $\mathbb{B}^2$ вектор-функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних з $N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^2)\leq s_0+n_0$. $\square$

Наступний наслідок 2.1 вказує на те, що замість sup-норми

$$\|F(z,\omega)\| = \max_{1\leq j\leq 2}\{|f_j(z,\omega)|\}$$

можна розглядати евклідову норму

$$\|F(z,\omega)\|_E := \|F(z,\omega)\|_{\mathbb{C}^2} = \sqrt{|f_1(z,\omega)|^2 + |f_2(z,\omega)|^2}.$$

Властивість вектор-функції мати обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних зберігається і при заміні однієї норми на іншу.

З теореми 2.1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.1. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *Аналітична вектор-функція* $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних за* sup-*нормою тоді й тільки тоді, коли вона має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за евклідовою нормою.*

Доведення. Зрозуміло, що для будь-яких $(k,s) \in \mathbb{Z}_+^2$ та будь-яких $(z,\omega) \in \mathbb{B}^2$ справджується

$$\|F^{(k,s)}(z,\omega)\| \leq \|F^{(k,s)}(z,\omega)\|_E \leq \sqrt{2}\|F^{(k,s)}(z,\omega)\|.$$

Враховуючи наведену подвійну нерівність та повторивши доведення теореми 2.1 для евклідової норми, можна переконатися у рівносильності обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних за кожною з цих норм. $\square$

Надалі користуватимемося sup-нормою.

Доведемо наступне твердження, яке в класі вектор-функцій аналітичних в одиничній кулі є аналогом теореми, доведеної у статті [64] для цілих кривих від однієї комплексної змінної.

Твердження 2.2. *Нехай* $\mathbf{L}$*-додатна неперервна функція в* $\mathbb{B}^2$*, що задовольняє умову* (2.1) *і кожна з компонент* f_s*, аналітичної вектор-функції* $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$*, має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних. Тоді* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних за* sup-*нормою з* $N(F,\mathbf{L}) \leq \max\{N(l_s, f_s) : 1 \leq s \leq 2\}$*, а також* F *має обмежений* $\mathbf{L}_*$*-індекс за евклідовою нормою з* $\mathbf{L}_*(z,\omega) \geq \sqrt{2}\mathbf{L}(z,\omega)$ *і* $N(F,\mathbf{L}_*) \leq \max\{N(l_s, f_s) : 1 \leq s \leq 2\}$.

Доведення. Для довільних $i+j\geq N=\max\{N(\mathbf{L},f_s):1\leq s\leq 2\}$ маємо

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z,w)\|}{i!j!l_1^i(z,w)l_2^j(z,w)}=\frac{\max\{|f_1^{(i,j)}(z,w)|,|f_2^{(i,j)}(z,w)|\}}{i!j!l_1^i(z,w)l_2^j(z,w)}\leq$$

$$\leq\max\left\{\frac{\|f_s^{(k,m)}(z,w)\|}{k!m!l_1^k(z,w)l_2^m(z,w)}:k+m\leq N,1\leq s\leq 2\right\}\leq$$

$$\leq\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,w)\|}{k!m!l_1^k(z,w)l_2^m(z,w)}:k+m\leq N\right\},$$

тобто $N(F,\mathbf{L})\geq N=\max\{N(\mathbf{L},f_s):1\leq s\leq 2\}$.
Також

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z,w)\|_E}{i!j!l_1^i(z,w)l_2^j(z,w)}=\frac{\sqrt{\sum_{s=1}^2|f_s^{(i,j)}(z,w)|^2}}{i!j!l_1^i(z,w)l_2^j(z,w)}\leq$$

$$\leq\sqrt{\sum_{s=1}^2\left(max\left\{\frac{\|f_s^{(k,m)}(z,w)\|}{k!m!l_1^k(z,w)l_2^m(z,w)}:k+m\leq N\right\}\right)^2}\leq$$

$$\leq\sqrt{2}\max\left\{\frac{\|f_s^{(k,m)}(z,w)\|}{k!m!l_1^k(z,w)l_2^m(z,w)}:k+m\leq N,1\leq s\leq 2\right\}\leq$$

$$\leq\sqrt{2}\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,w)\|}{k!m!l_1^k(z,w)l_2^m(z,w)}:k+m\leq N\right\},$$

і тому для $i+j\geq N+1$

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z,w)\|_E}{i!j!l_1^i(z,w)l_2^j(z,w)}\leq\frac{1}{\sqrt{2}^{N+1}}\frac{\|F^{(i,j)}(z,w)\|}{i!j!l_1^i(z,w)l_2^j(z,w)}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{2}^N}\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,w)\|}{k!m!l_1^k(z,w)l_2^m(z,w)}:k+m\leq N\right\}\leq$$

$$\leq\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,w)\|}{k!m!l_1^k(z,w)l_2^m(z,w)}:k+m\leq N\right\},$$

тобто $N(F,\mathbf{L}_*)\leq\max\{N(l_s,f_s):1\leq s\leq 2\}$.
Твердження доведено. $\square$

Теорема 2.2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, щоб для кожного* $R \in \mathbb{R}^2_+$, $|R| \le \beta$ *знайшлися* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p \ge 1$ *такі, що для всіх* $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ *існує пара* $(k_0, m_0) \in \mathbb{Z}^2_+$, $k_0 + m_0 \le n_0$ *та*

$$\max\{\|F^{(k_0,m_0)}(z,\omega)\| : (z,\omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)]\} \le \\ \le p\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\| \qquad (2.16)$$

і досить, щоб для кожного $R \in \mathbb{R}^2_+$, $|R| \le \beta$ *знайшлися* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p \ge 1$ $\forall (z_0,\omega_0) \in \mathbb{B}^2$ $\exists k_1^0 = (k_1^0, 0)$, $\exists m_2^0 = (0, m_2^0)$: $k_1^0 \le n_0$, $m_2^0 \le n_0$, *та*

$$\max\{\|F^{(k_1^0,0)}(z,\omega)\| : (z,\omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)]\} \le \\ \le p\|F^{(k_1^0,0)}(z_0,\omega_0)\|, \qquad (2.17)$$

$$\max\{\|F^{(0,m_2^0)}(z,\omega)\| : (z,\omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)]\} \le \\ \le p\|F^{(0,m_2^0)}(z_0,\omega_0)\|. \qquad (2.18)$$

Доведення. У доведенні теореми 2.1 встановлено, що нерівність (2.5) правильна для деякої пари (k_0, m_0). Тобто, маємо:

$$\frac{p_0}{k_0!m_0!}\frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)} \ge \\ \ge \max\left\{\frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z,\omega)\|}{k_0!m_0!l_1^{k_0}(z,\omega)l_2^{m_0}(z,\omega)} : \\ (z,\omega) \in \mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)\Big]\right\} = \\ = \max\left\{\frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z,\omega)\|}{k_0!m_0!}\frac{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)l_1^{k_0}(z,\omega)l_2^{m_0}(z,\omega)} : \\ (z,\omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)]\right\} \ge \\ \ge \max\left\{\frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z,\omega)\|}{k_0!m_0!}\frac{\prod_{j=1}^2(\lambda_{2,j}(R))^{-n_0}}{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)} :\right.$$

$$(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)\Big]\Big\}.$$

При цьому ми також знову скористалися означенням $\lambda_{2,j}(R)$. З цієї нерівності випливає, що

$$\frac{p_0(\lambda_{2,1}(R))^{n_0}(\lambda_{2,2}(R))^{n_0}}{k_0!m_0!}\cdot\frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}\geq$$
$$\geq\max\Big\{\frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z,\omega)\|}{k_0!m_0!l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}:$$
$$(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)\Big]\Big\}. \tag{2.19}$$

Тоді з (2.19) отримуємо (2.16) при $p=p_0(\lambda_{2,1}(R))^{n_0}(\lambda_{2,2}(R))^{n_0}$. Звідси отримуємо необхідність умови (2.16).

Доведемо достатність умов (2.17) та (2.18).

Припустимо, що для кожного $R\in\mathbb{R}^2_+$, $|R|\leq\beta$ знайдуться $n_0\in\mathbb{Z}_+$, $p\geq 1$ такі, що $\forall(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$ та деяких $k_1^0\in\mathbb{Z}^2_+$, $m_2^0\in\mathbb{Z}^2_+$ при $k_1^0\leq n_0$, $m_2^0\leq n_0$ виконуються нерівності (2.17) і (2.18).

Двічі запишемо $(\forall(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2)$ $(\forall(s,y)\in\mathbb{Z}^2_+)$ інтегральну формулу Коші:

$$\frac{F^{(k_1^0+s,y)}(z_0,\omega_0)}{s!y!}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0))}\frac{F^{(k_1^0,0)}(z,\omega)dzd\omega}{(z-z_0)^{s+1}(\omega-\omega_0)^{y+1}},$$
$$\frac{F^{(s,m_2^0+y)}(z_0,\omega_0)}{s!y!}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0))}\frac{F^{(0,m_2^0)}(z,\omega)dzd\omega}{(z-z_0)^{s+1}(\omega-\omega_0)^{y+1}}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\frac{\|F^{(k_1^0+s,y)}(z_0,\omega_0)\|}{s!y!}\leq$$
$$\leq\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0))}\frac{\|F^{(k_1^0,0)}(z,\omega)\|}{|z-z_0|^{s+1}|\omega-\omega_0|^{y+1}}|dz||d\omega|\leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2}\max\left\{\|F^{(k_1^0,0)}(z,\omega)\| : (z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)\Big]\right\}\times$$

$$\times\frac{l_1^{s+1}(z_0,\omega_0)l_2^{y+1}(z_0,\omega_0)}{r_1^{s+1}r_2^{y+1}}\int\limits_{\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0))}|dz||d\omega| =$$

$$=\max\left\{\|F^{(k_1^0,0)}(z,\omega)\| : (z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)\Big]\right\}\times$$

$$\times\frac{l_1^{s}(z_0,\omega_0)l_2^{y}(z_0,\omega_0)}{r_1^{s}r_2^{y}},$$

а також

$$\frac{\|F^{(s,m_2^0+y)}(z_0,\omega_0)\|}{s!y!}\leq$$

$$\leq\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0))}\frac{\|F^{(0,m_2^0)}(z,\omega)\|}{|z-z_0|^{s+1}|\omega-\omega_0|^{y+1}}|dz||d\omega|\leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2}\max\left\{\|F^{(0,m_2^0)}(z,\omega)\| : (z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)\Big]\right\}\times$$

$$\times\frac{l_1^{s+1}(z_0,\omega_0)l_2^{y+1}(z_0,\omega_0)}{r_1^{s+1}r_2^{y+1}}\int\limits_{\mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0))}|dz||d\omega| =$$

$$=\max\left\{\|F^{(0,m_2^2)}(z,\omega)\| : (z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)\Big]\right\}\times$$

$$\times\frac{l_1^{s}(z_0,\omega_0)l_2^{y}(z_0,\omega_0)}{r_1^{s}r_2^{y}}.$$

Візьмемо $R=\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}},\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)$ та застосуємо нерівності (2.17) і (2.18) до двох попередніх нерівностей

$$\frac{\|F^{(k_1^0+s,y)}(z_0,\omega_0)\|}{s!y!}\leq\frac{l_1^{s}(z_0,\omega_0)l_2^{y}(z_0,\omega_0)}{(\beta/\sqrt{2})^{s+y}}\times$$

$$\times\max\left\{\|F^{(k_1^0,0)}(z,\omega)\| : (z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), R/L(z_0,\omega_0)\Big]\right\}\leq$$

$$\leq\frac{pl_1^{s}(z_0,\omega_0)l_2^{y}(z_0,\omega_0)}{(\beta/\sqrt{2})^{s+y}}\|F^{(k_1^0,0)}(z_0,\omega_0)\|, \qquad (2.20)$$

$$\frac{\|F^{(s,m_2^0+y)}(z_0,\omega_0)\|}{s!y!} \leq \frac{l_1^s(z_0,\omega_0)l_2^y(z_0,\omega_0)}{(\beta/\sqrt{2})^{s+y}}\times$$
$$\times \max\left\{\|F^{(0,m_2^0)}(z,\omega)\| : (z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)\Big]\right\} \leq$$
$$\leq \frac{pl_1^s(z_0,\omega_0)l_2^y(z_0,\omega_0)}{(\beta/\sqrt{2})^{s+y}}\|F^{(0,m_2^0)}(z_0,\omega_0)\|. \qquad (2.21)$$

Виберемо $s, y \in \mathbb{Z}_+^2$ такими, що $s+y\geq s_0$, де s_0 вибирається з умови

$$\frac{p}{(\beta/\sqrt{2})^{s_0}} \leq 1.$$

З нерівностей (2.20) і (2.21) при $k_1^0\leq n_0$, $m_2^0\leq n_0$ отримуємо

$$\frac{\|F^{(k_1^0+s,y)}(z_0,\omega_0)\|}{l_1^{k_1^0+s}(z_0,\omega_0)l_2^y(z_0,\omega_0)(k_1^0+s)!y!} \leq \frac{p}{(\beta/\sqrt{2})^{s+y}}\cdot\frac{s!y!k_1^0!}{(s+k_1^0)!y!}\times$$
$$\times\frac{\|F^{(k_1^0,0)}(z_0,\omega_0)\|}{l_1^{k_1^0}(z_0,\omega_0)k_1^0!} \leq \frac{\|F^{(k_1^0,0)}(z_0,\omega_0)\|}{l_1^{k_1^0}(z_0,\omega_0)k_1^0!},$$
$$\frac{\|F^{(s,m_2^0+y)}(z_0,\omega_0)\|}{l_1^s(z_0,\omega_0)l_2^{m_2^0+y}(z_0,\omega_0)s!(m_2^0+y)!} \leq \frac{p}{(\beta/\sqrt{2})^{s+y}}\cdot\frac{s!y!m_2^0!}{s!(m_2^0+y)!}\times$$
$$\times\frac{\|F^{(0,m_2^0)}(z_0,\omega_0)\|}{l_2^{m_2^0}(z_0,\omega_0)m_2^0!} \leq \frac{\|F^{(0,m_2^0)}(z_0,\omega_0)\|}{l_2^{m_2^0}(z_0,\omega_0)m_2^0!}.$$

Отже, вектор-функція F має обмежений $\mathbf{L}$ індекс

$$N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^2)\leq n_0+s_0.$$

Теорему доведено повністю. □

Теорема 2.3. *Нехай* $\mathbf{L}_1\in Q(\mathbb{B}^2)$, $\mathbf{L}_2\in Q(\mathbb{B}^2)$ *і для кожної точки* $(z,\omega)\in\mathbb{B}^2$ *виконується нерівність*

$$\mathbf{L}_1(z,\omega)\leq\mathbf{L}_2(z,\omega).$$

Якщо аналітична в $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}_1$*-індекс за сукупністю змінних, то* F *є вектор-функцією обмеженого* $\mathbf{L}_2$*-індексу за сукупністю змінних та*

$$N(F,\mathbf{L}_2,\mathbb{B}^2)\leq 2N(F,\mathbf{L}_1,\mathbb{B}^2).$$

Доведення. Нехай $N(F,\mathbf{L}_1,\mathbb{B}^2)=n_0$. За означенням обмеженого $\mathbf{L}_1$-індексу за сукупністю змінних аналітичної вектор-функції F маємо

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!\mathbf{L}_2^{i,j}(z,\omega)}=\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!l_{2,1}^{i}(z,\omega)l_{2,2}^{j}(z,\omega)}=$$

$$=\frac{l_{1,1}^{i}(z,\omega)l_{1,2}^{j}(z,\omega)}{l_{2,1}^{i}(z,\omega)l_{2,2}^{j}(z,\omega)}\cdot\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!l_{1,1}^{i}(z,\omega)l_{1,2}^{j}(z,\omega)}\leq$$

$$\leq\frac{l_{1,1}^{i}(z,\omega)l_{1,2}^{j}(z,\omega)}{l_{2,1}^{i}(z,\omega)l_{2,2}^{j}(z,\omega)}\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_{1,1}^{k}(z,\omega)l_{1,2}^{m}(z,\omega)}:\right.$$

$$\left.(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2,k+m\leq n_0\right\}\leq$$

$$\leq\frac{l_{1,1}^{i}(z,\omega)l_{1,2}^{j}(z,\omega)}{l_{2,1}^{i}(z,\omega)l_{2,2}^{j}(z,\omega)}\max\left\{\frac{l_{2,1}^{k}(z,\omega)l_{2,2}^{m}(z,\omega)}{l_{1,1}^{k}(z,\omega)l_{1,2}^{m}(z,\omega)}\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_{2,1}^{k}(z,\omega)l_{2,2}^{m}(z,\omega)}:\right.$$

$$\left.(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2,k+m\leq n_0\right\}\leq$$

$$\leq\max_{k+m\leq n_0}\left\{\left(\frac{l_{1,1}(z,\omega)}{l_{2,1}(z,\omega)}\right)^{i-k}\cdot\left(\frac{l_{1,2}(z,\omega)}{l_{2,2}(z,\omega)}\right)^{j-m}\right\}\times$$

$$\times\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_{2,1}^{k}(z,\omega)l_{2,2}^{m}(z,\omega)}:(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2,k+m\leq n_0\right\}.$$

За умовою $\mathbf{L}_1(z,\omega)\leq\mathbf{L}_2(z,\omega)$, тому для всіх $i+j\geq 2n_0$ маємо

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!l_{2,1}^{i}(z,\omega)l_{2,2}^{j}(z,\omega)}\leq$$

$$\leq\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_{2,1}^{k}(z,\omega)l_{2,2}^{m}(z,\omega)}:(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2,k+m\leq n_0\right\}.$$

Отже, вектор-функція F має обмежений $\mathbf{L}_2$-індекс за сукупністю змінних та

$$N(F,\mathbf{L}_2,\mathbb{B}^2)\leq 2N(F,\mathbf{L}_1,\mathbb{B}^2).$$

$\square$

Запис $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ означає, що існують $\theta_1 \in \mathbb{R}_+$, $\theta_2 \in \mathbb{R}_+$ такі, що $\forall z \in \mathbb{B}^2$ та $j \in \{1, 2\}$

$$\theta_1 \widetilde{l}_j(z) \le l_j(z) \le \theta_2 \widetilde{l}_j(z),$$

де $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), l_2(z))$, $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (\widetilde{l}_1(z), \widetilde{l}_2(z))$. Позначимо $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Теорема 2.4. *Нехай $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$, $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$, а стала $\beta = \beta(\Theta) > 1$ така, що нерівність (2.1) виконується як для $\mathbf{L}$, та і для $\widetilde{\mathbf{L}}$. Аналітична в $\mathbb{B}^2$ вектор-функція F має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних тоді й тільки тоді, якщо вона має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Спершу зауважимо, що елементарні викладки у випадку $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ дають, що $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2) \iff \widetilde{\mathbf{L}} \in Q(\mathbb{B}^2)$.

Нехай $N(F, \widetilde{\mathbf{L}}, \mathbb{B}^2) = \widetilde{n}_0 < +\infty$. Тоді за теоремою 2.1 для кожного $\widetilde{R} = (\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $|R| \le \beta$ знайдеться $\widetilde{p} \ge 1$ таке, що для всіх $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ та деякої пари (k_0, m_0) при $k_0+m_0 \le \widetilde{n}_0$ справджується нерівність (2.5) з $\widetilde{\mathbf{L}}$ та $\widetilde{R}$ замість $\mathbf{L}$ та R відповідно. Звідси

$$\frac{\widetilde{p}}{k_0!m_0!} \frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)} = \frac{\widetilde{p}}{k_0!m_0!} \frac{\theta_2^{k_0+m_0}}{\theta_2^{k_0+m_0}} \frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)} \ge$$

$$\ge \frac{\widetilde{p}}{k_0!m_0!} \frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{\theta_2^{k_0+m_0} \widetilde{l}_1^{k_0}(z_0,\omega_0) \widetilde{l}_2^{m_0}(z_0,\omega_0)} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\theta_2^{k_0+m_0}} \max\left\{ \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m! \widetilde{l}_1^{k_0}(z,\omega) \widetilde{l}_2^{m_0}(z,\omega)} : \right.$$

$$\left. k+m \le \widetilde{n}_0, (z,\omega) \in \mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), R/\mathbf{L}(z,\omega)\Big] \right\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\theta_2^{k_0+m_0}} \max\left\{ \theta_1^{k+m} \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m! l_1^{k}(z,\omega) l_2^{m}(z,\omega)} : \right.$$

$$\left. k+m \le \widetilde{n}_0, (z,\omega) \in \mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0), \theta_1 \widetilde{R}/\mathbf{L}(z,\omega)\Big] \right\} \ge$$

$$\ge \frac{\min\{1, \theta_1^{n_0}\}}{\max\{1, \theta_2^{n_0}\}} \max\left\{ \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m! l_1^{k}(z,\omega) l_2^{m}(z,\omega)} : \right.$$

$$k+m\le\widetilde{n}_0, (z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),\theta_1\widetilde{R}/\widetilde{\mathbf{L}}(z,\omega)\Big]\Big\}.$$

З огляду на теорему 2.1 отримуємо, що вектор-функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. $\square$

Теорема 2.5. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^2)$, $\beta>2$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді й тільки тоді, коли існують* $R\in\mathbb{R}^2_+$, $|R|\le\beta$, $n_0\in\mathbb{Z}^2_+$ *та* $p_0>0$ *такі, що для всіх* $(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$ *та для деякої пари* $(k_0,m_0)\in\mathbb{Z}^2_+$ *такої, що* $k_0+m_0\le n_0$, *виконується нерівність* (2.5).

Доведення. Необхідність випливає з необхідності у теоремі 2.1.

Доведемо достатність.

Нехай $\mathbf{L}^*(z,\omega)=\frac{R^0\mathbf{L}(z,\omega)}{R}$, тобто

$$\mathbf{L}^*=(l_1^*,l_2^*),\quad l_1^*(z,\omega)=\frac{r_1^0 l_1(z,\omega)}{r_1},\ l_2^*(z,\omega)=\frac{r_2^0 l_2(z,\omega)}{r_2},$$

$R^0=(r_1^0,r_2^0)=\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}},\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)$. У загальному випадку з того, що нерівність (2.5) для F і $\mathbf{L}$ виконується, при $R=(r_1,r_2)$ такому, що $|R|\le\beta$, $R_1\ne R^0$ отримуємо

$$\max\Big\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!(l_1^*(z,\omega))^k(l_2^*(z,\omega))^m}:k+m\le n_0,$$
$$(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}^*(z,\omega)\Big]\Big\}=$$
$$=\max\Big\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!(r_1^0 l_1(z,\omega)/r_1)^k(r_2^0 l_2(z,\omega)/r_2)^m}:$$
$$k+m\le n_0,(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),R/R_0\mathbf{L}(z,\omega)/R\Big]\Big\}\le$$
$$\le\max\Big\{\frac{2^{\frac{k+m}{2}}\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\le n_0,$$
$$(z,\omega)\in\mathbb{D}^2\Big[(z_0,\omega_0),R/\mathbf{L}(z_0,\omega_0)\Big]\Big\}\le$$
$$\le\frac{p_0}{k_0!m_0!}\frac{2^{n_0/2}\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}=\frac{2^{n_0/2}(\beta/\sqrt{2})^{k_0+m_0}}{r_1^{k_0}r_2^{m_0}k_0!m_0!}\times$$

$$\times \frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{(r_1^0 l_1(z,\omega)/r_1)^{k_0}(r_2^0 l_2(z,\omega)/r_2)^{m_0}} \leq$$
$$\leq 2^{\frac{n_0}{2}} p_0 \max\left\{ \frac{(\beta/\sqrt{2})^{k_0+m_0}}{r_1^{k_0} r_2^{m_0}} : k_0+m_0 \leq n_0 \right\} \times$$
$$\times \frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|}{k_0! m_0! (l_1^*(z,\omega))^{k_0}(l_2^*(z,\omega))^{m_0}}.$$

Отже, нерівність (2.5) виконується для F, $\mathbf{L}_*$ та $R_0 = (\beta/\sqrt{2}, \beta/\sqrt{2})$. Як і вище, застосуємо теорему 2.1 до функції $F(z,\omega)$ з $\mathbf{L}_*(z,\omega) = R_0\mathbf{L}(z,\omega)/R$. За теоремою 2.1 F є аналітичною вектор-функцією обмеженого $\mathbf{L}_*$-індексу за сукупністю змінних. Звідки, за теоремою 2.4, аналітична вектор-функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. $\square$

2.3 Локальне поводження максимуму модуля аналітичної в кулі вектор-функції.

Для аналітичної в кулі $\mathbb{B}^2$ вектор-функції F покладемо

$$M(R,(z_0,\omega_0),F) = \max\left\{\|F(z,\omega)\| : (z,\omega) \in \mathbb{D}^2((z_0,\omega_0),R)\right\},$$

де $(z_0,\omega_0) \in \mathbb{B}^2$, $R \in \mathbb{R}^2_+$. Тоді

$$M(R,(z_0,\omega_0),F) = \max\left\{\|F(z,\omega)\| : (z,\omega) \in \mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R)\right\},$$

бо максимум модуля для кожної аналітичної вектор-функції в замкненому полікрузі досягається на його кістяку. А, отже, те ж саме залишається правильним для максимума $\|F\|$.

Справді, зауважимо спочатку, що для аналітичних функцій $F\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$ кістяк полікруга є його межею Шилова, тобто, максимум її модуля досягається на кістяку. Тоді, міркуючи від супротивного припустимо, що $(\forall (z,\omega) \in \mathbb{T}^2((z_0,\omega_0),R))$:

$$\|F(z,\omega)\| < M(R,(z_0,\omega_0),F).$$

Але,

$$M(R,(z_0,\omega_0),F) = |f_{j(R)}(z^*,\omega^*)| \le M(R,(z_0,\omega_0),f_{j(R)})$$

для деякого $j(R) \in \{1,2\}$, а також $\|F(z^*,\omega^*)\| \ge |f_{j(R)}(z^*,\omega^*)|$, тобто, всупереч тому, що кістяк полікруга є його межею Шилова, отримуємо, що для функції $f_{j(R)}$ такого бути не може. Отримана суперечність доводить бажаний факт.

Метою цього підрозділу є доведення аналогу однієї теореми У.Хеймана. Ця теорема, отримана В.Хейманом [13] для цілих функцій обмеженого індексу від однієї змінної, у застосуваннях теорії функцій обмеженого індексу відіграє важливу роль. Пізніше вона неодноразово узагальнювалась і переносилась на різні класи аналітичних функкій. А.Д. Кузик і М.М. Шеремета [20, 21] довели її аналог для цілих функцій обмеженого l-індексу від однієї змінної, А.І. Бандура, О.Б. Скасків [32, 33] – для аналітичних функцій в одиничній кулі, А.І. Бандура, Н.В.Петречко, О.Б. Скасків [47] – в одиничному бікрузі, А.І. Бандура, О.Б. Скасків, В.Л. Цвігун [82] – в області $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Ця теорема дає зручний критерій для доведення обмеженості індексу чи L-індексу, в тому або іншому сенсі, аналітичних розв'язків диф.рівнянь і систем диф. рівнянь в часткових похідних (див., наприклад, [21, 22, 33–37, 87]). Ці застосування аналогів теореми Хеймана дозволяють отримати відповідні твердження, накладаючи здебільшого природні обмеження (умови) лише на аналітичні коефіцієнти диф.рівнянь. Це, власне, дає можливість отримати доволі загальні умови обмеженості індексу (чи L-індексу) кожного аналітичного розв'язку відповідного класу рівнянь.

Для доведення аналога теореми Хеймана нам потрібні наступні теореми. Вони дають необхідні і достатні умови в термінах локальних нерівностей з максимумом модуля на полікругах.

Теорема 2.6. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$, $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *— аналітична вектор-функція. Якщо існують* $R', R'' \in \mathbb{R}^2_+$, $R' < R''$,$|R''| < \beta$ *та* $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ *такі, що для кожних* $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}, (z_0,\omega_0), F\right) \leq p_1 M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}, (z_0,\omega_0), F\right) \quad (2.22)$$

то F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Спершу припустимо, що $\mathbf{0} < R' < \mathbf{1} < R''$.
Нехай $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ — довільна точка. Розвинемо вектор-функцію F у степеневий ряд:

$$F(z,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} B_{k,m}(z-z_0)^k(\omega-\omega_0)^m, \quad (2.23)$$

де

$$B_{k,m} = (b_{1,k,m}, b_{2,k,m}) = \Big(\frac{f_1^{(k,m)}(z_0,\omega_0)}{k!m!}, \frac{f_2^{(k,m)}(z_0,\omega_0)}{k!m!}\Big).$$

Нехай для $R=(r_1,r_2)$

$$\mu(R,(z_0,\omega_0),F)=\max\{\|B_{k,m}\|r_1^k r_2^m : k+m\geq 0\}$$

— максимальний член степеневого ряду (2.23) та

$$\nu(R)=\nu(R,(z_0,\omega_0),F)=(\nu_1(R),\nu_2(R))$$

— центральний бі-індекс, тобто, набір індексів таких, що

$$\mu(R,(z_0,\omega_0),F)=\|B_{\nu(R)}\|r_1^{\nu_1(R)}r_2^{\nu_2(R)}$$

а також

$$\nu_1(R)+\nu_2(R)=\max\Big\{k+m\colon\ (k,m)\in\mathbb{Z}_+^2,\\ \|B_{k,m}\|r_1^k r_2^m=\mu(R,(z_0,\omega_0),F)\Big\}.$$

Зважаючи на (2.23), отримуємо, що для будь-якого

$$R,\quad |R|<1-\sqrt{|z_0|^2+|\omega_0|^2},$$

виконується

$$\mu(R,(z_0,\omega_0),F)\leq M(R,(z_0,\omega_0),F).$$

Тоді для заданих $R'=(r_1',r_2')$ та $R''=(r_1'',r_2'')$ у випадку $0<|R'|<1<|R''|<\beta$ виводимо

$$M(R'R,(z_0,\omega_0),F)\leq\sum_{k\geq 0}\sum_{m\geq 0}\|B_{k,m}\|(r_1'r_1)^k(r_2'r_2)^m\leq$$

$$\leq\sum_{k\geq 0}\sum_{m\geq 0}\mu(R,(z_0,\omega_0),F)(r_1')^k(r_2')^m=$$

$$=\mu(R,(z_0,\omega_0),F)\sum_{k\geq 0}\sum_{m\geq 0}(r_1')^k(r_2')^m=\prod_{j=1}^{2}\frac{1}{1-r_j'}\mu(R,(z_0,\omega_0),F).$$

А також

$$\ln\mu(R,(z_0,\omega_0),F)=\ln\left\{\|B_{\nu(R)}\|r_1^{\nu_1(R)}r_2^{\nu_2(R)}\right\}=$$

$$= \ln\left\{\|B_{\nu(R)}\|(r_1r_1')^{\nu_1(R)}(r_2r_2')^{\nu_2(R)}\frac{1}{(r_1'')^{\nu_1(R)}(r_2'')^{\nu_2(R)}}\right\} =$$
$$= \ln\left\{\|B_{\nu(R)}\|(r_1r_1')^{\nu_1(R)}(r_2r_2')^{\nu_2(R)}\right\} + \ln\left\{\frac{1}{(r_1'')^{\nu_1(R)}(r_2'')^{\nu_2(R)}}\right\} \leq$$
$$\leq \ln\mu(R''R,(z_0,\omega_0),F) - (\nu_1(R)+\nu_2(R))\ln\min_{1\leq j\leq 2} r_j''.$$

Звідси випливає, що

$$\nu_1(R)+\nu_2(R)\leq$$
$$\leq \frac{1}{\ln\min_{1\leq j\leq 2} r_j''}\Big(\ln\mu(R''R,(z_0,\omega_0),F) - \ln\mu(R,(z_0,\omega_0),F)\Big) \leq$$
$$\leq \frac{\ln M(R''R,(z_0,\omega_0),F) - \ln\Big(\prod_{j=1}^2(1-r_j)\ln M(R'R,(z_0,\omega_0),F)\Big)}{\ln\min_{1\leq j\leq 2} r_j''} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\ln\min_{1\leq j\leq 2} r_j''}\Big(\ln M(R''R,(z_0,\omega_0),F) - \ln M(R'R,(z_0,\omega_0),F)\Big) -$$
$$-\frac{\sum_{j=1}^2\ln(1-r_j)}{\ln\min_{1\leq j\leq 2} r_j''} =$$
$$= \frac{1}{\ln\min_{1\leq j\leq 2} r_j''}\ln\frac{M(R''R,(z_0,\omega_0),F)}{M(R'R,(z_0,\omega_0),F)} - \frac{\sum_{j=1}^2\ln(1-r_j)}{\ln\min_{1\leq j\leq 2} r_j''}. \qquad (2.24)$$

Покладемо $R = \frac{1}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}$. Нехай тепер $N(F,(z_0,\omega_0),\mathbf{L})$ – $\mathbf{L}$-індекс вектор-функції F за сукупністю змінних у точці (z_0,ω_0), тобто, найменше ціле число, для якого виконується нерівність (2.2) у точці (z_0,ω_0). Тоді, зрозуміло, що

$$N(F,(z_0,\omega_0),\mathbf{L}) \leq$$
$$\leq \nu\left(\frac{1}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right) = \nu(R,(z_0,\omega_0),F). \qquad (2.25)$$

Отже, з (2.24), (2.25), застосовуючи умову (2.22), отримуємо, що $\forall (z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$

$$N(F,(z_0,\omega_0),\mathbf{L}) \leq \frac{-\sum_{j=1}^2\ln(1-r_j')}{\ln\min\{r_1',r_2''\}} + \frac{\ln p_1(R',R'')}{\ln\min\{r_1',r_2''\}},$$

де $p_1(R', R'') = p_1$ – стала з умови (2.22). Це означає, що F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних при $\mathbf{0} < R' < \mathbf{1} < R''$, $|R''| < \beta$.

Тепер доведемо теорему для довільних R', R'', $\mathbf{0} < R' < R''$, $|R''| < \beta$. З (2.22) при випливає, що

$$\max\left\{\|F(z,\omega)\| : (z,\omega) \in \mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0), \frac{2R''}{R'+R''}\frac{R'+R''}{2\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)\right\} \leq$$
$$\leq p_1 \max\left\{\|F(z,\omega)\| : (z,\omega) \in \mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0), \frac{2R'}{R'+R''}\frac{R'+R''}{2\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)\right\}.$$

Позначимо

$$\widetilde{\mathbf{L}}(z,\omega) = \frac{2\mathbf{L}(z,\omega)}{R'+R''}.$$

Тоді,

$$\max\left\{\|F(z,\omega)\| : (z,\omega) \in \mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0), \frac{2R''}{(R'+R'')\widetilde{\mathbf{L}}(z_0,\omega_0)}\right)\right\} \leq$$
$$\leq p_1 \max\left\{\|F(z,\omega)\| : (z,\omega) \in \mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0), \frac{2R'}{(R'+R'')\widetilde{\mathbf{L}}(z_0,\omega_0)}\right)\right\},$$

де $\mathbf{0} < \frac{2R'}{R'+R''} < \mathbf{1} < \frac{2R''}{R'+R''}$.

Беручи до уваги першу частину доведення, робимо висновок, що вектор-функція F має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних. Тоді за теоремою 2.4 вектор-функція F є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. □

Доведемо тепер обернену теорему до теореми 2.6.

Теорема 2.7. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то для будь-який* $R', R'' \in \mathbb{R}^2_+$, $R' < R''$, $|R''| \leq \beta$ *знайдеться номер* $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ *такий, що для кожного* $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ *правильна нерівність* (2.22)

Доведення. Нехай $N(F, \mathbf{L}) = N < +\infty$. Припустимо, що нерівність (2.22) не виконується, тобто, існують $R' < R''$, $0 < |R'| < |R''| < \beta$, такі, що для кожного $p_* \geq 1$ та деякого $z_0 = z_0(p_\star)$, $\omega_0 = \omega_0(p_*)$

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right) \geq p_* M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right). \quad (2.26)$$

За теоремою 2.1 існує число $p_0 = p_0(R'') \geq 1$ таке, що для кожних $(z_0,\omega_0) \in \mathbb{B}^2$ та деяких $(k_0,m_0) \in \mathbb{Z}^2_+$, $k_0+m_0 \leq N$ (тобто $n_0 = N$, див. доведення теореми 2.1) маємо:

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)(z_0,\omega_0),F^{(k_0,m_0)}}\right) \leq p_0\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|. \quad (2.27)$$

Позначимо

$$b_1 = p_0\lambda^N_{2,2}(R'')N!\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{(N-j)!}{(r''_1)^j}\right)\left(\frac{r''_1r''_2}{r'_1r'_2}\right)^N,$$

$$b_2 = p_0\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{(N-j)!}{(r''_2)^j}\right)\left(\frac{r''_2}{r'_2}\right)^N \max\left\{1,\frac{1}{(r'_1)^N}\right\},$$

та

$$p_* = (N!)^2p_0\left(\frac{r''_1r''2}{r'_1r'_2}\right)^N + \sum_{k=1}^{2}b_k + 1.$$

Нехай $z_0 = z_0(p_*)$, $\omega_0 = \omega_0(p_*)$, (z_0,ω_0) — точка, для якої виконується нерівність (2.26), а (k_0,m_0) такі, що виконується (2.27), а також

$$M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right) = \|F(z^*,\omega^*)\|,$$
$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F^{(i,j)}\right) = \|F^{(i,j)}(z^*_{i,j},\omega^*_{i,j})\|$$

для кожного $(i,j) \in \mathbb{Z}^2_+$, $i+j \leq N$.

Для оцінки різниці

$$\|F^{(i,j)}(z^*_{i,j},\omega^*_{i,j}) - F^{(i,j)}(z^0_1,\omega^*_{i,j})\| = \|\int_{z^0_1}^{z^*_{i,j}}\frac{\partial^{i+j+1}F}{\partial z^{i+1}\partial\omega^j}(\xi,\omega^*_{i,j})d\xi\| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{\partial^{i+j+1} F}{\partial z^{i+1} \partial \omega^j} (z^*_{i+1,j}, \omega^*_{i+1,j}) \right\| \frac{r''_1}{l_1(z_0, \omega_0)}, \tag{2.28}$$

застосуємо наступну нерівність, яка є нерівністю Коші на бікрузі при $R = R'/(l_1(z_0, \omega_0), l_2(z_0, \omega_0))$,

$$\|F^{(i,j)}(z_0, \omega_0)\| \leq i!j! \left(\frac{l_1(z_0, \omega_0)}{r'_1} \right)^i \left(\frac{l_2(z_0, \omega_0)}{r'_2} \right)^j \|F(z^*, \omega^*)\|. \tag{2.29}$$

Оскільки $(z_1^0, \omega^*_{i,j}) \in \mathbb{D}^2\left[(z_0, \omega_0), \frac{R''}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right]$ та

$$|z^*_{i,j} - z_1^0| = \frac{r''_1}{l_1(z_0, \omega_0)},$$
$$l_1(z_1^0, z^*_{i,2}) \leq \lambda_{2,1}(R'') l_1(z_0, \omega_0),$$
$$|\omega^*_{i,j} - \omega_2^0| = \frac{r''_2}{l_2(z_0, \omega_0)}, l_2(\omega_2^0, \omega^*_{j,2}) \leq \lambda_{2,2}(R'') l_2(z_0, \omega_0),$$

а нерівність (2.29) виконується при $i = k_0$, $j = m_0$, то за теоремою 2.1 послідовно маємо

$$\|F^{(i,j)}(z_1^0, \omega^*_{i,j})\| \leq$$
$$\leq \frac{i!j! l_1^i(z_1^0, \omega^*_{j,2}) l_2^j(z_1^0, \omega^*_{j,2})}{k_0! m_0! l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)} p_0 \|F^{(k_0,m_0)}(z_0, \omega_0)\| \leq$$
$$\leq \frac{i!j! l_1^i(z_0, \omega_0) l_2^j(z_0, \omega_0) \lambda_{2,1}^i(R'') \lambda_{2,2}^j(R'')}{k_0! m_0! l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)} \times$$
$$\times p_0 k_0! m_0! \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}{(r'_1)^{k_0} (r'_2)^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\| =$$
$$= \frac{i!j! l_1^i(z_0, \omega_0) l_2^j(z_0, \omega_0) \lambda_{2,1}^i(R'') \lambda_{2,2}^j(R'')}{(r'_1)^{k_0} (r'_2)^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\|. \tag{2.30}$$

З нерівностей (2.28) та (2.30) випливає, що

$$\left\| \frac{\partial^{i+j+1} F}{\partial z_{i,j}^{i+1} \partial \omega_{i,j}^j} (z^*_{i+1,j}, \omega^*_{i+1,j}) \right\| \geq$$
$$\geq \frac{l_1(z_0, \omega_0)}{r''_1} \left\{ \|F^{(i,j)}(z^*_{i,j}, \omega^*_{i,j})\| - \|F^{(i,j)}(z_1^0, \omega^*_{i,j})\| \right\} \geq$$

$$\geq \frac{l_1(z_1^0,\omega_{i,j}^*)}{r_1''}\|F^{(i,j)}(z_1^0,\omega_{i,j}^*)\|-$$
$$-\frac{p_0 i! j! l_1^{i+1}(z_0,\omega_0) l_2^j(z_0,\omega_0)\lambda_{2,2}^{i,j}(R'')}{r_1''(r_1')^{k_0}(r_2')^{m_0}}\|F(z^*,\omega^*)\|.$$

Тоді,

$$\|F^{(k_0,m_0)}(z_{k_0}^*,\omega_{m_0}^*)\|\geq$$
$$\geq \frac{l_1(z_0,\omega_0)}{r_1''}\left\|\frac{\partial^{(k_0+m_0)-1}f}{\partial z^{k_0-1}\partial\omega^{m_0}}(z_{k_0-1,m_0}^*,\omega_{k_0,m_0}^*)\right\|-$$
$$-\frac{p_0(k_0-1)! m_0! l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)\lambda_{2,1}^{k_0}(R'')\lambda_{2,2}^{m_0}(R'')}{r_1''(r_1')^{k_0}(r_2')^{m_0}}\|F(z^*,\omega^*)\|\geq$$
$$\geq \frac{l_1^2(z_0,\omega_0)}{(r_1'')^2}\left\|\frac{\partial^{(k_0+m_0)-2}f}{\partial z^{k_0-2}\partial\omega^{m_0}}(z_{k_0-2,m_0}^*,\omega_{k_0,m_0}^*)\right\|-$$
$$-\frac{p_0(k_0-2)! m_0! l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)\lambda_{2,1}^{k_0}(R'')\lambda_{2,2}^{m_0}(R'')}{(r_1'')^2(r_1')^{k_0}(r_2')^{m_0}}\|F(z^*,\omega^*)\|-$$
$$-\frac{p_0(k_0-1)! m_0! l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)\lambda_{2,1}^{k_0}(R'')\lambda_{2,2}^{m_0}(R'')}{r_1''(r_1')^{k_0}(r_2')^{m_0}}\|F(z^*,\omega^*)\|\geq$$
$$\geq \frac{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)}{(r'')^{k_0}}\left\|\frac{\partial^{m_0}f}{\partial\omega^{m_0}}(z_0^*,\omega_{m_0}^*)\right\|-$$
$$-\frac{p_0}{(R')^{k_0,m_0}}l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)\lambda_{2,2}^{m_0}(R'')m_0!\frac{(k_0-i)!}{(r_1'')^i}\|F(z^*,\omega^*)\|\geq$$
$$\geq \frac{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}{(r_1'')^{k_0}(r_2'')^{m_0}}\|F(z_0^*,\omega_0^*)-F(z^*,\omega^*)\|(\widetilde{b}_1+\widetilde{b}_2). \tag{2.31}$$

З огляду на нерівності $\lambda_{2,1}(R'')\geq 1$, $\lambda_{2,2}(R'')\geq 1$ та $R''\geq R'$ маємо

$$\widetilde{b}_1=\frac{p_0}{(r_1')^{k_0}(r_2')^{m_0}}l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)\lambda_{2,2}^{m_0}(R'')m_0!\frac{(k_0-1)!}{r_1''}=$$
$$=\frac{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}{(r_1'')^{k_0}(r_2'')^{m_0}}\left(\frac{R''}{R'}\right)^{k_0,m_0}p_0\lambda_{2,2}^{m_0}(R'')m_0!\frac{(k_0-1)!}{r_1''}\leq$$
$$\leq \frac{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0)l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}{(r_1'')^{k_0}(r_2'')^{m_0}}\,b_1,$$

$$\widetilde{b}_2 = \frac{p_0}{(R')^{k_0,m_0}} l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0) \frac{1}{(r_1'')^{k_0}} \frac{(m_0-1)!}{r_2''} \le$$
$$\le \frac{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}{(r_1'')^{k_0}(r_2'')^{m_0}} b_2.$$

Отже, з (2.31) випливає, що

$$\|F^{(k_0,m_0)}(z^*_{k_0,m_0},\omega^*_{k_0,m_0})\| \ge \frac{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}{(r_1'')^{k_0}(r_2'')^{m_0}} \|F(z^*,\omega^*)\| \times$$
$$\times \left\{ \frac{\|F(z_0^*,\omega_0^*)\|}{\|F(z^*,\omega^*)\|} - (b_1+b_2) \right\}.$$

Зважаючи на (2.26), за вибором p_* одержуємо

$$\frac{\|F(z_0^*,\omega_0^*)\|}{\|F(z^*,\omega^*)\|} \ge p_* > b_1 + b_2.$$

Тепер, пригадуючи (2.27) та (2.29), послідовно отримаємо такий ланцюжок нерівностей

$$\|F^{(k_0,m_0)}(z^*_{k_0,m_0},\omega^*_{k_0,m_0})\| \ge$$
$$\ge \frac{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}{(r_1'')^{k_0}(r_2'')^{m_0}} \|F(z^*,\omega^*)\| \{p_* - (b_1+b_2)\} \ge$$
$$\ge \frac{l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)}{(r_1'')^{k_0}(r_2'')^{m_0}} \{p_* - (b_1+b_2)\} \frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z_0,\omega_0)\|(R')^{k_0,m_0}}{k_0! m_0! l_1^{k_0}(z_0,\omega_0) l_2^{m_0}(z_0,\omega_0)} \ge$$
$$\ge \left(\frac{r_1' r_2}{r_1'' r_2''}\right)^N \{p_* - (b_1+b_2)\} \frac{\|F^{(k_0,m_0)}(z^*_{k_0,m_0},\omega^*_{k_0,m_0})\|}{p_0 (N!)^2}.$$

Звідси маємо $p_* \le p_0 \left(\frac{r_1' r_2'}{r_1'' r_2''}\right)^N (N!)^2 + \sum_{j=1}^2 b_j$, а це суперечить вибору p_*. $\square$

2.4 Аналог теореми Хеймана для аналітичної в кулі вектор-функції.

Факти, отримані у попередніх підрозділах, вже дають нам змогу у даному підрозділі довести аналог теореми Хеймана для аналітичних в одиничній кулі вектор-функцій. Теорема показує, що в означенні обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних можна замінити оцінку усіх часткових похідних оцінкою лише похідних порядку$(p+1)$. Як вже ми відзначали вище, ці критерії (аналоги теореми Хеймана) зручні для дослідження аналітичних розв'язків системи диф. рівнянь часткових похідних.

Теорема 2.8. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. *Аналітична вектор-функція* $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *має обмежений* **L**-*індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли знайдуться* $p \in \mathbb{Z}_+$, *та* $c \in \mathbb{R}_+$, *такі, що для всіх* $(z,\omega) \in \mathbb{B}^2$

$$\max\left\{\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{l_1^i(z,\omega)l_2^j(z,\omega)} : i+j=p+1\right\} \le$$
$$\le c\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k+m \le p\right\}. \tag{2.32}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $p = N = N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^2) < +\infty$. За означенням обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних для всіх i, j таких, що $i+j=p+1$, маємо

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{l_1^i(z,\omega)l_2^j(z,\omega)} \le \max\left\{\frac{i!j!\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k+m \le p\right\} \le$$
$$\le ((N+1)!)^2\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k+m \le p\right\},$$

тобто, нерівність отримаємо (2.32) з $p = N$ та $c = ((N+1)!)^2$. Необхідність умови (2.32) доведено.

Достатність. Для $F \equiv 0$ твердження теореми – тривіальне. Тому, припустимо, що $F \not\equiv 0$. Позначимо $\boldsymbol{\beta} = \left(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$.

Нехай (2.32) виконується, $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$, $(z, \omega) \in \mathbb{D}^2\left[(z_0, \omega_0), \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right]$. Для всіх $i, j \in \mathbb{Z}_+^2$, $i + j \le p + 1$ за означенням $\lambda_{2,j}(R)$ і умовою (2.32) маємо

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)} =$$
$$= \frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{l_1^i(z,\omega)l_2^j(z,\omega)} \cdot \frac{l_1^i(z,\omega)l_2^j(z,\omega)}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)} \le$$
$$\le \lambda_{2,1}^i(\boldsymbol{\beta})\lambda_{2,2}^j(\boldsymbol{\beta})\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{l_1^i(z,\omega)l_2^j(z,\omega)} \le$$
$$\le c \cdot \lambda_{2,1}^i(\boldsymbol{\beta})\lambda_{2,2}^j(\boldsymbol{\beta}) \max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k+m \le p\right\}. \qquad (2.33)$$

Подібно, за означенням $\lambda_{1,j}(R)$

$$\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k+m \le p\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)}{l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} \cdot \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)} : k+m \le p\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\lambda_{1,1}^{-k}(\boldsymbol{\beta})\lambda_{1,2}^{-m}(\boldsymbol{\beta})\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)} : k+m \le p\right\}.$$

Приймемо

$$\Lambda_1^{-(k,m)}(\boldsymbol{\beta}) = \lambda_{1,1}^{-k}(\boldsymbol{\beta})\lambda_{1,2}^{-m}(\boldsymbol{\beta}),$$
$$\Lambda_2^{(i,j)}(\boldsymbol{\beta}) = \lambda_{2,1}^{i}(\boldsymbol{\beta})\lambda_{2,2}^{j}(\boldsymbol{\beta}).$$

Тоді,

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)} \le$$
$$\le c\Lambda_2^{(i,j)}(\boldsymbol{\beta}) \max\left\{\Lambda_1^{-(k,m)}(\boldsymbol{\beta})\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)} : k+m \le p\right\} \le$$
$$\le BG(z,\omega), \qquad (2.34)$$

де

$$B = c\cdot\max\{\Lambda_2^{(i,j)}(\boldsymbol{\beta}) : i+j\le p+1\}\max\{\Lambda_1^{-(k,m)}(\boldsymbol{\beta}) : k+m\le p\},$$

$$G(z,\omega) = \max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)} : k+m\le p\right\}.$$

Виберемо точки

$$(z^{(1)},\omega^{(1)})\in\mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0),\frac{1}{2\beta\sqrt{2}\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right),$$

$$(z^{(2)},\omega^{(2)})\in\mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0),\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$$

такі, що $F(z^{(1)},\omega^{(1)})\neq(0,0)$ та

$$\|F(z^{(2)},\omega^{(2)})\| = M\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right)\neq 0 \tag{2.35}$$

Ці точки існують, бо при $F(z,\omega)\equiv(0,0)$ на одному з кістяків

$$\mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0),\frac{1}{2\beta\sqrt{2}\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$$

або

$$\mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0),\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$$

за теоремою єдиності $F\equiv(0,0)$ у всій кулі $\mathbb{B}^2$. З'єднаємо точки $(z^{(1)},\omega^{(1)})$ та $(z^{(2)},\omega^{(2)})$ площиною:

$$\alpha\colon\quad \omega = d\cdot z + c,$$

де

$$d = \frac{\omega^{(2)}-\omega^{(1)}}{z^{(2)}-z^{(1)}},\quad c = \frac{\omega^{(1)}z^{(2)}-\omega^{(2)}z^{(1)}}{z^{(2)}-z^{(1)}}.$$

Безпосередньо перевіряється, що $(z^{(1)},\omega^{(1)})\in\alpha$ та $(z^{(2)},\omega^{(2)})\in\alpha$. Нехай $\widetilde{G}(z) = G(z,\omega)\mid_\alpha$.

Під нулем вектор-функції F розумітимемо точку (z,ω), в якій одночасно $f_1(z,\omega)=0$ та $f_2(z,\omega)=0$. Тоді для кожної пари

$(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2$ $F^{(k,m)}(z,\omega) \mid_\alpha$ є аналітичною вектор-функцією від (z,ω) та

$$\widetilde{G}(z^{(1)}) = G(z^{(1)}, \omega^{(1)}) \mid_\alpha \neq (0,0),$$

бо $F(z^{(1)}, \omega^{(1)}) \neq (0,0)$. Тому всі нулі вектор-функції $F^{(k,m)}(z,\omega) \mid_\alpha$ є ізольованими на α. Отже, нулі функції $\widetilde{G}(z)$ теж ізольовані на площині α. Відповідно, можна вибрати кусково-аналітичну криву γ на α

$$y = y(t) = (z(t), d \cdot z(t) + c), \quad t \in [0;1],$$

що з'єднує точки $(z^{(1)}, \omega^{(1)})$, $(z^{(2)}, \omega^{(2)})$, і є такою, що $G(z(t), \omega(t)) \neq (0,0)$ та

$$\int_0^1 |z'(t)| dt \leq \frac{2\beta}{\sqrt{2} l_1(z_0, \omega_0)}.$$

Для побудови цієї кривої з'єднаємо $z^{(1)}$ та $z^{(2)}$ відрізком

$$z^*(t) = (z^{(2)} - z^{(1)})t + z^{(1)}, \quad t \in [0,1].$$

Крива γ може пройти через точки z, в яких функція $\widetilde{G}(z) = 0$. Кількість таких точок $(s = s((z^{(1)}, \omega^{(1)}), (z^{(2)}, \omega^{(2)})))$ є скінченною. Нехай $(z^*_{1,k})$ — послідовність цих точок, впорядкованих за зростанням значень

$$|z^{(1)} - z^*_{1,k}|, \quad k \in \{1, \ldots, s\}.$$

Виберемо

$$r < \min_{1 \leq k \leq m-1} \Big\{ |z^*_{1,k} - z^*_{1,k+1}|, |z^*_{1,1} - z_1^{(1)}|, |z^*_{1,s} - z_1^{(2)}|, \frac{2\beta^2 - 1}{2\pi\sqrt{2}\beta l_1(z_0, \omega_0)} \Big\}.$$

Далі беремо кола з центрами в точках $z^*_{1,k}$ радіусів $r'_k < \frac{r}{2^k}$ такі, що $\widetilde{G}(z) \neq 0$ для всіх z на цих колах. Такий вибір є можливим, позаяк $F \not\equiv 0$.

Кожне таке коло ділиться на два півкола прямою $z^*(t)$. Відповідно кусково-аналітична крива $y(t)$ складається з дуг, побудованих півкіл та відрізків прямої $z^*(t)$, які з'єднують ці дуги послідовно між собою або з точками $z^{(1)}$ чи $z^{(2)}$.

Довжина $z(t)$ в $\mathbb{C}^2$ менша за

$$\frac{\beta/\sqrt{2}}{l_1(z_0,\omega_0)}+\frac{1}{2\sqrt{2}\beta l_1(z_0,\omega_0)}+\pi r\leq\frac{2\beta}{\sqrt{2}l_1(z_0,\omega_0)}.$$

Тоді

$$\int\limits_0^1|\omega'(t)|dt=|d|\int\limits_0^1|z'(t)|dt\leq\frac{|\omega^{(2)}-\omega^{(1)}|}{|z^{(2)}-z^{(1)}|}\cdot\frac{2\beta}{\sqrt{2}l_1(z_0,\omega_0)}\leq$$

$$\leq\frac{2\beta^2+1}{2\sqrt{2}\beta l_2(z_0,\omega_0)}\cdot\frac{2\sqrt{2}\beta l_1(z_0,\omega_0)}{2\beta^2-1}\cdot\frac{2\beta}{\sqrt{2}l_1(z_0,\omega_0)}\leq$$

$$\leq\frac{2\beta(2\beta^2+1)}{(2\beta^2-1)\sqrt{2}l_2(z_0,\omega_0)}.$$

Звідси

$$\int\limits_0^1\sum_{n=1}^2 l_n(z_0,\omega_0)|y'(t)|dt\leq\frac{2\beta(2\beta^2+1)\sqrt{2}}{2\beta^2-1}=S. \tag{2.36}$$

Оскільки функція $y=y(t)$ — кусково-аналітична на $[0,1]$, для довільних $(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2$, $(i,j)\in\mathbb{Z}_+^2$, $k+m\leq p$ справджується одна з двох рівностей: або

$$\frac{\|F^{(k,m)}(y(t))\|}{l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)}\equiv\frac{\|F^{(i,j)}(y(t))\|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)}, \tag{2.37}$$

або рівність

$$\frac{\|F^{(k,m)}(y(t))\|}{l_1^k(z_0,\omega_0)l_2^m(z_0,\omega_0)}=\frac{\|F^{(i,j)}(y(t))\|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)} \tag{2.38}$$

правильна лише для скінченної множини точок $t=t_n\in[0,1]$. Тоді для функції $G(y(t))$ як максимуму таких виразів, тобто,

$$G(y(t))=\max\left\{\frac{\|F^{(i,j)}(y(t))\|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)}:i+j\leq p\right\}$$

можливі лише два випадки:

1) на деякому інтервалі аналітичності кривої γ функція $G(y(t))$ тотожно дорівнює одночасно декільком частинним похідним, тобто, справджується (2.37) і, відповідно, $G(y(t)) \equiv \frac{\|F^{(i,j)}(y(t))\|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)}$ для деяких i, j, таких що $i + j \leq p$. Зрозуміло, що $F^{(i,j)}(y(t))$ — аналітична вектор-функція, а $\|F^{(i,j)}(y(t))\|$ — неперервно диференційовна на згаданому проміжку аналітичності за винятком точок, у яких $F^{(i,j)}(y(t)) = 0$. Проте, таких точок немає, бо у протилежному випадку й $G(y(t)) = 0$, а це суперечить вибору кривої γ.
2) на деякому інтервалі аналітичності кривої γ функція $G(y(t))$ одночасно дорівнює декільком частинним похідним у скінченному числі точок t_n, тобто справджується (2.38). Тоді ці точки t_n розіб'ють інтервал аналітичності на скінченне число відрізків, на кожному з яких $G(y(t))$ дорівнює одній з похідних, тобто $G(y(t)) \equiv \frac{\|F^{(i,j)}(y(t))\|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)}$ для деяких i, j, таких що $i + j \leq p$. Також на кожному з таких проміжків на основі тих самих міркувань, що й у попередньому випадку $\|F^{(i,j)}(y(t))\|$, а отже, і $G(y(t))$ неперервно диференційовна функція за винятком точок t_n.

Зауважимо тепер, що нерівність

$$\frac{d}{dt}|f(t)| \leq \left|\frac{df(t)}{dt}\right|$$

виконується для кожної диференційовної комплексно-значної функції f від дійсної змінної зовні зліченної множини точок. Справді, нехай $f(t) = u(t) + iv(t)$. Тоді,

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t) \Longrightarrow |f'(t)|^2 = (u'(t))^2 + (v'(t))^2,$$
$$|f(t)|^2 = u^2(t) + v^2(t) \Longrightarrow$$
$$2|f(t)||f(t)|' = 2u(t)u'(t) + 2v(t)v'(t).$$

Тому за нерівністю Коші-Буняковського

$$\left(|f(t)||f(t)|'\right)^2 = (u(t)u'(t) + 2v(t)v'(t))^2 \leq$$

$$\leq (u^2(t)+v^2(t))(u'(t))^2+(v'(t))^2=|f'(t)|^2\cdot|f'(t)|^2,$$

звідки маємо потрібну нерівність у всіх точках t таких, що $f(t)\neq 0$. Звідси і з (2.34), маємо

$$\frac{d}{dt}G(y(t))\leq \max\left\{\frac{1}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)}\cdot\left|\frac{d}{dt}F^{(i,j)}(y(t))\right| : i+j\leq p\right\}\leq$$
$$\leq \max\left\{\left|\frac{\partial^{i+j+1}F}{\partial z^{i+1}\partial\omega^j}(y(t))\right|\frac{|z'(t)|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)}+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\partial^{i+j+1}F}{\partial z^{i}\partial\omega^{j+1}}(y(t))\right|\frac{|\omega'(t)|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)} : i+j\leq p\right\}\leq$$
$$\leq \max\left\{\left|\frac{\partial^{i+j+1}F}{\partial z^{i+1}\partial\omega^j}(y(t))\right|\frac{l_1(z_0,\omega_0)|z'(t)|}{l_1^{i+1}(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)}+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\partial^{i+j+1}F}{\partial z^{i}\partial\omega^{j+1}}(y(t))\right|\frac{l_2(z_0,\omega_0)|\omega'(t)|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^{j+1}(z_0,\omega_0)} : i+j\leq p\right\}\leq$$
$$\leq (l_1(z_0,\omega_0)|z'(t)|+l_2(z_0,\omega_0)|\omega'(t)|)\times$$
$$\times\max\left\{\frac{\|F^{(i,j)}(y(t))\|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)} : i+j\leq p+1\right\}\leq$$
$$\leq \big(l_1(z_0,\omega_0)|z'(t)|+l_2(z_0,\omega_0)|\omega'(t)|\big)BG(y(t)).$$

Тоді за нерівністю (2.36) отримуємо

$$\ln\frac{G(z^{(2)},\omega^{(2)})}{G(z^{(1)},\omega^{(1)})}=\left|\int_0^1\frac{1}{G(y(t))}\frac{d}{dt}G(y(t))dt\right|\leq$$
$$\leq B\int_0^1\sum_{s=1}^2 l_s(z_0,\omega_0)|y_s'(t)|dt\leq S\cdot B.$$

Звідси за допомогою (2.35) маємо

$$M\left(\frac{\beta}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right)\leq G(z^{(2)},\omega^{(2)})\leq G(z^{(1)},\omega^{(1)})e^{SB}.$$

Оскільки, $(z^{(1)}, \omega^{(1)}) \in \mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0), \frac{1}{2\beta\backslash\sqrt{2}\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$, то за нерівністю Коші

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z_0,\omega_0)\|}{i!j!}r_1^i r_2^j \le \mu(R,(z_0,\omega_0),F) =$$
$$= \max\{\|B_{k,m}\|r_1^k r_2^m : k+m \ge 0\} \le M(R,(z_0,\omega_0),F),$$

вибираючи $(z_0,\omega_0) = (z^{(1)},\omega^{(1)})$, $R = \frac{1}{2\beta/\sqrt{2}}$ отримаємо

$$\frac{\|F^{(i,j)}(z^{(1)},\omega^{(1)})\|}{l_1^i(z_0,\omega_0)l_2^j(z_0,\omega_0)} \le i!j!(2\beta/\sqrt{2})^{i+j}M\left(\frac{1}{2\beta/\sqrt{2}\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right)$$

для всіх $i,j\in\mathbb{Z}_+^2$. Тому, для $i+j\le p$ отримуємо

$$G(z^{(1)},\omega^{(1)}) \le (p!)^2(2\beta/\sqrt{2})^2 M\left(\frac{1}{2\beta/\sqrt{2}\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right),$$

$$M\left(\frac{\beta}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right) \le$$
$$\le e^{SB}(p!)^2(2\beta/\sqrt{2})^2 M\left(\frac{1}{2\beta/\sqrt{2}\mathbf{L}(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),F\right).$$

Звідси за теоремою 2.5 вектор-функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Теорема 2.9. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^2)$. *Аналітична вектор-функція* F *у* $\mathbb{B}^2$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли існують* $c\in(0;+\infty)$ *та* $N\in\mathbb{N}$ *такі, що для кожного* $(z,\omega)\in\mathbb{B}^2$ *правильна нерівність*

$$\sum_{k+m=0}^{N}\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} \ge c\sum_{k+m=N+1}^{\infty}\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}.$$

Доведення. Нехай $\frac{1}{\beta}<\theta_t<1$, $t\in\{1,2\}$, $\Theta=(\theta_1,\theta_2)$. Якщо вектор-функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, то за теоремою 2.4 F має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних, де $\widetilde{\mathbf{L}} = (\widetilde{l}_1(z,\omega), \widetilde{l}_2(z,\omega))$, $\widetilde{l}_{z,\omega} = \theta_t l_t(z,\omega)$. Нехай $\widetilde{N} = N(F, \widetilde{\mathbf{L}}, \mathbb{B}^2)$. Тоді

$$\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k+m \le \widetilde{N}\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{\Theta^{k,m}\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!\widetilde{\mathbf{L}}(z,\omega)} : k+m \le \widetilde{N}\right\} \ge$$
$$\ge \prod_{s=1}^{2}\theta_s^{\widetilde{N}} \max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!\widetilde{\mathbf{L}}(z,\omega)} : k+m \le \widetilde{N}\right\} \ge \prod_{s=1}^{2}\theta_s^{\widetilde{N}} \frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!\widetilde{\mathbf{L}}(z,\omega)} =$$
$$= \prod_{s=1}^{2}\theta_s^{\widetilde{N}-t_s} \frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!\mathbf{L}(z,\omega)}$$

для всіх $i \ge 0$, $j \ge 0$ та

$$\sum_{i+j=\widetilde{N}+1}^{\infty} \frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!\mathbf{L}(z,\omega)} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k+m \le \widetilde{N}\right\} \sum_{i+j=\widetilde{N}+1}^{\infty} \theta_s^{t_s-\widetilde{N}} =$$
$$= \prod_{s=1}^{2}\frac{\theta_s}{1-\theta_s} \max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} : k+m \le \widetilde{N}\right\} \le$$
$$\le \prod_{s=1}^{2}\frac{\theta_s}{1-\theta_s} \sum_{k+m=0}^{\widetilde{N}} \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}.$$

Звідси отримуємо (2.35) при $N = \widetilde{N}$ та $c = \prod_{s=1}^{2} \frac{\theta_s}{1-\theta_s}$
Навпаки. З нерівності (2.35) отримуємо, що

$$\max\left\{\frac{\|F^{(i,j)}(z,\omega)\|}{i!j!l_1^i(z,\omega)l_2^j(z,\omega)} : i+j = N+1\right\} \le$$
$$\le \sum_{k+m=N+1}^{\infty} \frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)} \le$$

$$\leq \frac{1}{c}\sum_{k+m=0}^{N}\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}\leq$$

$$\leq \frac{1}{c}\sum_{y=1}^{N}c_{1+y}^{y}\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z,\omega)\|}{k!m!l_1^k(z,\omega)l_2^m(z,\omega)}:k+m\leq N\right\}$$

і за теоремою 2.8 F має обмежений L-індекс за сукупністю змінних.

$\square$

2.5 Обмеженість l_j-індексу за кожним напрямком e_j.

У цьому розділі вкажемо інше застосування теореми 3. Для цього сформулює деякі теореми з [35].

Нехай $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ — заданий напрямок, а $L : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що для всіх $z \in \mathbb{B}^2$

$$L(z) > \frac{\beta|\mathbf{b}|}{1-|z|},$$

$\beta = const > 1$. Клас таких функцій позначимо через $Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^2) = Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^2)$. Для заданого $z \in \mathbb{B}^2$ визначимо

$$S_z = \{t \in \mathbb{C} : z + t\mathbf{b} \in \mathbb{B}^2\}.$$

Аналітична в $F(z)\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}$ функція називається (див. [35]) функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{B}^2$ справджується нерівність

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m! L^m(z)} \le \max_{0 \le k \le m_0} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k! L^k(z)},$$

де

$$\partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j,$$
$$\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z)), k \ge 2,$$
$$\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z).$$

Найменше таке ціле число $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ називається (див. [35]) L-індексом за напрямком $\mathbf{b}$ аналітичної функції $F(z)$ та позначається через $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^2) = m_0$.

Зазначимо, що для кожного $b = (b_1, b_2)$, $b_1 + b_2 \ne 0$, для будь-якого заданого $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$ можна однозначно вибрати $z^0 \in \mathbb{C}^2$

та $t \in S_{z^0}$ такі, що $z_1^0 + z_2^0 = 0$ і $z = z^0 + t\mathbf{b}$.
Справді, досить взяти

$$z_1^0 = \frac{b_2 z_1 - b_1 z_2}{b_1 + b_2},\ z_2^0 = -z_1^0,\ t = \frac{z_1 + z_2}{b_1 + b_2}$$

і переконатися, що така пара z_1^0, t є єдиним розв'язком лінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} z_1^0 + tb_1 = z_1, \\ -z_1^0 + tb_2 = z_2. \end{cases}$$

Якщо ж $b_1 + b_2 = 0$, то для будь-якого заданого $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$ можна однозначно вибрати $z^0 \in \mathbb{C}^2$ та $t \in S_{z^0}$ такі, що $z_1^0 - z_2^0 = 0$ і $z = z^0 + t\mathbf{b}$. Для того, щоб у цьому переконатися, міркуємо як і вище. Власне, потрібно переконатися, що система рівнянь

$$\begin{cases} z_1^0 + tb_1 = z_1, \\ z_1^0 + tb_2 = z_2. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Справді, у цьому випадку визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix} = b_2 - b_1 = -2b_1 \neq 0$, бо $b \neq (0,0)$ і $b_1 + b_2 = 0$.

Через

$$g_{z^0}(t) := F(z^0 + t\mathbf{b})$$

позначимо зрізку функції $F\big|_{S_{z^0}}$,

$$l_{z^0}(t) := L(z^0 + t\mathbf{b}),\ \mathbf{e}_1 = (1,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1).$$

Нам потрібна така теорема ([35, p.108, Th 4.4]).

Теорема 2.10 ([35], Theorem 4.4)**.** *Нехай* $\mathbf{L} = (l_1, l_2) \in Q(\mathbb{B}^2)$, f *— аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *функція обмеженого* l_j*-індексу за напрямком* e_j $(j \in \{1,2\})$. *Тоді* f *є функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних.*

Нехай $g_{z^0}(t) := F(z^0 + t\mathbf{b})$. Приймемо

$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \emptyset,$$

якщо $g_{z^0}(t) \neq 0$ для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^2$ і для всіх $t \in S_{z^0}$;
вважаємо, що

$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \{z^0 + t\mathbf{b} : t \in S_{z^0}\},$$

якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^2$ маємо $g_{z^0}(t) \equiv 0$;
якщо при деякому $z^0 \in \mathbb{B}^2$ маємо $g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ та a_k^0 — нулі $g_{z^0}(t)$, тобто $F(z^0 + a_k^0\mathbf{b}) = 0$, то приймемо

$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \bigcup_k \{z^0 + t\mathbf{b} : |t - a_k^0| \leq \frac{r}{\mathbf{L}(z^0 + a_k^0\mathbf{b})}, r > 0\}.$$

Нехай

$$G_r^{\mathbf{b}}(F) = \bigcup_{z^0 \in \mathbb{B}^2} G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0).$$

Через

$$n(r, z^0, 1/F) = \sum_{|a_k^0| \leq r} 1$$

позначається лічильна функція кількості нулів a_k^0.

Сформулюємо також таку теорему ([35, p.109, Theorem 4.5]) в її інтерпретації для двовимірного випадку.

Теорема 2.11 ([35], Theorem 4.5)**.** *Нехай функція $F\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}$ — аналітична, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^2)$ та $\mathbb{B}^2/G_\beta^{\mathbf{b}}(F) \neq \emptyset$. $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ тоді й тільки тоді, коли:*

1) для кожного $r \in (0, \beta]$ існує $P = P(r)$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{B}^2/G_r^{\mathbf{b}}(F)$

$$\left|\frac{1}{F(z)} \cdot \frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq P\mathbf{L}(z);$$

2) для кожного $r \in (0, \beta]$ знайдеться $\widetilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^2$ при $F(z^0 + t\mathbf{b}) \neq 0$

$$n\left(\frac{r}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) \leq \widetilde{n}(r).$$

Зазначимо, що з тверджень, що є у попередній частині дисертації, маємо, що з обмеженості l_j-індексу функції за кожною зі змінних $z_1 = z, z_2 = \omega$, при фіксованих значеннях іншої, взагалі кажучи, не випливає обмеженість $\mathbf{L}$-індексу з $\mathbf{L} = (l_1, l_2)$ за сукупністю змінних. Але якщо F має обмежений l_j-індекс за кожним з напрямків $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$, то функція F є обмеженого L-індексу за сукупністю змінних.

Нескладними викладками переконуємося, що з того, що $\mathbf{L}(z, \omega) = ((l_1(z, \omega), l_2(z, \omega))$ та $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$ випливає, що $l_j \in Q_{\mathbf{1}_j, \beta/\sqrt{2}}(\mathbb{B}^2)$, $j \in \{1, 2\}$.

Теорема 2.12. *Нехай $\mathbf{L}(z, \omega) = (l_1(z, \omega), l_2(z, \omega))$, $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. Якщо аналітична в $\mathbb{B}^2$ вектор-функція F має обмежений l_j-індекс за напрямком $\mathbf{e}_j$ для кожного $j \in \{1, 2\}$, то F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.*

Доведення. Використовуючи теорему 2.10 ([35, p.108, Th. 4.4]) маємо, що якщо $f_1(z, \omega)$ — функція обмеженого l_1-індексу за напрямком $\mathbf{e}_j$ для кожного $j \in \{1, 2\}$, то $f_1(z, \omega)$ є функцією обмеженого $\mathbf{L} = (l_1, l_2)$-індексу за сукупністю змінних. Подібно маємо, що $f_2(z, \omega)$ — функція обмеженого L -індексу за сукупністю змінних.

З того, що $f_1(z, \omega)$, $f_2(z, \omega)$ — функції обмеженого $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних випливає, що $F(z, \omega) = (f_1(z, \omega), f_2(z, \omega))$ — вектор-функція обмеженого $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних. □

Використовуючи теореми 2.10, 2.11 і 2.12, отримуємо наступне твердження, яке містить достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Теорема 2.13. *Нехай $F(z,\omega)$ — аналітична в $\mathbb{B}^2$ вектор-функція, $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^2)$ та $\mathbb{B}^2/G^{\mathbf{e}_j}_{\beta/\sqrt{2}}(F)\neq\emptyset$ для кожного $j\in\{1,2\}$. Якщо для кожного $j\in\{1,2\}$ виконуються такі умови:*
1) для будь-якого $r\in(0;\beta/\sqrt{2})$ існує $P_j=P_j(r)>0$ таке, що $\forall(z,\omega)\in\mathbb{B}^2/G^{\mathbf{e}_1}_r(f_j)\neq\emptyset$

$$\left|\frac{1}{f_j(z,\omega)}\cdot\frac{\partial f_j(z,\omega)}{\partial z}\right|\leq P_j l_1(z,\omega),$$

$\forall(z,\omega)\in\mathbb{B}^2/G^{\mathbf{e}_2}_r(f_j)\neq\emptyset$

$$\left|\frac{1}{f_j(z,\omega)}\cdot\frac{\partial f_j(z,\omega)}{\partial \omega}\right|\leq P_j l_2(z,\omega);$$

2) для будь-якого $r>0$ існує $\widetilde{n}_j(r)\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $(z,\omega)\in\mathbb{B}^2$, для яких $f_1((z_0,\omega_0)+t\mathbf{e}_1)\neq\emptyset$:

$$n_{\mathbf{e}_1}\left(\frac{r}{l_1(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),\frac{1}{f_1}\right)\leq\widetilde{n}_1(r)$$

та $f_2((z_0,\omega_0)+t\mathbf{e}_2)\neq\emptyset$:

$$n_{\mathbf{e}_2}\left(\frac{r}{l_2(z_0,\omega_0)},(z_0,\omega_0),\frac{1}{f_2}\right)\leq\widetilde{n}_2(r),$$

то $F=(f_1,f_2)$ має обмежений $\mathbf{L}$-індекс з $\mathbf{L}=(l_1,l_2)$ за сукупністю змінних.

2.6 Властивості степеневого розвинення аналітичних в одиничній кулі вектор-функцій.

Нехай $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$. Розвинемо аналітичну вектор-функцію $F : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ у степеневий векторнозначний ряд,

$$F(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z - z_0, w - w_0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} B_{ij}(z - z_0)^i (w - w_0)^j, \tag{2.39}$$

де P_k – однорідні вектор-поліноми степеня k, тобто, двовимірні функції, компоненти яких є однорідними поліномами степеня k,

$$B_{ij} = \frac{F^{(i,j)}(z_0, w_0)}{i!j!} = \left(\frac{f_1^{(i,j)}(z_0, w_0)}{i!j!}, \frac{f_2^{(i,j)}(z_0, w_0)}{i!j!} \right).$$

Поліном (вектор-поліном) P_{k_0}, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, за аналогією з одновимірним випадком (див. також [26, 48, 49]) називаємо *головним поліномом* ряду (2.39) на кістяку $\mathbb{T}^2((z_0, w_0), R)$, якщо для кожного $(z, w) \in \mathbb{T}^2((z_0, w_0), R)$ виконується нерівність

$$\| \sum_{k \neq k_0} P_k(z - z_0, w - w_0) \| \leq \frac{1}{2} \max \left\{ \|B_{i,j}\| r_1^i r_2^j : i + j = k_0 \right\}.$$

Доведення наступних теорем 2.14 і 2.15 базуються на тих самих ідеях, що і доведення відповідних тверджень у статтях [26, 48, 49].

Теорема 2.14. *Нехай $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. Якщо аналітична в $\mathbb{B}^2$ вектор-функція F має обмежений L-індекс за сукупністю змінних, то існує $p \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $d \in \left(0; \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right]$ знайдеться $\eta(d) \in (0; d)$ таке, що для кожного $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ та деяких $r = r(d, (z_0, \omega_0)) \in \left(\eta(d), d\right)$ і $\nu_0 = \nu_0(d, (z_0, \omega_0)) \leq p$ многочлен P_{ν_0} є головним у ряді (2.39) на $\mathbb{T}^2\left((z_0, \omega_0), \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)}\right)$, $\mathbf{e} = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$.*

Доведення. Нехай F — аналітична вектор-функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з $N = N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^2) < +\infty$ та n_0 — $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних у точці $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$, тобто n_0 — найменше число, для якого нерівність (2.2) виконується у точці (z_0, ω_0). Тоді, нерівність $n_0 \le N$ виконується $\forall (z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$.

Введемо позначення

$$a_{i,j}^* = \frac{\|B_{i,j}\|}{\mathbf{L}^{i,j}(z_0, \omega_0)} = \frac{\|F^{i,j}(z_0, \omega_0)\|}{i!j!\mathbf{L}^{i,j}(z_0, \omega_0)},$$
$$a_\nu = \max\{a_{i,j}^* : i + j = \nu\},$$
$$c = 2(N+3)!3! + 2(N+1)C_{N+1}^N = 2(N+3)!3! + 2(N+1)^2.$$

Виберемо довільне число $d \in \left(0; \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right]$, а для $t \in \mathbb{Z}_+$ позначимо

$$r_t = \frac{d}{(d+1)c^t}, \ \mu_t = \max\{a_\nu r_t^\nu : \nu \in \mathbb{Z}_+\}, \ s_t = \min\{\nu : a_\nu r_t^\nu = \mu_t\}.$$

Зрозуміло, що за означенням обмеженості індексу n_0 у точці (z_0, ω_0), нерівність

$$a_{k,m}^* \le \max\{a_{i,j}^* : i + j \le n_0\}$$

виконується для всіх $(k, m) \in \mathbb{Z}_+^2$ у кожній фіксованій точці $(z_0, w_0) \in \mathbb{B}^2$. Тому, $a_\nu \le a_{n_0}$ для кожного $\nu \in \mathbb{Z}_+$ і для довільного $\nu > n_0$ з $r_0 < 1$ ми маємо

$$a_\nu r_0^\nu < a_{n_0} r_0^{n_0}.$$

Отже, $s_0 \le n_0$. Оскільки $cr_t = r_{t-1}$, то отримуємо, що

$$a_{s_{t-1}} r_t^{s_{t-1}} = a_{s_{t-1}} r_{t-1}^{s_{t-1}} c^{-s_{t-1}} = a_\nu r_t^\nu c^{\nu - s_{t-1}} \ge c a_\nu r_t^\nu \tag{2.40}$$

для кожних $\nu > s_{t-1}$, $r_{t-1} < 1$.

Отже, $s_t \le s_{t-1}$ для всіх $t \in \mathbb{N}$. Тому, можна переписати

$$\mu_0 = \max\{a_\nu r_0^\nu : \nu \le n_0\},$$

$$\mu_t = \max\{a_\nu r_t^\nu : \nu \le s_{t-1}\}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Для $t \in \mathbb{N}$ додатково позначимо

$$\mu_0^* = \max\{a_\nu r_0^\nu : \nu \neq s_0,\ \nu \leq n_0\},$$
$$\mu_t^* = \max\{a_\nu r_t^\nu : \nu \neq s_t,\ \nu \leq s_{t-1}\},$$
$$s_0^* = \min\{k : k \neq s_0, a_k r_0^k = \mu_0^*\},$$
$$s_t^* = \min\{k : k \neq s_t, a_k r_t^k = \mu_t^*\}.$$

Доведемо, що існує $t_0 \in \mathbb{Z}_+$, для якого

$$\frac{\mu_{t_0}^*}{\mu_{t_0}} \leq \frac{1}{c}. \tag{2.41}$$

Міркуючи від супротивного, припустимо, що для всіх $t \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\frac{\mu_{t_0}^*}{\mu_{t_0}} > \frac{1}{c}. \tag{2.42}$$

Для $s_t^* < s_t$ ($s_t^* \neq s_t$ за визначенням) маємо

$$a_{s_t^*} r_{t+1}^{s_t^*} = \frac{a_{s_t^*} r_t^{s_t^*}}{c^{s_t^*}} = \frac{\mu_t^*}{c^{s_t^*}} > \frac{\mu_t}{c^{s_t^*+1}} = \frac{a_{s_t} r_t^{s_t}}{c^{s_t^*+1}} = \frac{a_{s_t} r_{t+1}^{s_t}}{c^{s_t^*+1} - s_t} \geq a_{s_t} r_{t+1}^{s_t}.$$

Для кожного $\nu > s_t^*$, $\nu \neq s_t$, тобто, $\nu - 1 \geq s_t^*$, міркуючи подібно, отримуємо

$$a_{s_t^*} r_{t+1}^{s_t^*} = \frac{a_{s_t^*} r_t^{s_t^*}}{c^{s_t^*}} \geq \frac{a_\nu r_t^\nu}{c^{s_t^*}} \geq \frac{a_\nu r_t^\nu}{c^{\nu-1}} = c a_\nu r_{t+1}^\nu.$$

Тому $a_{s_t^*} r_{t+1}^{s_t^*} > a_\nu r_{t+1}^\nu$ для всіх $\nu > s_t^*$. Тоді

$$s_{t+1} \leq s_t^* \leq s_t - 1. \tag{2.43}$$

Навпаки, якщо $s_t < s_t^* \leq s_{t-1}$, то може виконуватись рівність $s_{t+1} = s_t$. Справді, за означенням $s_{t+1} \leq s_t$. Це означає, що вказана рівність можлива. Але при $s_{t+1} < s_t$ маємо $s_{t+1} < s_{t-1}$. Звідси отримуємо (2.43).

Тому, з нерівностей $s^*_{t+1} \leq s_t$ та $s^*_t \neq s_{t+1}$ випливає, що $s^*_{t+1} < s_{t+1}$. Як і вище, замість (2.43) маємо

$$s_{t+2} \leq s^*_{t+1} \leq s_{t+1} - 1 = s_t - 1.$$

Отже, якщо для всіх $t \in \mathbb{Z}_+$ справджується (2.42), то для кожного $t \in \mathbb{Z}_+$ виконується одне з двох:

$$\text{або } s_{t+2} \leq s_{t+1} \leq s_t - 1,$$

або

$$s_{t+2} \leq s_t - 1, \text{ тобто, } s_{t+2} \leq s_t - 1,$$

адже $s_{t+2} \leq s_{t+1}$. Звідси випливає, що

$$s_t \leq s_{t-2} - 1 \leq ... \leq s_{t-2[/2]} - [t/2] \leq s_0 - [t/2] \leq N - [t/2].$$

Іншими словами, $s_t < 0$ при $t > 2N+1$, що неможливо. Тому знайдеться $t_0 \leq 2N+1$, для якого є правильною нерівність (2.41). Покладемо

$$r = r_{t_0},\ \eta(d) = \tfrac{d}{(d+1)c^{2(N+1)}},\ p = N \text{ та } \nu_0 = s_{t_0}.$$

Тоді, для всіх $(i+j) \neq \nu_0 = s_{t_0}$ на кістяку $\mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0), \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$ з нерівностей (2.40) та (2.41) отримуємо

$$\|B_{ij}\||(z-z_0)^i(\omega-\omega_0)^j| = a^*_{i,j} r^{i+j} \leq a_{i+j} r^{i+j} \leq$$
$$\leq \frac{1}{c} a_{s_{t_0}} r_{t_0}^{s_{t_0}} = \frac{1}{c} a_{\nu_0} r^{\nu_0}.$$

Отже, для $(z,\omega) \in \mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0), \frac{r}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$

$$\left\|\sum_{i+j\neq\nu_0} B_{i,j}(z-z_0)^i(\omega-\omega_0)^j\right\| \leq \sum_{i+j\neq\nu_0} a^*_{i,j} r^{i+j} \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu C^\nu_{\nu+1} r_\nu = \sum_{\nu=0}^{s_{t_0}-1} a_\nu C^\nu_{\nu+1} r_\nu + \sum_{\nu=s_{t_0-1}+1}^{\infty} a_\nu C^\nu_{\nu+1} r_\nu. \qquad (2.44)$$

Оцінимо дві суми в (2.44). З (2.41) випливає, що $\mu^*_{t_0} \leq \frac{1}{c}\mu_{t_0}$ або

$$\max\{a_\nu r_{t_0} : \nu \neq s_{t_0}, \nu \leq s_{t_0-1}\} \leq \frac{1}{c} \max\{a_\nu r_{t_0} : \nu \neq s_{t_0}, \nu \leq s_{t_0-1}\},$$

тобто,

$$a_\nu r^\nu \le \frac{1}{c} a_{\nu_0} r^{\nu_0}.$$

Зважаючи на (2.43), отримуємо, що

$$\sum_{\nu=0,\nu\ne a_{t_0}}^{s_{t_0-1}} a_\nu C_{\nu+1}^\nu r_\nu \le \frac{a_{\nu_0} r^{\nu_0}}{c} \sum_{\nu=0}^{N} C_{\nu+1}^\nu \le \frac{a_{\nu_0} r^{\nu_0}}{c} (N+1)^2. \tag{2.45}$$

Зауважимо, що $a_\nu r_{t_0-1}^\nu \le \mu_{t_0-1}$ для всіх $\nu \ge s_{t_0-1}+1$. Звідки,

$$a_\nu r_{t_0}^\nu = \frac{a_\nu r_{t_0-1}^\nu}{c^\nu} \le \frac{\mu_{t_0-1}}{c^\nu}.$$

Зважаючи на (2.41), для $c \ge 2$ послідовно виводимо

$$\sum_{\nu=s_{t_0-1}+1}^{\infty} a_\nu C_{\nu+1}^\nu r^\nu \mu_{t_0-1} C_{\nu+1}^\nu \frac{1}{c^\nu} \le$$

$$\le a_{s_{t_0-1}} r_{t_0}^{s_{t_0-1}} c^{s_{t_0-1}} \left(\sum_{\nu=s_{t_0-1}+1}^{\infty} x^{\nu+2} \right)'' \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} =$$

$$= \frac{a_{\nu_0} r^{\nu_0}}{c} c^{s_{t_0-1}} \left\{ \frac{x^{s_{t_0-1}+3}}{1-x} \right\}'' \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} =$$

$$= \frac{a_{\nu_0} r^{\nu_0}}{c} c^{s_{t_0-1}} \sum_{j=0}^{2} C_2^j 2!(s_{t_0-1}+3) \times \ldots$$

$$\ldots \times (s_{t_0-1}+4-j) \cdot \frac{x^{s_{t_0-1}+3-j}}{(1-x)^{3-j}} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} \le$$

$$\le \frac{a_{\nu_0} r^{\nu_0}}{c} c^{s_{t_0-1}} 2!(N+3)! \frac{(1/c)^{s_{t_0-1}+3-j}}{(1-1/c)^{3-j}} =$$

$$= 2!(N+3)! \frac{a_{\nu_0} r^{\nu_0}}{c} \sum_{j=0}^{2} \frac{1}{(c-1)^{3-j}} \le 3!(N+3)! \frac{a_{\nu_0} r^{\nu_0}}{c}. \tag{2.46}$$

Остаточно тепер з нерівностей (2.44)–(2.46) отримуємо, що

$$\left\| \sum_{i+j\neq\nu_0} B_{i,j}(z-z_0)^i(w-w_0)^j \right\| \le$$

$$\le \frac{((N+1)C_{N+1}^N + 3!(N+3)!)a_{\nu_0}r^{\nu_0}}{c} \le \frac{1}{2}a_{\nu_0}r^{\nu_0}.$$

Отже, поліном P_{ν_0} на кістяку $\mathbb{T}^2\left((z_0,w_0), \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(z_0,w_0)}\right)$, $\mathbf{e}=(1,1)\in\mathbb{R}^2$, є головним поліномом ряду (2.39). □

Теорема 2.15. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^2)$. *Якщо існують* $p\in\mathbb{Z}_+$, $d\in(0;1]$, $\eta\in(0;d)$ *такі, що для кожного* $(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$, *деякого* $R=(r_1,r_2)$ *з* $r_j=r_j(d,(z_0,\omega_0))\in(\eta,d)$, $j\in\{1,2\}$ *та деякого* $\nu_0=\nu_0(d,(z_0,\omega_0))\le p$ *на кістяку* $\mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0),\frac{R}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$ *поліном* P_{ν_0} *є головним поліномом ряду* (2.39), *то аналітична вектор-функція* $F:\mathbb{B}^2\to\mathbb{C}^2$ *має обмежений* L*-індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Припустимо, що існують $p\in\mathbb{Z}_+$, $d\le 1$ та $\eta\in(0;d)$ такі, що для будь-якого $(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$ та деякого $R=(r_1,r_2)$ при $r_j=r_j(d,(z_0,\omega_0))\in(\eta,d)$, $j\in\{1,2\}$ і певного $\nu_0=\nu_0(d,(z_0,\omega_0))\le p$ поліном p_{ν_0} є головним поліномом ряду (2.39) на кістяку $\mathbb{T}^2\left((z_0,\omega_0),\frac{R}{\mathbf{L}(z_0,\omega_0)}\right)$. Позначимо $r_0=\max\{r_1,r_2\}$. Тоді

$$\left\| \sum_{i+j\neq\nu_0} B_{i,j}(z-z_0)^i(\omega-\omega_0)^j \right\| =$$

$$= \left\| F(z,\omega) - \sum_{i+j=\nu_0} B_{i,j}(z-z_0)^i(\omega-\omega_0)^j \right\| \le \frac{a_{\nu_0}r_0^{\nu_0}}{2}.$$

За нерівністю Коші, маємо

$$\left\| B_{i,j}(z-z_0)^i(\omega-\omega_0)^j \right\| = a_{i,j}^* r_1^i r_2^j \le \frac{a_{\nu_0}r_0^{\nu_0}}{2}, \quad \forall i,j\in\mathbb{Z}_+^2,\ i+j\neq\nu_0,$$

тобто для всіх $i+j=\nu\neq\nu_0$

$$a_\nu r_1^i r_2^j \leq \frac{a_{\nu_0} r_0^{\nu_0}}{2} \quad (R=(r_1,r_2)). \tag{2.47}$$

Припустимо, що F необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. За теоремою 2.8 для всіх $p_1\in\mathbb{Z}_+$ та $c>1$ $\exists(z_0,\omega_0)\in\mathbb{B}^2$ таке, що виконується

$$\max\left\{\frac{\|F^{(i,j)}(z_0,\omega_0)\|}{\mathbf{L}^{i,j}(z_0,\omega_0)}: i+j=p_1+1\right\}>$$
$$> c\cdot\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z_0,\omega_0)\|}{\mathbf{L}^{k,m}(z_0,\omega_0)}: k+m\leq p_1\right\}.$$

Покладемо $p_1=p$ та $c=\left(\frac{(p+1)!}{\eta^{p+1}}\right)^2$. Тоді для цих $z_0(p_1,c)$, $\omega_0(p_1,c)$

$$\max\left\{\frac{\|F^{(i,j)}(z_0,\omega_0)\|}{\mathbf{L}^{i,j}(z_0,\omega_0)}: i+j=p_1+1\right\}>$$
$$>\frac{1}{\eta^{p+1}}\max\left\{\frac{\|F^{(k,m)}(z_0,\omega_0)\|}{k!m!\mathbf{L}^{k,m}(z_0,\omega_0)}: k+m\leq p\right\},$$

тобто, $a_{p+1}>\frac{a_{\nu_0}}{\eta^{p+1}}$. Звідси

$$a_{p+1}r_0^{p+1}>\frac{a_{\nu_0}r_0^{p+1}}{\eta^{p+1}}\geq a_{\nu_0}r_{\nu_0}.$$

Остання нерівність суперечить (2.47). Отже, вектор-функція F є обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

$\square$

2.7 Оцінки зростання аналітичних в кулі функцій.

Позначимо $[0,2\pi]^2 = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$. Для $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $\Theta = (\theta_1, \theta_2) \in [0,2\pi]^2$, $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ писатимемо

$$Re^{i\Theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}), \qquad \arg A = (\arg a_1, \arg a_2).$$

Через $K(\mathbb{B}^2)$ позначаємо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L} = (l_1, l_2) : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^2_+$, де $l_j : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}_+$ задовольняють умову (2.1) та існує $c \geq 1$ таке, що для будь-якого $R \in \mathbb{R}^2_+$, $|R| < 1$, та $j \in \{1, 2\}$

$$\max\Big\{ l_j(Re^{i\Theta_2})/l_j(Re^{i\Theta_1})\colon \Theta_1, \Theta_2 \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] \Big\} \leq c. \tag{2.48}$$

У випадку $\mathbf{L}(z, w) = (l_1(|z|, |w|), l_2(|z|, |w|))$ очевидно маємо, що $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2) \Longrightarrow \mathbf{L} \in K(\mathbb{B}^2)$, тобто, $Q(\mathbb{B}^2) \cap K(\mathbb{B}^2) \neq \emptyset$. Крім цього, нескладно переконатися, що $Q(\mathbb{B}^2) \not\subset K(\mathbb{B}^2)$, $K(\mathbb{B}^2) \not\subset Q(\mathbb{B}^2)$, а також, що $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \in K(\mathbb{B}^2) \Longrightarrow \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \in K(\mathbb{B}^2)$ та $\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2 \in K(\mathbb{B}^2)$ (див., наприклад, [41]).
Нехай для $R, |R| < 1$, надалі

$$M(R, F) := M(R, \mathbf{0}, F) = \max\{\|F(z, \omega)\| : (z, \omega) \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R)\},$$

а також $\boldsymbol{\beta} = \left(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$.

Теорема 2.16. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2) \cap K(\mathbb{B}^2)$, $\beta > c\sqrt{2}$, *де* $c > 1$ *– стала з умови* (2.48). *Якщо аналітична вектор-функція* $F\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\begin{gathered}\ln M(R, F) = \\ = O\Bigg(\min\Bigg\{ \min_{\Theta \in [0,2\pi]^2} \Big(\int_0^{r_1} l_1(te^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})dt + \int_0^{r_2} l_2(r_1^0 e^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})dt \Big); \\ \min_{\Theta \in [0,2\pi]^2} \Big(\int_0^{r_1} l_1(te^{i\theta_1}, r_2^0 e^{i\theta_2})dt + \int_0^{r_2} l_2(r_1 e^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})dt \Big) \Bigg\} \Bigg),\end{gathered} \tag{2.49}$$

при $|R| \to 1 - 0$, $R^0 = (r_1^0, r_2^0)$ *— фіксований радіус.*

Доведення. Нехай $R > \mathbf{0}$, $|R| > 1$, $\Theta \in [0, 2\pi]^2$, а точка $(z^*, w^*) \in \mathbb{T}^2\Big(\mathbf{0}, R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}\Big)$ така, що

$$\|F(z^*, w^*)\| = M\Big(R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}, F\Big).$$

Виберемо

$$z_0 = \frac{z^* r_1}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}, \quad w_0 = \frac{w^* r_2}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}.$$

Елементарно переконуємося, що

$$|z_0 - z^*| = \left| \frac{z^* r_1}{r_1 + \frac{\beta}{c\sqrt{2} l_1(Re^{i\Theta})}} - z^* \right| =$$

$$= \left| \frac{z^* \beta / (c\sqrt{2} l_1(Re^{i\Theta}))}{r_1 + \frac{\beta}{c\sqrt{2} l_1(Re^{i\Theta})}} \right| = \frac{\beta}{c\sqrt{2} l_1(Re^{i\Theta})},$$

а також

$$|w_0 - w^*| = \left| \frac{w^* r_2}{r_2 + \frac{\beta}{c\sqrt{2} l_2(Re^{i\Theta})}} - w^* \right| =$$

$$= \left| \frac{w^* \beta / (c\sqrt{2} l_2(Re^{i\Theta}))}{r_2 + \frac{\beta}{c\sqrt{2} l_2(Re^{i\Theta})}} \right| = \frac{\beta}{c\sqrt{2} l_2(Re^{i\Theta})}.$$

Крім цього маємо

$$\mathbf{L}(z_0, w_0) = \mathbf{L}\left(\frac{z^* r_1}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}, \frac{w^* r_2}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})} \right) =$$

$$= \mathbf{L}\left(\frac{(R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})) r_1 e^{i \arg z^*}}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}, \frac{(R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})) r_2 e^{i \arg w^*}}{R + \boldsymbol{\beta}/\mathbf{L}(Re^{i\Theta})} \right) =$$

$$= \mathbf{L}(r_1 e^{i \arg z^*}, r_2 e^{i \arg w^*}).$$

Оскільки $\mathbf{L} \in K(\mathbb{B}^2)$, то за умовою (2.48)

$$c\mathbf{L}(z_0, w_0) = c\mathbf{L}(r_1 e^{i \arg z^*}, r_2 e^{i \arg w^*}) \geq$$

$$\geq \mathbf{L}(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \geq \frac{1}{c}\mathbf{L}(z_0, w_0)$$

Розглянемо такі кістяки

$$\mathbb{T}_{\mathbf{e}} := \mathbb{T}^2\left((z_0, w_0), \frac{\mathbf{e}}{c\mathbf{L}(z_0, w_0)}\right), \quad \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}} := \mathbb{T}^2\left((z_0, w_0), \frac{c\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(z_0, w_0)}\right).$$

За теоремою 2.5 існує $p_1 = p_1\left(\frac{\mathbf{e}}{c}, c\boldsymbol{\beta}\right) \geq 1$ таке, що нерівність (2.22) правильна для $R' = \mathbf{e}/c$, $R'' = c\boldsymbol{\beta}$. Тому, послідовно отримуємо, що

$$\begin{gathered} M\left(R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})}, F\right) \leq \\ \leq \max\left\{\|F(z,w)\| : (z,w) \in \mathbb{T}^2\left((z_0, w_0), \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})}\right)\right\} \leq \\ \leq \max\left\{\|F(z,w)\| : (z,w) \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}\right\} \leq \\ \leq p_1 \max\left\{\|F(z,w)\| : (z,w) \in \mathbb{T}_{\mathbf{e}}\right\} \leq \\ \leq p_1 M\left(R + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{L}(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})}, F\right). \end{gathered} \tag{2.50}$$

Функція

$$\ln M(R, F)\colon \ \left\{R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+ \colon |R| < 1\right\} \to \mathbb{R}$$

є опуклою функцією відносно $\ln r_1$ за першою змінною, при фіксованій іншій змінній, і є опуклою функцією відносно $\ln r_2$ за другою змінною при фіксованій першій змінній. Останнє означає, що функція

$$\psi(x_1, x_2) = \ln M\left(\left(e^{x_1}, e^{x_2}\right), F\right)$$

є опуклою за змінною x_1 на інтервалі $(0, \sqrt{1 - x_2^2})$ для кожного фіксованого значення $x_2 \in (0,1)$ та є опуклою за змінною x_2 на інтервалі $(0, \sqrt{1 - x_1^2})$ для кожного фіксованого значення $x_1 \in (0,1)$. Тому, існують такі функції $A_1(t, r_2)$, $A_2(r_1, t)$ — невід'ємні неспадні за змінною t, що функцію $\ln^+ \max\{\|F(z,w)\| : (z,w) \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0}, R)\}$

можна подати у вигляді

$$\ln^+ M(R,F) - \ln^+ M(R+(r_1^0 - r_1)e_1, F) = \int\limits_{r_1^0}^{r_1} \frac{A_1(t,r_2)}{t} dt, \quad (2.51)$$

$$\ln^+ M(R,F) - \ln^+ M(R+(r_2^0 - r_2)e_2, F) = \int\limits_{r_2^0}^{r_2} \frac{A_2(r_1,t)}{t} dt. \quad (2.52)$$

для довільних $0 < r_j^0 < r_j$, $j \in \{1,2\}$.

Тоді, з нерівності (2.50) отримуємо, що

$$\ln p_1 \geq \ln M\Big(R + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}, F\Big) - \ln M\Big(R + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}, F\Big) =$$
$$= \ln M\left(\mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{e} + (\frac{\beta}{\sqrt{2}c} - 1)\mathbf{e}_1}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}, F\right) -$$
$$- \ln M\left(\mathbf{0}, R + \frac{\mathbf{e} + (\frac{\beta}{\sqrt{2}c} - 1)\mathbf{e}_2}{\mathbf{L}(Re^{i\Theta})}, F\right) =$$
$$= \int\limits_{r_1+1/l_1(Re^{i\Theta})}^{r_1+\beta/(c\sqrt{2}l_1(Re^{i\Theta}))} \frac{1}{t} A_1\left(t, r_2 + \frac{\beta}{c\sqrt{2}l_2(Re^{i\Theta})}\right) dt +$$
$$+ \int\limits_{r_2+1/l_2(Re^{i\Theta})}^{r_2+\beta/(c\sqrt{2}l_2(Re^{i\Theta}))} \frac{1}{t} A_2\left(r_1 + \frac{\beta}{c\sqrt{2}l_1(Re^{i\Theta})}, t\right) dt.$$

З монотонності функцій A_j тепер маємо

$$\int_a^b \frac{1}{t} A_1(t,x_2) dt \geq A_1(t,x_2)\ln(b/a),$$
$$\int_a^b \frac{1}{t} A_2(x_1,t) dt \geq A_2(x_1,t)\ln(b/a),$$

тому,

$$\ln p_1 \geq \ln\left(1 + \frac{\frac{\beta}{\sqrt{2}c} - 1}{r_1 l_1(Re^{i\Theta}) + 1}\right) A_1\left(r_1, r_2 + \frac{1}{l_2(Re^{i\Theta})}\right) +$$

$$+\ln\left(1+\frac{\frac{\beta}{\sqrt{2}c}-1}{r_2l_2(Re^{i\Theta})+1}\right)A_2\left(r_1+\frac{1}{l_1(Re^{i\Theta})},r_2\right). \tag{2.53}$$

Оскільки $r_jl_j(Re^{i\Theta})\longrightarrow+\infty$ при $|R|\longrightarrow 1-0$ і $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ $(\alpha\to 0)$, то при $|R|\longrightarrow 1-0$ і $j\in\{1,2\}$ отримуємо

$$\ln\left(1+\frac{\frac{\beta}{\sqrt{2}c}-1}{r_jl_j(Re^{i\Theta})+1}\right)\sim\frac{\frac{\beta}{\sqrt{2}c}-1}{r_jl_j(Re^{i\Theta})+1}$$

і для всіх $R=(r_1,r_2)\geq R^{(0)}=(r_1^{(0)},r_2^{(0)})$ маємо

$$\ln\left(1+\frac{\frac{\beta}{\sqrt{2}c}-1}{r_jl_j(Re^{i\Theta})+1}\right)\geq\frac{\frac{\beta}{\sqrt{2}c}-1}{2r_jl_j(Re^{i\Theta})}.$$

Тому, з нерівності (2.53) отримаємо, що при $|R|\longrightarrow 1-0$

$$A_1\left(r_1,r_2+\frac{\beta}{c\sqrt{2}}l_2(Re^{i\Theta})\right)\leq\frac{2\ln p_1}{\frac{\beta}{c\sqrt{2}}-1}r_1l_1(Re^{i\Theta}),$$
$$A_2\left(r_1+\frac{\beta}{c\sqrt{2}l_1(Re^{i\Theta})},r_2\right)\leq\frac{2\ln p_1}{\frac{\beta}{c\sqrt{2}}-1}r_2l_2(Re^{i\Theta}).$$

Нехай $R^0=(r_1^0,r_2^0)$, де r_j^0 такі, що дві попередніх нерівностей виконуються при $R\geq R^0$. За допомогою рівностей (2.51) та (2.52) тепер для всіх $R\geq R^0$ отримуємо, що

$$\ln M(R,F)=\ln M\Big(R+(r_1^0-r_1)\mathbf{e}_1,F\Big)+\int_{r_1^0}^{r_1}\frac{A_1(t,r_2)}{t}dt=$$
$$=\ln M\Big(R+(r_1^0-r_1)\mathbf{e}_1+(r_2^0-r_2)\mathbf{e}_2,F\Big)+$$
$$+\int_{r_1^0}^{r_1}\frac{A_1(t,r_2)}{t}dt+\int_{r_2^0}^{r_2}\frac{A_2(r_1^0,t)}{t}dt\leq$$
$$\leq\ln M(R^0,F)+$$
$$+\frac{2\ln p_1}{\frac{\beta}{\sqrt{2}c}-1}\left(\int_0^{r_1}l_1(te^{i\theta_1},r_2e^{i\theta_2})dt+\int_0^{r_2}l_2(r_1^0e^{i\theta_1},te^{i\theta_2})dt\right),$$

позаяк при $|R| \to 1-0$

$$\int_0^{r_1} l_1(te^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})dt \, + \, \int_0^{r_2} l_2(r_1^0 e^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})dt \to +\infty.$$

Функція $M(R,F) = \max\{\|F(z,w)\| : (z,w) \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0},R)\}$ не залежить від Θ . Тому, звідси випливає, що

$$\ln M(R,F) =$$

$$= O\left(\min_{\Theta\in[0,2\pi]^2}\Big(\int_0^{r_1} l_1(te^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})dt + \int_0^{r_2} l_2(r_1^0 e^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})dt\Big)\right),$$

при $|R| \longrightarrow 1-0$. Зрозуміло, що симетрично проведені міркування із заміною порядку змінних r_1 та r_2 дозволяють довести, що

$$\ln M(R,F) =$$

$$= O\left(\min_{\Theta\in[0,2\pi]^2}\Big(\int\limits_0^{r_1} l_1(te^{i\theta_1}, r_2^0 e^{i\theta_2})dt + \int\limits_0^{r_2} l_2(r_1 e^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})dt\Big)\right) \quad (2.54)$$

при $|R| \longrightarrow 1-0$.

Справді, за допомогою рівностей (2.51) та (2.52) подібно до попереднього для всіх $R \geq R^0$ маємо, що

$$\ln M(R,F) = \ln M\Big(R + (r_2^0 - r_2)\mathbf{e}_2, F\Big) + \int_{r_2^0}^{r_2} \frac{A_2(r_1,t)}{t}dt =$$

$$= \ln M\Big(R + (r_1^0 - r_1)\mathbf{e}_1 + (r_2^0 - r_2)\mathbf{e}_2, F\Big) +$$

$$+ \int_{r_1^0}^{r_1} \frac{A_1(t, r_2^0)}{t}dt + \int_{r_2^0}^{r_2} \frac{A_2(r_1,t)}{t}dt \leq$$

$$\leq \ln M(R^0, F) +$$

$$+ \frac{2\ln p_1}{\frac{\beta}{\sqrt{2}c} - 1}\left(\int_0^{r_1} l_1(te^{i\theta_1}, r_2^0 e^{i\theta_2})dt + \int_0^{r_2} l_2(r_1 e^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})dt\right).$$

Оскільки при $|R| \to 1-0$

$$\int_0^{r_1} l_1(te^{i\theta_1}, r_2^0 e^{i\theta_2})dt \, + \, \int_0^{r_2} l_2(r_1 e^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})dt \to +\infty,$$

то звідси, одержуємо, що виконується співвідношення (2.54), а отже і співвідношення (2.49). Теорему 2.16 доведено повністю. □

Наслідок 2.2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2) \cap K(\mathbb{B}^2)$, $\min_{\Theta \in [0,2\pi]^2} l_j(Re^{i\Theta})$ *— неспадна за кожною змінною* er_k, $k \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2\}$, $k \neq j$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* L*-індекс за сукупністю змінних, то для* $R^{(1)} = (t, r_2)$, $R^{(2)} = (r_1, t)$ *при* $|R| \longrightarrow 1 - 0$

$$\ln M(R, F) =$$

$$= O\Bigg(\min \Big\{ \int\limits_0^{r_1} l_j(R^{(1)} e^{i\Theta}) dt + \int\limits_0^{r_2} l_j(R^{(2)} e^{i\Theta}) dt \colon \Theta \in [0, 2\pi]^2 \Big\} \Bigg).$$

Позначимо $a^+ = \max\{a, 0\}$, $u_j(t) = u_j(t, R, \Theta) = l_j\left(\frac{tR}{r^*} ei\Theta\right)$, де $a \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $j \in \{1,2\}$, $r^* = \max\{r_1, r_2\} \neq 0$ та $\frac{t}{r^*}|R| < 1$.

Теорема 2.17. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k, $k \in \{1,2\}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0, 2\pi]^2$. *Якщо вектор-функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє умову* (2.1) *та аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то для кожного* $\Theta \in [0, 2\pi]^2$ *та всіх* $R \in \mathbb{R}^2_+$, $|R| < 1$ *і* $P \in \mathbb{Z}^2$, $S \in \mathbb{Z}^2$

$$\ln \max \left\{ \frac{\|F^{(s,p)}(Re^{i\Theta})\|}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(Re^{i\Theta})} : s + p \leq N \right\} \leq$$
$$\leq \ln \max \left\{ \frac{\|F^{(s,p)}(\mathbf{0})\|}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(\mathbf{0})} : s + p \leq N \right\} +$$
$$+ \int\limits_0^{r^*} \Bigg(\max_{s+p \leq N} \left\{ (s+1) l_1\left(\frac{\tau}{r^*} Re^{i\Theta}\right) + (p+1) l_2\left(\frac{\tau}{r^*} Re^{i\Theta}\right) \right\} +$$
$$+ \max_{s+p \leq N} \left\{ \frac{s(-u_1'(\tau))^+}{l_1(\frac{\tau}{r^*} Re^{i\Theta})} + \frac{p(-u_2'(\tau))^+}{l_2(\frac{\tau}{r^*} Re^{i\Theta})} \right\} \Bigg) d\tau \qquad (2.55)$$

Доведення. Нехай $R \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\Theta \in [0, 2\pi]^2$. Позначимо $a_j = \frac{r_j}{r^*}$, $j \in \{1, 2\}$ та $A = (a_1, a_2)$. Розглянемо функцію $g \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, визначену формулою

$$g(t) = \max\left\{\frac{\|F^{(s,p)}(Ate^{i\Theta})\|}{s!p!\mathbf{L}^{S,P}(Ate^{i\Theta})} : s+p \le N\right\} \tag{2.56}$$

де $Ate^{i\Theta} = (a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})$.
Позаяк функція

$$\frac{\|F^{(s,p)}(Ate^{i\Theta})\|}{k!m!\mathbf{L}^{k,m}(Ate^{i\Theta})}$$

є неперервно диференційовною за дійсною змінною $t \in (0;+\infty)$, зовні нульової множини функції $\|F^{(s,p)}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})\|$, відповідно функція $g(t)$ також неперервно диференційовна на $\big(0, r^*/|R|\big]$ за винятком, можливо, не більше, ніж зліченної множини точок.
Застосовуючи нерівність $\frac{d}{dr}|g(r)| \le |g'(r)|$, яка виконується скрізь за винятком, можливо, точок $r = t$, в яких $g(t) = 0$, послідовно отримуємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\|F^{(s,p)}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})\|}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})}\right) =$$
$$= \frac{1}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})}\frac{d}{dt}\|F^{(s,p)}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})\| +$$
$$+\|F^{(s,p)}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})\|\times$$
$$\times\frac{d}{dt}\frac{1}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})} \le \frac{1}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})}\times$$
$$\times\Big(\|F^{(s+1,p)}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})a_1e^{i\theta_1}\| +$$
$$+\|F^{(s,p+1)}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})a_2e^{i\theta_2}\|\Big) -$$
$$-\frac{\|F^{(s,p)}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})\|}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})}\left(\frac{su_1'(t)}{l_1(Ate^{i\Theta})} + \frac{pu_2'(t)}{l_2(Ate^{i\Theta})}\right) \le$$
$$\le \left(\frac{\|F^{(s+1,p)}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})\|}{(s+1)!p!\mathbf{L}^{s+1,p}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})} +\right.$$
$$\left.+\frac{\|F^{(s,p+1)}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})\|}{s!(p+1)!\mathbf{L}^{s,p+1}(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})}\right)\times$$
$$\times\Big(a_1(s+1)l_1(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2}) + a_2(p+1)l_2(a_1te^{i\theta_1}, a_2te^{i\theta_2})\Big) +$$

$$+\frac{\|F^{(s,p)}(a_1te^{i\theta_1},a_2te^{i\theta_2})\|}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(a_1te^{i\theta_1},a_2te^{i\theta_2})}\Big(\frac{s(-u_1'(t))^+}{l_1(Ate^{i\Theta})}+\frac{p(-u_1'(t))^+}{l_1(Ate^{i\Theta})}\Big). \qquad (2.57)$$

Для абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій h_1, h_2 та функції $h(x):=\max\{h_1(x),h_2(x)\}$ виконується $h'(x)\le\max\{h_1'(x),h_2'(x)\}$ для майже всіх $x\in[a,b]$ (див. [89, Lemma 2]). Функція g — абсолютно неперервна, тому з (2.57) випливає, що майже скрізь за мірою Лебега

$$g'(t)\le\max\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\|F^{(s,p)}(a_1te^{i\theta_1},a_2te^{i\theta_2})\|}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(a_1te^{i\theta_1},a_2te^{i\theta_2})}\right):s+p\le N\right\}\le$$
$$\le\max_{s+p\le N}\left\{\frac{a_1(s+1)l_1(Ate^{i\Theta})\|F^{(s+1,p)}(Ate^{i\Theta})\|}{k!m!\mathbf{L}^{k+1,m}(Ate^{i\Theta})}+\right.$$
$$+\frac{a_2(p+1)l_2(Ate^{i\Theta})\|F^{(s,p+1)}(Ate^{i\Theta})\|}{k!m!\mathbf{L}^{k,m+1}(Ate^{i\Theta})}+$$
$$\left.+\frac{\|F^{(s,p)}(Ate^{i\Theta})\|}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(Ate^{i\Theta})}\left(\frac{s(-u_1'(t))^+}{l_1(Ate^{i\Theta})}+\frac{p(-u_2'(t))^+}{l_2(Ate^{i\Theta})}\right)\right\}\le$$
$$\le g(t)\Bigg(\max_{s+p\le N}\{a_1(s+1)l_1(Ate^{i\Theta})+a_2(p+1)l_2(Ate^{i\Theta})\}+$$
$$+\max_{s+p\le N}\left\{\frac{s(-u_1'(t))^+}{l_1(Ate^{i\Theta})}+\frac{p(-u_2'(t))^+}{l_2(Ate^{i\Theta})}\right\}\Bigg)=$$
$$=g(t)\alpha(t),$$

тобто, $\frac{d}{dt}\ln g(t)\le\alpha(t)$ майже скрізь за мірою Лебега, де

$$\alpha(t)=(\beta(t)+\gamma(t)),$$
$$\beta(t)=\max_{s+p\le N}\left\{a_1(s+1)l_1(Ate^{i\Theta})+a_2(p+1)l_2(Ate^{i\Theta})\right\},$$
$$\gamma(t)=\max_{s+p\le N}\left\{\frac{s(-u_1'(t))^+}{l_1(Ate^{i\Theta})}+\frac{p(-u_2'(t))^+}{l_2(Ate^{i\Theta})}\right\}.$$

Звідси за Лемою 3 зі статті [89]

$$g(t)\le g(0)\exp\int\limits_0^t(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau, \qquad (2.58)$$

бо $g(0) \neq 0$. Але $r^*A = R$. Підставляючи $t = r^*$ в нерівність (2.58) та пригадуючи (2.56), маємо

$$\ln \max \left\{ \frac{\|F^{(s,p)}(Re^{i\Theta})\|}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(Re^{i\Theta})} : s+p \leq N \right\} \leq$$

$$\leq \ln \max \left\{ \frac{\|F^{(s,p)}(\mathbf{0})\|}{s!p!\mathbf{L}^{s,p}(\mathbf{0})} : s+p \leq N \right\} +$$

$$+ \int\limits_0^{r^*} \max_{s+p\leq N} \left\{ a_1(s+1)l_1(A\tau e^{i\Theta}) + a_2(p+1)l_2(A\tau e^{i\Theta}) \right\} d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{r^*} \max_{s+p\leq N} \left\{ \frac{s(-u_1'(\tau))^+}{l_1(A\tau e^{i\Theta})} + \frac{p(-u_2'(\tau))^+}{l_2(A\tau e^{i\Theta})} \right\} d\tau,$$

тобто, виконується нерівність (2.55). □

Твердження 2.3. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервна диференційовна вектор-функція за кожною змінною* r_k, $k \in \{1, 2\}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0, 2\pi]^2$. *Якщо вектор-функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє умову* (2.1), *а аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F, \mathbf{L})$ *за сукупністю змінних та існує* $C > 0$ *таке, що для функції* $\mathbf{L}$ *виконується умова*

$$\sup \left\{ \frac{(-(u_j(t, R, \Theta))_t')^+}{\frac{r_j}{r^*} l_j^2(\frac{t}{r^*} Re^{i\Theta})} : |R| < 1, 0 \leq t \leq r_*, \right.$$

$$\left. \Theta \in [0, 2\pi]^2, j \in \{1, 2\} \right\} = C < +\infty, \tag{2.59}$$

то

$$\varlimsup_{|R|\longrightarrow 1-0} \frac{\ln M(R, F)}{\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2} \int\limits_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau, Re^{i\Theta})\rangle d\tau} \leq (C+1)N + 1. \tag{2.60}$$

Доведення. Якщо вектор-функція $\mathbf{L}$ задовольняє умову (2.1), то

$$\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2} \int\limits_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau \longrightarrow +\infty, |R| \longrightarrow 1-0. \tag{2.61}$$

Позначимо $\widetilde{\beta}(t)=\sum_{j=1}^{2}a_jl_j(Ate^{i\Theta})$. Якщо додатково виконується (2.59), то для деяких s^*, p^*, $s^*+p^*\le N$ та $\widetilde{s}$, $\widetilde{p}$, $\widetilde{s}+\widetilde{p}\le N$,

$$\frac{\gamma(t)}{\widetilde{\beta}(t)}=\frac{\frac{s^*(-u_1'(t))^+}{l_1(Ate^{i\Theta})}+\frac{p^*(-u_2'(t))^+}{l_2(Ate^{i\Theta})}}{\sum_{j=1}^{2}a_jl_j(Ate^{i\Theta})}\le s^*\frac{(-u_1'(t))^+}{a_1l_1^2(Ate^{i\Theta})}+p^*\frac{(-u_2'(t))^+}{a_2l_2^2(Ate^{i\Theta})}\le$$
$$\le(s^*+p^*)C\le NC$$

та

$$\frac{\beta(t)}{\widetilde{\beta}(t)}=\frac{a_1(\widetilde{s}+1)l_1(Ate^{i\Theta})+a_2(p^*+1)l_2(Ate^{i\Theta})}{\sum_{j=1}^{2}a_jl_j(Ate^{i\Theta})}=1+\frac{a_1\widetilde{s}l_1(Ate^{i\Theta})}{a_1l_1(Ate^{i\Theta})}+$$
$$+\frac{a_2\widetilde{p}l_2(Ate^{i\Theta})}{a_2l_2(Ate^{i\Theta})}\le 1+\widetilde{s}+\widetilde{p}\le 1+N.$$

Але $\|F(Ate^{i\Theta})\|\le g(t)\le g(0)\exp\int\limits_0^t(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau$ та $r^*A=R$. Візьмемо $t=r^*$ та застосуємо співвідношення (2.61). Отримаємо

$$\ln M(R,F)-\ln g(0)=\ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2}\|F(Re^{i\Theta})\|-\ln g(0)\le$$

$$\le\ln\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2}g(r^*)-\ln g(0)\le\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2}\int\limits_0^{r^*}(\beta(\tau)+\gamma(\tau))d\tau\le$$

$$\le(NC+N+1)\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2}\int\limits_0^{r^*}(\widetilde{\beta}(\tau))d\tau=$$

$$=(NC+N+1)\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2}\int\limits_0^{r^*}\Big(a_1l_1(A\tau e^{i\Theta})+a_2l_2(A\tau e^{i\Theta})\Big)d\tau=$$

$$=(NC+N+1)\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2}\int\limits_0^{r^*}\Big(\frac{r_1}{r}l_1\big(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\big)+\frac{r_2}{r}l_2\big(\frac{\tau}{r^*}Re^{i\Theta}\big)\Big)d\tau=$$

$$=(NC+N+1)\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2}\int\limits_0^{1}\Big(r_1l_1\big(\tau Re^{i\Theta}\big)+r_2l_2\big(\tau Re^{i\Theta}\big)\Big)d\tau.$$

Отже, справджується (2.60). Твердження 2.3 доведено. $\square$

Твердження 2.4. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k,$k \in \{1,2\}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0,2\pi]^2$ *і задовольняє умову* (2.1). *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних та*

$$r^*(-(u_j(t,R,\Theta))'_{t=r^*})^+/r_j l_j^2(Re^{i\Theta}) \longrightarrow 0 \qquad (2.62)$$

рівномірно для всіх $\Theta \in [0,2\pi]^2$, $j \in \{1,2\}$ *при* $R \longrightarrow 1-0$, *то*

$$\overline{\lim}_{|R|\longrightarrow 1-0} \frac{\ln M(R,F)}{\max_{\Theta\in[0,2\pi]^2} \int\limits_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau, Re^{i\Theta})\rangle d\tau} \leq N+1. \qquad (2.63)$$

З одного боку, оцінка (2.63) доводиться подібно до доведення твердження 2.3. З іншого боку, з умови (2.62) випливає, що умова (2.59) виконується з довільним $C = \varepsilon > 0$. Тому, нерівність (2.60) виконується з $C = \varepsilon > 0$, тобто у правій частині нерівності (2.60) маємо сталу $(C+1)N+1 = (\varepsilon+1)N+1$. Залишилося спрямувати $\varepsilon \to +0$.

Якщо $\mathbf{L}(z,w) = \mathbf{L}(r_1,r_2) = \mathbf{L}(R)$,тобто, залежить лише від $|z| = r_1$ та $|w| = r_2$, то нерівність (2.62) може бути записана у простішій формі.

Наслідок 2.3. *Нехай* $\mathbf{L}(R)$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k, $k \in \{1,2\}$, $|R| < 1$. *Якщо функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє* (2.1) *та аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* L*-індекс з* $N = N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних для кожного* $j \in \{1,2\}$

$$\frac{\langle R, \nabla l_j(R)\rangle}{r_j l_j^2(R)} \to 0$$

при $|R| \longrightarrow 1-0$, *де* , $\nabla l_j(R) = \left(\frac{\partial l_j(R)}{\partial r_1}, \frac{\partial l_j(R)}{\partial r_2}\right)$, *то*

$$\varlimsup_{|R|\longrightarrow 1-0} \frac{\ln M(R,F)}{\int\limits_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R)\rangle d\tau} \le N+1.$$

У цьому розділі основний результат має такий вигляд.

Теорема 2.18. *Нехай* $\mathbf{L}(R) = (l_1(R), l_2(R))$, $l_j(R)$ *— додатна неперервно диференційовна вектор-функція за кожною змінною* r_k, $k \in \{1,2\}$, $|R| < 1$. *Якщо вектор-функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє умову* (2.1) *та аналітична в* $\mathbb{B}^2$ *вектор-функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\varlimsup_{|R|\longrightarrow 1-0} \frac{\ln \max\{\|F(z,w)\| : (z,w) \in \mathbb{T}^2(\mathbf{0},R)\}}{\int\limits_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R)\rangle d\tau} \le N+1.$$

Ця теорема випливає негайно з твердження 2.4, яке вище доведене для функції $\mathbf{L}$ істотно загальнішого вигляду.

Висновки до розділу 2

У розділі 2 побудовано основи теорії аналітичних вектор-функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних в одиничній двохвимірній кулі $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^2$. Доведено цілий ряд критеріїв обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, що є, зокрема, аналогами відповідних критеріїв Фріке, Хеймана, встановлених цими авторами у випадку цілих функцій обмеженого індексу на комплексній площині. Розділ 2 містить всі основні результати дисертаційної роботи. Всі основні твердження цього розділу є новими і не мають попередників.

Основні досягнення цього розділу є наступні. У підрозділі 2.2 встановлюються теореми, які містять необхідні і достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу аналітичних в одиничній двохвимірній кулі в $\mathbb{C}^2$ вектор-функцій в термінах локально регулярного поводження їхніх часткових похідних (Теореми 2.1, 2.2, 2.5). Ці теореми в сукупності дають аналог одновимірного критерію Фріке обмеженості індексу у цілої функції від однієї комплексної змінної. Інші дві теореми цього підрозділу встановлюють співвідношення між обмеженостями $\mathbf{L}$-індексу відносно двох різних функцій $\mathbf{L}$, у випадку, якщо одна з них в певному сенсі більша за іншу, а також інваріантність поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу у випадку узагальненої еквівалентності цих двох функцій.

У підрозділі 2.3 встановлені теореми, які містять як достатні умови (теорема 2.6), так і необхідні умови (теорема 2.7) обмеженості $\mathbf{L}$-індексу аналітичних в одиничній двохвимірній кулі в $\mathbb{C}^2$ вектор-функцій, в термінах локально регулярного поводження максимума норми аналітичної вектор-функції на бікругах. Ці теореми, з одного боку, є базовими для наступного підрозділу, а з іншого боку, вони цікаві самі-по-собі, оскільки описують певну властивість вектор-функцій обмеженого **L**-індексу, яка вказує на правильність (локальну регулярність) їхнього поводження. У цьому зв'язку виникає таке в даний час відкрите, навіть у випадку функцій від однієї змінної, питання про можливий зв'язок цієї локальної регулярності з певною глобальною регулярністю, яке є цікавим як точки зору уточнення місця, яке займає той чи інший клас аналітичних функцій обмеженого індексу в загальній теорії аналітичних функцій, так і з точки зору можливості встановлення принципово нових властивостей цих класів функцій, що мають властивість обмеженості індексу.

У підрозділі 2.4 основним змістом є доведення аналога теореми Хеймана (теорема 2.8), яка дає відносно простий апарат для встановлення обмеженості індексу аналітичних розв'язків диф. рівнянь.

З цієї теореми виводиться один критерій, який характеризує обмеженість **L**-індекс у термінах сум часткових похідних. З точки зору можливої застосовності розвинутої у роботі теорії аналітичних вектор-функцій F в одиничній кулі $\mathbb{B}^2$ обмеженого **L**-індексу до аналітичної теорії диференційних рівнянь, аналог теореми Хеймана може мати ефективні застосування, позаяк її аналоги, встановлені раніше в різних класах аналітичних функцій, мають відомі ефективні застосування. Хоча теорема 2.9 і має характер критерію, проте в ній "захована" ще тонша властивість ряду, що зображає аналітичну вектор-функцію F в одиничній кулі $\mathbb{B}^2$ обмеженого **L**-індексу. Власне, обмеженість такого індексу виявляється рівносильною до існування. так званого головного полінома. І доведення цього факту є основним змістом шостого підрозділу 2.6.

Підрозділ 2.7 присвячений дослідженню можливої швидкості зростання аналітичних вектор-функцій F в одиничній кулі $\mathbb{B}^2$ обмеженого **L**-індексу. Основні результати тут містяться в теоремах

2.16, 2.17, 2.18. Застосування того чи іншого варіанту поняття обмеженості індексу реалізується зазвичай за такою схемою: на основі одного з критеріїв доводиться обмеженість індексу розв'язків диф. рівнянь чи їхніх систем, а потім на основі результатів побудованої теорії обмеженого індексу робиться висновок про властивості всіх розв'язків того чи іншого класу диф.рівнянь. Зокрема дається верхня оцінки швидкості зростання всіх розв'язків. Остання обставина дозволяє з оптимізмом очікувати результативних застосувань проведених у роботі досліджень до аналітичної теорії диф.рівнянь.

Результати другого розділу опубліковано в статтях [1–5].

РОЗДІЛ 3. ЦІЛІ ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ВІД БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Як вже відзначалося вище у тексті, поняття обмеженого індексу для аналітичних функцій ([8]) привернуло увагу багатьох математиків (див. [22,33,37,41]), які присвятили свої дослідження аналітичним функціям в різних одновимірних і багатовимірних областях. Концепція обмеженого індексу, зокрема, цікава у зв'язку з теорією розподілу значень і з аналітичною теорією диференціальних рівнянь ([33, 37, 55]). Наприклад, як вже відзначалося вище, аналітична функція має обмежений розподіл значень тоді і тільки тоді, коли її похідна має обмежений індекс (У.Хейман).

Ф. Нурай and Р. Патерсон ([30]) узагальнили концепцію обмеженого індексу для цілих функцій $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^n$, замінивши модуль функції в означенні функції обмеженого індексу на максимум модулів компонент вектор функції. Якщо в $\mathbb{C}^2$ компоненти аналітичних функцій від двох змінних мають обмежений індекс, тоді функція також має обмежений індекс. Навпаки це, взагалі кажучи не так.

Вище ми розглянули аналітичні в одиничній кулі з $\mathbb{C}^2$ вектор-функції $F\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. При цьому ми перенесли на такий клас вектор-функцій встановлені раніше [32] основні критерії обмеженості **L**-індексу аналітичних функцій в одиничній кулі з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$.

Наша мета – дати завершену форму досліджень Ф. Нурая і Р.Ф. Патерсона [30]. Зокрема, вони використовували деякі твердження для цілих вектор-функцій від двох змінних без суворих доведень. Авторами розглянуто поняття обмеженого індексу для функцій $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^p$, а також . Однак, відоме більш загальне означення обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних ([41]) з застосуванням до системи часткових рівнянь ([33]).

Отже, ми розглянемо аналітичні вектор-функції з $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^p$ та введемо означення обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для цих функцій.

3.1 Позначення та означення

Пригадаємо деякі стандартні позначення. Позначимо $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$,
$\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, використовуємо формальні позначення без порушення умов існування відповідних виразів: $AB = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$, $A^B = (a_1^{b_1}, \ldots, a_n^{b_n})$, а запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; подібним чином означаємо відношення $A \leq B$. Для $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ позначимо $K! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$. Додавання, скалярне множення та спряження визначені в $\mathbb{C}^n$ покомпонентно. Для $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ визначимо $\langle a, b \rangle = a_1 \overline{b}_1 + \ldots + a_n \overline{b}_n$, де $\overline{b}_j$— комплексно спряжені числа до b_j.

Для $z_0 = (z_{0,1}, \ldots, z_{0,n}) \in \mathbb{C}^n$ і $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ через $\mathbb{D}^n(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon |z_1 - z_{0,1}| < r_1, \ldots, |z_n - z_{0,n}| < r_n\}$ позначимо полікруг, через $\mathbb{T}^n(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon |z_1 - z_{0,1}| = r_1, \ldots, |z_n - z_{0,n}| = r_n\}$ його кістяк. Замкнений полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n \colon |z_1 - z_{0,1}| \leq r_1, \ldots, |z_n - z_{0,n}| \leq r_n\}$ позначається— $\mathbb{D}^n[z_0, R]$, $\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^n(\mathbf{0}; \mathbf{1})$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$.

Нехай $F(z) = (f_1(z), \ldots, f_p(z))$—аналітична вектор-функція в $\mathbb{C}^n$, тобто $f_j \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ аналітичні для всіх j, $1 \leq j \leq p$. Тоді в околі кожної точки $a \in \mathbb{C}^n$ функція $F(z)$ допускає розвинення у векторний ряд Тейлора

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\|m\|=k} C_m (z-a)^m,$$

де

$$C_m = \frac{1}{m!} F^{(m)}(a) := \frac{1}{m!}\Big(f_1^{(m)}(a), \ldots, f_p^{(m)}(a)\Big),$$
$$f_j^{(m)}(a) := \frac{\partial^{\|m\|} f_j(z)}{\partial z^m} = \frac{\partial^{\|m\|} f_j(z)}{\partial z_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \partial z_n^{m_n}}\Big|_{z=a}$$

для $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $a \in \mathbb{C}^n$.

Нехай $G \subset \mathbb{C}^n$ область і $|\cdot|_p$ норма в $\mathbb{C}^p$. Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)\colon G \to \mathbb{R}_+$ додатна неперервна функція. Аналітична вектор-функція $F\colon G \to \mathbb{C}^p$ називається функцією *обмеженого* $\mathbf{L}$-*індексу (за сукупністю змінних) в області* G, якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $(\forall z \in G)(\forall J \in \mathbb{Z}_+^n)$:

$$\frac{|F^{(J)}(z)|_p}{J!\mathbf{L}^J(z)} \le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon K \in \mathbb{Z}_+^n, \|K\| \le n_0\right\}.$$

Найменше ціле таке число n_0 називається $\mathbf{L}$-індексом за сукупністю змінних вектор-функції F та позначається через $N(F, \mathbf{L}, G, \mathbb{C}^p)$. Для $G = \mathbb{C}^p$ позначимо $N(F, \mathbf{L}) := N(F, \mathbf{L}, \mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p)$, аналітична вектор-функція F називається *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$-*індексу* $N(F, \mathbf{L})$.

Через $\mathbb{Q}^n$ позначимо клас функцій $\mathbf{L}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+^n$ таких, що для всіх $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\forall R \in \mathbb{R}_+^n\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(R) \le \lambda_{2,j}(R) < \infty,$$

де

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z_0 \in \mathbb{C}^n} \inf\left\{l_j(z)/l_j(z_0)\colon z \in \mathbb{D}^n[z_0, R/\mathbf{L}(z_0)]\right\},$$
$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z_0 \in \mathbb{C}^n} \sup\left\{l_j(z)/l_j(z_0)\colon z \in \mathbb{D}^n[z_0, R/\mathbf{L}(z_0)]\right\}.$$

Як і вище у розділі 2, зауважимо, що
$$(\forall R \in \mathbb{R}^n_+)\colon\ \lambda_{1,j}(R) \le 1 \le \lambda_{2,j}(R),$$
а також
$$(\forall j, 1 \le j \le n)(\forall R_1, R_2 \in \mathbb{R}^n_+)\colon\ R_1 < R_2 \implies$$
$$\lambda_{2,j}(R_1) \le \lambda_{2,j}(R_2),\ \lambda_{1,j}(R_1) \ge \lambda_{1,j}(R_2).$$

3.2 Аналоги теореми Фріке для цілих вектор-функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

Доведемо спочатку наступну теорему, аналоги якої є базовими в теорії функцій обмеженого індексу. Вище у вступній частині і в огляді результатів попередників, ми вже це доволі детально обговорювали.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathbf{L} \in \mathbb{Q}^n$ *і* $|A|_p = \max\{|a_j|\colon 1 \le j \le p\}$ *для* $A = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{C}^p$. *Аналітична вектор-функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, якщо для будь-яких* $R \in \mathbb{R}^n_+$ *існує* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $d > 0$ *таке, що для всіх* $z_0 \in \mathbb{C}^n$ *існує* $K_0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K_0\| \le n_0$, *виконуєься нерівність*
$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le n_0, z \in \mathbb{D}^n[z_0, R/\mathbf{L}(z_0)]\right\} \le d\frac{|F^{(K_0)}(z_0)|_p}{K_0!\mathbf{L}^{K_0}(z_0)}. \tag{3.1}$$

Доведення. Необхідність. Нехай F–аналітична вектор-функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з $N = N(F, \mathbf{L}) < \infty$. Для $R \in \mathbb{R}^n_+$ визначимо
$$q = q(R) = \left[2(N+1)\prod_{j=1}^{n}\Big(\big(\lambda_{2,j}(R)\big)^{N+1}\big(\lambda_{1,j}(R)\big)^{-N}\Big)\|R\|\right] + 1,$$
де $[x]$ позначає цілу частину дійсного числа x. Для $p_0 \in \{0, ..., q\}$ і $z_0 \in \mathbb{C}^n$ позначимо:
$$S_{p_0}(z_0, R) = \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le N, z \in \mathbb{D}^n\big[z_0, p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))\big]\right\},$$

$$S^*_{p_0}(z_0,R)=\max\Big\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z_0)}\colon \|K\|\le N, z\in\mathbb{D}^n\big[z_0,p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))\big]\Big\}.$$

Зазначимо, що

$$\mathbb{D}^n[z_0,p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]\subset\mathbb{D}^n[z_0,R/\mathbf{L}(z_0)],$$

тому, для всіх $z\in\mathbb{D}^n\,[z_0,p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]$ за означенням $\lambda_{1,j}(R)$ маємо

$$\frac{\mathbf{L}^K(z_0)}{\mathbf{L}^K(z)}=\frac{{l_1}^{k_1}(z_0)}{{l_1}^{k_1}(z)}\cdot\ldots\cdot\frac{{l_n}^{k_n}(z_0)}{{l_n}^{k_n}(z)}\le$$
$$\le\lambda_{1,1}^{-k_1}(R)\cdot\ldots\cdot\lambda_{1,n}^{-k_n}(R)=\lambda_1^{-K}(R),\quad K=(k_1,\ldots,k_n),$$

де $\lambda_1(R):=(\lambda_{1,1}(R),\ldots,\lambda_{1,n}(R))\in\mathbb{R}^n_+$. Отже,

$$S_{p_0}(z_0,R)=\max\Big\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\|\le N,$$
$$z\in\mathbb{D}^n\,[z_0,p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]\Big\}=$$
$$=\max\Big\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z_0)}\cdot\frac{\mathbf{L}^K(z_0)}{\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\|\le N,$$
$$z\in\mathbb{D}^n[z_0,p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]\Big\}\le$$
$$\le S^*_{p_0}(z_0,R)\max\{\lambda_1(R)^{-K}\colon \|K\|\le N\}\le$$
$$\le S^*_{p_0}(z_0,R)\prod_{j=1}^n(\lambda_{1,j}(R))^{-N}. \tag{3.2}$$

Для всіх $z\in\mathbb{D}^n\,[z_0,p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]$ за означенням $\lambda_{2,j}(R)$, для $K=(k_1,\ldots,k_n)$ маємо

$$\frac{\mathbf{L}^K(z)}{\mathbf{L}^K(z_0)}=\frac{{l_1}^{k_1}(z)}{{l_1}^{k_1}(z_0)}\cdot\ldots\cdot\frac{{l_n}^{k_n}(z)}{{l_n}^{k_n}(z_0)}\le$$
$$\le\lambda_{2,1}^{k_1}(R)\cdot\ldots\cdot\lambda_{2,n}^{k_n}(R)=\lambda_2^K(R), \tag{3.3}$$

де $\lambda_2(R):=(\lambda_{2,1}(R),\ldots,\lambda_{2,n}(R))\in\mathbb{R}^n_+$. Отже,

$$S^*_{p_0}(z_0,R)=\max\Big\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\cdot\frac{\mathbf{L}^K(z)}{\mathbf{L}^K(z_0)}:\|K\|\le N,$$

$$z \in \mathbb{D}^p[z_0, p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]\Big\} \le \max\Big\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\lambda_2(R)^K : \|K\| \le N,$$

$$z \in \mathbb{D}^n[z_0, p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]\Big\} \le S_{p_0}(z_0, R)\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{2,j}(R))^N. \qquad (3.4)$$

Нехай $K_{p_0} \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K_{p_0}\| \le N$ і $z_* \in \mathbb{D}^n\,[z_0, p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]$ такі, що

$$S_{p_0}^*(z_0, R) = \frac{|F^{(K_{p_0})}(z_*)|_p}{K_{p_0}!\mathbf{L}^{K_{p_0}}(z_0)}\ . \qquad (3.5)$$

За принципом максимуму модуля $z_* \in \mathbb{T}^n\,(z_0, p_0R/(q\mathbf{L}(z_0)))$, тому $z_* \neq z_0$. Виберемо $\widetilde{z} = z_0 + \dfrac{p_0-1}{p_0}\,(z_* - z_0)$. Тоді для $\widetilde{z} = (\widetilde{z}^{(1)}, \ldots, \widetilde{z}^{(n)})$, $z_0 = (z_0^{(1)}, \ldots, z_0^{(n)})$, $z_* = (z_*^{(1)}, \ldots, z_*^{(n)})$, $1 \le j \le n$ послідовно маємо

$$|\widetilde{z}^{(j)} - z_0^{(j)}| = \frac{p_0-1}{p_0}|z_*^{(j)} - z_0^{(j)}| = \frac{p_0-1}{p_0}\frac{p_0r_j}{ql_j(z_0)}, \qquad (3.6)$$

$$|\widetilde{z}^{(j)} - z_*^{(j)}| = |z_0^{(j)} + \frac{p_0-1}{p_0}(z_*^{(j)} - z_0^{(j)}) - z_*^{(j)}| =$$

$$= \frac{1}{p_0}|z_0^{(j)} - z_*^{(j)}| = \frac{r_j}{ql_j(z_0)}. \qquad (3.7)$$

Оскільки $\widetilde{z} \in \mathbb{D}^n\,[z_0, (p_0-1)R/(q(R)\mathbf{L}(z_0))]$, то

$$S_{p_0-1}^*(z_0, R) \ge \frac{|F^{(K_{p_0})}(\widetilde{z})|_p}{K_{p_0}!\mathbf{L}^{K_{p_0}}(z_0)}. \qquad (3.8)$$

Зауважимо, що цілком подібно, як і відповідномі місці підрозділу 2.2, встановлюється нерівність

$$\frac{d}{dt}\|F^{(K_{p_0})}(\widetilde{z} + t(z_* - \widetilde{z}))\| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\Big(|z_*^{(j)} - \widetilde{z}^{(j)}| \cdot \|F^{(K_{p_0}+\mathbf{e}_j)}(\widetilde{z} + t(z_* - \widetilde{z}))\|\Big)$$

Тоді з (3.5) і (3.8) послідовно, використавши теорему про середнє значення, отримуємо

$$0 \le S^*_{p_0}(z_0,R) - S^*_{p_0-1}(z_0,R) \le \frac{|F^{(K_{p_0})}(z_*)|_p - |F^{(K_{p_0})}(\widetilde{z})|_p}{K_{p_0}!\mathbf{L}^{K_{p_0}}(z_0)} =$$

$$= \frac{1}{K_{p_0}!\mathbf{L}^{K_{p_0}}(z_0)} \int_0^1 \frac{d}{dt}|F^{(K_{p_0})}(\widetilde{z}+t(z_*-\widetilde{z}))|_p dt \le$$

$$\le \frac{1}{K_{p_0}!\mathbf{L}^{K_{p_0}}(z_0)} \int_0^1 \sum_{j=1}^n \Big(|z_*^{(j)} - \widetilde{z}^{(j)}| \cdot |F^{(K_{p_0}+e_j)}(\widetilde{z}+t(z_*-\widetilde{z}))|_p\Big) dt =$$

$$= \frac{1}{K_{p_0}!\mathbf{L}^{K_{p_0}}(z_0)} \sum_{j=1}^n \Big(|z_*^{(j)} - \widetilde{z}^{(j)}| \cdot |F^{(K_{p_0}+e_j)}(\widetilde{z}+t^*(z_*-\widetilde{z}))|_p\Big), \quad (3.9)$$

де $0 \le t^* \le 1$, і $(\widetilde{z}+t^*(z_*-\widetilde{z})) \in \mathbb{D}^n[z_0, p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]$.
Для $z \in \mathbb{D}^n[z_0, p_0R/(q\mathbf{L}(z_0))]$ і $J=(j_1,\ldots,j_n) \in \mathbb{Z}^n_+\colon \|J\| \le N+1$, за означенням сталої $N=N(F,\mathbf{L})$ і $\lambda_{2,j}\big(p_0R/q\big)$, маємо

$$\frac{|F^{(J)}(z)|_p}{J!\mathbf{L}^J(z_0)} = \frac{|F^{(J)}(z)|_p}{J!\mathbf{L}^J(z_0)} \cdot \frac{\mathbf{L}^J(z)}{\mathbf{L}^J(z)} \le$$

$$\le \frac{|F^{(J)}(z)|_p}{J!\mathbf{L}^J(z)} \max\left\{\frac{\mathbf{L}^J(z)}{\mathbf{L}^J(z_0)}\colon \|J\| \le N+1\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le N\right\} \cdot \prod_{j=1}^n \big(\lambda_{2,j}\big(p_0R/q\big)\big)^{N+1} \le$$

$$\le \prod_{j=1}^n \big(\lambda_{2,j}(R)\big)^{N+1} \cdot \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le N\right\} =$$

$$= \prod_{j=1}^n \big(\lambda_{2,j}(R)\big)^{N+1} \cdot S_{p_0}(z_0,R) \le$$

$$\le \prod_{j=1}^n \big(\lambda_{2,j}(R)\big)^{N+1} \cdot S^*_{p_0}(z_0,R) \cdot \prod_{j=1}^n \big(\lambda_{1,j}(R)\big)^{-N}.$$

Отже, з (3.9), (3.6) маємо

$$0 \le S^*_{p_0}(z_0,R) - S^*_{p_0-1}(z_0,R) \le$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\left(|z_*^{(j)}-\widetilde{z}^{(j)}|\cdot\frac{(K_{p_0}+e_j)!\mathbf{L}^{K_{p_0}+e_j}(z_0)}{K_{p_0}!\mathbf{L}^{K_{p_0}}(z_0)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\|F^{(K_{p_0}+e_j)}(\widetilde{z}+t^*(z_*-\widetilde{z}))\|}{(K_{p_0}+e_j)!\mathbf{L}^{K_{p_0}+e_j}(z_0)}\right)\leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^{n}\left(\big(\lambda_{2,j}(R)\big)^{N+1}\big(\lambda_{1,j}(R)\big)^{-N}\right)S_{p_0}^*(z_0,R)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}|z_*^{(j)}-\widetilde{z}^{(j)}|\langle e_j,K_{p_0}+e_j\rangle\mathbf{L}^{e_j}(z_0).$$

З (3.7) маємо, що

$$\sum_{j=1}^{n}|z_*^{(j)}-\widetilde{z}^{(j)}|\langle e_j,K_{p_0}+e_j\rangle\mathbf{L}^{e_j}(z_0)=\frac{1}{q(R)}\sum_{j=1}^{n}\langle e_j,K_{p_0}+e_j\rangle R^{e_j},$$

крім цього

$$\sum_{j=1}^{n}\langle e_j,K_{p_0}+e_j\rangle R^{e_j}\leq (N+1)\sum_{j=1}^{n}R^{e_j}=(N+1)\|R\|.$$

Тому, використовуючи вибір $q(R)$ отримуємо

$$S_{p_0}^*(z_0,R)-S_{p_0-1}^*(z_0,R)\leq$$

$$\leq\prod_{j=1}^{n}\left(\big(\lambda_{2,j}(R)\big)^{N+1}\big(\lambda_{1,j}(R)\big)^{-N}\right)\frac{S_{p_0}^*(z_0,R)}{q(R)}(N+1)\|R\|\leq\frac{S_{p_0}^*(z_0,R)}{2}.$$

Звідси випливає, що $S_{p_0}^*(z_0,R)\leq 2S_{p_0-1}^*(z_0,R)$ і враховувавши (3.2) і (2.7) маємо

$$S_{p_0}(z_0,R)\leq 2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}S_{p_0-1}^*(z_0,R)\leq$$

$$\leq 2\prod_{j=1}^{n}\left((\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N}\right)S_{p_0-1}(z_0,R).$$

Тоді, застосовуючи останню нерівність потрібну кількість разів, нарешті маємо, що

$$S_q(z_0,R) \leq 2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N} S_{q-1}(z_0,R) \leq \dots$$
$$\dots \leq 2^q \prod_{j=1}^{n}\Big((\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N}\Big)^q S_0(z_0,R),$$

звідки

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq N, z\in \mathbb{D}^p\left[z_0, R/\mathbf{L}(z_0)\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq N,\right.$$
$$\left. z\in \mathbb{D}^p\left[z_0, qR/(q\mathbf{L}(z_0))\right]\right\} = S_q(z_0,R) \leq$$
$$\leq 2^q \prod_{j=1}^{n}\Big((\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N}\Big)^q \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z_0)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z_0)}\colon \|K\| \leq N\right\}.$$

Остаточно тепер отримуємо, що з останньої нерівності випливає нерівність (3.1) з $d = 2^q\prod_{j=1}^{n}\Big((\lambda_{1,j}(R))^{-N}(\lambda_{2,j}(R))^{N}\Big)^q$ і при деякому K_0 такому, що $\|K_0\| \leq N$. Необхідність умови (3.1) доведено.

Достатність. Припустимо, що для кожного $R\in\mathbb{R}^n_+$ існують $n_0\in\mathbb{Z}_+$, $d>1$, такі, що для всіх $z_0\in\mathbb{C}^n_+$ і для деяких $K_0\in\mathbb{Z}^n_+$, $\|K_0\|\leq n_0$, виконується нерівність (3.1). За інтегральною формулою Коші маємо $(\forall z_0\in\mathbb{C}^n)$, $(\forall K\in\mathbb{Z}^n_+)$, $(\forall S\in\mathbb{Z}^n_+)$:

$$\frac{F^{(K+S)}(z_0)}{S!} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbb{T}^n(z_0,R/\mathbf{L}(z_0))}\frac{F^{(K)}(z)}{(z-z_0)^{S+\mathbf{1}}}dz.$$

Отже,

$$\frac{|F^{(K+S)}(z_0)|_p}{S!} \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n(z_0,R/\mathbf{L}(z_0))}\frac{|F^{(K)}(z)|_p}{|(z-z_0)^{S+\mathbf{1}}|}|dz| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{T}^n(z_0,R/\mathbf{L}(z_0))} |F^{(K)}(z)|_p \frac{\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}}(z_0)}{(2\pi)^n R^{S+\mathbf{1}}}|dz|,$$

де $|dz| = |dz_1| \cdot \ldots \cdot |dz_n|$. Тому, з (3.1) отримуємо, що

$$\frac{|F^{(K+S)}(z_0)|_p}{S!} \leq$$
$$\leq \frac{dK!}{K_0!(2\pi)^n}|F^{(K_0)}(z_0)|_p \frac{\mathbf{L}^{S+\mathbf{1}}(z_0)}{\mathbf{L}^{K_0}(z_0)R^{S+\mathbf{1}}} \int_{\mathbb{T}^n(z_0,R/\mathbf{L}(z_0))} \mathbf{L}^K(z)|dz|.$$

Але, для всіх $z \in \mathbb{D}^n[z_0, R/\mathbf{L}(z_0)]$ за означенням $\lambda_{2,j}(R)$ маємо

$$\mathbf{L}^K(z) = \mathbf{L}^K(z_0) \cdot \frac{\mathbf{L}^K(z)}{\mathbf{L}^K(z_0)} = \mathbf{L}^K(z_0) \cdot \frac{{l_1}^{k_1}(z)}{{l_1}^{k_1}(z_0)} \cdot \ldots \cdot \frac{{l_n}^{k_n}(z)}{{l_n}^{k_n}(z_0)} \leq$$
$$\leq \mathbf{L}^K(z_0)\lambda_{2,1}^{k_1}(R) \cdot \ldots \cdot \lambda_{2,n}^{k_n}(R) = \mathbf{L}^K(z_0)\lambda_2^K(R), \quad K = (k_1, \ldots, k_n).$$

Тому застосовуючи останню нерівність до попередньої нерівності, отримаємо, що

$$\frac{|F^{(K+S)}(z_0)|_p}{(K+S)!\mathbf{L}^{K+S}(z_0)} \leq \frac{|F^{(K_0)}(z_0)|_p}{K_0!\mathbf{L}^{K_0}(z_0)} \frac{dK!S!}{(K+S)!} \frac{\lambda_2^K(R)}{R^S}. \tag{3.10}$$

Зазначимо, що

$$\frac{K!S!}{(K+S)!} \leq 1 \quad (\forall K, S \in \mathbb{Z}_+^n),$$

а також $R^S \to +\infty$ ($\|S\| \to +\infty$) для всіх $R \in (1, +\infty)^n$. Таким чином, для кожного фіксованого $R \in (1, +\infty)^n$ і всіх $K \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K\| \leq n_0$, існує $s_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $S \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|S\| \geq s_0$, виконується нерівність

$$\frac{dK!S!}{(K+S)!} \frac{\lambda_2^K(R)}{R^S} \leq 1.$$

Тому, з огляду на (3.10), маємо

$$\frac{|F^{(K+S)}(z_0)|_p}{(K+S)!\mathbf{L}^{K+S}(z_0)} \leq \frac{|F^{(K_0)}(z_0)|_p}{K_0!\mathbf{L}^{K_0}(z_0)}$$

для всіх K, S таких, що $\|K_0\| \leq n_0, \|S\| \geq s_0$. Це означає, що $\forall z \in \mathbb{C}^n \ \ \forall J \in \mathbb{Z}_+^n :$

$$\frac{|F^J(z)|_p}{J!\mathbf{L}^J(z)} \leq \max\left\{\frac{|F^K(z)|_p}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon K \in \mathbb{Z}_+^p, \|K\| \leq s_0 + n_0\right\}.$$

де s_0 і n_0 не залежать від z_0. Отже, аналітична вектор-функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних $N(F, \mathbf{L}) \leq s_0 + n_0$. Теорема доведена. $\square$

З теореми 3.1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.1. *Нехай* $\mathbf{L} \in \mathbb{Q}^p$ *і* $\|\cdot\|_0$ *– деяка норма в* $\mathbb{C}^p$. *Аналітична вектор-функція* $F\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних за* sup*-нормою тоді і тільки тоді, коли вона має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних за нормою* $\|\cdot\|_0$.

Доведення. Нагадаємо, що ([90]) $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ є двома нормами в $\mathbb{C}^p$, тоді існують константи $C_1, C_2 \in (0, +\infty)$ такі, що $C_1\|w\|_1 \leq \|w\|_2 \leq C_2\|w\|_1$ для кожного $w \in \mathbb{C}^p$. Таким чином, для кожного $K \in \mathbb{Z}_+^p$ і для кожного $z \in \mathbb{C}^p$ отримуємо

$$C_1\|F^{(K)}(z)\| \leq \|F^{(K)}(z)\|_0 \leq C_2\|F^{(K)}(z)\|,$$

де $\|\cdot\|$ є sup-норма. Використовуючи наведені нерівності та теорему 3.1 для випадку норми Евкліда, ми можемо перевірити еквівалентність цих норм для вектор-функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. $\square$

З наслідку 3.1, зокрема, випливає, що замість sup-норми $\|A\| = \max\limits_{1\leq j\leq p}|a_j|$ можна розглядати в теоремі 3.1 Евклідову норму $\|A\|_E = \sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_p|^2}$, де $A = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{C}^p$.

Висновки до розділу 3

Розділ 3 присвячений встановленню аналога одновимірної теореми Фріке у випадку цілих вектор-функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ і природного узагальнення поняття цілої функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу на даний випадок. Загалом цей аналог теореми Фріке дає критерій обмеженості $\mathbf{L}$-індексу в термінах локально регулярного поводження норм частинних похідних вектор-функцій.

Факт встановлення цієї теореми дає обгрунтовані підстави зробити припущення, що у подальшому аналогічні базові для теорії теореми можна буде довести в найзагальнішій ситуації, як для аналітичних вектор-функцій $F\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^p$ в одиничній кулі $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$, так і для цілих вектор-функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$. Варто зазначити, що до цього часу як у випадку цілих вектор-функцій і обмеженого індексу, так і у випадку аналітичних вектор-функцій і обмеженого $\mathbf{L}$-індексу, як і у даній дисертації, всі досягнення були пов'язані з вектор-функціями на $\mathbb{C}^2$ чи на $\mathbb{C}$ (аналітичні криві). Спроби отримати, наприклад, аналог теореми Хеймана у найзагальнішому випадку, наштовхуються в даний час на технічні труднощі, які можливо є і принциповими.

Результати третього розділу опубліковано у статті [6].

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню поняття обмеженості **L**-індексу в класі аналітичних в двовимірній кулі вектор-функцій зі значеннями в двовимірному комплексному просторі. У цьому випадку вдалося побудувати основи теорії обмеженого **L**-індексу, зокрема довести такі базові для подальшого розвитку теорії теореми, як аналоги теорем Фріке і Хеймана. Доведення аналогів як згаданих теорем, так і ряду інших критеріїв, поряд зі здійсненою загальною побудовою доволі логічно замкненого кістяка зазначеної теорії, слід віднести до основних досягнень дисертації. З огляду на те, що у випадку аналогів такої теорії в цілому ряді інших важливих класів аналітичних і цілих функцій, її результати знаходять важливі застосування в аналітичній теорії диференціальних рівнянь, можна обгрунтовано сподіватися на подібно успішні застосування результатів даного дисертаційного дослідження. З іншого боку, успішне доведення аналогу теореми Фріке в найзагальнішій ситуації для цілих вектор-функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ дає підстави припустити, що вподальшому базові для теорії теореми можна буде довести в найзагальнішій ситуації, як для аналітичних вектор-функцій $F\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^p$ в одиничній кулі $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$, так і для цілих вектор-функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$.

На даний момент часу, як у випадку цілих вектор-функцій і обмеженого індексу, так і у випадку аналітичних вектор-функцій і обмеженого **L**-індексу, так і у даній дисертації, всі досягнення були пов'язані з вектор-функціями на $\mathbb{C}^2$ чи на $\mathbb{C}$ (аналітичні криві).

Ряд тверджень, доведених у дисертації, узагальнюють відповідні як одновимірні теореми Г. Фріке, У. Хеймана, М.М. Шеремети та інших, так і отримані раніше А.І.Бандурою і О.Б. Скасківим результати для аналітичних функцій в одиничній кулі зі значеннями в комплексній площині.

Основні результати дисертації є новими і мають завершений характер. Отримані результати можуть стати основою для подальших результативних досліджень, як в рамках розвинутої теорії та її можливого поширення на згадані вище відповідні загальні класи аналітичних і цілих функцій, так і для появи нових їхніх застосувань як в аналітичній теорії диференційних рівнянь, так і в інших розділах математики, в яких виникають подібні об'єкти.

Достовірність результатів дисертації підтверджується чіткими і детальними доведеннями, а також тим, що вони опубліковані у фахових журналах і апробовані на спеціалізованих наукових семінарах і на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях.

БІБЛІОҐРАФІЯ

1. Baksa V.P. *Analytic vector-functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Carpathian Math. Publ. – 2019. – V.11, no.2. – P.213–227.
2. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded L-index in the unit ball* // Bukovinian Math. Journal. -– 2019. – V.7, no.2. – P.6–13.
3. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Analogs of Hayman's Theorem and of logarithmic criterion for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Math. Slovaca. – 2020. – V.70, no.5. – P.1141–1152.
4. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Analogs of Fricke's theorems for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Proceedings of IAMM of NAS of Ukraine. -– 2019. – V.33, – P.16–26.
5. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Growth estimates for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Constructive Mathematical Analysis. -– 2020. – V.3, no.1. – P.9–19.
6. Baksa V.P., Bandura A.I. *Entire multivariate vector-valued functions of bounded L-index: analog of Fricke's theorem* // Mat. Stud. -– 2020. – V.54, no.1. – P.56–63.
7. Macdonnell J.J. *Some convergence theorems for Dirichlet-type series whose coefficients are entire functions of bounded index.* Doctoral dissertation, Catholic University of America, Washington, 1957.
8. Lepson B. *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index* // Proc. Sympos. Pure Math. – 1968. – V.2. – P.298–307.

9. Krishna G.J., Shah S.M. *Functions of bounded indices in one and several complex variables* // In: Mathematical Essays Dedicated to A. J. Macintyre. – Athens, Ohio: Ohio University Press, 1970. – P.223–235.
10. Gross F. *Entire functions of bounded index* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1967. – V.18. – P.974–980.
11. Shah S.M. *Entire functions of bounded index* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1968. – V.19, no.5. – P.1017–1022.
12. Lepson B. *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index* // Lect. Notes, Summer Institute on Entire Functions. – Univ. of California. – Calif.: La Jolla, 1966.
13. Hayman W.K. *Differential inequalities and local valency* // Pacific J. Math. – 1973. – V.44, no.1. – P.117–137.
14. Fricke G.H., Shah S.M. *On bounded value distribution and bounded index* // Nonlinear Anal. – 1978. – V.2, no.4. – P.423–435.
15. Fricke G.H., Roy R., Shah S.M. *Bounded index, entire solutions of ordinary differential equations and summability methods* // Int. J. Math. Math. Sci. – 1981. – V.4, no.3, – P.417–434.
16. Shah S. *Entire functions of bounded value distribution and gap power series* // In: P. Erdős, L. Alpár, G. Halász, A. Sárközy (eds.) Studies in Pure Mathematics To the Memory of Paul Turán, Birkhäuser Basel. – 1983. – P.629–634.
17. Nuray F., Patterson R.F. *Entire bivariate functions of exponential type* // Bull. Math. Sci. – 2015. – V.5, no.2, – P.171–177.
18. Roy R., Shah S.M. *Vector-valued entire functions satisfying a differential equation* // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – V.116, no.2. – P.349–362.

19. Shah S.M. *Entire solutions of linear differential equations and bounds for growth and index numbers* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 1983. – V.94. P.49–60.
20. Kuzyk A.D., Sheremeta M.N. *Entire functions of bounded l-distribution of values* // Math. Notes. – 1986. – V.39, no.1. – P.3–8.
21. Kuzyk A.D., Sheremeta M.N. *On entire functions, satisfying linear differential equations* // Diff. Equations. -– 1990. – V.26, no.10, -– P.1716–1722.
22. Sheremeta M. Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers, 1999.
23. Bordulyak M.T. *A proof of Sheremeta conjecture concerning entire function of bounded l-index* // Mat. Stud. – 1999. – V.12, no.1. – P.108–110.
24. Goldberg A.A., Sheremeta M.N. *Existence of an entire transcendental function of bounded l-index* // Math. Notes. – 1995. – V.57, no.1. – P.88–90.
25. Bordulyak M.T. *On the growth of entire solutions of linear differential equations* // Mat. Stud. – 2000. – V.13, no.2. – P.219–223.
26. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Analytic functions in the unit ball of bounded L-index: asymptotic and local properties* // Mat. Stud. – 2017. – V.48, no.1. P.37–73.
27. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Growth of entire functions of bounded L-index in direction* // Mat. Met. Phys. mech. fields. – 2017. – V.60, no.1. P.22–31. Eng. transl.: A. I. Bandura and O. B. Skaskiv, Growth of entire functions of bounded L-index in direction // J. Math. Sci. – 2019. – V.240, no.1. – P.21–33.
28. Roy R., Shah S.M. *Growth properties of vector entire functions satisfying differential equations* // Indian J. Math. – 1986. – V.28, no.1, – P.25–35.

29. Salmassi M. *Some classes of entire functions of exponential type in one and several complex variables* // Doctoral dissertation, University of Kentucky, Lexington, Kentucky (1978).
30. Nuray F., Patterson R.F. *Vector-valued bivariate entire functions of bounded index satisfying a system of differential equations* // Mat. Stud. – 2018. – V.49, no.1. – P.67–74.
31. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Boundedness of the L-index in a direction of entire solutions of second order partial differential equation* // Acta Comment. Univ. Tartu. Math. – 2018. – V.22, no.2. – P.223–234.
32. Bandura A., Skaskiv O. *Sufficient conditions of boundedness of L-index and analog of Hayman's Theorem for analytic functions in a ball* // Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. – 2018. – V.63, no.4. – P.483–501.
33. Bandura A., Skaskiv O. *Analog of Hayman's Theorem and its Application to Some System of Linear Partial Differential Equations* // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2019. – V.15, no.2. – P.170–191.
34. Heath L.F. *Vector-valued entire functions of bounded index satisfying a differential equation* // Journal of Research of NBS. – 1978. – V.83, no.1. – P.75–79.
35. Bandura A., Skaskiv O. Entire functions of several variables of bounded index. – Lviv: Publisher I. E. Chyzhykov, 2016. – 128 p.
36. Bandura A., Skaskiv O. Analytic functions in the unit Ball. Bounded L-index in joint variables and solutions of systems of PDE's. – Beau-Bassin: LAP Lambert Academic Publishing, 2017. – 100 p.
37. Sheremeta M. Geometric properties of analytic solutions of differential equations. – Lviv: Publisher I. E. Chyzhykov, 2019. – 164 p.

38. Shah S.M. *Entire functions of bounded index* // Lect. Notes in Math. – 1977. – V.589. – P.117–145.
39. Salmassi M. *Functions of bounded indices in several variables* // Indian J. Math. – 1989. – V.31, no.3. – P. 249–257.
40. Бордуляк М.Т. Обмеженість L-індексу цілих функцій багатьох комплексних змінних // дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Львів. ун-т ім. І. Франка, Львів. 1996. 01.01.01 — Математичний аналіз
41. Bandura A., Skaskiv O. *Asymptotic estimates of entire functions of bounded L-index in joint variables* // Novi Sad J. Math. – 2018. – V.48, no.1. – P.103–116.
42. Bandura A.I., Bordulyak M.T., Skaskiv O.B. *Sufficient conditions of boundedness of L-index in joint variables* // Mat. Stud. – 2016. – V.45, no.1. – P.12–26.
43. Bandura A., Skaskiv O., Filevych P. *Properties of entire solutions of some linear PDE's* // J. Appl. Math. Comput. Mech. – 2017. – V.16, no.2. – P.17–28.
44. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Exhaustion by balls and entire functions of bounded L-index in joint variables* // Ufa Math. J. – 2019. – V.11, no.1. – P.100–113.
45. Бордуляк М.Т., Шеремета М.М. *Обмеженість L-індексу цілої функції багатьох змінних* // Допов. НАН України. – 1993. – № 9. – С.10–13.
46. Bandura A.I., Petrechko N.V., Skaskiv O.B. *Analytic in a polydisc functions of bounded L-index in joint variables* // Mat. Stud. – 2016. – V.46, no.1. – P.72–80.
47. Bandura A., Petrechko N., Skaskiv O. *Maximum modulus in a bidisc of analytic functions of bounded L-index and an analogue of Hayman's theorem* // Mat. Bohemica. – 2018. – V.143, no.4. – P.339–354.

48. Bandura A.I., Petrechko N.V. *Properties of power series of analytic in a bidisc functions of bounded L-index in joint variables* // Carpathian Math. Publl. – 2017. – V.9, no.1. -– P.6–12.
49. Бандура А., Петречко Н. *Властивості степеневого розвинення цілої функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних*
Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2016. – Т.82. – С.27–33.
50. Bandura A., Skaskiv O. *Analytic functions in the unit ball of bounded L-index in joint variables and of bounded L-index in direction: a connection between these classes.* // Demonstr. Math. – 2019. – V.52, no.1. – P.82–87.
51. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Partial logarithmic derivatives and distribution of zeros of analytic functions in the unit ball of bounded L-index in joint variables* // Ukr. Matem. Visn. – 2018. – V.15, no.2. – P.177–193. Engl. transl.: J. Math. Sci. – 2019. – V.239, no.1. – P.17-29. doi: 10.1007/s10958-019-04284-z
52. Bandura A.I. *Analytic functions in the unit ball of bounded value L-distribution in a direction* // Mat. Stud. – 2018. – V.49, no.1. – P.75–79. doi: 10.15330/ms.49.1.75-79
53. Bandura A., Skaskiv O. *Analytic in an unit ball functions of bounded L-index in joint variables* // Ukr. Mat. Visn. – 2017. – V.14, no.1. – P.1–15. Engl. transl.: Bandura A., Skaskiv O. *Functions analytic in a unit ball of bounded L-index in joint variables* // J. Math. Sci. – 2017. V.227, no.1. – P.1–12. doi: 10.1007/s10958-017-3570-6
54. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Analytic functions in the unit ball of bounded L-index: asymptotic and local properties* // Mat. Stud. – 2017. – V.48, no.1. – P.37–73.
55. Bandura A., Skaskiv O. *Boundedness of the L-index in a direction of entire solutions of second order partial differential equation* //

Acta Comment. Univ. Tartu. Math. – 2018. – V.22, no.2. – P.223–234. doi: 10.12697/ACUTM.2018.22.18

56. Bandura A.I., Skaskiv O.B., Tsvigun, V.L. *Some characteristic properties of analytic functions in* $D \times C$ *of bounded* L*-index in joint variables* // Bukovyn. Mat. Zh. – 2018. – V.6, no.1-2. – P.21–31.
57. Bandura A.I., Skaskiv O.B., Tsvigun V.L. *The functions of bounded* L*-index in the collection of variables analytic in* $D \times C$ // Journal of Math. Sc. — 2020. – V.246, no.2. -– P.256–263. OI: 10.1007/s10958-020-04735-y Translated from Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya, 2017, V.60, no.3, p. 115–121.
58. Bandura A., Skaskiv O. *Slice holomorphic functions in several variables with bounded* L*-index in direction* // Axioms. – 2019. – V.8, no.3. Article ID: 88 (2019). doi: 10.3390/axioms8030088 88
59. Bandura A., Skaskiv O., Smolovyk L. *Slice holomorphic solutions of some directional differential equations with bounded* L*-index in the same direction* // Demonstr. Math. – 2019. – V.52, no.1. – P.482–489. doi: 10.1515/dema-2019-0043.
60. Bandura A., Skaskiv O. *Some criteria of boundedness of the* L*-index in direction for slice holomorphic functions of several complex variables* // J. Math. Sci. – 2020. – V.244, no.1. – P.1–21. doi.org/10.1007/s10958-019-04600-7
61. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Sum and product of functions having bounded* L*-index in a direction which are slice holomorphic in the same direction* // Прикарпат. Вісн. НТШ. Число. – 2019. – Т.53, № 1. – С.9—20. (2019).
62. Nuray F., Patterson R.F. *Multivalence of bivariate functions of bounded index* // Le Matematiche. – 2015. – V.70, no.2. – P.225–233. doi: 10.4418/2015.70.2.14

63. Patterson R.F., Nuray F. *A characterization of holomorphic bivariate functions of bounded index* // Math. Slovaca. – 2017. – V.67, no.3. – P.731–736. doi: 10.1515/ms-2017-0005
64. Bordulyak M.T., Sheremeta M.M. *Boundedness of l-index of analytic curves* // Mat. Stud. — 2011. – V.36, no.2. – P.152–161.
65. Шеремета М. *Обмеженість l-M-індексу аналітичнх кривих*// Вісн. Львів. ун-ту, сер мех.-мат. – 2011. – Вип.75. – С. 226–231.
66. Бандура А.І., Скасків О.Б. *Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком* // Мат. Студії. – 2007. – Т.27, № 1. – С.30–52 (2007).
67. Бандура А., Скасків О. *Метричний простір Іера, теорема існування та цілі функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних* // Буковин. матем. журн. – 2017. – Т.5, № 3-4. – С.8–14 (2017).
68. Бандура А. *Нові критерії обмеженості L-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій* // Мат. вісник НТШ. – 2016. – Т.13. – С.58–67.
69. Bandura A. *Composition of entire functions and bounded L-index in direction* // Mat. Stud. – 2017. – V.47, no.2. – P.179–184. doi: 10.15330/ms.47.2.179-184
70. Bandura A.I. *The metric properties of a space of entire functions of bounded L-index in direction* // Прикарпатський науковий вісн. НТШ. Число. – 2012. – № 1 (17). – С.46–52.
71. Bandura A.I. *A class of entire functions of unbounded index in each direction* // Mat. Stud. – 2015. – V.44, no.1. – P.107–112. doi: 10.15330/ms.44.1.107-112
72. Bandura A.I. *Entire function of unbounded index in any real direction* // Прикарпатський науковий вісн. НТШ. Число. – 2015. – № 1 (29). – С.24–30.

73. Bandura A.I. *Properties of positive continuous functions in* $\mathbb{C}^n$ // Carpathian Math. Publ. – 2015. – V.7, no.2. – P.137–147. doi: 10.15330/cmp.7.2.137-147
74. Bandura A.I. *Sum of entire functions of bounded* L*-index in direction* // Mat. Stud. – 2016. – V.45, no.2. – P.149–158. doi: 10.15330/ms.45.2.149-158
75. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Boundedness of* L*-index in direction of functions of the form* $f(\langle z, m\rangle)$ *and existence theorems* // Mat. Stud. – 2014.– V.41, no.1. – P.45–52.
76. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Open problems for entire functions of bounded index in direction* // Mat. Stud. – 2015. – V.43, no.1. – P.103–109. doi: 10.15330/ms.43.1.103-109
77. Бандура А. *Достатні умови обмеженості* L *індексу за напрямом для цілих функцій з "плоскими"нулями роду* p // Мат. вісник НТШ. – 2009. – Т.6. – С.44–49 (2009).
78. Бандура А.І., Скасків О.Б. *Цілі функції обмеженого і необмеженого індексу за напрямком* // Мат. Студ. – 2007. – Т.27, № 2. – С.211–215 (2007).
79. Бандура А., Скасків О. Логарифмічна похідна за напрямком та розподіл нулів цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком // Укр. мат. журн. – 2017. – Т.69, № 3. – С.426–432 (2017). Engl. transl.: Bandura A., Skaskiv O. Directional logarithmic derivative and the distribution of zeros of an entire function of bounded L-index along the direction // Ukr. Math. J. – 2017. – V.63, no.3. – P.500–508. doi: 10.1007/s11253-017-1377-8
80. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Analytic functions in the unit ball and sufficient sets of boundedness of* L*-index in direction* // Bukovyn. Mat. Zh. – 2018. – V.6, no. 1-2. – P.13–30.
81. Бандура А.І., Скасків О.Б., Цвігун В.Л. *Аналітичні функції в* $D \times C$ *обмеженого індексу за сукупністю змінних* // При-

карпатський вісник НТШ. Число. – 2018. – Т.1, № 45. – С.9–16 (2018).

82. Bandura A.I., Skaskiv O.B., Tsvigun V.L. *The functions of bounded* **L***-index in the collection of variables analytic in* $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ // J. Math. Sci. – 2020. – V.246. – P.256-–263. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04735-y
83. Sokal, A.: Roots of a formal power series, with applications to graph enumeration and q-series, `http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/csgnotes/sokal/`
84. Sokal, A.: Some wonderful conjectures (but almost no theorems) at the boundary between analysis, combinatorics and probability, `http://ipht.cea.fr/statcomb2009/misc/Sokal_20091109.pdf`
85. Wang L., Zhang C. *Zeros of the deformed exponential function* // Adv. Math. – 2018. – V.332. – P.311–348. doi: 10.1016/j.aim.2018.05.006
86. Zhang C. *An asymptotic formula for the zeros of the deformed exponential function* // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – V.441, no.2. – P.565–573. doi: 10.1016/j.jmaa.2016.04.027.
87. Sheremeta Z.M., Sheremeta M.M. *On the boundedness l-index of entire solutions of some differential equation* // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. – 2007. – V.2. – P.31–36.
88. Bandura A.I. *Some improvements of criteria of L-index boundedness in direction* // Mat. Stud. – 2017. – V.47, no.1. – P.27–32. doi: 10.15330/ms.47.1.27-32
89. Mykytyuk Ya.V., Fedynyak S.I., Sheremeta M.M. *Dirichlet series of bounded l-M index* // Mat. Stud. – 1999. – V.11, no. 2. – P.159–166.
90. Lelong P., Gruman L. Entire functions of several complex ariables. - Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, New York-Tokyo, 1986.

ДОДАТОК

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Baksa V.P. *Analytic vector-functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Carpathian Math. Publ. – 2019. – V.11, №2. – P.213–227. (Scopus, WoS) doi:10.15330/cmp.11.2.213-227
2. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Growth estimates for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Constructive Mathematical Analysis. – 2020. V.3, №1. – P.9–19. doi: 10.33205/cma.650977 (журнал в Туреччині - країна входить до Організації економічного співробітництва та розвитку, тому публікація фахова)
3. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Hayman's Theorem and of logarithmic criterion for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables* // Math. Slovaca. – 2020. V.70, №5. – P.1141–1152. (Scopus, WoS)
4. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded L-index in the unit ball* // Bukovinian Math. Journal.– 2019. V.7, №2. – P.6–13. (входить в перелік **b)** укр. фахових видань)
5. Baksa V.P, Bandura A.I., Skaskiv O.B., *Analogs of Fricke's theorems for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded L-index in joint variables*// Proceedings of IAMM of NAS of Ukraine.– 2019. V.33, – P.16–26. doi: 10.37069/1683-4720-2019-33-1 (входить в перелік **b)** укр. фахових видань)
6. Baksa V.P, Bandura A.I., *Entire multivariate vector-valued functions of bounded L-index: analog of Fricke's theorem*// Mat. Stud. – 2020 V.54, №1. – P.56–63. (Scopus)

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Baksa V.P., Skaskiv O.B., Bandura A.I. Local behavior of analytic vector-valued functions of bounded L-index in joint variables //Int. conf. “Infinite dimensional analysis and topology” (Ivano- Frankivsk, October 16-20, 2019): Book of Abstracts. –Ivano-Frankivsk, 2019. – P.1—2.
2. Baksa V., Bandura A., Skaskiv O. Analytic in the unit ball vector-functions having bounded L-index in joint variables // Int. conference "On the trail of women in mathematics - in honor of Sofia Kowalewska” (Krakow, Poland, August 31 - September 2 2019): Book of abstracts. – Krakow, Poland, AGH University of Science and Technology, 2019. – P.16—17.
3. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. Estimate of maximum modulus on the skeleton of analytic vector-function in ball // Всеукр. наук. конф.“Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 26 лютого - 1 березня, 2020 р.): Тези доповідей.—Івано-Франківськ, 2020. — С.32–33.
4. Baksa V.P., Bandura A.I., Skaskiv O.B. *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded l-index in the unit ball* // Abstracts of XI Inter. Skorobatko math. conf. - Lviv, October 26-30, 2020. – P.11.