Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Войтович Христина Олегівна

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

АПРОКСИМАЦІЙНІ ТА АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ З ПРОСТОРІВ ГАРДІ В ДЕЯКИХ ОБЛАСТЯХ

Спеціальність 111 — "Математика"
(Галузь знань 11 - "Математика та статистика")

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _______ Х. О. Войтович

Науковий керівник:
Дільний Володимир Миколайович
доктор фізико-математичних наук, доцент

Дрогобич – 2020

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ

Войтович Х. О. Апроксимаційні та асимтотичні властивості функцій з просторів Гарді в деяких областях. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — "Математика" (Галузь знань 11 - "Математика та статистика"). — Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Львівський національний університет імені Івана Франка, Дрогобич, 2020.

Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, висновків до кожного з розділів і загальних висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження. Також, обґрунтовано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами кафедри та особистий внесок автора дисертації. Наведено список конференцій і наукових семінарів, на яких апробовано результати дисертаційного дослідження та список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації.

Дисертаційне дослідження присвячене питанням асимптотичних та апроксимаційних наближень у просторах аналітичних функцій та їх застосуванням в теорії інформації.

У дисертаційній роботі основним об'єктом дослідження є класичні простори Гарді, вагові простори Гарді та простори Пелі - Вінера.

У першому розділі дисертації міститься огляд літератури за те-

мою дисертації і описані важливі відомості з історії розвитку досліджень класичних просторів Гарді, вагових просторів Гарді, просторів Пелі - Вінера, теорії сигнальних процесів, теорії фільтрів Вінера та перетворення Гільберта. Також, описані основні результати дисертації.

У другому розділі розглядаються проблеми розщеплення функцій у просторі Пелі - Вінера W_σ^1 на суму двох функцій, модуль яких є "великим" у верхній та нижній півплощині відповідно. Простір W_σ^p, $\sigma > 0$, є простором Пелі - Вінера, тобто простором цілих функцій f експоненційного типу $\leq \sigma$, які належать $L^p(\mathbb{R})$.

Функцію f, що належить простору Пелі - Вінера W_σ^1 розглядаємо у вигляді

$$f(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \quad (c_k) \in l^1.$$

Ми розглядаємо наступну проблему.

Проблема А. *Чи для кожної функції $f \in W_\sigma^1$ можливе розщеплення $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$, а також $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?*

Зауважимо, що якщо розв'язок Проблеми А існує, то він не є єдиним. Один із розв'язків досліджувала Т. І. Гіщак. Функція запропонована Гіщак Т. І. є цілою функцією експоненційного типу σ в півплощині $\mathbb{C}_+$.

Основні результати підрозділу 2.1 представлені в Теоремі 2.1 та Наслідку 2.1. Показано, що розв'язок Проблеми А існує при умові, що всі коефіцієнти Фур'є c_k, $k > 0$, дорівнюють нулю.

В підрозділі 2.2 містяться результати щодо проблеми розщеплення функцій у верхній та нижній півплощині. Центральне місце у підрозділі 2.2 займає наступна проблема.

Проблема B. *Чи можливе розщеплення кожної функції $f \in W_\sigma^1$ у вигляді $f = \chi + \mu$, де χ і μ є цілими функціями і $\chi \in E^p[\mathbb{C}(0;\pi)]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\pi;0)]$?*

В Теоремі 2.4 стверджується, що для функції з простору Пелі - Вінера W_σ^1, існує розв'язок проблеми розщеплення, якщо для коефіцієнтів з послідовності $(c_k) \in l^1$ виконується рівність $c_{2k} = -c_{2k+1}$. Проблема B є аналогом задачі розщеплення функцій, яку розглядав В. М. Дільний, для випадку $p = 1$.

У підрозділі 2.3 отримані умови існування розв'язку проблеми розщеплення для цілої функції як завгодно малого експоненційного типу $\alpha > 0$ в комплексній півплощині.

Цілою функцією експоненційного типу $\alpha > 0$ в півплощині $\mathbb{C}_- = \{z : \Re z < 0\}$ називатимемо цілу функцію для якої виконується умова

$$(\forall \delta > 0)(\exists A > 0)(\forall z \in \mathbb{C}_-) : |f(z)| \le Ae^{(\alpha+\delta)|z|}$$

і дана умова не виконується якщо замінити число α на менше.

Проблема C. *Чи для кожної функції $f \in W_\sigma^1$, можливе розщеплення $f = \hat{\chi} + \hat{\mu}$, де функції $\hat{\chi}$ і $\hat{\mu}$ є цілими функціями як завгодно малого, наперед заданого експоненційного типу $\alpha > 0$ в $\mathbb{C}_-$?*

Основні результати підрозділу 2.3 сформульовані в Теоремі 2.5 та Теоремі 2.6. У кожному з підрозділів наведені приклади цілих функцій, які визначають розв'язок згаданих вище проблем.

В розділі 3 досліджується теорія фільтрів Вінера, зокрема, роз-

глядається аналог класичної теорії фільтрів Вінера для випадку півсмуги в комплексній області. У підрозділі 3.1 розглядається постановка однієї з важливих проблем обробки сигналів, а саме: визначити невідомий фільтр (”чорну скриньку”), який трансформує вхідний сигнал в певний вихідний сигнал. Ми розглядаємо дану проблему для випадку невідомого фільтру f в півсмузі
$D_\sigma = \{z : |\Im z| < \sigma, \Re z < 0\}$, $\sigma > 0$ і основною метою є побудувати всі можливі сигнали, які анулюють фільтри при деяких природних умовах. У Теоремі 3.2 показано, що розв'язок проблеми ідентифікації нетривіальності фільтру можливий при умовах, що існує сигнал, який не допускає голоморфне продовження до цілої функції або допускає, але воно є екстремально великим. У підрозділі 3.2 наведені деякі допоміжні леми типу Фрагмена - Ліндельофа і викладено доведення Теореми 3.2.

Останній, четвертий розділ, присвячений дослідженням перетворення Гільберта в просторі Пелі - Вінера.

У підрозділі 4.1 отримано критерій обмеженості перетворення Гільберта. Встановлено умови за яких перетворення Гільберта функції з простору Пелі - Вінера W^1_σ належить простору $L^1(\mathbb{R})$. Результат отримано в термінах розщеплення функції на суму двох функцій, кожна з яких належить простору H^1 у верхній та нижній комплексній півплощині відповідно. У підрозділі 4.2, на основі отриманих результатів (Теорема 4.1), наведено два прості способи обчислення перетворення Гільберта.

Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими, вони мають теоретичний характер та можуть бути використані у функціональному та комплексному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей. Отримані результати становлять певний інтерес і для досліджень в теорії інформації.

Ключові слова: ціла функція, аналітична функція, простори Гарді, простори Пелі - Вінера, розщеплення функції, вагові простори Гарді, перетворення Гільберта, сигнальні процеси, амплітудний спектр, перетворення Фур'є, фільтр, згортка.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

1. Дільний, В. М., Гук, Х. О.: Критерій розщеплення в просторі Пелі - Вінера. Буковинський математичний журнал. **5** (1-2), 87-91 (2017).
2. Dilnyi, V., Huk, Kh.: On decomposition problem in weighted Hardy space. Banach Center Publications. **119**, 151-155 (2019).
3. Dilnyi, V., Voitovych, Kh.: Hilbert transform on W^p_σ. Matematychni Studii. **52** (1), 32-37 (2019).
4. Dilnyi, V., Huk, K.: Identificaton of unknown filter in a half-strip. Acta Applicandae Mathematicae. **165**, 199-205 (2020).

Список праць здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Дільний В., Гук Х.: Критерій розщеплення в просторі Пелі - Вінера. Збірник тез доповідей міжнародної наукової конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу", Одеса, Україна, 31 травня - 5 червня 2017.

2. Huk, Kh.: On decomposition in the Paley - Wiener space. In: Book of Abstracts of International conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017.
3. Dilnyi, V., Huk Kh.: Detecting of signals in half-strips. In: Book of Abstracts of International scientific and methodical conference "Modern scientific and methodical issues of mathematics in higher school", Kyiv, Ukraine, 21 -22 June 2018.
4. Huk, Kh.: Hilbert transform on W^p_σ. In: Book of Abstracts of International conference dedicated to the 70th anniversary of Anatolij Plichko "Banach spaces and their applications", Lviv, Ukraine, 26-29 June 2019.
5. Voitovych, Kh.: On problem of decomposition by functions of small exponential type. In: Book of Abstracts of International conference dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky "Infinite dimentional analysis and topology", Ivano-Frankivsk, Ukraine, 16-20 October 2019.
6. Жук, О., Войтович, Х., Галь, Ю.: Про розщеплення парних функцій. Збірник тез доповідей міжнародної наукової конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу", Одеса, Україна, 26-30 травня, 2020.

ABSTRACT

Voitovych Kh. O. Approximate and asymptotic properties of functions in Hardy spaces on some domains. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis consists of an introduction, 4 sections, conclusions to each section and the general conclusions and the list of used references. The introduction substantiates the relevance of the research topic, highlights the purpose, task, subject, object and methods of the research. It also substantiates the scientific novelty, the practical significance of the obtained results, the relationship of manuscript with scientific topics and plans and the personal contributions of the author of the thesis. The introduction lists the conferences and scientific seminars where the results of the thesis where reported; it lists the publications in which the main results of the thesis where published.

The thesis is devoted to questions of approximation and asymptotic in spaces of analytical functions and their applications in information theory.

The main objects of investigation are the classic Hardy spaces, weighted Hardy spaces and Paley - Wiener spaces.

The first section of the thesis is introductory and contains a review of the literature and describes the important facts from classic Hardy spaces, weighted Hardy spaces, Paley - Wiener spaces, signal processing, Wiener filtering theory and Hilbert transform. Also described the main results of the thesis.

In second section we considered the problems of decomposition of

functions in the Paley - Wiener space W_σ^1 into the sum of two functions, each of them being "large" only in upper and lower half-planes. The Paley - Wiener space W_σ^p, $\sigma > 0$, is the space of entire functions f of exponential type $\leq \sigma$ belonging to $L^p(\mathbb{R})$.

Function $f \in W_\sigma^1$ is considered as

$$f(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \quad (c_k) \in l^1.$$

We researched the following problem.

Problem A. *Do functions $f \in W_\sigma^1$, $1 \leq p \leq 2$, admit the decomposition $f = \chi + \mu$, with entire functions in $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$, where $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?*

One of the solution of the Problem A was researched by T. I. Hischak. One of the solutions was investigated by T. I. Hischak. The function proposed by T. I. Hischak is an entire function of exponential type σ in half-plane $\mathbb{C}_+$.

The main results of subsection 2.1 where provided in Theorem 2.1 and Corollary 2.1. We found that there exists the solutions of the Problem A if all Fourier coefficients c_k, $k > 0$, are equal to zero.

In subsection 2.2 the results concerning the problem of decomposition of functions in upper and lower half-planes for the case are contained. The key element in subsection 2.2 is the following problem.

Problem B. *Is it possible to decompose each $f \in W_\sigma^1$, $1 \leq p \leq 2$, as $f = \chi + \mu$ where χ, μ are entire functions and $\chi \in E^p[\mathbb{C}(0; \pi)]$, $\mu \in E^p[\mathbb{C}(-\pi; 0)]$?*

In theorem 2.4 we proved that for the function f there exists a solution of the Problem B if $(c_k) \in l^1$ and $c_{2k} = -c_{2k+1}$. This problem is an analogue of the decomposition problem which was investigated by V. M. Dilnyi for the case $p = 1$. Furthermore, in subsection 2.3 were obtained the solution of the decomposition problem for functions with small exponential type $\alpha > 0$ in half - plane. We say that an entire function f is an entire function of exponential type α in half-plane $C_- = \{z : \Re z < 0\}$ if

$$(\forall \delta > 0)(\exists A > 0)(\forall z \in \mathbb{C}_-) : |f(z)| \leq Ae^{(\alpha+\delta)|z|}$$

and the above inequality is false if replace the number α by a smaller one.

Problem C. *Do functions $f \in W^1_\sigma$, admit decomposition $f = \hat{\chi}+\hat{\mu}$, where $\hat{\chi}$ and $\hat{\mu}$ are entire functions with any small exponential type $\alpha > 0$ in $\mathbb{C}_-$?*

The main results of subsection 2.3 where provided in Theorem 2.5 and Theorem 2.6. Every subsection provides examples of entire functions for which there exists the solutions of the above problems.

The third section deals with Wiener filtering theory. We consider the analogue of the classic Wiener filtering theory to a half-strip of complex domain. In subsection 3.1 we analyzed the major problem of signal processing: to determine an unknown filter ("black box"); in particular, to reconstruct, if possible, a filter knowing the energy densities of an input-output pair. We consider the above problem for the case of an unknown filter f on the half-strip $D_\sigma = \{z : |\Im z| < \sigma, \Re z < 0\}$, $\sigma > 0$. The main task of this section is to construct all detecting signals under some natural conditions. In Theorem 3.2 we proved that if signal does not admit a holomorphic continuation as an entire function or it admit a holomorphic continuation, but this continuation is extremely large, then there exists the solution of the filtering identification problem. In subsection 3.2 some auxiliary lemmas of Phragmen - Lindelof type were demonstrated and Theorem 3.2 was proved.

The last fourth section is devoted to the investigations of the Hilbert transform on the Paley - Wiener space. In subsection 4.1 is obtained a boundedness criterion for the Hilbert transform on the Paley - Wiener space. The results was found in terms of decomposition functions into the sum of two functions each of them belonging to the Hardy space H^1 in upper and lower half-plane respectively. Two simple methods of evaluation of the Hilbert transform were shown in the research basing on the reserved result.

The results of the dissertation are new and have theoretical meaning. They can be used in complex and functional analysis, differential equation, probability theory. They are of some interest for information theory as well.

Keywords: entire function, analytic function, Hardy space, Paley - Wiener space, decomposition, weighted Hardy space, signal processing, convolution, Fourier transform, amplitude spectrum, filter.

List of publications:

1. Dilnyi, V. M., Huk, Kh. O.: The criterion of decomposition problem in the Paley - Wiener space. Bukovinian Mathematical Journal. **5** (1-2), 87-91 (2017).

2. Dilnyi, V., Huk, Kh.: On decomposition problem in weighted Hardy space. Banach Center Publications. **119**, 151-155 (2019).
3. Dilnyi, V., Voitovych, Kh.: Hilbert transform on W^p_σ. Matematychni Studii. **52** (1), 32-37 (2019).
4. Dilnyi, V., Huk, K.: Identificaton of unknown filter in a half-strip. Acta Applicandae Mathematicae. **165**, 199-205 (2020).

List of conference abstracts:

1. Dilnyi, V., Huk, Kh.: The criterion of solution of decomposition problem in the Paley - Wiener space. In: Book of Abstracts of International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", Odessa, Ukraine, 31 May - 5 June 2017.
2. Huk, Kh.: On decomposition in the Paley - Wiener space. International conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach: Abstracts.- Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017.
3. Dilnyi, V., Huk, Kh.: Detecting of signals in half-strips. International scientific and methodical conference : Modern scientific and methodical issues of mathematics in higher school: Abstracts.- Kyiv, Ukraine, 21 -22 June 2018.
4. Huk, Kh.: Hilbert transform on W^p_σ. International conference "Banach spaces and their applications" dedicated to the 70th anniversary of Anatolij Plichko: Abstracts.- Lviv, Ukraine, 26-29 June 2019.

5. Voitovych, Kh.: On problem of decomposition by functions of small exponential type. International conference "Infinite dimentional analysis and topology" dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky: Abstracts.- Ivano-Frankivsk, Ukraine, 16-20 October 2019.
6. Zhuk, O., Voitovych, Kh., Gal, Yu.: On decomposition of even function. In: Book of Abstracts of International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", Odessa, Ukraine, 26-30 May 2020.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ — права комплексна півплощина
- $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ — ліва комплексна півплощина
- $\mathbb{C}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхня комплексна півплощина
- $\mathbb{C}^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ — нижня комплексна півплощина
- $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, — простір Гарді у правій півплощині, тобто простір аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких
$$||f|| := \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty$$
- $H^p(\mathbb{C}_-)$, $1 \le p < +\infty$, — простір Гарді у лівій півплощині, тобто простір аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_-$ функцій f, для яких
$$||f|| := \sup_{x<0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty$$
- $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$
- $H^p(\mathbb{D})$, $1 \le p < +\infty$, — простір Гарді в одиничному крузі, тобто простір аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких
$$\|f\|^p := \sup_{r\in(0;1)} \left\{ \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p d\varphi \right\} < +\infty$$
- $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, простір Гарді аналітичних в $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$ функцій f, для яких
$$||f||^p = \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\} < +\infty$$

- h інтегральна гранична функція функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, яка визначається з точністю до адитивної сталої в точках неперервності рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(x+iy)|dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(iy)|dy$$

- $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \le p < +\infty$, простір аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ для яких

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|dr \right\}^{1/p} < +\infty$$

- $E^p[D_\sigma]$, $1 \le p < +\infty, \sigma > 0$, простір аналітичних функцій в області D_σ, для яких виконується наступна умова

$$\|f\| := \sup \left\{ \int_\mu |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty$$

- W^p_σ, $p \ge 1$, $\sigma > 0$, — простір Пелі-Вінера, тобто простір цілих функцій експоненційного типу $\le \sigma$, що належать $L^p(\mathbb{R})$. Його можна визначити і як клас цілих функцій, які задовольняють умову

$$||f|| := \sup_{\varphi\in(0;2\pi)} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty$$

- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ одиничне коло в комплексній площині $\mathbb{C}$
- $D_\sigma = \{z : |\Im z| < \sigma, \Re z < 0\}$, $\sigma > 0$.
- $D^*_\sigma = \mathbb{C} \backslash \overline{D}_\sigma$

- $E^p[D^*_\sigma], 1 \leq p < +\infty, \sigma > 0$, простір аналітичних функцій в D^*_σ, для яких

$$\|f\| := \sup \left\{ \int\limits_{\mu} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться для всіх відрізків μ, які містяться в D^*_σ

ВСТУП

Актуальність теми. Теорія просторів Гарді H^p бере свій початок у працях Дж. Літлвуда, Г. Гарді, І. Привалова та М. Рісса у 10-20-их роках минулого століття.

У 1906 році П. Фату довів, що будь яка обмежена і голоморфна функція f в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, яка не є тотожним нулем, не перетворюється в нуль на довільній дузі додатної міри $\partial\mathbb{D}$ за умови, що вона має на цій дузі недотичні (кутові граничні) значення. У 1915 році, Г. Гарді започаткував теорію просторів Гарді H^p, показавши, що логарифм норми функції $\theta \to f(re^{i\theta})$ в просторі $L^p[-\pi;\pi]$ є опуклою функцією від $\ln r$, $0 < r < 1$. Г. Гарді та Дж. Літлвуд дослідили деякі основні властивості просторів використавши максимальну функцію (максимальний оператор), яка пов'язує функцію з її радіальною границею на межі круга. В праці А. Зігмунда "Тригонометричні ряди" систематизовано відомості про простір H^p в контексті функцій комплексної змінної.

В 1949 році А. Бьорлінг встановив твердження про апроксимацію функцій з класу Гарді в одиничному крузі скінченними лінійними комбінаціями функцій системи $\{G(z)z^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. П. Лакс описав ці результати для випадку півплощини. Теорія просторів Гарді поєднує в собі методи функціонального аналізу, теорії аналітичних функцій та інтегралів Лебега, що створює потужний інструмент для багатьох застосувань від принципу максимуму модуля та аналізу Фур'є до дзета функції Рімана та обробки сигналів.

Кількома роками раніше, в 1905 році, в роботі Д. Гільберта було показано, що функція $\cos\omega t$ є перетворенням Гільберта функції $\cos\omega t$ і що $\pm\frac{\pi}{2}$ є оператором фазового зсуву. У 1928 році М. Рісс довів, що перетворення Гільберта є обмеженим лінійним оператором на $L^p(\mathbb{R})$ при $1 < p < +\infty$. А. Зігмунд та А. Кальдерон узагальнили цей результат для перетворення Гільберта в багатовимірному випадку. Теорія перетворень Гільберта послужила основою до вивчення сингулярних інтегралів у n-вимірному евклідовому просторі. Це перетворення має дуже тісний зв'язок з деякими областями комплексного аналізу і відіграє істотну роль у теорії перетворень Фур'є різного типу функцій. Перетворення Гільберта є ключовим в характеристиці операторів, які комутують з трансляційними операторами.

Практичними застосуваннями перетворення Гільберта займалися М. Арнісон, К. Когсвел, Н. Сміт, П. Фекет, Р. Дафін, Дж. Девіс, Д. Макнамара, Д. Коттрел, С. Хан, Дж. Гінойоса, К. Майкус, Дж. Карл, В. Мадич та інші.

Дослідження перетворення Гільберта є одним із найважливіших в теорії обробки сигналів. Проте, не менш важливе місце у цій теорії займає і теорія фільтрів Вінера, яка бере свій початок в 40-их роках XX століття. Фільтр Вінера використовується для отримання оцінки процесу за допомогою лінійного незалежного від часу фільтрування спостережуваного зашумленого процесу вважаючи відомими спектри сигналу і шуму (тестового сигналу). Цей фільтр мінімізує середню квадратичну похибку між передбачуваним випадковим процесом та корисним процесом. Фільтр Вінера є важливим для застосувань в комунікаційних технологіях, обробці зображень та цифровій обробці сигналів. Коло ідей щодо застосувань теорії фільтрів Вінера описано в працях Дж. Маркінеса, Р. Геусденса, Р. Хендікса, Е. Сейдича, І. Джуровича, Л. Станковича, Дж. Проакіса, М. Гаєса, Р. Гонгалеса, Р. Вудса та інших.

Важливе місце у теорії аналітичних функцій займають дослідження вагових узагальнених просторів Гарді. Ваговий простір Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p \le \infty$, $0 \le \sigma < +\infty$, тобто простір аналітичних функцій, які характеризуються експоненційним ростом в правій півплощині, досліджував у своїх працях Б. В. Винницький. Цей простір є не лише узагальненням простору Гарді у півплощині, а й аналогом простору Пелі - Вінера W^p_σ для півплощини. Проте, виявилося, що властивості просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 < \sigma < +\infty$, мають значні відмінності від властивостей просторів у неваговому випадку $\sigma = 0$. Зокрема, у ваговому випадку швидке зростання функції по уявній осі має зв'язок з її швидким спадання по дійсній півосі.

Простір W^p_σ складається з цілих функцій експоненційного типу $\le \sigma$, що належить $L^p(\mathbb{R})$. Як показано К. Еофф, простір W^1_σ можна вважати реалізацією дискретного простору Гарді. Прийоми та методи досліджень просторів Пелі - Вінера W^p_σ використовуються при дослідженні об'єктів у багатьох розділах математики, а його властивості є добре вивченими. Теорема Віттакера - Найквіста - Котельникова - Шеннона, яка описує функції з простору W^p_σ, є базовою в теорії передачі інформації.

Зображення математичних об'єктів у вигляді суми об'єктів з простішими властивостями є одним з основних способів дослідження у математиці. Б. В. Винницький, Т. І. Гіщак, В. М. Дільний, Л. Еренпрайс, Ю. І. Любарський, І. Е. Чижиков та Р. С. Юлмухаметов займалися задачами про зображення просторів аналітичних функцій у вигляді добутку чи суми двох об'єктів простішої природи. Однією з них є задача про розщеплення функцій з простору W_σ^p на суму двох, кожна з яких "велика" тільки в певній області.

У комплексному та функціональному аналізі, теорії ймовірностей та теорії диференціальних рівнянь результати досліджень просторів Гарді мають численні застосування. Окрім цього, важливим є і їх застосування у таких прикладних напрямках як: квантова фізика, теорія інформації, теорія керування та теорія обробки сигналів. Цими дослідженнями займалися Бом А., Буї Г., Браянт П., Антуан Ж., Бішоп Р., Вікрамасекара С., Моніх У., Бохе Г., Стюарт Б, Фернандес - Кара Е., Зуазуа Е., Бельман Р., Террелл В. та інші.

Беручи до уваги наведені вище факти актуальність дослідження асимптотичних та апроксимаційних властивостей функцій з просторів Гарді є безсумнівною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математики Навчально - наукового інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Напрямок досліджень обраний у відповідності до наукової тематики "Асимптотичні та аналітичні властивості голоморфних функцій і їх застосування" та передбачений планами наукової роботи кафедри математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Мета й завдання дослідження.

Метою дисертаційного дослідження є дослідження асимптотичних та апроксимаційних властивостей функцій з просторів Гарді та їх застосування в теорії інформації та функціональному аналізі.

Об'єктом дослідження є класичні простори Гарді, вагові простори Гарді та простори Пелі - Вінера.

Предметом дослідження є властивості функцій із просторів аналітичних функцій.

Задачі дослідження:

1. отримати критерій розв'язку проблеми розщеплення функцій у просторі W^1_σ;
2. розв'язати проблему розщеплення функцій у куті для простору Пелі - Вінера за умови певної регулярності коефіцієнтів;
3. встановити умови існування розв'язку проблеми розщеплення для функцій як завгодно малого експоненційного типу у півплощині;
4. встановити критерій обмеженості перетворення Гільберта в просторі W^1_σ в термінах розщеплення;
5. розв'язати задачу ідентифікації нетривіальності фільтру у просторі Гарді в півсмузі.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи математичного і комплексного аналізу, а також деякі прийоми з праць А. М. Сєдлєцкого, В. Я. Лєвіна, Б. В. Винницького, В. Л. Шарана, В. М. Дільного, Т. І. Гіщак.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі основні наукові результати, які одержані в дисертації, є новими і полягають в наступному:

— отримано критерій розв'язку проблеми розщеплення у просторі W^1_σ;

— розв'язано проблему розщеплення функцій у куті для простору Пелі - Вінера за умови певної регулярності коефіцієнтів;

— встановлено умови існування розв'язку проблеми розщеплення для функцій як завгодно малого експоненційного типу в півплощині;

— встановлено критерій обмеженості перетворення Гільберта в просторі W^1_σ в термінах розщеплення;

— розв'язано задачу ідентифікації нетривіальності фільтру у просторі Гарді в півсмузі.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані в дисертаційній роботі носять теоретичний характер і можуть знайти застосування у теорії функцій. Також, вони є певним внеском у розвиток теорії інформації.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані її автором самостійно. У статтях, написаних у співавторстві, співавтору належить постановка задачі та загальне керівництво.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях і наукових семінарах:

1) міжнародній науковій конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" (Одеса, 31 травня - 5 червня 2017 року);

2) міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю Стефана Банаха (Львів, 18–23 серпня 2017 року);

3) міжнародній науковій та методичній конференції "Modern scientific and methodical issues of mathematics in higher school" (Київ, 21 - 22 червня 2018 року);

4) міжнародній конференції "Banach spaces and their applications" (Львів, 26 - 29 червня 2019 року);

5) міжнародній конференції "Infinite dimentional analysis and topology" (Івано-Франківськ, 16 - 20 жовтня 2019 року);

6) міжнародній науковій конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" (Одеса, 26-30 травня, 2020 року);

7)науковому семінарі кафедри математики в Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка (керівники проф. Б. В. Винницький, В. М. Дільний);

8) львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник проф. О. Б. Скасків).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 4 статтях у виданнях, у яких слід публікувати результати дисертації, зокрема 2 – у закордонних виданнях, 2 – з бази даних SCOPUS (з них 1 у виданні другого квартилю Q_2) і у 6 тезах міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який налічує 122 найменування та додатку. Загальний обсяг дисертації — 147 сторінок, обсяг списку використаних джерел — 13 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ І ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1 Огляд літератури

1.1.1 Простори Гарді. Простори аналітичних функцій відіграють важливе значення не лише у функціональному аналізі, а й у сучасній математиці (як чистій, так і прикладній) в цілому. В комплексному аналізі простори Гарді є одними із найважливіших прикладів просторів аналітичних функцій. Як правило, вони розглядаються в таких областях як круг і півплощина.

Простором Гарді $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < +\infty$, називається простір аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій f, для яких

$$||f||^p := \sup_{r\in(0;1)} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\} < +\infty.$$

Також, простором Гарді $H^\infty(\mathbb{D})$ є простір аналітичних функцій f, обмежених в $\mathbb{D}$ з нормою

$$||f|| = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}.$$

У цій роботі ми зазвичай розглядаємо простори Гарді в півплощині.

В [65] простір $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, визначається як простір Гарді аналітичних в $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$ функцій f таких, що

$$||f||^p = \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\} < +\infty.$$

А. Сєдлєцкий запропонував наступне означення простору Гарді в правій півплощині [20].

Теорема 1.1. *Простір* $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, *співпадає з простором аналітичних в* $\mathbb{C}_+$ *функцій* f, *для яких*

$$||f||_*^p = \sup_{\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\} < +\infty.$$

Однією з характерних властивостей для функцій з просторів Гарді [10], [11], [65], [46] є наявність майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутових граничних значень $f(iy)$, причому функція f належить простору $L^p(\partial\mathbb{C}_+)$ і

$$||f||^p_{H^p(\mathbb{C}_+)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)|^p dy.$$

Також, функція $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ має інтегральну граничну функцію h. Функція h з точністю до адитивної сталої і значень в точках неперервності [48], [3] може бути визначена

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \to 0+} \int_{t_1}^{t_2} \ln|G(x+iy)|dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln|G(iy)|dy. \qquad (1.1)$$

Зазначимо, що функція h є незростаючою і $h'(t) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$.

В першій половині XX ст. Лаврентьєв М. А. [15], Келдиш М. В. [60], Привалов І. І. [19] та Смірнов В. І. [98] вивчали простори Смірнова E^p для області комплексної площини. Цікавим є те, що простори Смірнова співпадають з відповідними просторами Гарді для випадку одиничного круга.

Позначимо через $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$, $0<\beta-\alpha<2\pi$, $1\le p<+\infty$, простір аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$ для яких

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|dr\right\}^{1/p}<+\infty.$$

Також всюди на $\partial\mathbb{C}(\alpha;\beta)$ функції $f\in E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$ [12] мають кутові граничні значення і $f\in L^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$.

Нехай $E^p[D_\sigma]$, $1\le p<+\infty$, $\sigma>0$, це простір аналітичних функцій в області D_σ, для яких виконується наступна умова

$$\|f\|:=\sup\left\{\int\limits_\mu|f(z)|^p|dz|\right\}^{1/p}<+\infty,$$

де супремум береться для всіх відрізків μ, які містяться в D_σ.

Солдатов А. П., Аветисян К. Л., Власов В. І., Болл Дж., Болотніков В., Шрестха Х., Челендар І., Партінгтон Дж., Кву В., Данг Р. [99], [1], [8], [9], [33], [96], [38], [85] досліджували вагові простори Гарді для випадку одиничного круга. Вагові узагальнення просторів Гарді для півплощини розглянуті в працях М. Розенблюма та Дж. Ровняка [90], Дж. Бенедетто та Х. Хейніга [26], П. Руні [88], Дж. Гарсії - Куерви [53], С. Кіслякова [63].

Винницький Б. В. досліджував [5] простір функцій $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0\le\sigma<+\infty$, $1\le p<+\infty$, аналітичних в $\mathbb{C}_+$ для яких

$$||G||:=\sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|G(re^{i\varphi})|^pe^{-pr\sigma|\sin\varphi|}dr\right\}^{1/p}<+\infty.$$

В [42] встановлено еквівалентне означення вагового простору Гарді

$H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Простором $\widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geqslant 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, називається простір аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$||f||_{\widetilde{H}^p_\sigma} := \max\left\{\sup_{y\in\mathbb{R}}\left\{\int\limits_0^{+\infty} |f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|}dx\right\};\right.$$
$$\left.\sup_{x>0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|}dy\right\}\right\}^{1/p} < +\infty.$$

Теорема 1.2 ([42]). *Простори* $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *та* $\widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geqslant 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, *співпадають, причому норми* $||\cdot||_{H^p_\sigma}$ *та* $||\cdot||_{\widetilde{H}^p_\sigma}$ *є еквівалентними.*

В [4] і [104] розглядали простори $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+}\left\{|G(z)|e^{-\sigma|\operatorname{Im} z|}\right\} < +\infty.$$

У вищезазначених працях Б. В. Винницького та В. Л. Шарана описані нулі, сингулярні граничні значення та кутові граничні значення функцій з просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$.

В [7] були отримані необхідні умови циклічності функцій в просторі $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Дільний В. М. [13] показав, що для функцій з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ швидке зростання її модуля на межі еквівалентне швидкому спаданню по додатній осі модуля. Ці результати застосовуються для дослідження рівнянь типу згортки та дослідження циклічності функції. Також можливим є їх використання в теорії рядів Діріхле, яку досліджували А. Ф. Лєонтьєв [18], А. М. Гайсин, Н. Н. Аіткужина [52], [51], М. М. Шеремета [21], О. Б. Скасків [97], А. О. Куриляк, Н. Ю. Стасів [64].

М. Птак та В. Млоцек вивчали [76] рефлексивність підпросторів операторів Тепліца в просторі Гарді у верхній півплощині.

Використання просторів Гарді в квантовій фізиці описані в працях А. Бома, Г.Буї [30], П. Браянта [31], Ж. Антуана, Р. Бішопа та С. Вікрамасекари [24].

1.1.2 Простори Пелі - Вінера. Зображення математичних об'єктів у вигляді суми об'єктів з простішими властивостями є одним з основних способів дослідження у математиці. Відомими у теорії аналітичних функцій є дослідження описані в працях Р. С. Юлмухаметова [111], [112], Ю. І. Любарського [66], І. Е. Чижикова [39], В. М. Дільного [43], Т. І. Гіщак [44] про представлення функціональних просторів як сума чи добуток двох простіших.

Ми позначаємо через W_σ^p, $\sigma > 0$, простір Пелі - Вінера - простір цілих функцій f експоненційного типу $\leq \sigma$, що належать $L^p(\mathbb{R})$. Простір W_σ^p може бути визначений [16] і як простір цілих функцій, що задовольняють умову

$$\|f\| := \sup_{\varphi\in(0;2\pi)} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Цей простір є банаховим відносно вказаної норми для випадку $p = 1$.

Фундаментальними в теорії просторів Пелі - Вінера є наступні твердження [82].

Теорема Пелі - Вінера. *Простір W_σ^2 збігається з простором* *функцій f, що зображаються як*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(t) e^{itz} dt, \quad \varphi \in L^2(-\sigma;\sigma). \tag{1.2}$$

Для $p = 1$ аналогічне твердження встановлене Р. Боасом [28] та (в іншій формі) Г. З. Бером [2]. Також відомий аналог для випадків $1 < p < 2$ [68].

Теорема Бера. *Простір W_σ^1 збігається з простором функцій f, що зображаються як (1.2), де*

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}}, \quad (c_k) \in l^1 \tag{1.3}$$

і

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+m} c_{k+m} \frac{k}{1+k^2} \right| < +\infty.$$

К. Еофф розглядала простір W_π^1 [47] як клас функцій представлених у вигляді кардинального ряду

$$f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{\sin \pi z}{z-n}. \tag{1.4}$$

У роботах Б. В. Винницького, В. М. Дільного та Т. І. Гіщак [44] розглядалася проблема розщеплення функцій з простору Пелі - Вінера W_σ^1 на суму двох функцій, кожна з яких характеризується тим, що її модуль є "великим" відповідно у верхній та нижній півплощині. Зокрема, в [105] Винницький Б. В., Шаран В. Л. та Шепарович І. Б. досліджували проблему інтерполяції функції експоненційного типу в півплощині. Отримані результати можна застосувати для знаходження аналогу тотожності $2\cos z = \exp(-iz) + \exp(iz)$ для кожної функції експоненційного типу в півплощині.

У своїй роботі [43] Дільний В. М. розглянув наступну проблему розщеплення:

Проблема 1. *Чи кожна функція* $f \in W^p_\sigma$, $1 \le p \le 2$, *допускає зображення* $f = f_2 - f_3$ *для цілої функції* f_2, *що задовольняє умову* $B(0;\pi)$, *де*

$$B(\hat{\alpha};\hat{\beta}) : \sup_{\varphi \in (\hat{\alpha};\hat{\beta})} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

і f_3, *що задовольняє умову* $B(\pi;2\pi)$*?*

Для Проблеми 1 сформульовано критерій розв'язності при $p = 1$ і показано, що f належить простору W^p_σ тоді і тільки тоді, коли функція має вигляд

$$f(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \tag{1.5}$$

де $(c_k) \in l^2$ і

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| f\left(\frac{\pi k}{\sigma}(1-\delta)\right)\right| < +\infty,$$

для деякого $\delta \in (0;1)$.

Зазначимо, що випадок $p = 1$ є найцікавішим для застосування. Наприклад, Г. Бохе та У. Моніх [29] досліджували інтерполяцію сигналів та збіжність ряду Віттакера - Найквіста - Котельникова - Шеннона для простору Пелі - Вінера W^1_σ.

В [42] отримані наступні умови існування розв'язку Проблеми 1.

Теорема 1.3. *Для* $f \in W^1_\sigma$ *Проблема 1 має розв'язок тоді і тільки* *тоді*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^{m+k}e^{i\pi\sigma m}-1}{m-\delta m-k}\right| < +\infty, \tag{1.6}$$

для деякого $\delta \in (0;1)$ *тут ми вважаємо, що*

$$\frac{(-1)^{m+k}e^{i\pi\sigma m}-1}{m-\delta m-k} = \pi i, \quad \text{якщо} \quad m-\delta m-k=0.$$

Теорема 1.4. *Якщо* $f \in W_\sigma^1$, *то Проблема 1 має розв'язок тоді і тільки тоді, коли для коефіцієнтів* c_k *в зображенні (1.5) виконуються нерівності*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_s \eta_{m,k,s}\right| < +\infty,$$

де

$$\eta_{m,k,s} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^s-(-1)^{k+m}}{k+m-s}, & s \neq k+m, \\ \pi i, & s = k+m, \end{cases}$$

і

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \beta_{m,k}\right| < +\infty,$$

де

$$\beta_{m,k} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k+m}-1}{m-k}, & m \neq k, \\ \pi i, & m = k. \end{cases}$$

Зауважимо, що Проблема 1 має розв'язок не для кожної функції, що належить простору Пелі - Вінера. Тому в [42] розглядалася такого типу проблема з дещо слабшими вимогами до розщеплення. Її точне формулювання наступне:

Проблема 2. *За яких умов функція $f \in W^1_\sigma$, допускає зображення $f = f_4 - f_5$, де функції f_4 і f_5 аналітичні в $\mathbb{C}_+$, f_4 задовольняє умову $B\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і f_5 задовольняє $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ при $p = 1$?*

Дільний В. М. довів, що Проблема 2 має розв'язок коли виконуються наступні умови.

Теорема 1.5 ([42])**.** *Якщо в зображенні (1.5) функції $f \in W^1_\sigma$ є лише скінченна кількість ненульових коефіцієнтів c_k, то Проблема 2 для неї має позитивний розв'язок.*

Теорема 1.6 ([42])**.** *Якщо в зображенні (1.5) функції $f \in W^1_\sigma$ коефіцієнти c_k дорівнюють нулю для всіх непарних $k \in \mathbb{N}$, то Проблема 2 для неї має позитивний розв'язок.*

Розв'язок Проблеми 2 має вигляд:

$$f_4(z) = \frac{1}{2i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{2k}(e^{i\sigma z} - 1)}{z - \frac{2k\pi}{\sigma}}, \quad f_5(z) = \frac{1}{2i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{2k}(e^{-i\sigma z} - 1)}{z - \frac{2k\pi}{\sigma}}.$$

Т. І. Гіщак в [44] розглянула проблему зображення функцій в просторах Пелі-Вінера W^p_σ у вигляді суми двох функцій, кожна з яких є "великою" лише у першій або четвертій чверті координатної площини.

Проблема 3. *Чи для кожної функції $f \in W^1_\sigma$ можливий розклад $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$, а також $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?*

Розв'язок Проблеми 3 поданий Т. І. Гіщак у формі

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \tag{1.7}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt,$$

$$\chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \varphi(it) e^{itz} dt.$$

В [44] показано, що функція χ є розв'язком Проблеми 3 тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k k}{(m - \frac{i}{2} - k)(m - \frac{i}{2} - ik)} \right| < +\infty, \tag{1.8}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k k}{(m + \frac{i}{2} + ik)(m + \frac{i}{2} - k)} \right| < +\infty. \tag{1.9}$$

1.1.3 Теорія сигнальних процесів.

В математичній теорії фільтрів Вінера [106] сигнал є неперервною функцією g в часі t ($t \in \gamma$, $\gamma : R \to C$), а фільтр Φ це деякий пристрій ("скринька"), що трансформує вхідний сигнал в певний вихідний сигнал $g \to \Phi g$. Енергія сигналу g є пропорційною до

$$\int\limits_{\gamma} |g(z)|^2 |dz|.$$

Фільтр Φ називається стаціонарним [79], якщо він задовольняє такі умови:

1) Φ є лінійним, а значить визначеним в векторному просторі сигналу;

2) Φ перетворює сигнали скінченної енергії в сигнали скінченної енергії;

3) Φ є інваріантним відносно часу (параметри фільтру не змінюються з часом), тобто $\Phi(\tau_s f) = \tau_s(\Phi f)$ для кожного моменту часу s і сигналу f.

Тут ми не будемо брати до уваги фізичну природу (оптичну, електричну) стаціонарного фільтру Φ, а розглянемо його як трансляційний стаціонарний лінійний оператор у відповідному просторі L^2.

Функція $G = \mathcal{F}^{-1}g$, де $g \to \mathcal{F}^{-1}g$ обернене перетворення Фур'є, називається амплітудним спектром g.

Є дві основні проблеми обробки сигналів. Першою з них є:

визначити невідомий фільтр $\Phi : g \to \psi$ ("чорна скринька") проаналізувавши g і ψ; зокрема, відновити, якщо можливо, фільтр знаючи щільність енергії $|\mathcal{F}^{-1}g|^2$, $|\mathcal{F}^{-1}f|^2$ пари вхід - вихід.

Дана проблема є варіацією відомого питання Марка Каца "Чи можна почути форму барабану?" [58]. Ця та схожі проблеми вивчалися Н. Вінером, А. Бьорлінгом, Г. Рейнхардом, П. Масані [72], [83], [86], [107].

Другою відомою проблемою в теорії обробки сигналів є проблема знаходження тестового сигналу $f \in L^p(\mathbb{R})$ вихідний сигнал якого $f * g(t) = 0$ виміряний в усі моменти часу $t \in S$ однозначно визначає невідомий фільтр. А точніше, чи існує $f \in L^p(\mathbb{R})$ такий, що $f * g(t)$ для $t \in S$, де $g \in L^p(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ і випливає $g = 0$?

Тут $S \subset \mathbb{R}$ задана система відліку. Зазначимо, що функція $g \in L^2(\mathbb{R})$ є $\mathbb{R}$ - циклічною тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{F}g \neq 0$ майже всюди на $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}_+$ - циклічною тоді і тільки тоді коли $\mathcal{F}g \neq 0$ майже всюди на $\mathbb{R}$ і

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\log|\mathcal{F}g|}{(1+t^2)}dt = -\infty.$$

Для випадку $p = 1$, з загальної тауберової теореми Вінера [91], [92] випливає, що $g \in L^1(\mathbb{R})$ є $\mathbb{R}$ - циклічною тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{F}g \neq 0$ всюди на $\mathbb{R}$. Д. Ньюман [78] та Б. Німан в [80] отримали розв'язок проблеми знаходження тестового сигналу при $p = \infty$ і замикання норми замінено слабким $*$ замиканням: $g \in L^\infty$ є $\mathbb{R}$ - циклічною тоді і тільки тоді, коли $\sup(\mathcal{F}g) = \mathbb{R}$. Випадки $p \neq 1, 2, \infty$, а також вагові простори $L^p(\mathbb{R}, w)$ описані в роботах А. Борічева [35], [34] та Г. Гедентальта [36].

Ми досліджуємо тестові вхідні сигнали, які дозволять нам однозначно визначити невідомий фільтр, спостерігаючи аналогічну відповідь.

Позначимо через $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ одиничне коло в комплексній площині $\mathbb{C}$.

Теорема 1.7 ([108]). *Нехай W послідовність коефіцієнтів Фур'є обмеженої функції φ таких, що $\varphi = \mathcal{F}^{-1}W \in L^\infty(\mathbb{T})$. Тоді оператор згортки (зсуву) в $\mathbb{Z}$*

$$\Phi_W g = g * W = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k)W(n-k) \right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

є стаціонарним фільтром і $||\Phi_W||_{l^2\to l^2} = ||\varphi||_{L^\infty}(= ||\varphi||_\infty)$. І навпаки, для кожного стаціонарного фільтру Φ існує єдина послідовність $W = \Phi_{\delta_0}$ з вище вказаними властивостями така, що $\Phi = \Phi_W$; тут $\delta_0 = (\delta_{k0})_{k\in\mathbb{Z}}$.

В [79] досліджували наступне питання: як розпізнати невідомий фільтр серед усіх стаціонарих фільтрів та каузальних фільтрів.

Теорема 1.8 (Про усі стаціонарні фільтри [79])**.** *Нехай $g \in l^2(\mathbb{Z})$ тестовий вхідний сигнал. Тоді справджуються наступні умови:*

1. з рівності $\Phi_g = \Psi_g$ випливає $\Phi = \Psi$ коли Φ та Ψ стаціонарні фільтри;

2. щільність енергії фільтру g не зникає: $\mathcal{F}^{-1}g \neq 0$ на $\mathbb{T}$;

3. з рівності $\Phi_g(t) = \Psi_g(t)$ для всіх $t \geq 0$ випливає $\Phi = \Psi$ коли Φ та Ψ стаціонарні фільтри;

4. щільність енергії фільтру g не зникає: $\mathcal{F}^{-1}f \neq 0$ на $\mathbb{T}$ і має нескінченну ентропію

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \log |\mathcal{F}^{-1}f| dm = -\infty.$$

Фільтр Φ називається каузальним якщо відсутність вхідного сигналу в момент часу $s \in \mathbb{R}$, тобто $f(t) = 0$ для $t < s$, означає відсутність вихідного сигналу: $(\Phi f)(t) = 0$ для $t < s$.

Теорема 1.9 ([109])**.** *Стаціонарний фільтр Φ є каузальним тоді і тільки тоді, коли його частотна характеристика φ належить H^∞.*

Теорема 1.10 (Каузальні фільтри [79])**.** *Нехай $g \in l^2(\mathbb{Z})$ тестовий вхідний сигнал. Тоді виконуються наступні умови:*

1. з рівності $\Phi_g = \Psi_g$ випливає $\Phi = \Psi$ коли Φ та Ψ каузальні (причинні) фільтри;

2. функція g не дорівнює нулю;

3. з рівності $\Phi_g(t) = \Psi_g(t)$ для всіх $t \geq 0$ випливає $\Phi = \Psi$ коли Φ та Ψ каузальні фільтри;

4. щільність енергії фільтру $\mathcal{F}^{-1}f$ не належить $(H^2_-/H^\infty) = h/f : f \in H^2_-, h \in H^\infty$, де $H^2_- = L^2 \ominus H^2 = f \in L^2 : \hat{f}(k) = 0, k \geq 0$.

Область комплексної площини забезпечує природну структуру обробки сигналів з інтенсивністю та напрямком компонентів ([69], [56], [74]).

Коло ідей щодо обробки сигналів та перетворення Фур'є має давню історію і знайшло ряд застосувань. Дж. Мартінес, Р. Геусденс та Р. Хендрікс [70] досліджують характеристики сигналу та зв'язки узагальненого перетворення Фур'є з аналітичністю. Е. Сейдич, І. Джурович та Л. Станкочич [94] пов'язують дробове перетворення Фур'є з іншими математичними перетвореннями та розглядають різні підходи для практичних реалізацій цього перетворення. Зокрема, є описані застосування перетворення Фур'є дробового порядку для фундаментальних процедур обробки сигналів, таких як фільтрація, оцінка та відновлення. Показано, що фільтрування в областях спеціального типу дозволяє зменшити середню квадратичну похибку у порівнянні зі звичайним перетворенням Фур'є.

Амплітудний спектр сигналу g визначається за формулою

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma} g(w) e^{zw} dw.$$

Очевидно, що задана рівність є природним аналогом перетворення Фур'є для випадку півсмуги.

Застосування математичних методів в теорії обробки та передачі сигналів є зараз потужним і затребуваним напрямком досліджень. Відзначимо, зокрема, дослідження нейронних мереж, вивченням яких займалися В. Маккалох, В. Піттс [75], Ф. Росенблат [89], Д. В. Алєксєєв [23], Р. М.Пелещак, В. В. Литвин, І. Р. Пелещак, М. В. Дорошенко, Р. М. Оливко [84] та теорію квантового комп'ютера, яка описана в працях Д. Л. Блекмора, А. К. Прикарпатського, В. Г. Самойленка , А. М. Самойленка, Я. М. Прикарпатського, У. Танері, К. Фужіі [27], [93], [49] та інших.

1.1.4 Перетворення Гільберта В теорії сигналів одним із найважливіших операторів є перетворення Гільберта. Це обумовлено його властивістю перетворювати дійсні функції на аналітичні. Кінг Ф. в [61], [62] визначає перетворення Гільберта на дійсній осі інтегралом

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} v.\ p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt, \tag{1.10}$$

де $v.\ p.$ головне значення інтегралу типу Коші.

Формулу (1.11) можна записати і у такій формі

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} H_\varepsilon f(x),$$

де

$$H_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Функцію $H_\varepsilon f(x)$ іноді називають усіченим перетворенням Гільберта. Визначення "усічене" також використовується для опису інших варіантів стандартного перетворення Гільберта.

Нехай
$$g(x) = \frac{1}{\pi} v.\ p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt,$$
тоді функції f та g пов'язані наступною рівністю
$$f(x) = -\frac{1}{\pi} v.\ p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{x-t} dt.$$
Останні два інтеграли є парою перетворення Гільберта.

Існує чимало практичних застосувань перетворень Гільберта, а саме: застосування в теорії поширення хвиль, теорії пружності, теорії потенціалів та вивчення сил дисперсії, в геофізиці, в спектроскопії Фур'є, у певних областях цифрової обробки сигналів та реконструкції зображень [25], [110], [32], [67], [57], [45], [77], [100], [59], [54], [81], [40], [95].

1.2 Основні результати дисертації

У даному підрозділі ми позначаємо та нумеруємо проблеми та твердження у відповідності з позначеннями та нумерацією основного тексту дисертації.

У другому розділі розглядаються проблеми розщеплення функції на суму двох функцій, кожна з яких є відповідно "великою" у верхній або нижній півплощині.

Функція f, що належить простору Пелі - Вінера W_σ^1 допускає зображення у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(t) e^{itz} dt, \quad \varphi \in L^2(-\sigma; \sigma) \tag{1.11}$$

та

$$f(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \quad (c_k) \in l^1. \tag{1.12}$$

Детальніше про зображення функції f описано в огляді літератури (див. підрозділ 1.1).

Проблему, над якою ми працюємо в підрозділі 2.1, розглядала Т. І. Гіщак у наступному вигляді.

Проблема А. *Чи для кожної функції $f \in W_\sigma^1$ можливе розщеплення $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$, а також $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?*

Вона досліджувала розв'язок Проблеми А у формі

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \tag{1.13}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt,$$

$$\chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \varphi(it) e^{itz} dt$$

і показала, що функція χ є розв'язком Проблеми А тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k k}{\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)} \right| < +\infty, \qquad (1.14)$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k k}{\left(m + \frac{i}{2} + ik\right)\left(m + \frac{i}{2} - k\right)} \right| < +\infty. \qquad (1.15)$$

Зауважимо, що функція $\mu = f - \chi$ однозначно визначається функціями χ та μ, тому під розв'язком Проблеми А розуміють знаходження функції χ.

Ми отримали новий критерій розв'язку Проблеми А і показали, що коли всі коефіцієнти Фур'є c_k з додатними номерами дорівнюють нулю, то розщеплення існує. Основний результат підрозділу 2.1 сформульований у наступній теоремі.

Теорема 2.2. *Нехай $f \in W^1_\sigma$. Функція χ, визначена рівністю (1.13), є розв'язком Проблеми А тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=\left[\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3m}{2}\right]} \frac{c_k}{m - \frac{i}{2} - k} \right| < +\infty, \qquad (1.16)$$

де коефіцієнти c_k визначені в (1.12), а $[a]$ означає цілу частину дійсного числа a.

Наслідок 2.1. *Нехай $f \in W^1_\sigma$ і $c_k = 0$ для всіх $k > 0$, де коефіцієнти c_k визначені в (1.12). Тоді χ є розв'язком Проблеми A.*

Також, у другому розділі, розв'язана проблема розщеплення функцій на суму двох інших функцій при дещо слабших умовах, ніж в [44]. Дана проблема є аналогом Проблеми 1 (див. підрозділ 1.1) для випадку $p = 1$.

Проблема B. *Чи можливе розщеплення кожної функції $f \in W^1_\sigma$ у вигляді $f = \chi + \mu$, де χ і μ є цілими функціями і $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0;\pi)]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\pi;0)]$?*

У випадку $p = 2$ існує розв'язок Проблеми B, який випливає з теореми Пелі - Вінера:

$$\chi(z) = \int\limits_0^\sigma \varphi(it)e^{itz}dt,$$

$$\mu(z) = \int\limits_{-\sigma}^0 \varphi(it)e^{itz}dt.$$

Ми отримали наступний результат.

Теорема 2.4. *Якщо $(c_k) \in l^1$ і $c_{2k} = -c_{2k+1}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$, тоді для функції f визначеної в (1.12), існує розв'язок Проблеми B і функція χ визначається рівністю (1.13).*

У підрозділі 2.3 знайдено розв'язок проблеми розщеплення для цілих функцій як завгодно малого експоненційного типу в лівій півплощині.

Проблема C. *Чи для кожної функції $f \in W^1_\sigma$, можливе розщеплення $f = \hat{\chi} + \hat{\mu}$, де функції $\hat{\chi}$ і $\hat{\mu}$ є цілими функціями як завгодно малого, наперед заданого експоненційного типу $\alpha > 0$ в $\mathbb{C}_-$?*

Назвемо цілою функцією цілу функцію експоненційного типу $\alpha > 0$ в півплощині $\mathbb{C}_- = \{z : \Re z < 0\}$ якщо

$$(\forall \delta > 0)(\exists A > 0)(\forall z \in \mathbb{C}_-) : |f(z)| \leq Ae^{(\alpha+\delta)|z|} \tag{1.17}$$

і умова (1.17) не виконується якщо замінити число α на менше. Також, ми пропонуємо нове представлення функції $f = \hat{\chi} - \hat{\mu}$, де

$$\hat{\chi}(z) = \chi_1(z) + i\hat{\chi}_2(-iz) \tag{1.18}$$

і

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} \varphi(t)e^{itz}, \qquad \hat{\chi}_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{0} \varphi(t)e^{itz}dt.$$

Очевидно, $\hat{\chi}_2$ є функцією експоненційного типу $\varepsilon > 0$ в $\mathbb{C}_-$.

Теорема 2.5. *Нехай $f \in W^1_\sigma$. Якщо виконуються умови (1.14) та (1.15), то функції $\hat{\chi}, \hat{\mu}$ є розв'язком Проблеми C.*

Окрім цього встановлено розв'язок Проблеми C у вигляді $f = \breve{\chi} - \breve{\mu}$, де

$$\breve{\chi}(z) = \chi_1(z) + i\breve{\chi}_2(-iz)$$

і

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\sigma(z-\frac{k\pi}{\sigma})} - 1}{i(z - \frac{k\pi}{\sigma})},$$

$$\breve{\chi}_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{1 - e^{-\varepsilon_k(z-\frac{k\pi}{\sigma}i)}}{z - \frac{k\pi}{\sigma}i}.$$

Тут функція $\chi_1(z)$ така ж як і в (1.18) і функція $\breve{\chi}_2(z)$ співпадає з $\hat{\chi}_2(z)$ якщо $\varepsilon_k \equiv \varepsilon$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2.6 *Нехай $f \in W^1_\sigma$. Якщо для послідовності додатних* *значень ε_k виконується нерівність*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon_k x}}{x} dx < +\infty,$$

а також виконуються умови (1.14) і (1.15), то функції $\breve{\chi}$ та $\breve{\mu}$ є розв'язком Проблеми C.

Третій розділ присвячений розгляду проблем обробки сигналів та математичній теорії фільтрів Вінера. Основним завданням в цьому розділі є побудувати всі можливі сигнали, які анулюють фільтри при деяких природних умовах.

Ми розглядаємо дану проблему для випадку невідомого фільтру f в півсмузі $D_\sigma = \{z : |\Im z| < \sigma, \Re z < 0\}$, $\sigma > 0$.

Простором $E^p[D_\sigma]$, $1 \leq p < +\infty$, $\sigma > 0$, називається простір аналітичних функцій в D_σ, для яких

$$\sup \left\{ \int\limits_{\mu} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться для всіх відрізків μ, які містяться в D_σ.

Нехай $E^p[D_\sigma^*]$, $1 \leq p < +\infty$, $\sigma > 0$, є простором аналітичних функцій в D_σ^*, для яких

$$\left\{ \int\limits_{\mu} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться для всіх відрізків μ, які містяться в D_σ^*.

Простори $E^p[D_\sigma]$ та $E^p[D_\sigma^*]$ є голоморфними аналогами просторів L^p.

Проблема ідентифікації фільтру для півсмуги полягає в знаходженні тестового сигналу $g \in E^2[D_\sigma^*]$ для якого вихідний сигнал визначений наступною рівністю

$$f * g(\tau) = \int_{\partial D_\sigma} g(w) f(w+\tau) dw$$

виміряний в усі моменти часу $\tau \leq 0$, однозначно визначає невідомий фільтр $f \in E^2[D_\sigma]$. Амлітудний спектр сигналу $g \in E^p[D_\sigma^*]$ визначимо формулою

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma} g(w) e^{zw} dw.$$

Ми отримали опис тестового сигналу, який розв'язує задачу ідентифікації фільтрів для просторів Гарді в півсмузі. Цей результат можна використовувати для дослідження електричних та оптичних сигналів.

Теорема 3.2. *Нехай амплітудний спектр G сигналу $g \in E^2[D_\sigma^*]$ є неперервним та не має жодного нуля в $\{z : \Re z \geq 0\}$ і $f \in E^2[D_\sigma]$. Тоді з виконання рівності*

$$(\forall \tau \leq 0) \quad f * g(\tau) = 0$$

випливає $f \equiv 0$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1) g допускає голоморфне продовження до цілої функції і виконується умова

$$(\forall c \in \mathbb{R}) : g(w) \exp\left(-c e^{-\frac{w\pi}{2\sigma}}\right) \notin E^2[D_\sigma];$$

2) g не допускає голоморфного продовження до цілої функції.

У розділі 4 знайдено критерій обмеженості перетворення Гільберта в просторі Пелі - Вінера $W_\sigma^1 \subset L^1(\mathbb{R})$ в термінах декомпозиції (за основу взято Проблему В).

Дільний В. М. в [66] отримав наступний результат.

Теорема 4.1. *Для $f \in W_\sigma^1$ Проблема В має розв'язок тоді і тільки тоді*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^{m+k} e^{i\pi\sigma m} - 1}{m - \delta m - k} \right| < +\infty, \tag{1.19}$$

для деякого $\delta \in (0; 1)$, тут ми вважаємо, що

$$\frac{(-1)^{m+k} e^{i\pi\sigma m} - 1}{m - \delta m - k} = \pi i, \quad \text{якщо} \quad m - \delta m - k = 0.$$

Перетворення Гільберта функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ визначається для всіх $z \in \mathbb{R}$ як

$$H(f(z)) = \frac{1}{\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt, \tag{1.20}$$

якщо інтеграл існує.

Основним твердженням даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.2. *Нехай $f \in W_\sigma^1$, тоді еквівалентними є наступні умови:*

1) зображення функції $f = \chi + \mu$ справджується, де χ, μ є цілими функціями, $\chi \in H^1(\mathbb{C}^+)$, $\mu \in H^1(\mathbb{C}^-)$;

2) перетворення Гільберта $H(f(z))$ належить $L^1(\mathbb{R})$;

3) послідовність (c_k) *в зображенні (1.12) належить* l^1 *і нерівність (1.19) виконується.*

Наступні наслідки встановлюють простий спосіб обчислення перетворення Гільберта.

Наслідок 4.1. *Якщо умови теореми 4.2 виконуються, тоді*

$$H(f(z)) = i(\chi(z) - \mu(z)).$$

Наслідок 4.2. *Якщо умови теореми 4.2 виконуються, тоді*

$$H(f(z)) = \frac{\sigma}{i\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k - \cos\sigma z}{\pi k - \sigma z}.$$

РОЗДІЛ 2. РОЗЩЕПЛЕННЯ ФУНКЦІЙ В ПРОСТОРІ ПЕЛІ - ВІНЕРА

2.1 Критерій розв'язку задачі розщеплення в просторі W^1_σ

В даному розділі розглядається проблема розщеплення функцій f у просторі Пелі - Вінера W^1_σ на суму двох функцій, модуль яких є "великим" у верхній та нижній півплощині відповідно.

Простором Пелі - Вінера W^p_σ, $\sigma > 0$, $p \geq 1$, називається простір цілих функцій f експоненційного типу $< \sigma$, які належать $L^p(\mathbb{R})$. Також простір W^p_σ може бути визначений, як простір цілих функцій f, які задовольняють наступну умову

$$\sup_{\varphi\in(0;2\pi)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |(fre^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Наступна теорема є однією з фундаментальних в теорії просторів Пелі - Вінера.

Теорема Пелі - Вінера. *Простір W^2_σ збігається з простором функцій f, що зображаються як*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(t) e^{itz} dt, \quad \varphi \in L^2(-\sigma;\sigma). \tag{2.1}$$

Для випадку $p = 1$ аналогічне твердження встановлене Р. Боасом [28] та (в іншій формі) Г. З. Бером [2]. Також відомі аналоги [68] для випадків $1 < p < 2$.

Теорема Бера. *Простір W^1_σ збігається з простором функцій*

f, що зображаються як (2.1), де

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}}, \quad (c_k) \in l^1 \tag{2.2}$$

і

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+m} c_{k+m} \frac{k}{1+k^2} \right| < +\infty.$$

Результат Бера сформульований в зручнішій формі в [42].

Теорема 2.1 ([42]). *Функція f належить простору W_σ^1, $\sigma > 0$, тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді*

$$f(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \tag{2.3}$$

де $(c_k) \in l^2$ і

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| f\left(\frac{\pi k}{\sigma}(1-\delta)\right) \right| < +\infty,$$

для деякого $\delta \in (0;1)$.

Т. І. Гіщак в [44] розглянула проблему зображення функцій в просторах Пелі-Вінера W_σ^p у вигляді суми двох функцій, кожна з яких є "великою" лише у першій або лише у четвертій чверті координатної площини.

Проблема A. *Чи для кожної функції $f \in W_\sigma^1$ можливе розщеплення $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$, а також $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?*

Тут $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \le p < +\infty$, простір аналітичних функцій f в кутовій області $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких виконується нерівність

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|dr\right\}^{1/p}<+\infty.$$

Також всюди на $\partial\mathbb{C}(\alpha;\beta)$ функції f належать $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$ [12] мають кутові граничні значення і належать $L^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$.

Розв'язок Проблеми A поданий Т. І. Гіщак [44] у наступній формі

$$\chi(z)=\chi_1(z)+i\chi_2(-iz), \tag{2.4}$$

де

$$\chi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\sigma}\varphi(t)e^{itz}dt,$$

$$\chi_2(z)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\varphi(t)e^{itz}dt.$$

Оскільки $\mu=f-\chi$, тобто функція μ однозначно визначається функціями f та χ, то під розв'язком Проблеми A розуміють знаходження функції χ.

Розглянемо приклад функції f для якої можливе вищезгадане розщеплення.

Приклад 2.1. *Для функції*

$$f(z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^3}(2\sigma z\cos\sigma z-\sin\sigma z)$$

розв'язок Проблеми A визначають функції

$$\chi(z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^3}(ie^{i\sigma z}+\sigma ze^{i\sigma z}-i\sigma ze^{-\sigma z}-ie^{-\sigma z}-i\sigma^2z^2)$$

та

$$\mu(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^3}(\sigma z e^{-i\sigma z} - ie^{-i\sigma z} + i\sigma z e^{-\sigma z} + ie^{-\sigma z} + i\sigma^2 z^2).$$

Доведення. Виберемо $\varphi(t) = t^2 - \sigma^2$. Тоді за теоремою Пелі - Вінера отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} (t^2 - \sigma^2) e^{itz} dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^3}(2\sigma z \cos \sigma z - \sin \sigma z).$$

Обчислимо значення функцій $\chi_1(z)$ та $\chi_2(-iz)$

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} (t^2 - \sigma^2) e^{itz} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\sigma} t^2 e^{itz} dt - \frac{\sigma^2 e^{i\sigma z}}{iz} + \frac{\sigma^2}{iz} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2ie^{i\sigma z}}{z^3} - \frac{2i}{z^3} + \frac{2\sigma e^{i\sigma z}}{z^2} - \frac{i\sigma^2 e^{i\sigma z}}{z} - \frac{\sigma^2 e^{i\sigma z}}{iz} + \frac{\sigma^2}{iz} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2ie^{i\sigma z} + 2\sigma z e^{i\sigma z} - i\sigma^2 z^2 - 2i}{z^3} \right)$$

і

$$\chi_2(-iz) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{0} (t^2 - \sigma^2) e^{tz} dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\sigma}^{0} t^2 e^{tz} dt - \frac{\sigma^2}{z} + \frac{\sigma^2 e^{-\sigma z}}{z} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{z^3} - \frac{2e^{-\sigma z}}{z^3} - \frac{2\sigma e^{-\sigma z}}{z^2} - \frac{\sigma^2 e^{-\sigma z}}{z} - \frac{\sigma^2}{z} + \frac{\sigma^2 e^{-\sigma z}}{z} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2e^{-\sigma z} + 2\sigma z e^{-\sigma z} + \sigma^2 z^2 - 2}{z^3} \right).$$

Підставимо отримані результати у (2.4)

$$\chi(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^3}(ie^{i\sigma z} + \sigma z e^{i\sigma z} - i\sigma z e^{-\sigma z} - ie^{-\sigma z} - i\sigma^2 z^2).$$

Тоді функція μ буде мати вигляд

$$\mu(z) = f(z) - \chi(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^3}(\sigma z e^{-i\sigma z} - ie^{-i\sigma z} + ie^{i\sigma z} + \sigma z e^{i\sigma z}) -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^3}(ie^{i\sigma z} + \sigma z e^{i\sigma z} - i\sigma z e^{-\sigma z} - ie^{-\sigma z} - i\sigma^2 z^2) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^3}(\sigma z e^{-i\sigma z} - ie^{-i\sigma z} + i\sigma z e^{-\sigma z} + ie^{-\sigma z} + i\sigma^2 z^2).$$

□

Приклад 2.2. *Для функції*

$$f(z) = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\pi\cos\sigma z}{\pi^2 - 4z^2\sigma^2}\right)$$

розв'язок Проблеми А визначається функціями

$$\chi(z) = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i\sigma z}(4\pi z^2\sigma^2 + \pi^3) + e^{-\sigma z}(i\pi^3 - 4\pi z^2\sigma^2) - 16iz^3\sigma^3}{\pi^4 - 16z^4\sigma^4}\right)$$

та

$$\mu(z) = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-i\sigma z}(\pi^3 + 4\pi z^2\sigma^2) + e^{-\sigma z}(4i\pi z^2\sigma^2 - i\pi^3) + 16iz^3\sigma^3}{\pi^4 - 16z^4\sigma^4}\right).$$

Доведення. Нехай $\varphi(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2\sigma}\right)$. З теоремою Пелі - Вінера отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\cos\left(\frac{\pi t}{2\sigma}\right)e^{itz}dt = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\pi\cos\sigma z}{\pi^2 - 4z^2\sigma^2}\right).$$

Обчислимо значення функції χ_1

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sigma} \cos\left(\frac{\pi t}{2\sigma}\right) e^{itz} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\sigma e^{i\sigma z}}{\pi} - \frac{2i\sigma z}{\pi} - \frac{2\sigma i z}{\pi} \int\limits_0^{\sigma} e^{itz} \sin\frac{\pi t}{2\sigma} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\sigma e^{i\sigma z}}{\pi} - \frac{4iz\sigma^2}{\pi^2} + \frac{4\sigma^2 z^2}{\pi^2} \int\limits_0^{\sigma} \cos\left(\frac{\pi t}{2\sigma}\right) e^{itz} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\sigma(\pi e^{i\sigma z} - 2i\sigma z)}{\pi^2} + \frac{4\sigma^2 z^2}{\pi^2} \int\limits_0^{\sigma} \cos\left(\frac{\pi t}{2\sigma}\right) e^{itz} dt \right),$$

тоді

$$\chi_1(z) = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi e^{i\sigma z} - 2i\sigma z}{\pi^2 - 4\sigma^2 z^2} \right).$$

Тепер обчислимо значення функції χ_2

$$\chi_2(-iz) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \cos\left(\frac{\pi t}{2\sigma}\right) e^{tz} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\sigma e^{-\sigma z}}{\pi} - \frac{2\sigma^2}{\pi} - \frac{2\sigma z}{\pi} \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{tz} \sin\left(\frac{\pi t}{2\sigma}\right) dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\sigma e^{-\sigma z}}{\pi} + \frac{4\sigma^2 z}{\pi^2} - \frac{4\sigma^2 z^2}{\pi^2} \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{tz} \cos\left(\frac{\pi t}{2\sigma}\right) dt \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\pi\sigma e^{-\sigma z} + 2\sigma^2 z}{\pi^2} - \frac{4\sigma^2 z^2}{\pi^2} \int\limits_{-\sigma}^{0} e^{tz} \cos\left(\frac{\pi t}{2\sigma}\right) dt \right),$$

тоді

$$\chi_2(-iz) = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\sigma z}\pi + 2\sigma z}{\pi^2 + 4z^2\sigma^2} \right).$$

Підставимо отримані результати у (2.4)

$$\chi(z) = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\sigma z}(4\pi z^2\sigma^2 + \pi^3) + e^{-\sigma z}(i\pi^3 - 4\pi z^2\sigma^2) - 16iz^3\sigma^3}{\pi^4 - 16z^4\sigma^4} \right).$$

Тоді функція μ буде мати вигляд

$$\mu(z) = f(z) - \chi(z) = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi e^{-i\sigma z} + \pi e^{i\sigma z}}{\pi^2 - 4z^2\sigma^2} \right) -$$

$$- \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\sigma z}(4\pi z^2\sigma^2 + \pi^3) + e^{-\sigma z}(i\pi^3 - 4\pi z^2\sigma^2) - 16iz^3\sigma^3}{\pi^4 - 16z^4\sigma^4} \right) =$$

$$= \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i\sigma z}(\pi^3 + 4\pi z^2\sigma^2) + e^{-\sigma z}(4i\pi z^2\sigma^2 - i\pi^3) + 16iz^3\sigma^3}{\pi^4 - 16z^4\sigma^4} \right).$$

□

Основним твердженням цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2.2. *Нехай $f \in W_\sigma^1$. Функція χ, визначена рівністю (2.4), є розв'язком Проблеми A тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=[\frac{m}{2}]}^{[\frac{3m}{2}]} \frac{c_k}{m - \frac{i}{2} - k} \right| < +\infty, \tag{2.5}$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2.3), а $[a]$ означає цілу частину дійсного числа a (найбільше дійсне число, що не перевищує a).

Наслідок 2.1. *Нехай $f \in W_\sigma^1$ і $c_k = 0$ для всіх $k > 0$, де коефіцієнти c_k визначені в (2.3). Тоді χ є розв'язком Проблеми A.*

Доведення теореми 2.1 базується на лемі 2.1.

Лема 2.1. *Нехай* $f \in W_\sigma^1$. *Функція* χ, *визначена рівністю (2.4), є розв'язком Проблеми А тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова*

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}\right]}\frac{c_k}{x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)}\right|dx<+\infty, \tag{2.6}$$

де коефіцієнти c_k *визначені в (2.3).*

Доведення леми 2.1 випливає з лем 2.2 - 2.5.

Лема 2.2. *Нехай* $f \in W_\sigma^1$. *Тоді для коефіцієнтів у зображенні (2.3) виконується нерівність*

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}\right]+1}^{+\infty}\frac{c_k k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}\right|dx<+\infty. \tag{2.7}$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$\frac{c_k k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)},$$

як функцію двох змінних x та k. Позначимо

$$c_k^* = \begin{cases} c_k, k \in \left[\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+1\right];+\infty\right)\cap\mathbb{Z}_+, \\ 0, k\in\left[0;\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}\right]\right]\cap\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Тому, очевидно,

$$\left|\sum_{k=\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}\right]+1}^{+\infty}\frac{c_k k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}\right| =$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{c_k^* k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}\right|.$$

Тоді

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k^* k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{c_k^* k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}\right|.$$

Зауважимо, що

$$\left|x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right| = \sqrt{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}k\right)^2+\left(\frac{\pi}{2\sigma}\right)^2} \geq \left|x-\frac{\pi}{\sigma}k\right|.$$

Оскільки $x \in \left[\frac{\pi}{\sigma}; \frac{2\pi k}{3\sigma}\right]$, то

$$\left|x-\frac{\pi}{\sigma}k\right| = \frac{\pi}{\sigma}k - x = \frac{\pi}{3\sigma}k + \frac{2\pi}{3\sigma}k - x \geq \frac{\pi}{3\sigma}k + x - x = \frac{\pi}{3\sigma}k =$$

$$= \frac{3}{5}\frac{\pi}{3\sigma}k + \frac{2}{5}\frac{\pi}{3\sigma}k \geq \frac{3}{5}\frac{\pi}{3\sigma}k + \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}\frac{\pi}{\sigma}k + \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}\left(x+\frac{\pi k}{\sigma}\right).$$

Застосувавши нерівність $|a-ib| \geq \frac{|a|+|b|}{2}$ і при $x > \frac{\pi}{\sigma}$ отримаємо

$$\left|x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right| \geq \frac{|x|+|\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)|}{2} \geq \frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi k}{\sigma}\right).$$

Отже,

$$\left|\frac{c_k^* k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}\right| \leq 10\frac{|c_k^*|k}{\left(x+\frac{\pi k}{\sigma}\right)^2}.$$

Почленно проінтегрувавши праву частину нерівності (2.7), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k^*| \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi k}{3\sigma}} \left|\frac{k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}\right| dx \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} 10|c_k^*| \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi k}{3\sigma}} \frac{k}{\left(x+\frac{\pi k}{\sigma}\right)^2} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k^*| 10k \left(-\frac{3\sigma}{5\pi k} + \frac{\sigma}{\pi+\pi k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 10|c_k^*| \left(-\frac{3\sigma}{5\pi} + \frac{\sigma}{\frac{\pi}{k} + \pi} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_2 |c_k^*| < +\infty,$$

де $10\left(-\frac{3\sigma}{5\pi} + \frac{\sigma}{\frac{\pi}{k}+\pi}\right) \leq d_2$, для деякої сталої $d_2 \in \mathbb{R}$. Отже, нерівність (2.7) виконується. $\square$

Лема 2.3. *Нехай $f \in W_\sigma^1$. Тоді*

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2} + k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2} + k\right)\right)} \right| dx < +\infty, \tag{2.8}$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2.3).

Доведення. Покажемо, що нерівність (2.8) виконується. Справді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2} + k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2} + k\right)\right)} \right| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{0} \left| \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2} + k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2} + k\right)\right)} \right| dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{|c_k| k}{\sqrt{\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\sigma}\right)^2}\sqrt{x^2 + \left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2} + k\right)\right)^2}} dx.$$

Оскільки для $x > 0$ та $k \leq 0$

$$\sqrt{\left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\sigma}\right)^2} \geq \left(x - \frac{k\pi}{\sigma}\right)^2 = \sqrt{x^2 - 2x\frac{k\pi}{\sigma} + \left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2},$$

то отримаємо

$$\sqrt{x^2 - 2x\frac{k\pi}{\sigma} + \left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2} \geq \sqrt{x^2 + \left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2}.$$

Зауважимо, що

$$\sqrt{x^2+\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{\pi^2}{4\sigma^2}+\frac{\pi^2 k}{\sigma^2}+\frac{\pi^2 k^2}{\sigma^2}\right)}\geq$$

$$\geq C\sqrt{x^2+\left(\frac{\pi k}{\sigma}\right)^2}.$$

Справді, останнє еквівалентне наступним нерівностям

$$\frac{\pi^2}{4\sigma^2}+\frac{\pi^2 k}{\sigma^2}+\frac{\pi^2 k^2}{\sigma^2}\geq C^2\frac{\pi^2 k^2}{\sigma^2},$$

$$\frac{\pi^2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{4}+k+k^2-C^2k^2\right)\geq 0,$$

$$k^2(1-C^2)+k+\frac{1}{4}\geq 0,$$

$$k=\frac{-1\pm C}{2(1-C^2)}.$$

Отже, наприклад, при $C=\frac{1}{4}$ остання нерівність виконується для всіх k, що не належать проміжку $\left(-\frac{17}{30};-\frac{2}{3}\right)$. Тобто, виконується для всіх цілих k.

Тому

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{|c_k|k}{\sqrt{\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2\sigma}\right)^2}\sqrt{x^2+\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}}dx\leq$$

$$\leq\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{|c_k|k}{C\sqrt{x^2+\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2}\sqrt{x^2+\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2}}dx.$$

Оскільки ряд є рівномірно збіжний за ознакою Вейєрштраса, то почленно проінтегрувавши, отримаємо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{|c_k|k}{C\sqrt{x^2+\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2}\sqrt{x^2+\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2}}dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{C}\sum_{k=-\infty}^{0} \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k}{\sqrt{x^2+\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2}\sqrt{x^2+\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{C}\sum_{k=-\infty}^{0} |c_k| \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{\pi}\arctan\frac{1}{k}\right) < +\infty.$$

Отже, нерівність (2.8) виконується. □

Лема 2.4. *Нехай $f \in W^1_\sigma$. Тоді*

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=0}^{\left[\frac{x\sigma}{2\pi}\right]} \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx < +\infty, \tag{2.9}$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2.3).

Доведення. Покажемо, що нерівність (2.9) виконується. Тоді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=0}^{\left[\frac{x\sigma}{2\pi}\right]} \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{x\sigma}{2\pi}\right]} \left| \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx.$$

Ряд є рівномірно збіжний за ознакою Вейєрштраса, тому

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{x\sigma}{2\pi}\right]} \left| \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx.$$

Зрозуміло, що при $k = 0$

$$\int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx = 0,$$

тому розглянемо праву частину вищенаведеної нерівності, як наступну

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k| k dx}{\left|x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right| \left|x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right|} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{+\infty} \int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx.$$

Покажемо, що

$$\sum_{k=1}^{1} \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k| k dx}{\left|x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right| \left|x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right|} < +\infty.$$

Очевидно, що при $k = 1$ отримаємо наступне

$$\sum_{k=1}^{1} \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k| k dx}{\left|x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right| \left|x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right|} =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_1|dx}{\left|x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+1\right)\right| \left|x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right|}.$$

Зауважимо, що при $k = 1$ та $x > \frac{\pi}{\sigma}$

$$\left|x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+1\right)\right| = \sqrt{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4\sigma}\right)^2} \geq \sqrt{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\right)^2} = x - \frac{\pi}{\sigma}$$

та

$$\left|x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3\pi}{2\sigma}\right)^2} \geq x.$$

Тоді отримаємо

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4\sigma}\right)^2}\sqrt{x^2 + \left(\frac{3\pi}{2\sigma}\right)^2}} \leq \int\limits_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{x\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\right)} dx < +\infty.$$

Розглянемо тепер ряд

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \frac{c_k k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx.$$

Зауваживши, що

$$\left|x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right| = \sqrt{\left(x - k\frac{\pi}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\sigma}\right)^2} \geq \left|x - \frac{k\pi}{\sigma}\right| =$$

$$= x - \frac{k\pi}{\sigma} \geq \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{k\pi}{\sigma} \geq \frac{x}{2} + \frac{k\pi}{\sigma} - \frac{k\pi}{\sigma} = \frac{x}{2} = \frac{x}{3} + \frac{x}{6} \geq$$

$$\geq \frac{x}{3} + \frac{2k\pi}{\sigma}\frac{1}{6} = \frac{x}{3} + \frac{k\pi}{3\sigma} = \frac{1}{3}\left(x + \frac{k\pi}{\sigma}\right)$$

та

$$\left|x - \frac{i\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right| \geq \frac{|x| + |\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)|}{2} \geq \frac{1}{2}\left(|x| + \frac{\pi|k|}{\sigma}\right),$$

отримаємо

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\frac{c_k k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}\right|dx \le \sum_{k=2}^{+\infty}\int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty}\frac{6k|c_k|}{\left(x+\frac{k\pi}{\sigma}\right)^2}dx =$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{6k|c_k|}{x+\frac{k\pi}{\sigma}}\right)\Bigg|_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} = \sum_{k=2}^{+\infty}2|c_k|\frac{\sigma}{\pi} < +\infty.$$

Отже, умова (2.9) виконується. □

Лема 2.5. *Нехай $f \in W_\sigma^1$, тоді*

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}]+1}\frac{c_k}{x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)}\right|dx < +\infty, \tag{2.10}$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2.3).

Доведення. Покажемо, що нерівність (2.10) виконується, для цього запишемо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}]+1}\frac{c_k}{x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)}\right|dx \le$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}]+1}\left|\frac{c_k}{x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)}\right|dx.$$

Оскільки

$$\left|\frac{c_k}{x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)}\right| \le \frac{|c_k|}{\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)} \le \frac{2\sigma}{\pi}|c_k|,$$

то ряд є рівномірно збіжний за ознакою Вейєрштраса. Тому, почленно проінтегруємо ліву частину нерівності (2.10)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\frac{2k\pi}{3\sigma}}^{\frac{2k\pi}{\sigma}} \frac{|c_k|}{|x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)|}dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\frac{2k\pi}{3\sigma}}^{\frac{2k\pi}{\sigma}} \frac{|c_k|}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}}dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \ln\left(x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}\right)\Bigg|_{\frac{2k\pi}{3\sigma}}^{\frac{2k\pi}{\sigma}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \ln\left(\frac{2k\pi}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{2k\pi}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}\right) -$$

$$-|c_k| \ln\left(\frac{2k\pi}{3\sigma} + \sqrt{\left(\frac{2k\pi}{3\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \ln L(k),$$

де

$$L(k) = \frac{\frac{2k\pi}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{2k\pi}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}}{\frac{2k\pi}{3\sigma} + \sqrt{\left(\frac{2k\pi}{3\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}}.$$

Розглянемо підлогарифмічний вираз. В чисельнику та знаменнику $\frac{\pi}{\sigma}$ замінимо на $\frac{2\pi}{\sigma}$ та $\frac{2\pi}{3\sigma}$ відповідно, тоді отримаємо

$$L(k) \leq \frac{\frac{2\pi k}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{2\pi k}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}}{\frac{2\pi k}{3\sigma} + \sqrt{\left(\frac{2\pi k}{3\sigma}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{3\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{2\pi k}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{2\pi k}{\sigma}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{1}{2k}+1\right)^2\right)}}{\frac{2\pi k}{3\sigma} + \sqrt{\left(\frac{2\pi k}{3\sigma}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{1}{2k}+1\right)^2\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{2\pi k}{\sigma}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2k}+1\right)^2}\right)}{\frac{2\pi k}{3\sigma}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2k}+1\right)^2}\right)} = 3.$$

Функція $\ln L(k)$ є обмеженою зверху. Оскільки, також $L(k) \geq 1$, то $\ln L(k)$ є обмеженою знизу функцією. Тому виконується умова (2.10). $\square$

Доведення теореми 2.2. Нехай виконується умова (2.5), тоді розглянемо інтеграл по проміжку $\left(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty\right)$, як суму інтегралів по проміжках довжиною $\frac{2\pi}{\sigma}$. Розбивши внутрішню суму на три суми, отримаємо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}\right]}\frac{c_k}{x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)}\right|dx = \sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}+\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|dx \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|dx+$$

$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right| =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|dx+$$

$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\pi}{\sigma}\left|\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|.$$

Покажемо, що

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|dx<+\infty. \tag{2.11}$$

Оскільки

$$\frac{1}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\frac{1}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}=$$

$$=\frac{-x}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)},$$

то

$$\left|\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}|c_k|\left|\frac{-x}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)}\right|=$$

$$=\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{|c_k|x\sigma}{\pi\sqrt{\left(\frac{x\sigma}{\pi}+m-k\right)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(m-k)^2+\frac{1}{4}}}.$$

Ряд є рівномірно збіжний за ознакою Вейєрштраса, тому проінтегруємо його почленно на кожному з відрізків $\left[\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right];\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]\right]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\sum_{k=\left[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}\right]}\frac{|c_k|x\sigma}{\pi\sqrt{\left(\frac{x\sigma}{\pi}+m-k\right)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(m-k)^2+\frac{1}{4}}}dx=$$

$$= \sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{|c_k|x\sigma}{\pi\sqrt{\left(\frac{x\sigma}{\pi}+m-k\right)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(m-k)^2+\frac{1}{4}}}dx.$$

Тоді, застосувавши теорему про середнє, отримаємо

$$\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{|c_k|x\sigma}{\pi\sqrt{\left(\frac{x\sigma}{\pi}+m-k\right)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(m-k)^2+\frac{1}{4}}}dx =$$

$$= \frac{\pi}{\sigma} \sum_{k=[\frac{\alpha}{2}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3\alpha}{2}+\frac{3m}{2}]} \frac{\alpha|c_k|}{\sqrt{(\alpha+m-k)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(m-k)^2+\frac{1}{4}}},$$

де $\alpha \in [0;1]$. Підставимо отриманий результат у (2.1) і позначимо $m' = m-k$. Тоді, змінивши порядок сумування абсолютно збіжного ряду, отримаємо

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=[\frac{2k}{3}-\alpha]-k}^{[2k+\frac{\alpha}{4}]-k} \frac{\alpha|c_k|}{\sqrt{(\alpha+m')^2+\frac{1}{4}}\sqrt{m'^2+\frac{1}{4}}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=[\frac{2k}{3}-\alpha]-k}^{[2k+\frac{\alpha}{4}]-k} \frac{|c_k|}{\sqrt{(\alpha+m')^2+\frac{1}{4}}\sqrt{m'^2+\frac{1}{4}}} \leq$$

$$\leq \beta \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=[\frac{2k}{3}-\alpha]-k}^{[2k+\frac{\alpha}{4}]-k} \frac{|c_k|}{(1+m')^2+\frac{1}{4}} < +\infty,$$

де $\beta > 0$, тому виконується умова (2.1). Зазначимо, що при доведенні нерівності (2.11) ми не використовували умову (2.1), а тільки те, що $(c_k) \in l^1$.

Нехай тепер виконується умова (2.1), тоді

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{m}{2}]}^{[\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|=\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{m}{2}]}^{[\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\right.$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}dx+$$

$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}dx\right|\leq$$

$$\leq\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|dx+$$

$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|dx.$$

Як зауважено вище, умова (2.11) виконується незалежно від умови (2.1). Тому виконується (2.5). □

2.2 Розщеплення функцій в ваговому просторі Гарді

Простір Пелі - Вінера W_σ^p цілих L^p функцій експоненційного типу $\sigma > 0$, може бути визначений як простір цілих фукцій, що належать $L^p(\mathbb{R})$ і які задовольняють нерівність $|f(z)| < ce^{\sigma|z|}$,
$\sigma > 0$, для додатної сталої C.

В [44] отримані наступні умови розв'язку Проблеми A (див. підрозділ 2.1).

Теорема 2.3. *Нехай $f \in W_\sigma^1$. Функція χ визначена рівністю (2.4) є розв'зком Проблеми A тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k k}{\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)} \right| < +\infty, \tag{2.12}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k k}{\left(m + \frac{i}{2} + ik\right)\left(m + \frac{i}{2} - k\right)} \right| < +\infty. \tag{2.13}$$

Проблему A про розщеплення функцій у вигляді суми двох інших функцій можна розглянути в дещо простішому вигляді. Точне формулювання проблеми розщеплення функцій у верхній та нижній півплощині [41] для $\mathbb{C}(-\alpha;\alpha) = \{z : |\arg z| < \alpha\}$, $0 < \alpha \le \pi$, наступне.

Проблема B. *Чи можливе розщеплення кожної функції $f \in W_\sigma^1$ у вигляді $f = \chi - \mu$, де χ і μ є цілими функціями і*
$\chi \in E^1[\mathbb{C}(0;\pi)]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\pi;0)]$?

Відповідь на це запитання є негативною. Наприклад, для функції

$$f(z) = \frac{2(1-\cos\sigma z)}{z^2} \in W^1_\sigma$$

ми маємо єдиний спосіб зображення $f = \chi - \mu$, де

$$\chi(z) = \frac{-e^{i\sigma z} + 1 + i\sigma z}{z^2} \notin W^1_\sigma, \qquad \mu(z) = \frac{e^{i\sigma z} - 1 + i\sigma z}{z^2} \notin W^1_\sigma.$$

Тому таке розщеплення є неможливим.

На основі теореми 2.1 розглянемо функцію f у вигляді

$$f(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin\sigma z}{\sigma z - \pi k}. \tag{2.14}$$

Нам вдалося встановити наступне твердження.

Теорема 2.4. *Якщо $(c_k) \in l^1$ і $c_{2k} = -c_{2k+1}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$, тоді для функції f визначеної в (2.14) існує розв'язок Проблеми B, причому функція χ визначається рівністю (2.4) і $\mu = f - \chi$.*

Доведення теореми 2.3 базується на лемі 2.6.

Лема 2.6. *Якщо послідовність $(c_k) \in l^1$ і $c_{2k} = -c_{2k+1}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$, тоді функція f, визначена в (2.14), належить W^1_σ.*

Доведення. Розглянемо функцію (2.14) для довільного $\sigma > 0$

$$f(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{\sin\sigma z}{\sigma z - \pi n} =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{c_{2k}\sin\sigma z}{\sigma z - 2\pi k} + \frac{c_{2k+1}\sin\sigma z}{\sigma z - 2\pi k - \pi} \right) =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin\sigma z \left(\frac{c_{2k}}{\sigma z - 2\pi k} - \frac{c_{2k}}{\sigma z - 2\pi k - \pi} + \right.$$

$$\left.\frac{c_{2k}}{\sigma z-2\pi k-\pi}-\frac{c_{2k+1}}{\sigma z-2\pi k-\pi}\right).$$

Оскільки за умовою леми 2.6 $c_{2k}=-c_{2k+1}$, то

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sin\sigma z\left(\frac{c_{2k}}{\sigma z-2\pi k-\pi}-\frac{c_{2k+1}}{\sigma z-2\pi k-\pi}\right)=0.$$

Тому отримаємо наступне

$$f(z)=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_{2k}\pi\sin\sigma z}{(\sigma z-2\pi k)(\sigma z-2\pi k-\pi)}.$$

Ряд збіжний абсолютно та рівномірно, тому почленно проінтегруємо за ознакою Вейєрштраса

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+i)|dx\leq$$

$$\leq T_1\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{-2\pi k-2\pi}\frac{|c_{2k}|\pi dx}{|\sigma x+\sigma i-2\pi k||\sigma x+\sigma i-2\pi k-\pi|}+\right.$$

$$+\int\limits_{-2\pi k-2\pi}^{-2\pi k+2\pi}\frac{|c_{2k}|\pi dx}{|\sigma x+\sigma i-2\pi k||\sigma x+\sigma i-2\pi k-\pi|}+$$

$$\left.+\int\limits_{-2\pi k+\pi}^{+\infty}\frac{|c_{2k}|\pi dx}{|\sigma x+\sigma i-2\pi k||\sigma x+\sigma i-2\pi k-\pi|}\right).$$

Тут $T_1=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}|\sin\sigma(x+i)|, x\in\mathbb{R}$.

При $\sigma x\in[-\infty;-2\pi k+2\pi)$

$$|\sigma x+\sigma i-2\pi k-\pi|=\sqrt{(\sigma x-2\pi k-\pi)^2+\sigma^2}\geq\sqrt{(\sigma x-2\pi k)^2+\sigma^2},$$

отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\frac{-2\pi k-2\pi}{\sigma}} \frac{|c_{2k}|\pi dx}{|\sigma x+\sigma i-2\pi k||\sigma x+\sigma i-2\pi k-\pi|} \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\frac{-2\pi k-2\pi}{\sigma}} \frac{|c_{2k}|\pi}{\sqrt{(\sigma x-2\pi k)^2+\sigma^2}\sqrt{(\sigma x-2\pi k)^2+\sigma^2}}dx.$$

Оскільки, при $x \in [-2\pi k-2\pi; -2\pi k+2\pi]$

$$|\sigma x+\sigma i-2\pi k| = \sqrt{(\sigma x-2\pi k)^2+\sigma^2} \geq \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

та, аналогічно,

$$|\sigma x+\sigma i-2\pi k-\pi| = \sqrt{(\sigma x-2\pi k-\pi)^2+\sigma^2} \geq \sqrt{\sigma^2} = \sigma,$$

то

$$\int\limits_{-2\pi k-2\pi}^{-2\pi k+2\pi} \frac{|c_{2k}|\pi dx}{|\sigma x+\sigma i-2\pi k||\sigma x+\sigma i-2\pi k-\pi|} \leq \int\limits_{-2\pi k-2\pi}^{-2\pi k+2\pi} |c_{2k}|\frac{\pi}{\sigma^2}dx.$$

Зауважимо, що для $x \in [-2\pi k+2\pi; +\infty)$

$$|\sigma x+\sigma i-2\pi k| = \sqrt{(\sigma x-2\pi k)^2+\sigma^2} \geq \sqrt{(\sigma x-2\pi k-\pi)^2+\sigma^2},$$

тому

$$\int\limits_{-2\pi k+\pi}^{+\infty} \frac{|c_{2k}|\pi dx}{|\sigma x+\sigma i-2\pi k||\sigma x+\sigma i-2\pi k-\pi|} \leq$$

$$\leq \int\limits_{-2\pi k+2\pi}^{+\infty} \frac{|c_{2k}|\pi}{\sqrt{(\sigma x-2\pi k-\pi)^2+\sigma^2}\sqrt{(\sigma x-2\pi k-\pi)^2+\sigma^2}}dx.$$

Тоді отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+i)|dx \leq$$

$$\leq T_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{-2\pi k-2\pi}{\sigma}} \frac{|c_{2k}|\pi}{\sqrt{(\sigma x-2\pi k)^2+\sigma^2}\sqrt{(\sigma x-2\pi k)^2+\sigma^2}}dx + \right.$$

$$+ \int\limits_{\frac{-2\pi k-2\pi}{\sigma}}^{\frac{-2\pi k+2\pi}{\sigma}} |c_{2k}|\frac{\pi}{\sigma^2}dx +$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{-2\pi k+2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_{2k}|\pi}{\sqrt{(\sigma x-2\pi k-\pi)^2+\sigma^2}\sqrt{(\sigma x-2\pi k-\pi)^2+\sigma^2}}dx \right) \leq$$

$$\leq T_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{2k}| \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{(\sigma x-2\pi k)^2+\sigma^2}dx + \int\limits_{\frac{-2\pi k-2\pi}{\sigma}}^{\frac{-2\pi k+2\pi}{\sigma}} \frac{\pi}{\sigma^2}dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{(\sigma x-2\pi k-\pi)^2+\sigma^2}dx \right) =$$

$$= T_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{2k}| \left(\frac{\pi}{\sigma^2}\operatorname{arctg} \frac{(\sigma x-2\pi k)}{\sigma}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{4\pi^2}{\sigma^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{\sigma^2}\operatorname{arctg} \frac{(\sigma x-2\pi k-\pi)}{\sigma}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} \right) = T_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{2k}| \left(\frac{2\pi^2}{\sigma^2} + \frac{4\pi^2}{\sigma^3} \right) < +\infty.$$

Оскільки, $f(x+i)$ належить $L^1(\mathbb{R})$ то за означенням простору $f(z+i)$ належить W_σ^1. Тому за теоремою 1.2 (див. розділ 1) про еквівалентність означення просторів H_σ^p функція f належить W_σ^1.

$\square$

Доведення теореми. Для доведення теореми покажемо, що виконуються умови теореми 2.3.

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k k}{(m-\frac{i}{2}-k)(m-\frac{i}{2}-ik)}\right|<+\infty.$$

Розглянемо попарно елементи ряду

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{c_n}{(m-\frac{i}{2}-n)(m-\frac{i}{2}-in)}\right|=$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{c_n}{m-\frac{i}{2}-n}-\frac{c_n}{m-\frac{i}{2}-in}\right)\frac{1}{1-i}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{c_{2k}}{m-\frac{i}{2}-2k}-\frac{c_{2k}}{m-\frac{i}{2}-2ki}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{c_{2k+1}}{m-\frac{i}{2}-2k-1}-\frac{c_{2k+1}}{m-\frac{i}{2}-2ki-i}\right)\right|.$$

Погрупуємо доданки перший з третім і другий з четвертим, тоді отримаємо

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k k}{(m-\frac{i}{2}-k)(m-\frac{i}{2}-ik)}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\frac{-c_{2k}}{(m-\frac{i}{2}-2k)(m-\frac{i}{2}-2k-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{-c_{2k}i}{(m-\frac{i}{2}-2ki)(m-\frac{i}{2}-2ki-i)})\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|c_{2k}|}{|m-\frac{i}{2}-2k||m-\frac{i}{2}-2k-1|}+\right.$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|c_{2k}i|}{|m-\frac{i}{2}-2ki||m-\frac{i}{2}-2ki-i|}\Bigg).$$

Змінимо порядок сумування абсолютно збіжного подвійного ряду і отримаємо

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k k}{(m-\frac{i}{2}-k)(m-\frac{i}{2}-ik)}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|c_{2k}|}{|m-\frac{i}{2}-2k||m-\frac{i}{2}-2k-1|}+$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|c_{2k}i|}{|m-\frac{i}{2}-2ki||m-\frac{i}{2}-2ki-i|}\Bigg)\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_{2k}|\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(m-2k)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(m-2k-1)^2+\frac{1}{4}}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_{2k}|\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{m^2+(\frac{1}{2}+2k)^2}\sqrt{m^2+(\frac{1}{2}+2k+1)^2}}.$$

Позначивши $l=m-2k$ маємо

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k k}{(m-\frac{i}{2}-k)(m-\frac{i}{2}-ik)}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_{2k}|\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{l^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(l-1)^2+\frac{1}{4}}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_{2k}|\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^2+\frac{1}{4}}.$$

Оскільки виконується умова

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_{2k}|\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^2+\frac{1}{4}}<+\infty,$$

то залишилося показати збіжність першого ряду

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_{2k}|\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{l^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(l-1)^2+\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_{2k}|\left(\sum_{l=-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{l^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(l-1)^2+\frac{1}{4}}}+\frac{4}{\sqrt{5}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{l^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(l-1)^2+\frac{1}{4}}}\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{0}\frac{1}{l^2+\frac{1}{4}}+\frac{4}{\sqrt{5}}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{(l-1)^2+\frac{1}{4}}\right)<+\infty.$$

Це доводить, що

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k k}{(m-\frac{i}{2}-k)(m-\frac{i}{2}-ik)}\right|<+\infty$$

і умова теореми 2.3 виконується. Аналогічно можна довести виконання умови (2.13). □

Приклад 2.3. *Покажемо, що для функції f існує розв'язок, якщо коефіцієнти c_n задані формулою*

$$c_n=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{(|2k|+1)^3}}, n=2k,\\ -\frac{1}{\sqrt{(|2k|+1)^3}}, n=2k+1.\end{cases}\tag{2.15}$$

Доведення. За лемою 2.6 функція f визначена рівністю (2.14), де числа c_n визначені в (2.3) належить W^1_σ. Тоді за теоремою 2.4 для функції

$$f(z)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\sigma z}{\sqrt{(|2k|+1)^3}(\sigma z-2\pi k)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\sigma z}{\sqrt{(|2k|+1)^3}(\sigma z-\pi k-\pi)}\right)=$$

$$=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi\sin\sigma z}{\sqrt{(|2k|+1)^3}(\sigma z-2\pi k)(\sigma z-\pi k-\pi)}$$

існує розв'язок. Функція φ будем мати вигляд

$$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(c_{2k}e^{-\frac{2ik\pi t}{\sigma}}+c_{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)i\pi t}{\sigma}}\right)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{-e^{-\frac{2ik\pi t}{\sigma}}+e^{-\frac{(2k+1)i\pi t}{\sigma}}}{\sqrt{(|2k|+1)^3}}.$$

Обчислимо значення функції χ_1

$$\chi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(|2k|+1)^3}}\left(\int_0^\sigma -e^{\frac{-it(2k\pi-\sigma z)}{\sigma}}dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^\sigma e^{\frac{-it((2k+1)\pi-\sigma z)}{\sigma}}dt\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(|2k|+1)^3}}\left(\frac{\sigma e^{-i(2k\pi-\sigma z)}}{i(2k\pi-\sigma z)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma}{i(2k\pi-\sigma z)}-\frac{\sigma e^{-i((2k+1)\pi-\sigma z)}}{i((2k+1)\pi-\sigma z)}+\frac{\sigma}{i((2k+1)\pi-\sigma z)}\right),$$

та функції χ_2

$$\chi_2(-iz)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(|2k|+1)^3}}\left(\int_{-\sigma}^0 -e^{\frac{-t(2ik\pi-\sigma z)}{\sigma}}dt\right.$$

$$+\int\limits_{-\sigma}^{0} e^{\frac{-t((2k+1)i\pi-\sigma z)}{\sigma}}dt\Bigg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(|2k|+1)^3}}\left(\frac{\sigma}{(2i\pi k-\sigma z)}+\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma e^{2ik\pi-\sigma z}}{(2ik\pi-\sigma z)}-\frac{\sigma}{((2k+1)i\pi-\sigma z)}+\frac{\sigma e^{((2k+1)i\pi-\sigma z)}}{((2k+1)i\pi-\sigma z)}\right).$$

Отримані значення функцій χ_1 та χ_2 підставимо в (2.4)

$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(|2k|+1)^3}}\left(\frac{\sigma e^{i\sigma z}}{i(2k\pi-\sigma z)}-\frac{\sigma}{i(2k\pi-\sigma z)}+\right.$$

$$+\frac{\sigma e^{i\sigma z}}{i((2k+1)\pi-\sigma z)}+\frac{\sigma}{i((2k+1)i\pi-\sigma z)}-\frac{i\sigma}{(2i\pi k-\sigma z)}+$$

$$\left.+\frac{i\sigma e^{-\sigma z}}{(2ik\pi-\sigma z)}+\frac{i\sigma}{((2k+1)i\pi-\sigma z)}-\frac{i\sigma e^{-\sigma z}}{((2k+1)i\pi-\sigma z)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(|2k|+1)^3}}\left(\frac{\sigma e^{i\sigma z}}{i(2k\pi-\sigma z)}-\frac{2\sigma\pi k(1-i)}{i(2k\pi-\sigma z)(2i\pi k-\sigma z)}+\right.$$

$$+\frac{\sigma e^{i\sigma z}}{i((2k+1)\pi-\sigma z)}+\frac{\sigma(2k+\pi)(i-1)}{i((2k+1)i\pi-\sigma z)((2k+1)i\pi-\sigma z)}+$$

$$\left.+\frac{i\sigma e^{-\sigma z}}{(2ik\pi-\sigma z)}-\frac{i\sigma e^{-\sigma z}}{((2k+1)i\pi-\sigma z)}\right).$$

$\square$

2.3 Розщеплення функцій як завгодно малого експоненційного типу

В даному підрозділі ми хочемо показати умови існування розв'язку проблеми розщеплення для цілих функцій як завгодно малого експоненційного типу в лівій півплощині. Спочатку введемо ряд означень та допоміжних тверджень.

Назвемо цілу функцію f цілою функцією експоненційного типу α в півплощині $\mathbb{C}_- = \{z : \Re z < 0\}$ якщо

$$(\forall \delta > 0)(\exists A > 0)(\forall z \in \mathbb{C}_-) : |f(z)| \leq Ae^{(\alpha+\delta)|z|} \tag{2.16}$$

і умова (2.16) не виконується якщо замінити число α на менше.

Функція запропонована Гіщак Т. І. в [44], як розв'язок Проблеми А є цілою функцією (як сума двох функцій, кожна з яких є обмеженою в $\mathbb{C}_+$ і належить L^p) експоненційного типу σ в півплощині $\mathbb{C}_+$.

Застосування результатів задач розщеплення, зокрема, в теорії інформації, може вимагати знаходження таких розв'язків проблеми розщеплення, зростання яких на від'ємній дійсній півосі було б "малим". Сформулюємо одну з таких проблем у наступній формі:

Проблема C. *Чи для кожної функції $f \in W^1_\sigma$, можливе розщеплення $f = \hat{\chi} + \hat{\mu}$, де функції $\hat{\chi}$ і $\hat{\mu}$ є цілими функціями як завгодно малого, наперед заданого експоненційного типу $\alpha > 0$ в $\mathbb{C}_-$?*

Розв'язок Проблеми C шукатимемо у вигляді

$$\hat{\chi}(z) = \chi_1(z) + i\hat{\chi}_2(-iz) \tag{2.17}$$

де

$$\chi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\sigma}\varphi(t)e^{itz}dt,\qquad \hat{\chi}_2(z)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{0}\varphi(t)e^{itz}dt.$$

Зауважимо, що функція $\hat{\chi}_2$ є функцією експоненційного типу $\varepsilon>0$ в $\mathbb{C}_-$ і ε може бути як завгодно малим.

Тоді функція $\hat{\mu}$ визначається формулою

$$\hat{\mu}=f-\hat{\chi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\varphi(t)e^{itz}dt+i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{0}\varphi(t)e^{tz}dt.$$

Лема 2.7 ([101]). *Якщо функція χ є аналітичною в $\mathbb{C}(\alpha;\beta)$, має кутові граничні значення в $\partial\mathbb{C}(\alpha;\beta)$, $\chi\in L^p(\partial\mathbb{C}(\alpha;\beta))$ і для деякого $\gamma\in(0;\pi/(\alpha-\beta))$*

$$(\forall\tau>0):\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|\chi(re^{i\varphi})|^pe^{-\tau r^{\gamma}dr}\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

тоді $\chi\in E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$.

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2.5. *Нехай $f\in W_\sigma^1$. Якщо виконуються умови (2.12) та (2.13), то функції $\hat{\chi}$ та $\hat{\mu}$ є розв'язком Проблеми С.*

Доведення. Нехай виконуються умови (2.12) та (2.13). Покажемо, що функція $\hat{\chi}$ визначена рівністю (2.17) є розв'язком Проблеми С. Спершу покажемо, що $\hat{\chi}(x-i\frac{\pi}{2\sigma})$ належить $L^1(0;+\infty)$ тоді і тільки тоді, коли функція χ належить $L^1(0;+\infty)$. Ряд в рівності (2.2) збігається абсолютно і рівномірно на кожному проміжку дійсної додатної півосі за ознакою Вейєрштраса. А це означає, що ряди в рівностях

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{-ik\pi t}{\sigma}} e^{itz} dt$$

та

$$\hat{\chi}_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{-ik\pi t}{\sigma}} e^{itz} dt$$

можна проінтегрувати почленно. Отже, отримаємо наступні значення для функцій $\chi_1(z)$ та $\hat{\chi}_2(-iz)$

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^\sigma e^{-\frac{it(\pi k - z)}{\sigma}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\sigma(z - \frac{k\pi}{\sigma})} - 1}{i(z - \frac{k\pi}{\sigma})}$$

і

$$\hat{\chi}_2(-iz) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\varepsilon}^0 e^{-\frac{t(i\pi k - z)}{\sigma}} dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{1 - e^{-\varepsilon(z - \frac{k\pi}{\sigma} i)}}{z - \frac{k\pi}{\sigma} i}.$$

Підставивши отримані значення в (2.17) отримаємо

$$\hat{\chi}(z) = \chi_1(z) + i\hat{\chi}_2(-iz) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(\frac{e^{i\sigma(z - \frac{k\pi}{\sigma})} - 1}{i(z - \frac{k\pi}{\sigma})} - i \frac{1 - e^{-\varepsilon(z - \frac{k\pi}{\sigma} i)}}{z - \frac{k\pi}{\sigma} i} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(\frac{(-1)^k e^{i\sigma z}}{i(z - \frac{k\pi}{\sigma})} + \frac{i e^{-\frac{\varepsilon k\pi i}{\sigma}} e^{-\varepsilon z}}{z - \frac{k\pi}{\sigma} i} - \frac{k\pi(i-1)}{i\sigma(z - \frac{k\pi}{\sigma})(z - \frac{k\pi}{\sigma} i)} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\left(\frac{(-1)^k e^{i\sigma z}}{i(z-\frac{k\pi}{\sigma})}+\frac{(-1)^k i e^{-\varepsilon z}}{z-\frac{k\pi}{\sigma}i}-\frac{k\pi(i-1)}{i\sigma(z-\frac{k\pi}{\sigma})(z-\frac{k\pi}{\sigma}i)}\right).$$

Для $z = x - i\frac{\pi}{2\sigma}$ отримаємо

$$\hat{\chi}\left(x-i\frac{\pi}{2\sigma}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\frac{(-1)^k e^{i\sigma(x-i\frac{\pi}{2\sigma})}}{x-i\frac{\pi}{2\sigma}-\frac{k\pi}{\sigma}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\frac{(-1)^k i e^{-\varepsilon(x-i\frac{\pi}{2\sigma})}}{x-i\frac{\pi}{2\sigma}-\frac{k\pi}{\sigma}i}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k\pi(i-1)}{\sigma(x-i\frac{\pi}{2\sigma}-\frac{k\pi}{\sigma})(x-i\frac{\pi}{2\sigma}-\frac{k\pi}{\sigma}i)}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\frac{(-1)^k e^{i\sigma x+\frac{\pi}{2}}}{x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\frac{(-1)^k i e^{-\varepsilon x+i\frac{\pi}{2}}}{x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k\pi(i+1)}{\sigma(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))}.$$

Вище отримані доданки позначимо відповідно $S_1(x)$, $S_2(x,\varepsilon)$, $S_3(x)$.

Отже,

$$\hat{\chi}\left(x-i\frac{\pi}{2\sigma}\right)=-S_1(x)+S_2(x,\varepsilon)+S_3(x). \tag{2.18}$$

В [44] показано, що якщо $f\in W_\sigma^1$ і виконуються умови (2.12) та (2.13), то

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}|S_1(x)|dx<+\infty.$$

Зауважимо, що

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|c_k|}{|x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)|}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|c_k|}{\sqrt{x^2+(\frac{\pi}{2\sigma}+\frac{\pi k}{\sigma})^2}}\le\frac{1}{x}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|.$$

Тоді розглянемо інтеграл по $x \in [\frac{\pi}{2}; +\infty)$ для функції $S_2(x, \varepsilon)$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |S_2(x,\varepsilon)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-\varepsilon x + \frac{\pi i}{2}}}{x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)} \right| dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k| e^{\varepsilon x}}{|x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)|} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon x}}{x} dx < +\infty.$$

В [44] доведено, що $\chi(x - i\frac{\pi}{2\sigma}) \in L^1(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))} \right| < +\infty.$$

Ця нерівність доводить, що функція $S_3(x)$ належить $L^1(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty)$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |S_3(x)| dx < +\infty.$$

Цим доведено, що $\hat{\chi}(x - i\frac{\pi}{2\sigma}) \in L^1(0; +\infty)$.

Тепер покажемо, що якщо $\hat{\chi}(x - i\frac{\pi}{2\sigma})$ належить $L^1(0; +\infty)$, то і χ належить $L^1(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty)$. В доведенні теореми 1 ([44]) показано, що

$$\chi\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma}\right) = -S_1(x) + S_2(x) + S_3(x).$$

Віднявши від останньої рівності (2.18) отримаємо:

$$\chi\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma}\right) = \hat{\chi}\left(x - i\frac{\pi}{2\sigma}\right) + S_2(x) - S_2(x,\varepsilon).$$

Як показано в [44] $S_1(x)$ належить $L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$; ми довели, що $S_2(x,\varepsilon)$ належить $L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$ незалежно від виконання умови (2.12) і $\hat{\chi}(x-i\frac{\pi}{2\sigma})$ належить $L^1(0;+\infty)$. Тому, χ належить $L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$.

Для того, щоб завершити доведення скористаємося теоремою типу Фрагмена - Ліндельофа і покажемо, що $\hat{\chi}(x-\frac{i\pi}{2\sigma})$ належить $E^1[\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2})]$. Тобто, $\hat{\chi}(x-\frac{i\pi}{2\sigma})$ належить $L^1(\partial\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2}))$ і ми отримаємо $\hat{\chi}(x-\frac{i\pi}{2\sigma})$ належить $L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$. Аналогічно можна показати, що $\hat{\chi}\left(iy+\frac{\pi}{2\sigma}\right)$ належить $L^1\left(\frac{\pi}{\sigma};+\infty\right)$.

Оскільки $\hat{\chi}\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right)$ належить $L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$, $\hat{\chi}\left(iy+\frac{\pi}{2\sigma}\right)$ належить $L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$ і $\hat{\chi}$ є цілою функцію, як сума двох цілих функцій, то $\hat{\chi}(z-\frac{i\pi}{2\sigma}+\frac{\pi}{2\sigma})$ належить $L^1(\partial\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2}))$. Оскільки $\chi_1\in W^2_\sigma$ та $\hat{\chi_2}\in W^2_\sigma$, то функція $\hat{\chi}$ є цілою функцією експоненційного типу, що не перевищує σ в півплощині $\mathbb{C}_+$. Також, зауважимо, що при $\alpha=0$ і $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{3}{2}$. Тоді для будь якого $\tau>0$ ми отримаємо

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|\hat{\chi}\left(re^{i\varphi}-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{2\sigma}\right)\right|e^{-\tau r^{\frac{3}{2}}}dr=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left|\hat{\chi}\left(re^{i\varphi}-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{2\sigma}\right)\right|e^{-2r\sigma}e^{-\tau r^{\frac{3}{2}}+2r\sigma}dr\leq$$

$$\leq\left(\int\limits_0^{+\infty}\left|\hat{\chi}\left(re^{i\varphi}-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{2\sigma}\right)\right|^2e^{-4r\sigma}dr\int\limits_0^{+\infty}e^{-\tau r^{\frac{3}{2}}+2r\sigma}dr\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq b_1\int\limits_0^{+\infty}e^{-\tau r^{\frac{3}{2}}+2r\sigma}dr\leq b<+\infty,$$

тут b не залежить від φ.

Тому, $\hat{\chi}$ належить $E^1[\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2})]$.

Залишилося показати, що функція $\hat{\mu}$ з зображення $f=\hat{\chi}-\hat{\mu}$ належить $E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2};0)]$. Справді,

$$\hat{\mu}(z)=f(z)-\hat{\chi}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\varphi(t)e^{itz}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\sigma}\varphi(t)e^{itz}dt-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\sigma}\varphi(t)e^{itz}dt+i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{0}\varphi(t)e^{tz}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\varphi(t)e^{itz}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{0}\varphi(t)e^{tz}dt.$$

Тоді

$$\hat{\mu}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}}e^{itz}dt+i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}}e^{tz}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\left(\frac{1-e^{ik\pi-i\sigma z}}{i(z-\frac{k\pi}{\sigma})}+i\frac{1-e^{\frac{i\varepsilon k\pi}{\sigma}-\varepsilon z}}{z-i\frac{k\pi}{\sigma}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{(-1)^kie^{-i\sigma z}}{z-\frac{k\pi}{\sigma}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{(-1)^kie^{-\varepsilon z}}{z-i\frac{k\pi}{\sigma}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{(1+i)\pi k}{\sigma(z-\frac{\pi k}{\sigma})(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}.$$

Скориставшись лемою 2.7 можна довести, що $\hat{\mu}(z)$ належить $E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2};0)]$. $\square$

Приклад 2.4. *Для функції*

$$f(z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^2}(\cos\sigma z-1)\in W_\sigma^1$$

розв'язок Проблеми C визначається функціями

$$\hat{\chi}(z)=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{i\sigma z e^{-\varepsilon z}-e^{i\sigma z}+ie^{-\varepsilon z}+i\varepsilon z e^{-\varepsilon z}+1-i}{z^2}\right)$$

та

$$\hat{\mu}(z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-i\sigma z}+i\sigma z e^{-\varepsilon z}+i\varepsilon z e^{-\varepsilon z}-1-i}{z^2}\right).$$

Доведення. Нехай $\varphi(t)=|t|-\sigma$. Тоді за теоремою Пелі - Вінера отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}(t-\sigma)e^{itz}dt=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^2}(\cos\sigma z-1).$$

Обчислимо значення функцій $\chi_1(z)$ та $\hat{\chi_2}(-iz)$

$$\chi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\sigma}(|t|-\sigma)e^{itz}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_0^{\sigma}te^{itz}dt-\frac{\sigma e^{i\sigma z}}{iz}+\frac{\sigma}{iz}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma}{iz}e^{i\sigma z}+\frac{e^{i\sigma z}}{z^2}-\frac{1}{z^2}-\frac{\sigma}{iz}e^{i\sigma z}+\frac{\sigma}{iz}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{ie^{i\sigma z}-i+\sigma z}{iz^2}\right)$$

і

$$\hat{\chi_2}(-iz)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{0}(t-\sigma)e^{tz}dt=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{0}te^{tz}dt-\frac{\sigma}{z}+\frac{\sigma e^{-\varepsilon z}}{z}\right)=$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma e^{-\varepsilon z}}{z} + \frac{e^{-\varepsilon z}}{z^2} + \frac{\varepsilon e^{-\varepsilon z}}{z} - \frac{\sigma}{z} - \frac{1}{z^2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma z e^{-\varepsilon z} + e^{-\varepsilon z} + \varepsilon z e^{-\varepsilon z} - z\sigma - 1}{z^2}\right).$$

Підставимо отримані результати у (2.4)

$$\hat{\chi}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} z^2}(i\sigma z e^{-\varepsilon z} - e^{i\sigma z} + i e^{-\varepsilon z} + i\varepsilon z e^{-\varepsilon z} + 1 - i).$$

Тоді функція μ буде мати вигляд

$$\hat{\mu}(z) = f(z) - \hat{\chi}(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} z^2}(e^{i\sigma z} + e^{-i\sigma z} - 2) +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} z^2}(i\sigma z e^{-\varepsilon z} - e^{i\sigma z} + i e^{-\varepsilon z} + i\varepsilon z e^{-\varepsilon z} + 1 - i) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} z^2}(e^{-i\sigma z} + i\sigma z e^{-\varepsilon z} + i\varepsilon z e^{-\varepsilon z} - 1 - i).$$

□

Розв'язок Проблеми C можна розглянути у вигляді $f = \breve{\chi} - \breve{\mu}$, причому

$$\breve{\chi}(z) = \chi_1(z) + i\breve{\chi}_2(-iz), \tag{2.19}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\sigma(z - \frac{k\pi}{\sigma})} - 1}{i(z - \frac{k\pi}{\sigma})},$$
$$\breve{\chi}_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{1 - e^{-\varepsilon_k (z - \frac{k\pi}{\sigma} i)}}{z - \frac{k\pi}{\sigma} i}.$$

Тут функція χ_1 така ж як і в (2.17) і функція $\breve{\chi}_2$ співпадає з $\hat{\chi}_2$ якщо $\varepsilon_k \equiv \varepsilon$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2.6. *Нехай $f \in W_\sigma^1$. Якщо для послідовності додатних значень ε_k виконується нерівність*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon_k x}}{x} dx < +\infty, \tag{2.20}$$

а також виконуються умови (2.12) і (2.13), то функції $\breve{\chi}$ та $\breve{\mu}$ є розв'язком Проблеми С.

Доведення. Міркуваннями аналогічними до тих, що наведені в доведенні попередньої теореми,ми отримаємо

$$\breve{\chi}\left(x - i\frac{\pi}{2\sigma}\right) = -S_1(x) + S_2(x, \varepsilon_k) + S_3(x),$$

де $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ і

$$S_2(x, \varepsilon_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-\varepsilon_k x + i\frac{\pi}{2}}}{x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k)}.$$

Також, при доведенні теоремі 2.5, базуючись на тому, що f належить W_σ^1 показано наступне

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |S_1(x)| dx < +\infty, \qquad \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |S_3(x)| dx < +\infty.$$

Тому, залишилося довести

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |S_2(x, \varepsilon_k)| dx < +\infty.$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{1}{\left|x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2} + k\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (\frac{\pi}{2\sigma} + \frac{\pi k}{\sigma})^2}} \le \frac{1}{|x|}$$

отримаємо,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}|S_2(x,\varepsilon_k)|dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{(-1)^k ie^{-\varepsilon_k x+\frac{\pi i}{2}}}{x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)}\right|dx\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|c_k|e^{\varepsilon_k x}}{\left|x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right|}dx$$

Тоді, використавши умову (2.20) маємо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}|S_2(x,\varepsilon_k)|dx\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{e^{-\varepsilon_k x}}{x}dx\le M<+\infty,$$

де M не залежить від (ε_k). Тому $\breve{\chi}$ належить $E^1\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$. $\square$

Приклад 2.5. *Для функції*

$$f(z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}z^2}(\cos\sigma z-1)\in W_\sigma^1 \tag{2.21}$$

розв'язок Проблеми C визначається функціями

$$\breve{\chi}(z)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k\tilde{c}_k e^{i\sigma z}}{i(z-\frac{k\pi}{\sigma})}+\left[\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq-1;0;1}}^{+\infty}\frac{\sigma^2 i((-1)^k-1)e^{-\frac{1}{\ln k}z}}{k^2(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sigma i e^z}{z-\frac{k\pi}{\sigma}i}+\sum_{\substack{k=-1,\\ k\neq 0}}^{1}\frac{\sigma^2 i((-1)^k-1)e^z}{k^2(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}\right]+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k\pi(i-1)\tilde{c}_k}{i\sigma(z-\frac{k\pi}{\sigma})(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}\right.$$

та

$$\breve{\mu}(z)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_k ie^{-i\sigma z}}{(z-\frac{k\pi}{\sigma})}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k\tilde{c}_k e^{i\sigma z}}{i(z-\frac{k\pi}{\sigma})}\right.$$

$$
-\left[\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq -1;0;1}}^{+\infty} \frac{\sigma^2 i((-1)^k-1)e^{-\frac{1}{\ln k}z}}{k^2(z-i\frac{k\pi}{\sigma})} - \frac{\sigma i e^z}{z-\frac{k\pi}{\sigma}i} + \right.
$$

$$
\left. - \sum_{\substack{k=-1,\\ k\neq 0}}^{1} \frac{\sigma^2 i((-1)^k-1)e^{z}}{k^2(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}\right] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k\pi(i-1)\tilde{c}_k}{i\sigma(z-\frac{k\pi}{\sigma})(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}\Bigg).
$$

Доведення. Обчислимо значення послідовності (c_k) для функції f у вигляді (2.3) при $z=\frac{\pi k}{\sigma}$

$$
f\left(\frac{\pi k}{\sigma}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_{z\to k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{\sin \pi z}{\pi z - \pi n} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_{z\to k} c_k \frac{\sin \pi z}{\pi z - \pi k} =
$$

$$
= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_{z\to k} c_k \cos \pi k = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (-1)^k c_k.
$$

Звідси

$$
c_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}(-1)^k f\left(\frac{\pi k}{\sigma}\right). \tag{2.22}
$$

Тепер обчислимо значення функції (2.21) при $z=\frac{\pi k}{\sigma}$, $k\neq 0$.

$$
f\left(\frac{\pi k}{\sigma}\right) = \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{\sqrt{\pi^3}k^2}(\cos \pi k - 1) = \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{\sqrt{\pi^3}k^2}((-1)^k - 1).
$$

При $k=0$, отримаємо

$$
f(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{z\to 0} \frac{\cos \sigma z - 1}{z^2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{z\to 0} \frac{\sigma^2 \cos \sigma z}{2} = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}
$$

Підставимо отримані значення в (2.22) і отримаємо

$$
c_k = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}k^2}(1-(-1)^k),
$$

$$
c_0 = -\sigma(-1)^k.
$$

Виберемо

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{1}{\ln|k|}, \quad \text{якщо} \quad |k| > 1, \\ 1, \quad \text{якщо} \quad k \in \{-1; 0; 1\}. \end{cases}$$

Тоді функція $\breve{\chi}$, визначена рівністю (2.19), може бути зображена у вигляді

$$\breve{\chi}(z) = \chi_1(z) + i\breve{\chi}_2(z) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{i\sigma z} c_k}{i(z - \frac{k\pi}{\sigma})} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq -1;0;1}}^{+\infty} \frac{(-1)^k i e^{-\varepsilon_k z} c_k}{z - \frac{k\pi}{\sigma} i} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^k i e^{-z} c_k}{z - \frac{k\pi}{\sigma} i} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k\pi(i-1)c_k}{i\sigma(z - \frac{k\pi}{\sigma})(z - \frac{k\pi}{\sigma} i)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k \tilde{c}_k e^{i\sigma z}}{i(z - \frac{k\pi}{\sigma})} + \left[\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq -1;0;1}}^{+\infty} \frac{\sigma^2 i((-1)^k - 1) e^{-\frac{1}{\ln k} z}}{k^2 (z - i\frac{k\pi}{\sigma})} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sigma i e^z}{z - \frac{k\pi}{\sigma} i} + \sum_{\substack{k=-1, \\ k \neq 0}}^{1} \frac{\sigma^2 i((-1)^k - 1) e^z}{k^2 (z - i\frac{k\pi}{\sigma})} \right] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k\pi(i-1)\tilde{c}_k}{i\sigma(z - \frac{k\pi}{\sigma})(z - i\frac{k\pi}{\sigma})} \right),$$

де

$$\tilde{c}_k = \begin{cases} \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi} k^2}(1 - (-1)^k), \quad \text{якщо} \quad k \neq 0, \\ -\sigma(-1)^k, \quad \text{якщо} \quad k = 0. \end{cases}$$

Для $z = x - \frac{i\pi}{2\sigma}$ отримаємо

$$\breve{\chi}\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma}\right) = S_1\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma}\right) + S_2\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma}, \varepsilon_k\right) +$$

$$+ S_3\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma}\right) + S_4\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma}\right) + S_5\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma}\right).$$

Тут

$$S_1\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k\tilde{c}_k e^{i\sigma x+\frac{\pi}{2}}}{k^2(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))},$$

$$S_2\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma},\varepsilon_k\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq-1;0;1}}^{+\infty}\frac{((-1)^k-1)ie^{-\frac{1}{\ln k}x+i\frac{\pi}{2}}}{k^2(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))},$$

$$S_3\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right)=-\frac{\sqrt{2}\sigma ie^{-x+\frac{i\pi}{2\sigma}}}{\pi(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))},$$

$$S_4\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{\substack{k=-1,\\ k\neq 0}}^{1}\frac{((-1)^k-1)ie^{-x+i\frac{\pi}{2}}}{k^2(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))},$$

$$S_5\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi k(i-1)\tilde{c}_k}{i\sigma(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))}.$$

На основі Теореми 2.5 маємо

$$\int\limits_1^{+\infty}\left|S_1\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right)\right|dx<+\infty,\quad \int\limits_1^{+\infty}\left|S_5\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right)\right|dx<+\infty.$$

Знайдемо значення інтегралу від модуля S_2 по дійсній півосі

$$\int\limits_1^{+\infty}\left|S_2\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma},\varepsilon_k\right)\right|dx\leq\int\limits_1^{+\infty}\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq-1;0;1}}^{+\infty}\left|\frac{((-1)^k-1)ie^{-\frac{1}{\ln k}x+i\frac{\pi}{2}}}{k^2\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)\right)}\right|dx\leq$$

$$\leq\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq-1;0;1}}^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sigma^2 i((-1)^k-1)e^{-\frac{1}{\ln k}x}}{k^2(x-i\frac{k\pi}{\sigma})}\right|dx\leq\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq-1;0;1}}^{+\infty}M\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{\ln k}x}}{x}dx\leq$$

$$\leq M_1<+\infty.$$

Тепер покажемо, що

$$\int\limits_1^{+\infty}\left|S_3\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right)\right|dx<+\infty.$$

Справді,

$$\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{2}\sigma i e^{-x+\frac{i\pi}{2\sigma}}}{\pi(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))}\right|dx \le M_2\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx \le M_3 < +\infty.$$

Залишилося знайти інтеграл по $x \in [1;+\infty)$ від модуля S_4.

$$\int\limits_1^{+\infty}\left|S_4\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right)\right|dx \le \int\limits_1^{+\infty}\sum_{\substack{k=-1,\\k\neq 0}}^{1}\left|\frac{((-1)^k-1)ie^{-x+i\frac{\pi}{2}}}{k^2(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))}\right|dx \le$$

$$\le M_4\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx < +\infty.$$

Тобто, $\breve{\chi}\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}\right) \in L^1(1;+\infty)$. Скориставшись міркуваннями аналогічними до тих, що в [44] і тим, що послідовність (c_k) задовольняє умову (2.13) маємо $\breve{\chi}\left(iy-\frac{i\pi}{2\sigma}\right) \in L^1(1;+\infty)$. Отже, $\breve{\chi}(z) \in L^1(1;+\infty)$. Для функції $\breve{\mu}$ отримаємо

$$\breve{\mu}(z) = f(z)-\breve{\chi}(z) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_k i e^{-i\sigma z}}{(z-\frac{k\pi}{\sigma})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k\tilde{c}_k e^{i\sigma z}}{i(z-\frac{k\pi}{\sigma})}\right.$$

$$-\left[\sum_{\substack{k=-\infty,\\k\neq -1;0;1}}^{+\infty}\frac{\sigma^2 i((-1)^k-1)e^{-\frac{1}{\ln k}z}}{k^2(z-i\frac{k\pi}{\sigma})} - \frac{\sigma i e^z}{z-\frac{k\pi}{\sigma}i}+\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{\substack{k=-1,\\k\neq 0}}^{1}\frac{\sigma^2 i((-1)^k-1)e^z}{k^2(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}\right] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k\pi(i-1)\tilde{c}_k}{i\sigma(z-\frac{k\pi}{\sigma})(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}\right).$$

□

Висновки до розділу 2

Основні здобутки другого розділу:

1) отримано критерій, який дозволяє знайти розв'язки проблеми розщеплення функції f у просторі Пелі - Вінера W_σ^1 на суму двох функцій, модуль яких є "великим" у верхній та нижній півплощині відповідно. І, як наслідок, встановлено, що розв'язок проблеми розщеплення існує за умови, що всі коефіцієнти Фур'є з додатними номерами дорівнюють нулю;
2) отримано умови існування розв'язку проблеми розщеплення у куті для функцій за умови певної регулярності коефіцієнтів;
3) встановлені розв'язки проблеми розщеплення для функцій як завгодно малого експоненційного типу у півплощині.

Результати другого розділу опубліковано в статтях [113], [116], а також доповідалися на конференціях [117], [119], [121], [122].

РОЗДІЛ 3. ТЕОРІЯ ФІЛЬТРІВ ВІНЕРА

3.1 Про проблему ідентифікації фільтрів в півсмузі

В даному підрозділі ми розглядаємо аналог класичної теорії фільтрів Вінера для випадку півсмуги в комплексній області. В математичній теорії фільтрів Вінера [106] сигнал є неперервною функцією g в часі t ($t \in \gamma$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), а фільтр Φ - це деякий пристрій ("скринька"), що трансформує вхідний сигнал в певний вихідний сигнал $g \to \Phi g$. Енергія сигналу g є пропорційною до

$$\int\limits_{\gamma} |g(z)|^2 |dz|.$$

Тут ми будемо розглядати лише стаціонарні фільтри. Фільтр Φ є стаціонарним [79], якщо він задовольняє наступні умови:

1) Φ є лінійним, а тому є визначеним в векторному просторі сигналів;

2) Φ перетворює сигнали скінченної енергії в сигнали скінченної енергії;

3) Φ є інваріантним відносно часу (параметри фільтру не змінюються з часом), тобто $\Phi(\tau_s f) = \tau_s(\Phi f)$ для кожного моменту часу s і сигналу f.

Функція $G = \mathcal{F}^{-1} g$, де $g \to \mathcal{F}^{-1} g$ обернене перетворення Фур'є, називається амплітудним спектром g.

Важливим місцем в теорії сигнальних процесів є наступна проблема обробки сигналів:

визначити невідомий фільтр $\Phi : g \to \psi$ ("чорна скринька") проаналізувавши g і ψ; зокрема, відновити, якщо можливо, фільтр, знаючи щільність енергії $|\mathcal{F}^{-1}g|^2$, $|\mathcal{F}^{-1}f|^2$ пари вхід - вихід.

Ми розглядаємо проблему ідентифікації фільтру для випадку невідомого фільтру f в півсмузі $D_\sigma = \{z : |\Im z| < \sigma, \Re z < 0\}$, $\sigma > 0$. Основним завданням є побудувати всі можливі сигнали g в $D_\sigma^* = \mathbb{C} \backslash \overline{D}_\sigma$, які анулюють фільтри за певних природних умов.

Розглянемо простори, які необхідні для точного формулювання вищезазначеної проблеми. Вони є голоморфними аналогами просторів L^p.

Простором $E^p[D_\sigma]$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, називається простір аналітичних функцій в D_σ, для яких

$$\sup \left\{ \int\limits_\mu |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться для всіх відрізків μ, які містяться в D_σ.

Нехай $E^p[D_\sigma^*]$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, є простором аналітичних функцій в D_σ^*, для яких

$$\sup \left\{ \int\limits_\mu |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться для всіх відрізків μ, які містяться в D_σ^*.

Проблема ідентифікації фільтру для півсмуги полягає в знаходженні тестового сигналу $g \in E^2[D_\sigma^*]$ для якого вихідний сигнал визначений наступною рівністю

$$f * g(\tau) = \int_{\partial D_\sigma} g(w) f(w + \tau) dw$$

виміряний в усі моменти часу $\tau \leq 0$, однозначно визначає невідомий фільтр $f \in E^2[D_\sigma]$. Основним завданням, яке виникає при аналізі цієї задачі, є питання існування сигналу $g \in E^2[D_\sigma^*]$ такого, що $g * f(\tau) = 0$ для всіх $\tau \leq 0$ випливає $f \equiv 0$.

Амлітудний спектр сигналу $g \in E^p[D_\sigma^*]$ визначимо формулою

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma} g(w) e^{zw} dw. \tag{3.1}$$

Формула (3.1) встановлює бієкцію між $E^2[D_\sigma^*]$ та $H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$ і обернена формула

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(x) e^{-xw} dx, \qquad \Re w > 0 \tag{3.2}$$

виконується.

Щоб сформулювати повний опис можливих амплітудних спектрів функцій з простору $E^2[D_\sigma^*]$ наведемо означення деяких просторів типу Гарді.

Простір $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, є простором Гарді аналітичних в $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$ функцій f, для [55] яких

$$\sup_{x>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\} < +\infty.$$

А. Сєдлєцкий запропонував наступне означення простору Гарді в півплощині [20].

Теорема 3.1. *Простір $H^p(\mathbb{C}^+)$, $1 \leq p < +\infty$, співпадає з простором аналітичних в $\mathbb{C}^+$ функцій f, для яких*

$$\sup_{\varphi \in (0;\pi)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\} < +\infty.$$

Нехай $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\})$ простір аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\sup_{\varphi\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |g(re^{i\varphi})|^p e^{p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Основним твердженням даного розділу є наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай амплітудний спектр G сигналу $g \in E^2[D^*_\sigma]$ є неперервним та не має жодного нуля в $\{z : \Re z \geq 0\}$ і $f \in E^2[D_\sigma]$. Тоді з виконання рівності*

$$(\forall \tau \leq 0) \quad f * g(\tau) = 0 \tag{3.3}$$

випливає $f \equiv 0$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:

1) g допускає голоморфне продовження до цілої функції і виконується умова

$$(\forall c \in \mathbb{R}) : g(w) \exp\left(-ce^{-\frac{w\pi}{2\sigma}}\right) \notin E^2[D_\sigma]; \tag{3.4}$$

2) g не допускає голоморфного продовження до цілої функції.

3.2 Доведення теореми

Для доведення теореми 3.2 нам знадобляться наступні дві леми.

Лема 3.1 (Типу Фрагмена-Ліндельофа [65]). *Якщо функція f є аналітичною в $\mathbb{C}_+$, має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, $f \in L^p[\partial\mathbb{C}_+]$, $1 \le p \le \infty$, для деякого $\delta > 0$ виконується $f(x)e^{-\delta(x+\frac{1}{x})} \in L^p(1;+\infty)$ і для деякого $\gamma \in (0;2)$*

$$(\forall\varepsilon > 0): \sup_{|\varphi|<\pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \exp\left(-\varepsilon\left(r^\gamma + \frac{1}{r^\gamma}\right)\right) dr \right\} < +\infty,$$

то $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$.

Нехай $E^p[M_k]$ простір аналітичних функцій у кожному прямокутнику $M_k = \{z : z \in D_\sigma, \Re z > k\}$, $k < 0$ для яких

$$\sup \left\{ \int_\mu |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться для всіх відрізків μ, які містяться в M_k.

Лема 3.2 (Типу Фрагмена-Ліндельофа [103], [71]). *Якщо f належить простору $E^p[M_k], 1 \le p < +\infty$, для кожного прямокутника $M_k, k < 0$, також $f \in L^p(\partial D_\sigma)$ і виконується умова*

$$(\forall\varepsilon > 0): \sup_{u\in(-\infty;0)} \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} |f(u+iv)|^p \exp\left(-\varepsilon e^{-\gamma u}\right) dv \right\} < +\infty$$

для деякого $\gamma < \frac{\pi}{\sigma}$ і $f(x)\exp\left(-\delta e^{-\frac{\pi}{2\sigma}x}\right) \in L^p(-\infty;1)$ для деякого $\delta > 0$, то $f \in E^p[D_\sigma]$.

Доведення теореми. Інтегральна гранична функція $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ для функції $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ визначається [4] з точністю до адитивної константи в точках неперервності наступною рівністю

$$h(t_2)-h(t_1)=\lim_{x\to 0+}\left(\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln|G(x+iy)|dy-\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln|G(iy)|dy\right)-$$

$$-\lim_{x\to 0+}\left(\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln\left|\frac{1}{G(x+iy)}\right|dy-\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln\left|\frac{1}{G(iy)}\right|dy\right).$$

Оскільки G неперервна на $\overline{\mathbb{C}}_+$ і $G(z)\neq 0$ для всіх $z\in\overline{\mathbb{C}}_+$, отримаємо

$$0<c_1\le|G(z)|\le c_2$$

тому

$$|\ln|G(z)||\le M_R$$

для $z\in\eta_r$ і $\eta_r=\{z:\Re z\ge 0,|z|\le R\}$ при кожному фіксованому дійсному R. Тому за лемою Фату $h\equiv const$. Оскільки G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, то за критерієм розв'язності [41], [102] рівність (3.3) має лише тривіальний розв'язок (тотожній нуль) тоді і тільки тоді, коли

$$\limsup_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)=+\infty \tag{3.5}$$

Необхідність. Покажемо, що з (3.5) випливає одна з умов теореми 3.2. Для цього спершу розглянемо випадок:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|G(x)|}{x}=-\infty. \tag{3.6}$$

З останньої формули отримуємо, що інтеграл в правій частині рівності (3.2) збігається абсолютно і рівномірно на будь якому компакті з $\mathbb{C}_+$, тому у кожній точці $z\in\mathbb{C}$ функція g є аналітичною. Отже, g є цілою функцією.

Покажемо від супротивного, що виконується умова (3.4). Для цього припустимо що для кожного $c\in\mathbb{R}$ умова (3.4) не виконується. Оскільки g є цілою функцією то вона є аналітичною функцією в кожному замкненому прямокутнику $\overline{M}_k, k<0$, де $M_k=\{z: z\in D_\sigma, \Re z>k\}$. За інтегральною теоремою Коші для функції аналітичної в замиканні обмеженої області, отримуємо

$$\int\limits_{\partial M_k} g(w)e^{zw}dw=0, k<0,$$

тоді використавши (3.1) маємо

$$G(z)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\partial D_\sigma} g(w)e^{zw}dw=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\partial D_\sigma} g(w)e^{zw}dw-$$

$$-\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\partial M_k} g(w)e^{zw}dw=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\partial(D_\sigma\setminus\overline{M}_k)} g(w)e^{zw}dw. \tag{3.7}$$

Нехай

$$q(w):=g(w)\exp\left(-ce^{-\frac{w\sigma}{2\sigma}}\right)$$

і покажемо, що $q\in E^2[D_\sigma]$ для деякого $c>0$.

Зауважимо, що для $k<0$ маємо

$$|G(x)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_{\partial\left(D_\sigma\setminus\overline{M}_k\right)} g(w)e^{wx}dw\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_{\partial\left(D_\sigma\setminus\overline{M}_k\right)} q(w)\exp\left(ce^{-\frac{w\pi}{2\sigma}}\right)e^{wx}dw\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_{\partial\left(D_\sigma\setminus\overline{M}_k\right)} q(w)\exp\left(ce^{-\frac{u\pi}{2\sigma}}\cdot e^{-\frac{iv\pi}{2\sigma}}\right)e^{wx}dw\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_{\partial\left(D_\sigma\setminus\overline{M}_k\right)} q(w)\exp\left(ce^{-\frac{u\pi}{2\sigma}}\cos\frac{v\pi}{2\sigma}\right)\exp\left(ice^{-\frac{u\pi}{2\sigma}}\sin\frac{v\pi}{2\sigma}\right)e^{wx}dw\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\partial\left(D_\sigma\setminus\overline{M}_k\right)} \left|q(w)\exp\left(ce^{-\frac{u\pi}{2\sigma}}\cos\frac{v\pi}{2\sigma}\right)\exp\left(ice^{-\frac{u\pi}{2\sigma}}\sin\frac{v\pi}{2\sigma}\right)e^{wx}dw\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\partial\left(D_\sigma\setminus\overline{M}_k\right)} |q(w)|\exp\left(ce^{-\frac{u\pi}{2\sigma}}\cos\frac{v\pi}{2\sigma}\right)e^{ux}|dw|.$$

Розглянемо останній інтеграл як суму інтегралів по сторонах межі півсмуги $D_\sigma\setminus\overline{M}_k$

$$|G(x)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{k}|q(u-i\sigma)|\,e^{ux}du+\right.$$

$$+\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|q(k+iv)|\exp\left(ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\cos\frac{v\pi}{2\sigma}\right)e^{kx}dv+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{k}|q(u+i\sigma)|\,e^{ux}du\Bigg).$$

Застосувавши до першого інтегралу нерівність Коші - Буняковського - Шварца, отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{k}|q(u-i\sigma)|\,e^{ux}du\le\left(\int\limits_{-\infty}^{k}|q(u-i\sigma)|^2du\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{k}|e^{ux}|^2du\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{e^{kx}}{\sqrt{2x}}\left(\int\limits_{-\infty}^{k}|q(u-i\sigma)|^2du\right)^{1/2}\le\frac{e^{kx}}{\sqrt{2x}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}|q(u-i\sigma)|^2du\right)^{1/2}\le$$

$$\le\frac{c_1e^{kx}}{\sqrt{x}}.$$

Скориставшись аналогічними міркуваннями для третього інтегралу, отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{k}|q(u+i\sigma)|\,e^{ux}du\le\frac{e^{kx}}{\sqrt{2x}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}|q(u+i\sigma)|^2\,du\right)^{1/2}\le\frac{c_2e^{kx}}{\sqrt{x}}.$$

Зауважимо, що $\cos\frac{v\pi}{2\sigma}<1$, тоді для другого інтегралу, маємо

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|q(k+iv)|\exp\left(ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\cos\frac{v\pi}{2\sigma}\right)e^{kx}dv\le$$

$$\le\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|q(k+iv)|\exp\left(ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\right)e^{kx}dv.$$

Тоді за нерівністю Коші - Буняковського - Шварца

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|q(k+iv)|\exp\left(ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\right)e^{kx}dv\le$$

$$\leq \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |q(k-iv)|^2 dv\right)^{1/2} \cdot \left(e^{2kx} \exp\left(2ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\right) \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} dv\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |q(k-iv)|^2 dv\right)^{1/2} \cdot \left(2\sigma e^{2kx} \exp\left(2ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2\sigma} e^{kx} \exp\left(ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\right) \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |q(k-iv)|^2 dv\right)^{1/2} \leq c_3 e^{cx} \exp\left(ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\right).$$

Отже,

$$|G(x)| \leq \frac{c_1 e^{kx}}{\sqrt{x}} + c_3 e^{cx} \exp\left(ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\right) + \frac{c_2 e^{kx}}{\sqrt{x}}.$$

До цього моменту ми не накладали обмежень на k крім від'ємності. Тепер виберемо $k = -\frac{2\sigma}{\pi} \ln x$, $x > 1$, тоді

$$|G(x)| \leq \frac{c_1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right) + c_3 e^{cx} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right) \leq$$

$$\leq c_4 e^{cx} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right), x > 1.$$

Нехай

$$\psi(z) := G(z) e^{-cz} \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right).$$

Тоді,

$$|\psi(x)| = \left| G(x) e^{-cx} \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right)\right| = |G(x)| \left| e^{-cx} \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right)\right| =$$

$$= c_4 e^{cx} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right) e^{-cx} \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right) = e^{\varepsilon x}$$

і для всіх $\varepsilon > 0$ маємо $\psi(x)e^{-\varepsilon x} \in L^2(0;+\infty)$. Функція $\psi(iy)$, для $y > 0$ буде мати вигляд

$$|\psi(iy)| = \left|G(iy)e^{-iyc}\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}iy\ln(iy)\right)\right| \leq$$

$$= |G(iy)|\left|e^{-iyc}\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}iy\ln(iy)\right)\right| =$$

$$= |G(iy)|\left|\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}iy\left(\ln|y| + i\frac{\pi}{2}\right)\right)\right| =$$

$$= |G(iy)||e^{-\sigma y}| = |G(iy)|e^{-\sigma|y|}.$$

Також, для $y < 0$ маємо

$$|\psi(iy)| \leq \left|G(iy)e^{-iyc}\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}iy\ln(iy)\right)\right| =$$

$$= |G(iy)|\left|\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}iy\left(\ln|y| - i\frac{\pi}{2}\right)\right)\right| =$$

$$= |G(iy)||e^{\sigma y}| = |G(iy)|e^{-\sigma|y|}.$$

Тобто функція ψ належить простору $L^2(\partial\mathbb{C}_+)$. Зауважимо, що з рівності (3.1) випливає, що $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тому для всіх $\gamma \in (1;2]$

$$(\forall\varepsilon > 0) : \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|\psi\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2\exp\left(-\varepsilon r^\gamma\right)dr\right\} < +\infty.$$

З леми 3.1, отримаємо $\psi \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Це означає

$$G(z)e^{cz}\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z\right) \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

за властивістю функцій з просторів Гарді [65]

$$\left|G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z\right\}\right| \leqslant \frac{e^{-cx}}{\sqrt{x}}.$$

Тому

$$\ln|G(x)| + \frac{2\sigma}{\pi} x \ln x \leqslant -cx,$$

якщо $x \geq 1$, отже

$$\limsup_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) < +\infty. \tag{3.8}$$

Це суперечить умові (3.5). Тобто, ми довели, що з умови (3.5) випливає умова (3.4). Отже, припущення, що умова (3.4) не виконується є неправильне. Тому, умова (3.4) виконується.

Тепер розглянемо другий можливий випадок

$$2) \quad \limsup_{x\to+\infty}\frac{\ln|G(x)|}{x} > -\infty. \tag{3.9}$$

Покажемо виконання умови *2)* теореми 3.2. Припустимо від супротивного, що g допускає аналітичне продовження до цілої функції, тому надалі вважатимемо, що $g \in E^2[D^*_\sigma]$ є цілою функцією. Нехай $g \in E^2[D^*_\sigma]$ ціла функція. Тоді g аналітична в кожному замкненому прямокутнику $\overline{M}_k, k < 0$, де $M_k = \{z : z \in D_\sigma, \Re z > k\}$. За інтегральною теоремою Коші маємо

$$\int\limits_{\partial M_k} g(w)e^{zw}dw = 0, k < 0,$$

тоді використавши (3.2) отримаємо

$$|G(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma \setminus \overline{M}_k} |g(w)|e^{xu}|dw| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(I_1 + I_2 + I_3),$$

$$z = x + iy, w = u + iv,$$

для $x > 0$. Тут I_1, I_2, I_3 наступні інтеграли

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{k} |g(u - i\sigma)| e^{xu} du,$$

$$I_2 = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |g(k + iv)| e^{xk} dv$$

та

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{k} |g(u + i\sigma)| e^{xu} du.$$

Тоді за нерівністю Коші - Буняковського - Шварца

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{k} |g(u - i\sigma)| e^{xu} du \le \left(\int\limits_{-\infty}^{k} |g(u - i\sigma)|^2 du \cdot \int\limits_{-\infty}^{k} e^{2xu} du \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int\limits_{-\infty}^{0} |g(u - i\sigma)|^2 du \cdot \frac{e^{2xk}}{2x} \right)^{1/2} \le c_5 \frac{e^{xk}}{\sqrt{x}},$$

аналогічно

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{k} |g(u + i\sigma)| e^{xu} du \le c_6 \frac{e^{xk}}{\sqrt{x}}.$$

Оскільки, g є цілою функцією, як функція змінної v, то $g(k + iv)$ є неперервною на відрізку $(-\sigma; \sigma)$. Тоді

$$I_2 = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |g(k + iv)| e^{xk} dv \le \max_{v \in [-\sigma; \sigma]} \{|g(k + iv)|\} e^{xk} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} dv \le J(k) e^{kx}, \tag{3.10}$$

де

$$J(k) = 2\sigma \max \{|g(t + iv)| : v \in [-\sigma; \sigma], t \in [k; 0]\}, \ k < 0.$$

Якщо

$$\sup_{k<0}\{J(k)\} < +\infty, \tag{3.11}$$

то функція g належить простору Гарді в $E^\infty[D_\sigma]$. Наступні міркування доводять, що $g \equiv 0$. Оскільки функція $g \in E^\infty[D_\sigma]$, то $g \in L^\infty(-\infty + i\sigma; i\sigma)$. Через те, що g є цілою функцією, за припущенням, і $g \in E^2_*[D_\sigma]$ випливає, що $g \in H^2$ в півплощині $\{z : \Re z > -1\}$. З останнього маємо наступну оцінку

$$|g(z)| \leq \frac{c}{\sqrt{x}}, \quad x > -1.$$

Це означає, що $g \in L^\infty(i\sigma; i\sigma+\infty)$, а отже $g \in L^\infty(-\infty+i\sigma; i\sigma+\infty)$. Також, з того, що функція $g \in E^2_*[D_\sigma]$ випливає, що вона належить простору Гарді H^2 в півплощині $\{z : \Im z > \sigma\}$. З останніх двох тверджень базуючись на лемі 3.1 та з [14] випливає, що функція g належить простору H^∞ у півплощині $\{z : \Im z > \sigma\}$. Аналогічним способом можна показати обмеженість функції g у півплощині $\{z : \Im z < -\sigma\}$. Тоді з того, що g є обмежена ціла функція та за теоремою Ліувілля, отримаємо $g \equiv const$. Оскільки, також $g \in L^2(-\infty + i\sigma; i\sigma)$, тому $g \equiv 0$. Тоді, беручи до уваги (3.1) $G \equiv 0$ тобто теорема доведена. Розглянемо протилежний випадкок до (3.11). Оскільки, за означенням J є неперервною та незростаючою функцією отримуємо

$$\lim_{k\to-\infty} J(k) = +\infty.$$

Визначимо функцію J_2 тільки на проміжках спадання функції J. Позначимо $A = \{(\alpha_1; \beta_1] \cup (\alpha_2; \beta_2] \cup (\alpha_3; \beta_3] ...\}$ множину проміжків на яких функція J є сталою. Визначимо функцію J_2 на проміжку $(-\infty; 0) \setminus A$ в той спосіб, що $J(k) = J_2(k)$.

Розглянемо обернену функцію J_1 до функції $-J_2$. Оскільки J_2 є спадною, то $-J_2$ є зростаючою. Отже, J_1 теж є зростаючою. Оскільки

$$\lim_{t \to -\infty} J_2(t) = -\infty,$$

то

$$\lim_{s \to -\infty} J_1(s) = -\infty. \tag{3.12}$$

З означення функції J_2 та рівності (3.10) маємо

$$I_2 \leq J(k^*) e^{k^* x} = J_2(k^*) e^{k^* x},$$

де $k^* \in (-\infty; 0) \setminus A$. Оскільки k в (3.10) довільне від'ємне число, ми можемо вибрати $k = k^* = J_1(-x)$, тоді

$$I_2 \leq J_2(k^*) e^{k^* x} = -(-J_2(J_1(-x))) e^{x J_1(-x)} = x e^{x J_1(-x)}.$$

Отже

$$|G(x)| \leq c_5 \frac{e^{xk}}{\sqrt{x}} + c_6 \frac{e^{xk}}{\sqrt{x}} + c_7 x e^{x J_1(-x)} \leq c_8 x e^{x J_1(-x)}, x > 1,$$

і з умови (3.12) ми отримаємо

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln |G(x)|}{x} \leq \lim_{x \to +\infty} J_1(-x) = -\infty.$$

Це суперечить умові (3.9). Отже, умова *2)* доведена. Необхідність доведено.

Достатність. Розглянемо спочатку випадок виконання умови *2)*. У цьому випадку для доведення теореми слід показати, що виконується умова (3.5). Припустимо від супротивного, що умова (3.5) не виконується, тобто виконується умова (3.8). Це означає, що існує стала c_8 така, що

$$\frac{\ln|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x \le c_9,$$

якщо $x \ge 1$. З цього, очевидно, маємо

$$\frac{\ln|G(x)|}{x} \le c_9 - \frac{2\sigma}{\pi}\ln x,$$

тобто виконується умова (3.6). Тоді використавши (3.6) отримаємо, що інтеграл у правій частині (3.2) рівномірно збігається на будь-якому компакті із $\mathbb{C}$, отже g ціла функція. Це суперечить умові *2)*.

Для доведення теореми покажемо, що виконується умова *1)* теореми. Для цього покажемо, що виконується (3.5). Тоді використавши міркування від супротивного, як показано вище, із заперечення умови (3.5) випливає умова (3.6). Тоді використавши (3.6) отримаємо, що рівність (3.2) визначає функцію g для всіх $w \in \mathbb{C}_+$. Нехай

$$G_1(z) = G(z)\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z - cz\right)$$

для деякого $c > 0$. Тоді формула (3.2) буде мати вигляд

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G_1(x) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x + cx\right) e^{-xw} dx.$$

Функція

$$G_1(z) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z + cz\right) e^{-zw}$$

є цілою, а отже, є й аналітичною функцією в секторі

$S = \{z : 0 < |z| < x_0, 0 < \arg z < -\frac{\pi v}{2\sigma}\}$, для всіх $-\sigma < v < 0$. За інтегральною теоремою Коші для функції аналітичної в замиканні обмеженої області, отримуємо

$$\int\limits_{\partial S} G_1(z) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z + cz\right) e^{-zw} dz = 0$$

Розглянемо останній інтеграл як суму інтегралів по сторонах межі сектора

$$\int\limits_0^{x_0} G_1(x) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x + cx\right) e^{-xw} dx +$$

$$+ \int\limits_0^{-\frac{\pi v}{2\sigma}} G_1(x_0 e^{i\varphi}) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x_0 e^{i\varphi} (\ln x_0 + i\varphi)\right) \exp\left(-x_0 e^{i\varphi} w\right) x_0 i e^{i\varphi} d\varphi -$$

$$- \int\limits_0^{x_0 e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}}} G_1(x) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x + cx\right) e^{-xw} dx = 0 \qquad (3.13)$$

Покажемо, що другий інтеграл прямує до нуля для кожного $w \in$

$\mathbb{C}_+$, якщо $r \to \infty$ і $r > 1$. Тут $\varphi_0 = -\frac{\pi v}{2\sigma}$. Тоді

$$\left| \int\limits_0^{-\frac{\pi v}{2\sigma}} G_1(x_0 e^{i\varphi}) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x_0 e^{i\varphi}(\ln x_0 + i\varphi) + c x_0 e^{i\varphi}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp\left(-x_0 e^{i\varphi} w\right) x_0 i e^{i\varphi} d\varphi \right| \le$$

$$\le \int\limits_0^{-\frac{\pi v}{2\sigma}} \left| G_1(x_0 e^{i\varphi}) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x_0 e^{i\varphi}(\ln x_0 + i\varphi) + c x_0 e^{i\varphi}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp\left(-x_0 e^{i\varphi} w\right) x_0 i e^{i\varphi} \right| d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{-\frac{\pi v}{2\sigma}} \left| G_1(x_0 e^{i\varphi}) \right| x_0 \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x_0 \cos\varphi \ln x_0 + \frac{2\sigma}{\pi} x_0 \varphi \sin\varphi + \right.$$

$$\left. + c x_0 \cos\varphi - u x_0 \cos\varphi + v x_0 \sin\varphi \right) d\varphi \le$$

$$\le \int\limits_0^{-\frac{\pi v}{2\sigma}} |G_1(x_0 e^{i\varphi})| x_0 \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x_0 \cos\varphi_0 \ln x_0 + \right.$$

$$\left. + \sigma x_0 + |c| x_0 + |u| x_o + |v| x_0 \right) d\varphi \le$$

$$\le x_0 \exp\left(-\alpha x_0 \ln x_0 + \alpha_1 x_0\right) \int\limits_0^{-\frac{\pi v}{2\sigma}} |G_1(x_0 e^{i\varphi})| d\varphi \le$$

$$\le c_{10} x_0 \exp\left(-\alpha x_0 \ln x_0 + \alpha_1 x_0\right) \to 0, x_0 \to +\infty.$$

В (3.13) перейдемо до границі при $x_0 \to +\infty$, тоді отримаємо

$$\int\limits_0^{+\infty} G_1(x) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x + c x\right) e^{-xw} dx +$$

$$- \int\limits_0^{+\infty} G_1\left(t e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right) e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} t e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}} \ln t\right) dt = 0.$$

Тобто

$$\int\limits_0^{x_0} G_1(x)\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x + cx\right)e^{-xw}dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} G_1\left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right)e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\ln t\right)dt.$$

Цим можемо пояснити зміну контуру інтегрування з $\{x : x > 0\}$ на $\left\{t\exp\left(-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma} : t > 0\right)\right\}$. Отже,

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} G_1\left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right)e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}.$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\ln\left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right) + cte^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right)e^{-wte^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} G_1\left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right)e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\ln t\right)dt$$

Тоді

$$|g(w)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_0^{+\infty} G_1\left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right)e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}t\ln te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right)dt\right|.$$

Використавши нерівність Коші - Буняковського - Шварца, отримаємо

$$|g(w)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_0^{+\infty}\left|G_1\left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right)e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right|^2 dt\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int\limits_0^{+\infty}\left|\exp\left(-\frac{4\sigma}{\pi}t\ln te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right)\right|dt\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \left| G_1 \left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}} \right) \right|^2 dt \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int\limits_0^{+\infty} \left| \exp \left(-\frac{4\sigma}{\pi} t \ln te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}} \right) \right| dt \right)^{1/2}.$$

Оскільки $G_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, то

$$e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \int\limits_0^{+\infty} \left| G_1 \left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}} \right) \right|^2 dt < c_{11}.$$

Тоді

$$|g(w)| \leq c_{11} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \left(\int\limits_0^{+\infty} \exp \left(-\frac{4\sigma}{\pi} t \ln te^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{v\pi}{2\sigma} \right) dt \right)^{1/2}. \tag{3.14}$$

В [22] (ст. 323) М. В. Федорюк показав, що асимптотика функції

$$\Phi(\lambda; a) = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-ax \ln x + \lambda x\right) dx$$

така ж як і асимптотика функції $\Phi(\lambda_1; 1)$. Функції $\Phi(\lambda; a)$ та $\Phi(\lambda_1; 1)$ є цілими і

$$\Phi(\lambda; a) = \frac{1}{a} \Phi \left(\frac{\lambda}{a} + \ln a, 1 \right) = \frac{1}{a} \Phi(\lambda_1, 1). \tag{3.15}$$

При $|\Im \lambda_1| < \frac{\pi}{2}$ та $\Re \lambda_1 \to +\infty$ асимптотичний розклад має вигляд

$$\Phi(\lambda_1; 1) \sim \sqrt{2\pi} e^{(\lambda_1 - 1)/2} \exp e^{\lambda_1 - 1} \left(1 + O \left(e^{-\frac{\lambda_1}{2}} \right) \right). \tag{3.16}$$

Скористаємось цими міркуваннями для оцінки інтегралу

$$\Phi(\lambda; a) = \int\limits_0^{+\infty} \exp \left(-\frac{4\sigma}{\pi} \ln te^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{v\pi}{2\sigma} \right) dt,$$

де $\lambda = 0$ і $a = \frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}$.

Тоді підставивши значення λ і a в (3.15), отримаємо

$$\Phi\left(0; \frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right) = \frac{\pi e^{\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}}}{4\sigma \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}} \Phi\left(\ln \frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}; 1\right).$$

Отже, $\lambda_1 = \ln \frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}$. Підставимо λ_1 в (3.16), тоді асимптотичний розклад функції буде мати вигляд

$$\Phi(\lambda_1; 1) \sim \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\ln \frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma} - 1\right)\right) \cdot$$
$$\cdot \exp\left(\exp\left(\ln \frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right) - 1\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 + O \exp\left(-\frac{1}{2} \ln \frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right)\right).$$

Таким чином, запишемо нерівність (3.14) у вигляді

$$|g(w)| \leq c_{11} \left(e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right) - 1\right)\right) \cdot\right.$$
$$\left.\cdot \exp\left(\exp\left(\ln\left(\frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right) - 1\right)\right)\right)^{1/2} =$$
$$= c_{11} \left(\left(e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \left(\frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot\right.$$
$$\left.\cdot \exp\left(\frac{4\sigma}{e\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right)\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq c_{12} \left(e^{-\frac{3(u-c)\pi}{4\sigma}} \exp\left(\frac{4\sigma}{\pi e} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right)\right)^{1/2}.$$

Тоді для $w \in D_\sigma$ ми маємо

$$|g(w)| \leq c_{12} e^{-\frac{3(u-c)\pi}{8\sigma}} \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi e} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos \frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right).$$

Функція

$$q_1(w) = g(w) \exp\left(-c_{13} e^{-\frac{w\pi}{2\sigma}}\right),$$

де $c_{13} = \frac{2\sigma}{\pi e} e^{\frac{c\pi}{2\sigma}}$, задовольняє умови Леми 3.2 для довільного $\delta > 0$ і $\gamma = \frac{\pi}{3\sigma}$. Тоді $q_1 \in E^2[D_\sigma]$, умова (3.5) виконується для $c = c_{13}$. $\square$

Висновки до розділу 3

Даний розділ присвячений деяким дослідженням теорії фільтрів Вінера. А саме, розглядався аналог класичної теорії фільтрів Вінера для випадку півсмуги в комплексній площині та проблема ідентифікації нетривіальності невідомого фільтру в півсмузі.

Ми отримали опис тестового сигналу, який розв'язує задачу ідентифікації нетривіальності фільтрів для просторів Гарді в півсмузі. Цей результат може бути використаний для дослідження електричних та оптичних сигналів.

Результати третього розділу опубліковано в статті [115] та апробовані на конференції [120].

РОЗДІЛ 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА В ПРОСТОРІ W_σ^1

4.1 Критерій обмеженості перетворення Гільберта в просторі W_σ^1

У даному підрозділі розглядається критерій обмеженості перетворення Гільберта в термінах розщеплення функцій.

Перетворення Гільберта функції $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ визначається для всіх $z \in \mathbb{R}$ як

$$H(\psi(z)) = \frac{1}{\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t-z} dt, \qquad (4.1)$$

якщо інтеграл існує.

Тут $v.p.$ головне значення інтегралу типу Коші. Для знаходження перетворення Гільберта, тобто головного значення інтегралу (4.1) важливим є значення функції ψ поблизу точки $t = z$.

Відомо, що $H(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$, але $H(L^1) \neq L^1$ [61], [62]. Ми отримали критерій обмеженості перетворення Гільберта в просторі Пелі - Вінера $W_\sigma^1 \subset L^1(\mathbb{R})$.

Вище ми розглядали простори Гарді у правій півплощині. Для задач, що розглядаються в цьому підрозділі сформулюємо означення простору Гарді у верхній півплощині. Простором Гарді $H^p(\mathbb{C}^+)$, $1 \le p < +\infty$, називається простір аналітичних функцій в півплощині $\mathbb{C}^+ = \{z : \Im z > 0\}$, для яких [55]

$$||f|| := \sup_{y>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Із результатів А. М. Сєдлєцкого [20] маємо, що простір $H^p(\mathbb{C}^+)$, $1 \leq p < +\infty$, може бути визначений і як клас аналітичних в $\mathbb{C}^+$ функцій f, для яких

$$||f||_*^p = \sup_{\varphi\in(0;\pi)} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\} < +\infty.$$

На основі теореми (2.1) маємо, що для довільного $\sigma > 0$, довільна функція $f \in W_\sigma^2$ може бути зображена у вигляді

$$f(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \sigma t}{\sigma t - \pi k}. \tag{4.2}$$

Найцікавішим для застосувань є випадок $p = 1$.

Для зручності пригадаємо формулювання Проблеми B.

Проблема B. *Чи для кожної функції $f \in W_\sigma^p$, $1 \leq p \leq 2$, існує розщеплення $f = \chi + \mu$, де χ, μ є цілими функціями, причому χ належить простору $H^p(\mathbb{C}^+ = \{z : \Im z > 0\})$, μ належить простору $H^p(\mathbb{C}^- = \{z : \Im z < 0\})$?*

Дільний В. М. в [43] отримав наступний результат розв'язку Проблеми B.

Теорема 4.1. *Для $f \in W_\sigma^1$ Проблема B має розв'язок тоді і тільки тоді*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^{m+k} e^{i\pi\sigma m} - 1}{m - \delta m - k} \right| < +\infty, \tag{4.3}$$

для деякого $\delta \in (0;1)$ тут ми вважаємо, що

$$\frac{(-1)^{m+k} e^{i\pi\sigma m} - 1}{m - \delta m - k} = \pi i, \quad \text{якщо} \quad m - \delta m - k = 0.$$

Основним твердженням даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.2. *Нехай $f \in W_\sigma^1$, тоді еквівалентними є наступні умови:*

1) зображення функції $f = \chi + \mu$ справджується, де χ, μ є цілими функціями, $\chi \in H^1(\mathbb{C}^+)$, $\mu \in H^1(\mathbb{C}^-)$;

2) перетворення Гільберта $H(f(z))$ належить $L^1(\mathbb{R})$;

3) послідовність (c_k) в зображенні (4.2) належить l^1 і нерівність (4.3) виконується.

Доведення. Доведення теореми можна поділити на декілька етапів. По перше, відзначимо, що еквівалентність умов 1) і 3) випливає з теореми 4.1.

По-друге, покажемо імплікацію 1)$\Rightarrow$ 2). Якщо розщеплення функції $f = \chi + \mu$ існує, для функцій χ та μ із вказаними в Теоремі 4.2 властивостями, тоді

$$H(f(z)) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(t)}{t - z} dt + \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(t)}{t - z} dt.$$

Оскільки $\chi \in H^1(\mathbb{C}^+)$, то використовуючи інтегральне зображення функцій із простору Гарді у півплощині [73], ми отримаємо

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(t)}{t - z} dt = \begin{cases} \chi(z), \quad z \in \mathbb{C}^+, \\ 0, \quad z \in \mathbb{C}^-. \end{cases}$$

Тому кутові граничні (недотичні) значення в $\mathbb{R}$ з $\mathbb{C}^+$ інтегралу

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi(t)}{t-z}dt$$

дорівнюють $\chi(z)$ для майже всіх $z\in\mathbb{R}$.

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\frac{\mu(t)}{t-z}dt=\begin{cases}\mu(z), & z\in\mathbb{C}^-,\\ 0, & z\in\mathbb{C}^+.\end{cases}$$

Оскільки χ належить $L^1(-\infty;+\infty)$, μ належить $L^1(-\infty;+\infty)$, тоді за формулою Сохоцького [19] $H(f)$ належить $L^1(-\infty;+\infty)$.

По-третє, покажемо 2)$\Rightarrow$ 1). Розглянемо перетворення Гільберта для функції f.

Використовуючи (4.2) запишемо перетворення Гільберта у вигляді

$$H(f(z))=\frac{1}{\pi}v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{\frac{\sin\sigma t}{\sigma t-\pi k}}{t-z}dt.$$

Оскільки ряд збігається абсолютно та рівномірно, то може його почленно проінтегрувати

$$H(f(z))=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi^3}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\sigma t}{(\sigma t-\pi k)(t-z)}dt=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi^3}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\left(\frac{1}{2i}v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\sigma t}}{(\sigma t-\pi k)(t-z)}dt-\right.$$

$$-\frac{1}{2i}v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\sigma t}}{(\sigma t-\pi k)(t-z)}dt\Bigg).$$

Функція визначена рівністю

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\left(\frac{1}{2i}v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\sigma t}}{(\sigma t-\pi k)(t-z)}dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2i}v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\sigma t}}{(\sigma t-\pi k)(t-z)}dt\right)$$

як функція змінної z є аналітичною в $\mathbb{C}^+$. Також, як функція змінної z вона є аналітичною в $\mathbb{C}^-$. Спершу розглянемо випадок коли $\Im z>0$. Обчислимо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\sigma t}}{(\sigma t-\pi k)(t-z)}dt.$$

Для функції

$$f_1(t)=\frac{e^{i\sigma t}}{(\sigma t-\pi k)(t-z)}$$

як функції комплексної змінної t точки z, $\frac{\pi k}{\sigma}$ є простими полюсами, тоді

$$Res_{t=z}f_1(t)=\lim_{t\to z}(t-z)f_1(t)=\lim_{t\to z}\frac{(t-z)e^{i\sigma t}}{(\sigma t-\pi k)(t-z)}=\frac{e^{i\sigma z}}{\sigma z-\pi k},$$

$$Res_{t=\frac{\pi k}{\sigma}}f_1(t)=\lim_{t\to\frac{\pi k}{\sigma}}\left(t-\frac{\pi k}{\sigma}\right)f_1(t)=$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi k}{\sigma}}\frac{(t-\frac{\pi k}{\sigma})e^{i\sigma t}}{(\sigma t-\pi k)(t-z)}=\frac{e^{i\pi k}}{\pi k-\sigma z}.$$

Випадок $z = \frac{\pi k}{\sigma}$ не розглядається, бо множина точок для яких виконується така рівність має нульову Лебегову міру, а отже, не впливає на значення інтегралу. Оскільки полюс в точці $t = \frac{\pi k}{\sigma}$ знаходиться на межі верхньої півплощини, то для обчислення беремо половину лишку. Отже, отримаємо наступне значення інтегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\sigma t}}{(\sigma t - \pi k)(t - z)} dt = Res_{t=z} f_1(t) + \frac{1}{2} Res_{t=\frac{\pi k}{\sigma}} f_1(t) =$$

$$= \frac{e^{i\pi k} - 2e^{i\sigma z}}{2(\pi k - \sigma z)}.$$

Далі обчислимо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\sigma t}}{(\sigma t - \pi k)(t - z)} dt.$$

Функція

$$f_2(t) = \frac{e^{-i\sigma t}}{(\sigma t - \pi k)(t - z)}$$

має простий полюс у точці $\frac{\pi k}{\sigma}$. Тоді

$$Res_{t=\frac{\pi k}{\sigma}} f_2(t) = \lim_{t \to \frac{\pi k}{\sigma}} \left(t - \frac{\pi k}{\sigma} \right) f_2(t) =$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi k}{\sigma}} \frac{(t - \frac{\pi k}{\sigma}) e^{-i\sigma t}}{(\sigma t - \pi k)(t - z)} = \frac{e^{-i\pi k}}{\pi k - \sigma z}.$$

Ми отримаємо таке значення інтегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\sigma t}}{(\sigma t - \pi k)(t - z)} dt = \frac{1}{2} Res_{t=\frac{\pi k}{\sigma}} f_2(t) = \frac{e^{-i\pi k}}{2(\pi k - \sigma z)}.$$

Тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sigma t}{(\sigma t - \pi k)(t-z)} dt = \pi \left(Res_{t=z} f_1(t) + \frac{1}{2} Res_{t=\frac{\pi k}{\sigma}} f_1(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} Res_{t=\frac{\pi k}{\sigma}} f_2(t) \right) = \pi \left(\frac{e^{i\sigma z}}{\sigma z - \pi k} + \frac{e^{i\pi k}}{2(\pi k - \sigma z)} + \frac{e^{-i\pi k}}{2(\pi k - \sigma z)} \right) =$$

$$= \frac{\pi((-1)^k - e^{i\sigma z})}{\pi k - \sigma z}.$$

Аналогічно для $\Im z < 0$ ми отримали

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sigma t}{(\sigma t - \pi k)(t-z)} dt =$$

$$= \pi \left(\frac{e^{-i\sigma z}}{\sigma z - \pi k} + \frac{e^{i\pi k}}{2(\pi k - \sigma z)} + \frac{e^{-i\pi k}}{2(\pi k - \sigma z)} \right) =$$

$$= \frac{\pi((-1)^k - e^{-i\sigma z})}{\pi k - \sigma z}.$$

Використовуючи формулу Сохоцького маємо

$$H(f(z)) = \frac{\sigma}{i\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(\frac{(-1)^k - e^{i\sigma z}}{\pi k - \sigma z} + \frac{(-1)^k - e^{-i\sigma z}}{\pi k - \sigma z} \right) =$$

$$= \frac{\sigma}{i\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k - \cos \sigma z}{\pi k - \sigma z}.$$

Визначимо функції χ та μ рівностями

$$\chi(z) = \frac{f - iH(f)}{2} \quad i \quad \mu(z) = \frac{f + iH(f)}{2}.$$

Оскільки

$$\chi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\sigma z} - (-1)^k}{2i}$$

і ряд збігається абсолютно і рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}$, то χ_1 є цілою функцією експоненційного типу $\leq \sigma$. Функція f також є цілою функцією експоненційного типу $\leq \sigma$ і належить $L^1(\mathbb{R})$. Отже, χ належить $L^1(\mathbb{R})$ і μ належить $L^1(\mathbb{R})$.Оскільки, також для $z \in \mathbb{C}^+$

$$|\chi(z)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\sigma z} - (-1)^k}{2i} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \frac{1+1}{|2i|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|,$$

то функція χ є обмеженою в $\partial\mathbb{C}^+$. Тому, за теоремою типу Фрагмена - Ліндельофа [17], (ст. 67) χ належить $H^1(\mathbb{C}^+)$. Аналогічно можна показати, що функція μ належить $H^1(\mathbb{C}^+)$. $\square$

4.2 Обчислення перетворення Гільберта

У даному підрозділі наведено два наслідки, які випливають з теореми 4.2.

Наслідок 4.1. *Якщо умови теореми 4.2 виконуються, тоді*

$$H(f(z)) = i(\chi(z) - \mu(z)).$$

Приклад 4.1. *Для функції*

$$f(z) = \frac{1 - \cos \sigma z}{\sqrt{2\pi} z^2}$$

перетворення Гільберта $H(f(z))$ *не належить* $L^1(\mathbb{R})$.

Доведення. Обчислимо перетворення Гільберта за допомогою теореми 4.2. Для цього подамо функцію f у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} (|t| - \sigma) e^{itz} dt = \frac{1 - \cos \sigma z}{\sqrt{2\pi} z^2}.$$

Тоді знайдемо значення функцій χ та μ

$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\sigma} (t - \sigma) e^{itz} dt = -\frac{1 + i\sigma z - e^{i\sigma z}}{\sqrt{2\pi} z^2}$$

і

$$\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} (-t - \sigma) e^{itz} dt = \frac{e^{-i\sigma z} - 1 + i\sigma z}{\sqrt{2\pi} z^2}.$$

Отже,

$$H(f(z)) = i(\chi(z) - \mu(z)) =$$

$$= -\frac{i - \sigma z - ie^{i\sigma z}}{\sqrt{2\pi} z^2} + \frac{ie^{-i\sigma z} - i - \sigma z}{\sqrt{2\pi} z^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sigma z - \sin \sigma z)}{\sqrt{\pi} z^2}.$$

Оскільки $\chi(z) \notin H^1(\mathbb{C}^+)$, $\mu(z) \notin H^1(\mathbb{C}^-)$, то $H(f(z)) \notin L^1(\mathbb{R})$. $\square$

З доведення теореми 4.2 випливає наступний наслідок

Наслідок 4.2. *Якщо умови теореми 4.2 виконуються, тоді*

$$H(f(z)) = \frac{\sigma}{i\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k - \cos \sigma z}{\pi k - \sigma z}.$$

Висновки до розділу 4

В даному підрозділі розглядається критерій обмеженості перетворення Гільберта в термінах розщеплення функцій.

Основні здобутки розділу 4:

1) отримано критерій обмеженості перетворення Гільберта в просторі Пелі - Вінера $W_\sigma^1 \subset L^1(\mathbb{R})$ в термінах розщеплення.
2) знайдено два прості способи обчислення перетворення Гільберта та наведено приклад використання.

Результати розділу 4 опубліковано в статті [114] та доповідалися на конференції [118].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню асимптотичних та апроксимаційних властивостей функцій з просторів Гарді та простору Пелі - Вінера.

Завдяки можливості зображення математичних об'єктів у вигляді суми чи добутку об'єктів з простішими властивостями ми змогли дослідити властивості функцій у просторі Пелі - Вінера. Для таких функцій у дисертації знайдено критерій розв'язку проблеми розщеплення і показано, що він існує за умови, що усі коефіцієнти Фур'є з додатними номерами дорівнюють нулю; розв'язано проблему розщеплення функцій у куті для простору Пелі - Вінера за умови певної регулярності коефіцієнтів; встановлено умови існування розв'язку проблеми розщеплення для цілих функцій як завгодно малого експоненційного типу в комплексній півплощині. Також, отримано критерій обмеженості перетворення Гільберта в термінах розщеплення, що в свою чергу дозволило отримати два прості способи обчислення перетворення Гільберта. Важливе місце займають і побудовані приклади функцій для яких існують розв'язки проблем розщеплення, які розглядаються у дисертаційному дослідженні.

Іншою важливою складовою роботи є дослідження аналогу класичної теорії фільтрів Вінера для випадку півсмуги в комплексній області. Показано, що розв'язок проблеми ідентифікації нетривіальності фільтру можливий при умовах, що існує сигнал, який не допускає голоморфне продовження до цілої функції або допускає, але воно є екстремально великим.

Результати отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть знайти застосування у подальших дослідженнях з теорії функцій, теорії інтерполяції, теорії ймовірності.

Отримані результати є певним внеском в теорію інформації і можуть мати застосування в квантовій фізиці та теорії керування. При їх отриманні використовуються класичні та сучасні методи комплексного та функціонального аналізів та деякі прийоми з робіт А. М. Сєдлєцкого, В. Я. Лєвіна, Б. В. Винницького, В. М. Дільного, В. Л. Шарана та Т. І. Гіщак.

Список використаних джерел

1. Аветисян К. Л. Весовые пространства гармонических и голоморфных функций. Диссертация, Ереванский Государственный Униерситет (2009).
2. Бер, Г. З.: О явлении интерференции в интегральной метрике и приближении целыми функциями экспоненциального типа. Теор. функц, функ. анал. и прилож. **34**(1), 11-24 (1980).
3. Винницький, Б.В.: Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки. Мат. студ. **16**(1), 61-70 (2001).
4. Винницький, Б. В.: Про нулі деяких класів функцій, аналітичних в півплощині. Матем. студії. **6**, 67–72 (1996).
5. Винницкий, Б. В.: О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент. Укр. мат. журн. **46**(5), 484–500 (1994).
6. Винницький, Б.: Про узагальнення теореми Пелі-Вінера. Мат. студ. **4**, 37-44 (1995).
7. Винницький, Б.В.: Про розв'язання однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі. Мат. студ. **17** (1), 41-52 (1997).
8. Власов, В. И.: О весовых пространствах типа Харди. Докл. Акад. наук. **328**, 281–284 (1993).
9. Власов, В. И.: Весовые пространства типа Харди. ВЦ РАН, Москва (1991).
10. Гарнетт, Дж.: Ограниченные аналитические функции. Мир, Москва (1984).

11. Гофман, К.: Банаховы пространства аналитических функций. ИИЛ, Москва (1963).
12. Джрбашян, М. М.: Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, Москва (1966).
13. Дільний В. М.: Про еквівалентність деяких умов для вагових про- сторів Гарді. Укр. мат. журн. **58** (9), 1257-1263 (2006).
14. Евграфов, М. А.: Асимптотические оценки и целые функции. Наука, Москва (1979).
15. Лаврентьев, М. А.: О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций. Мат. Сборн. **1(43)**(6), 815-846 (1936).
16. Левин, Б. Я.: Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент. Изв. АН СССР. Сер. матем. **39**, 657–702 (1975).
17. Левин, Б.: Распределение корней целых функций. Гостехиздат, Москва (1956).
18. Леонтьев, А. Ф.: Ряды экспонент. Наука, Москва (1976).
19. Привалов, И. И.: Граничные свойства аналитических функций. Гостехиздат, Москва (1950).
20. Седлецкий, А.: Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения. Матем. сб. **96**(1), 75-82 (1975).
21. Шеремета, М. М.: Цілі ряди Діріхле. ІСДО, Київ (1993).
22. Федорюк, М. В.: Асимптотики: Интегралы и суммы. Наука, Москва (1987).

23. Alekseev, D. V.: Approximation of functions of several variables by neural networks. Fundamental and applied mathematics. **15**(3), 9-21 (2009).
24. Antoine, J.P., Bishop, R.C., Bohm, A., Wickramasekara, S.: Rigged Hilbert Spaces in Quantum Physics. In: Greenberger D., Hentschel K., Weinert F. (eds) Compendium of Quantum Physics. Springer, Berlin, Heidelberg (2009).
25. Arnison, M. R., Cogswell, C. J., Smith, N. I., Fekete, P. W., Larkin, K. G.: Using the Hilbert transform for 3D visualization interference contrast microscopic images. J. Microscopy. **199**(1), 79–84 (2000).
26. Benedetto, J., Heinig, H.P.: Weighted Hardy spaces and the Laplace transform. Lect. Notes. Math. **992**, Springer, Berlin, Heidelberg (1983).
27. Blackmore, D., Prykarpatsky, A., Samoylenko, V.: Nonlinear Dynamical Systems of Mathematical Physics: Spectral and Symplectic Integrability Analysis. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore (2011).
28. Boas, R.: Entire functions. Academic Press, New York (1954).
29. Boche, H., Monich, U.: There Exists No Globally Uniformly Convergent Reconstruction for the Paley–Wiener Space PW_{π}^{1} of Bandlimited Functions Sampled at Nyquist Rate.IEEE Transactions on Signal Processing. **56**(7), 3170-3179 (2008).
30. Bohm, A., Bui, H.: The Marvelous Consequences of Hardy Spaces in Quantum Physics. Geometric Methods in Physics. **30**(1), 211-228 (2013).

31. Bohm, A., Bryant, P.W.: From Hardy Spaces to Quantum Jumps: a Quantum Mechanical Beginning of Time. International Journal of Theoretical Physics. **50**, 2094–2105 (2011).
32. Booij, H. C., Thoone, G. P. J. M.: Generalization of Kramers-Kronig transforms and some approximations of relations between viscoelastic quantities. Rheologica Acta. **21**, 15–24 (1982).
33. Boll, J., Bolotnikov, V.: Contractive multipliers from Hardy space to weighted Hardy space. Proceedings of the American Mathematical Society. **145**, 2411-2425 (2017).
34. Borichev, A.: Beurling algebras and the generalized Fourier transform. Proc. London Math. Soc. **s3-73**(2), 431-480 (1996).
35. Borichev, A.: The generalized Fourier transformation, Titehmarsh's theorem and asymptotically holomorphic functions. Leningrad Math. J. **1**, 825-857 (1990).
36. Borichev, A., Hedenmalm, H.: Completeness of translates in weighted spaces on the half-line. Acta Math. **174**(1), 1-84 (1995).
37. Calderon, A., Zygmund, A.: On the existence of certain singular integrals. Acta Mathematica. **88**, 85-139 (1952).
38. Chalendar, I., Partington, J. R.: A class of quasicontractive semigroups acting on Hardy and weighted Hardy spaces. Semigroup Forum. **95**, 281–292 (2017).
39. Chyzhykov, I.E.: Growth of pth means of analytic and subharmonic functions in the unit disc and angular distribution of zeros. Isr. J. Math. **236**, 931–957 (2020).

40. Davis, J. A., McNamara, D. E., Cottrell, D. M.: Image processing with the radial Hilbert transform: theory and experiments. Opt. Lett. **25**(2), 99–101 (2000).
41. Dilnyi, V. M.: On cyclic functions in weighted Hardy spaces. Zh. Math. Fiz. Anal. Geom. **7**(1), 19-33 (2011).
42. Dilnyi, V. M.: On the equivalence of some conditions for weighted Hardy spaces. Ukrainian Mathematical Journal. **58**, 1425-1432 (2006).
43. Dilnyi, V. M.: Splitting of some spaces of analytic function. Ufa Math. J. **6**(2), 25-34 (2014).
44. Dilnyi, V. M., Hishchak, T. I.: On splitting functions in Paley-Wiener space. Mat. Stud. **45**(2), 137-148 (2016).
45. Duffin, R. J.: Hilbert transforms in Yukawan potential theory. Proc. Natl. Acad. Sci. **69**(12), 3677–3679 (1972).
46. Duren, P.: Theory of H^p spaces. Acad. Press, New York, London (1970).
47. Eoff, C.: The discrete nature of the Paley-Wiener spaces. Proc. of the AMS. **123**(2), 505–512 (1995).
48. Fedorov, M. A.: Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane. Math. Physics, Anal. and Geom. **1**, 223-271 (1998).
49. Fujii, K.: More on Optical Holonomic Quantum Computer. arXiv:quant-ph/0005129 (2000). Accessed 31 May 2000.
50. Funahashi, K.: On the approximate realization of continuous mappsngs by neural networks. Neural Networks. **2**(3), 183-192 (1989).

51. Gaisin, A. M., Aitkuzhina, N. N.: The order of a Dirichlet series with an irregular distribution of the exponents in the half-strip. St. Petersburg Math. J. **30**(4), 639–653 (2019).
52. Gaisin, A. M.: Minimum of modulus of the sum of Dirichlet series converging in a half-plane. Ufa Math. Journal. **5**(4), 49–57 (2013).
53. Garsia-Cuerva, J.: Weighted H^p spaces. Warszawa, Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk (1979).
54. Hahn, S. L.: Hilbert Transforms in Signal Processing. Artech House, Boston (1996).
55. Hardy, G. H.: The mean value of the modulus of an analytic function. Proceedings of the London Mathematical Society. **s2-14**(1), 269–277 (1915).
56. Haykin, S.: Adaptative filter theory. Prentice Hall, USA (2013).
57. Hinojosa, J. H., Mickus, K. L.: Hilbert transform of gravity gradient profiles: Special cases of the general gravity-gradient tensor in the Fourier transform domain. Geophys. **67**(3), 766–769 (2002).
58. Kac, M.: Can one hear the shape of a drum? American mathematical monthly. **73**(4), 1-23 (1966).
59. Karl, J. H.: An Introduction to Digital Signal Processing. CA:Academic Press, San Diego (1989).
60. Keldysch, M. V.: Sur la representation conforme des domaines limites par des courbes rectifiables. Annis scient. Ec. norm. sup. **54**, 1-38 (1937).
61. King, F. W.: Hilbert Transforms 1. Cambridge University Press, Cambridge (2009).

62. King, F. W.: Hilbert Transforms 2. Cambridge University Press, Cambridge (2009).
63. Kisliakov, S.: Partial retractions of weighted Hardy spaces. Stud. Math. **138**(3), 251-264 (2000).
64. Kuryliak, A. O., Skaskiv, O. B., Stasiv, N. Yu.: On the convergence of random multiple Dirichlet series. Mat. Stud. **49**(2), 122–137 (2018).
65. Koosis, P.: Introduction to H^p spaces, Second edition. Cambridge Tracts in Mathematics. **115**, Cambridge: Cambridge University Press, UK (1998).
66. Levin, B., Ljubarskii, Yu.: Interpolation by means of special classes of entire functions and related expanstions in series of exponentials. Mathematics of the USSR-Sbornik. **9**(3), 621-662 (1975).
67. Madych, W. R.: On the correctness of the problem of inverting the finite Hilbert transform in certain aeroelastic models. J. Integral Equations Appl. **2**(2), 263–267 (1990).
68. Maergois, L. S.: An analog of the Paley-Wiener theorem for entire functions of the space W_σ^p, $1 < p < 2$, and some applications. CMFT. **6**(2), 459-469 (2006).
69. Mandig, D., Goh, V.: Complex Value Nonlinear Adaptive Filters. John Wiley and Sons, New York (2009).
70. Martinez, J., Heusdens, R., Hendriks, R.: A generalized Fourier domain: Signal processing framework and applications. Signal Processing. **93**(5), 1259-1267 (2013).
71. Martyrosian, V.: On a theorem of Djrbashian of the Phragmen-Lindelof type. Math. Nachr. **144**, 21-27 (1989).

72. Masani, P.: Wiener's contribution to generalized harmonic analysis, prediction theory and filter theory. Bull. Amer. Math. Soc. **72**(1), 73-125 (1966).

73. Mashreghi, J.: Representation Theorems in Hardy Spaces. Oxford Univ. Press, Oxford (2009).

74. Massaneda, X., Ortega-Cerda, J.: Connections between signal processing and complex analylis. CONTRIBUTIONS to SCIENCE. **2**(3), 345-357 (2003).

75. McCulloch, W. S., Pitts, W.: A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. Bulletin of Mathematical Biophysics. **5**(4), 115-133 (1943).

76. Mlocek, W., Ptak, M.: On the reflexivity of subspaces of Toeplitz operators on the Hardy space on the upper half-plane. Czechoslovak Mathematical Journal. **63**(2), 421-434 (2013).

77. Nabighian, M. N.: Towards a three-dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert transforms. Fundamental relations, Geophys. **49**(6), 686–847 (1984).

78. Newman, D.J.: The closure of translates in l^p. Amer. J. Math. **86**(3), 651-667 (1964).

79. Nikolski, N.N.: Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. Volume 1. Hardy, Hankel and Toeplitz. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 92. American Mathematical Society, Providence (2010)

80. Nyman, B.: On the one-dimensional translation group and semi-group in certain function spaces. Thesis, University of Uppsala (1950).
81. Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., Buck, J. R.: Discrete-Time Signal Processing. Upper Saddle River, Prentice-Hall, NJ (1999).
82. Paley, R.E.A.C., Wiener, N.: Fourier transforms in complex domain. AMS, USA (1934).
83. Papoulis, A.: Signal analysis. McGraw-Hill, NY (1984).
84. Peleshchak, R., Lytvyn, V., Peleshchak, I., Doroshenko, M., Olyvko, R.: Hechth-Nielsen theorem for a modified neural network with diagonal synaptic connections. Mathematical Modeling and Computing. **6**(1), 101-108 (2019).
85. Qu, W., Dang, P.: Rational approximation in a class of weighted Hardy spaces. Complex Analysis and Operator Theory. **13**, 1827–1852 (2019).
86. Reinhard, H.: Elements de mathematiques du signal. Dunod, Paris (1995).
87. Riesz, M.: Sur les fonctions conjuguees. Mathematische Zeitschrift. **27**, 218-244 (1928).
88. Rooney, P.: A generalization of the Hardy spaces. Can. J. Math. **16**, 358-369 (1964).
89. Rosenblatt, F.: Principles of Neurodynamics: Perceptrons and the theory of brain mechanisms, Spartan Books, Washington, DC (1961).
90. Rosenblum, M.: Hardy classes and operator theory. Oxford, Oxford Univ. Press, New York and Clarendon Press, (1985).

91. Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw-Hill Book Company, New York (1966).

92. Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw-Hill Book Company, New York (1973).

93. Samoilenko, A.M., Prykarpatsky, Y.A., Taneri, U.,Prykarpatsky, A.K., Blackmore, D.L.: A geometrical approach to quantum holonomic computing algorithms. Mathematics and Computers in Simulation. **66**(1), 1-20 (2004).

94. Sejdic, E., Djurovic, I., Stankocic, L.: Fractional Fourier transform as a signal processing tool. An overview of recent developments Signal Processing. **91**(6), 1351-1369 (2011).

95. Shaik, J. S., Iftekharuddin, K. M.: Detection and tracking of rotated and scaled targets by use of Hilbert-wavelet transform. Appl. Opt. **42**(23), 4718–4735 (2003).

96. Shrestha, Kh.: Weighted Hardy spaces on the unit disk. Complex Analysis and Operator Theory. **9**, 1377–1389 (2015).

97. Skaskiv O. B.: On the classical Wiman inequality for entire Dirichlet series.Visn. L'viv. Univ, Ser Mekh.-Mat. **54**, 180-182 (1999).

98. Smirnov, V. I.: Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problemes qui s'y rattachent. Bulletin de l'Acadйmie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathйmatiques et na. **3**, 337-372 (1932).

99. Soldatov, A. P.: Weighted Hardy classes of analytic functions. Diff. Uravn. **38**(6), 809–817 (2002).

100. Sugiyama, A.: Pseudopotential theory for interionic interaction potentials in metals at non-zero temperature. I. Elementary derivation of asymptotic expressions on basis of Hilbert transforms. J. Phys. Soc. Japan. **61**, 4061–4084 (1992).

101. Vynnytskii, B. V., Dilnyi, V. M.: On solution of homogeneous convolution equation generated by singularity. Mat. Styd. **19**(2), 149-155 (2003).

102. Vynnytskii, B. V., Dilnyi, V. M.: A generalization of the Beurling-Lax theorem. Math. Notes. **79**(3-4), 335-341 (2006).

103. Vynnyts'kyi, B., Dil'nyi V.: On solutions of homogeneous convolution equation generated by singularity. Mat. Stud. **19**, 149-155 (2003).

104. Vynnytskyi, B., Sharan, V.: On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane. Mat. Stud. **14**(1), 41-48 (2000).

105. Vynntskii, B. V., Sharan, V. L., Sheparovych, I. B.: On an interpolation problem in the class of functions of exponential type in half-plane. Ufa Mathematical Journal. **11**, 19-26 (2019).

106. Wiener, N.: Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. John Wiley and Sons, New York (1949).

107. Wiener, N.: Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series. With engineering applications. Wiley and Sons, New York (1949).

108. Wiener, N.: The Fourier integral and certain of its applications. Dover Publications, New York (1959).

109. Wiener, N.: Generalized harmonic analysis. Acta Math. **55**, 117-258 (1930).

110. Wright, K. R., Hutchinson, J. S.: Oscillator phase and the reaction dynamics of HN3: A model for correlated motion. Phys. Chem. Chem. Phys. **1**, 1299–1309 (1999).

111. Yulmukhametov, R.S.: Splitting entire functions with zeros in a strip. Sbornik: Mathemaics. **186**(7), 1071–1084 (1995).

112. Yulmukhametov, R.S.: Solution of the Ehrenpreis factorization problem. Sbornik: Mathematics. **190**(4), 597–629 (1999).

113. Дільний, В. М., Гук, Х. О.: Критерій розщеплення в просторі Пелі - Вінера. Буковинський математичний журнал. **5**(1-2), 87-91 (2017).

114. Dilnyi, V., Huk, Kh.: On decomposition problem in weighted Hardy space. Banach Center Publications. **119**, 151-155 (2019).

115. Dilnyi, V., Huk, K.: Identificaton of unknown filter in a half-strip. Acta Applicandae Mathematicae. **165**, 199-205 (2020).

116. Dilnyi, V., Voitovych, Kh.: Hilbert transform on W^p_σ. Matematychni Studii. **52**(1), 32-37 (2019).

117. Huk, Kh.: On decomposition in the Paley - Wiener space. In: Book of Abstracts of International conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017.

118. Huk, Kh.: Hilbert transform on W^p_σ. In: Book of Abstracts of International conference dedicated to the 70th anniversary of Anatolij Plichko "Banach spaces and their applications", Lviv, Ukraine, 26-29 June 2019.

119. Voitovych, Kh.: On problem of decomposition by functions of small exponential type. In: Book of Abstracts of International conference dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky "Infinite dimentional analysis and topology", Ivano-Frankivsk, Ukraine, 16-20 October 2019.

120. Dilnyi, V., Huk, Kh.: Detecting of signals in half-strips. In: Book of Abstracts of International scientific and methodical conference "Modern scientific and methodical issues of mathematics in higher school", Kyiv, Ukraine, 21 -22 June 2018.

121. Дільний, В., Гук, Х.: Критерій розщеплення в просторі Пелі - Вінера. Збірник тез доповідей міжнародної наукової конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу", Одеса, Україна, 31 травня - 5 червня 2017.

122. Жук, О., Войтович, Х., Галь, Ю.: Про розщеплення парних функцій. Збірник тез доповідей міжнародної наукової конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу", Одеса, Україна, 26-30 травня, 2020.

ДОДАТОК

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

1. Дільний, В. М., Гук, Х. О.: Критерій розщеплення в просторі Пелі - Вінера. Буковинський математичний журнал. **5**(1-2), 87-91 (2017).
2. Dilnyi, V., Huk, Kh.: On decomposition problem in weighted Hardy space. Banach Center Publications. **119**, 151-155 (2019).
3. Dilnyi, V., Voitovych, Kh.: Hilbert transform on W^p_σ. Matematychni Studii. **52**(1), 32-37 (2019).
4. Dilnyi, V., Huk, K.: Identificaton of unknown filter in a half-strip. Acta Applicandae Mathematicae. **165**, 199-205 (2020).

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях і наукових семінарах:

1) міжнародній науковій конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" (Одеса, 31 травня - 5 червня 2017 року);
2) міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю Стефана Банаха (Львів, 18–23 серпня 2017 року);
3) міжнародній конференції "Banach spaces and their applications" (Львів, 26 - 29 червня 2019 року);
4) міжнародній конференції "Infinite dimentional analysis and topology" (Івано-Франківськ, 16 - 20 жовтня 2019 року);

5) міжнародній науковій та методичній конференції "Modern scientific and methodical issues of mathematics in higher school" (Київ, 21 - 22 червня 2018 року);
6) міжнародній науковій конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" (Одеса, 26 - 30 травня, 2020 року);
7) науковому семінарі кафедри математики в Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка (керівник проф. Винницький Б. В., Дільний В. М.);
8) львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. О. Б. Скасків).