

ВІДГУК

офіційного опонента, професора кафедри вищої математики
Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу,
доктора фізико-математичних наук Бандури Андрія Івановича
на дисертацію **Войтович Христини Олегівни**
„Апроксимаційні та асимптотичні властивості функцій з просторів Гарді в деяких
областях“,

подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 —
математика (галузь знань 11 — „Математика та статистика“).

Актуальність дослідження та його мета. Дослідження у цій дисертаційній роботі досить цікаві бодай тому, що вони впритул підходять до прикладних досліджень. А це важливо, бо переважно дисертації з математичного аналізу мають глибокий теоретичний характер і це напряму вказується у практичному значенні роботи. Зате результати досліджень просторів Гарді за останнє століття знайшли численні застосування у комплексному та функціональному аналізі, теорії ймовірностей та теорії диференціальних рівнянь. Це суто математичні застосування. А до них варто додати ще їхнє використання у таких прикладних напрямках, як квантова фізика, теорія інформації, теорія керування та теорія оброблення сигналів.

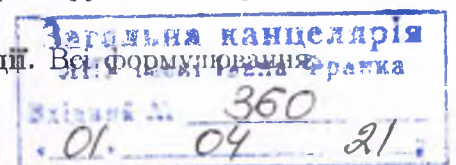
Дослідження таких просторів були започатковані результатом за 1915 рік Г. Гарді про те, що логарифм норми функції $f(re^{i\theta})$ в просторі $L^p[-\pi; \pi]$ є опуклою функцією від $\ln r$, $0 < r < 1$. Інша лінія досліджень у цій роботі пов'язано з результатом за 1928 рік М. Рісса, який довів, що перетворення Гільберта є обмеженим лінійним оператором на $L^p(\mathbb{R})$ при $1 < p < +\infty$. Пізніше цей результат був перенесений на багатовимірний випадок. Це перетворення стало основою для вивчення сингулярних інтегралів у n -вимірному евклідовому просторі. Також воно важливе для характеристики операторів, які комутують з трансляційними операторами.

Дослідження у цій роботі частково продовжують ту лінію досліджень вагових узагальнених просторів Гарді, яку розпочав ще у своїх працях Б. В. Винницький. До таких просторів належать аналітичні функції, які характеризуються експоненційним зростанням в правій півплощині. Проте, виявилось, що властивості вагових просторів мають значні відмінності від властивостей просторів у неваговому випадку. Зокрема, у ваговому випадку швидке зростання функції по уявній осі має зв'язок з її швидким спаданням по дійсній півосі. Зображення математичних об'єктів у вигляді суми чи добутку об'єктів з простішими властивостями — це один з важливих напрямків досліджень у математиці. Б. В. Винницький, Т. і. Гішак, В. М. Дільний, Л. Еренпрайс, Ю. і. Любарський, і. Е. Чижиков та Р. С. Юлмухаметов займалися задачами про зображення просторів аналітичних функцій у вигляді добутку чи суми двох об'єктів простішої природи. Однією з них виступає задача про розщеплення функцій з простору цілих функцій експоненційного типу на суму двох, кожна з яких "велика" тільки в певній області. Усе це підводить до думки про актуальність досліджень, виконаних у цій роботі.

Зазначимо, що задачі розщеплення у різноманітних формулюваннях якраз і присвячена значна частина дисертації.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Усі результати, отримані в дисертаційній роботі, нові. У дисертації розв'язано ряд цікавих задач з теорії просторів Гарді та Пелі-Вінера. Зокрема, отримано умови існування розв'язку проблеми розщеплення для функцій довільного малого експоненційного типу в півплощині, знайдено критерій обмеженості перетворення Гільберта в одному просторі Пелі-Вінера в термінах розщеплення, розв'язано задачу ідентифікації нетривіальності фільтру у просторі Гарді в півсмузі та проблему розщеплення функцій у куті для простору Пелі-Вінера за умови певної регулярності коефіцієнтів.

Обґрунтованість і правильність результатів дисертації. Всі формулювання



основних результатів дисертаційної роботи Войтович Х. О. правильні. Міркування, використані нею у доведеннях, вичерпні, строгі, обґрунтовані та правильні, не містять прогалин, а відповідні висновки справедливі.

Зауваження. Рукопис дисертації оформлений на належному науковому та стилістичному рівні. Проте сама праця містить цілий ряд недоглядів та упущень. Зокрема,

1. код 517.5 – досить загально описує зміст дисертації. Йому відповідає теорія функцій. До тематики дисертації, на мою думку, найбільше підходить 517.547.7 – простори аналітичних функцій та 517.982.274 – лінійні топологічні простори аналітичних функцій.
2. с. 2₉, 6₆¹², 23₁₀, 24⁹, 45_{2,5}, 81₄^{1,4}, 82⁴, 96₃, 131₁₂ фразу „як завгодно малого“ варто замінити на „довільно малого“
3. с. 19₁₄ пропущена кома перед „використавши максимальну функцію“.
4. с.19-22, в актуальності теми пропущені посилання на праці, в яких були вперше отримані згадувані дисертанткою конкретні результати П. Фату, Г. Гарді, Дж. Літлвуда, А. Бьорлінга, Д. Гільберта, М. Рісса, А. Зігмунда, А. Кальдерона.
5. с. 20₅ пропущена кома перед „вважаючи відомими спектри сигналу і шуму“.
6. Також в актуальності згадується багато прізвищ математиків, які за твердженням здобувачки займалися застосування теорії просторів Гарді у прикладних галузях знань, але не наводиться жодна їхня праця. Зокрема, на с.22¹³ надибуємо на прізвище Р. Бельман. Мені відомий R. Bellmann, якого колись транскрибували як Р. Беллман, а зараз найправильніша транскрипція його прізвища буде Р. Белмен.
7. с.19, третій абзац зверху написано „В 1949 році А. Бьорлінг встановив твердження про апроксимацію функцій з класу Гарді в одиничному крузі скінченними лінійними комбінаціями функцій системи $\{G(z)z^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$."Проте ні вище, ні нижче у тексті нічого не сказано про функції $G(z)$.
8. 21⁸ „ростом,“ на „зростанням“, бо правильним терміном слугує зростання функції, а не ріст функції.
9. с.16, перелік умовних позначень. Написано: $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < +\infty$, – простір Гарді в одиничному крузі, тобто простір аналітичних у півплощині \mathbb{C}_+ функцій f , для яких... Либонь тут замість „у півплощині \mathbb{C}_+ “ має бути „в одиничному крузі“.
10. с.16₂ замість $\Re z > 0$ має бути $\operatorname{Re} z > 0$.
11. с.17, означення простору $E^p(\mathbb{C}(\alpha; \beta))$: замість

$$\sup_{\alpha < \varphi < \beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})| dr \right\}^{1/p} < +\infty$$

має бути

$$\sup_{\alpha < \varphi < \beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty$$

(пропущений степінь p над підінтегральною функцією).

12. Здобувачка для позначення дійсної та уявної частини використовує різні символи. Наприклад, у списку умовних позначень на с.16 бачимо Re та Im , а натомість на с.18 вже надибуємо \Re та \Im відповідно.
13. с.17, у розшифруванні позначення $E^p[D_\sigma]$ не пояснено по чому береться супремум та не вказано звідки взято μ у нижній межі інтеграла. Сторінкою далі (на с. 18) наводиться докладніше пояснення для простору $E^p[D_\sigma^*]$, що супремум береться для всіх відрізків μ , які містяться в D_σ^* . Однак, здобувачка не уточнює, чи це так само і у випадку $E^p[D_\sigma]$.
14. с. 24¹⁶ пропущено кому після „отримані в дисертаційній роботі“.
15. с.9, 15, 25, 145, 146 не правильно вказано назву конференції „Infinite dimensional analysis and topology“, яка була присвячена 70-річчю О. Лопушанського. Натомість має бути „Infinite dimensional analysis and topology“.

16. с.11₁₃₋₁₄ англійська анотації містить два майже синонімічні речення, що йдуть одне за одним: „One of the solution of the Problem A was researched by T. I. Hischak. One of the solutions was investigated by T. I. Hischak.“
17. с.11₁₀, 12¹⁴ замість „where“ (де) має бути „were“ (були).
18. с.11₉ замість „there exists the solutions“ має бути „there exist the solutions“.
19. с.11₁ замість theorem 2.4 має бути Theorem 2.4.
20. с.12³ замість in subsection 2.3 were має бути in Subsection 2.3 there were
21. с.12₁₀ замість for which there exists the solutions of the above problems. має бути for which there exist the solutions of the above problems.
22. с.13₁ замість it admit має бути it admits
23. с.13⁷ замість In subsection 4.1 is obtained має бути In Subsection 4.1 there is obtained
24. с.25₈₋₉, 147₁ неправильно вказано назву семінару у Львівському університеті. Написано так: львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник проф. О. Б. Скасків). Натомість має бути семінар з теорії аналітичних функцій у ЛНУ ім. І. Франка (керівники проф. Скасків О.Б., проф. Чижиков І.Е., проф. Філевич П.В., проф. Заболоцький М.В.)
25. с.28₃, 30⁶, 46₃, 89₂, 99₂ „співпадає з“ та „співпадають з“ кальки з російської, має бути „збігається з“ та „збігаються з“.
26. с.31₁₁ фраза „про представлення функціональних просторів як сума чи добуток двох простіших“ містить неправильні відмінки. Натомість має бути така фраза „про представлення функціональних просторів як суми чи добутку двох простіших“.
27. с.32₉ написано „У роботах Б. В. Винницького, В. М. Дільного та Т. І. Гіщак [44]“, але [44] — це стаття Дільного та його учениці Гіщак. Пропущене цитування статті Винницького.
28. с.34³ у фразі „для деякого $\delta \in (0; 1)$ тут ми вважаємо, що...“ перед тут пасує поставити крапку або крапку з комою.
29. с.41₇, 120¹¹ „інтегралу типу Коші“ на „інтеграла типу Коші“
30. с.41₆ „Формулу (1.11)“ варто замінити на „Формулу (1.10)“, бо (1.11) не існує.
31. с.45. Мені здається, що наслідок 2.1 можна сформулювати у загальнішій формі. У поточному формулюванні написана умова $c_k = 0$ для всіх $k > 0$. Далєбі, її можна замінити на умову $c_k = 0$ для всіх $k \geq k_0$, де k_0 — деяке натуральне число або нуль.
32. с.46, перший рядок після формули (1.18): пропущено вираз dt у формулі для $\chi_1(z)$.
33. с.46. Формулою (1.17) означається ціла функція f експоненційного типу $\alpha > 0$. Але потім після формули (1.18) наводяться формули для функцій $\chi_1(z)$ та $\chi_2(z)$. Так-от одна з них містить як верхню межу інтегрування параметр σ , а інші містить як нижню межу інтегрування параметр $-\varepsilon$. Виникає питання, як вони вибираються? Або який зв'язок між α , σ та ε ? Чи може тут якась неточність?
34. с.48: формулювання теореми 3.2 містить неточність. Написано, що $f \equiv 0$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови. У першій умові йдеться про голоморфне продовження функції g , а в другій про відсутність такого голоморфного продовження функції g . Зрозуміло, що вони одночасно не можуть виконуватися. Либонь замість „виконуються наступні умови“ має бути „виконується одна з умов“
35. у прикладі 2.2 на с.56-57 не правильно знайдені $\chi_1(z)$ та $\chi_2(-iz)$. У відповідних формулах замість множника 4σ має бути 2σ . Відповідно, змінюється вираз для $\chi(z)$ на с. 57 та для $\mu(z)$.
36. с.122₁₁ замість „по перше“ має бути „по-перше“
37. с.125₂ після „така рівність“ має стояти кома.
38. с.126₅ після Сохоцького має стояти кома.

Вочевидь, що усі наведені недоліки праці не спотворюють розуміння наукових здобутків дисертації та не викликають сумнівів у справедливості основних математичних

здобутків дисертантки.

Публікації та апробація результатів роботи. Результати дисертації доповідалися на 2 семінарах та на 6 конференціях, про що свідчать опубліковані тези цих конференцій. До того ж результати дисертації опубліковано в 4 статтях, серед них — 1 стаття у виданні з категорії Б, 2 статті надруковано у виданнях, які внесені безпосередньо до міжнародної наукометричної бази Scopus (в тому числі одна стаття у виданні з другого квартилю). Серед них дві статті у закордонних фахових виданнях.

Зважаючи на викладені показники, можна вважати, що дисертація пройшла достатню апробацію.


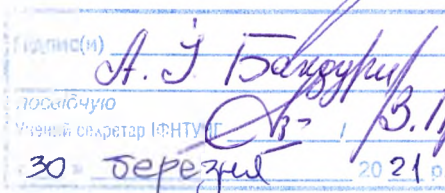
На мою думку, автореферат вичерпно розкриває основні положення та зміст дисертаційної роботи. А основні результати опубліковані у відповідних наукових виданнях.

Практичне значення результатів роботи. Основні здобутки та результати дисертації мають теоретичний характер. Вони важливі для подальшого розвитку теорії функцій, в першу чергу, теорії просторів Гарді. Також вони можуть знадобитися у теорії інформації, а саме у теорії сигнальних процесів.

Висновки. Перераховані вище недопрацювання не зменшують наукової цінності дисертації.

Зважаючи на наведене, можна стверджувати, що дисертаційна робота Х. О. Войтович становить завершене, повноцінне та виконане на актуальну тематику наукове дослідження з новим внеском в теорію просторів Гарді та Пелі-Вінера. Зокрема, здобувачкою показано, що розв'язок проблеми розщеплення у просторі Пелі-Вінера існує за умови, що усі коефіцієнти Фур'є з додатними номерами дорівнюють нулю. Цю ж задачу розв'язано для цілих функцій довільно малого експоненційного типу в комплексній півплощині. Ба більше, отримано критерій обмеженості перетворення Гільберта в термінах розщеплення, що своєю чергою дозволило отримати два прості способи обчислення перетворення Гільберта. Відповідно, дисертація Х. О. Войтович „Апроксимаційні та асимптотичні властивості функцій з просторів Гарді в деяких областях“, подана на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — „Математика“, відповідає вимогам „Порядку проведення експерименту з присудження доктора філософії“, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України №167 від 6 березня 2019 р., та наказу Міністерства освіти і науки України №40 від 12 січня 2017 року „Про затвердження вимог до оформлення дисертацій“, а її авторка Войтович Христина Олегівна заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 — „Математика та статистика“ за спеціальністю 111 — „Математика“.

Офіційний опонент,
професор, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри вищої математики
Івано-Франківського національного
технічного університету нафти і газу



А. І. Бандура
30 березня 2021 р.

А. І. Бандура