ВІДГУК

офіційного опонента про дисертацію **Бакси Віти Петрівни**

“ Властивості аналітичних вектор-функцій обмеженого **L**-*індексу в двовимірній кулі ”*,

подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктор філософії

з галузі знань 11 “Математика та статистика” за спеціальністю 111 “Математика”.

1. *Актуальність дослідження і його мета.* В основі багатьох підходів до дослідження властивостей цілих та аналітичних функцій лежать властивості максимального члена і центрального індексу їхнього розвинення в степеневий ряд. Початкове поняття цілої функції обмеженого індексу виникає як властивість цілої функції, в якої центральний індекс степеневого розвинення в околі довільної точки є обмеженим. Власне, нехай ціла функція $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ в околі точки $z = a$ має розвинення $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(a)(z-a)^n$, $\mu_f(r,a) = \{|f_n(a)|r^n\colon n \geq 0\}$ і $\nu_f(r,a) = \max\{n\colon |f_n(a)|r^n = \mu_f(r,a)\}$ – максимальний член і центральний індекс цього степеневого ряду. Якщо $N_f = \sup\{\nu_f(1,a)\colon a \in \mathbb{C}\} < +\infty$, то f природно назвати цілою функцією обмеженого індексу, а число N_f – величиною індексу функції. Інакше, якщо пригадати, що $f_n(a) = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)$, то це ж саме можна записати у вигляді такого: існує N_f таке, що $(\forall a \in \mathbb{C})(\forall n \geq 0)$: $\dfrac{1}{n!}|f^{(n)}(a)| \leq \max\left\{\dfrac{1}{k!}|f^{(k)}(a)|\colon 0 \leq k \leq N_f\right\}$. Власне, приходимо до означення класу цілих функцій обмеженого індексу за Макдонеллом-Лепсоном. Зауважимо, що якщо ціла функція f є розв'язком диф. рівняння вигляду $f^{(k)} + \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_j f^{(j)} = 0$, то вона є функцією обмеженого індексу і це нескладно довести безпосередньо на основі самого рівняння. З іншого боку, кожен розв'язок такого диф. рівняння має вигляд $f(z) = f_0(z) = \sum\limits_{s=1}^{m} P_s(z)e^{z\lambda_s}$, де P_s – многочлени, степінь яких є на одиницю меншим за кратність кореня λ_s характеристичного полінома $L(z) = z^k + \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_j z^j$. Водночас, якщо ціла функція має зазначений вигляд, то записуючи характеристичний поліном $L(z) = \prod\limits_{j=s}^{m}(z-\lambda_s)^{m_s}$, де $m_s = 1 + \deg P_s$, отримаємо однорідне диф. рівняння, розв'язком якого є задана ціла функція f_0, а тому вона має обмежений індекс. Зазначимо, що цілі функції обмеженого індексу мають цілий ряд властивостей правильного поводження, і, зокрема, мають властивість рівномірної розподіленості нульової множини (С.Шах, В.Хейман, Г.Фріке, Р.Рой). Проте, майже на самому початку цих досліджень було доведено, що цілі функції обмеженого індексу є функціями експоненційного типу. Це зумовлює застосовність цього підходу лише до вказаного класу цілих функцій, а отже й дає змогу досліджувати лише цілі розв'язки експоненційного типу лінійних диф. рівнянь. Слід зазначити, що тим не менше, ці дослідження були доволі результативними. Цьому сприяло доведення, згаданими вище авторами, цілого ряду ефективних критеріїв обмеженості індексу. Особливе місце тут займають теореми Фріке і Хеймана. Теорема Хеймана і подальші її аналоги для цілих і аналітичних функцій як від однієї, так і від багатьох змінних виявилися напрочуд ефективними при доведенні обмеженості індексу розв'язків диф. рівнянь і їхніх систем різного вигляду. Зазначимо, що як для цілих функцій нескін-

ченного експоненційного типу, так і для аналітичних функцій в одиничному крузі, даний підхід до введення поняття обмеженого індексу є неможливим. Цю обмеженість підходу у випадку цілих функцій подолали М.М.Шеремета і А.Д.Кузик (1986), які ввели і дослідили поняття цілої функції обмеженого ℓ-індексу. При цьому вони встановили цілковиту якісну подібність властивостей цілих функцій обмеженого ℓ-індексу до властивостей цілих функцій обмеженого індексу (власне, клас цілих функцій обмеженого індексу і відповідні властивості отримуємо при $\ell \equiv 1$ з властивостей функцій обмеженого ℓ-індексу). При цьому вже для кожної цілої функції з обмеженою в сукупності кратністю нулів існує така (додатна неперервна) функція ℓ, що дана ціла функція виявляється функцією обмеженого ℓ-індексу. На відміну від поняття цілої функції обмеженого індексу, поняття функції обмеженого ℓ-індексу допускає узагальнення як на клас аналітичних функцій в одиничному крузі, так і узагальнення на інші різноманітні класи аналітичних функцій як від однієї, так і від багатьох змінних. Функції з таких класів допускають апріорні оцінки швидкості їхнього зростання, а також є розв'язками диф. рівнянь за прозорих умов на аналітичні коефіцієнти цих рівнянь. Звідси, зокрема, щоразу для класу диф. рівнянь, обмеженість ℓ-індексу розв'язків яких встановлюється, випливає, наприклад, доведення гіпотези В. Хеймана про максимально можливу швидкість зростання розв'язків у порівнянні зі швидкістю зростання коефіцієнтів диф. рівняння. Подальшим узагальненням поняття аналітичних функцій обмеженого ℓ-індексу присвятили свої дослідження М.М. Шеремета, М.Т. Бордуляк, О.В. Кушнір, А.І. Бандура, О.Б. Скасків, Н.В. Петречко, В.Л.Цвігун та інші, які досліджували різні поняття обмеженості індексу для функцій, як у всьому багатовимірному комплексному просторі, так і в одиничному полікрузі та одиничній кулі з цього простору. Ф.Нурай і Р.Ф. Патерсон досліджували обмеженість звичайного індексу цілих векторно-значних функцій від двох змінних. Разом з цим, дослідження аналогів поняття обмеженого ℓ-індексу для вектор функцій від декількох змінних, як в класі цілих функцій, так і в класі аналітичних в одиничній кулі, повністю відсутні. У зв'язку з викладеним вище є безсумнівною актуальність проведених в дисертації досліджень властивостей аналітичних вектор-функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу від декількох змінних як в двовимірній кулі, так і у всьому комплексному векторному просторі.

2. *Наукова новизна результатів дисертаційної роботи.* У дисертації В.П.Бакси доводяться критерії обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних аналітичних вектор-функцій в одиничній двовимірній кулі в $\mathbb{C}^2$. Перший критерій є аналогом одновимірної теореми Фріке і описує локальне поводження частинних похідних вектор-функцій від двох змінних обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Власне, якісно виявляється, що як і у перелічених вище випадках, для того, щоб переконатися в обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних аналітичних вектор-функцій в одиничній двовимірній кулі в $\mathbb{C}^2$, достатньо, щоб умова з означення виконувалася лише для деякого скінченного набору похідних. Ця теорема відіграє ключову роль у всіх подальших побудовах теорії, подібно, як це відбувалося у всіх інших випадках, які описані вище. Далі доводяться ще ряд критеріїв обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних аналітичних вектор-функцій в одиничній двовимірній кулі в $\mathbb{C}^2$, зокрема, аналог одновимірного критерію У.Хеймана, який демонструє чудову ефективність при доведенні належності аналітичних розв'язків диф. рівнянь до класу функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу. Варто відзначити також, що отриманий у дисертації критерій в термінах локального поводження максимума модуля дає чудову властивість регулярного поводження аналітичних вектор-функцій в одиничній двовимірній кулі в $\mathbb{C}^2$ обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. В дисертації, крім всього іншого, отримано оцінки швидкості зростання аналітичних вектор-функцій в одиничній двовимірній кулі в $\mathbb{C}^2$ обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Це з огляду на сказане вище дає (як показують нескладні приклади) непокращувані оцінки швидкості зростання, а це в класі диф.рівнянь, для яких буде встановлено тим чи іншим способом (наприклад, за аналогом теореми Хеймана) обмеженість їхнього індексу, розв'язує у даному частковому випадку проблему Хеймана, про яку також написано нами вище. Нарешті, у дисертації аналог теореми Фріке перенесено на клас вектор-функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, що на даний момент є лише окремим випадком такого перенесення – наприклад, згадані вище Ф.Нурай і Р.Ф.Патерсон, розглядали лише цілі вектор-функції від двох змінних.

У дисертаційній роботі:

– вперше для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій отримано критерій обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних в термінах локально регулярного поводження максимума норми вектор функції на полікругах;

– вперше для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій отримано критерій обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних в термінах локально регулярного поводження часткових похідних вектор-функції, який є аналогом одновимірного критерію Фріке;

– вперше для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій отримано аналог одновимірного критерію Хеймана , який означенні поняття обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних дає змогу замінити перевірку базової нерівності для всіх перевіркою лише деякої скінченної їх кількості;

– вперше для аналітичних в одиничній двовимірній кулі вектор-функцій досліджено властивості степеневого розвинення аналітичних вектор-функцій у двовимірній кулі і доведено твердження про існування головного полінома у цьому розвиненні.

Усі отримані у дисертаційній роботі результати є новими, а їх доведення не викликають сумніву.

3. *Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів.* Дисертаційне дослідження виконано дисертантом самостійно. Основні теоретичні положення та розробки, що характеризують наукову новизну дослідження, теоретичне значення його результатів, одержані дисертантом особисто. Результати досліджень, які наведені у дисертаційній роботі та опубліковані у фахових наукових статтях, належать автору і є його науковим доробком.

Порушення академічної доброчесності відсутні.

4. *Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів та запропонованих автором вирішень, висновків, рекомендацій.* Достовірність результатів забезпечується строгими доведеннями теорем, які з достатньою повнотою наведені в дисертації. Автор захищає перелічені вище результати роботи.

5. *Повнота викладу результатів роботи в наукових публікаціях, зарахованих за темою дисертації.* Результати дисертаційного дослідження В.П. Бакси з достатньою повнотою (зокрема, всі основні результати роботи) опубліковані у 6 (з них 1 – одноосібно) статтях у фахових виданнях, в яких слід публікувати результати дисертації, зокрема 2 – у закордонних виданнях (одна з яких з баз даних SCOPUS і Web Of Science), 2 інші у виданнях з бази даних SCOPUS, 1 з яких одночасно входить в базу даних Web Of Science; 4 у тезах конференцій різного рівня.

6. *Зауваження.* Дисертаційну роботу оформлено на належному науковому рівні, проте наявна певна кількість описок і недоглядів. Зокрема,

- с.5^4 у реченні "З цієї теореми виводиться один критерій, який характеризує ..." слова "один" варто уникнути;
- у переліку умовних позначень варто вказати позначення одиничної кулі $\mathbb{B}^2$ в $\mathbb{C}^2$ та $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{C}^n$, натомість загальновідомі позначення множин натуральних, цілих та дійсних чисел можна було б опустити;
- с.15_{12} у позначенні z^K має бути "$z^K = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}$ " замість "$z^K = z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \ldots, z_n^{k_n}$ ";
- с.25_{11} має бути "$\sup\{n_0(a):\ a \in \mathbb{C}\}$" замість "$\sup\{n_0(a):\ a \in \mathbb{C} < +\infty\}$";
- с.27 два передостанніх речення останнього абзацу варто з'єднати сполучником "а" в одне, бо інакше друге не має змісту;
- с.31_8 у позначенні максимального члена має бути $R > 0$ замість $r > 0$, а також $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)|:\ z \in \mathbb{D}^n[z^0, R]\}$;
- фрази "Аналог теореми Хеймана" на с.32^9, "Головний поліном ряду" на с.32_9, "Локальне поводження максимуму модуля... " на с.38^1 та "Аналог теореми Хеймана ..." на с.38_2 виглядають як заголовки, тобто є зайвими;
- с.32_7 у формулі (1.3) в поліномі є зайвими подвійні дужки;
- с.33_3 слово "знайти" є зайвим;
- с.36_{11} у формулі (1.5) фігурна дужка має закриватись в другому рядку, а не в першому;
- с.38_{12} у формулюванні Теореми 2.6 має бути $R' < R'', |R''| < \beta$;
- с.43_{12} у прикладі 2.1 в описі бікруга присутня зайва дужка;
- с.74^{10} має бути "... системи диф. рівнянь в часткових похідних ...";
- с.74_4 має бути "... тобто, отримаємо нерівність (2.32) ...";
- с.87^{12} присутня зайва дужка, має бути $L(z, \omega) = (l_1(z, \omega), l_2(z, \omega))$;
- с.109^3 має бути $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}^2$ замість $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^2$;
- с.109_{13} має бути "... обмеженості індексу цілої функції..." , тобто прийменник "у" є зайвим.

Звісно, перераховані неточності в оформленні дисертації В. П. Бакси істотно не впливають на зміст і сприйняття тексту дисертації та не викликають сумнівів у правильності основних математичних здобутків дисертантки.

7. *Висновки.* З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота відповідає вимогам "Порядку проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 6 березня 2019 р. № 167 зі змінами, затвердженими постановою Кабінету Міністрів України від 21 жовтня 2020 р. № 979, а результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня її результатів (актуальність, новизна, наукова значущість), є важливим внеском у теорію аналітичних функцій. Основні результати дисертації, отримані автором дисертації самостійно і опубліковані у 6 (з них 1 – одноосібно) статтях у виданнях, у яких слід публікувати результати дисертації. Враховуючи, що В.П.Бакса у повному обсязі виконала навчальний план підготовки в аспірантурі, її дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, виконаним на сучасному науковому рівні, результати якого опубліковані та апробовані на наукових семінарах і конференціях, а порушення академічної доброчесності відсутні, вважаю, що **Бакса Віта Петрівна заслуговує** присудження наукового ступеня доктор філософії з галузі знань 11 "Математика та статистика" за спеціальністю 111 "Математика".

Офіційний опонент,
доцент, кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики
Національного університету "Львівська політехніка" **Т.М. Сало**

Підпис доцента Т.М. Сало засвідчую.
Вчений секретар Національного університету
"Львівська політехніка" **Р.Б. Брилинський**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
ЗКПО 02071010