Міністерство освіти і науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

Мединський Ігор Павлович

УДК 517.956.4

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів — 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка» Міністерства освіти і науки України і відділу математичної фізики Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
ІВАСИШЕН Степан Дмитрович,
професор кафедри математичної фізики
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник,
член-кореспондент НАН України,
КОЧУБЕЙ Анатолій Наумович,
Інститут математики НАН України, м. Київ,
завідувач відділу нелінійного аналізу.

доктор фізико-математичних наук, професор
ЛОПУШАНСЬКА Галина Петрівна,
Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,
професор кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь.

доктор фізико-математичних наук, доцент
ПРОЦАХ Наталія Петрівна,
Національний лісотехнічний університет України, м. Львів,
завідувачка кафедри математики і фізики.

Захист дисертації відбудеться 7 травня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий 5 квітня 2021 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради **Ю. Д. Головатий**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена побудові, дослідженню і застосуванню фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК) для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова другого та вищого порядків і $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем із виродженням на початковій гіперплощині.

Ці рівняння є природним узагальненням в різних напрямках параболічних за І. Г. Петровським рівнянь (систем рівнянь) теорії яких присвячені численні статті і монографії (А. Фрідмана (1968), С. Д. Ейдельмана (1964), О. А. Ладиженської, В. О. Солоннікова і Н. Н. Уральцевої(1967), С. Д. Івасишена (1990), С. Д. Ейдельмана і М. В. Житарашу (1992).

Добре відомі глибокі й повні результати в теорії задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь як лінійних, так і квазілінійних. При одержанні більшості з цих результатів істотну роль відіграє ФРЗК для таких рівнянь, його властивості, а також властивості породжуваних ним потенціалів.

ФРЗК за різних припущень на коефіцієнти системи, будувалась і досліджувалась: для рівномірно параболічних систем рівнянь — І. Г. Петровським, О. А. Ладиженською, С. Д. Ейдельманом, В. Погожельським, Д. Г. Аронсоном, Л. Н. Слободецьким і М. І. Матійчуком; для $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь — С. Д. Ейдельманом та С. Д. Івасишеним; для параболічних рівнянь з різними виродженнями й особливостями — С. Д. Івасишеним і С. Д. Ейдельманом разом з їхніми учнями Г. П. Малицькою, Л. М. Тичинською, Л. М. Андросовою, О. Г. Возняк, В. С. Дронем, Л. П. Березан, Г. С. Пасічник, І. П. Мединським.

Результати стосовно побудови й дослідження ФРЗК знайшли важливі різноманітні застосування до вивчення коректної розв'язності задачі Коші в широких класах функцій, одержання інтегрального зображення розв'язків задачі Коші, встановлення локальної розв'язності задачі Коші для нелінійних параболічних за Петровським систем рівнянь.

Класи рівнянь, які розглядаються у дисертації, є певними узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова. Так, ще в 1934 р. А. М. Колмогоров при вивченні рухів фізичної системи прийшов до рівняння дифузії з інерцією, яке є виродженим параболічним рівнянням і належить до класу ультрапараболічних рівнянь. Це рівняння є прототипом цілої сім'ї еволюційних рівнянь, які виникають у теорії дифузійних процесів, кінетичній теорії газу, при вивченні руху матеріальних частинок у полі сил, при дослідженні математичних моделей опціонів та ін.

Вивченням класичного рівняння дифузії з інерцією Колмогорова та його різноманітних узагальнень, у тому числі й для випадку рівнянь довільного порядку, займався цілий ряд математиків, серед яких M. Weber, А. М. Ільїн, І. М. Сонін, Я. С. Шатиро, Л. П. Купцов, С. Д. Ейдельман, Г. П. Малицька, Y. Kato, Л. М. Тичинська, С. Д. Івасишен, Л. М. Андросова, В. С. Дронь, О. Г. Возняк, італійці S. Polidoro, E. Lanconelli, M. Manfredini, A. Pascucci, M. Di Francesco та ін. Вони одержали важливі результати, що стосуються фундаментальних розв'язків і коректної розв'язності задачі Коші, а також властивостей розв'язків. Найповніші та найточніші результати при цьому одержані для рівнянь з коефіцієнтами, що не залежать від просторових змінних. Якщо коефіцієнти рівнянь залежать від усіх змінних, то ще досі точних і повних результатів не одержано. Зауважимо, що зважаючи на важливі застосування, дослідження рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова та ультрапараболічних рівнянь (лінійних і нелінійних) інтенсивно проводяться й іншими методами без побудови ФРЗК (див. монографії В. І. Богачова, М. В. Крилова, М. Рьокнера і С. В. Шапошнікова (2013), Н. П. Процах і Б. Й. Пташника (2017)).

У відомій монографії С. Д. Ейдельмана, С. Д. Івасишена і А. Н. Кочубея (2004) для вироджених рівнянь типу Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, отримано результати, які стосуються побудови некласичних ФРЗК, тобто розв'язків, які мають старші похідні лише за основними змінними. Природною є потреба у побудові класичних ФРЗК для рівнянь з цих класів, детальному вивченні їх властивостей та властивостей породжуваних ними потенціалів і дослідженні коректної розв'язності задачі Коші в широких класах вагових функцій. Це потребує не тільки знаходження відповідних умов на коефіцієнти вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, але й розробки і вдосконалення методів побудови і дослідження ФРЗК.

В дисертації також розглядається клас $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем і виродженням на початковій гіперплощині. Рівняння з виродженням за часовою змінною вивчались А. С. Калашниковим, В. П. Глушком, А. В. Глушаком, С. Д. Шмулевичем та ін. Параболічні рівняння з виродженням на початковій гіперплощині вивчались у працях С. Д. Івасишена, О. Г. Возняк, І. П. Мединського. У цих працях побудовано і досліджено ФРЗК для такого рівняння і встановлено оцінки побудованого ФРЗК, його похідних та приростів цих похідних. Одержані оцінки ФРЗК використані для вивчення об'ємних потенціалів та інтегралів Пуассона, ядрами яких є ФРЗК. Ними також побудована шаудерова теорія розв'язків параболічних систем з виродженням, зокрема доведено теореми про підвищення гладкості таких розв'язків. Не повністю досліджувалась і залежність класів розв'язків систем від поведінки функцій, що спричиняють виродження. Крім того, перелічених результатів, одержаних вищезгаданими авторами для лінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині, є ще не досить для проведення дослідження локальної розв'язності квазілінійних систем з виродженням, аналогічного тому, яке проводилось для невироджених систем. Природно доповнити ці результати аналогічними результатами для $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині. З вищенаведеного огляду праць випливають такі висновки та актуальні проблеми, вирішенню яких присвячена дисертаційна робота:

1) для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова в працях інших авторів немає повністю обґрунтованих результатів, що стосуються існування, точних оцінок і властивостей класичних ФРЗК; тому актуальною є проблема про знаходження умов на коефіцієнти рівнянь, за яких існують класичні ФРЗК з потрібними природними властивостями, в тому числі з точними оцінками, при цьому передбачається детальна розробка методів повного обґрунтування результатів;

2) для $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем рівнянь і виродженням на початковій гіперплощині у відомих працях інших авторів відсутнє детальне дослідження властивостей ФРЗК для кожного із типів вироджень на початковій гіперплощині; в цьому полягає друга невирішена проблема;

3) третьою проблемою є знаходження різноманітних застосувань для рівнянь з класів, що розглядаються у роботі , хоча би аналогічних до застосувань ФРЗК для невироджених параболічних рівнянь. .

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Основу дисертаційної роботи складають результати досліджень, виконаних автором у межах планових науково-дослідних робіт Національного університету «Львівська політехніка» та робіт, які виконувалися у відділі математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, зокрема:

«Дослідження сучасних проблем аналізу, диференціальних рівнянь та теорії імовірностей» (2007–2012 рр., номер державної реєстрації 0107U009514);

«Побудова і дослідження методів розв'язування задач прикладної математики та інформатики» (2013–2017 рр., номер державної реєстрації 0113U005296);

«Розробка математичних моделей і методів їх чисельної реалізації для опису природничих і суспільних явищ» (2018–2022 рр., номер державної реєстрації 0113U005296);

«Дослідження розв'язності та побудова розв'язків некласичних крайових задач для лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними» (2001–2005 рр., номер державної реєстрації 0102U00452);

«Розвиток методів дослідження ультрапараболічних рівнянь і варіаційних нерівностей та некласичних крайових задач для диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними» (2006–2010 рр., номер державної реєстрації 0106U000595);

«Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач для некласичних еволюційних рівнянь» (2011–2015 рр., номер державної реєстрації 0110U004817);

«Розвиток аналітичних, функціональних та теоретико-числових методів дослідження некласичних крайових задач для лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними» (2016–2020 рр., номер державної реєстрації 0115U007252).

Мета і завдання дослідження. *Метою роботи* є побудова і дослідження властивостей класичних ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова і $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем із виродженням на початковій гіперплощині, а також застосування класичних ФРЗК до дослідження коректної розв'язності відповідних задач Коші для рівнянь і систем із розглядуваних класів.

Безпосередніми *завданнями дослідження* є :

• знаходження умов на коефіцієнти вироджених параболічних рівнянь з розглядуваних класів, за яких існує класичний і некласичний ФРЗК;

• розроблення нового підходу до побудови і дослідження ФРЗК задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з цих класів, який ґрунтується на поетапному «розмороженні» коефіцієнтів;

• вдосконалення методики дослідження властивостей параболічних потенціалів, ядром яких є відповідний фундаментальний розв'язок;

• побудова і детальне дослідження властивостей ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь, зокрема одержання точних оцінок ФРЗК і його похідних (у тому числі оцінок приростів похідних);

• дослідження властивостей параболічних потенціалів, ядром яких є відповідний фундаментальний розв'язок в широких класах вагових функцій;

• отримання інтегральних зображень розв'язків задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з досліджуваних класів;

• побудова і дослідження властивостей ФРЗК для рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова деякого виродженого дифузійного процесу;

• по можливості точніше описання класів існування, єдиності і коректної розв'язності задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з таких класів;

• доведення теорем про локальну (глобальну) розв'язність задачі Коші для відповідних квазілінійних рівнянь типу Колмогорова;

• побудова і дослідження властивостей ФРЗК та породжуваних ним потенціалів для $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем із виродженням на початковій гіперплощині;

• встановлення теорем про коректну розв'язність таких систем;

• доведення теорем про локальну розв'язність задачі Коші для відповідних квазілінійних $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем із виродженням на початковій гіперплощині.

Об'єкт дослідження: задача Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колморова і $\overrightarrow{2b}$-параболічних за Ейдельманом систем із виродженням на початковій гіперплощині.

Предмет дослідження: побудова ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь, та їх застосування до встановлення коректної розв'язності задачі Коші.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у теорії рівнянь з частинними похідними та у математичній фізиці при подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії випадкових процесів при вивченні дифузійних процесів, перехідні імовірності яких є фундаментальними розв'язками відповідних вироджених параболічних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Усі викладені в дисертації результати отримані автором самостійно. У роботах із співавторами автору дисертації формулювання і доведення основних результатів. У всіх роботах у співавторстві з науковим консультантом професором Івасишеним С. Д. йому належить визначення загального плану досліджень і обговорення результатів. О. Г. Возняк в [7] належить доведення леми 1, а в [17] — леми 3. У праці [8] Г. С. Пасічник належать результати, що стосуються рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами, а В. С. Дроню в [15] — доведення співвідношень між відстанями d, d_1 і d_2.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на таких наукових конференціях і семінарах: International Conference on Functional Analysis and its Applications. Dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach (May 28-31, Lviv, Ukraine, 2002), міжнар. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"(Київ,6-9 червня 2005р.), VI міжнар. наук. конф." Математичні проблеми механіки неоднорідних структур" (26-29 травня 2003, Львів, Україна), міжнар. наук. конф. "Шості боголюбовські читання" (Київ, 2003), III Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" (9-12 вересня 2003 року, Івано-Франківськ), міжнар. наук. конф. з диференціальних рівнянь, присвячена 100 річниці з дня народження Я. Б. Лопатинського (12-17 вересня 2006 р., Львів), міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування" (11-14 жовтня, 2006 р., Чернівці), міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробагатька (24-28 вересня 2007, Дрогобич, Україна), XII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (15-17 травня 2008 р., Київ, Україна), IV Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" (10-12 вересня 2008 р., Івано-Франківськ, Україна), Intern. conf. Stochastic analysis and random dynamics. (June 14-20, 2009 Lviv, Ukraine), XIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (13 – 15 травня, 2010 р., Київ), Third Intern. Conf. for Young Mathematicians on Differential Equations and Appliccations dedicated to Yaroslav Lopatynsky, (3 – 6 November, 2010, Lviv), міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, Україна, 19-23 вересня 2011), Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжнар. наук. конф., присвячена 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка (8-10 червня 2011 р., Київ), Intern. Conf. Dedicated to the 120th anniversary of Stepan Banach (17–21.09.2012, Lviv), Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжн. наук. конф. присвяченої 70-річчю проф. В. В. Маринця (26–29 вересня 2012, Ужгород), Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: V Міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 2012), XIV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (19–21.04.2012, Київ, Україна), Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці: Всеукр. наук. конф., присвячена 50-річчю кафедри прикладної математики Чернівець. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича (11–23 червня 2012, Чернівці, Україна), Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики" (21-25 травня 2013, Львів, Україна), V Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" (19-21 вересня 2013 р., Івано-Франківськ), Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: VI Міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 2014), XV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (15–17.05.2014, Київ, Україна), IV Міжнар. ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (30.06–05.07.2014, Чернівці, Україна), XVI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (14–15.05.2015, Київ, Україна), Наук. конф., присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (1–4.07.2015, Чернівці), Intern. V. Skorobohatko Mathemat. Conf. (August 25–28, 2015, Drogobych, Ukraine), Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: VII Міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 2016), XVII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (19–20.05.2016, Київ, Україна), Intern. Conf. On Differential Equations Dedicated to the 110 Anniversary of Ya.B.Lopatynsky (September 20- 24, 2016, Lviv, Ukraine), Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"присвячена 80-річчю від дня народження професора В. І. Фодчука (1936-1992) (28–30.09.2016, Чернівці, Україна), XVIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (7–10.10.2017, Луцк–Київ, Україна), міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"(22-25 травня 2018, Львів, Україна), міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівець. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича (17–19.09.2018, Чернівці, Україна), Шоста Всеукр. конф. ім. Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу"(26–28.09.2018, Івано-Франківськ – Микуличин), Intern. Conf. "Infinite Dimensional Analysis and Topology"Dedicated to the 70-th Anniversary of Professor Oleh Lopushansky (October 15-20, 2019, Ivano-Frankivsk, Ukraine), Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування присвячена 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана, (16–19 верес. 2020 р., Чернівці), XI Intern. Skorobohatko Math. Conf. (October 26–30, 2020, Lviv), наукових семінарах Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача, засіданні математичної комісії НТШ (Львів, 19 березня 2019 р.), відкритих науково-технічних конференціях Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка» (2014 – 2020 рр.), наукових семінарах кафедри прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка"(керівник: д. ф.-м. н., проф. П.П. Костробій 2002–2020 роки), Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: д. ф.-м. н., проф. М.М. Бокало, д. ф.-м. н., проф. П.І. Каленюк, 2014 – 2020 рр.), науковому семінарі кафедри математичної фізики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"(керівники: д. ф.-м. н., проф. С.Д. Івасишен, д. ф.-м. н., доц. В.М. Горбачук, 17 лютого 2021 р.), Київському міському семінарі з функціонального аналізу (керівники: О. В. Антонюк, А. Н. Кочубей, В. А. Михайлець, В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко, 17 лютого 2021 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в періодичних фахових виданнях [1–18]. Статті [10, 15, 18] та переклади англійською мовою статей [9, 11, 12] опубліковано у виданнях, що включені до наукометричної бази даних Scopus, причому переклади статей [9, 11, 12] опубліковані у виданні, яке віднесено до третього квартиля, а отже, кожна з них зараховується як дві публікації. Результати дисертації додатково висвітлено в п'яти статтях [19–23] в інших наукових виданнях і в 42 тезах доповідей і матеріалах наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел і чотирьох додатків. Загальний обсяг роботи складає 409 сторінок, а основний текст — 288 сторінок. Список використаних джерел містить 247 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У ***вступі*** обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання та методи дослідження, розкрито наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведено дані про апробацію результатів і викладено зміст основної частини дисертації.

Розділ 1 є допоміжним. У ньому дається означення класів рівнянь, які вивчаються в дисертації, наводиться означення ФРЗК, формулюються й аналізуються умови на коефіцієнти рівнянь, описується класичний метод Леві побудови й дослідження ФРЗК, а також його модифікації, які використовуються у випадку вироджених параболічних рівнянь, наводиться огляд літературних джерел, в яких вивчались рівняння з означених класів, використовувався метод Леві, досліджувались і застосовувались властивості ФРЗК.

Нехай N і n — задані натуральні числа, T — задане додатне число. Для $j \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{N}_j$ позначатимемо множину $\{1,\ldots,j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$. Розглядатимемо одновимірну змінну t і n-вимірну змінну $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, при цьому t і $x_1, \ldots, x_n$ будемо інтерпретувати відповідно як часову і просторові змінні. У випадку вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторових змінних будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $|k| := \sum\limits_{j=1}^{3} |k_j|$, $|k_j| := \sum\limits_{l=1}^{n_j} k_{jl}$, $j \in \mathbb{N}_3$; $\Pi_H := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | \, t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$. Змінні $t, x_{11}, \ldots, x_{1n_1}$ називатимемо основними, а решта просторових змінних — змінними груп виродження. Розглянемо рівняння вигляду

$$L_1^{(t,x)} u(t,x) := S - A_1(t, x, \partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}}, \qquad (2)$$

$$A_1(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x). \qquad (3)$$

У рівнянні (1) $f:\Pi_{[0,T]}\to\mathbb{C}$ — відома і $u:\Pi_{[0,T]}\to\mathbb{C}$ — шукана функції. Коефіцієнти a_{jl}, a_j, $\{j,l\}\subset\mathbb{N}_{n_1}$, і a_0 диференціального виразу (3) є, взагалі кажучи, комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$. Через $\mathcal{A}_1$ позначатимемо множину коефіцієнтів виразу (3), тобто $\mathcal{A}_1 := \{a_{jl},\, a_j,\, \{j,l\}\subset \mathbb{N}_{n_1},\, a_0\}$.

Означення 1. Рівняння (1) називають *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова другого порядку (ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова)*, якщо диференціальний вираз $\partial_t - A_1(t,x,\partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським за основними змінними t, x_1 з вагою 2 в області $\Pi_{[0,T]}$. Тобто існує така стала $\delta>0$, що для всіх $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11},\dots,\sigma_{1n_1})\in\mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re}\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t,x)\sigma_j\sigma_l \ge \delta|\sigma_1|^2. \qquad (4)$$

Клас так означених рівнянь позначатимемо через $\boldsymbol{K_1}$.

Означимо клас $\boldsymbol{K_2}$ — клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку.

Нехай b — задане натуральне число, $L_2^{(t,x)} := S - A_2(t,x,\partial_{x_1})$, де диференціальний вираз S визначається формулою (2), а диференціальний вираз A_2 — такою формулою:

$$A_2(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{|k_1|\le 2b} a_{k_1}(t,x)\partial_{x_1}^{k_1}. \qquad (5)$$

Розглянемо рівняння

$$L_2^{(t,x)}u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (6)$$

де $f:\Pi_{[0,T]}\to\mathbb{C}$ — відома і $u:\Pi_{[0,T]}\to\mathbb{C}$ — шукана функції. Коефіцієнти диференціального виразу (5) a_{k_1}, $|k_1|\le 2b$, є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$. Множину цих коефіцієнтів позначатимемо через $\mathcal{A}_2$, так що $\mathcal{A}_2 := \{a_{k_1},\, |k_1|\le 2b\}$.

Означення 2. Рівняння (6) називають *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова довільного порядку* $2b$, якщо диференціальний вираз $\partial_t - A_2(t,x,\partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським з вагою $2b$ за основними змінними t, x_1 в області $\Pi_{[0,T]}$. Тобто існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1} \leq -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b}, \tag{7}$$

в якому i — уявна одиниця.

Наступним є клас $\boldsymbol{K_3}$ — клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова другого порядку із виродженням на початковій гіперплощині. Нехай α і β —неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, які задовольняють такі умови: $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β— монотонно неспадна функція. Розглядається рівняння вигляду

$$L_3^{(t,x)}u(t,x) := \big(\alpha(t)\partial_t -$$

$$-\beta(t) \ \big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} + \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} \ \big) + a_0(t,x)\big)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{8}$$

де як і вище $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ —відома і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ —шукана функції. Коефіцієнти a_{jl}, a_j, $\{j,l\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, і a_0, є комплекснозначними функціями в $\Pi_{[0,T]}$. Множину цих коефіцієнтів позначатимемо через $\mathcal{A}_3$. Зауважимо, що $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1$.

Означення 3. Рівняння (8) називають *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова другого порядку (ультрапараболічним рівнянням) із виродженням на початковій гіперплощині*, якщо диференціальний вираз $\partial_t - A_1(t,x,\partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським за основними змінними t, x_1 з вагою 2 в області $\Pi_{[0,T]}$.

Перейдемо до означення рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$— класу параболічних рівнянь векторного порядку із виродженням на початковій гіперплощині. Особливість цього класу полягає в тому, що диференціювання за просторовими змінними x_j, $j \in \mathbb{N}_n$, має, взагалі кажучи, різну вагу $1/(2b_j)$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$, відносно диференціювання за змінною t. Тут $b_1, \ldots, b_n$ —задані числа з $\mathbb{N}$, а b —найменше спільне кратне цих чисел. Через $\overrightarrow{2b}$ позначатимемо вектор $(2b_1, \ldots, 2b_n)$, $m_j := b/b_j$, $j \in \mathbb{N}_n$, $\|k\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j k_j$.

Розглянемо рівняння вигляду

$$L_4^{(t,x)}u(t,x) := \big(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t) \sum_{0<\|k\|\leq 2b} a_k(t,x)\partial_x^k - a_0(t,x)\big)u(t,x) =$$

$$= f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{9}$$

де I — одинична матриця порядку N; $a_k : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{NN}$, $\|k\| \le 2b$, $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ — відомі і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ — шукана функції, $\mathbb{C}_{N1}$ і $\mathbb{C}_{NN}$ — сукупності матриць розміру відповідно $N \times 1$ і $N \times N$, елементами яких є комплексні числа; α і β— такі як вище. При $N > 1$ рівняння (9) є векторним. Всі змінні є основними, тобто змінна x складається з однієї групи і формально $n_1 = n, n_2 = n_3 = 0$. Для рівняння (9) $\mathcal{A}_4 : \{= a_k \big| \|k\| \le 2b\}$.

Означення 4. Рівняння (9) називається *параболічним рівнянням векторного порядку $\overrightarrow{2b}$ з виродженням на початковій гіперплощині*, якщо матричний диференціальний вираз $I\partial_t - \sum\limits_{\|k\| \le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k$ є рівномірно параболічним у сенсі Ейдельмана векторного порядку $\overrightarrow{2b}$ в області $\Pi_{[0,T]}$. Тобто існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma := (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ λ-корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ рівняння
$\det(\lambda I - \sum\limits_{\|k\|=2b} a_k(t,x)(i\sigma)^k) = 0$ задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t,x,\sigma) \le -\delta \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j}, \ j \in \mathbb{N}_N. \tag{10}$$

Рівняння з класів $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$ поділяються за типом виродження на початковій гіперплощині. Тип виродження визначається залежно від того, які значення скінченні чи нескінченні при $t = T$ і $\tau = 0$ набувають функції $A(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$ та $B(t,\tau) := \int\limits_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta, \ 0 \le \tau \le t \le T.$

Виродження називають *слабким*, якщо $A(T,0) < +\infty$; *сильним*, якщо $A(T,0) = +\infty$, $B(T,0) < +\infty$ і *дуже сильним*, якщо $A(T,0) = +\infty$, $B(T,0) = +\infty$.

Нехай для $y := (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^n$ $x^{(l)}(y)$ дорівнює відповідно y для $l = 0$, (x_1, y'), $y' := (y_1, y_2)$ для $l = 1$, (x_1, x_2, y_3) для $l = 2$ і x для $l = 3$.

Означення 5. Рівняння $L_j^{(t,x^{(l)}(y))} u(t,x) = f(t,x)$ з класу $\boldsymbol{K_j}$, $j \in \mathbb{N}_4$, $l \in \mathbb{Z}_3$, називатимемо *допоміжним*, якщо коефіцієнти цього рівняння залежать від параметрів y_1, y_2 і y_3. Тобто при $l \in \mathbb{Z}_2$ рівняння є допоміжним, а при $l = 3$ — основним.

Множину коефіцієнтів з $\mathcal{A}_l$, які стоять при старших похідних рівняння з відповідного класу $\boldsymbol{K_l}$, позначатимемо через $\mathcal{A}_l^0$, $l \in \mathbb{N}_4$. Зауважимо, що до $\mathcal{A}_4^0$ включатимемо коефіцієнт a_0.

Наведемо умови на коефіцієнти рівнянь з означених вище класів, які використовуватимуться для побудови й дослідження властивостей фундаментальних розв'язків, а також властивостей потенціалів, ядрами яких є ці фундаментальні розв'язки.

Будемо користуватись ще такими позначеннями:

$\Delta_x^z f(\cdot,x,\cdot) := f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,z,\cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot,x,\cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot,x,\cdot)$, $s \in \mathbb{N}_3$, $z^{(0)} := x$, $z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3)$, $z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3)$; $X(t) := (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$, $X^{(1)}(t) := (\lambda_1, X_2(t), X_3(t))$, $X^{(2)}(t) := (\lambda_1, \lambda_2, X_3(t))$, $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1$, $X_3(t) := x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1'$, $t \in \mathbb{R}, \hat{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3})$, $x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3})$; $\hat{m}_j := j - 1/2, j \in \mathbb{N}_3$, $M := \sum\limits_{j=1}^{3} \hat{m}_j n_j$; $h_l := (\delta_{l1} + \delta_{l2})h + \delta_{l3} B(h,\tau)$, $l \in \mathbb{N}_3$, δ_{lj}— символ Кронекера; $\tau_l := 0$, якщо $l \in \mathbb{N}_2$, $\tau_l := \tau$, якщо $l = 3$; $p_0(x,x') := (\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - x_j'|^{2/m_j})^{1/2}$, $p(t,x;t',x') := \left((A(t,\tau))^{1/b} + (p_0(x,x'))^2\right)^{1/2}$, $\{(t,x),(t',x')\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Аналогічно до $X(t)$ будуються інші параметричні точки $Y(t), \Lambda(t)$ за відповідними точками y і λ.

Для множин коефіцієнтів $\mathcal{A}_l$ рівнянь з класу $\boldsymbol{K_l}$, $l \in \mathbb{N}_4$, використовуватимемо такі умови:

(A_{l1}) коефіцієнти є обмеженими й неперервними за $t \in [0,T]$ комплекснозначними функціями (при цьому неперервність коефіцієнтів з $\mathcal{A}_4^0$ рівномірна щодо $x \in \mathbb{R}^n$);

(A_{l2}) функції з $\mathcal{A}_l$ є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists\, H_{l1} > 0 \;\exists\, \gamma_1 \in (0,1] \;\forall \{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)| \le H_{l1}|x_1 - z_1|^{\gamma_1}, \; a \in \mathcal{A}_l, \; l \in \mathbb{N}_3; \tag{11}$$

$$\exists\, H_{l2} > 0 \;\exists\, \gamma_2 \in (1/3,1] \;\forall \{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]} \;\forall h \in [\tau_l, T] :$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \le H_{l2}(h_l^{\hat{m}_2\gamma_2} + |X_2(h_l) - z_2|^{\gamma_2}), \; a \in \mathcal{A}_l, \; l \in \mathbb{N}_3; \tag{12}$$

$$\exists\, H_{l3} > 0 \;\exists\, \gamma_3 \in (3/5,1] \;\forall \{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]} \;\forall h \in [\tau_l, T] :$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)| \le H_{l3}(h_l^{\hat{m}_3\gamma_3} + |X_3(h_l) - z_3|^{\gamma_3}), \; a \in \mathcal{A}_l, \; l \in \mathbb{N}_3; \tag{13}$$

$$\exists\, H_{44} > 0 \;\exists\, \gamma_4 \in (0,1] \;\forall \{(t,x),(t,z)\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$|\Delta_x^z a(t,x)| \le H_{44}(p_0(x,z))^{\gamma_4}, \quad a \in \mathcal{A}_4; \tag{14}$$

(A_{l3}) коефіцієнти з $\mathcal{A}_l$, $l \in \mathbb{N}_4$, мають обмежені й неперервні похідні того порядку, біля яких вони стоять;

(A_{l4}) похідні з умови A_{l3} є гельдеровими за просторовими змінними в сенсі A_{l2};

(A_{l5}) справджуються нерівності

$$\exists H_{l5} > 0 \forall \{(t,x),(t,z^{(s)}),(t,\xi^{(r)}\} \subset \Pi_{[0,T]}, \{r,s\} \subset \mathbb{N}_3,\, r < s, \forall h_l \in [\tau_l, T] :$$

$$|\Delta_{x_r}^{\xi_r} \Delta_{x_s}^{z_s} a(t,x)| \le H_{l5}((h_l')^{\hat{m}_2\gamma_2} + |X_r(h_l') - \xi_2|^{\gamma_2})(h_s^{\hat{m}_s\gamma_s} + |X_s(h_l) - z_s|^{\gamma_s}),$$

$$a \in \mathcal{A}_l,\ l \in \mathbb{N}_3,\ h_l' = 0, \text{якщо } r = 1; \qquad (15)$$

$$\exists H_6 > 0\ \forall \{(t,x),(t',x)\} \subset \Pi_{[0,T]},\ t' > t :$$

$$|\Delta_t^{t'} a(t,x) \le (A(t',t))^{\gamma_4/(2b)},\ a \in \mathcal{A}_4; \qquad (16)$$

$$\exists\, H_7 > 0\ \exists \gamma_0 \in (0,1]\ \forall t \in [0,T] :\ \int\limits_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \le H_7. \qquad (17)$$

З умов (12) і (13) при $h_l = \tau_l$, $l \in \mathbb{N}_3$, випливають звичайні умови Гельдера за змінними виродження x_2 і x_3. Наведемо достатні умови виконання умов (12) і (13). Покладемо $T_l := T$, якщо $l \in \mathbb{N}_2$, і $T_3 := B(T,\tau)$, $\tau \in [0,T)$.

Лема 1. *Нехай a — неперервна й обмежена функція в $\Pi_{[0,T]}$. Для неї правильні такі твердження:*

а) якщо виконується умова

$$\exists\, C_{l1} > 0\ \exists \beta_1 \in (1/3, 1]\ \forall \{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \le C_{l1}(T_l^{\hat{m}_1} + |\hat{x}_1|)^{-\beta_1} |x_2 - z_2|^{\beta_1},\ l \in \mathbb{N}_3, \qquad (18)$$

то справджується нерівність (12) *з* $\gamma_2 = \beta_1/\hat{m}_2$;

б) якщо виконується умова

$$\exists\, C_{l2} > 0\ \exists \beta_2 \in (9/10, 1]\ \forall \{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)| \le C_{l2}(T_l^{\hat{m}_1} + 2^{-1}T_l|x_1'| + |x_2'|)^{-\beta_2} |x_3 - z_3|^{\beta_2},\ l \in \mathbb{N}_3, \qquad (19)$$

то справджується нерівність (13) *з* $\gamma_3 = \beta_2/\hat{m}_2$.

З наведеної леми випливає, що умови (12) і (13) не є, взагалі кажучи, еквівалентними (навіть локально) відповідним умовам Гельдера за просторовими змінними груп виродження. Але ці умови дозволяють повніше використати переваги поетапного методу Леві побудови ФРЗК, який описано в підрозділі 1.3.

Наведемо означення ФРЗК. Позначимо через Q деяку множину точок (t,x) простору $\mathbb{R}^{n+1}$. Нехай $L_N(t,x,\partial_t,\partial_x)$ — лінійний диференціальний вираз, скалярний при $N=1$ і матричний розміру $N\times N$ при $N>1$, з комплеснозначними коефіцієнтами, які залежать від t і x та визначені в Q.

Розглянемо рівняння вигляду

$$L_N(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\tag{20}$$

де $f:Q\to\mathbb{C}_{N1}$ — відома, а $u:Q\to\mathbb{C}_{N1}$ — невідома функції. Припускатимемо, що диференціальний вираз $L_N(t,x,\partial_t,\partial_x)$ з (20) є рівномірно параболічним в $\Pi_{[0,T]}$ у сенсі Петровського чи Ейдельмана.

Означення 6. *ФРЗК для рівняння* (20) *або для оператора* $L_N(t,x,\partial_t,\partial_x)$ називають функцію

$$Z(\cdot,\cdot;\tau,\xi):\Pi_{(\tau,T]}\to\mathbb{C}_{NN},\tag{21}$$

яка залежить від параметричної точки $(\tau,\xi)\in\Pi_{[0,T)}$ і таку, що формула

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]},\tag{22}$$

визначає розв'язок рівняння

$$L_N(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]}.\tag{23}$$

в шарі $\Pi_{(\tau,T]}$, що задовольняє початкову умову

$$u\big|_{t=\tau}=\varphi\tag{24}$$

для будь-якого $\tau\in[0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Означення 7. *ФРЗК Z* називають *класичним* , якщо функція Z має неперервні й обмежені похідні, що входять в диференціальний вираз $L_N(t,x,\partial_t,\partial_x)$.

Побудова і дослідження класичних ФРЗК у роботі здійснюється за допомогою поетапного методу Леві, який розроблений автором.

Кількість етапів побудови ФРЗК залежить від кількості груп просторових змінних. На наступному етапі побудови ФРЗК за параметрикс беремо ФРЗК, побудований на попередньому етапі. Для ФРЗК використовуватимемо позначення $\mathbb{Z}_{l,\,j-1},\ l \in \mathbb{N}_3,\ j \in \mathbb{N}_4$. Перший індекс вказує на номер класу, другий індекс — на етап побудови ФРЗК. Відповідно параметрикс на j-тому етапі позначатимемо символом G_{lj} , породжуваний ним об'ємний потенціал— символом W_{lj}, а його густину —символом Q_{lj}. Процедура для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_l}, l \in \mathbb{N}_3$, однакова.

Результатом кожного j-того етапу є твердження про існування відповідного класичного ФРЗК Z_{lj}, $l \in \mathbb{N}_3$, $j \in \mathbb{Z}_4$, встановлення точних оцінок похідних від ФРЗК, інтегралів від похідних ФРЗК та їх приростів. Проведення цих досліджень істотно залежить від всебічного вивчення властивостей об'ємних потенціалів W_{lj}, $\{l, j\} \subset \mathbb{N}_3$. Ядром потенціалу є відповідний параметрикс G_{lj}, а густиною — відповідна функція $Q_{lj}, \{j, l\} \subset \mathbb{N}_3$. Для густин Q_{lj} встановлюються певні властивості та оцінки, які гарантують існування похідних від об'ємних потенціалів, їх точних оцінок та оцінок приростів таких похідних за просторовими змінними.

Реалізація такого підходу з викладом основних його результатів для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ наводиться відповідно в розділах 3, 4 і 5 дисертації.

У ***другому*** розділі наводяться означення і властивості оцінювальних функцій та деяких інтегралів, що містять оцінювальні функції; леми про існування та оцінки розв'язків деяких інтегральних рівнянь; леми про властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів; теореми про властивості й оцінки ФРЗК для допоміжних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$.

Для кожного класу $\boldsymbol{K_l}$, $l \in \mathbb{N}_4$, використовуватимемо відповідну оцінювальну функцію $E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi)$, $E_c^{(2)}(t-\tau, x, \xi)$, $E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi)$ і $E_c^{(4)}(t, \tau, x-\xi)$, де c—додатна стала, $0 \le \tau < t \le T$, $\quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$. Уведемо функції

$$E_c^{q,j}(t, z_j) := \exp\{-ct^{1-qj}|z_j|^q\}, c > 0, t > 0, q > 0, z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, j \in \mathbb{N}_3; \quad (25)$$

$$E_c^{q,n}(t, x) := \exp\{-ct^{1-q}|x|^q\}, c > 0, t > 0, q > 0, x \in \mathbb{R}^n; \quad (26)$$

$$E_c^2(t, x, \xi) := \prod_{j=1}^{3} E_c^{2,j}(t, X_j(t) - \xi_j), c > 0, t > 0, q > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (27)$$

$$E_c^n(t, x-\xi) := \prod_{j=1}^{n} E_c^{q_j,n}(t, x-\xi), c > 0, t > 0, q_j > 0, j \in \mathbb{N}_n, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (28)$$

За допомогою (27) і (28) означимо такі оцінювальні функції:

$$E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) := E_c^2(t-\tau,x,\xi); \tag{29}$$

$$E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi) := E_c^2(B(t,\tau),x,\xi); \tag{30}$$

$$E_c^{(4)}(t,\tau,x-\xi) := E_c^n(B(t,\tau),x-\xi), \tag{31}$$

де $0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$. У (30) і (31) $\tau > 0$, якщо $B(t,0) = \infty$.

Оцінювальна функція $E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi)$ має складнішу структуру. За допомогою функції (25) означимо ще такі оцінювальні функції:

$$E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^{q,1}(t,X_1(t)-\xi_1),$$

$$E_c^{(2,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \prod_{j=1}^{2} E_c^{q,j}(t,X_j(t)-\xi_j),$$

$$E_c^{(2,3)}(t,x,\xi) := \prod_{j=1}^{3} E_c^{q,j}(t,X_j(t)-\xi_j),$$

$$t>0, \quad \{x_j,\xi_j\} \subset \mathbb{R}^{n_j}, \ \ j \in \mathbb{N}_3, \ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{32}$$

$$a_j^{(\chi,\hat{C})}(t) := (\hat{C}\Gamma(\chi)t^{\chi})^j(\Gamma(j\chi+1))^{-1}, t>0, \hat{C}>0, \chi \in (0,1), j \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

(у формулі (33) $\Gamma(\,\cdot\,)$ —ґамма-функція Ейлера); (33)

$$E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1),$$

$$F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\hat{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1), t>0, \{x_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \tag{34}$$

$$E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\hat{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(2,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$t>0, \{x_j,\xi_j\} \subset \mathbb{R}^{n_j}, j \in \mathbb{N}_2; \tag{35}$$

$$E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi) := E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi),$$

$$F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\hat{C})}(t) E_{c\delta^j}^{(2,3)}(t,x,\xi), t>0, \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}^n, \tag{36}$$

(у формулах (34)– (36) $\hat{C}$ і δ — деякі додатні сталі, причому $\delta < 1$). Отже,

$$E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi) := E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t-\tau,x,\xi), 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{37}$$

Розглянемо функцію

$$E_c^{(0)}(t,x,\xi) := \exp\{-c[(4t)^{-1}|x_1-\xi_1|^2 + 3t^{-3}|x_2+2^{-1}t(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2|^2+$$

$$+180t^{-5}|x_3+2^{-1}t(x_2'+\xi_2')+(12)^{-1}t^2(x_1'-\xi_1')-\xi_3|^2]\}, t>0, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{38}$$

Зауважимо, що функція $E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi),\ 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, з точністю до сталого множника визначає ФРЗК для модельного рівняння з класу $\boldsymbol{K_1}$ (тобто рівняння зі сталими коефіцієнтами). Аналогічно функція $E_c^{(0)}(B(t,\tau),x,\xi),\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, визначає ФРЗК для модельного рівняння з класу $\boldsymbol{K_3}$.

Властивості оцінювальних функцій відіграють важливу роль у дослідженнях. Основні властивості оцінювальних функцій та деяких інтегралів від оцінювальних функцій, які залежать від параметричних точок, наведено у **підрозділі 2.1.**

Наведемо основні результати **підрозділу 2.2.**

При застосуванні методу Леві до побудови ФРЗК для рівнянь із класів $\boldsymbol{K_1}$ і $\boldsymbol{K_2}$ виникають інтегральні рівняння другого роду вольтеррівського типу вигляду

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\tau,\xi)u(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \tag{39}$$

або

$$u(t,x) = f(t,x) + \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\tau,\xi)u(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \tag{40}$$

якщо рівняння належать до класів $\boldsymbol{K_3}$, $\boldsymbol{K_4}$, тобто мають виродження на початковій гіперплощині.

Ядром інтегральних рівнянь (39), (40) є неперервна функція

$$K : P^0_{[t_0,T]} \to \mathbb{C}, P^0_{[t_0,T]} := \left\{ (t, x; \tau, \xi) \in \left(\Pi_{[t_0,T]} \times \Pi_{[t_0,T]}\right) \middle| t - \tau > 0 \right\}. \tag{41}$$

Відомо, що за відповідних умов на ядро K існує єдиний розв'язок рівняння (39) для довільної підходящої функції f, який визначається формулою

$$u(t, x) = f(t, x) + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} R(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi, \qquad (t, x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \tag{42}$$

або для рівняння (40) — формулою

$$u(t, x) = f(t, x) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} R(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi, \qquad (t, x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \tag{43}$$

Тут

$$R(t, x; \tau, \xi) := \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, x; \tau, \xi), \qquad (t, x; \tau, \xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{44}$$

$K_1 := K$, а K_m, $m > 1$,— повторні ядра, які визначаються відповідними рекурентними співвідношеннями

$$K_m(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \beta, y) K_{m-1}(\beta, y; \tau, \xi) dy, (t, x; \tau, \xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \tag{45}$$

або

$$K_m(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{\alpha(\beta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \beta, y) K_{m-1}(\beta, y; \tau, \xi) dy, (t, x; \tau, \xi) \in P^0_{[t_0,T]}. \tag{46}$$

Функція R називається резольвентою рівняння (39) або (40), залежно від того, за якою формулою (45) чи (46) визначаються повторні ядра.

У дисертаційній роботі ФРЗК будуються для таких класів вироджених параболічних рівнянь: $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$. Тому в лемах, які наводяться нижче, формулюються умови на відповідні класи ядер, що виникають при побудові ФРЗК для рівнянь з відповідного класу. Для цих ядер ряд (44) збігається абсолютно і рівномірно в $P^{\delta}_{[t_0,T]}$ для довільного $\delta \in (0, T - t_0)$. Тому, існує резольвента (44) рівняння (39) або (40) і його розв'язок визначається відповідною формулою (42) чи (43). Для побудови ФРЗК використовується поетапний метод Леві.

Для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_1}$ на всіх (трьох) етапах методу Леві використовується наступна лема.

Лема 2. *Нехай ядро* (41) *є неперервним і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \leq C_1 \,(t-\tau)^{-M+\chi-1} E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi), \ (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]},$$

де $C_1 > 0$, $c > 0$, $M = (n_1 + 3n_2 + 5n_3)/2$ *і* $\chi \in (0,1)$. *Тоді для резольвенти справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \leq C\,(t-\tau)^{-M+\chi-1} E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi).$$

Оскільки на другому етапі побудови ФРЗК оцінювальна функція для ядра K відповідного інтегрального рівняння має вигляд суми ряду, то використовуватимемо наступну лему.

Лема 3. *Якщо ядро* (41) *є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \leq C_3 (t-\tau)^{-M+\chi-1} E^{(\chi,3)}_{c_3,\hat{C}_3}(t,x;\tau,\xi), \ (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]},$$

з деякими сталими $C_3 > 0$, $\hat{C}_3 > 0$, $c_3 > 0$ *і* $\chi \in (0,1)$, *то існує резольвента* (44), *яка є неперервною функцією і для якої справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \leq C_4 (t-\tau)^{-M+\chi-1} E^{(\chi,3)}_{c_4,\hat{C}_4}(t-\tau,x,\xi), \ (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]},$$

в якій $C_4 > 0$, $\hat{C}_4 > 0$, $c_4 > 0$ *— деякі сталі, причому* $\hat{C}_4 > \hat{C}_3$, *а* $c_4 < c_3$.

Для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_3}$ використовується наступна лема.

Лема 4. *Нехай ядро* (41) *є неперервним і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \leq C_1 \,\beta(\tau) (B(t,\tau))^{-M+\chi-1} \times$$
$$\times E_c^{(0)}(B(t,\tau),x,\xi), \quad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]},$$

де $C_1 > 0$, $c > 0$, $M = (n_1 + 3n_2 + 5n_3)/2$ *і* $\chi \in (0,1)$ *— деякі сталі. Тоді для резольвенти справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \leq C\,(B(t,\tau))^{-M+\chi-1} E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi).$$

У **підрозділі 2.3** наводяться результати побудови ФРЗК для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$, коефіцієнти яких залежать від t і параметра y, тобто допоміжних рівнянь з відповідних класів. Для побудови ФРЗК у цих випадках застосовується перетворення Фур'є.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти $\mathcal{A}_l$, як функції t і y, задовольняють умови (A_{l1}) і (A_{l2}), $l \in \mathbb{N}_3$. Тоді існує класичний ФРЗК Z_{l0}, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)| \leq C_k(T_l(t,\tau))^{-M-M_k}\hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x,\xi), \tag{47}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)| \leq C_{sk}(T_l(t,\tau))^{-M-M_k}\hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\begin{cases}|y_1-z_1|^{\gamma_1}, & \text{якщо } s=1;\\ (h_l^{\hat{m}_s\alpha_s}+|Y_s(h_l)-z_s|^{\gamma_s}), & \text{якщо } s\in\{2,3\},\end{cases} \tag{48}$$

а також рівності

$$\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi=0, \int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)dx=0, \qquad k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{49}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_2 d\xi_3=0, \qquad \{k_2,k_3\}\in\mathbb{Z}_+^{n_2+n_3}\setminus\{0\}, \tag{50}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_3=0, \qquad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \tag{51}$$

$$\partial_x^k Z_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)=(-\partial_\xi)^k Z_{l0}(t,x;\tau,\xi;y), \tag{52}$$

де $0\leq\tau<t\leq T, \{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, k:=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n, s\in\mathbb{N}_3$, C_k, C_{sk}– *додатні сталі,* $M_k := \sum\limits_{j=1}^{3}\hat{m}_j|k_j|$, h *і* γ_s *— числа з відповідних умов* (12) – (14), $T_l(t,\tau)=t-\tau$, *якщо* $l\in\mathbb{N}_2$, *і* $T_3(t,\tau)=B(t,\tau), \hat{E}_c^{(1)}(t,\tau,x,\xi):=E_c^{(l)}(t-\tau,x,\xi), \hat{E}_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi):=E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)$, $\hat{E}_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi):=E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)$, $E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi):=E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi)E^d(t,\tau)$, $E^d(t,\tau):=\exp\{dA(t,\tau)\}$, h_l *— таке, як вище.*

Для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$ справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_4$ *рівняння* (9) *задовольняють умови* (A_{41}) *і* (A_{42}). *Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* $Z_4(t,x;\tau,\xi), 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)\le C(B(t,\tau))^{-(M_0+\|k\|)/(2b)}E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi), \tag{53}$$

$$|\Delta_x^{x'}\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)|\le C\big(p_0(x,x')\big)^{\gamma_4}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-(M_0+\|k\|+\gamma_4)/(2b)}\left(E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi)+E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x'-\xi)\right), \tag{54}$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \|k\|\le 2b,$$

де $E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi):=E_c^{(4)}(t,\tau,x-\xi)E^d(t,\tau),\ \ E^d(t,\tau):=\exp\{dA(t,\tau)\}$; $C>0$, $c>0$, $d\in\mathbb{R}$ *– деякі сталі;* $M_0:=\sum\limits_{j=1}^n m_j$; γ_4 *– стала з умови* (14).

Якщо додатково виконується умова (16), *то для* Z_4 *правильні оцінки*

$$|\Delta_t^{t'}\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)|\le C\big(A(t',t)\big)^{1-(\|k\|-\gamma_4)/(2b)}\big(B(t,\tau)\big)^{1-(M_0+\gamma_4)/(2b)}\times$$

$$\times\left(E_{c,d}^{(4)}(t',\tau,x-\xi)+E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi)\right), 0<\tau<t<t'\le T,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad 0<\|k\|\le 2b. \tag{55}$$

Наслідком оцінок (53)–(55) *є оцінки*

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)|\le C\big(p(t,x;t',x')\big)^{\gamma_4}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-(M_0+\|k\|+\gamma_4)/(2b)}\left(E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi)+E_{c,d}^{(4)}(t',\tau,x'-\xi)\right),$$

$$0<\tau<t<t'\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n, 0<\|k\|\le 2b, \tag{56}$$

а також оцінки

$$\left|\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_4(t,x;\tau,\xi)d\xi\right|\le C\big(B(t,\tau)\big)^{-(\|k\|-\gamma_4)/(2b)}E^d(t,\tau),$$

$$\left|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_4(t,x;\tau,\xi)d\xi\right|\le C\big(p(t,x;t',x')\big)^{\gamma_4}\big(B(t,\tau)\big)^{-\|k\|/(2b)}\times$$

$$\times E^{d}(\tilde{t},\tau),\ 0<\tau<t<t'\le T,\quad \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad 0<\|k\|\le 2b, \qquad (57)$$

де $\tilde{t}:=t$ *при* $d\le 0$ *і* $\tilde{t}:=t'$ *при* $d>0$.

Якщо для коефіцієнтів рівняння (9), *крім указаних вище умов, виконуються ще умови* (A_{43}) *і* (A_{44}), *то ФРЗК* Z_4 *має властивість нормальності, для нього правильна формула згортки та існують похідні* $\partial_t^{k_0}\partial_x^k\partial_\tau^{s_0}\partial_\xi^s Z_4(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $2bk_0+\|k\|\le 2b$, $2bs_0+\|s\|\le 2b$, *для яких справджуються оцінки*

$$\big|(\alpha(t)\partial_t)^{k_0}\partial_x^k(\alpha(\tau)\partial_\tau)^{s_0}\partial_\xi^s Z_4(t,x;\tau,\xi)\big|\le$$

$$\le C\big(B(t,\tau)\big)^{-(M_0+\|k\|+\|s\|)/(2b)-k_0-s_0}E^{(4)}_{c,d}(t,\tau,x-\xi). \qquad (58)$$

У **підрозділі 2.4** описуються властивості інтегралів типу

$$u_l(t,x):=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}K_l(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ l\in\mathbb{N}_2, \qquad (59)$$

і

$$u_l(t,x):=\int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}K_l(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ l\in\mathbb{N}_4\setminus\mathbb{N}_2. \qquad (60)$$

Ядро K_l є комплекснозначною функцією, яка має властивості похідних від ФРЗК Z_{l0}, $l\in\mathbb{N}_3$, чи ФРЗК Z_4 для рівняння (9). Властивості інтегралів (59) і (60) описуються належністю функцій u_l до відповідних функціональних просторів залежно від того, до яких просторів належить функція f, а також додаткових припущень стосовно функцій, що спричиняють виродження на початковій гіперплощині.

Опишемо властивості ядер K_l, $l\in\mathbb{N}_4$. Для цього позначимо:

$d(x;x'):=\sum\limits_{j=1}^{3}|x_j-x_j'|^{1/(2b(j-1)+1)}$, $\hat{d}(x;x'):=\sum\limits_{j=1}^{3}|x_j-x_j'|^{1/(2j-1)}$,

$d_1(x;x';\lambda):=|x_1-x_1'|^{\lambda}+\sum\limits_{j=2}^{3}|x_j-x_j'|^{(\lambda+1)/(2b(j-1)+1)}$,

$\hat{d}_1(x;x';\lambda):=|x_1-x_1'|^{\lambda}+\sum\limits_{j=2}^{3}|x_j-x_j'|^{(\lambda+1)/(2j-1)}$,

$d_2(x;x';\lambda):=|x_1-x_1'|^{\lambda}+|x_2-x_2'|^{(\lambda+1)/(2b+1)}+|x_3-x_3'|^{(\lambda+2b+1)/(4b+1)}$,

$\hat{d}_2(x;x';\lambda) := |x_1-x_1'|^\lambda+|x_2-x_2'|^{(\lambda+1)/3}+|x_3-x_3'|^{(\lambda+3)/5}$, якщо $t\in(0,T]$, $\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\lambda\in(0,1]$. Зауважимо, що якщо $d(x;x')<1$ і $\hat{d}(x;x')<1$, то

$$d_2(x;x';\lambda)\le d_1(x;x';\lambda)\le 4^{1-\lambda}d(x;x')^\lambda,\ \ \{x,x'\}\subset\mathbb{R}^n,\lambda\in(0,1],$$

і

$$\hat{d}_2(x;x';\lambda)\le \hat{d}_1(x;x';\lambda)\le 4^{1-\lambda}\hat{d}(x;x')^\lambda,\ \ \{x,x'\}\subset\mathbb{R}^n,\lambda\in(0,1].$$

За ядра в інтегралах (59) і (60) братимемо функції K_l, які можуть бути подані у вигляді

$$K_l(t,x;\tau,\xi) := (t-\tau)^{-\nu-M}\Omega_l(t,x;\tau,\xi), l\in\mathbb{N}_2, \tag{61}$$

$$K_3(t,x;\tau,\xi) := (B(t,\tau))^{-\nu-M}\Omega_3(t,x;\tau,\xi), \tag{62}$$

$$K_4(t,x;\tau,\xi) := (B(t,\tau))^{-\nu-M_0/(2b)}\Omega_4(t,\tau,z), \tag{63}$$

де $0\le\tau<t\le T$ і $0<\tau<t\le T$, якщо $B(t,0)=\infty$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $z := (z_1,...,z_n)$, $z_j := (B(t,\tau))^{-1/(2b_j)}(x_j-\xi_j)$, $j\in\mathbb{N}_n$, $\nu\in(\delta_{l1}+\delta_{l3})(0,\hat{m}_2]\cup\delta_{l2}(0,2+1/(2b)]\cup\delta_{l4}(0,1]$, M, M_0 і δ_{lj} — такі, як вище.

Функція Ω_l зі значеннями в $\mathbb{C}$ для $l\in\mathbb{N}_3$ і відповідно в $\mathbb{C}_{NN}$ для $l=4$ є неперервною і задовольняє такі умови:

(B_{l1}) $\forall\{t,\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall l\in\mathbb{N}_3:$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)d\xi=0 \ \text{ для } \nu\in(\delta_{l1}+\delta_{l3})(1/2,1]\cup\delta_{l2}(1-1/(2b),1],$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)d\xi_2d\xi_3=0 \ \text{ для } \nu\in(\delta_{l1}+\delta_{l3})(1,\hat{m}_2]\cup\delta_{l2}(1,1+1/(2b)],$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)d\xi_3=0 \ \text{ для } \nu\in(\delta_{l1}+\delta_{l3})(\hat{m}_2,\hat{m}_3]\cup\delta_{l2}1+1/(2b),2+1/(2b)],$$

(B_{41}) $\forall\{t,\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t:$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Omega_4(t,\tau,x)dx=0;$$

(B_{l2}) $\exists C>0$ $\forall\{t,\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t,\ \forall\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \forall l\in\mathbb{N}_4:$

$$|\Omega_l(t,x;\tau,\xi)|\le C[(\delta_{l1}+\delta_{l2})+(\delta_{l3}+\delta_{l4})E^d(t,\tau)]\hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x,\xi)\},$$

$$\Omega_4(t,x;\tau,\xi):=\Omega_4(t,\tau,x-\xi);$$

(B_{l3}) $\exists C>0$ $\forall\{t,\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t,\ \forall\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ \forall l\in\mathbb{N}_4:$

$$|\Delta_x^{x'}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)|\le C[(d(x;x'))^\gamma(t-\tau)^{-\gamma/(2b)}\delta_{l2}+(\hat{d}(x;x'))^\gamma(t-\tau)^{-\gamma/(2)}\delta_{l1}+$$

$$+(\hat{d}(x;x'))^\gamma(B(t,\tau))^{-\gamma/(2)}\delta_{l3}+(p_0(x;x'))^\gamma\delta_{l4}][\hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x,\xi)\}+\hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x',\xi)\}];$$

(B_{44}) $\exists C>0$ $\forall\{t,t',\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t<t',\ \forall x\in\mathbb{R}^n:$

$$|\Delta_t^{t'}\Omega_4(t,\tau,x)|\le C(A(t',t))^{\gamma/(2b)}(B(t,\tau))^{-\gamma/(2b)}E^d(\tilde{t},\tau)\hat{E}_c^{(4)}(t,\tau,x,\xi\};$$

(B_{45}) $\exists\gamma_0\in(0,\gamma)$ $\exists C>0$ $\forall t\in(0,T]:$ $\int\limits_0^t(\Delta(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\le C.$

В умовах (B_{l2})–(B_{l4}) позначено $\hat{E}_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi):=E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)$, $\hat{E}_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi):=E_c^2(B(t,\tau),x,\xi)$, $\hat{E}_c^{(4)}(t,\tau,x,\xi):=\exp\{-c\sum\limits_{j=1}^n|x_j|^{q_j}\}$, $0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, число $\tilde{t}$ таке, як у теоремі 2.4. В умові (B_{45}) $\Delta(t,\tau):=\int\limits_\tau^t\frac{\delta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta$, де $\delta:[0,T]\to[0,\infty)$ — неперервна функція така, що $\Delta(T,0)<\infty$.

В означення функцій $K_l,\ l\in\mathbb{N}_4$, входять числа ν, d, c і γ, які вважаються заданими. Через $\mathcal{N}_l(\nu,d,c,\gamma)$ позначимо сукупність усіх функцій $K_l,\ l\in\mathbb{N}_3$, визначених формулою (61) чи (62), в якій функція Ω_l задовольняє умови (B_{l1}) – (B_{l3}), $l\in\mathbb{N}_3$, при заданих ν,d,c і γ. Відповідно $\mathcal{M}_l(\nu,d,c,\gamma)$ — сукупність усіх функцій K_4, визначених формулою (63), в якій функція Ω_4 задовольняє умови $(B_{41}),\ldots,(B_{4(5-l)})$, $l\in\{0,1,2\}$, при заданих ν,d,c,γ.

Зауважимо, що для $\nu\in(\delta_{l1}+\delta_{l2})[1,\hat{m}_2]\cup\delta_{l3}[1,2b+1/(2b)]\cup\delta_{l4}\{1\}$ інтеграли (59) і (60) із функціями $K_l\in\mathcal{N}_l(\nu,d,c,\gamma)$, $l\in\mathbb{N}_3$, і $K_4\in\mathcal{M}_l(\nu,d,c,\gamma)$, $l\in\{0,1,2\}$, розуміються як границі

$$\lim_{h\to0}\int\limits_0^{t-h}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_l(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\ l\in\mathbb{N}_2,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_0^{t-h}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_l(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\ l\in\mathbb{N}_4\setminus\mathbb{N}_2,$$

які для підходящих f існують на підставі умов (B_{l1}), $l\in\mathbb{N}_4$, або (B_{45}).

Означимо простори, до яких функції f і u належитимуть. Це простори функцій, які є неперервними або задовольняють умову Гельдера і мають певні обмеження при $|x|\to\infty$. Їх поведінка при $|x|\to\infty$ описуватиметься функціями

$$\varphi_l(t,x):=\exp\sum_{j=1}^{3}k_{lj}(t,a_{1j})|x_j|^2,$$

або

$$\psi_l(t,x):=\exp\sum_{j=1}^{3}s_{lj}(t)|x_j|^2,\ \ t\in[0,T],\ \ x\in\mathbb{R}^n,l\in\mathbb{N}_3.$$

Тут для фіксованого числа c_0 з інтервалу $(0,c)$, де c — стала з умов (B_{l2}) і (B_{l3}), і для множини $a_l:=(a_{l1},a_{l2},a_{l3})$ невід'ємних чисел a_{lj}, $\{l,j\}\subset\mathbb{N}_3$, таких, що $T<\min\limits_{j\in\mathbb{N}_3}(c_0/a_{1j})$, якщо $l\in\{1,3\}$
і $T<\min\limits_{j\in\mathbb{N}_3}(c_0/a_{1j})^{(2b-1)/(2b(l-1)+1)}$, якщо $l=2$.

$$k_{1j}(t,a_{1j}):=c_0a_{1j}(c_0-a_{1j}t^{2j-1})^{-1},\ \ j\in\mathbb{N}_3;$$

$$k_{2j}(t,a_{2j}):=c_0a_{2j}(c_0^{2b-1}-a_{2j}^{2b-1}t^{2b(j-1)+1})^{1-q},\ \ j\in\mathbb{N}_3;$$

$$k_{3j}(t,a_{3j}):=c_0a_{3j}(c_0-a_{3j}(T-B(T,t))^{(2j-1)})^{-1},\ \ j\in\mathbb{N}_3;$$

$$s_{11}(t):=k_{11}(t,a_{11})+2t^2k_{12}(t,a_{12})+t^4k_{13}(t,a_{13}),$$

$$s_{12}(t):=2k_{12}(t,a_{12})+4t^2k_{13}(t,a_{13}),\quad s_{13}(t):=4k_{13}(t,a_{13}),\ \ t\in[0,T].$$

$$s_{21}(t):=k_{21}(t,a_{21})+2^{q-1}t^qk_{22}(t,a_{22})+2^{q-2}t^{2q}k_{23}(t,a_{23}),$$

$$s_{22}(t):=2^{q-1}k_{22}(t,a_{22})+4^{q-1}t^qk_{23}(t,a_{23}),$$

$$s_{23}(t):=4^{q-1}k_{23}(t,a_{23}),t\in[0,T].$$

$$s_{31}(t):=k_{31}(t,a_{31})+2t^2k_{32}(t,a_{32})+t^4k_{33}(t,a_{33}),$$

$$s_{32}(t):=2k_{32}(t,a_{32})+4t^2k_{33}(t,a_{33}),\quad s_{33}(t):=4k_{33}(t,a_{33}),\ \ t\in[0,T].$$

Для заданих чисел $\lambda \in (0,1]$ і $l \in \mathbb{N}_3$ позначимо через $C^0_{\varphi_l}$, $C^\lambda_{\varphi_l}$, C^λ_{1,φ_l} і C^λ_{2,φ_l} простори неперервних функцій $u: \ \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, для яких скінченні відповідні норми $||u||^0_{\varphi_l}$, $||u||^\lambda_{\varphi_l} := ||u||^0_{\varphi_l} + [u]^\lambda_{\varphi_l}$, $||u||^\lambda_{1,\varphi_l} := ||u||^0_{\varphi_l} + [u]^\lambda_{1,\varphi_l}$ and $||u||^\lambda_{2,\varphi_l} := ||u||^0_{\varphi_l} + [u]^\lambda_{2,\varphi_l}$, де

$$||u||^0_{\varphi_l} := \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} \frac{|u(t,x)|}{\varphi_l(t,x)},$$

$$[u]^\lambda_{\varphi_l} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]} \\ (t,x)\neq(t,x')}} \frac{|\Delta^{x'}_x u(t,x)|}{(\tilde{d}(x;x'))^\lambda(\varphi_l(t,x)+\varphi_l(t,x'))},$$

$$[u]^\lambda_{1,\varphi_l} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]} \\ (t,x)\neq(t,x')}} \frac{|\Delta^{x'}_x u(t,x)|}{\tilde{d}_1(x;x';\lambda)(\varphi_l(t,x)+\varphi_l(t,x'))},$$

$$[u]^\lambda_{2,\varphi_l} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]} \\ (t,x)\neq(t,x')}} \frac{|\Delta^{x'}_x u(t,x)|}{\tilde{d}_2(x;x';\lambda)(\varphi_l(t,x)+\varphi_l(t,x'))}.$$

Тут $\tilde{d}(x;x') := d(x;x')\delta_{l2} + \hat{d}(x;x')(\delta_{l1}+\delta_{l3})$, $\tilde{d}_1(x;x';\lambda) := d_1(x;x';\lambda)\delta_{l2} + \hat{d}_1(x;x';\lambda)(\delta_{l1}+\delta_{l3})$, $\tilde{d}_2(x;x';\lambda) := d_2(x;x';\lambda)\delta_{l2} + \hat{d}_2(x;x';\lambda)(\delta_{l1}+\delta_{l3})$.

Крім цих просторів, використовуватимемо простір $C^\lambda_{\psi_l}$. Означення цього простору отримується, якщо в означенні простору $C^\lambda_{\varphi_l}$ функцію φ_l замінити функцією ψ_l, $\ l\in\mathbb{N}_3$.

Властивості інтегралів (59), (60) для $l \in \mathbb{N}_3$ наведено в наступній лемі.

Лема 5. *Нехай $K_l \in \mathcal{N}_l(\nu,d,c,\gamma)$ і функція u_l визначена відповідною формулою (59) або (60). Тоді правильні такі твердження:*

a) *якщо $\nu \le (1-1/(2b))\delta_{l2} + (\delta_{l1}+\delta_{l3})/2$ і $f \in C^0_{\varphi_l}$, то $u \in C^\gamma_{\psi_l}$ і*

$$||u_l||^\gamma_{\psi_l} \le C_l||f||^0_{\varphi_l}; \tag{64}$$

b) *якщо $\nu \in (1-1/(2b),1]\delta_{l2} + (1/2,1](\delta_{l1}+\delta_{l3})$ і $f \in C^\lambda_{\varphi_l}$, $\lambda\in(0,1]$, тоді при $(\nu+(\gamma-\lambda)/(2b))\delta_{l2} + (\nu+(\gamma-\lambda)/2)(\delta_{l1}+\delta_{l3}) < 1$ маємо $u \in C^\gamma_{\psi_l}$ і*

$$||u_l||^\gamma_{\psi_l} \le C_l||f||^\lambda_{\varphi_l}, \tag{65}$$

а при $(\nu+(\gamma-\lambda)/(2b))\delta_{l2} + (\nu+(\gamma-\lambda)/2)(\delta_{l1}+\delta_{l3}) > 1$ маємо $u_l \in C^\lambda_{\psi_l}$ і

$$||u_l||^\lambda_{\psi_l} \le C_l||f||^\lambda_{\varphi_l}; \tag{66}$$

c) *якщо* $\nu \in (1, 1 + 1/(2b)]\delta_{l2} + (1, \hat{m}_2](\delta_{l1} + \delta_{l3})$ *і* $f \in C^{\lambda}_{1,\varphi_l}$, $\lambda \in (0, 1]$, *то при* $(\nu + (\gamma - \lambda)/(2b))\delta_{l2} + (\nu + (\gamma - \lambda)/2)(\delta_{l1} + \delta_{l3}) < 1$ *отримуємо* $u_l \in C^{\gamma}_{\psi_l}$ *і*

$$||u_l||^{\gamma}_{\psi_l} \leq C||f||^{\lambda}_{1,\varphi_l}, \tag{67}$$

а при $(\nu + (\gamma - \lambda)/(2b))\delta_{l2} + (\nu + (\gamma - \lambda)/2)(\delta_{l1} + \delta_{l3}) > 1$ *отримуємо* $u_l \in C^{\lambda}_{\psi_l}$ *і*

$$||u_l||^{\lambda}_{\psi_l} \leq C||f||^{\lambda}_{1,\varphi_l}; \tag{68}$$

d) *якщо* $\nu \in (1 + 1/(2b), 2 + 1/(2b)]\delta_{l2} + (\hat{m}_2, \hat{m}_3](\delta_{l1} + \delta_{l3})$ *і* $f \in C^{\lambda}_{2,\varphi_l}$, $\lambda \in (0, 1]$, *тоді при* $(\nu - 1 + (\gamma - 1 - \lambda)/(2b))\delta_{l2} + (\nu - 1 + (\gamma - 1 - \lambda)/2)(\delta_{l1} + \delta_{l3}) < 1$ *маємо* $u_l \in C^{\gamma}_{\psi_l}$ *і*

$$||u_l||^{\gamma}_{\psi_l} \leq C||f||^{\lambda}_{2,\varphi_l}, \tag{69}$$

а при $(\nu - 1 + (\gamma - 1 - \lambda)/(2b))\delta_{l2} + (\nu - 1 + (\gamma - 1 - \lambda)/2)(\delta_{l1} + \delta_{l3}) > 1$ *маємо* $u_l \in C^{\lambda}_{\psi_l}$ *і*

$$||u_l||^{\lambda}_{\psi_l} \leq C_l||f||^{\lambda}_{2,\varphi_l}. \tag{70}$$

Сталі C_l *в нерівностях* (64)–(70) *залежать тільки від сталої* C *з умов* (B_{l2}) *і* (B_{l3}), $l \in \mathbb{N}_3$, *а також від чисел* n_1, n_2, n_3, b, ν, c, γ *і* λ.

Отримані у розділі 2 результати дозволяють побудувати класичні ФРЗК і отримати точні оцінки їх похідних. Реалізація процесу побудови класичних ФРЗК з викладом основних його результатів для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ наводиться у відповідних розділах 3, 4 і 5 дисертації. Сформулюємо основні результати у вигляді теореми.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів* $\mathcal{A}_l$ *виконуються умови* (A_{l1}), (A_{l2}) *і* (A_{l5}). *Тоді рівняння з класу* $\boldsymbol{K_l}$, *існує класичний ФРЗК* Z_{l3} *і справджуються оцінки*

$$|\partial^k_x Z_{l3}(t, x; \tau, \xi)| \leq C(T_l(t, \tau))^{-M - M_k} \hat{E}^{(l)}_c(t - \tau, x, \xi),$$

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^n_+, \hat{m}_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \leq 1\}; \tag{71}$$

$$|SZ_{l3}(t, x; \tau, \xi| \leq C(T_l(t, \tau))^{-M-1} \hat{E}^{(l)}_c(t - \tau, x, \xi), \tag{72}$$

$$|\Delta^{z_s}_{x_s} \partial^{k_l}_{x_l} Z_{l3}(t, x; \tau, \xi)| \leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l \gamma_l - \hat{m}_{l-1})} \times$$

$$\times (T_l(t, \tau))^{-M - M_k - \hat{m}_s \gamma_s} \left(\hat{E}^{(l)}_c(t, \tau, x, \xi) + \hat{E}^{(l)}_c(t, \tau, z^{(s)}, \xi) \right),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ z^{(s)} \in \mathbb{R}^{n_s} \ \{s, l\} \subset \mathbb{N}_3. \tag{73}$$

У **розділі 6** наведено застосування результатів з побудови класичних ФРЗК для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$.

Означимо простори, які будуть використовуватись далі.

Нехай $p \in [1, \infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, — задана комплекснозначна функція, вимірна при будь-якому $t \in [0,T]$. Для кожного $t \in [0,T]$ означимо норми

$$\| u(t, \cdot) \|_p^{k_l(t)} := \left\| \frac{u(t,x)}{\varphi_l(t, X(t))} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\| u(t, \cdot) \|_p^{s_l(t)} := \left\| \frac{u(t,x)}{\psi_l(t,x)} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \ l \in \mathbb{N}_3,$$

де функції φ_l, ψ_l, k_l і s_l, $l \in \mathbb{N}_3$ — такі, як означені в підрозділі 2.4. За допомогою цих норм означимо простори.

$L_p^{k_l(t)}$, $t \in [0,T]$, $p \in [1, \infty]$, — простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\| \varphi \|_p^{k_l(t)}$, і $L_p^{a_l} := L_p^{k_l(0)}$, $l \in \mathbb{N}_3$;

M^{a_l} — простір зліченно-адитивних функцій $\mu : \mathbf{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борелевих мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умови

$$\| \mu \|^{a_l} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi_l(0,x))^{-1} \, d\, |\mu|(x) < \infty, \quad l \in \mathbb{N}_3,$$

де B — σ-алгебра борелевих множин простору $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ — повна варіація μ;

$L_1^{-s_l(T)}$ — простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\| \psi \|_1^{-s_l(T)} := \left\| \frac{\psi(x)}{\psi_l(T,x)} \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}, \quad l \in \mathbb{N}_3;$$

$C_0^{-s_l(T)}$ — простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що при $|x| \to \infty$ маємо $|\psi(x)|\, \psi_l(T,x) \to 0$. Норму в $C_0^{-s_l(T)}$ означимо як

$$\| \psi \|_\infty^{-s_l(T)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(|\psi(x)|\, \psi_l(T,x) \right), \quad l \in \mathbb{N}_3.$$

Спочатку наведемо додаткові властивості ФРЗК.

Теорема 4. *Нехай для коефіцієнтів $\mathcal{A}_l$ рівняння з класу $\boldsymbol{K_l}$ виконуються відповідні умови (A_{l1})–(A_{l4}), $l \in \mathbb{N}_3$. Тоді правильні такі твердження:*

***1)** існує класичний ФРЗК Z_l^*, $l \in \mathbb{N}_3$ для відповідного спряженого рівняння, який зв'язаний із ФРЗК Z_l рівністю*

$$Z_l^*(\tau,\xi;t,x) = \overline{Z_l(t,x;\tau,\xi)}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ l \in \mathbb{N}_3. \quad (74)$$

Класичний ФРЗК Z_l, $l \in \mathbb{N}_3$, для якого справджується ця рівність, називають нормальним;

***2)** класичний ФРЗК Z_l є розв'язком функціонального рівняння*

$$Z_l(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_l(t,x;\beta,\lambda)\, Z_l(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$

$$0 \le \tau < \beta < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ l \in \mathbb{N}_3; \quad (75)$$

***3)** існує лише один нормальний класичний ФРЗК Z_l, $l \in \mathbb{N}_3$, для якого справджуються оцінки (71), (72) і (73).*

Теорема 5. *Нехай для коефіцієнтів $\mathcal{A}_l$ рівняння з класу $\boldsymbol{K}_l$ виконуються відповідні умови (A_{l1})–(A_{l4}), $l \in \mathbb{N}_3$. Тоді правильні такі твердження:*

***1)** для будь-яких функцій $\varphi \in L_p^{a_l}$ та узагальненої міри $\mu \in M^{a_l}$ формули*

$$u_{l1}(t,x) := (P_l\varphi)(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad l \in \mathbb{N}_3; \quad (76)$$

$$u_{l0}(t,x) := (P_l\mu)(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad l \in \mathbb{N}_3; \quad (77)$$

визначають єдині в шарі $\Pi_{(0,T]}$ класичні розв'язки відповідного однорідного рівняння;

***2)** існує стала $C_l > 0$, яка не залежить від $\varphi \in L_p^{a_l}$ та $\mu \in M^{a_l}$, така, що для довільного $t \in (0,T]$ справджуються оцінки*

$$\|\, u_{l1}(t,\,\cdot\,)\,\|_p^{k(t,a)} \le C_l\ \|\,\varphi\,\|_p^{a_l}\,, \quad l \in \mathbb{N}_3,$$

$$\|\, u_{l0}(t,\,\cdot\,)\,\|_1^{k_l(t)} \le C_l\ \|\,\mu\,\|^{a}\,, \quad l \in \mathbb{N}_3;$$

***3)** при $p \in [1,\infty)$ справджується рівність*

$$\lim_{t\to\infty} \|\, u_{l1}(t,\,\cdot\,) - \varphi(\,\cdot\,)\,\|_p^{s_l(t)} = 0,$$

а при $p=\infty$ *— граничні співввідношення*

$$u_{l1}(t,\,\cdot\,) \underset{t\to 0}{\to} \varphi$$

і

$$u_{l0}(t,\,\cdot\,) \underset{t\to 0}{\to} \mu$$

у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ *відповідно з просторів* $L_1^{-s_l(T)}$ *і* $C_0^{-s_l(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u_{l1}(t,x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)\,dx$$

і

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u_{l1}(t,x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,d\mu(x),\quad l\in\mathbb{N}_3.$$

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 5.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 5 і* u_l *— класичний розв'язок в* $\Pi_{(0,T]}$ *однорідного рівняння з відповідного класу* $\boldsymbol{K_l}$*, який задовольняє умову*

$$\|\,u_l(t,\,\cdot\,)\,\|_p^{k_l(t)}\le C_l,\qquad t\in(0,T],\qquad l\in\mathbb{N}_3. \tag{78}$$

з деякими сталою $C_l>0$ *і* $p\in[1,\infty]$. *Тоді при* $p\in(1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi\in L_p^{a_l}$*, а при* $p=1$ *— єдина узагальнена міра* $\mu\in M^{a_l}$*, такі, що розв'язок* u_l, $l\in\mathbb{N}_3$ *зображується відповідно у вигляді* (76) *і* (77).

Теореми 5 і 6 є реалізацією відомого підходу Ейдельмана-Івасишена до вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$. Твердження аналогічні теоремам 5 і 6 встановлено і для неоднорідних рівнянь з перелічених класів.

Нехай U_{lp}, $p\in[1,\infty]$, — класи усіх класичних розв'язків рівнянь з класів $\boldsymbol{K_l}$, які при кожному $t\in(0,T]$ належать до відповідних просторів $L_p^{k_l(t)}$, $l\in\mathbb{N}_3$ як функції x і для яких виконується умова (78). З теорем 2 і 3 випливають такі важливі наслідки.

Наслідок 1. Множинами початкових значень розв'язків із класів U_{lp}, $p\in(1,\infty]$, та U_1 є відповідно простори $L_p^{a_l}$ та M^{a_l}, $l\in\mathbb{N}_3$ і тільки вони.

Наслідок 2. Класи U_{lp}, $p \in (1, \infty]$, і U_{l1} є множинами значень операторів Пуассона, визначених формулами (76) і (77) на просторах відповідно $L_p^{a_l}$ і M^{a_l}, $l \in \mathbb{N}_3$, причому ці оператори є ізоморфізмами.

У **підрозділі 6.2** аналогічні результати отримано і для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$.

Перейдемо до **підрозділу 6.3.** Сюди увійшли результати дослідження нелінійних рівнянь. Використовуватимемо ще такі позначення:

$$D_x^p u := \{\partial_x^k u_j \,|\, |k| \le p, j \in \mathbb{N}_0\},$$

якщо $u \in \mathbb{C}_N$, де $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 := \{1, \dots, N\}$; L_p — кількість елементів множини $D_x^p u$; $\mathbb{N}_1^p := \{1, \dots, L_p\}$; $G_p(\mathbb{R}) := \{y \in \mathbb{R}^{L_p} \,|\, |y_j| \le R_j, j \in \mathbb{N}_1\}$, де $R_j, j \in \mathbb{N}_1$ — додатні сталі,$\mathbb{R} := (R_1, \dots, R_{L_p})$і $\mathbf{R_0} := (R_1, \dots, R_{L_p})$, якщо $R_1 = \dots = R_{L_p} = R_0$, де $R_0 > 0$ — деяка стала ; $Q_H^p(\mathbf{R}) := \{(t, x, y) \,|\, (t, x) \in \Pi_H, y \in G_p(\mathbf{R})\}$, $\Pi_H := H \times \mathbb{R}^n$.

Означимо простори функцій. Розглядатимемо простори функцій , які є неперервними чи задовольняють умову Гельдера та мають певні обмеження при $t \to 0$. Їх поведінка при $t \to 0$ описуватиметься функцією

$$(\delta(t))^\mu (\Delta(t, 0))^r E^{-d}(T, t), \quad t \in (0, T],$$

де $\mu = \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$; δ — неперервна монотонно неспадна на $[0, T]$ функція така, що $0 < \delta(t) \le \beta(t)$ для $t \in (0, T]$ та збігається інтеграл $\Delta(T, 0) := \int_0^T (\delta(\theta)/\alpha(\theta)) d\theta$. Для заданих чисел $\lambda \in (0, 1]$, $\mu \in \{0, 1\}$ і $r \in \mathbb{R}$ позначимо через $C_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}, C_{\mu,r}^{\lambda,0}$ і $C_{\mu,r}^{0,0}$ простори неперервних функцій $u : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченні відповідно норми

$$\|u\|_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)} := \|u\|_{\mu,r}^{0,0} + [u]_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)},$$

$$\|u\|_{\mu,r}^{\lambda,0} := \|u\|_{\mu,r}^{0,0} + [u]_{\mu,r}^{\lambda,0} \quad \text{і} \quad \|u\|_{\mu,r}^{0,0},$$

де

$$\|u\|_{\mu,r}^{0,0} := \sup_{(t,x) \in \Pi_{(0,T]}} \left(\frac{|u(t,x)| E^d(T,t)}{(\delta(t))^\mu (\Delta(t,0))^r} \right),$$

$$[u]_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\} \subset \Pi_{(0,T]} \\ (t,x) \ne (t',x')}} \left(\frac{|\Delta_{t,x}^{t',x'} u(t,x)|}{(\Delta(\bar{t},0))^{r - \lambda/(2b)}} \delta(t)^{-\mu} p^{-\lambda} E^d(T, \tilde{t}) \right),$$

$$[u]_{\mu,r}^{\lambda,0} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{(0,T]} \\ x \ne x'}} \Bigg(|\Delta_x^{x'} u(t,x)| \times$$

$$\times(\delta(t))^{-\mu}(\Delta(t,0))^{-r+\lambda/(2b)}|x-x'|^{-\lambda}E^d(T,t)\Big).$$

Тут $p := p(t',x';t,x), \bar{t} := t+(t'-t)\eta(r-\lambda/(2b))$ і $\tilde{t} := t+(t'-t)\eta(d)$, а $\eta(\cdot)$– характеристична функція множини $[0,\infty)$.

За допомогою означених просторів уведемо простір $U_r^{\gamma,\lambda}$. Він складається з функцій $u \in C_{0,r+1}^{0,0}$, які мають похідні $\partial_x^k u \in C_{0,r+1-\|k\|/(2b)}^{\gamma,\gamma/(2b)}$, $0<\|k\|<2b$, та похідні $\partial_x^k u \in C_{0,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $\|k\|=2b$. Норма в просторі $U_r^{\gamma,\lambda}$ визначається формулою

$$\|u\|_{U_r^{\gamma,\lambda}} := \|u\|_{0,r+1}^{0,0} + \sum_{0<\|k\|<2b} \|\partial_x^k u\|_{0,r+1-\|k\|/(2b)}^{\gamma,\gamma/(2b)} + \sum_{\|k\|=2b} \|\partial_x^k u\|_{0,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}.$$

Простори $U_r^{\gamma,\lambda}$, в яких функції u визначені в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$, $T_0 \le T$, позначатимемо через $U_r^{\gamma,\lambda}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{\|k\|=2b} a_k(t,x,D_x^{2b-1}u)\partial_x^k)u(t,x)$$

$$= f(t,x,D_x^{2b-1}u), (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{79}$$

з початковою умовою

$$u(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{80}$$

Стосовно функції $f : Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0}) \to \mathbb{C}_N$ припускатимемо виконаними наступні умови.

$\mathbf{F_1}$. Функція f неперервна в $Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0})$.

$\mathbf{F_2}$. $\exists\, C>0\ \forall\ (t,x,y) \in Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0}) : |f(t,x,y)| \le C\sigma(t)$, де $\sigma : [0,T] \to [0,\infty)$ — неперервна функція.

$\mathbf{F_3}$. $\exists\, C>0\ \forall\ \{(t,x,y),(t,x',y)\} \subset Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0})$: $|\Delta_x^{x'} f(t,x,y)| := |f(t,x',y)-f(t,x,y)| \le C\sigma(t)|x-x'|^\lambda$, $\lambda \in (0,1)$.

$\mathbf{F_4}$. $\exists\, C>0\ \forall\ \{(t,x,y),(t,x,y')\} \subset Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0})$: $|\Delta_y^{y'} f(t,x,y)| := |f(t,x,y')-f(t,x,y)| \le C\sigma(t)|y-y'|$.

Клас функцій, які задовольняють серію умов $\mathbf{F_1}$ –$\mathbf{F_4}$ з певними λ і σ, позначаються через $\mathcal{F}_\sigma^\lambda(Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0}))$.

Позначатимемо через $\mathcal{F}_{\sigma}^{p,\lambda}(Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0}))$ клас функцій f, які разом зі своїми похідними за просторовою змінною до порядку p включно належать до класу $\mathcal{F}_{\sigma}^{\lambda}(Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0}))$.

Теорема 7. *Нехай для коефіцієнтів системи* (79) *виконуються умови* (A_{41}), (A_{42}),(16) *і* (17), *функція* f *належить до класу* $\mathcal{F}_1^{\gamma}(Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R}_0))$. *Тоді існує таке число* $T_0 > 0$, *що неоднорідна задача Коші* (79), (80) *має єдиний розв'язок з простору* $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T_0]})$.

У цьому підрозділі також доведено локальну і глобальну розв'язність задачі Коші для півлінійного рівняння з класу $\boldsymbol{K_1}$.

У шарі $\Pi := (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ розглядається задача Коші

$$(L_c u)(t,x) = f(t,u(t,x)), \quad (t,x)\in\Pi, \tag{94}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{95}$$

де L_c— диференціальний вираз з класу $\boldsymbol{K_1}$ коефіцієнти якого $\mathcal{A}_1$ є дійсними числами, причому матриця складена зі старших коефіцієнтів є симетричною і маж додатні власні числа.

Нехай $\mathcal{F}$ — простір неперервних функцій $f : [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняють умову

$$\exists\ C>0\ \forall\ t\in[0,\infty)\ \forall\ \{u,u_1,u_2\}\subset\mathbb{R} :$$

$$|f(t,u)| \le C|u|^{1+\beta},$$

$$|f(t,u_1)-f(t,u_2)| \le$$

$$\le C|u_1-u_2| max\{|u_1|^{\beta},|u_2|^{\beta}\},$$

де β — додатна стала. Для означення просторів використаємо також функцію

$$V_\mu(t,x) := (t+\gamma)^{-M}\exp\{-c_0(\frac{1}{4(t+\gamma)}|x_1|^2+$$

$$+\frac{3}{(t+\gamma)^3}|x_2+\frac{1}{2}(t+\gamma)\hat{x}_1|^2+\frac{180}{(t+\gamma)^5}|x_3+\frac{1}{2}(t+\gamma)x_2'+$$

$$+\frac{1}{12}(t+\gamma)^2x_1'|^2-\mu(t+\gamma)\}, \quad t\ge 0, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

де γ — фіксоване додатне число.

Позначимо через U простір неперервних функцій $u : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}$, для яких скінченною є норма

$$\|u\|_1 := \sup_{(t,x)\in\overline{\Pi}} \left(\frac{|u(t,x)|}{V_\mu(t,x)} \right),$$

і які рівномірно щодо t задовольняють локальну умову Гельдера за змінними x_1, x_2, x_3 з показниками відповідно $\lambda_1 \in (0,1]$, $\lambda_2 \in (\frac{1}{3},1]$, $\lambda_3 \in (\frac{3}{5},1]$.

Множину неперервних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для яких скінченною є норма

$$\|\varphi\|_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{|\varphi(x)|}{V_\mu(0,x)} \right),$$

позначимо через Φ. Покладемо $\Phi^+ := \{\varphi \in \Phi \,|\, \varphi(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$. Основним результатом цього пункту є така теорема.

Теорема 8. *Правильні такі твердження:*

1) *якщо $\mu > 0$, $\beta > 0$, $f \in \mathcal{F}$, то задача Коші (94), (95) має єдиний глобальний розв'язок $u \in U$ для будь-якої початкової функції $\varphi \in \Phi$;*

2) *якщо $\mu = 0$, $\beta > 1/N$, $f \in \mathcal{F}$, то задача Коші (39), (40) має єдиний глобальний розв'язок $u \in U$ для деякої достатньо малої функції $\varphi \in \Phi$;*

3) *якщо $\mu \leq 0$, $\beta \in (0,1/N]$, $f = u^{1+\beta}$ і $\varphi \in \Phi^+$, то існує число $T^* \in (0,\infty)$ таке, що для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ $u(t,x) \to \infty$ при $t \to T^* - 0$, де u — розв'язок задачі Коші (94), (95).*

В **підрозділі 6.4** розглядаються рівняння з дійснозначними коефіцієнтами, що належать до класу $\boldsymbol{K_1}$. Такі рівняння належать до класу ультрапараболічних рівнянь і зустрічаються при дослідженні різних фізичних явищ у так званому дифузійному наближенні. Встановлено існування класичного ФРЗК для таких рівнянь його оцінки та оцінки похідних від ФРЗК. Доведено нормальність і невід'ємність ФРЗК, формулу згортки, а також встановлено формули для коефіцієнтів матриці дифузії та вектору знесення через ФРЗК.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена побудові і дослідженню властивостей класичних ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ та $\boldsymbol{K_4}$ і застосування їх до дослідження коректної розв'язності відповідних задач Коші.

Для цих класів рівнянь отримано такі основні результати:

1. Для вироджених параболічних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$ знайдено умови на коефіцієнти рівнянь за яких існує класичний ФРЗК і Лі-ФРЗК.

2. Розроблено новий підхід до побудови і дослідження фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$, який ґрунтується на поетапному застосуванні класичного методу Леві.

3. За допомогою поетапного методу Леві побудовано і досліджено властивості фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$, отримано точні оцінки фундаментальних розв'язків та їх похідних.

4. Досліджено властивості параболічних потенціалів, ядром яких є відповідний ФРЗК в широких класах вагових функцій.

5. Отримано інтегральні зображення розв'язків задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$.

6. Побудовано ФРЗК для рівнянням Фоккера-Планка-Колмогорова деякого виродженого дифузійного процесу і досліджено деякі його властивості.

7. Розширено класи існування, єдиності і коректної розв'язності задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$. Отримано інтегральні зображення розв'язків задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з означених класів.

8. Доведено теореми про локальну і глобальну розв'язність відповідних задач Коші для нелінійних і квазілінійних рівнянь.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у теорії рівнянь з частинними похідними та у математичній фізиці при подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії випадкових процесів при вивченні дифузійних процесів, перехідні імовірності яких є фундаментальними розв'язками відповідних вироджених параболічних рівнянь.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці опубліковані у наукових фахових виданнях

1. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2002. Т. 45, №4. С. 76–86.

2. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2004. Т. 47, №4. С. 110–114.

3. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2003. Т. 46, №3. С. 15–24.

4. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Theory of stochastic processes.* Vol. 16 (32), №1, 2010. P. 57–66.

5. **Мединський І. П.** Дослідження С. Д. Ейдельмана нелінійних задач та їх розвиток. *Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича.* Сер. : мат. Т. 1, №1–2. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. С. 114–128.

6. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *Буковинський мат. журн.* 2014. Т. 2, №2–3. С. 94–106.

7. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. *Буковинський мат. журн.* 2015. Т. 3, №3–4. С. 41–51.

8. **Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.** Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Буковинський мат. журн.* 2016. Т. 4, №3–4. С. 57–68.

9. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2016. Т. 59, №2. С. 28–42.
Те саме: Ivasyshen S. D. , Medyns'kyi I. P. On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables. *J. Math. Sci.* 2018. Vol.231, №4. P. 507–526. https: doi.org//10.1007/s10958-018-3830-0.

10. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations. *Mat. Stud.* 2017. Vol. 47, №1. C. 33–46. https:doi.org//10.30970/ms.47.1.33-46.

11. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. Т. 60, №3. С. 9–31.
Те саме: Ivasyshen S. D. , Medynsky I. P. Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, №2. P. 121–151. https:doi.org//10.1007/s10958-020-04726-z.

12. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. Т. 60, №4. С. 7–24.
Те саме: Ivasyshen S. D. , Medynsky I. P. Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. II. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 247, №1, P. 1–23. https: doi.org//10.1007/s10958-020-04786-1.

13. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Властивості фундаментальних розв'язків, теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2018. Т. 61, №4. С. 7–16.

14. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2019. Т. 62, №1. С. 7–24.

15. **Dron' V. S., Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.** Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for one Kolmogorov-type ultraparabolic arbitrary order equations. *Carpatian Math. Publ.* 2019. Vol. 11, №2, P. 268–280. https:doi.org//10.15330/cmp.11.2.268-280.

16. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2019. Т. 62, №4. С. 39–48.

17. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник Львів. ун-ту.*: Серія мех.-мат. 2019. Вип. 88. С. 107–127. https://dx.doi.org/10.30570/vmm.2019.88.107-127.

18. **Medynsky I. P.** On properties of solutions for Fokker-Planck-Kolmogorov equations. *Math. Model. Comp.* 2020. Vol. 7, №1. P. 158–168. https: doi.org //10.23939/mmc2020.01.158.

Праці опубліковані в інших наукових виданнях

19. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування. *Нелінійний аналіз: Праці Українського математичного конгресу.* 2001. Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. С. 28–41.

20. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичні фундаментальні розв'язки для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2016. Т. 13, №1. С. 108–155.

21. **Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.** Параболічні рівняння з різними особливостями та виродженнями. *Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь.*: Зб. наук. праць присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2017. С. 68–76.

22. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині.*Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка".*: Серія: фіз.-мат. науки. 2017, №871. С. 46–64.

23. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник нац. університету "Львівська політехніка".*: Серія: фіз.-мат. науки. 2018, №898. С. 13–21.

МАТЕРІАЛИ І ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НАУКОВИХ КОНФЕРЕНЦІЙ, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. **Ivasyshen S., Medynsky I.** The well-posedness of problem with weighting initial conditions for parabolic system with degenerations of the initial hyperplane in Banach spaces of Hölder. *Intern. Conf. Func. Anal. and its Appl.*, Dedicated to the 110-th anniversary of Stefan Banach. May 28–31, 2002, Lviv: Book of Abstracts. Lviv, 2002. P. 92–93.

2. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *VI Міжнар. наук. конф. "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур"*, 26–29 трав. 2003 р., Львів: тези доп.: Львів, 2003. С.491–492.

3. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Апріорні оцінки розв‘язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування. *Міжнар. наук. конф. "Шості боголюбовські читання"*, 26–30 серп., 2003 р., Чернівці: тези доп.: Київ, 2003. С. 84.

4. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про коректну розв‘язність задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *III Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 9–12 верес. 2003 р., Івано-Франківськ: тези доп.: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2003. С. 42.

5. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи з виродженням на початковій гіперплощині. *Міжнар. конфер. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, 6–9 черв. 2005 р., Київ: тези доп.: Київ, 2005. С. 32.

6. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Глобальні розв’язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь у вагових L_p-просторах. *Міжнар. наук. конф. з диференціальних рівнянь, присвячена 100 річниці з дня народження Я. Б. Лопатинського*, 12–17 верес. 2006 р., Львів: тези доп.: Львів, 2006. С. 27–28.

7. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Розвиток досліджень С. Д. Ейдельмана фундаментальних розв’язків параболічних рівнянь та їх застосування. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні*

рівняння та їх застосування", 11–14 жовт., 2006 р., Чернівці: тези доп.: Чернівці, 2006. С. 54.

8. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про глобальні розв'язки задачі Коші для деяких квазілінійних ультрапараболічних рівнянь. *Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробагатька*, 24–28 верес. 2007 р., Дрогобич: тези доп.: Львів, 2007. С. 189.

9. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічних рівнянь з виродженнями за часовою змінною. *XII Міжн. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 15–17 трав. 2008 р., Київ: тези доп.: Київ. 2008. С. 162.

10. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про задачу Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *IV Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 10–12 верес. 2008 р., Івано-Франківськ: тези доп.: Івано-Франківськ, 2008. С. 39.

11. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Intern. conf. "Stochastic analysis and random dynamics"*, June 14–20, 2009, Lviv: Abstracts. Lviv, 2009. P. 95–96.

12. **Мединський І. П.** Задача Коші для квазілінійних ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *XIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 13–15 травня, 2010 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2010. С. 271.

13. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *Third International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Appliccations dedicated to Yaroslav Lopatynsky* , 3–6 November, 2010, Lviv: Book of Abstracts. Donetsk, 2010. P. 76.

14. **Мединський І.** Локальна розв'язність задачі Коші для одного класу квазілінійних вироджених параболічних рівнянь. *Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька*, 19–23 верес. 2011 р., Дрогобич: тези доп.: Львів, 2011. С. 134.

15. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь. *Міжнар. наук. конф.*

"Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченої 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, 8–10 черв., 2011 р., Київ: матеріали конф.: Київ, 2011. С. 120.

16. **Medynsky I.** Cauchy problem for a semilinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type *Intern. Conf. dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach*, September 17–21, 2012, Lviv: Abstracts of Reports. Lviv, 2012. P. 217.

17. **Мединський І. П.** Задача Коші для квазілінійного рівняння типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною і виродженням. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, присвяченої 70-річчю проф. В.В. Маринця, 26–29 верес. 2012 р., Ужгород: матеріали конф.: Ужгород, 2012. С. 60.

18. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Параболічні моделі. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. V Міжнар. наук. конф. 4–5 квіт. 2012 р. Кам'янець-Подільський, 2012. С. 35.

19. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких класів вироджених параболічних рівнянь. *XIV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 19–21 квітня 2012 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2012. С. 198.

20. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Деякі вироджені параболічні моделі. *Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці"*, присвячена 50-річчю каф. прикладної математики Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича, 11–23 черв. 2012 р., Чернівці: матеріали конф., Чернівецький нац. ун-т, 2012. С. 80.

21. **С. Івасишен, І. Мединський** Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 21–25 трав. 2013 р., Львів: зб. наук. праць в 3-х т. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1. С. 36–38.

22. **Івасишен С. Д., Label Мединський І. П.** Про метод Леві побудови та дослідження фундаментальних розв'язків вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *V Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 19–21 верес. 2013 р., Івано-Франківськ: тези доп., Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2013. С. 28.

23. **Мединський І. П., Івасишен С. Д.** Про деякі вироджені параболічні моделі. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. VI Міжнар. наук. конф. 4–5 квіт. 2014 р. Кам'янець-Подільський, 2014. С. 106.

24. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *XV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 15–17 трав. 2014 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2014. С. 123–124.

25. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для узагальненого виродженого рівняння Колмогорова. *IV Міжнар. ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народженння Ганса Гана*, 30 черв.–05 лип. 2014 р., Чернівці: тези доп.: Чернівецький нац. ун-т, 2014. С. 62–63.

26. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова. *XVI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 14–15 трав. 2015 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ : НТУУ "КПІ", 2015. С. 106–107.

27. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Метод Леві та його модифікації у дослідженнях вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Наук. конф., присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге*, 1–4 лип. 2015 р., Чернівці: тези доп.: Чернівецький нац. ун-т, 2015. С. 48–49.

28. **Medynsky I.** On investigations of S.D. Eidelman in the theory of the degenerate parabolic equations of Kolmogorov type and their development *Intern. V. Skorobohatko Math. Conf.* August 25–28, 2015, Drogobych: Abstracts. Lviv, 2015. P. 104.

29. **Voznyak O., Ivasyshen S., Medynsky I.** On fundamental solution of the ultraparabolic Kolmogorov equation with degeneration on the

initial hyperplane. *Intern. V. Skorobohatko Math. Conf.*, August 25–28, 2015, Drogobych: Abstracts. Lviv, 2015. P. 172.

30. **Івасишен С. Д., Мединський І. П. Пасічник Г. С.** Параболічні моделі з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. VII Міжнар. наук. конф. 21–22 квіт. 2016 р. Кам'янець-Подільський, 2016. С. 83–84.

31. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про останні результати побудови та дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого параболічного рівняння типу рівняння дифузії з інерцією. *XVII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 19–20 трав. 2016 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ : НТУУ "КПІ", 2016. С. 127–128.

32. **Dron' V., Ivasyshen S., Medynsky I.** On applications of Levi's parametrix method in Theory of Parabolic equations. *Intern. Conf. On Diff. Eq.*, Dedicated to the 110 Anniversary of Ya.B.Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv: Book of Abstracts. Lviv, 2016. P. 44.

33. **Дронь В., Івасишен С., Мединський І.** Властивості об'ємного потенціалу лля одного ультрапараболічного рівняння. *Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"*, присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І.Фодчука (1936-1992) та 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь, 28–30 верес. 2016 р., Чернівці: матеріали конф. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. С. 44.

34. **Івасишен С., Мединський І.,Пасічник Г.** Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"*, присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І.Фодчука (1936 – 1992) та 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь, 28–30 верес. 2016 р., Чернівці: матеріали конф. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. С. 50–51.

35. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з гладкими коефіцієнтами. *XVIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 7–10 жовт. 2017 р., Луцьк – Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2017. С. 60–63.

36. **Івасишен С., Мединський І.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 22–25 трав. 2018 р., Львів: зб. наук. праць у 3-х т./ за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 34–35. Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

37. **Возняк О., Мединський І.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. *Міжнар.наук.конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 22–25 трав. 2018 р.: зб. наук. праць у 3-х т./ за заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. 2018. Т.3. С. 101–102. Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

38. **І. Мединський, С. Івасишен** Про побудову та оцінки класичного фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях.* Міжнар. наук. конф. присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича, 17–19 верес. 2018, Чернівці: матеріали конф. Чернівці, 2018. С. 84.

39. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійного виродженого ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *VI Всеукр. матем. конф. імені Б. В. Василишина*, 26–28 верес. 2018, Івано-Франківськ–Микуличин. Івано-Франківськ: Голіней, 2018. С. 18–19.

40. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** Properties of Green operators generated by fundamental solutions of degenerated parabolic equations. *Intern. Conf. "Infinite Dimensional Analysis and Topology"*, Dedicated to the 70-th Anniversary of Professor Oleh Lopushansky. Oktober 15–20, 2019, Ivano-Frankivsk: Book of Abstracts. Ivano-Frankivsk, 2019. P. 25–26.

41. **Мединський І., Дронь В.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь довільного порядку. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми диференціальних*

рівнянь та їх застосування", присвячена 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана, 16–19 верес. 2020 р., Чернівці: матеріали конф. [Електронний ресурс]. Чернівецький нац. ун-т, 2020. С. 165–166. Режим доступу до ресурсу: www.sde100.fmi.org.ua.

42. **Medynsky I., Voznyak O.** Fundamental solutions of ultraparabolic Kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and degeneration on the initial hyperplane. *XI Intern. Skorobohatko Math. Conf.*, October 26–30, 2020, Lviv: Abstracts. [Electronic publication ISBN 978-96602-9390-8]. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. 2020. P. 75. https://www.iapmm.lviv.ua/conf_skorob2020.

АНОТАЦІЯ

Мединський І. П. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – Диференціальні рівняння (111 – Математика). – Національний університет «Львівська політехніка», Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України.– Львівський національний університет імені Івана Франка.– Львів, 2021.

Дисертація присвячена побудові, дослідженню і застосуванню фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$. Клас $\boldsymbol{K_1}$ складають ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова. До класу $\boldsymbol{K_2}$ входять рівняння типу Колмогорова довільного порядку. Рівняння з класу $\boldsymbol{K_3}$— це рівняння типу рівнянь з класу $\boldsymbol{K_1}$, в яких додатково наявні виродження при $t = 0$. Класи рівнянь $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ є природними узагальненням у різних напрямках відомого рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова. Клас $\boldsymbol{K_4}$ складають $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом системи рівнянь і виродженням на початковій гіперплощині. Особливістю рівнянь з цього класу є нерівноправність просторових змінних і наявність виродження на початковій гіперплощині.

Для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ знайдено умови на коефіцієнти рівнянь, за яких, за допомогою поетапного методу Леві побудовано й досліджено класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші, встановлено оцінки побудованих розв'язків та їх похідних, доведено теореми

про коректну розв'язність та інтегральні зображення розв'язків у сімействах вагових L_p-просторів, які при $|x| \to \infty$ мають експоненціальний ріст максимального порядку 2 чи $2b$ відповідно із залежним від t типом. Для підкласу з $\mathbf{K_1}$— рівнянь з дійсними коефіцієнтами встановлено, крім існування та оцінок побудованого фундаментального розв'язку Z, додаткові властивості Z (невід'ємність, нормальність, формула згортки та ін.), які дозволяють трактувати функцію Z, як густину імовірностей переходу деякого дифузійного процесу; обґрунтовано інтегральне зображення та доведено коректну розв'язність задачі Коші в класі невід'ємних функцій; отримано формули для визначення характеристик такого дифузійного процесу. Також доведено теореми про локальну розв'язність задачі Коші для відповідного квазілінійного рівняння і встановлено існування глобального розв'язку задачі Коші для півлінійного рівняння з класу $\boldsymbol{K_1}$.

Отримані в дисертації відомості про фундаментальні розв'язки рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ певним чином показують, як впливають на властивості побудованих фундаментальних розв'язків і результати їх застосувань наявність у рівняннях особливостей та вироджень (виродження матриці коефіцієнтів, що стоять при старших похідних у рівнянні, нерівноправність просторових змінних, виродження при $t = 0$).

Для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$ проведено всебічне дослідження потенціалів, ядром яких є відповідний фундаментальний розв'язок у вагових просторах гельдерових функцій, які правильно і точно враховують поведінку при $t \to 0$ фундаментального розв'язку; доведено теореми про коректну розв'язність, апріорні оцінки і підвищення гладкості розв'язків задачі Коші та локальну розв'язність задачі Коші для відповідної нелінійної системи з виродженням на початковій гіперплощині. Розглянуто усі можливі типи виродження рівнянь при $t = 0$. Отримані результати узальнюють і доповнюють раніше отримані автором результати для $2b$-параболічних за Петровським систем рівнянь і виродженням на початковій гіперплощині.

Проведені у роботі дослідження мають теоретичний характер. Його результати та методика їж отримання можуть бути використані для дослідження аналітичними методами вироджених параболічних рівнянь загальнішої структури, тобто до побудови й дослідження фундаментальних розв'язків та їх застосувань до встановлення коректної розв'язності, інтегрального зображення і властивостей розв'язків задачі Коші для таких рівнянь.

Ключові слова: вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова, параболічні рівняння довільного порядку, параболічні рівняння з виродженням на початковій гіперплощині, задача Коші, фундаментальний розв'язок задачі Коші, метод Леві, оцінювальні функції, об'ємний потенціал, коректна, локальна і глобальна розв'язність задачі Коші.

АННОТАЦИЯ

Мединский И. П. Фундаментальные решения задачи Коши для вырожденных параболических уравнений.– Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертаци на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – "Дифференциальные уравнения"(111 – Математика). – Национальный университет «Львовская политехника», Институт прикладных проблем механики и математики имени Я. С. Подстригача НАН Украины.– Львовский национальный университет имени Ивана Франка.– Львов, 2021.

Диссертация посвящена построению, исследованию и применению фундаментальных решений задачи Коши для выродженных параболических уравнений из классов $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ и $\boldsymbol{K_4}$. Класс $\boldsymbol{K_1}$ составляют ультрапараболические уравненя типа Колмогорова. Класс $\boldsymbol{K_2}$ состоит из уравнений типа Колмогорова произвольного порядка. Уравнения из класса $\boldsymbol{K_3}$— это уравнения типа уравнений из класса $\boldsymbol{K_1}$, у которых дополнительно имеется вырождение при $t = 0$. Классы уравнений $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ и $\boldsymbol{K_3}$ являются естественнными обобщениями в разных направлениях известного уравнения диффузии с инерцией А. Н. Колмогорова. Класс $\boldsymbol{K_4}$ составляют $\overrightarrow{2b}$-параболические за Эйдельманом системы уравнений с вырождением на начальной гиперплоскости. Особенностью уравнений из этого класса являтется неравноправность пространственных переменных и наличие вырождения на начальной гиперплоскости.

Для уравнений из классов $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ найдены условия на коэффициенты уравнений, при которых, с помощью поэтапного метода Леви построены и исследованы классические фундаментальные решения задачи Коши, установлены оценки построеных решений и их производных, доказаны теоремы о корректной разрешимости и интегральных представлениях решений в семействах весовых L_p-пространств, экспоненциально возрастающих при $|x| \to \infty$ функций, имеющих експоненциальный рост максимального порядка 2 или $2b$ соответственно с зависящим от t типом. Для подкласса из $\mathbf{K_1}$— уравнений с действительными коэффициентами установлены, кроме существования и оценок построеного фундаментального решения Z, дополнительные свойства Z (неотрицательность, нормальность, формула свертки и др.), которые позволяют интерпретировать функцию Z, как плотность вероятностей перехода некоторого диффузионного процесса; обосновано интегральное представление и доказано корректную разрешимость задачи Коши в классе неотрицательных функций; получены формулы, определяющие характеристики

такого диффузионного процесса. Также доказаны теоремы о локальной разрешимости задачи Коши для соответствующего квазилинейного уравнения и установлено существование глобального ркшения задачи Коши для полулинейного уравнения из класса $\boldsymbol{K_1}$.

Полученные в диссертации сведения о фундаментальных решениях уравнениях из классов $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ и $\boldsymbol{K_3}$ некоторым образом показывают, как влияют на свойства построенных фундаментальных решений и результаты их применений наличие в уравнениях особенностей и вырождений (вырождение матрицы коэффициентов, стоящей при старших производных в уравнении, неравноправность пространственных переменных, вырождения при $t = 0$).

Для уравнений из класса $\boldsymbol{K_4}$ проведено всестороннее исследование потенциалов, ядром которых является соответствующее фундаментальное решение у весовых пространствах гельдеровых функций, которые правильно и точно учитывают поведение при $t \to 0$ фундаментального решения; доказаны теоремы о корректной разрешимости, априорных оцінках и повышении гладкости решений задачи Коши и локальной разрешимости задачи Коши для соответсвующей нелинейной системы с вырождением на начальной гиперплоскости. Рассмотрены все возможные типы вырождения уравнений при $t = 0$. Полученные результаты обобщают и дополняют полученные раньше автором результаты для $2b$-параболических за Петровским систем уравнений с вырождением на начальной гиперплоскости.

Проведенные в работе исследования имеют теоретический характер. Их результаты и методика их получения могут быть использованы для исследования аналитическими методами выродженных параболических уравнений более общей структуры, т.е. для построения и изучения фундаментальных решений и их применений к установлению корректной разрешимости, интегрального представления и свойств решений задачи Коши для таких уравнений.

Ключевые слова: вырожденные параболические уравнения типа Колмогорова, параболические уравнения произвольного порядкау, параболические уравнения с вырождением на начальной гиперплоскости, задача Коши, фундаментальное решение задачи Коши, метод Леви, оценивающая функция, объемный потенциал, корректная, локальная и глобальная розрешимость задачи Коши.

ABSTRACT

Medynsky I. P. Fundamental solutions of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the Degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics on the speciality 01.01.02 – Differential equations (111— Mathematic). – Lviv Polytechnic National University, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. – Lviv Ivan Franko National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2021.

The dissertation is devoted to construction, research and application of fundamental solutions of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations from classes $\boldsymbol{K_1}$, $\mathbf{K_2}$, $\mathbf{K_3}$ and $\mathbf{K_4}$. Class $\boldsymbol{K_1}$ are ultraparabolic equations of the Kolmogorov type. The class $\boldsymbol{K_2}$ includes equations of the Kolmogorov type of arbitrary order. An equation of the class $\boldsymbol{K_3}$— is an equation of the type of equations from the class $\boldsymbol{K_1}$, in which degenerations are additionally present at $t = 0$. The classes of equation $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ and $\boldsymbol{K_3}$ is a natural generalization in different directions of the known classical Kolmogorov's equation of diffusion with inertia. The class $\boldsymbol{K_4}$ consists of $\overrightarrow{2b}$ parabolic in the sense of Eidelman systems of equations and degeneration on the initial hyperplane. The feature of the equations from this class is the inequality of spatial variables and the presence of degeneracy on the initial hyperplane. For equations from classes $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ and $\boldsymbol{K_3}$ the conditions for the coefficients of the equations are found, according to which, with the help of the stepwise Levy method, the classical fundamental solutions of the Cauchy problem are constructed and investigated, and the estimates of the constructed solutions and their derivatives are established, theorems on correct solvability and integral images of solutions in families of L_p-weight spaces are proved, which have exponential growth of maximum order 2 or $2b$ under the condition $|x| \to \infty$ according to the type dependent on t. For a subclass of $\boldsymbol{K_1}$— equations with real coefficients are established, in addition to the existence and estimates of the constructed fundamental solution Z, additional properties Z (nonnegativity, normalization, convolution formula etc.), which allow to interpret the function Z as the density of transition probabilities of some diffusion process; the integral representation is proved and the correct solvability of the Cauchy problem in the class of nonnegative functions is proved; formulas for determining the characteristics of such a diffusion process are obtained. The theorems on the local solvability of the Cauchy problem for the corresponding quasilinear equation are also proved and the existence of a global solution of the Cauchy problem for a semilinear equation from the class is established $\boldsymbol{K_1}$.

The information obtained in the dissertation on the fundamental solutions of equations from classes $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ and $\boldsymbol{K_3}$ in a certain way show how the properties of singularities and degeneracies affect the properties of the constructed fundamental solutions and the results of their applications (de-

generacy of the matrix of coefficients which are at the senior derivatives in the equation, inequality of spatial variables, degeneracy under the condition $t = 0$).

For equations from the class $\boldsymbol{K_4}$ a comprehensive study of potentials is carried out, the core of which is the corresponding fundamental solution in the weight spaces of Hölder functions, which correctly and accurately take into account the behavior under the condition $t \to 0$ of fundamental solution; the theorem on correct solvability, a priori estimates and increase of smoothness of solutions of the Cauchy problem and local solvability of the problem with degeneracy on the initial hyperplane is proved. All possible types of degeneracy of equations under the condition $t = 0$ are considered. The obtained results summarize and supplement the results previously obtained by the author for $2b$- parabolic by Petrovsky systems of equations and degeneration on the initial hyperplane .

The study which are conducted in the research have theoretical nature.

Its results and methods of obtaining them can be used to study analytical methods of degenerate parabolic equations of more general structure, that is, to construct and study fundamental solutions and their applications to establish the correct solvability, integral representation, and properties of solutions of the Cauchy problem for such equations.

Keywords: degenerate parabolic equations of Kolmogorov type, parabolic equations with degenerations on the initial hyperplane, the Cauchy problem, fundamental solution of the Cauchy problem, Levi's method, volume potential, correct and local solvability.