Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Пстрий Катерина Миколаївна

УДК 512.536.7+515.122.4

Топологізація та розширення груп, біциклічних напівгруп та їх варіантів

01.01.04 — геометрія і топологія

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
(доктора філософії)

Львів – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент,
старший науковий співробітник
Гутік Олег Володимирович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
доцент кафедри алгебри, топології та основ математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Карлова Олена Олексіївна,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
доцент кафедри математичного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Никифорчин Олег Ростиславович,
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника,
завідувач кафедри алгебри та геометрії.

Захист відбудеться «13» травня 2021 р. о 15^{05} год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий «09» квітня 2021 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради **А. Я. Християнин**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В математичній літературі питання про недискретну (гаусдорфову) топологізацію груп вперше було поставлено А. А. Марковим[1] у 1945 р. Зауважимо, що Л. С. Понтрягін[2] сформулював умови на базу одиниці групи для її недискретної групової топологізації. У 1980 р. О. Ю. Ольшанський[3] побудував приклад нескінченної зліченної групи G такої, що кожна групова T_0-топологія на G є дискретною. Уперше таку нетопологізовну напівгрупу було знайдено К. Ебергартом і Дж. Селденом в 1969 р.[4], де доведено, що кожна гаусдорфова напівгрупова топологія на біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$ є дискретна. М. Бертман і Т. Уест[5] поширили результат Ебергарта-Селдена на випадок напівтопологічних напівгруп. А.Д. Тайманов[6] побудував приклад нескінченної комутативної напівгрупи $\mathfrak{A}$, яка допускає лише дискретну гаусдорфову напівгрупову топологію, а також[7] навів достатні умови на комутативну напівгрупу, щоб на ній існувала недискретна гаусдорфова напівгрупова топологія.

Ебергарт і Селден також довели, що непорожній наріст біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ у топологічній напівгрупі S є ідеалом у його замиканні $\overline{\mathscr{C}(p,q)}$ в S. Аналогічні результати стосовно топологізації та замикання для напівгрупи порядкових ізоморфізмів між головними фільтрами скінченного степеня множини натуральних чисел $\mathbb{N}^n$ зі звичайним частковим порядком добутку отримано Гутіком і Мокрицьким[8]. Однак, хоча на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$

[1]Марков А. А. О свободных топологических группах / Марков А. А. // Известия Акад. Наук СССР. – 1945. – Т. 9, № 1. – С. 3–64.

[2]Понтрягин Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин – Москва. – 1938.

[3]Ольшанский А. Замечание о счетной нетопологизируемой группе / А. Ольшанский // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1980. – Т. 39, № 3. – С. 103.

[4]Eberhart C. On the closure of the bicyclic semigroup / C. Eberhart, J. Selden // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 115–126.

[5]Bertman M. O. Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups / M. O. Bertman, T. T. West //Proc. Roy. Irish Acad. – 1976. – Vol. A76, № 21–23. – P. 219–226.

[6]Тайманов А. Д. Пример полугруппы, допускающей только дискретную топологию / А. Д. Тайманов // Алгебра и логика. – 1973. – Т. 12, № 1. – С. 114–116.

[7]Тайманов А. Д. О топологизации коммутативных полугрупп / А. Д. Тайманов // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17, № 5. – С. 745–748.

[8]Gutik O. The monoid of order isomorphisms between principal filters of $\mathbb{N}^n$ / O.

існує лише дискретна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія, наріст напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ у топологічній напівгрупі S може і не бути ідеалом у її замиканні $\overline{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}}$ в S[9].

Зауважимо, що для багатьох біпростих напівгруп S, а таким є біциклічний моноїд, виконується таке твердження: кожна трансляційно неперервна гаусдорфова берівська (зокрема, локально компактна) топологія на S є дискретною. Графова інверсна напівгрупа $G(E)$ – це напівгрупа, побудована з орієнтованого графа E, коротко кажучи, елементи якої відповідають шляхам у графі E. Графові інверсні напівгрупи також є узагальненням поліциклічного моноїда, який ввели Ніва та Перо[10]. Месьян, Мітчел, Морайне та Перес[11] довели, якщо E – скінченний орієнтований граф, то кожна локально компактна гаусдорфова напівгрупова топологія на графовій інверсній напівгрупі $G(E)$ є дискретною. Оскільки кожна з напівгруп із вище наведених класів напівгруп містить біциклічний моноїд як піднапівгрупу, то природньо виникає питання: *за яких умов* (алгебраїчних чи топологічних) *на напівгрупу S напівгрупова* (або навіть *трансляційно неперервна*) *топологія на S є дискретною?* Бардила і Гутік[12] довели, що аналогічне твердження виконується для графів, які містять одну вершину та нескінченну кількість петель, тобто для нескінченно породжених поліциклічних моноїдів. Зауважимо, що графові інверсні напівгрупи, на яких існує лише дискретна локально компактна напівгрупова топологія, описані С. Бардилою[13].

На перший погляд, дивна дихотомія для біциклічного моноїда з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0 = \mathscr{C}(p, q) \sqcup \{0\}$ доведена в праці Гутіка[14]: кожна локально компактна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на $\mathscr{C}^0$ є або компактною, або дискретною. Ця дихотомія до-

Gutik, T. Mokrytskyi // Eur. J. Math. – 2020. – Vol. 6, № 1. – P. 14–36.

[9]Fihel I. R. On the closure of the extended bicyclic semigroup / I. R. Fihel, O. Vol. Gutik // Карпатські мат. публ. – 2011. – Т. 3, № 2. – С. 131–157.

[10]Nivat M. Une gŕenŕeralisation du monoide bicyclique / M. Nivat, J.-F. Perrot // C. R. Acad. Sci., Paris, Sŕer. – 1970. – Vol. 271, A. – P. 824–827.

[11]Mesyan Z. Topological graph inverse semigroups / Z. Mesyan, J. D. Mitchell, M. Morayne, Y. H. Péresse // Topology Appl. – 2016. – Vol. 208. – P. 106–126.

[12]Bardyla S. On a semitopological polycyclic monoid / S. Bardyla, O. Gutik // Algebra Discr. Math. – 2016. – Vol. 21, № 2. – P. 163–183.

[13]Bardyla S. On locally compact topological graph inverse semigroups / S. Bardyla // Topology Appl. – 2019. – Vol. 267. – 106873.

[14]Gutik O. On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero / O. Gutik // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2015. – Vol. 80. – P. 33–41.

ведена С. Бардилою[15] для локально-компактного λ-поліциклічного моноїда і для локально компактних напівтопологічних графових інверсних напівгруп[16].

Природно називати напівгрупи, які містять біциклічну напівгрупу, біциклічними розширеннями. Так, зокрема, таку назву мають конструкції біциклічних розширень $\mathscr{B}(G)$ та $\mathscr{B}^{+}(G)$ лінійно впорядкованих груп G[17] та частково впорядкованих груп G[18,19,20]. Дослідженням властивостей таких топологічних розширень присвячений ряд праць[21,22,23,24], зокрема замиканням біциклічних розширень в топологічних напівгрупах. Оскільки при замиканні біциклічних розширень у топологічних (напівтопологічних) напівгрупах наріст може бути ідеалом, то природно виникає задача про описання приєднання ідеала або нуля до таких напівгруп за певних умов на топологічний простір напівгрупи.

Аналогічна задача розв'язана К. Г. Гофманном[25] про приєднання нуля до топологічної групи у випадку локально компактних топологічних напівгруп. У випадку локально компактних напівтополо-

---

[15] Bardyla S. Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids / S. Bardyla // Матем. вісник Наук. товариства ім. Шевченка. – 2016. – Т. 13. – С. 21–28.

[16] Bardyla S. On locally compact semitopological graph inverse semigroups / S. Bardyla // Mat. Stud. – 2018. – Vol. 49, № 1. – P. 19–28.

[17] Gutik O. Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group / O. Gutik, D. Pagon, K. Pavlyk // Acta Comment. Univ. Tartu. Math. – 2011. – Vol. 15, № 2. – P. 61–80.

[18] Fortunatov V. A. Congruences on simple extensions of semigroups / V. A. Fortunatov // Semigroup Forum. – 1976. – Vol. 13. – P. 283–295.

[19] Fotedar G. L. On a semigroup associated with an ordered group / G. L. Fotedar // Math. Nachr. – 1974. – Vol. 60. – P. 297–302.

[20] Fotedar G. L. On a class of bisimple inverse semigroups / G. L. Fotedar // Riv. Mat. Univ. Parma. – 1973. – Vol. 4, № 4. – P. 49–53.

[21] Ahre K. R. Locally compact bisimple inverse semigroups / K. R. Ahre // Semigroup Forum. – 1981. – Vol. 22, № 4. – P. 387–389.

[22] Ahre K. R. On the closure of $B^2_{[0,\infty)}$ / K. R. Ahre // İstanbul Tek. ÜniVol. Bül. – 1989. – Vol. 42, № 3. – P. 387–390.

[23] Korkmaz R. On the closure of $B^2_{(-\infty,+\infty)}$ / R. Korkmaz // Semigroup Forum. – 1997. – Vol. 54, № 2. – P. 166–174.

[24] Korkmaz R. Dense inverse subsemigroups of a topological inverse semigroup / R. Korkmaz // Semigroup Forum. – 2009. – Vol. 78, № 3. – P. 528–535.

[25] Hofmann K. H. Locally compact semigroups in which a subgroup with compact complement is dense / K. H. Hofmann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 106. – P. 19–51.

гічних напівгруп ця задача залишається нерозв'язаною. Тому виникає природна задача: *описати приєднання нуля до дискретної групи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп.* Більш загально ця задача була сформульована Берглундом[26], задача 7: *What is the fine structure of the closure of a group?*

Інтерасоціативністю напівгрупи[27] $(S, \cdot)$ називається напівгрупа $(S, *)$ така, що $a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * c$ і $a * (b \cdot c) = (a * b) \cdot c$ для всіх $a, b, c \in S$. Відомо, що кожна інтерасоціативність довільного моноїда визначається його варіантом[28], тобто для довільної інтерасоціативності $(S, *)$ моноїда $(S, \cdot)$ існує елемент $c \in S$ такий, що $a * b = a \cdot c \cdot b$. Інтерасоціативності та варіанти різних класів напівгруп активно вивчалися останнім часом. Зокрема довільна інтерасоціативність біциклічного моноїда містить біциклічний моноїд як піднапівгрупу, більше того, дві інтерасоціативності біциклічного моноїда ізоморфні тоді і лише тоді, коли породжуються одним елементом[29]. М. Хилинським[30] доведено критерій ізоморфізму двох інтерасоціативностей поліциклічного моноїда, а О. Десятерик[31] встановлено необхідні та достатні умови регулярності варіанта та ізоморфності двох варіантів для матричної напівгрупи Ріса з сендвіч матрицею над групою з нулем. Тому варіанти біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ природно розглядати як біциклічні розширення. Отже, постає задача про напівгрупову чи трансляційно неперервну топологізацію таких розширень і приєднання ідеала чи нуля до варіантів біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану нау-

[26]Berglund J. F. Problems about semitopological semigroups / J. F. Berglund // Semigroup Forum. – 1980. – Vol. 19. – P. 373–383.

[27]Ляпин Е. С. Полугруппы / Е. С. Ляпин. – Москва: Физматлит, 1960. – 592 с.

[28]Hickey J. B. Semigroups under a sandwich operation / J. B. Hickey // Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. – 1983. – Vol. 26, № 3. – P. 371–382.

[29]Givens B. N. Interassociates of the bicyclic semigroup / B. N. Givens, A. Rosin, K. Linton // Semigroup Forum. – 2017. – Vol. 94, № 1. – P. 104–122.

[30]Хилинський М. Інтерасоціативності поліциклічного моноїда / М. Хилинський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2018. – Вип. 86. – С. 77–90.

[31]Десятерик О. О. Варіанти комутативних зв'язок з нулем / О. О. Десятерик // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. "Фіз.-мат. науки". – 2015. – № 4. – С. 15–20.

кових досліджень кафедри алгебри, топології та основ математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми "Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці" (номер державної реєстрації 0116U001537).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертації є дослідити напівгрупові та трансляційно неперервні топологізації варіантів біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи, біциклічних розширень і приєднання ідеала чи нуля до варіантів біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп, описати приєднання нуля до дискретної групи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп.

Це передбачає розв'язання наступних задач:

- довести, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на довільному варіанті біциклічного моноїда є дискретною;
- дослідити наріст замикання варіантів біциклічного моноїда в напівтопологічних напівгрупах;
- дослідити приєднання нуля до варіантів біциклічного моноїда, розширеної біциклічної напівгрупи та дискретних груп у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп;
- описати групу автоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи та дослідити, чи вона та її варіанти є скінченно породженими, і чи існують ізоморфні її варіанти;
- дослідити трансляційно неперервні топології на варіантах розширеної біциклічної напівгрупи та локально компактні трансляційно неперервні топології на ненульовому варіанті розширеної біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем;
- дослідити трансляційно неперервні топології на біциклічному розширенні $\mathscr{B}(A)$ непорожньої трансляційної множини A зліченної лінійно впорядкованої групи G.

Об'єктом дослідження є розширена біциклічна напівгрупа, біциклічне розширення $\mathscr{B}(A)$ непорожньої трансляційної множини A лінійно впорядкованої групи та варіанти біциклічного моноїда і розширеної біциклічної напівгрупи.

Предметом дослідження є топологізація напівгруп, алгебраїчні властивості яких близькі до біциклічного моноїда, замикання напівгруп та груп у напівтопологічних напівгрупах.

Методи дослідження. Використано методи топологічної алгебри, теорії топологічних напівгруп, алгебраїчної теорії напівгруп, загальної топології.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані в дисертації результати є новими. У роботі отримані наступні результати:

- Доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія τ на довільному варіанті біциклічного моноїда $\mathscr{C}_{m,n}$ є дискретною, непорожній наріст напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ у замиканні інтерасоціативністі біциклічного моноїда I є двобічним ідеалом напівгрупи S, а також, що довільна гаусдорфова локально компактна трансляційно неперервна топологія τ на ненульовому варіанті $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}^0_{m,n}$ з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною.
- Доведено, що група автоморфізмів **Aut** $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ розширеної біциклічної напівгрупи ізоморфна адитивній групі цілих чисел, розширена біциклічна напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і кожен її варіант не є скінченно породженими, а також, що довільні два варіанти розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфні та описано трансляційно неперервні гаусдорфові топології на варіанті $\mathscr{C}^{0,0}_{\mathbb{Z}}$.
- Показано, що кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}^{\mathbf{0}}_{\mathbb{Z}}$ є дискретною, однак на $\mathscr{C}^{\mathbf{0}}_{\mathbb{Z}}$ існує континуум різних гаусдорфових локально компактних трансляційно неперервних топологій.
- Доведено, що для довільної зліченної лінійно впорядкованої групи G і непорожньої трансляційної множини $A \subseteq G$, кожна берівська трансляційно неперервна T_1-топологія τ на $\mathscr{B}(A)$ дискретна.
- Доведено, якщо G — дискретна електорально гнучка нескінченна група, то кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.

Особистий внесок здобувача. Усі результати отримані самостійно. У спільних статтях: [1] Пстрий К. М. належать усі результати, окрім постановки задач, твердження 1 і теореми 3, які належать співавторові Гутіку О. В.; [2] – усі результати, окрім постановки задач, яка належить співавторові Гутіку О. В.; [5] – усі результати, окрім постановки задач, яка належить співавторові Гутіку О. В.; [3] – усі результати, окрім постановки задач, яка належить співавторові Гутіку О. В. Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені лише результати, які належать здобувачу.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics", Львів, Україна (30 травня–04 червня, 2016 р.), назва доповіді "Semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups";
- міжнародній конференції "International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski", Львів, Україна (27 вересня–01 жовтня, 2016 р.), назва доповіді "On semitopological interassociates of the bicyclic monoid";
- 13-ій Літній Школі "Analysis, Topology and Applications", м. Вижниця, Чернівецька область, Україна (27 липня–11 серпня, 2018 р.), назва доповіді "On variants of the extended bicyclic semigroup";
- міжнародній конференції "Set-theoretic methods in topology and real functions theory. The conference is dedicated to the 80th birthday of Lev Bukovsky", Košice, Slovakia (9–13 вересня, 2019 р.), назва доповіді "On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero";
- міжнародній конференції "International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv", Київ, Україна (14–17 липня, 2020 р.), назва доповіді "On locally compact groups with zero".
- Семінарі "Топологія і застосування" в Львівському національному університеті імені Івана Франка, липень 2020 року.
- Семінарі "Топологічна алгебра" в Львівському національному університеті імені Івана Франка, вересень-жовтень 2016 року.
- Науковому семінарі ім. М. Комарницького "Теорія полігонів і спектральні простори" в Львівському національному університеті імені Івана Франка, травень 2016 року.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 10 працях: 4 статті, які опубліковані у наукових фахових виданнях України ([1], [2], [3], [4]), 1 стаття, яка опублікована у науковому виданні, віднесеному до третього квартиля (Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank ([5]), 4 тези у матеріалах міжнародних конференцій ([6], [7], [8], [9]) і 1 теза у матеріалах літньої школи ([10]).

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота обсягом 134 сторінки складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, п'яти основних розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 168 найменувань, і додатка.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику кандидату фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику, доценту кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка Олегу Володимировичу Гутіку, доктору фізико-математичних наук, професору кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка Тарасу Онуфрійовичу Банаху за постановку задач, корисні поради, постійну увагу та допомогу в роботі над дисертацією.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтована актуальність дисертаційного дослідження, визначені мета і задачі, об'єкт і предмет дослідження.

У першому підрозділі **розділу 1** подається огляд літератури, у якому коротко висвітлено історію розвитку теорії топологізації напівгруп та сформульовано основні задачі, розв'язку яких присвячена дана дисертаційна робота. У другому підрозділі першого розділу викладено відомі результати з теорії напівгруп та груп, які використовуються у дисертації.

Усі простори вважатимемо гаусдорфовими, якщо не зазначено інше. Через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_0$ і $\mathbb{N}$ позначатимемо множини усіх цілих, невід'ємних цілих і натуральних чисел, відповідно. *Біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p,q)$ називається напівгрупа, породжена елементами p і q, для яких виконується співвідношення $pq = 1$. Напівгрупа S із заданою на ній топологією τ називається *(напів)топологічною*, якщо напівгрупова операція в (S,τ) є (нарізно) неперервною, і в цьому випадку кажуть, що τ є *(трансляційно неперервною) напівгруповою* топологією на S. Інверсна топологічна напівгрупа (S,τ) з неперервною інверсією називається *топологічною інверсною напівгрупою*, а топологія τ в цьому випадку називається *інверсною напівгруповою* топологією на S.

Розділ 2 присвячений вивченню трансляційно неперервних топологізацій та замикання варіантів біциклічного моноїда і складається з трьох підрозділів.

Надалі для фіксованих невід'ємних цілих чисел m та n варіант $(\mathscr{C}(p,q), *_{m,n})$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$, який визначається сендвіч-операцією $q^ip^j *_{m,n} q^kp^l = q^ip^j \cdot q^mp^n \cdot q^kp^l$, позначатимемо

$\mathscr{C}_{m,n}$.

Наступна теорема узагальнює результат Ебергарта-Селдена про напівгрупову топологізацію біциклічної напівгрупи та відповідне твердження Бертман-Веста для напівтопологічних напівгруп.

Теорема 2.1.1. *Для довільних невід'ємних цілих чисел m і n кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія τ на $\mathscr{C}_{m,n}$ є дискретною. Отже, $\mathscr{C}_{m,n}$ є дискретним підпростором довільної топологічної напівгрупи, яка її містить.*

Наступна теорема також є узагальнням відповідного результату Ебергарта-Селдена для біциклічного моноїда.

Теорема 2.2.1. *Якщо m і n — довільні невід'ємні цілі числа, інтерасоціативність $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ є щільною піднапівгрупою гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S,\cdot)$ та $I = S \setminus \mathscr{C}_{m,n} \neq \varnothing$, то I є двобічним ідеалом напівгрупи S.*

Теорема 2.2.2 узагальнює результат Гутіка про те, що кожна локально компактна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на біциклічному моноїді з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною.

Теорема 2.2.2. *Нехай m і n — довільні невід'ємні цілі числа. Тоді кожна гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа $\mathscr{C}^0_{m,n}$ є або дискретною, або $\mathscr{C}^0_{m,n}$ топологічно ізоморфна напівгрупі $\left(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_{\mathsf{Ac}}\right)$.*

Теорема 2.2.3 описує приєднання компактного ідеалу до ненульового варіанта біциклічного моноїда у випадку локально компактної гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи та узагальнює відповідний результат для біциклічної напівгрупи.

Теорема 2.2.3. *Нехай $(\mathscr{C}^I_{m,n}, \tau)$ – гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа, $\mathscr{C}^I_{m,n} = \mathscr{C}_{m,n} \sqcup I$ й I компактний ідеал в $\mathscr{C}^I_{m,n}$. Тоді або $(\mathscr{C}^I_{m,n}, \tau)$ є компактною напівтопологічною напівгрупою, або ідеал I є відкритою множиною в $\mathscr{C}^I_{m,n}$.*

Розділ 3 присвячений дослідженню розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, її варіантів $\mathscr{C}^{m,n}_{\mathbb{Z}} = (\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, *_{m,n})$, $m, n \in \mathbb{Z}$, означених

$$(a,b) *_{m,n} (c,d) = (a,b) \cdot (m,n) \cdot (c,d).$$

На декартовому добутку $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ означимо напівгрупову операцію так:

$$(a,b)\cdot(c,d)=\begin{cases}(a-b+c,d), & \text{якщо } b<c;\\ (a,d), & \text{якщо } b=c;\\ (a,d+b-c), & \text{якщо } b>c,\end{cases}$$

для $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Множина $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, із так визначеною операцією, називається *розширеною біциклічною напівгрупою*.

Теорема 3.1.1. *Для довільного цілого числа k відображення $h_k\colon\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, визначене за формулою*

$$h_k((i,j))=(i+k,j+k),\tag{1}$$

є автоморфізмом розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і кожен автоморфізм $\mathfrak{h}\colon\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ визначається за формулою (1). Більше того, група автоморфізмів $Aut\,(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$ і цей ізоморфізм $\mathfrak{H}\colon\mathbb{Z}(+)\to Aut\,(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ визначається за формулою $\mathfrak{H}(k)=h_k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Теорема 3.1.2 і 3.2.5 дають негативну відповідь на запитання, чи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$, $m,n\in\mathbb{Z}$ є скінченно породженими?

Теорема 3.1.2. *Розширена біциклічна напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ не є скінченно породженою як інверсна напівгрупа.*

Наступні два твердження описують ідемпотенти та відношення Гріна на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$.

Твердження 3.2.2. *Нехай m і n – довільні цілі числа. Тоді елемент (a,b) є ідемпотентом у напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$ тоді і лише тоді, коли $(a,b)=(n+i,m+i)$ для деякого $i\in\mathbb{N}_0$.*

Твердження 3.2.3. *Нехай m і n – довільні цілі числа, (a,b) і (c,d) елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$. Тоді:*

(1) *$(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ тоді і лише тоді, коли $(a=c)\wedge((b=d)\vee(b,d\geqslant m))$;*

(2) *$(a,b)\mathscr{L}(c,d)$ тоді і лише тоді, коли $(b=d)\wedge((a=c)\vee(a,c\geqslant n))$;*

(3) *$(a,b)\mathscr{H}(c,d)$ тоді і лише тоді, коли $(a,b)=(c,d)$;*

(4) *$(a,b)\mathscr{D}(c,d)$ тоді і лише тоді, коли*

$$(a,b)=(c,d)\vee(a,c\geqslant n)\vee(b,d\geqslant m);$$

(5) *$(a,b)\,\mathscr{J}\,(c,d)$ для всіх $(a,b),(c,d)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$.*

Теорема 3.2.4. *Довільні два варіанти розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфні.*

Теорема 3.2.5. *Варіант $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ не є скінченно породженим.*

Теорема 3.3.3 описує властивості напівтопологічного варіанта $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$.

Теорема 3.3.3. *Нехай τ – гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$. Тоді з кожної нерівності $a > 0$ або $b > 0$ випливає, що (a, b) є ізольованою точкою в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$.*

Наступний приклад показує, що твердження теореми 3.3.3 є повним і не може бути поширене на жодну точку (a, b) з властивістю $a \leqslant 0$ і $b \leqslant 0$.

Приклад 3.3.1. *Означимо топологію τ^* на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ так. Покладемо*

(i) *(a, b) є ізольованою точкою в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ тоді і лише тоді, коли виконується принаймні одна з умов: $a > 0$ або $b > 0$;*

(ii) *якщо $ab = 0$ та $a + b \leqslant 0$, то приймемо, що $A_{(a,b)} = \{(a - i, b - i) : i \in \mathbb{N}_0\}$ – довільний гаусдорфовий простір і $A_{(a,b)}$ – відкрито-замкнена підмножина в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$.*

Твердження 3.3.4. *$\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ є топологічною напівгрупою.*

У **розділі 4** вивчаються локально компактні трансляційно неперервні та напівгрупові топології на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$.

Зокрема доведено, що для довільних двох послідовностей натуральних чисел $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ і $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ таких, що $x_1, y_1 > 1$, $x_n + 1 < x_{n+1}$, $2 < y_n + 1 < y_{n+1}$ для $n \in \mathbb{N}$, побудовано локально компактну топологію $\tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}$ на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ таку, що виконується

Теорема 4.1.3. *$\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}\right)$ – напівтопологічна напівгрупа.*

З теореми 4.1.3 випливає, що на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ існує континуум різних гаусдорфових локально компактних трансляційно неперервних топологій. А отже, аналог теореми Гутіка про те, що кожна локально компактна трансляційно неперервна топологія на біциклічному моноїді з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною, не виконується для розширеної біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$. Однак кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є дискретною (Наслідок 4.1.3).

Розділ 5 присвячений дослідженню топологізації біциклічного розширення лінійно впорядкованих груп і складається з трьох підрозділів.

Лінійно впорядкована група — це частково впорядкована група G така, що відношення часткового порядку “$\leqslant$” є лінійним.

Для лінійно впорядкованої групи G називатимемо підмножину

$A \subseteq G$ *трансляційною*, якщо для довільних $x, y, z \in A$ таких, що $y < x$, виконується $x \cdot y^{-1} \cdot z \in A$. Для довільної трансляційної множини

$$\mathscr{B}(A) = \{\alpha_b^a \colon G^+(a) \rightharpoonup G^+(b) \colon a, b \in A\}$$

є напівгрупою часткових бієкцій, визначених за формулою

$$(x)\alpha_b^a = x \cdot a^{-1} \cdot b, \qquad \text{для } \ x \in G^+(a).$$

Теорема 5.2.1. *Нехай A – зліченна непорожня трансляційна множина в лінійно впорядкованій групі G і τ – T_1-берівська трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$. Тоді топологічний простір $(\mathscr{B}(A), \tau)$ є дискретним.*

Теорема 5.2.2. *Нехай G — лінійно впорядкована група, яка не є щільно впорядкованою і A — непорожня трансляційна множина в G. Тоді кожна трансляційно неперервна гаусдорфова топологія τ на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$ є дискретною, а отже, $\mathscr{B}(A)$ є дискретним підпростором довільної напівтопологічної напівгрупи, яка містить $\mathscr{B}(A)$ як піднапівгрупу.*

Теореми 5.2.1 і 5.2.2 узагальнюють результати Бертман і Веста та Фігель і Гутіка, які отримані для біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи.

Розділ 6 присвячений дослідженню локально компактних груп з нулем і складається з трьох підрозділів.

Будемо говорити, що нескінченна група G:
— є *електорально гнучкою*, якщо для довільного розбиття $G = A \sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини, існують нескінченна множина $I \subseteq A$ та елемент $x \in G$ такі, що $I \cdot x \subseteq B$;
— є *електорально стійкою*, якщо G не є електорально гнучкою;
— є *локально скінченною*, якщо кожна її скінченна підмножина міститься в скінченній підгрупі в G;
— є *віртуально циклічною*, якщо G містить циклічну підгрупу скінченного індексу;
— *має більше ніж один кінець*, якщо існує нескінченна підмножина $S \subset G$ з нескінченним у G доповненням така, що симетрична різниця $S \Delta (S \cdot x)$ є скінченною для довільного елемента $x \in G$;
— *має один кінець*, якщо існує така єдина нескінченна підмножина $S \subset G$ із скінченним доповненням, яка задовольняє вищезгадані умови.

Підмножина A групи G називається *трансляційно майже стій-*

кою, якщо для довільного $x \in G$ симетрична різниця $A\Delta(A \cdot x)$ є скінченною.

У наступних двох твердженнях доведена така дихотомія:

Теорема 6.1.3. *Нехай G — дискретна електорально гнучка нескінченна група. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Твердження 6.1.4. *Нехай G — електорально гнучка зліченна група. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Наступні два твердження дають достатні умови, при виконанні яких група є електорально гнучкою.

Твердження 6.2.1. *Якщо комутативна група G містить нескінченну циклічну підгрупу $Z \subset G$ нескінченного індексу, то G є електорально гнучкою.*

Твердження 6.2.2. *Кожна незліченна комутативна група G є електорально гнучкою.*

Наступне твердження дає достатні умови, при виконанні яких група є електорально стійкою.

Твердження 6.2.3. *Кожна зліченна локально скінченна група G є електорально стійкою.*

В цьому розділі також побудовано приклад, який показує, що на кожній нескінченній віртуально циклічній групі з приєднаним нулем G^0 існують недискретні некомпактні локально компактні трансляційно неперервні топології, які індукують на G дискретну топологію.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню топологізацій напівгруп, алгебраїчні властивості яких близькі до біциклічного моноїда, а також структури замикання таких напівгруп і груп у напівтопологічних і топологічних напівгрупах. Зокрема розглядаються розширена біциклічна напівгрупа, біциклічне розширення $\mathscr{B}(A)$ непорожньої трансляційної множини A лінійно впорядкованої групи та варіанти біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи. Отримано наступні результати:

- Доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на довільному варіанті біциклічного моноїда є дискретною та якщо $\mathscr{C}_{m,n}$ – довільний варіант біциклічного моноїда такий, що $\mathscr{C}_{m,n}$ є щільною піднапівгрупою гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S,\cdot)$ і $I = S \setminus \mathscr{C}_{m,n} \neq \varnothing$, то I є двобічним ідеалом у S.

- Доведено, що для довільних невід'ємних цілих чисел m і n довільна гаусдорфова локально компактна трансляційно неперервна топологія τ на ненульовому варіанті $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}_{m,n}^0$ з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною.
- Доведено, що група автоморфізмів $\mathbf{Aut}\,(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел, розширена біциклічна напівгрупа та кожен її варіант не є скінченно породженими, довільні два варіанти розширеної біциклічної напівгрупи є ізоморфними.
- Описано трансляційно неперервні гаусдорфові топології на варіанті $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ розширеної біциклічної напівгрупи.
- Доведено, що кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є дискретною, однак на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ існує континуум різних гаусдорфових локально компактних трансляційно неперервних топологій.
- Доведено, що для довільної зліченної лінійно впорядкованої групи G і непорожньої трансляційної множини $A \subseteq G$, кожна берівська трансляційно неперервна T_1-топологія τ на $\mathscr{B}(A)$ дискретна, а у випадку лінійно нещільно впорядкованої групи G, кожна трансляційно неперервна гаусдорфова топологія τ на $\mathscr{B}(A)$ дискретна.
- Доведено, якщо G — дискретна електорально гнучка нескінченна група, то кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною; також на довільній нескінченній віртуально циклічній групі з приєднаним нулем G^0 побудовано недискретну некомпактну локально компактну трансляційно неперервну топологію, яка індукує на G дискретну топологію.

Достовірність результатів дисертації підтверджується тим, що вони опубліковані в фахових журналах і були оприлюднені на багатьох наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах. Для їх доведень використовуються сучасні методи топологічної алгебри, теорії топологічних напівгруп, алгебраїчної теорії напівгруп і загальної топології. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть знайти застосування як у топологічній алгебрі, так і в інших розділах математики.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Gutik O. *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid* / O. Gutik, K. Maksymyk // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2016. – Вип. 82. – С. 98–108.
2. Gutik O. *On variants of the extended bicyclic semigroup* / O. Gutik, K. Maksymyk // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2017. – Вип. 84. – С. 22–37.
3. Gutik O. *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero* / O. Gutik, K. Maksymyk // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2019. – Т. 62, № 4. – С. 28–38.
4. Максимик К. *Про локально компактні групи з нулем* / К. Максимик // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2019. – Вип. 88. – С. 51–58.
5. Gutik O. *On semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups* / O. Gutik, K. Maksymyk // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 238, № 1. – P. 32–45.
6. Gutik O. *Semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups* / O. Gutik, K. Maksymyk // International Conference "Complex Analysis and Related Topics", May 30-June 4, 2016, Lviv: Abstracts. – Lviv, 2016. – P. 30.
7. Maksymyk K. *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid* / K. Maksymyk, O. Gutik // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, September 27-October 1, 2016, Lviv: Abtract of Reports. – Lviv, 2016. – P. 31–32.
8. Gutik O. *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero* / O. Gutik, K. Maksymyk // Set-theoretic methods in topology and real functions theory. The conference is dedicated to the 80th birthday of Lev Bukovsky, September 9-13, 2019, Košice: Abstracts. – Košice, 2019. – P. 31–32.
9. Maksymyk K. *On locally compact groups with zero* / K. Maksymyk // International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, July 14–17, 2020, Kyiv: Book of Abstracts. – Kyiv, 2020. – P. 52.
10. Maksymyk K. *On variants of the extended bicyclic semigroup* / K. Maksymyk, O. Gutik // The 13-th Summer School "Analysis, Topology and Applications 29 July - 11 August, 2018, Vyzhnytsya,

Chernivtsi region, Ukraine: Book of Abstracts. – Chernivtsi, 2018. – P. 29–32.

АНОТАЦІЯ

Пстрий К. М. Топологізація та розширення груп, біциклічних напівгруп та їх варіантів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 — геометрія і топологія. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2021.

У дисертаційній роботі досліджуються топологізації напівгруп, алгебраїчні властивості яких близькі до біциклічного моноїда, а також структури замикання таких напівгруп і груп у напівтопологічних і топологічних напівгрупах. Зокрема розглядаються розширена біциклічна напівгрупа, біциклічне розширення $\mathscr{B}(A)$ непорожньої трансляційної множини A лінійно впорядкованої групи та варіанти біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи.

У дисертації доведено, що довільний варіант $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда допускає лише дискретну гаусдорфову трансляційно неперервну топологію, і якщо напівтопологічна напівгрупа S містить $\mathscr{C}_{m,n}$ як щільну власну піднапівгрупу, то $S \setminus \mathscr{C}_{m,n}$ є ідеалом у S. Це узагальнює результати Ебергарта і Селдена, отримані для біциклічного моноїда. Також доведено дихотомію: довільна гаусдорфова локально компактна трансляційно неперервна топологія на кожному варіанті біциклічного моноїда з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною. Описано приєднання компактного ідеала до довільного варіанта біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ у локально компактній напівтопологічній напівгрупі.

Доведено, що група автоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел, всі варіанти напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є попарно ізоморфними, а також, що напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і всі її варіанти не є скінченно породженими. Описано гаусдорфові трансляційно неперервні топології на варіантах напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, а також показано, що на варіантах напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, на відміну від варіантів біциклічного моноїда, існують недискретні гаусдорфові напівгрупові топології.

Наведено конструкцію, з якої випливає, що на відміну від біциклічного моноїда, для гаусдорфової локально компактної напівтопологічної розширеної біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0 = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \sqcup \{0\}$ не виконується дихотомія: існує континуум різних гаусдорфових недискретних некомпактних локально компактних трансля-

ційно неперервних топологій на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$. Однак кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$ є дискретною.

Доведено, що для довільної зліченної лінійно впорядкованої групи G та її непорожньої трансляційної множини A, кожна берівська трансляційно неперервна T_1-топологія на біциклічному розширенні $\mathscr{B}(A)$ дискретна, а також для довільної лінійної нещільно впорядкованої групи G кожна трансляційно неперервна гаусдорфова топологія на $\mathscr{B}(A)$ дискретна.

Доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на дискретній електорально гнучкій нескінченній групі з приєднаним нулем G^0 є або дискретною, або компактною. Наведено приклад, який показує, що на кожній віртуально циклічній групі з приєднаним нулем G^0 існують недискретні некомпактні локально компактні трансляційно неперервні топології, які індукують на групі G дискретну топологію.

Ключові слова: напівгрупа, інтерасоціативність напівгрупи, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, біциклічний моноїд, локально компактний простір, дискретний простір, біциклічне розширення, простір Бера, варіант напівгрупи, розширена біциклічна напівгрупа, група, електоральна гнучка група, електоральна стійка група, віртуально циклічна група.

АННОТАЦИЯ

Пстрый Е. Н. Топологизация и расширения групп, бициклических полугрупп и их вариантов. — На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.04 — геометрия и топология. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2021.

В диссертационной работе исследуются топологизации полугрупп, алгебраические свойства которых близки к бициклическому моноиду, а также структуры замыкания таких полугрупп и групп в полутопологических и топологических полугруппах. В частности рассматриваются расширеная бициклическая полугруппа, бициклическое расширение $\mathscr{B}(A)$ непустого трансляционного множества A линейно упорядоченной группы и варианты бициклического моноида и расширенной бициклической полугруппы.

В диссертации доказано, что произвольный вариант $\mathscr{C}_{m,n}$ бициклического моноида допускает только дискретную хаусдорфову трансляционно непрерывную топологию, и если полутопологическая полугруппа S содержит $\mathscr{C}_{m,n}$ как плотную собственную подполугруппу,

то $S\setminus\mathscr{C}_{m,n}$ является идеалом в S. Это обобщает результаты Эбергарта и Селдена, полученные для бициклического моноида. Также доказано дихотомию: произвольная хаусдорфова локально компактная трансляционно непрерывная топология на каждом варианте бициклического моноида с присоединенным нулём является либо компактной, либо дискретной. Описано присоединение компактного идеала к произвольному варианту бициклической полугруппы $\mathscr{C}_{m,n}$ в локально компактной полутопологической полугруппе.

Доказано, что группа автоморфизмов расширенной бициклической полугруппы $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ изоморфна аддитивной группе целых чисел, все варианты полугруппы $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ попарно изоморфны, а также, что полугруппа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ и все ее варианты не являются конечно порождёнными. Описано хаусдорфовы трансляционно непрерывные топологии на вариантах полугруппы $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, а также показано, что на вариантах полугруппы $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, в отличие от вариантов бициклического моноида, существуют недискретные хаусдорфовы полугрупповые топологии.

Приведена конструкция, из которой следует, что в отличие от бициклического моноида, для хаусдорфовой локально компактной полутопологической расширенной бициклической полугруппы с присоединенным нулём $\mathscr{C}^0_{\mathbb{Z}} = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \sqcup \{0\}$ не выполняется дихотомия: существует континуум различных хаусдорфовых недискретных некомпактных локально компактных трансляционно непрерывных топологий на $\mathscr{C}^0_{\mathbb{Z}}$. Однако каждая хаусдорфова локально компактная полугрупповая топология на полугруппе $\mathscr{C}^0_{\mathbb{Z}}$ является дискретной.

Доказано, что для произвольной счётной линейно упорядоченной группы G и её непустого трансляционного множества A, каждая бэровская трансляционно непрерывная T_1-топология на бициклическом расширении $\mathscr{B}(A)$ дискретна, а также для произвольной линейной неплотно упорядоченной группы G каждая трансляционно непрерывная хаусдорфова топология на $\mathscr{B}(A)$ дискретная.

Доказано, что каждая хаусдорфова трансляционно непрерывная локально компактная топология на дискретной электорально гибкой бесконечной группе с присоединенным нулём G^0 является или дискретной, или компактной. Приведен пример, который показывает, что на каждой виртуально циклической группе с присоединенным нулём G^0 существуют недискретные некомпактные локально компактные трансляционно непрерывные топологии, которые индуцируют на группе G дискретную топологию.

Ключевые слова: полугруппа, интерасоциативность полугруппы, полутопологическая полугруппа, топологическая полугруппа, бициклический моноид, локально компактное пространство, дискретное пространство, бициклическое расширение, пространство Бэра, вариант полугруппы, расширенная бициклическая полугруппа, группа, электорально гибкая группа, электорально устойчивая группа, вир-

туально циклическая группа.

ABSTRACT

Kateryna Pstryi. Topologization and extension of groups, bicyclic semigroups and their variants. – Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Mathematics (PhD): Speciality 01.01.04 – Geometry and Topology. – Ivan Franko National University of Lviv, the Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2021.

In the PhD thesis we study topologizations of semigroups, whose algebraic properties are closed to the bicyclic monoid and the structure of the closure of such semigroups and groups in semitopological and topological semigroups. In particular, we consider the extended bicyclic semigroup, the bicyclic extension $\mathscr{B}(A)$ of a non-empty shift-set A of a linearly ordered group and variants of the bicyclic monoid and the extended bicyclic semigroup.

We prove that any variant $\mathscr{C}_{m,n}$ of the bicyclic monoid admits only the discrete Hausdorff shift-continuous topology, and if a semigroup S contais $\mathscr{C}_{m,n}$ as a dense proper subsemigroup, then $S\setminus\mathscr{C}_{m,n}$ is an ideal of S. This is a generalization of well-known Eberhart's and Selden's results obtained for the bicyclic monoid. Also we show the following dichotomy: every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on the bicyclic monoid with an adjoined zero is either compact or discrete. We describe the adjoining of a compact ideal to an arbitrary variant of the bicyclic monoid $\mathscr{C}_{m,n}$ in a locally compact semitopological semigroup.

It is proved that the group of automorphisms of the extended bicyclic semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ is isomorphic to the additive group of integers, all variants of $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ are pairwise isomorphic, and the semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ and all its variants are not finitely generated. We describe Hausdorff shift-continuous topologies on variants of $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, and show that there exist non-discrete Hausdorff semigroup topologies on variants of the extended bicyclic semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.

We present the construction which implies that there exists a continuum of distinct Hausdorff non-discrete non-compact locally compact shift-continuous topologies on the extended bicyclic semigroup with an adjoined zero $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0 = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \sqcup \{0\}$. However, we show that every Hausdorff locally compact semigroup topology on $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$ is discrete.

It is shown that for any countable linearly ordered group G and its non-empty shift-set A every Baire shift-continuous T_1-topology on $\mathscr{B}(A)$ is discrete, and for any linearly non-dense ordered group G every shift-continuous Hausdorff topology on $\mathscr{B}(A)$ is discrete as well.

We prove that every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on a discrete electorally flexible infinite group with an adjoined zero G^0 is either compact or discrete. Also we show that on any virtually cyclic group with an adjoined zero G^0 there exist non-discrete non-compact locally compact shift-continuous topologies which induce the discrete topology on G.

Keywords: semigroup, interassociate of a semigroup, semitopological semigroup, topological semigroup, bicyclic monoid, locally compact space, discrete space, bicyclic extension, Baire space, variant of a semigroup, extended bicyclic semigroup, group, electorally flexible group, electorally stable group, virtually cyclic group.

Підписано до друку 08.04.2021 р.
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк на різографі. Зам. №123.
Ум. друк. арк. 1
Наклад 100 прим.

Видавництво “Галич-прес”
Видавець ФОП Король І. В.
м. Львів, вул. Гнатюка, 17
Ел. пошта: lvivprint@ukr.net. Тел. 096-59-88-924
Свідоцтво ДК №5353 від 24.05.2017 р.