Міністерство освіти і науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

РОМАНСЬКИЙ МИХАЙЛО МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 515.12

ФУНКТОРИ І АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

01.01.04 – геометрія і топологія

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
(доктора філософії)

Львів — 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математики ННІФМЕІТ
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Зарічний Михайло Михайлович,
в. о. завідувача кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, член-кореспондент НАН України.
Максименко Сергій Іванович,
завідувач лабораторії топології у складі відділу алгебри та топології інституту математики НАН України

доктор фізико-математичних наук, професор
Никифорчин Олег Ростиславович,
завідувач кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Захист відбудеться 13 травня 2021 р. о 15.05 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий ____ квітня 2021 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради **А.Я. Христіянин**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Асимптотична топологія, або груба геометрія — розділ математики, що досліджує властивості метричних просторів, а також більш загальних структур — так званих грубих просторів — “на нескінченності”. Це відрізняє її від класичної топології, яка оперує, в основному, властивостями простору, заданими локально, в околі точок. Таким чином, з точки зору грубої геометрії обмежені об'єкти відіграють роль порожньої множини — ними можна знехтувати.

Асимптотичні властивості метричних просторів вперше розглянув М. Громов у статті [11], в якій, зокрема, означено поняття асимптотичного виміру метричного простору. Праця М. Громова лягла в основу геометричної теорії груп і дала початок подальшого розвитку цього напрямку.

Вихід за межі метричних просторів у асимптотичній топології відбувся після запровадження так званих грубих структур (див. наприклад, [15]). У якомусь сенсі грубі структури є дуальними до рівномірних структур. Поняття асимптотичного виміру перенесене на грубі структури у статті [9]. Близькими до грубих структур виявилися боллеани, які означив і досліджував І.В. Протасов [13].

Основи асимптотичної топології викладено в статті [5] Дранішнікова. Уперше в літературі тут систематично проведено паралелі між асимптотичними властивостями власних метричних просторів та топологічними властивостями корон Гіґсона цих просторів, тобто наростів компактних розширень, породжених повільно коливними функціями. Одним з найяскравіших результатів тут є рівність асимптотичного виміру метричного простору і лебегового (покриттєвого) виміру корони [6].

Дранішніков також розглядає різноманітні конструкції у асимптотичній категорії (тобто категорії власних метричних просторів і асимптотично Ліпшицевих відображень), зокрема пропонує новий підхід до поняття добутку. Він також означує конус, надбудову і джойн (останній — як підмножину простору ймовірнісних мір, метризованих за допомогою метрики Канторовича-Рубінштейна).

Подальші дослідження в асимптотичній топології стосувалися нових асимптотичних вимірів, зокрема асимптотичного виміру Ассуада-Нагати та відповідної сублінійної корони метричних просторів.

Серед геометричних властивостей, що розглядаються в [5], — властивість бути екстензором для класу асимптотично ліпшицевих відображень. Вона дає змогу сформулювати ще одне поняття асимптотичного виміру, паралельне до означення Александрова виміру топологічних просторів у термінах продовження відображень у сфери.

Конструкції, що означив Дранішніков у статті [5], можна продовжити і на відображення, одержавши тим самим функтори в асимптотичній категорії. Інші функторіальні конструкції, скажімо гіперпростори та симетричні степені розглянуто у [18, 7, 8]. О. Шукель у [19] розглянула загальну конструкцію, яка кожному нормальному функторові скінченного степеня ставить у відповідність деякий функтор у асимптотичній категорії. Це свідчить про багатство функторів у асимптотичних категоріях і змістовність задачі їх дослідження.

Зауважимо, що теорія коваріантних функторів скінченного степеня у топологічних категоріях, зокрема, категорії компактних гаусдорфових просторів та категорії метризованих просторів, знаходить різноманітні застосування в геометричній топології (див., наприклад, [20, 4]). Важливий клас таких функторів виділив Є.В. Щепін [2]. Серед різноманітних результатів у цьому напрямку можна відзначити збереження функторіальними конструкціями скінченновимірних многовидів ([4]).

Для потреб макроскопічної (асимптотичної) топології означені асимптотичні категорії, зокрема груба категорія Дж. Роу і асимптотична категорія А. Дранішнікова. Метричний простір (X, d) називаємо власним, якщо кожна замкнена куля в просторі X компактна. Відображення $f: X \to Y$ називають власним, якщо прообраз кожної компактної множини є компактним. Відображення $f: X \to Y$ називають *грубо власним*, якщо прообраз кожної обмеженої множини є обмеженим. Асимптотична категорія $\mathcal{A}$ — це категорія, об'єктами якої є власні метричні простори, а морфізмами — власні асимптотично ліпшицеві відображення. Ізоморфізмами в категорії $\mathcal{A}$ є гомеоморфізми $f: X \to Y$ такі, що відображення f і f^{-1} — асимптотично ліпшицеві.

Велика асимптотична категорія $\bar{\mathcal{A}}$ — це категорія об'єктами якої є власні метричні простори (насправді можна розглядати всі метричні простори), а морфізмами — асимптотично ліпшицеві грубо власні відображення.

Груба категорія $\mathcal{B}$ є фактор-категорією категорії $\mathcal{A}$ за наступним відношенням еквівалентності на морфізмах: два морфізми в $\mathcal{A}$ є грубо еквівалентними, якщо відстань між ними скінченна. Тобто існує стала с така, що $d_Y\big(f(x), g(x)\big) < c$ для всіх $x \in X$. Морфізм $f: X \to Y$ в $\mathcal{A}$ називається грубим ізоморфізмом, якщо існує морфізм $g: Y \to X$ такий, що $f \circ g$ і $g \circ f$ еквівалентні одиничним відображенням 1_X і 1_Y відповідно. Метричні простори X і Y є грубо ізоморфними якщо існує грубий ізоморфізм $f: X \to Y$.

В статті [14] Дж. Роу визначив грубу категорію дещо по іншому. Морфізмами в цій категорії є грубо рівномірні відображення, а об'єктами, як і в асимптотичній категорії Дранішнікова, є власні метричні простори.

Однією з важливих загальних задач грубої геометрії є класифікація метричних просторів з точністю до грубої еквівалентності. Змістовною і актуальною задачею є дослідження просторів, що одержуються функторіальними конструкціями асимптотичної топології.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі математики ННІФМЕІТ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні планів наукової роботи Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення грубої та ліпшицевої еквівалентності функторів скінченних степенів, гіперпросторів, а також дослідження властивостей асимптотичного конуса та надбудови, означених Дранішніковим.

Об'єктом дослідження є функторіальні конструкції метричних просторів.

Предметом дослідження є методи побудови грубих ізоморфізмів в асимптотичних категоріях.

Завданнями дослідження є:

- перевірка завдання асимптотичного конуса та надбудови формулами $CX = X \times \mathbb{R}_+$, $\sum X = X \times \mathbb{R}$ для геодезійних просторів;

- дослідження питання ізоморфності асимптотичного конуса та джойна (підпростору простору ймовірнісних мір);

- перевірка ізоморфності асимптотичного конуса та надбудови;

- встановлення ліпшицевої еквівалентності між 3-іми симетричним та гіперсиметричним степенями над евклідовою прямою;

- дослідження грубої еквівалентності гіперпросторів над евклідовим простором;

- перенесення функторів симетричного степеня з категорії компактних метричних просторів у асимптотичну категорію та вивчення їх властивостей;

- встановлення асимптотичного аналогу теореми Ботта.

*Методи дослідження***.** У процесі виконання дисертаційної роботи використані методи асимптотичної топології та теорії категорій.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, є новими. У дисертації вперше:

- доведено, що асимптотичний конус $C\mathbb{R}_+$ та надбудова $\sum\mathbb{R}_+$ не ізоморфні в асимптотичних категоріях, а також показано, що ці простори не є ліпшицево еквівалентними евклідовому простору $\mathbb{R}^2_+$. У дисертації зауважується, що асимптотичний конус та надбудова не є власними просторами, а отже, варто розглядати об'єктами асимптотичних категорій всі метричні простори;
- доведено ліпшицеву еквівалентність надбудови $\sum\mathbb{R}_+$ та проективного квадрата $\mathrm{Pr}^2(\mathbb{R})$;
- доведено теореми про ізоморфність джойна $X * \mathbb{R}_+$ та простору $X \times \mathbb{R}_+$ для випадків, коли X є евклідовим простором або γ-слабо опуклим та δ-слабо вгнутим геодезійним простором. Ці теореми дають відповідь на одне з питань Дранішнікова;

- доведено ізоморфність 3-го асимптотичного гіперсиметричного степеня евклідової площини та 4-х мірного евклідового простору. Цей результат є аналогом теореми Р.Ботта, яка стверджує, що 3-й гіперсиметричний степінь кола гомеоморфний 3-вимірній сфері;
- доведено теорему про ліпшицеву еквівалентність гіперпростору $\exp_2\mathbb{R}^m$ декартового добутку $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^{m-1})$. Цей результат можна вважати грубим аналогом теореми Шорі [[17], теорема 8];
- доведено, що простір ймовірнісних мір $P_2(\mathbb{R})$ не вкладається ліпшицево в евклідів простір $\mathbb{R}^n$ для всіх n;
- доведено теореми про ліпшицеву еквівалентність гіперпросторів $\exp_3\mathbb{R}_+$, $\exp_3\mathbb{R}$ симетричних степенів $SP^3(\mathbb{R}_+)$, $SP^3(\mathbb{R})$ та евклідового простору $\mathbb{R}^3_+$;
- порівняно гіперпростори компактних, опуклих та зв'язних множин евклідових просторів з точністю до грубої еквівалентності.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати для розв'язування задач асимптотичної топології.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних статтях: [М1] Романському М.М. належать усі результати, окрім постановки задач та ідей доведення теорем 3 і 4; [М2] — усі результати, окрім постановки задач та ідей доведення твердження 1 і леми 1; [М3] — усі результати, окрім постановки задач; [М4] — усі результати, окрім постановки задач та ідеї доведення леми 2. Зі статтей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на:

[1.] М. М. Романський. Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпшицева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій. International Scientific Conference "Algebraic and geometric methods of analysis" (Odesa, May 26-30, 2020).

[2.] семінарі "Топологія і застосування" в ЛНУ імені Івана Франка (керівник проф. Т.О. Банах).

[3.] міжнародній науковій онлайн конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" 26-30 травня 2020 р. Одеса.

[4.] семінарі "Топологічна алгебра" в ЛНУ імені Івана Франка (керівник доц. О. В. Гутік).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 6 наукових працях: 5 статтях (1 стаття в наукометричній базі даних Scopus [M5]), 1 теза міжнародної конференції [M6].

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота обсягом 110 сторінок складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, п’яти розділів, висновків і списку використаних джерел, який налічує 77 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтована актуальність дисертаційного дослідження, визначені мета, завдання та методи досліджень, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, а також, описано структуру й обсяг дисертації.

У **Розділі 1** подано огляд літератури за темою дисертації, наведено відомості про асимптотичні категорії та функтори в топологічних та метричних категоріях. У підрозділі 1.3 наведено необхідні означення і факти, які використовуються в дисертації.

Розділ 2 присвячений дослідженню властивостей асимптотичного конуса, надбудови та джойна.

Декартів добуток $(X \times Y, d_X + d_Y)$ не є категорним в асимптотичній категорії, оскільки проекції на множники не є морфізмами. У статті [5] А. Дранішніков означив асимптотичний добуток

$X \tilde{\times} Y(x_0, y_0) = \{(x, y) |\ d_X(x_0, x) = d_Y(y_0, y),\ x \in X,\ y \in Y\}$,

де x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. Метрика на $X \tilde{\times} Y$ індукована вкладенням $X \tilde{\times} Y \subset X \times Y$.

Асимптотичний конус CX і надбудова $\sum X$ в асимптотичних категоріях для кожного метричного простору означені як такі факторпростори: $CX =$

$X \tilde{\times} \mathbb{R}_+^2 / i_+(X)$ і $\sum X = X \tilde{\times} \mathbb{R}_+^2 / i_\pm(X)$, де $i_\pm : X \to X \tilde{\times} \mathbb{R}_+^2$ вкладення, означені формулами $i_\pm(x) = (x, \pm\|x\|, 0)$.

У підрозділі 2.1 побудовано контрприклад до формули Дранішнікова для конуса і надбудови геодезійних просторів: $CX = X \times \mathbb{R}_+$, $\sum X = X \times \mathbb{R}$.

Лема 2.1.1 Конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}_+^2$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Дранішніков визначив джойн $X * \mathbb{R}_+$ як підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини.

Лема 2.1.2 Джойн $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпростору $\mathbb{R}_+^{n+1}$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Також доведено неізоморфність конуса та джойна, побудованих над евклідовим простором, в асимптотичній категорії.

Метричний простір (X, d) називається геодезійним, якщо для будь-яких двох точок $x, y \in X$, існує ізометричне вкладення відрізка $c_{xy} : [0, d(x, y)] \to X$, де $c_{xy}(0) = x$, а $c_{xy}\big(d(x, y)\big) = y$. Вкладення c_{xy} будемо називати геодезійним відрізком, що з'єднує точки $x, y \in X$.

Геодезійний простір (X, d) називається γ-слабо опуклим ($\gamma \geq 1$), якщо кожна пара геодезійних відрізків, c_{xy} і c_{xz}, задовільняють нерівність

$$d\Big(c_{xy}\big(t \cdot d(x, y)\big), c_{xz}\big(t \cdot d(x, z)\big)\Big) \leq \gamma \cdot t \cdot d(y, z) \text{ (див. [10]).}$$

Наступне поняття ми означуємо за аналогією до розглянутого вище, разом з яким воно дасть змогу розширити результати, доведені для геодезійних просторів, на дещо ширші класи метричних просторів.

Геодезійний простір (X, d) називається δ-слабо вгнутим $0 < \delta \leq 1$, якщо кожна пара геодезійних відрізків, c_{xy} і c_{xz}, задовольняють нерівність

$$d\Big(c_{xy}\big(t \cdot d(x, y)\big), c_{xz}\big(t \cdot d(x, z)\big)\Big) \geq \delta \cdot t \cdot d(y, z)\,.$$

Основний результат підрозділу 2.2 є встановлення ізоморфності в асимптотичних категоріях джойна $X * \mathbb{R}_+$ та декартового добутку $X \times \mathbb{R}_+$ для випадків, коли X є γ-слабо опуклим та δ-слабо вгнутим геодезійним простором. Ці результати дають відповідь на одне з питань Дранішнікова.

Лема 2.2.1 Нехай X є γ-слабо опуклий та δ-слабо вгнутим геодезійним простором. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпростору $X \times \mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Категорне поняття добутку (асимптотичний добуток) породжує функтори скінченного степеня в асимптотичних категоріях. У **розділі 3** ми переносимо конструкції симетричного степеня, гіперпростору, простору ймовірнісних мір та суперрозширення в асимптотичні категорії та досліджуємо їхні властивості.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на степені $X^n_{\mathcal{A}}$, що задається умовою: $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $(1, \dots n)$ така що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, \dots, n$. Факторпростір простору $X^n_{\mathcal{A}}$ за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X в категорії $\mathcal{A}$ і позначають $\widetilde{SP}^n(X)$.

Клас еквівалентності відношення $\sim$, що містить точку $(x_1, \dots, x_n)$, позначають $[x_1, \dots, x_n]$. Якщо $x_0 \in X$ — відмічена точка, то приймемо

$$\widetilde{SP}^n(X) = \{[x_1, \dots, x_n] \in SP^n(X) | d(x_i, x_0) = d\big(x_j, x_0\big), i, j = 1, \dots, n\}$$

Метрика $\hat{d}$ на $\widetilde{SP}^n(X)$ індукована з $SP^n(X)$ і задається наступною формулою $\hat{d}([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n]) = \min_{\sigma \in S_n} \max_i d\big(x_i, y_{\sigma(i)}\big)$.

Твердження 3.1.1 В асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, другий симетричний степінь $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний конусу $\mathrm{Cone}(M)$, де M — лист Мебіуса.

Твердження 3.1.2 Симетричний квадрат $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+)$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ ізоморфний $\mathbb{R}^3_+$.

Нехай (X, d) — метричний простір. Через $\exp X$ позначають гіперпростір простору X, тобто множину непорожніх компактних підмножин в X, наділену метрикою Гаусдорфа ρ_H:

$$\rho_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Тут $O_\varepsilon(B)$ означає відкритий ε -окіл підмножини B.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через $\exp_n(X)$ позначимо підпростір $\exp X$, що складається з усіх множин потужності $\leq n$.

Означимо n-ий гіперсиметричний степінь в асимптотичній категорії формулою $\widetilde{\exp}_n(X) = \{A \in \exp_n(X) \mid \|x\| = \|y\|,\ x, y \in A\}$.

Метрика на просторі $\widetilde{\exp}_n(X)$ індукована з гіперпростору $\exp_n(X)$.

Наступна теорема є грубим аналогом теореми Р.Ботта, яка стверджує, що 3-й гіперсиметричний степінь кола гомеоморфний 3-вимірній сфері.

Теорема 3.2.1 Простір $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ у категорії $\mathcal{A}$.

Нагадаємо, що через $P_n(X)$ позначаємо простір ймовірнісних мір, носіями яких є множини з $\exp_n(X)$.

Теорема 3.3.2. Простір $\tilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ у категорії $\mathcal{A}$.

У цьому розділі ми навели приклад біліпшицевого вкладення симетричного степеня $SP^n(X)$ в простір ймовірнісних мір $P_n(X)$.

Поняття проективного степеня топологічного простору означив А. Шанковський [19]. Нам знадобиться допоміжне поняття: точка $y \in Y$ називається істотною координатою точки $(y_1, \dots, y_n) \in Y^n, n \in \mathbb{N}$, якщо множина $\{j \mid y_j = y\}$ складається з непарного числа елементів. Тепер означуємо n-й проективний степінь простору X як фактор простір $X^n/\sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ означене умовою: $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ тоді і тільки тоді, коли точки $(x_1, \dots, x_n)$ і $(y_1, \dots, y_n)$ мають однакову множину істотних координат. Позначення для n-го проективного простору топологічного простору X таке: $Pr^n(X)$.

Якщо X — метричний простір, то множину X^2 метризуємо sup-метрикою, а проективний квадрат метризуємо фактор-метрикою, індукованою sup-метрикою.

Твердження 3.4.1 Проективний квадрат $Pr^2(\mathbb{R})$ ізоморфний надбудові $\sum \mathbb{R}_+$.

Поняття суперрозширення $\lambda(X)$ топологічного простору X запровадив Й. де Гроот [12] у зв'язку з властивістю суперкомпактності топологічних просторів. Для зручності будемо розглядати тільки компактний гаусодорфовий випадок. За означенням, $\lambda(X)$ — це множина максимальних зчеплених систем замкнених множин у просторі X. При цьому сім'я множин у топологічному просторі називається зчепленою, якщо кожні два її елементи мають непорожній перетин; максимальність розуміємо стосовно відношення включення.

Для елементів простору $\lambda(X)$ можна означити поняття носія як мінімальної (відносно включення) замкненої множини, на якій слід максимальної зчепленої системи залишається максимальною зчепленою системою. Для кожного натурального n через $\lambda_n(X)$ множину елементів з $\lambda(X)$, для яких носій складається з не більше n точок.

Для подальшого розуміння нам знадобиться альтернативний опис підмножини $\lambda_3(X)$, що складається з максимальних зчеплених систем в X, носії яких мають потужність ≤ 3. Нехай $x, y, z \in X$. Позначимо через $[x, y, z]$ сім'ю замкнених підмножин $A \subset X$, що мають властивість: A містить принаймні одну з трьох множин $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$. Носієм елемента називаємо множину:

1) $\{x, y, z\}$, якщо всі три точки x, y, z попарно різні;
2) $\{t\}$, якщо t зустрічається щонайменше двічі у послідовності x, y, z.

Нехай d — метрика на множині X. Тоді на множині $\lambda_3(X) = \{[x, y, z] \mid x, y, z \in X\}$ можна означити метрику d_V:

$$d_V([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2]) = \inf\{\varepsilon > 0 |$$
$$\varepsilon - \text{окіл кожного елемента з } [x_1, y_1, z_1] \text{ містить елемент з } [x_2, y_2, z_2]\}.$$

Аналогічно до розглянутого вище, для кожного власного метричного простору (X, d) з відміченою точкою $x_0 \in X$ означимо $\tilde{\lambda}_3(X)$ як підмножину $\lambda_3(X)$, утворену елементами $[x, y, z]$ такими, що функція $\|\cdot\|$ стала на множині $\mathrm{supp}([x, y, z])$.

Теорема 3.5.1 Простір $\tilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ в категорії $\mathcal{A}$.

Цю теорему можна вважати асимптотичним аналогом результату М. Зарічного [1] про гомеоморфність суперрозширення $\lambda_3(S^1)$ та сфери S^3.

У **розділі 4** порівняно гіперпростори компактних, опуклих та зв'язних множин евклідових просторів з точністю до грубої еквівалентності, а також досліджено питання геодезійності цих просторів.

Нагадаємо, що через $\mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)$ позначаємо гіперпростір компактних опуклих підмножин у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

У цьому розділі ми довели, що гіперпростори компактних множин $\exp(\mathbb{R}^n)$ та компактних опуклих множин евклідового простору $\mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)$ є геодезійними просторами.

Теорема 4.1.6 Простори $\exp(\mathbb{R}^n)$ і $\mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)$ не є грубо еквівалентними.

Для гіперпростору зв'язних множин евклідового простору $\exp^c(\mathbb{R}^2)$ ми знайшли дві множини, для яких не існує геодезійного відрізка, що з'єднує їх. Тим самим ми довели негеодезійність $\exp^c(\mathbb{R}^2)$.

Теорема 4.2.5 Простори $\exp(\mathbb{R}^n)$ і $\exp^c(\mathbb{R}^n)$ не є грубо еквівалентні.

Розділ 5 присвячений дослідженню грубої еквівалентності деяких функторіальних конструкцій.

Теорема 5.1.1 Гіперпростір $\exp_3\mathbb{R}_+$, симетричний степінь $SP^3(\mathbb{R}_+)$ та простір $\mathbb{R}_+^3$ ліпшицево еквівалентні.

Теорема 5.1.2 Гіперпростір $\exp_3\mathbb{R}$, симетричний степінь $SP^3(\mathbb{R})$ та простір $\mathbb{R}_+^3$ ліпшицево еквівалентні.

У статті [[17], теорема 8] Шорі довів гомеоморфність просторів $I^m(2)$ та $C(P^{m-1} \times I^m), (m = 1,2, \dots)$, де P^{m-1} — проективний простір. Наступну теорему можна вважати аналогом результату Шорі для асимптотичної категорії.

Теорема 5.2.4 Гіперпростір $\exp_2\mathbb{R}^m$ ліпшицево еквівалентний добуткові $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^{m-1})$.

У цьому розділі також доведено, що простір ймовірнісних мір $P_2(\mathbb{R})$ не вкладається ліпшицево в евклідів простір $\mathbb{R}^n$ для всіх n.

Ще одним результатом цього розділу є така теорема.

Теорема 5.2.9 Простори $C(\mathbb{R}_+)$ і $\sum \mathbb{R}_+$ не є грубо еквівалентні.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено класифікації функторіальних конструкцій з точністю до грубої еквівалентності (встановлення грубої та ліпшицевої еквівалентності між функторіальними конструкціями), а також дослідження властивостей асимптотичного конуса та надбудови означених Дранішніковим.

У роботі спростовано твердження Дранішнікова [4] про можливість задавати асимптотичний конус і джойн в асимптотичних категоріях простими формулами $CX = X \times \mathbb{R}_+$, $\sum X = X \times \mathbb{R}$. Варто зауважити, що ці результати породжують питання істинності наступної імплікації $CX \in AE \Rightarrow X \in ANE$, а отже, і коректності означення абсолютно околового екстензора в асимптотичній категорії.

Як зазначено у розділі 2, асимптотичний конус і надбудова не є власними просторами. Тому обмеження для об'єктів асимптотичних категорій (бути власним метричним простором) є занадто строгими. Варто розглядати об'єктами асимптотичних категорій всі метричні простори, бо в іншому випадку означення асимптотичного конуса і надбудови не будуть коректними.

У роботі ми дали відповідь на ще одне питання Дранішнікова: чи ізоморфні конус CX і джойн $X * \mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії.

У розділі 3 ми переносимо конструкції деяких функторів скінченного степеня з категорії компактних метричних просторів у асимптотичну категорію та дослідили деякі їхні властивості (це зумовлено категорним поняттям добутку).

Доведено ізоморфність асимптотичного симетричного квадрата над $\mathbb{R}^2_+$ та евклідового простору $\mathbb{R}^3_+$ в асимптотичній категорії. Отримано асимптотичний аналог теореми Р.Ботта [3].

Досліджена груба еквівалентність (тобто еквівалентність в асимптотичній категорії Дж. Роу) гіперпросторів компактних множин, опуклих компактів та континуумів над евклідовими просторами.

Доведено, що 3-і гіперсиметричні та симетричні степені евклідових прямої та півпрямої — ліпшицево еквівалентні евклідовому простору $\mathbb{R}^3_+$. Також доведено асимптотичний аналог одного результату Шорі.

Автор висловлює щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору Львівського національного університету імені Івана Франка Михайлу Михайловичу Зарічному за постановку задач, цікаві ідеї та особливу увагу до роботи.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Заричный М.М. Фундаментальная группа суперрасширения $\lambda_n(X)$. В кн.: Отображения и функторы. Под ред. П.С. Александрова. — Москва: МГУ,1984 - С. 24-31.

[2] Е.В. Щепин, Функторы и несчетные степени компактов, УМН, 36:3(219) (1981), 3–62; Russian Math. Surveys, 36:3 (1981), 1–71.

[3] Bott R. On The Third Symmetric Potency of S^1. Fund. Math. 39.1 (1952): 264-268.

[4] Clifford H. Wagner. Symmetric, cyclic, and permutation products of manifolds. Rozprawy Matematyczne tom/nr w serii: 182. wydano: 1980.

[5] Dranishnikov A. Asymptotic topology. Russian Math. Surveys., Vol. 55, No 6 (2000), P. 71-116.

[6] A. Dranishnikov, J. Keesling, V. Uspenskij, On the Higson corona of uniformly contractible spaces, Topology 37 (1998), no. 4, 791--803.

[7] Frider V. Normal functors in coarse category. Algebra and Discrete Mathematics.-2005.-N4.-P.16-27.

[8] Frider V., Zarichnyi M. Characterization of G-symmetric power functors in the coarse category, Visn. L'viv. un-tu. Ser. Mech.-Mat. (2006), Vol. 66, 230-235.

[9] Bernd Grave, Asymptotic dimension of coarse spaces, New York J. Math. 12 (2006), 249–256.

[10] J. Goblet, A selection theory for multiple-valued funtions in the sense of Almgren, Ann. Acad. Scient. Fenn. Mat., Vol. 31, 2006, 297-314.

[11] Gromov M. Asymptotic invariants for infinite groups. Geometric Group Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. - 1993. - V. 182, № 2. - P. 1-295.

[12] J. de Groot, Superextensions and supercompactness.,Proc. I. Intern. Symp. on Extension Theory of Topological Structures and its Applications, VEB Deutscher Verlag Wiss., Berlin, 1967, 89–90.

[13] Protasov I., Zarichnyi M. General asymptology. (Math. Studies: Monograph Series. - Vol. XII) Lviv: VNTL Publ, (2007), 219 - P.

[14] Roe J. Index Theory, Coarse Geometry, and Topology of Manifolds. Washington, DC: Conf. Board Math. Si., 1996. (CBMS Regional Conf. Ser. in Math. V. 90.)

[15] Roe, John. Lectures on coarse geometry, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[16] Roe J. Lectures in Coarse Geometry. (University Lecture Series - Vol. 31) American Mathematical Society: Providence, Rhode Island, (2003), 175 - pp.

[17] Scori R.M. Hyperspaces and symmetric products of topological spaces. Fund. Math. 63 (1968).

[18] Shukel' O. Functors of finite degree and asymptotic dimension zero, Mat. Stud. 29 (2008) N1, 101-107.

[19] A. Szankowski, Projective potencies and multiplicative extension operators. - Fundamenta Mathematicae (1970) Volume: 67, Issue: 1, page 97-113.

[20] Teleiko A., Zarichnyi M. Categorical topology of compact Hausdorff spaces. Mathematical Studies Monograph Series, 5. VNTL Publishers, Lviv, 1999. 256 pp.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[M1] Зарічний М.М., Романський М.М., Савченко О.Г.: Функтори скінченного степеня у асимптотичних категоріях. Праці міжнародного геометричного центру 8(1), 84-92 (2015)

[M2] Zarichnyi M., Romanskyi M.: Asymptotic properties of the (convex) hyper-spaces. Proceedings of the International Geometry Center 8(3-4) 60-64 (2015).

[M3] Zarichnyi M., Romanskyi M.: Cone and join in the asymptotic categories. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 34-41.

[M4] Zarichnyi M., Romanskyi M.: On coarse equivalence of the hyperspaces of euclidean spaces. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 67-70.

[M5] Romanskyi M.: Coarse equivalences of functorial constructions. Proceedings of the International Geometry Center 12(3), 69–77 (2019).

[M6] Романський М.М.: Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпшицева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій. International Scientific Conference "Algebraic and geometric methods of analysis" (Odesa, May 26-30, 2020).

АНОТАЦІЯ

Романський М.М. Функтори *і асимптотичні властивості метричних просторів.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 "Геометрія і топологія". – "Львівський національний університет імені Івана Франка", Львів, 2021.

У дисертаційній роботі досліджена груба та ліпшицева еквівалентність між деякими функторіальними конструкціями, а також деякі властивості конуса, джойна та надбудови в асимптотичних категоріях.

Дисертація присвячена сучасній області топології, яка останніми десятиліттями інтенсивно розвивається – асимптотичній топології (прийнято також термін "груба геометрія").

Однією з важливих задач асимптотичної топології є класифікація функторіальних конструкцій з точністю до грубої еквівалентності. У цьому напрямку лежать результати дисертації.

Ми показали, що асимптотичний конус $C\mathbb{R}_+$ і надбудова $\sum\mathbb{R}_+$ не є ізоморфними. Дранішніков визначив джойн $X * Y$ як підпростір простору ймовірнісних мір $P_2(X \vee Y)$ та поставив питання ізоморфності конуса CX і джойна $X * \mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії. Ми довели, що ці простори не є ізоморфними, однак встановили ізоморфність джойна $X * \mathbb{R}_+$ та декартового добутку $X \times \mathbb{R}_+$, для випадків коли X є n-мірним евклідовим простором або γ-слабо опуклим та δ-слабо вгнутим геодезійним простором.

З результатів дисертації варто відзначити ті, що стосуються грубої еквівалентності (тобто еквівалентності в асимптотичній категорії Дж. Роу) функторіальних конструкцій. Для прикладу, розглянуто гіперпростори (простори компактних підмножин) евклідових просторів і показано, що вони не є грубо еквівалентні гіперпросторам континуумів (зв'язних компонентів) та гіперпросторам опуклих компактів.

Гіперпростір $\exp_2\mathbb{R}^m$ та простір $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^{m-1})$ є ліпшицево еквівалентними. Цей результат можна вважати грубим аналогом одного результату Шорі [17].

У дисертації доведено асимптотичний аналог теореми Р.Ботта.

Ключові слова: асимптотична категорія, асимптотичний вимір, ліпшицеве відображення, ізоморфізм, груба еквівалентність, функтор, геодезійний метричний простір, факторпростір, асимптотичний конус, джойн, надбудова, гіперпростір, симетричний степінь, проективний степінь, простір ймовірнісних мір, суперрозширення, метрика Гаусдорфа.

АННОТАЦИЯ

Романский М.М. *Функторы и асимптотические свойства метрических пространств. – Рукопись.*

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.04 "Геометрия и топология". – "Львовский национальный университет имени Ивана Франко", Львов, 2021.

В диссертационной работе исследована грубая и липшицева эквивалентность между некоторыми функториальными конструкциями, а также некоторые свойства конуса, джойна и надстройки в асимптотических категориях.

Диссертация посвящена современной области топологии, которая в последние десятилетия интенсивно развивается – асимптотической топологии (принято также термин «грубая геометрия»).

Одной из важных задач асимптотической топологии является классификация функториальных конструкций с точностью до грубой эквивалентности. В этом направлении лежат результаты диссертации.

Мы показали, что асимптотический конус $C\mathbb{R}_+$ и надстройка $\sum\mathbb{R}_+$ не является изоморфными. Дранишников определил джойн $X * Y$ как подпространство пространства вероятностных мер $P_2(X \vee Y)$ и поставил вопрос изоморфности конуса CX и джойна $X * \mathbb{R}_+$ в асимптотической категории. Мы доказали, что эти пространства не являются изоморфными, однако установили изоморфность джойна $X * \mathbb{R}_+$ и декартового произведения $X \times \mathbb{R}_+$, для случаев, когда X является n- мерным евклидовым пространством или γ-слабо выпуклым и δ-слабо вогнутым геодезическим пространством.

Из результатов диссертации стоит отметить касающиеся грубой эквивалентности (т.е. эквивалентности в асимптотической категории Дж. Роу) функториальных конструкций. Например, рассмотрено гиперпространство (пространства компактных подмножеств) евклидовых пространств и показано, что оно не являются грубо эквивалентным гиперпространству континуумов (связных компонентов) и гиперпространству выпуклых компактов.

Гиперпространство $\exp_2 \mathbb{R}^m$ и пространство $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^{m-1})$ является липшицево эквивалентными. Этот результат можно считать грубым аналогом одного результата Шори [17].

В диссертации доказано асимптотический аналог теоремы Р.Ботта.

Ключевые слова: асимптотическая категория, асимптотическое измерение, липшицево отображение, изоморфизм, грубая эквивалентность, функтор, геодезическое метрическое пространство, факторпространство, асимптотический конус, джойн, надстройка, гиперпространство, симметрическая степень, проективная степень, пространство вероятностных мер, суперрасширение, метрика Хаусдорфа.

ABSTRACT

Romanskyi M.M. Functors and asymptotic properties of metric spaces. – Manuscript.

Thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD) degree on the speciality 01.01.04 – Geometry and Topology. – Ivan Franko Drohobych State University – Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2021.

In the thesis, the coarse and Lipschitz equivalence between some functorial constructions, as well as some properties of cone, join and suspension the in asymptotic categories are investigated.

The thesis is devoted to the modern field of topology, which has been intensively developing in recent decades - asymptotic topology (the term “coarse geometry” is also used). It is devoted to the study of large-scale invariants of metric spaces and, more generally, coarse structures (modifications of the latter are the so-called balleans, which were introduced and studied by I.V. Protasov).

This branch of topology also has its origins in the geometric group theory. Thus M. Gromov defined the concept of the asymptotic dimension of a finitely generated group, which has found application in solving certain open problems of algebraic topology. Modifications of the asymptotic Gromov dimension (asymptotic Assouad-Nagata dimension, asymptotic power dimension) were also identified.

Naturally, the study of the asymptotic properties of metric spaces requires their inclusion in a certain category. The most important for application are the asymptotic categories of A. Dranishnikov and J. Roe, for which various functorial constructions have been identified and studied.

One of the important tasks of asymptotic topology is the classification of functorial structures up to Lipschitz equivalence. The results of the thesis lie in this direction.

We shown that the asymptotic cone $C\mathbb{R}_+$ and the suspension $\sum\mathbb{R}_+$ are not isomorphic. Dranishnikov defined the join $X * Y$ as a subspace of the space of probability measures $P_2(X \vee Y)$ and raised the question of the isomorphism of the cone CX and the join $X * \mathbb{R}_+$ in the asymptotic category. We have proved that these spaces are not isomorphic, but we have established the isomorphism of the join $X * \mathbb{R}_+$ and the Cartesian product $X \times \mathbb{R}_+$, for cases where X is the n-dimensional Euclidean space or a γ-slightly convex and δ-weakly concave geodesic space.

From the results of the thesis it is worth noting those related to the coarse equivalence (i.e. equivalence in the asymptotic category of J. Roe) of functorial constructions. For example, the hyperspaces (spaces of compact subsets) of Euclidean spaces are considered and it is shown that they are not coarsely equivalent to hyperspaces of continua (connected compacta) and hyperspaces of convex compacta.

The hyperspace $\exp_2\mathbb{R}^m$ and the space $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^{m-1})$ are Lipschitz equivalent. This result can be considered a coarse analogue of one Schori's result[17].

In the thesis it is also proved an asymptotic analogue of R. Bott's theorem.

Keywords: asymptotic category, asymptotic dimension, Lipschitz mapping, isomorphism, coarse equivalence, functor, geodesic metric space, factor space, asymptotic cone, join, suspension, hyperspace, symmetric power, projective power, space of probability measures, superextension, Hausdorf metric.