Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
Національної академії наук України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Мединський Ігор Павлович

УДК 517.956.4

ДИСЕРТАЦІЯ

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 — диференціальні рівняння
(111 — математика)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

__________________ І. П. Мединський

Науковий консультант: **Івасишен Степан Дмитрович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Львів — 2021

АНОТАЦІЯ

Мединський І. П. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння» (111– Математика). — Національний університет «Львівська політехніка»,— Львівський національний університет імені Івана Франка.— Львів, 2020.

Дисертація присвячена побудові, дослідженню і застосуванню фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$. Клас $\boldsymbol{K_1}$ складають ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова. До класу $\boldsymbol{K_2}$ входять рівняння типу Колмогорова довільного порядку. Рівняння з класу $\boldsymbol{K_3}$— це рівняння типу рівнянь з класу $\boldsymbol{K_1}$, в яких додатково наявні виродження при $t = 0$. Класи рівнянь $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ є природними узагальненням у різних напрямках відомого рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова. Клас $\boldsymbol{K_4}$ складають $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом системи рівнянь і виродженням на початковій гіперплощині. Особливістю рівнянь з цього класу є нерівноправність просторових змінних і наявність виродження на початковій гіперплощині.

Для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ знайдено умови на коефіцієнти рівнянь, за яких, за допомогою поетапного методу Леві побудовано й досліджено класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші, встановлено оцінки побудованих розв'язків та їх похідних, доведено теореми про коректну розв'язність та інтегральні зображення розв'язків у сімействах вагових L_p-просторів, які при $|x| \to \infty$ мають експоненціальний ріст максимального порядку 2 чи $2b$ відповідно із залежним від t типом. Для підкласу з $\mathbf{K_1}$— рівнянь з дійсними коефіцієнтами встановлено, крім існування та оцінок побудованого фундаментального розв'язку Z, додаткові властивості Z (невід'ємність, нормальність, формула згортки та ін.), які дозволяють трактувати функцію Z, як густину імовірностей переходу деякого дифузійного процесу; обґрунтовано інте-

гральне зображення та доведено коректну розв'язність задачі Коші в класі невід'ємних функцій; отримано формули для визначення характеристик такого дифузійного процесу. Також доведено теореми про локальну розв'язність задачі Коші для відповідного квазілінійного рівняння і встановлено існування глобального розв'язку задачі Коші для півлінійного рівняння з класу $\boldsymbol{K_1}$.

Отримані в дисертації відомості про фундаментальні розв'язки рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ певним чином показують, як впливають на властивості побудованих фундаментальних розв'язків і результати їх застосувань наявність у рівняннях особливостей та вироджень (виродження матриці коефіцієнтів, що стоять при старших похідних у рівнянні, нерівноправність просторових змінних, виродження при $t = 0$).

Для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$ проведено всебічне дослідження потенціалів, ядром яких є відповідний фундаментальний розв'язок у вагових просторах гельдерових функцій, які правильно і точно враховують поведінку при $t \to 0$ фундаментального розв'язку; доведено теореми про коректну розв'язність, апріорні оцінки і підвищення гладкості розв'язків задачі Коші та локальну розв'язність задачі Коші для відповідної нелінійної системи з виродженням на початковій гіперплощині. Розглянуто усі можливі типи виродження рівнянь при $t = 0$. Отримані результати узальнюють і доповнюють раніше отримані автором результати для $2b$-параболічних за Петровським систем рівнянь і виродженням на початковій гіперплощині.

Проведені у роботі дослідження мають теоретичний характер. Його результати та методика їж отримання можуть бути використані для дослідження аналітичними методами вироджених параболічних рівнянь загальнішої структури, тобто до побудови й дослідження фундаментальних розв'язків та їх застосувань до встановлення коректної розв'язності, інтегрального зображення і властивостей розв'язків задачі Коші для таких рівнянь.

Ключові слова: вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова, параболічні рівняння довільного порядку, параболічні рівняння з виродженням на початковій гіперплощині, задача Коші, фундаментальний розв'язок задачі Коші, метод Леві, оцінювальні функції, об'ємний потенціал, коректна, локальна і глобальна розв'язність задачі Коші.

ABSTRACT

Medynsky I. P. Fundamental solutions of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the Degree of Doctor of Sciences in Physics and mathematics on the speciality 01.01.02— "Differential equations" (111— Mathematic). — Lviv Polytechnic National University. — Lviv Ivan Franko National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2020.

The dissertation is devoted to construction, research and application of fundamental solutions of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations from classes $\boldsymbol{K_1}$, $\mathbf{K_2}$, $\mathbf{K_3}$ and $\mathbf{K_4}$. Class $\boldsymbol{K_1}$ are ultraparabolic equations of the Kolmogorov type. The class $\boldsymbol{K_2}$ includes equations of the Kolmogorov type of arbitrary order. An equation of the class $\boldsymbol{K_3}$— is an equation of the type of equations from the class $\boldsymbol{K_1}$, in which degenerations are additionally present at $t = 0$. The classes of equation $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ and $\boldsymbol{K_3}$ is a natural generalization in different directions of the known classical Kolmogorov's equation of diffusion with inertia. The class $\boldsymbol{K_4}$ consists of $\overrightarrow{2b}$ parabolic in the sense of Eidelman systems of equations and degeneration on the initial hyperplane. The feature of the equations from this class is the inequality of spatial variables and the presence of degeneracy on the initial hyperplane. For equations from classes $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ and $\boldsymbol{K_3}$ the conditions for the coefficients of the equations are found, according to which, with the help of the stepwise Levy method, the classical fundamental solutions of the Cauchy problem are constructed and investigated, and the estimates of the constructed solutions and their derivatives are established, theorems on correct solvability and integral images of solutions in families of L_p-weight spaces are proved, which have exponential growth of maximum order 2 or $2b$ under the condition $|x| \to \infty$ according to the type dependent on t. For a subclass of $\boldsymbol{K_1}$— equations with real coefficients

are established, in addition to the existence and estimates of the constructed fundamental solution Z, additional properties Z (nonnegativity, normalization, convolution formula etc.), which allow to interpret the function Z as the density of transition probabilities of some diffusion process; the integral representation is proved and the correct solvability of the Cauchy problem in the class of nonnegative functions is proved; formulas for determining the characteristics of such a diffusion process are obtained. The theorems on the local solvability of the Cauchy problem for the corresponding quasilinear equation are also proved and the existence of a global solution of the Cauchy problem for a semilinear equation from the class is established $\boldsymbol{K_1}$.

The information obtained in the dissertation on the fundamental solutions of equations from classes $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ and $\boldsymbol{K_3}$ in a certain way show how the properties of singularities and degeneracies affect the properties of the constructed fundamental solutions and the results of their applications (degeneracy of the matrix of coefficients which are at the senior derivatives in the equation, inequality of spatial variables, degeneracy under the condition $t = 0$).

For equations from the class $\boldsymbol{K_4}$ a comprehensive study of potentials is carried out, the core of which is the corresponding fundamental solution in the weight spaces of Hölder functions, which correctly and accurately take into account the behavior under the condition $t \to 0$ of fundamental solution; the theorem on correct solvability, a priori estimates and increase of smoothness of solutions of the Cauchy problem and local solvability of the problem with degeneracy on the initial hyperplane is proved. All possible types of degeneracy of equations under the condition $t = 0$ are considered. The obtained results summarize and supplement the results previously obtained by the author for $2b$- parabolic by Petrovsky systems of equations and degeneration on the initial hyperplane .

The study which are conducted in the research have theoretical nature.

Its results and methods of obtaining them can be used to study analytical methods of degenerate parabolic equations of more general structure, that is, to construct and study fundamental solutions and their applications to establish the correct solvability, integral representation, and properties of solutions of the Cauchy problem for such equations.

Keywords: degenerate parabolic equations of Kolmogorov type, parabolic equations with degenerations on the initial hyperplane, the Cauchy problem, fundamental solution of the Cauchy problem, Levi's method, volume potential, correct and local solvability.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2002. Т. 45, №4. С. 76–86.
2. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2004. Т. 47, №4. С. 110–114.
3. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2003. Т. 46, №3. С. 15–24.
4. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування. *Нелінійний аналіз: Праці Українського математичного конгресу.* 2001. Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. С. 28–41.
5. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Theory of stochastic processes.* Vol. 16 (32), №1, 2010. P. 57–66.
6. **Мединський І. П.** Дослідження С. Д. Ейдельмана нелінійних задач та їх розвиток. *Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича.* Сер. : мат. Т. 1, №1–2. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. С. 114–128.
7. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *Буковинський мат. журн.* 2014. Т. 2, №2–3. С. 94–106.
8. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. *Буковинський мат.*

журн. 2015. Т. 3, №3–4. С. 41–51.

9. **Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.** Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Буковинський мат. журн.* 2016. Т. 4, №3–4. С. 57–68.
10. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичні фундаментальні розв'язки для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2016. Т. 13, №1. С. 108–155.
11. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2016. Т. 59, №2. С. 28–42. Те саме: Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P. On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables. *J. Math. Sci.* 2018. Vol.231, №4. P. 507–526. https:doi.org//10.1007/s10958-018-3830-0.
12. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations. *Mat. Stud.* 2017. Vol. 47, №1. С. 33–46. https:doi.org//10.30970/ms.47.1.33-46.
13. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. Т. 60, №3. С. 9–31. Те саме: Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, №2. P. 121–151. https:doi.org//10.1007/s10958-020-04726-z.
14. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогоро-

ва з двома групами просторових змінних виродження. II. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. Т. 60, №4. С. 7–24. Те саме: Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. II. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 247, №1, P. 1–23. https: doi.org//10.1007/s10958-020-04786-1.

15. **Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.** Параболічні рівняння з різними особливостями та виродженнями. *Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь.*: Зб. наук. праць присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2017. С. 68–76.
16. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині.*Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка".*: Серія: фіз.-мат. науки. 2017, №871. С. 46–64.
17. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник нац. університету "Львівська політехніка".*: Серія: фіз.-мат. науки. 2018, №898. С. 13–21.
18. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Властивості фундаментальних розв'язків, теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2018. Т. 61, №4. С. 7–16.
19. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2019. Т. 62, №1. С. 7–24.

20. **Dron' V. S., Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.** Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for one Kolmogorov-type ultraparabolic arbitrary order equations. *Carpatian Math. Publ.* 2019. Vol. 11, №2, P. 268–280. https:doi.org//10.15330/cmp.11.2.268-280.

21. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2019. Т. 62, №4. С. 39–48.

22. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник Львів. ун-ту.*: Серія мех.-мат. 2019. Вип. 88. С. 107–127. https://dx.doi.org/10.30570/vmm.2019.88.107-127.

23. **Medynsky I. P.** On properties of solutions for Fokker-Planck-Kolmogorov equations. *Math. Model. Comp.* 2020. Vol. 7, №1. P. 158–168. https: doi.org //10.23939/mmc2020.01.158.

24. **Ivasyshen S., Medynsky I.** The well-posedness of problem with weighting initial conditions for parabolic system with degenerations of the initial hyperplane in Banach spaces of Hölder. *Intern. Conf. Func. Anal. and its Appl.*, Dedicated to the 110-th anniversary of Stefan Banach. May 28–31, 2002, Lviv: Book of Abstracts. Lviv, 2002. P. 92–93.

25. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *VI Міжнар. наук. конф. "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур"*, 26–29 трав. 2003 р., Львів: тези доп.: Львів, 2003. С.491–492.

26. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Апріорні оцінки розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування. *Міжнар. наук. конф. "Шості боголюбовські читання"*, 26–30 серп., 2003 р., Чернівці: тези доп.: Київ, 2003. С. 84.

27. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про коректну розв‘язність задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *III Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 9–12 верес. 2003 р., Івано-Франківськ: тези доп.: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2003. С. 42.

28. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи з виродженням на початковій гіперплощині. *Міжнар. конфер. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, 6–9 черв. 2005 р., Київ: тези доп.: Київ, 2005. С. 32.

29. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь у вагових L_p-просторах. *Міжнар. наук. конф. з диференціальних рівнянь, присвячена 100 річниці з дня народження Я. Б. Лопатинського*, 12–17 верес. 2006 р., Львів: тези доп.: Львів, 2006. С. 27–28.

30. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Розвиток досліджень С. Д. Ейдельмана фундаментальних розв'язків параболічних рівнянь та їх застосування. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, 11–14 жовт., 2006 р., Чернівці: тези доп.: Чернівці, 2006. С. 54.

31. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про глобальні розв'язки задачі Коші для деяких квазілінійних ультрапараболічних рівнянь. *Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробагатька*, 24–28 верес. 2007 р., Дрогобич: тези доп.: Львів, 2007. С. 189.

32. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічних рівнянь з виродженнями за часовою змінною. *XII Міжн. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 15–17 трав. 2008 р., Київ: тези доп.: Київ. 2008. С. 162.

33. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про задачу Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *IV Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 10–12 верес. 2008 р., Івано-

Франківськ: тези доп.: Івано-Франківськ, 2008. С. 39.

34. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Intern. conf. "Stochastic analysis and random dynamics"*, June 14–20, 2009, Lviv: Abstracts. Lviv, 2009. P. 95–96.

35. **Методинський І. П.** Задача Коші для квазілінійних ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *XIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 13–15 травня, 2010 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2010. С. 271.

36. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *Third International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applliccations dedicated to Yaroslav Lopatynsky* , 3–6 November, 2010, Lviv: Book of Abstracts. Donetsk, 2010. P. 76.

37. **Мединський І.** Локальна розв'язність задачі Коші для одного класу квазілінійних вироджених параболічних рівнянь. *Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька*, 19–23 верес. 2011 р., Дрогобич: тези доп.: Львів, 2011. С. 134.

38. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, присвяченої 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, 8–10 черв., 2011 р., Київ: матеріали конф.: Київ, 2011. С. 120.

39. **Medynsky I.** Cauchy problem for a semilinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type *Intern. Conf. dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach*, September 17–21, 2012, Lviv: Abstracts of Reports. Lviv, 2012. P. 217.

40. **Мединський І. П.** Задача Коші для квазілінійного рівняння типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною і виродженням. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, присвяченої 70-

річчю проф. В.В. Маринця, 26–29 верес. 2012 р., Ужгород: матеріали конф.: Ужгород, 2012. С. 60.

41. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Параболічні моделі. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. V Міжнар. наук. конф. 4–5 квіт. 2012 р. Кам'янець-Подільський, 2012. С. 35.

42. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких класів вироджених параболічних рівнянь. *XIV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 19–21 квітня 2012 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2012. С. 198.

43. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Деякі вироджені параболічні моделі. *Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці"*, присвячена 50-річчю каф. прикладної математики Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича, 11–23 черв. 2012 р., Чернівці: матеріали конф., Чернівецький нац. ун-т, 2012. С. 80.

44. **С. Івасишен, І. Мединський** Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 21–25 трав. 2013 р., Львів: зб. наук. праць в 3-х т. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1. С. 36–38.

45. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про метод Леві побудови та дослідження фундаментальних розв'язків вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *V Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 19–21 верес. 2013 р., Івано-Франківськ: тези доп., Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2013. С. 28.

46. **Мединський І. П., Івасишен С. Д.** Про деякі вироджені параболічні моделі. *Сучасні проблеми математичного моделювання, про-*

гнозування та оптимізації: тези доп. VI Міжнар. наук. конф. 4–5 квіт. 2014 р. Кам'янець-Подільський, 2014. С. 106.

47. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *XV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 15–17 трав. 2014 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2014. С. 123–124.
48. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для узагальненого виродженого рівняння Колмогорова. *IV Міжнар. ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народженння Ганса Гана*, 30 черв.–05 лип. 2014 р., Чернівці: тези доп.: Чернівецький нац. ун-т, 2014. С. 62–63.
49. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова. *XVI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 14–15 трав. 2015 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ : НТУУ "КПІ", 2015. С. 106–107.
50. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Метод Леві та його модифікації у дослідженнях вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Наук. конф., присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге*, 1–4 лип. 2015 р., Чернівці: тези доп.: Чернівецький нац. ун-т, 2015. С. 48–49.
51. **Medynsky I.** On investigations of S.D. Eidelman in the theory of the degenerate parabolic equations of Kolmogorov type and their development *Intern. V. Skorobohatko Math. Conf.* August 25–28, 2015, Drogobych: Abstracts. Lviv, 2015. P. 104.
52. **Voznyak O., Ivasyshen S., Medynsky I.** On fundamental solution of the ultraparabolic Kolmogorov equation with degeneration on the

initial hyperplane. *Intern. V. Skorobohatko Math. Conf.*, August 25–28, 2015, Drogobych: Abstracts. Lviv, 2015. P. 172.

53. **Івасишен С. Д., Мединський І. П. Пасічник Г. С.** Параболічні моделі з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. VII Міжнар. наук. конф. 21–22 квіт. 2016 р. Кам'янець-Подільський, 2016. С. 83–84.
54. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про останні результати побудови та дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого параболічного рівняння типу рівняння дифузії з інерцією. *XVII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 19–20 трав. 2016 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ : НТУУ "КПІ", 2016. С. 127–128.
55. **Dron' V., Ivasyshen S., Medynsky I.** On applications of Levi's parametrix method in Theory of Parabolic equations. *Intern. Conf. On Diff. Eq.*, Dedicated to the 110 Anniversary of Ya.B.Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv: Book of Abstracts. Lviv, 2016. P. 44.
56. **Дронь В., Івасишен С., Мединський І.** Властивості об'ємного потенціалу лля одного ультрапараболічного рівняння. *Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"*, присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І.Фодчука (1936-1992) та 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь, 28–30 верес. 2016 р., Чернівці: матеріали конф. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. С. 44.
57. **Івасишен С., Мединський І.,Пасічник Г.** Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"*, присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І.Фодчука (1936-1992) та 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь, 28–30 верес. 2016 р., Чернівці: матеріали конф. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. С. 50–51.

58. **Івасишен С. Д., Growth Мединський І. П.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з гладкими коефіцієнтами. *XVIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 7–10 жовт. 2017 р., Луцьк–Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2017. С. 60–63.

59. **Івасишен С., Мединський І.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 22–25 трав. 2018 р., Львів: зб. наук. праць у 3-х т./ за заг. ред. А.М.Самойленка та Р.М.Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 34–35. Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

60. **Возняк О., Мединський І.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 22–25 трав. 2018 р.: зб. наук. праць у 3-х т./ за заг. ред. А.М.Самойленка та Р.М.Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. 2018. Т.3. С. 101–102. Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

61. **І. Мединський, С. Івасишен** Про побудову та оцінки класичного фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях.* Міжнар. наук. конф. присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича, 17–19 верес. 2018, Чернівці: матеріали конф. Чернівці, 2018. С. 84.

62. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійного виродженого ультрапараболічного рівняння ти-

пу Колмогорова. *VI Всеукр. матем. конф. імені Б. В. Василишина*, 26–28 верес. 2018, Івано-Франківськ–Микуличин. Івано-Франківськ: Голінеей, 2018. С. 18–19.

63. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** Properties of Green operators generated by fundamental solutions of degenerated parabolic equations.*Intern. Conf. "Infinite Dimensional Analysis and Topology"*, Dedicated to the 70-th Anniversary of Professor Oleh Lopushansky. Oktober 15–20, 2019, Ivano-Frankivsk: Book of Abstracts. Ivano-Frankivsk, 2019. P. 25–26.

64. **Мединський І., Дронь В.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь довільного порядку. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування"*, присвячена 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана, 16–19 верес. 2020 р., Чернівці: матеріали конф. [Електронний ресурс]. Чернівецький нац. ун-т, 2020. С. 165–166. Режим доступу до ресурсу: www.sde100.fmi.org.ua.

65. **Medynsky I., Voznyak O.** Fundamental solutions of ultraparabolic Kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and degeneration on the initial hyperplane. *XI Intern. Skorobohatko Math. Conf.*, October 26–30, 2020, Lviv: Abstracts. [Electronic publication ISBN 978-96602-9390-8]. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. 2020. P. 75. https://www.iapmm.lviv.ua/conf_skorob2020.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ **20**

ВСТУП **22**

1. **ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ** **34**

1.1. Класи рівнянь 34

1.2. Означення фундаментальних розв'язків задачі Коші 43

1.3. Метод Леві 49

1.4. Огляд літератури за темою дисертації 59

2. **ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ** **73**

2.1. Означення і властивості оцінювальних функцій 73

2.2. Існування та оцінки розв'язків деяких інтегральних рівнянь . . 84

2.3. ФРЗК для допоміжних рівнянь 89

2.4. Властивості об'ємних потенціалів 94

3. **КЛАСИЧНІ ФРЗК ДЛЯ РІВНЯНЬ З КЛАСУ $\boldsymbol{K_1}$** **107**

3.1. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_1^{(t,x^1(y))}$ 107

3.2. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_1^{(t,x^2(y))}$ 114

3.3. Побудова та властивості ФРЗК для основного рівняння 123

3.4. Оцінки приростів похідних ФРЗК для основного рівняння . . . 141

4. **КЛАСИЧНІ ФРЗК ДЛЯ РІВНЯНЬ З КЛАСУ $\boldsymbol{K_2}$** **158**

4.1. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_2^{(t,x^1(y))}$ 158

4.2. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_2^{(t,x^2(y))}$ 165

4.3. Побудова та властивості ФРЗК для основного рівняння 174

4.4. Оцінки приростів похідних ФРЗК для основного рівняння . . . 193

5. **КЛАСИЧНІ ФРЗК ДЛЯ РІВНЯНЬ З КЛАСУ $\boldsymbol{K_3}$** **209**

5.1. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_3^{(t,x^1(y))}$ 209

5.2. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_3^{(t,x^2(y))}$ 217
5.3. Побудова та властивості ФРЗК для основного рівняння 227
5.4. Оцінки приростів похідних ФРЗК для основного рівняння . . . 244

6. **ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ФРЗК** **261**
6.1. Задача Коші для вироджених рівнянь типу Колмогорова 261
6.2. Задача Коші для рівнянь з класу $\mathbf{K_4}$ 274
6.3. Локальна розв'язність квазілінійних рівнянь 280
6.4. ФРЗК для рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова 294

ВИСНОВКИ **301**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **303**

ДОДАТКИ **335**
Д1. Доведення тверджень з розділу 2 335
Д2. Доведення тверджень з розділу 3 365
Д3. Список публікацій здобувача за темою дисертації 396
Д4. Апробація результатів дисертації 406

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ

$:=$ — дорівнює за означенням;

$\blacktriangleright$ — кінець доведення;

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{N}_l := \{1, \ldots, l\}$, якщо $l \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір;

$\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$;

$\mathbb{C}^n$ — n-вимірний комплексний простір;

$\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$;

t, τ — точки простору $\mathbb{R}$;

$x_1, \ldots, x_n$ — координати точки x простору $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$;

$t, x_1, \ldots, x_n$ — координати точки (t, x) простору $\mathbb{R}^{n+1}$;

$|x| := (\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2)^{1/2}$, якщо $x \in \mathbb{R}^n$;

$\mathbb{C}_{mr}$ — множина всіх матриць A розміру $m \times r$, елементи яких $a_{jl} \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}_m$, $l \in \mathbb{N}_r$; $\mathbb{C}_{1r} = \mathbb{C}^r$; $\mathbb{C}_{11} = \mathbb{C}$;

$|u| := \max\limits_{j \in \mathbb{N}_r} |u_j|$, якщо $u \in \mathbb{C}^r$;

$|A| := \max\limits_{j \in \mathbb{N}_m} \sum\limits_{l=1}^{r} |a_{jl}|$, якщо $A \in \mathbb{C}_{mr}$;

A' — матриця, транспонована до матриці A;

I — одинична матриця;

i — уявна одиниця;

δ_{jl} — символ Кронекера;

$\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів $k := (k_1, \ldots, k_n)$;

$|k| := \sum\limits_{j=1}^{n} k_j$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$;

$\|k\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j k_j$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$, а $m_1, \ldots, m_n$ — деякі натуральні числа;

n_1, n_2, n_3 — задані натуральні числа такі, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$;

n — задане натуральне число, або $n := n_1 + n_2 + n_3$;

$b_1, \dots, b_n$ — задані натуральні числа;

b — задане натуральне число, або найменше спільне кратне чисел $b_1, \dots, b_n$;

$m_j := b/b_j, j \in \mathbb{N}_n$;

$q := 2b/(2b-1)$, $q_j := 2b_j/(2b_j-1), j \in \mathbb{N}_n$;

∂_y^l — операція диференціювання порядку $l > 0$ за змінною y;

$\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$, якщо $x \in \mathbb{R}^n$, і $k \in \mathbb{Z}_+^n$;

S — диференціальний вираз $\partial_t - \sum\limits_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum\limits_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}$;

S_L — похідна Лі відносно векторного поля, заданого диференціальним виразом виразом S;

$\Delta_t^\tau f(t,\cdot) := f(t,\cdot) - f(\tau,\cdot)$;

$\Delta_x^y f(\cdot,x,\cdot) := f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,y,\cdot)$;

$\Delta_{t,x}^{\tau,y} := f(t,x,\cdot) - f(\tau,\xi,\cdot)$;

$X(t) := (X_1(t), \dots, X_3(t))$;

$X_s(t) := (X_{s1}(t), ..., X_{sn_l}(t))\,, \quad s \in \mathbb{N}_3$;

$X_{1j}(t) := x_{1j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1}$;

$X_{2j}(t) := x_{2j} + t x_{1j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2}$;

$X_{3j}(t) := x_{3j} + t x_{2j} + 2^{-1} x_{1j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}$;

T — задане додатне число;

$\Pi_H := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\big|\; t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$;

ФРЗК— фундаментальний розв'язок задачі Коші;

Лі-ФРЗК— Лі-фундаментальний розв'язок задачі Коші.

В дисертації однаковими буквами позначаються сталі, величини яких нас не цікавлять.

ВСТУП

1. Обґрунтування вибору теми дослідження. Дисертація присвячена побудові, дослідженню і застосуванню фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК) для таких чотирьох класів вироджених параболічних рівнянь:

$\boldsymbol{K_1}$: вироджені диференціальні рівняння типу Колмогорова другого порядку;

$\boldsymbol{K_2}$: вироджені диференціальні рівняння типу Колмогорова довільного порядку;

$\boldsymbol{K_3}$: вироджені диференціальні рівняння типу Колмогорова другого порядку і виродженням на початковій гіперплощині;

$\boldsymbol{K_4}$: $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом системи рівнянь і виродженням на початковій гіперплощині.

Ці класи є природним узагальненням в різних напрямках параболічних за І. Г. Петровським рівнянь (систем рівнянь), які означені в [1] й теорії яких присвячені численні статті, монографії [2–6] і статті монографічного характеру [7–11]. Надалі термін "рівняння"використовуватимемо як у випадку скалярного рівняння, так і у випадку векторного рівняння, тобто системи рівнянь.

Добре відомі глибокі й повні результати в теорії задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь як лінійних, так і квазілінійних. При одержанні більшості з цих результатів істотну роль відіграє ФРЗК для таких рівнянь, його властивості, а також властивості породжуваних ним потенціалів.

ФРЗК, за різних припущень на коефіцієнти системи, будувалась і досліджувалась: для рівномірно параболічних систем рівнянь— І. Г. Петровським, О. А. Ладиженською, С. Д. Ейдельманом, В. Погожельським, Д. Г. Аронсоном, Л. Н. Слободецьким і М. І. Матійчуком; для $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь— С. Д. Ейдельманом та С. Д. Івасишеним; для параболічних рівнянь з різними виродженнями й особливостями— С. Д. Івасишеним і С. Д. Ейдельманом разом з їхніми учнями Г. П. Малицькою, Л. М. Тичинською, Л. М. Андросовою, О. Г. Возняк, В. С. Дронем, Л. П. Березан, Г. С. Пасічник, І. П. Мединським.

Результати, що стосуються побудови й дослідження ФРЗК, задачі Коші, знайшли важливі різноманітні застосування до вивчення властивостей розв'язків, дослідження коректної розв'язності задачі Коші в широких класах функцій, одержання інтегрального зображення розв'язків задачі Коші та розв'язків, які визначені у відкритому шарі $\Pi_{(0,T]}$, встановлення локальної розв'язності задачі Коші для квазілінійних і нелінійних параболічних за Петровським систем рівнянь, дослідження можливості продовження розв'язків таких систем на ширший часовий інтервал.

Класи рівнянь $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ є певними узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова. Так, ще в 1934 р. А. М. Колмогоров при вивченні рухів фізичної системи прийшов до рівняння дифузії з інерцією, яке є виродженим параболічним рівнянням і належить до класу ультрапараболічних рівнянь. Це рівняння є прототипом цілої сім'ї еволюційних рівнянь, які виникають у теорії дифузійних процесів, кінетичній теорії газу, при вивченні руху матеріальних частинок у полі сил, при дослідженні математичних моделей опціонів та ін.

Вивченням класичного рівняння дифузії з інерцією Колмогорова та його різноманітних узагальнень, у тому числі й для випадку рівнянь довільного порядку, займався цілий ряд математиків, серед яких M. Weber, А. М. Ільїн, І. М. Сонін, Я. С. Шатиро, Л. П. Купців, С. Д. Ейдельман, Г. П. Малицька, Y. Kato, Л. М. Тичинська, С. Д. Івасишен, Л. М. Андросова, В. С. Дронь, О. Г. Возняк, італійці S. Polidoro, E. Lanconelli, M. Manfredini, A. Pascucci, M. Di Francesco та ін. Вони одержали важливі результати, що стосуються фундаментальних розв'язків і коректної розв'язності задачі Коші, а також властивостей розв'язків. Найповніші та найточніші результати при цьому одержані для рівнянь з коефіцієнтами, не залежними від просторових змінних. Якщо коефіцієнти рівнянь залежать від усіх змінних, то ще досі точних і повних результатів не одержано. Зауважимо, що зважаючи на важливі застосування, дослідження рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова та ультрапараболічних рівнянь (лінійних і нелінійних) інтенсивно проводяться й іншими методами без побудови ФРЗК (див. монографії [13,14]).

У відомій монографії [15] для рівнянь з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, отримано результати, які стосуються некласичних ФРЗК, тобто розв'язків, які мають старші похідні лише за основними змінними. Природним є бажання отримати аналогічні результати для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$, тобто побудувати класичні ФРЗК, детально вивчити їх властивості та властивості породжуваних ними потенціалів і дослідити коректну розв'язність задачі Коші в широких класах вагових функцій. Це потребує не тільки знаходження відповідних умов на коефіцієнти вироджених рівнянь, але й розробки і вдосконалення методів побудови і дослідження ФРЗК.

Особливістю рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$, крім нерівноправності просторових змінних, є наявність виродження при $t = 0$. Рівняння з виродженням за часовою змінною вивчались А. С. Калашниковим, В. П. Глушком, А. В. Глушаком, С. Д. Шмулевичем та ін. Параболічні рівняння з виродженням на початковій гіперплощині вивчались у працях С. Д. Івасишена, О. Г. Возняк, І. П. Мединського. У цих працях побудовано і досліджено ФРЗК для такого рівняння і встановлено оцінки побудованого ФРЗК, його похідних та приростів цих похідних. Одержані оцінки ФРЗК використані для вивчення об'ємних потенціалів та інтегралів Пуассона, ядрами яких є ФРЗК. Ними також побудована шаудерова теорія розв'язків параболічних систем з виродженням, зокрема доведено теореми про підвищення гладкості таких розв'язків. Не повністю досліджувалась і залежність класів розв'язків систем від поведінки функцій, що спричиняють виродження. Крім того, перелічених результатів, одержаних вищезгаданими авторами для лінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині, є ще не досить для проведення дослідження локальної розв'язності квазілінійних систем з виродженням, аналогічного тому, яке проводилось для невироджених систем. Природнім є бажання доповнити ці результати для параболічних рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині та отримати такі результати для вироджених параболічних рівнянь з класу $\mathbf{K_4}$. З вищенаведеного огляду праць випливають такі висновки та актуальні проблеми, вирішенню яких присвячена дисертаційна робота:

1) для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ в працях інших авторів немає повністю обґрунтованих результатів, що стосуються існування, точних оцінок і властивостей класичних ФРЗК; тому актуальною є проблема про знаходження умов на коефіцієнти рівнянь, за яких існують класичні ФРЗК з потрібними природними властивостями, в тому числі з точними оцінками, при цьому передбачається детальна розробка методів повного обґрунтування результатів;

2) для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$ у відомих працях інших авторів відсутнє детальне дослідження властивостей ФРЗК для кожного із типів вироджень на початковій гіперплощині; в цьому полягає друга невирішена проблема;

3) третьою проблемою є знаходження різноманітних застосувань для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$, хоча би аналогічних до застосувань ФРЗК для невироджених параболічних рівнянь.

2. Мета та завдання дослідження. *Метою роботи* є побудова і дослідження властивостей класичних ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$ і застосування їх до дослідження коректної розв'язності відповідних задач Коші для таких рівнянь.

Безпосередніми *завданнями дослідження* є :

- знаходження умов на коефіцієнти вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$, за яких існує класичний і некласичний ФРЗК;
- розроблення нового підходу до побудови і дослідження ФРЗК задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$, який ґрунтується на поетапному «розмороженні» коефіцієнтів;
- вдосконалення методики дослідження властивостей параболічних потенціалів, ядром яких є відповідний фундаментальний розв'язок;

- побудова і детальне дослідження властивостей ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $_3$, зокрема одержання точних оцінок ФРЗК і його похідних (у тому числі оцінок приростів похідних);
- дослідження властивостей параболічних потенціалів, ядром яких є відповідний фундаментальний розв'язок в широких класах вагових функцій;
- отримання інтегральних зображень розв'язків задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$;
- побудова і дослідження властивостей класичних ФРЗК для рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова деякого виродженого дифузійного процесу;
- по можливості точніше описання класів існування, єдиності і коректної розв'язності задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$;
- доведення теорем про локальну (глобальну) розв'язність задачі Коші для відповідних квазілінійних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$;
- побудова і дослідження властивостей ФРЗК та породжуваних ним потенціалів для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$;
- описання класів існування, єдиності і коректної розв'язності задачі Коші для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$, в просторах, які враховують тип виродження системи ;
- доведення теорем про локальну розв'язність задачі Коші для відповідних квазілінійних рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$.

Об'єкт дослідження: задача Коші для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$.

Предмет дослідження: ФРЗК для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$, властивості потенціалів, породжуваних цими розв'язками та їх застосування до встановлення коректної розв'язності задачі Коші.

3. Методи дослідження. У роботі використано основні аналітичні методи методи теорії задачі Коші (метод Леві, метод послідовних наближень, методи теорії потенціалу) для рівномірно параболічних рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині, та їх модифікації для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова та параболічних в сенсі Ейдельмана рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині.

4. Наукова новизна результатів, що виносяться на захист. У дисертації отримано такі нові результати, що запропоновані до захисту:

- знайдено умови на коефіцієнти вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ за яких існує класичний ФРЗК і Лі-ФРЗК;
- розроблено новий підхід до побудови і дослідження фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$, який ґрунтується на поетапному «розмороженні» коефіцієнтів;
- вдосконалено методику дослідження властивостей параболічних потенціалів, ядром яких є відповідний фундаментальний розв'язок;
- побудовано і детально досліджено властивості ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$,зокрема одержано для ФРЗК і його похідних точні оцінки та оцінки приростів похідних;
- досліджено властивості параболічних потенціалів, ядром яких є відповідний ФРЗК в широких класах вагових функцій;
- одержано інтегральні зображення розв'язків задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$;
- побудовано і досліджено властивості ФРЗК для рівнянь з класу $\mathbf{K_1}$ з дійсними коефіцієнтами;
- доведено теореми про коректну розв'язність задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$;
- доведено теореми про локальну (глобальну) розв'язність задачі Коші для відповідних квазілінійних рівнянь з класу $\boldsymbol{K_1}$;
- досліджено властивості потенціалів породжуваних ФРЗК для рівнянь з класу $\mathbf{K_4}$;

- встановлено класи коректності задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$;
- доведено теореми про локальну розв'язність задачі Коші для відповідних квазілінійних рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$.

5. Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювалися на: International Conference on Functional Analysis and its Applications. Dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach (May 28-31, Lviv, Ukraine, 2002), міжнар. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"(Київ,6-9 червня 2005р.), VI міжнар. наук. конф." Математичні проблеми механіки неоднорідних структур" (26-29 травня 2003, Львів, Україна), міжнар. наук. конф. "Шості боголюбовські читання"(Київ, 2003), III Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" (9-12 вересня 2003 року, Івано-Франківськ), міжнар. наук. конф. з диференціальних рівнянь, присвячена 100 річниці з дня народження Я. Б. Лопатинського (12-17 вересня 2006 р., Львів), міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування" (11-14 жовтня, 2006 р., Чернівці), міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробагатька (24-28 вересня 2007, Дрогобич, Україна), XII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (15-17 травня 2008 р., Київ, Україна), IV Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" (10-12 вересня 2008 р., Івано-Франківськ, Україна), Intern. conf. Stochastic analysis and random dynamics. (June 14-20, 2009 Lviv, Ukraine), XIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (13 – 15 травня, 2010 р., Київ), Third Intern. Conf. for Young Mathematicians on Differential Equations and Appliccations dedicated to Yaroslav Lopatynsky, (3 – 6 November, 2010, Lviv), міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, Україна, 19-23 вересня 2011), Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжнар. наук. конф., присвячена 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка (8-10 червня 2011 р., Київ), Intern. Conf. Dedicated to the 120th anniversary of Stepan Banach (17–21.09.2012, Lviv), Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжн. наук. конф. присвяченої 70-річчю проф. В. В. Маринця (26–29 вересня 2012, Ужгород), Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: V Міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 2012), XIV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (19–21.04.2012, Київ, Україна), Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці: Всеукр. наук. конф., присвячена 50-річчю кафедри прикладної математики Чернівець. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича (11–23 червня 2012, Чернівці, Україна), Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики" (21-25 травня 2013, Львів, Україна), V Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" (19-21 вересня 2013 р., Івано-Франківськ), Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: VI Міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 2014), XV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (15–17.05.2014, Київ, Україна), IV Міжнар. ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (30.06–05.07.2014, Чернівці, Україна), XVI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (14–15.05.2015, Київ, Україна), Наук. конф., присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (1–4.07.2015, Чернівці), Intern. V. Skorobohatko Mathemat. Conf. (August 25–28, 2015, Drogobych, Ukraine), Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: VII Міжнар. наук. конф. (Кам'янець-Подільський, 2016), XVII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (19–20.05.2016, Київ, Україна), Intern. Conf. On Differential Equations Dedicated to the 110 Anniversary of Ya.B.Lopatynsky (September 20- 24, 2016, Lviv, Ukraine), Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"присвячена 80-річчю від дня народження професора В. І. Фодчука (1936-1992) (28–30.09.2016, Чернівці, Україна), XVIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (7–10.10.2017, Луцк–Київ, Україна), міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"(22-25 травня 2018, Львів, Україна), міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівець. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича (17–19.09.2018, Чернівці, Україна), Шоста Всеукр. конф. ім. Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу"(26–28.09.2018, Івано-Франківськ – Микуличин), Intern. Conf. "Infinite Dimensional Analysis and Topology"Dedicated to the 70-th Anniversary of Professor Oleh Lopushansky (October 15-20, 2019, Ivano-Frankivsk, Ukraine), Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування присвячена 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана, (16–19 верес. 2020 р., Чернівці), XI Intern. Skorobohatko Math. Conf. (October 26–30, 2020, Lviv), наукових семінарах Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача, засіданні математичної комісії НТШ (Львів, 19 березня 2019 р.), відкритих науково-технічних конференціях Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка» (2014 – 2020 рр.), наукових семінарах кафедри прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка"(керівник: д. ф.-м. н., проф. П.П. Костробій 2002–2020 роки), Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: д. ф.-м. н., проф. М.М. Бокало, д. ф.-м. н., проф. П.І. Каленюк, 2014 – 2020 рр.), науковому семінарі кафедри математичної фізики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"(керівники: д. ф.-м. н., проф. С.Д. Івасишен, д. ф.-м. н., доц. В.М. Горбачук, 17 лютого 2021 р.), Київському міському семінарі з функціонального аналізу (керівники: О. В. Антонюк, А. Н. Кочубей, В. А. Михайлець, В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко), 17 лютого 2021 р.).

6. Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в періодичних фахових виданнях [15–18, 20–23, 25–28, 32–37]. Статті [26, 34, 37 та переклади англійською мовою статей [25, 27, 28] опубліковано у виданнях, що включені до наукометричної бази даних Scopus, причому переклади статей [25, 27, 28] опубліковані у виданні, яке віднесено до третього квартиля, а отже, кожна з них зараховується як дві публікації. Результати дисертації додатково висвітлено в п'яти статтях [18, 24, 29–31] в інших наукових виданнях і в 42 тезах доповідей і матеріалах наукових конференцій [38–79].

7. Особистий внесок здобувача. Усі викладені в дисертації результати отримані автором самостійно. У роботах із співавторами автору дисертації формулювання і доведення основних результатів. У всіх роботах у співавторстві з науковим консультантом професором Івасишеним С. Д. йому належить визначення загального плану досліджень і обговорення результатів. О. Г. Возняк в [22] належить доведення леми 1, а в [36] — леми 3. У праці [23] Г. С. Пасічник належать результати, що стосуються рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами, а В. С. Дроню в [34] — доведення співвідношень між відстанями d, d_1 і d_2.

8. Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів з викладом результатів оригінальних досліджень, висновків, списку використаних джерел і чотирьох додатків.

Перший і другий розділ є допоміжними, хоча вони містять також і оригінальні результати. В першому розділі наводяться означення класів рівнянь, формулюються і аналізуються умови на коефіцієнти, описується модифікація класичного методу Леві побудови ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь, наводиться огляд літературних джерел в яких вивчались рівняння з означених класів. В другому розділі наводяться означення і властивості оцінювальних функцій, які використовуються у роботі, оцінки і властивості інтегралів, що містять оцінювальні функції, леми про існування й оцінки розв'язків деяких інтегральних рівнянь та властивості і оцінки ФРЗК для допоміжних рівнянь.

У розділах 3 – 5 наводяться основні результати побудови, дослідження і встановлення оцінок для класичних ФРЗК, Лі-ФРЗК та їх похідних для допоміжних і основних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$ – $\boldsymbol{K_3}$,відповідно.

Шостий розділ присвячено застосуванню побудованих класичних ФРЗК до дослідження задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь. Для лінійних

них рівнянь рівнянь на основі дослідження потенціалів побудовано інтегральні зображення розв'язків, встановлено існування і єдиність розв'язків задачі Коші і доведено теореми про коректну розв'язність задачі Коші із розглядуваних класів. Результати для лінійних рівнянь застосовуються для дослідження нелінійних рівнянь. Також у цьому розділі розглядаються рівняння з дійснозначними коефіцієнтами, що належать до класу $\boldsymbol{K_1}$. Такі рівняння належать до класу ультрапараболічних рівнянь і зустрічаються при дослідженні різних фізичних явищ у так званому дифузійному наближенні. Встановлено існування класичного ФРЗК для таких рівнянь його оцінки та оцінки похідних від ФРЗК. Доведено нормальність і невід'ємність ФРЗК, формулу згортки, а також встановлено формули для коефіцієнтів матриці дифузії та вектору знесення через ФРЗК.

Додатки Д. 1 і Д. 2 містять доведення тверджень відповідно з розділу 2 і 3, а додатки Д. 2 і Д. 3 — перелік публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

Загальний обсяг дисертації складає 409 сторінок, основного тексту 288 сторінок. Список використаних джерел містить 247 найменувань.

9. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Основу дисертаційної роботи складають результати досліджень, виконаних автором у межах планових науково-дослідних робіт Національного університету «Львівська політехніка» та робіт, які виконувалися у відділі математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, зокрема: «Дослідження сучасних проблем аналізу, диференціальних рівнянь та теорії імовірностей» (2007–2012 рр., номер державної реєстрації 0107U009514); «Побудова і дослідження методів розв'язування задач прикладної математики та інформатики» (2013–2017 рр., номер державної реєстрації 0113U005296); «Розробка математичних моделей і методів їх чисельної реалізації для опису природничих і суспільних явищ» (2018–2022 рр., номер державної реєстрації 0113U005296); «Дослідженняня розв'язності та побудова розв'язків некласичних крайових задач для лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними» (2001–2005 рр., номер державної реєстрації 0102U00452); «Розвиток методів дослідження ультрапараболічних рівнянь і варіаційних нерівностей та некласичних крайових задач для диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними» (2006–2010 рр., номер державної реєстрації 0106U000595); «Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач для некласичних еволюційних рівнянь» (2011–2015 рр., номер державної реєстрації 0110U004817); «Розвиток аналітичних, функціональних та теоретико числових методів дослідження некласичних крайових задач для лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними» (2016–2020 рр., номер державної реєстрації 0115U007252).

10. Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Їх результати та методика їх отримання можуть використовуватись у теорії рівнянь з частинними похідними та у математичній фізиці при подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії випадкових процесів при вивченні дифузійних процесів, перехідні імовірності яких є фундаментальними розв'язками відповідних вироджених параболічних рівнянь.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Цей розділ є допоміжним. У ньому дається означення класів рівнянь, які вивчаються в дисертації, наводиться означення ФРЗК, формулюються й аналізуються умови на коефіцієнти рівнянь, описується класичний метод Леві побудови й дослідження ФРЗК, а також його модифікації, які використовуються у випадку вироджених параболічних рівнянь, наводиться огляд літературних джерел, в яких вивчались рівняння з означених класів, використовувався метод Леві, досліджувались і застосовувались властивості ФРЗК. Результати цього розділу опубліковано в статтях [24,26,27,29,31,36]. Зазначимо, що далі (крім оглядової частини) термін "рівняння"використовується як у випадку скалярного рівняння, так і у випадку векторного рівняння, тобто системи рівнянь.

1.1. Класи рівнянь

Нехай N і n— задані натуральні числа, T— задане додатне число. Для $j \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{N}_j$ позначатимемо множину $\{1,\dots,j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$. Розглядатимемо одновимірну змінну t і n-вимірну змінну $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, при цьому t і $x_1, \dots, x_n$ будемо інтерпретувати відповідно як часову і просторові змінні. У випадку вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторових змінних будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $|k| := \sum\limits_{j=1}^{3} |k_j|$, $|k_j| := \sum\limits_{l=1}^{n_j} k_{jl}$, $j \in \mathbb{N}_3$; $\Pi_H := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | \, t \in H, \, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$. Змінні $t, x_{11}, \dots, x_{1n_1}$ називатимемо основними, а решта просторових змінних — змінними груп виродження.

Розглянемо рівняння вигляду

$$L_1^{(t,x)}u(t,x) := S - A_1(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.1}$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}, \tag{1.2}$$

$$A_1(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x). \tag{1.3}$$

У рівнянні (1.1) $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ — відома і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ — шукана функції. Коефіцієнти a_{jl}, a_j, $\{j,l\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, і a_0 диференціального виразу (1.3) є, взагалі кажучи, комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$. Через $\mathcal{A}_1$ позначатимемо множину коефіцієнтів виразу (1.3), тобто $\mathcal{A}_1 := \{a_{jl},\, a_j,\, \{j,l\} \subset \mathbb{N}_{n_1},\, a_0\}$.

Означення 1.1. Рівняння (1.1) називається *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова другого порядку (ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова)*, якщо диференціальний вираз $\partial_t - A_1(t,x,\partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським за основними змінними t, x_1 з вагою 2 в області $\Pi_{[0,T]}$. Тобто існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t,x)\sigma_j\sigma_l \geq \delta|\sigma_1|^2. \tag{1.4}$$

Клас так означених рівнянь позначатимемо через $\boldsymbol{K_1}$.

Означимо клас $\boldsymbol{K_2}$ — клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку.

Нехай b — задане натуральне число, $L_2^{(t,x)} := S - A_2(t,x,\partial_{x_1})$, де диференціальний вираз S визначається формулою (1.2), а диференціальний вираз A_2 — такою формулою:

$$A_2(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{|k_1| \leq 2b} a_{k_1}(t,x)\partial_{x_1}^{k_1}. \tag{1.5}$$

Розглянемо рівняння

$$L_2^{(t,x)}u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.6}$$

де $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ — відома і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ — шукана функції. Коефіцієнти диференціального виразу (1.5) a_{k_1}, $|k_1| \leq 2b$, є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$. Множину цих коефіцієнтів позначатимемо через $\mathcal{A}_2$, так що $\mathcal{A}_2 := \{a_{k_1}, |k_1| \leq 2b\}$.

Означення 1.2. Рівняння (1.6) називається *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова довільного порядку* $2b$, якщо диференціальний вираз $\partial_t - A_2(t, x, \partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським з вагою $2b$ за основними змінними t, x_1 в області $\Pi_{[0,T]}$. Тобто існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t, x)(i\sigma_1)^{k_1} \leq -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b}, \tag{1.7}$$

в якому i — уявна одиниця.

Наступним є клас $\boldsymbol{K_3}$— клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова другого порядку із виродженням на початковій гіперплощині. Нехай α і β— неперервні на відрізку $[0, T]$ функції, які задовольняють такі умови: $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0, T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β— монотонно неспадна функція. Розглядається рівняння вигляду

$$L_3^{(t,x)} u(t, x) := \big(\alpha(t)\partial_t -$$

$$-\beta(t) \Big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} + \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x)\partial_{x_{1j}} \Big) + a_0(t, x)\big)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.8}$$

де як і вище $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ — відома і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ — шукана функції. Коефіцієнти a_{jl}, a_j, $\{j, l\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, і a_0, є комплекснозначними функціями в $\Pi_{[0,T]}$. Множину цих коефіцієнтів позначатимемо через $\mathcal{A}_3$. Зауважимо, що $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1$.

Означення 1.3. Рівняння (1.8) називається *виродженим параболічним рівнянням типу Колмогорова другого порядку (ультрапараболічним рівнянням) із виродженням на початковій гіперплощині*, якщо диференціальний вираз $\partial_t - A_1(t, x, \partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським за основними змінними t, x_1 з вагою 2 в області $\Pi_{[0,T]}$.

Перейдемо до означення рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$ — класу параболічних рівнянь векторного порядку із виродженням на початковій гіперплощині. Особливість цього класу полягає в тому, що диференціювання за просторовими змінними x_j, $j \in \mathbb{N}_n$, має, взагалі кажучи, різну вагу $1/(2b_j)$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$, відносно диференціювання за змінною t. Тут $b_1, \ldots, b_n$— задані числа з $\mathbb{N}$, а b— найменше спільне кратне цих чисел. Через $\overrightarrow{2b}$ позначатимемо вектор $(2b_1, \ldots, 2b_n)$, $m_j := b/b_j$, $j \in \mathbb{N}_n$, $\|k\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j k_j$. Розглянемо рівняння вигляду

$$L_4^{(t,x)} u(t,x) := \big(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{0<\|k\|\leq 2b} a_k(t,x)\partial_x^k - a_0(t,x)\big)u(t,x) =$$
$$= f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.9}$$

де I — одинична матриця порядку N; $a_k : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{NN}$, $\|k\| \leq 2b$, $f : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$— відомі і $u : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ — шукана функції, $\mathbb{C}_{N1}$ і $\mathbb{C}_{NN}$ — сукупності матриць розміру відповідно $N \times 1$ і $N \times N$, елементами яких є комплексні числа; α і β— такі як вище. При $N > 1$ рівняння (1.9) є векторним. Всі змінні є основними, тобто змінна x складається з однієї групи і формально $n_1 = n$, $n_2 = n_3 = 0$. Для рівняння (1.9) $\mathcal{A}_4 : \{= a_k \big| \|k\| \leq 2b\}$.

Означення 1.4. Рівняння (1.9) називається *параболічним рівнянням векторного порядку* $\overrightarrow{2b}$ *з виродженням на початковій гіперплощині*, якщо матричний диференціальний вираз $I\partial_t - \sum\limits_{\|k\|\leq 2b} a_k(t,x)\partial_x^k$ є рівномірно параболічним у сенсі Ейдельмана векторного порядку $\overrightarrow{2b}$ в області $\Pi_{[0,T]}$. Тобто існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma := (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ λ-корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ рівняння $\det(\lambda I - \sum\limits_{\|k\|=2b} a_k(t,x)(i\sigma)^k) = 0$ задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t,x,\sigma) \leq -\delta \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j}, \; j \in \mathbb{N}_N. \tag{1.10}$$

Рівняння з класів $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$ поділяються за типом виродження на початковій гіперплощині. Тип виродження визначається залежно від того, які значення скінченні чи нескінченні при $t = T$ і $\tau = 0$ набувають функції $A(t,\tau) := = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$ та $B(t,\tau) := \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta,\ 0 \le \tau \le t \le T$.

Виродження називають *слабким*, якщо $A(T,0) < +\infty$; *сильним*, якщо $A(T,0) = +\infty$, $B(T,0) < +\infty$ і *дуже сильним*, якщо $A(T,0) = +\infty$, $B(T,0) = = +\infty$.

Нехай для $y := (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^n$ $x^{(l)}(y)$ дорівнює відповідно y для $l = 0$, (x_1, y'), $y' := (y_1, y_2)$ для $l = 1$, (x_1, x_2, y_3) для $l = 2$ і x для $l = 3$.

Означення 1.5. Рівняння $L_j^{(t,x^{(l)}(y))} u(t,x) = f(t,x)$ з класу $\boldsymbol{K_j}$, $j \in \mathbb{N}_4$, $l \in \in \mathbb{Z}_3$, називатимемо *допоміжним*, якщо коефіцієнти цього рівняння залежать від параметрів y_1, y_2 і y_3. Тобто при $l \in \mathbb{Z}_2$ рівняння є допоміжним, а при $l = 3$— основним.

Множину коефіцієнтів з $\mathcal{A}_l$, які стоять при старших похідних рівняння з відповідного класу $\boldsymbol{K_l}$, позначатимемо через $\mathcal{A}_l^0$, $l \in \mathbb{N}_4$. Зауважимо, що до $\mathcal{A}_4^0$ включатимемо коефіцієнт a_0.

Наведемо умови на коефіцієнти рівнянь з означених вище класів, які використовуватимуться для побудови й дослідження властивостей фундаментальних розв'язків, а також властивостей потенціалів, ядрами яких є ці фундаментальні розв'язки.

Будемо користуватись ще такими позначеннями:

$\Delta_x^z f(\cdot,x,\cdot) := f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,z,\cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot,x,\cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot,x,\cdot), s \in \mathbb{N}_3$, $z^{(0)} := x$, $z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3)$, $z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3)$; $X(t) := = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$, $X^{(1)}(t) := (\lambda_1, X_2(t), X_3(t))$, $X^{(2)}(t) := (\lambda_1, \lambda_2, X_3(t))$, $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1$, $X_3(t) := x_3 + tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1'$, $t \in \mathbb{R}, \hat{x}_1 := = (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3})$, $x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3})$; $\hat{m}_j := j - 1/2, j \in \in \mathbb{N}_3$, $M := \sum\limits_{j=1}^{3} \hat{m}_j n_j$; $h_l := (\delta_{l1} + \delta_{l2})h + \delta_{l3} B(h,\tau)$, $l \in \mathbb{N}_3$, δ_{lj}—символ Кронекера; $\tau_l := 0$, якщо $l \in \mathbb{N}_2$, $\tau_l := \tau$, якщо $l = 3$; $p_0(x,x') := (\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - x_j'|^{2/m_j})^{1/2}$, $p(t,x;t',x') := \left((A(t,\tau))^{1/b} + (p_0(x,x'))^2\right)^{1/2}$, $\{(t,x),(t',x')\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Аналогічно до $X(t)$ будуються інші параметричні точки $Y(t), \Lambda(t)$ за відповідними точками y і λ.

Для множин коефіцієнтів $\mathcal{A}_l$ рівнянь з класу $\boldsymbol{K_l}$, $l \in \mathbb{N}_4$, використовуватимемо такі умови:

(A_{l1}) коефіцієнти є обмеженими й неперервними за $t \in [0, T]$ комплекснозначними функціями (при цьому неперервність коефіцієнтів з $\mathcal{A}_4^0$ рівномірна щодо $x \in \mathbb{R}^n$);

(A_{l2}) функції з $\mathcal{A}_l$ є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists\, H_{l1} > 0\ \exists\, \gamma_1 \in (0, 1]\ \forall\{(t, x), (t, z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t, x)| \le H_{l1}|x_1 - z_1|^{\gamma_1},\ a \in \mathcal{A}_l,\ l \in \mathbb{N}_3; \tag{1.11}$$

$$\exists\, H_{l2} > 0\ \exists\, \gamma_2 \in (1/3, 1]\ \forall\{(t, x), (t, z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}\ \forall h \in [\tau_l, T] :$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t, x)| \le H_{l2}(h_l^{\hat{m}_2\gamma_2} + |X_2(h_l) - z_2|^{\gamma_2}),\ a \in \mathcal{A}_l,\ l \in \mathbb{N}_3; \tag{1.12}$$

$$\exists\, H_{l3} > 0\ \exists\, \gamma_3 \in (3/5, 1]\ \forall\{(t, x), (t, z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}\ \forall h \in [\tau_l, T] :$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t, x)| \le H_{l3}(h_l^{\hat{m}_3\gamma_3} + |X_3(h_l) - z_3|^{\gamma_3}),\ a \in \mathcal{A}_l,\ l \in \mathbb{N}_3; \tag{1.13}$$

$$\exists\, H_{44} > 0\ \exists\, \gamma_4 \in (0, 1]\ \forall\{(t, x), (t, z)\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$|\Delta_x^z a(t, x)| \le H_{44}(p_0(x, z))^{\gamma_4}, \quad a \in \mathcal{A}_4; \tag{1.14}$$

(A_{l3}) коефіцієнти з $\mathcal{A}_l,\ l \in \mathbb{N}_4$, мають обмежені й неперервні похідні того порядку, біля яких вони стоять;

(A_{l4}) похідні з умови A_{l3} є гельдеровими за просторовими змінними в сенсі A_{l2};

(A_{l5}) справджуються нерівності

$$\exists\, H_{l5} > 0\ \forall\{(t, x), (t, z^{(s)}), (t, \xi^{(r)}\} \subset \Pi_{[0,T]},\ \{r, s\} \subset \mathbb{N}_3,\ r < s,\ \forall h_l \in [\tau_l, T] :$$

$$|\Delta_{x_r}^{\xi_r} \Delta_{x_s}^{z_s} a(t, x)| \le H_{l5}((h_l')^{\hat{m}_2\gamma_2} + |X_r(h_l') - \xi_2|^{\gamma_2})(h_s^{\hat{m}_s\gamma_s} + |X_s(h_l) - z_s|^{\gamma_s}),$$

$$a \in \mathcal{A}_l,\ l \in \mathbb{N}_3,\ h_l' = 0, \text{якщо } r = 1; \tag{1.15}$$

$$\exists\, H_6 > 0\ \forall\{(t, x), (t', x)\} \subset \Pi_{[0,T]},\ t' > t : |\Delta_t^{t'} a(t, x) \le (A(t', t))^{\gamma_4/(2b)},\ a \in \mathcal{A}_4; \tag{1.16}$$

$$\exists\, H_7>0\ \exists\,\gamma_0\in(0,1]\ \forall t\in[0,T]:\ \int\limits_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\le H_7. \qquad (1.17)$$

З умов (1.12) і (1.13) при $h_l=\tau_l,\ l\in\mathbb{N}_3$, випливають звичайні умови Гельдера за змінними виродження x_2 і x_3. Наведемо достатні умови виконання умов (1.12) і (1.13). Для випадку рівнянь з класу $\boldsymbol{K_1}$ такі умови знайдено в працях [24,27], а для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_3}$ — в [31,36].

Покладемо $T_l:=T$, якщо $l\in\mathbb{N}_2$, і $T_3:=B(T,\tau),\ \tau\in[0,T)$.

Лема 1.1. *Нехай a — неперервна й обмежена функція в $\Pi_{[0,T]}$. Для неї правильні такі твердження:*

а) якщо виконується умова

$$\exists\, C_{l1}>0\ \exists\,\beta_1\in(1/3,1]\ \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\}\subset\Pi_{[0,T]}:$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)|\le C_{l1}(T_l^{\hat m_1}+|\hat x_1|)^{-\beta_1}|x_2-z_2|^{\beta_1},\ l\in\mathbb{N}_3, \qquad (1.18)$$

то справджується нерівність (1.12) *з* $\gamma_2=\beta_1/\hat m_2$*;*

б) якщо виконується умова

$$\exists\, C_{l2}>0\ \exists\,\beta_2\in(9/10,1]\ \forall\{(t,x),(t,z^{(3)})\}\subset\Pi_{[0,T]}:$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}a(t,x)|\le C_{l2}(T_l^{\hat m_1}+2^{-1}T_l|x_1'|+|x_2'|)^{-\beta_2}|x_3-z_3|^{\beta_2},\ l\in\mathbb{N}_3, \qquad (1.19)$$

то справджується нерівність (1.13) *з* $\gamma_3=\beta_2/\hat m_2$.

Доведення. Досить довести обмеженість у випадку а) відношень

$$R_{l1}:=|\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)|(h_\ell^{\beta_1}+|X_2(h_l)-z_2|^{\beta_1/\hat m_2})^{-1},\ l\in\mathbb{N}_3,$$

та у випадку б) відношень

$$R_{l2}:=|\Delta_{x_3}^{z_3}a(t,x)|(h_l^{(\hat m_3/\hat m_2)\beta_2}+|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2/\hat m_2})^{-1},\ l\in\mathbb{N}_3,$$

для всіх $\{(t,x),(t,z^{(2)}),(t,z^{(3)})\}\subset\Pi_{[0,T]}$ і $h\in[\tau_l,T],\ l\in\mathbb{N}_3$.

Коли $h_l^{\beta_1}+|X_2(h_l)-z_2|^{\beta_1/\hat m_2}>T_l^{\beta_1}$ і $h_l^{(\hat m_3/\hat m_2)\beta_2}+|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2/\hat m_2}>T_l^{\beta_2}$, то маємо

$$R_{l1}\le T_l^{-\beta_1}|\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)|\le 2M_lT_l^{-\beta_1},\ l\in\mathbb{N}_3; \qquad (1.20)$$

$$R_{l2}\le T_l^{-\beta_2}|\Delta_{x_3}^{z_3}a(t,x)|\le 2M_lT_l^{-\beta_2},\ l\in\mathbb{N}_3, \qquad (1.21)$$

де M_l – стала, яка обмежує модуль функції $a \in \mathcal{A}_l,\ l \in \mathbb{N}_3$.

Нехай справджуються протилежні нерівності

$$h_l^{\beta_1} + |X_2(h_l) - z_2|^{\beta_1/\hat{m}_2} \le T_l^{\beta_1},\ l \in \mathbb{N}_3, \tag{1.22}$$

і

$$h_l^{(\hat{m}_3/\hat{m}_2)\beta_2} + |X_3(h_l) - z_3|^{\beta_2/\hat{m}_2} \le T_l^{\beta_2},\ l \in \mathbb{N}_3. \tag{1.23}$$

Оскільки $X_2(h_l) = x_2 + h_l\hat{x}_1$, а $X_3(h_l) = x_3 + h_l x_2' + 2^{-1}h_l^2 x_1'$, то справджуються нерівності

$$|x_2 - z_2| \le h_l|\hat{x}_1| + |X_2(h_l) - z_2|,\ l \in \mathbb{N}_3; \tag{1.24}$$

$$|x_3 - z_3| \le 2^{-1}h_l^2|x_1'| + h_l|x_2'| + |X_3(h_l) - z_3|,\ l \in \mathbb{N}_3. \tag{1.25}$$

Можливі такі випадки : 1) $h_l|\hat{x}_1| \le |X_2(h_l) - z_2|$; 2) $h_l|\hat{x}_1| > |X_2(h_l) - z_2|$; 3) $2^{-1}h_l^2|x_1'| + h_l|x_2'| \le |X_3(h_l) - z_3|$ і 4) $2^{-1}h_l^2|x_1'| + h_l|x_2'| > |X_3(h_l) - z_3|$. У випадку 1) за допомогою нерівності (1.18) отримуємо

$$R_{l1} \le C_{l1}\left(\frac{(h_l|\hat{x}_1| + |X_2(h_l) - z_2|)}{(T_l^{\hat{m}_1} + |\hat{x}_1|)}\right)^{\beta_1}(h_l^{\beta_1} + |X_2(h_l) - z_2|^{\beta_1/\hat{m}_2})^{-1} \le$$

$$\le 2^{\beta_1}C_{l1}|X_2(h_l) - z_2|^{\beta_1}(T_l^{\hat{m}_1} + |\hat{x}_1|)^{-\beta_1}(h_l^{\beta_1} + |X_2(h_l) - z_2|^{\beta_1/\hat{m}_2})^{-1},$$

а оскільки на підставі нерівності (1.22) $T_l^{-\hat{m}_2}|X_2(h_l) - z_2| \le 1$ та $\beta_1 > \beta_1/\hat{m}_2$, то $|X_2(h_l) - z_2|^{\beta_1} = T_l^{\hat{m}_2\beta_1}(T_l^{-\hat{m}_2}|X_2(h_l) - z_2|)^{\beta_1} \le T_l^{\hat{m}_2\beta_1}(T_l^{-\hat{m}_2}|X_2(h_l) - z_2|)^{\beta_1/\hat{m}_2} =$ $= T_l^{\hat{m}_1\beta 1}|X_2(h_l) - z_2|^{\beta_1/\hat{m}_2}$ і

$$R_{l1} \le 2^{\beta_1}C_{l1}\left(\frac{T_l^{\hat{m}_1}}{T_l^{\hat{m}_1} + |\hat{x}_1|}\right)^{\beta_1}\left(\frac{|X_2(h_l) - z_2|^{\beta_1/m_2}}{h^{\beta_1} + |X_2(h_l - z_2|^{\beta_1/\hat{m}_2}}\right) \le 2^{\beta_1}C_{l1},\ l \in \mathbb{N}_3. \tag{1.26}$$

Аналогічно у випадку 2) одержуємо

$$R_{l1} \le C_{l1}(h_l|\hat{x}_1| + |X_2(h_l) - z_2|)^{\beta}(T_l^{\hat{m}_1} + |\hat{x}_1|)^{-\beta_1}\times$$

$$\times(h_l^{\beta_1} + |X_2(h) - z_2|^{\beta_1/\hat{m}_2})^{-1} \le 2^{\beta_1}C_{l1}\times$$

$$\times\left(\frac{h_l^{\beta_1}}{h_l^{\beta_1} + |X_2(h) - z_2|^{\beta_1/\hat{m}_2}}\right)\left(\frac{|\hat{x}_1|}{T_l^{\hat{m}_1} + |\hat{x}_1|}\right)^{\beta_1} \le 2^{\beta_1}C_{l1},\ l \in \mathbb{N}_3. \tag{1.27}$$

З нерівностей (1.18),(1.26) і (1.27) випливає оцінка (1.12) з $\gamma_2 = \beta_1/\hat{m}_2$ і $H_{l2} = \max\{2M_lT_l^{-\beta_1},\ 2^{\beta_1}C_{l1}\}$.

У випадку 3) за допомогою нерівностей (1.19) і (1.25) отримуємо

$$R_{l2}\le C_{l2}\left(\frac{(2^{-1}h_l^2|x_1'|+h_l|x_2'|+|X_3(h_l)-z_3|)}{(T_l^{\hat m_1}+2^{-1}T_l|x_1'|+|x_2'|)}\right)^{\beta_2}(h_l^{(\hat m_3/\hat m_2)\beta_2}+|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2/m_2})^{-1}\le$$

$$\le 2^{\beta_2}C_{l2}|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2}(T_l^{\hat m_1}+2^{-1}T_l|x_1'|+|x_2'|)^{-\beta_2}(h_l^{\hat m_2^{-1}\beta_2}h_l^{\beta_2}+|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2/m_2})^{-1}.$$

Оскільки на підставі нерівності (1.23) $T_l^{-\hat m_2}|X_3(h_l)-z_3|\le 1$ і $\beta_2>\beta_2/\hat m_2$, то $|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2}=T^{\hat m_2\beta_2}(T_l^{-\hat m_2}|X_3(h_l)-z_3|)^{\beta_2}\le T_l^{\hat m_2\beta_2}(T_l^{-\hat m_2}|X_3(h_l)-z_3|)^{\beta_2/\hat m_2}=$ $=T_l^{\hat m_1\beta_2}|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2/\hat m_2}$ і

$$R_{l2}\le 2_2^{\beta}C_{l2}\left(\frac{T_l^{\hat m_1}}{T_l^{\hat m_1}+2^{-1}T_l|x_1'|+|x_2'|}\right)^{\beta_2}\times$$

$$\times\left(\frac{|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2/\hat m_2}}{h_l^{(\hat m_3/\hat m_2)\beta_2}+|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2/\hat m_2}}\right)\le 2^{\beta_2}C_{l2}. \tag{1.28}$$

У випадку 4) аналогічно

$$R_{l2}\le C_{l2}(2^{-1}h_l^2|x_1'|+h_l|x_2'|+|X_3(h_l)-z_3|)^{\beta_2}(T_l^{m_1}+2^{-1}T_l|x_1'|+|x_2'|)^{-\beta_2}\times$$

$$\times(h_l^{(m_3/m_2)\beta_2}+|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2/m_2})^{-1}\le$$

$$\le 2^{\beta_2}C_{l2}T_l^{\beta_2}\left(\frac{1}{h_l^{(m_3/m_2)\beta_2}+|X_3(h_l)-z_3|^{\beta_2/m_2}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2^{-1}T_l|x_1'|+|x_2'|}{T_l^{m_1}+2^{-1}T_l|x_1'|+|x_2'|}\right)^{\beta_2}\le(2T_l)^{\beta_2}C_{l2},\ l\in\mathbb{N}_3. \tag{1.29}$$

З нерівностей (1.19),(1.28) і (1.29) випливає оцінка (1.13) з $\gamma_3=\beta_2/m_2$ і $H_{l3}=\max\{2M_lT_l^{-\beta_2},\,2^{\beta_2}C_{l2},\,(2T)^{\beta_2}C_{l2}\}$.▶

З доведеної леми випливає, що умови (1.12) і (1.13) не є, взагалі кажучи, еквівалентними (навіть локально) відповідним умовам Гельдера за просторовими змінними груп виродження. Але ці умови дозволяють повніше використати переваги поетапного методу Леві побудови ФРЗК, який описано в підрозділі 1.3.

1.2. Означення фундаментальних розв'язків задачі Коші

Позначимо через Q деяку множину точок (t, x) простору $\mathbb{R}^{n+1}$. Нехай $L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)$ — лінійний диференціальний вираз, скалярний при $N = 1$ і матричний розміру $N \times N$ при $N > 1$, з комплекснозначними коефіцієнтами, які залежать від t і x та визначені в Q.

Розглянемо рівняння вигляду

$$L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1.30}$$

де $f : Q \to \mathbb{C}_{N1}$ — відома, а $u : Q \to \mathbb{C}_{N1}$ — невідома функції. Припускатимемо, що диференціальний вираз $L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)$ з (1.30) є рівномірно параболічним в $\Pi_{[0,T]}$ у сенсі Петровського чи Ейдельмана. Наведемо означення фундаментального розв'язку (ФР) рівняння (1.30) і фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) для цього рівняння.

Означення 1.6. *ФР рівняння* (1.30) називається функція

$$\Gamma(\cdot, \cdot; \tau, \xi) : Q \to \mathbb{C}_{NN}, \tag{1.31}$$

яка залежить від параметричної точки $(\tau, \xi) \in Q$ і така, що формула

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in Q, \tag{1.32}$$

визначає для довільної фінітної і достатньо гладкої функції f розв'язок рівняння (1.30).

Означення 1.7. *ФРЗК для рівняння* (1.30) *або для оператора* $L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)$ називається функція

$$Z(\cdot, \cdot; \tau, \xi) : \Pi_{(\tau,T]} \to \mathbb{C}_{NN}, \tag{1.33}$$

яка залежить від параметричної точки $(\tau, \xi) \in \Pi_{[0,T)}$ і така, що формула

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(\tau,T]}, \tag{1.34}$$

визначає розв'язок рівняння

$$L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(\tau,T]}. \tag{1.35}$$

в шарі $\Pi_{(\tau,T]}$, що задовольняє початкову умову

$$u\big|_{t=\tau} = \varphi \tag{1.36}$$

для будь-якого $\tau \in [0, T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Інакше кажучи, ФРЗК— це функція (1.33), яка для будь-якої точки $(\tau, \xi) \in \Pi_{[0,T)}$ є розв'язком задачі Коші

$$L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)Z = 0, \quad Z\big|_{t=\tau} = I\delta_\xi,$$

де δ_ξ— дельта-функція Дірака, що зосереджена в точці ξ.

Якщо відомо ФРЗК Z, то, довизначивши його нулем при $t < \tau$, отримаємо ФР рівняння. Зауважимо, що ФРЗК визначається єдиними чином, тоді як до ФР рівняння можна додати довільний регулярний розв'язок однорідного рівняння (1.35) і отримана функція також буде ФР рівняння.

Означення 1.8. *ФРЗК Z* називається *класичним* , якщо функція Z має неперервні й обмежені похідні, що входять в диференціальний вираз $L_N(t, x, \partial_t, \partial_x)$.

ФРЗК для невироджених параболічних рівнянь другого порядку будувався в працях [80–83]. Для рівняння з обмеженими і гладкими коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, ФРЗК був побудований Ф. Дресселем [80]. Для рівняння з неперервними за Гельдером коефіцієнтами В. Погожельським [82] і Д. Г. Аронсоном [83]. Для систем рівнянь довільного порядку з обмеженими змінними коефіцієнтами побудова ФРЗК здійснена С.З. Бруком [84], С.Д. Ейдельманом [3,85–87], В. Погожельським [88,89], Л.Н. Слободецьким [90] і Д.Г. Аронсоном [83,91]. У [84,85] коефіцієнти досить гладкі, а в решті праць вони тільки неперервні за Гельдером. У праці [92] М.І. Матійчука та С.Д. Ейдельмана ФРЗК побудовано за умови, що коефіцієнти системи задовольняють умову Діні, яка є слабшою за умову Гельдера. Для побудови ФРЗК використовувався метод параметриксу Леві [93].

Побудований ФРЗК для невироджених параболічних рівнянь знайшов різноманітні важливі застосування для вивчення внутрішніх властивостей розв'язків таких рівнянь, дослідження коректної розв'язності задачі Коші в широких класах функцій, отримання інтегрального зображення розв'язків задачі Коші і розв'язків, визначених у відкритому шарі $\Pi_{(0,T]}$, встановлення локальної розв'язності задачі Коші для квазілінійних і нелінійних параболічних за Петровським систем, дослідження можливості продовження розв'язків таких систем на ширший часовий проміжок та ін. Точні посилання та детальний виклад результатів наведено в монографіях [3,14].

У дисертаційній роботі для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ поряд з класичним ФРЗК використовуватимемо слабший ФРЗК, так званий Лі-ФРЗК.

Наведемо спочатку означення, які є аналогічними до означень, наведених у праці [94].

Означення 1.9. Функція u називається *диференційовною за Лі* в точці (t,x) відносно векторного поля, заданого диференціальним виразом (1.2), якщо існує скінченна границя

$$(S_L u)(t,x) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(\gamma(t,x,h)) - u(\gamma(t,x,0))),$$

де $\gamma(t,x,h) := (t+h, X(h))$, $h \in \mathbb{R}^n$,— інтегральна лінія заданого векторного поля, яка проходить через точку (t,x).

Границя $(S_L u)(t,x)$ називається *похідною Лі* від функції u в точці (t,x) відносно заданого векторного поля.

Зауважимо, що якщо існують похідні $\partial_t u$, $\partial_{x_{2j}} u$ і $\partial_{x_{3j}} u$ в точці (t,x), то $(S_L u)(t,x) = (Su)(t,x)$.

Означення 1.10. Функцію u називатимемо *Лі-розв'язком рівняння* (1.1) з класу $\boldsymbol{K_1}$ в $\Pi_{(0,T]}$, якщо існують у $\Pi_{(0,T]}$ неперервні похідна Лі $S_L u$ та звичайні похідні $\partial_{x_{1j}} u$, $\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} u$, $\{j,l\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$.

Означення 1.11. Функцію u називатимемо *Лі-розв'язком рівняння* (1.6) з класу $\boldsymbol{K_2}$ в $\Pi_{(0,T]}$, якщо існують у $\Pi_{(0,T]}$ неперервні похідна Лі $S_L u$ та звичайні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} u$, $|k_1| \le 2b$.

Означення 1.12. Функцію u називатимемо *Лі-розв'язком рівняння* (1.8) з класу $\boldsymbol{K_3}$ в $\Pi_{(0,T]}$, якщо існують у $\Pi_{(0,T]}$ неперервні похідна Лі $S_L u$ та звичайні похідні $\partial_{x_{1j}} u$, $\partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} u$, $\{j, l\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$.

Означення 1.13. ФРЗК Z називається *Лі-ФРЗК*, якщо функція Z є Лі-розв'язком відповідного рівняння (1.1), (1.6) чи (1.8) в $\Pi_{(0,T]}$.

Зауважимо, що класичний ФЗРК є Лі-ФРЗК. Термін ФРЗК використовуватимемо у решті випадків, коли тип ФРЗК для нас не є важливим.

Коротко охарактеризуємо праці, в яких вивчався і використовувався ФРЗК для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова другого і довільних порядків.

В праці [95] А. М. Колмогоров розглянув рівняння, яке у випадку $n = 1$ має вигляд

$$\partial_{t'} g = -\dot{q}^{'} \partial_{q'} g - \partial_{\dot{q}'} (f(t', q', \dot{q}') g) + \partial^2_{\dot{q}'} (k(t', q', \dot{q}') g). \tag{1.37}$$

Якщо f і k – сталі, то, як показав А.М. Колмогоров, ФРЗК для рівняння (1.37) визначається формулою

$$G(t, q, \dot{q}; t', q', \dot{q}') = 2\sqrt{3}\pi^{-1} k^{-2} (t'-t)^{-2} \exp\{-(4k(t'-t))^{-1} (\dot{q}' - \dot{q} - f(t'-t))^2 -$$
$$-3k^{-1}(t'-t)^{-3}(q' - q - 2^{-1}(\dot{q}' + \dot{q})(t'-t))^2\},$$
$$t < t', \quad \{q, \dot{q}, q', \dot{q}'\} \subset \mathbb{R}. \tag{1.38}$$

Формула (1.38)—це класична формула для ФРЗК для рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова.

М. Вебер [96] в довільній відкритій області побудувала ФРЗК для рівняння

$$\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t, x, y) \partial_{x_j} \partial_{x_l} u + \sum_{j=1}^{n} a_j(t, x, y) \partial_{x_j} u + a(t, x, y) u +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} x_j \partial_{y_j} u + \partial_t u = 0.$$

У праці А.М. Ільїна [97] наведені твердження про існування, єдиність і додатність ФРЗК для рівняння

$$(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t,x,y)\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x,y)\partial_{x_j} -$$

$$-a(t,x,y) - \sum_{j=1}^{m} b_j(t,x,y)\partial_{y_j})u = f, \quad m \le n, \tag{1.39}$$

коефіцієнти a_{jl}, a_j, a та b_j якого є неперервними й обмеженими разом зі своїми похідними відповідно до другого та четвертого порядків, а також твердження про єдиність розв'язку задачі Коші в класі функцій Тихонова і про внутрішні оцінки розв'язків.

І.М. Сонін [98] розглянув рівняння вигляду

$$\partial_t u = \left(\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t,x,y,z)\partial_{y_j}\partial_{y_l} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x,y,z)\partial_{y_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x,y,z)\partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} c_j(t,x,y,z)\partial_{z_j}\right)u, \quad \{x,y,z\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.40}$$

де $b_j(t,x,y,z)$ улаштовані "приблизно"як y_j, а $c_j(t,x,y,z)$— як x_j. Методом Леві він довів існування ФРЗК для рівняння (1.40) у випадку, коли в $[0,T] \times \times \mathbb{R}^{3n}$ коефіцієнти a_{jl} і a_j обмежені разом з похідними до другого і першого порядків відповідно за всіма змінними, а b_j і c_j (c_j не залежать від y) мають обмежені похідні до третього порядку.

Основним результатом праць [99,100] є встановлення гладкості розв'язків неоднорідного рівняння, внутрішніх апріорних оцінок розв'язків в обмежених областях. Я.І. Шатиро довів, що другі похідні від розв'язку рівняння другого порядку (типу (1.39) в [99] та аналогічного типу з довільною кількістю груп просторових змінних і сталими коефіцієнтами в [100]) за просторовими змінними першої групи гельдерові з тим самим показником, що й права частина f рівняння, показник гельдеровості для перших похідних за просторовими змінними l-ї групи ($l \ge 2$) на $(2l-3)/(2l-1)$ менший від порядку гельдеровості правої частини. Наведені приклади показують, що цей результат є точним. У доведеннях використовуються ФРЗК для модельних рівнянь.

У працях Л.П. Купцова [101–104] розглядається рівняння вигляду

$$(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t)\partial_{x_j}\partial_{x_l} + \sum_{j,l=1}^{n} b_{jl}(t)x_j\partial_{x_l})u = 0, \tag{1.41}$$

де $(a_{jl}(t))_{j,l=1}^n$ – невід'ємна симетрична матриця з рангом n_1 ($1 \le n_1 \le n$), матриця $(b_{jl}(t))_{j,l=1}^n$ має спеціальну структуру та властивості. У [101,102,104] для рівняння (1.41) зі сталими коефіцієнтами побудовано ФРЗК, встановлено принцип максимуму та доведено теорему про середнє. У [103] побудовано ФРЗК для рівняння (1.41) у загальному випадку.

Побудові й застосуванню ФРЗК для ультрапараболічних рівнянь як другого, так і довільного порядків присвячені праці С.Д. Ейдельмана, Г.П. Малицької, Л.М. Тичинської, С.Д. Івасишена, Л.М. Андросової і В.С. Droня [105–120].

У праці В. Скорнаццані [121] для рівняння (1.1) з дійснозначними коефіцієнтами у випадку, коли $n_1 = n_2 = 1$ і $n_3 = 0$, доведена додатність ФРЗК, його оцінка знизу, теорема типу Д.В. Уіддера [122] про єдиність розв'язків задачі Коші, теорема про інтегральне зображення невід'ємних розв'язків і теорема Фату. Деякі з цих результатів поширено на рівняння (1.1) у загальному випадку в праці В.С. Дроня і С.Д. Івасишена [117] і наведено в підрозділі 3.3 монографії [14]. Для їх одержання використовуються деякі модифікації принципу максимуму, які для таких рівнянь установлені В.С. Дронем [123] і Г.П. Малицькою [124].

На початку 70-х років минулого століття С.Д. Ейдельман і Г.П. Малицька [105,107] почали вивчення рівнянь структури Колмогорова довільного порядку. Для таких рівнянь у випадку, коли $n_1 = n_2 = n_3$ і коефіцієнти можуть залежати лише від часової змінної, побудовано ФРЗК, вивчено його властивості та з їх допомогою доведено теореми про існування і єдиність розв'язків задачі Коші, а також установлено деякі якісні властивості розв'язків. Приблизно в той самий час і незалежно близький клас рівнянь (рівнянь (1.6) з $n_3 = 0$) розглянув У. Като, в праці [125] якого знайдено умови гіпоеліптичності за Л. Хермандером [126] рівнянь із цього класу.

Як і для невироджених параболічних рівнянь, для вироджених рівнянь типу Колмогорова у випадку, коли коефіцієнти сталі або залежать лише від часової змінної, вдається одержати повне аналітичне описання ФРЗК і з його допомогою встановити досить точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків. Такі результати одержані Л.М. Андросовою і С.Д. Івасишеним [111,112,115]. У більш загальному випадку вони викладені в [14].

Якщо коефіцієнти вироджених рівнянь типу Колмогорова залежать від усіх змінних, то дослідження ФРЗК істотно ускладнюється. Крім традиційних виникають серйозні труднощі, пов'язані з виродженністю рівнянь. Способи подолання цих труднощів обговорюються у наступному підрозділі.

1.3. Метод Леві

У 1907 р. появилася робота італійського математика Е. Е. Леві [93], в якій для еліптичного рівняння порядку $2n$ з коефіцієнтами, що залежать від двох незалежних змінних, побудовано фундаментальний розв'язок. Метод, який запропоновано в цій роботі, полягав у тому, що побудова фундаментального розв'язку зводилась до розв'язування спеціального інтегрального рівняння. У 1941 р. з'явився переклад праці Леві на російську мову [127], а в 1946 р. З. Я. Шапіро [128] узагальнила результат Леві на випадок трьох незалежних змінних.

У 1946 – 1963 рр. Я. Б. Лопатинський жив і працював у Львові. Одним із важливих напрямків його досліджень цього періоду становили праці, пов'язані з побудовою і дослідженням фундаментальних матриць розв'язків для загальних еліптичних систем рівнянь із частинними похідними. У праці [129] Я. Б. Лопатинським для загальної еліптичної системи методом Леві доведено існування фундаментальної матриці розв'язків. Після цієї фундаментальної роботи Я. Б. Лопатинського питаннями побудови фундаментальних матриць розв'язків займались інші математики. Праці Я. Б. Лопатинського стимулювали також дослідження в теорії параболічних систем. Детальніше про вплив ідей Я. Б. Лопатинського на розвиток теорії параболічних систем можна прочитати в статті С. Д. Івасишена [130].

Дослідження означених вище класів рівнянь проводиться за однією схемою. Спочатку означуються, будуються і досліджуються ФРЗК, а потім за їх допомогою знаходяться класи існування, єдиності і коректності задачі Коші з обов'язковою умовою, щоб в ці класи входили обмежені функції.

ФРЗК будуються за допомогою однієї з модифікацій класичного методу Леві. Нагадаємо суть цього методу. Фундаментальний розв'язок $Z(t,x;\tau,\xi)$ шукається у вигляді суми двох доданків: головного члена $G_0(t,x;\tau,\xi)$, який називається параметриксом, і доданка у вигляді інтеграла з ядром G_0 і деякою невідомою густиною Q. Параметрикс має потрібну особливість при $(t,x) = (\tau,\xi)$. Зазвичай він визначається за допомогою ФРЗК $Z_0(t,x;\tau,\xi;y)$ або $Z_0(t,x;\tau,\xi;\beta,y)$ для модельних рівнянь, що містять старші в тому чи іншому сенсі групи членів, у коефіцієнтах яких змінні x або (t,x) зафіксовані в точках y або (β,y). Побудова й дослідження ФРЗК Z_0 для модельних рівнянь проводиться за такою схемою:

— до модельних рівнянь застосовується перетворення Фур'є за просторовими змінними, при цьому для класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ отримуються диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку за часовою і частиною просторових змінних, а у випадку класу $\boldsymbol{K_4}$— звичайні диференціальні рівняння;

— досліджуються властивості ФРЗК для отриманих рівнянь як функцій параметричних змінних;

— за допомогою цих властивостей і підходящих теорем про перетворення Фур'є отримуються по можливості точні оцінки і повний аналітичний опис ФРЗК для розглядуваних модельних рівнянь.

Щоб отримати параметрикс, потрібно у виразі для Z_0 замість y або (β,y) взяти підходящі функції, які залежать, взагалі кажучи, від основних (t,x) і

(τ, ξ) параметричних точок. Реалізація процедури послідовної побудови і вивчення параметриксу, а потім і ФРЗК потребує залучення різноманітних засобів математичного аналізу: теорем про перетворення Фур'є цілих функцій, теорії узагальнених функцій, теорії потенціалу.

Невідома густина Q визначається із відповідного інтегрального рівняння. Це рівняння, на відміну від еліптичного випадку, є вольтерівським за змінною t із квазірегулярним ядром. Розв'язок такого рівняння знаходиться методом послідовних наближень.

Процедура застосування методу Леві, як правило, відрізняється на першому кроці, коли вибирається параметрикс таким чином, щоб він найкраще відповідав і враховував особливості розглядуваних класів рівнянь.

Вибір параметриксу відіграє важливу роль при побудові ФРЗК й отриманні точних оцінок ФРЗК та його похідних. Проілюструємо це на прикладі параболічної за Петровським системи.

Нехай $L_N(t, x, \partial_t, \partial_x) = I\partial_t - \sum\limits_{|k| \le 2b} a_k(t, x)\partial_x^k$. У цьому випадку модельні рівняння з коефіцієнтами, залежними від t і параметрів або лише від параметрів $(\beta, y) \in \Pi_{[0,T]}$, мають відповідно вигляд

$$(I_N\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t, y)\partial_x^k)u = 0 \tag{1.42}$$

або

$$(I_N\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(\beta, y)\partial_x^k)u = 0. \tag{1.43}$$

Нехай $Z_0(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot; y)$ і $Z_0(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot; \beta, y)$ – ФРЗК для рівнянь (1.42) і (1.43) відповідно. Тоді, у випадку рівняння (1.42) за параметрикс береться функція

$$G_0(t, x; \tau, \xi) := Z_0(t, x; \tau, \xi; \xi), 0 \le \tau < t \le T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.44}$$

Аналогічно будується параметрикс і у випадку рівняння (1.43), в якому

$$G_0(t, x; \tau, \xi) := Z_0(t, x; \tau, \xi; \tau, \xi), 0 \le \tau < t \le T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.45}$$

Розглянемо тепер параболічну за Петровським систему з виродженням на початковій гіперплощині. У цьому випадку $L_N(t, x, \partial_t, \partial_x) = \alpha(t)I_N\partial_t -$

$-\beta(t)\sum\limits_{0<|k|\le 2b} a_k(t,x) - a_0(t,x)$. Тут $\alpha(t)>0,\ \beta(t)>0$ для $t\in(0,T]$, $\alpha(0)\beta(0)=$ $=0$ і β – монотонно неспадна функція. Параметрикс визначається за формулою (1.44), в якій $Z_0(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;y)$ — ФРЗК для системи

$$(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{|k|=2b} a_k(t,y)\partial_x^k - a_0(t,y))u = 0.$$

Тобто у цьому випадку в модельне рівняння, крім старших похідних, уходить і молодший (стосовно порядку диференціювання) член, що пов'язано зі структурою системи.

Наявність додаткового доданка (в даному випадку a_0) і множників ($\alpha(t)$, $\beta(t)$) з однієї сторони ускладнює структуру ФРЗК, що створює додаткові труднощі при дослідженні властивостей параметриксу та породжуваних ним потенціалів, а з іншої— дозволяє отримати точні оцінки ФРЗК, його похідних і їх приростів.

Побудові й дослідженню ФРЗК для вироджених на початковій гіперплощині параболічних за Петровським систем присвячено ряд праць С. Д. Івасишена та О. Г. Возняк [131–133] і І. П. Мединського [134–138]. За допомогою властивостей ФРЗК в цих працях досліджено коректну розв'язність систем із звичайною початковою умовою для випадку слабкого виродження і без початкової умови, якщо виродження сильне. У випадку слабкого виродження знайдено необхідні й достатні умови зображення розв'язків систем у вигляді суми інтегралів Пуассона і об'ємних потенціалів, досліджено, в якому сенсі дані розв'язки задовольняють початкові умови, а також описано множини початкових значень. Ці результати увійшли до кандидатської дисертації І. П. Мединського [139].

У праці [18] згадані результати розвинуті й доповнені випадком сильного виродження системи. У цьому випадку розглядається задача Коші з ваговою початковою умовою. Зауважимо, що перелічені вище результати є узагальненням результатів з [3,140,141] на випадок параболічних за Петровським систем з обмеженими гельдеровими коефіцієнтами і виродженням на початковій гіперплощині. Аналогічні результати для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині отримані в працях [17,137,142–145], основні з них наведені в підрозділі 2.4 монографії [14].

Перейдемо до вироджених рівнянь типу Колмогорова, тобто рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$. Ці класи є узагальненнями відомого рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова (1.37). Це рівняння є виродженим диференціальним рівнянням із частинними похідними параболічного типу. Воно містить за частиною просторових змінних (у рівнянні (1.37) вони визначають координати і швидкості) у сенсі теорії параболічних рівнянь лише молодші похідні. Такі рівняння відносяться до класу ультрапараболічних або еліптико-параболічних рівнянь.

Теорія ультрапараболічних рівнянь, точніше рівнянь типу Фоккера–Планка–Колмогорова, коефіцієнти яких є мірами, викладена в монографії [12]. Дослідженню нелінійних ультрапараболічних рівнянь присвячена монографія [13] Н. П. Процах і Б. Й. Пташника. Ці дослідження, як було зазначено вище, проводились іншими методами без використання ФРЗК.

Застосуванню різних модифікацій методу параметриксу Леві побудови й дослідження ФРЗК для рівнянь із класів $\boldsymbol{K_1}$ і $\boldsymbol{K_2}$ присвячені праці С. Д. Ейдельмана, С. Д. Івасишена, Г. П. Малицької і Л. М. Тичинської [108–110,114,118]. У працях [106,113,116] розглядались також рівняння типу Колмогорова зі зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами.

У працях С. Д. Івасишена і С. Д. Ейдельмана [146–150] введено новий клас вироджених рівнянь (за позначенням з [14]— клас $\mathbf{E_{23}}$) і у випадку, коли коефіцієнти цих рівнянь не залежать від просторових змінних (клас $\mathbf{E^0_{23}}$), побудовано та вивчено ФРЗК, доведено теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків. Ці результати викладено в підрозділах 3.1 і 3.2 монографії [14]. Там наведено також теорему 3.6 про ФРЗК для рівнянь з класу $\mathbf{E^0_{23}}$, які мають ще виродження на початковій гіперплощині. Ця теорема, а також результати про задачу Коші для таких рівнянь зі слабким виродженням на початковій гіперплощині належать С. Д. Івасишену та О. Г. Возняк [119]. Відзначимо, що аналогічні результати для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_2}$ з незалежними від просторових змінних коефіцієнтами наведено в праці [151] і що в праці [152] встановлено однозначну розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші з узагальненими початковими даними для рівнянь з класу $\mathbf{E^0_{23}}$, які містять виродження на початковій гіперплощині.

У великому циклі праць італійських математиків [94,153–165] вивчаються рівняння типу Колмогорова вигляду

$$Lu := \sum_{j,l=1}^{p_0} a_{jl}(t,x)\partial_{x_j}\partial_{x_l}u + \sum_{j=1}^{p_0} a_j(t,x)\partial_{x_j}u + c(t,x)u+$$

$$+\sum_{j,l=1}^{N} b_{jl}x_j\partial_{x_l}u - \partial_t u = 0, \tag{1.46}$$

де $1 \leq p_0 < N$, матриця $A_0 := (a_{jl})_{j,l=1}^{p_0}$ симетрична та додатно визначена, а матриця $B := (b_{jl})_{j,l=1}^{N}$ зі сталими дійсними елементами має вигляд

$$\begin{pmatrix} * & B_1 & O & \dots & O \\ * & * & B_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & B_r \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

Тут B_j – матриці розміру $p_{j-1} \times p_j$, ранг яких дорівнює p_j, де p_0, p_1,...,p_r – натуральні числа такі, що $p_0 \geq p_1 \geq ... \geq p_r \geq 1$, $p_0 + p_1 + ... + p_r = N$, а $*$-блоки є довільними. Клас таких рівнянь є ширшим, ніж клас ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. За вказаних умов на матрицю (1.47), оператор L, який означений в (1.46), є гіпоеліптичним та інваріантним відносно деякої групи розширень. Відповідно до цієї групи С. Полідоро [156] введено спеціальне поняття B-гельдеровості функцій. У припущенні гіпоеліптичності оператора L, B-гельдеровості коефіцієнтів a_{jl}, a_j та c рівняння (1.46), виходячи з результатів Л. П. Купцова [101–104], Е. Ланконеллі та С. Полідоро [155], в працях [156–158,94] методом Леві побудовано для рівняння (1.46) Лі-ФРЗК, установлені його оцінки, властивості нормальності, формула згортки, а також деякі теореми про існування розв'язку задачі Коші, єдиність та інтегральне зображення невід'ємних розв'язків. У працях С. Д. Івасишена і В. В. Лаюка [166–169] за додаткових умов на матрицю (1.47), доведено існування та ряд властивостей ФРЗК для таких рівнянь, одержано оцінки ФРЗК та його похідних, застосовано ФРЗК до встановлення коректної розв'язності задачі Коші. Праці [159–162] присвячені властивостям регулярності сильних і слабких розв'язків рівнянь типу (1.46). У працях [163,165] одержані оцінки зверху та знизу ФРЗК. У згаданих уже працях [94,153,154] робиться огляд праць, присвячених вивченню і застосуванню лінійних і нелінійних рівнянь типу Колмогорова.

Відповідним чином модифікуючи поняття B-гельдеровості, в праці [14] знайдено умови на коефіцієнти вироджених рівнянь типу Колмогорова (не тільки ультрапараболічного, але й рівнянь довільного порядку і рівнянь з параболічною за Ейдельманом головною частиною), за яких побудовано Лі-ФРЗК, одержано відповідні оцінки для нього, його похідних за основними змінними та похідної Su. Грунтуючись на цих результатах, доведені деякі теореми про коректну розв'язність задачі Коші. Зазначимо, що всі вищеназвані результати належать С. Д. Івасишену і в монографії опубліковані вперше.

Як і для невироджених параболічних рівнянь, для вироджених рівнянь типу Колмогорова у випадку, коли коефіцієнти сталі або залежать лише від часової змінної, вдається одержати повне аналітичне описання ФРЗК і з його допомогою встановити досить точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків. Якщо коефіцієнти вироджених рівнянь типу Колмогорова залежать від усіх змінних, то дослідження ФРЗК істотно ускладнюється. Крім традиційних виникають серйозні труднощі, пов'язані з виродженістю рівнянь. Наявність оператора S "переплітає"просторові і часову змінну, що ускладнює отримання точних оцінок. У праці [14] ця трудність долається за допомогою спеціальної умови на коефіцієнти. У випадку рівняння з класу $\boldsymbol{K_1}$ ця умова має вигляд

$$\exists\, H > 0 \;\; \exists \;\gamma \in (0,1] \;\; \forall\, a \in \mathcal{A}_1 \;\; \forall \{(t,x),(\tau,\xi)\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$
$$|\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} a(t,x)| \leq H(d(t, X(t-\tau);\tau,\xi))^{\gamma}. \tag{1.48}$$

Тут

$$d(t,x;\tau,\xi) := |t-\tau|^{1/2} + |x_2 - \xi_1| + |x_2 - \xi_2|^{1/3} + |x_3 - \xi_3|^{1/5}.$$

Параметрикс у цьому випадку визначається формулою (1.45), в якій $Z_0(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;\beta,y)$— ФРЗК для такого рівняння з параметрами:

$$L_1^{(\beta,y)} u(t,x) = (S - A_1(\beta,y,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \tag{1.49}$$

де диференціальні вирази S і A_1 визначаються відповідно формулами (1.2) і (1.3).

Г. П. Малицька у своїх роботах [105,109,110] використовувала інший підхід. На коефіцієнти рівняння накладаються звичайні умови (неперервність за t, диференційовність і гельдеровість за просторовими змінними), а модельне рівняння для знаходження ФРЗК мало вигляд

$$L_2^{(t,y)} u(t,x) := (S - A_2(t,y), \partial_{x_1}))u = 0, \tag{1.50}$$

де диференціальні вирази S і A_2 такі, як вище.

Якщо $Z_0(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;y)$ – ФРЗК для рівняння (1.50), то параметрикс G_0 визначався формулою $G_0(t,x;\tau,\xi) = Z_0(t,x;\tau,\xi;\Xi(t-\tau))$, де $\Xi(t) := (\xi_1, \xi_2 - t\hat{\xi_1})$. А далі, на етапі обґрунтування методу Леві, авторка при обчисленні $L_2^{(t,y)} Z_0$ не враховує отриманої складної залежності параметриксу від змінних, що робить обґрунтування не переконливим.

Аналіз праць показав, що вирішення проблеми побудови класичного ФРЗК полягає не тільки у виборі підходящих умов на коефіцієнти, але й у вдалому виборі параметриксу при застосуванні методу Леві. Наш підхід полягає у поетапному застосуванні методу Леві. Поетапний метод Леві, розроблявся в працях [21,22,24,27,28,31,36]. Опишемо загальну схему застосування цього методу.

Кількість етапів побудови ФРЗК залежить від кількості груп просторових змінних. На наступному етапі побудови ФРЗК за параметрикс беремо ФРЗК, побудований на попередньому етапі. Для ФРЗК використовуватимемо позначення $\mathbb{Z}_{l,j-1}$, $l \in \mathbb{N}_3$, $j \in \mathbb{N}_4$. Перший індекс вказує на номер класу, другий індекс — на етап побудови ФРЗК. Відповідно параметрикс на j-тому етапі позначатимемо символом G_{lj} , породжуваний ним об'ємний потенціал— символом W_{lj}, а його густину —символом Q_{lj}. Процедура для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_l}, l \in \mathbb{N}_3$, однакова. Тому опишемо процедуру застосування поетапного методу Леві для класу $\boldsymbol{K_1}$.

Отже, на початковому (нульовому) етапі будуємо ФРЗК Z_{10} для рівняння, коефіцієнти якого залежать від змінної t і параметра $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^n$, тобто розглядаємо допоміжне рівняння

$$L_1^{(t,y)}u(t,x) := (S - A_1(t, y, \partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \ y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.51)$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}},$$

$$A_1(t, y, \partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,y)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,y)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,y).$$

На першому етапі ФРЗК для рівняння

$$L_1^{(t,x^{(1)}(y))}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad y' \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \quad (1.52)$$

шукаємо у вигляді

$$Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = G_{11}(t,x;\tau,\xi;y') + W_{11}(t,x;\tau,\xi;y'), \quad (1.53)$$

де

$$W_{11}(t,x;\tau,\xi;y') := \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda, \quad (1.54)$$

G_{11} — параметрикс, а Q_{11} — невідома функція. За параметрикс беремо функцію

$$G_{11}(t,x;\tau,\xi;y') := Z_{10}(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y')), 0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}. \tag{1.55}$$

На другому етапі рівняння має вигляд

$$L_1^{(t,x^{(2)}(y))}u(t,x) := (S - A_1(t,x^{(2)}(y)),\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},\ y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}, \tag{1.56}$$

і ФРЗК шукаємо у вигляді

$$Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) + W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3), \tag{1.57}$$

де

$$W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda, \tag{1.58}$$

G_{12} — параметрикс, а Q_{12} — невідома функція. За параметрикс беремо функцію

$$G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) := Z_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3)), 0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}. \tag{1.59}$$

Для випадку трьох груп просторових змінних третій етап завершує побудову ФРЗК для рівняння, коефіцієнти якого залежать від усіх змінних. Отже, на цьому етапі розглядаємо рівняння вигляду

$$L_1^{(t,x^{(3)}(y))}u(t,x) := (S - A_1(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{1.60}$$

Аналогічно до попереднього ФРЗК для рівняння (1.60) шукаємо у вигляді

$$Z_{13}(t,x;\tau,\xi) = G_{13}(t,x;\tau,\xi) + W_{13}(t,x;\tau,\xi), \tag{1.61}$$

де

$$W_{13}(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \tag{1.62}$$

G_{13} — параметрикс, а Q_{13} — невідома функція. За параметрикс беремо функцію

$$G_{13}(t,x;\tau,\xi) := Z_{12}(t,x;\tau,\xi;\xi_3), 0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.63}$$

Результатом кожного j-того етапу є твердження про існування відповідного класичного ФРЗК Z_{lj}, $l \in \mathbb{N}_3$, $j \in \mathbb{Z}_4$, встановлення точних оцінок похідних від ФРЗК, інтегралів від похідних ФРЗК та їх приростів. Проведення цих досліджень істотно залежить від всебічного вивчення властивостей об'ємних потенціалів (1.54),(1.58) і (1.62). Ядром потенціалу є відповідний параметрикс (1.55),(1.59) чи (1.63), а густиною— відповідна функція $Q_{lj}, \{j, l\} \subset \mathbb{N}_3$. Для густин Q_{lj} встановлюються певні властивості та оцінки, які гарантують існування похідних від об'ємних потенціалів, їх точних оцінок та оцінок приростів таких похідних за просторовими змінними.

Реалізація такого підходу з викладом основних його результатів для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ наводиться відповідно в розділах 3, 4 і 5 дисертації.

1.4. Огляд літератури за темою дисертації

Огляд літератури за темою дисертації розпочато в підрозділах 1.2 і 1.3. Тут його буде доповнено і проаналізовано в рамках яких наукових проєктів виконувалась дисертаційна робота.

З 1988 р. в Чернівцях працює філія Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. У 1988–1996 рр. філія мала статус відділу крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а з 1996 р. — статус Чернівецької філії відділу математичної фізики. Керівником філії був проф. С. Д. Івасишен, а відділу — проф. Б. Й. Пташник. Дослідження проводились в рамках тематики філії та відділу. З цією тематикою безпосередньо пов'язана дисертаційна робота. Тому спочатку зробимо короткий огляд досліджень, які проводились у рамках тематики Чернівецької філії відділу математичної фізики. Назви тем, які виконувалися у відділі за цей період, наведено у вступі.

Згідно з [29] дослідженням охоплені, головно, такі класи рівнянь і систем рівнянь:

1) параболічні за І. Г. Петровським та $\overrightarrow{2b}$-параболічні (параболічні за С. Д. Ейдельманом) системи з обмеженими коефіцієнтами та виродженнями на

початковій гіперплощині (С. Д. Івасишен, О. Г. Возняк, І. П. Мединський [15–18,131,133,141]);

2) параболічні за І. Г. Петровським рівняння і системи з оператором Бесселя (С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, Т. М. Балабушенко, Л. М. Мельничук [172–175]);

3) параболічні за І. Г. Петровським та за С. Д. Ейдельманом системи зі зростаючими коефіцієнтами за відсутності та наявності вироджень на початковій гіперплощині (С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник [176–178]);

4) класи вироджених рівнянь типу Колмогорова, які містять за основними змінними диференціальні вирази, параболічні за І. Г. Петровським та за С. Д. Ейдельманом (С. Д. Івасишен, Л. М. Андросова, О. Г. Возняк, В. С. Дронь, В. В. Лаюк, Г. С. Пасічник, І. П. Мединський [21,22,24,26–28,31,33,36,112,115,151,166–171,179–185]);

5) параболічні рівняння, які містять псевдодиференціальні вирази (С. Д. Ейдельман, Я. М. Дрінь, В. В. Городецький, В. А. Літовченко [186–193])

Для перших чотирьох класів рівнянь і систем рівнянь розроблена теорія їх розв'язності за звичайних і вагових початкових умов та без початкових умов залежно від того, чи відсутні, а якщо присутні, то якого характеру виродження на початковій гіперплощині. Зокрема, для однорідних слабко вироджених систем із першого класу, систем із другого класу, а також рівнянь із четвертого класу, коефіцієнти яких можуть залежати лише від часової змінної, і рівнянь із цього класу другого порядку із залежними від усіх змінних коефіцієнтами знайдено необхідні й достатні умови того, що спеціально побудовані вагові L_p-простори функцій та відповідні простори узагальнених мір є множинами початкових значень і що розв'язки зображуються через їх початкові значення у вигляді інтегралів Пуассона. Останні результати є поширенням відповідних класичних результатів теорії гармонічних функцій на розв'язки вищевказаних рівнянь і систем рівнянь. Зазначимо, що в рамках розробленої теорії для систем з першого класу доведено теореми про апріорні оцінки та підвищення гладкості розв'язків, коректну розв'язність лінійних систем, а також локальну розв'язність квазілінійних систем. У рамках досліджень рівнянь з четвертого класу, коефіцієнти яких залежать від усіх змінних, побудовано та вивчено властивості дещо ослабленого порівняно з класичним Лі-ФРЗК. Для рівнянь другого порядку з однією групою змінних виродження в [21,24,25] знайдено умови на коефіцієнти, за яких побудовано класичний ФРЗК, одержано точні оцінки його похідних та їх приростів за просторовими змінними. При цьому використано запропоновану раніше авторами модифікацію класичного методу Леві, яка є фактично поетапним застосуванням методу параметриксу Леві. Аналогічні результати отримано для рівнянь з двома групами змінних виродження [27,28,31,33,36].

Для випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу ультрарозподілів Жевре, доведено теореми про однозначну розв'язність та властивості локалізації розв'язків задачі Коші для еволюційних параболічних рівнянь, параболічних за Г. Є. Шиловим та за І. Г. Петровським рівнянь із виродженнями на початковій гіперплощині й параболічних за І. Г. Петровським рівнянь з оператором Бесселя (В. В Городецький, І. В. Житарюк [194–197]), а також вироджених рівнянь типу А. М. Колмогорова (С. Д. Івасишен, Л. М. Андросова [198])

Значна увага приділялась дослідженням рівнянь із п'ятого класу, а також деяким іншим дослідженням.

Зауважимо, що більшість вищеназваних результатів увійшли повністю, або частково до монографій [6,14,191,201,202], а огляди результатів містяться в [19,20,23,29,203].

Класи вироджених параболічних рівнянь, які вивчаються в дисертаційній роботі, є узагальненням у різних напрямках параболічних за Петровським рівнянь. Зокрема класи $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$, як уже було зазначено в підрозділі 1.3, узагальнюють класичне рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова. Це рівняння вперше виникло при вивченні моделей броунівського руху.

У класичній теорії броунівського руху, яку розвинули А. Ейнштейн і М. Смолуховський [204,205] нехтується інерцією броунівської частинки, тобто фактично вважається, що маса цієї частинки дорівнює нулю. У цій теорії броунівська частинка не має скінченної швидкості. Так, наприклад, в окремому випадку броунівського руху вільної частинки Н. Вінером [206] було строго доведено, що броунівська траєкторія з імовірністю одиниця є неперервною, але ніде не диференційовною лінією. За такого припущення моделлю броунівського руху вільної частинки є вінерівський випадковий процес, а для фізичної системи – неперервний марковський процес у просторі її координат.

Недиференційовність броунівських траєкторій в теорії Ейнштейна–Смолуховского тісно пов'язана із введеною у цій теорії ідеалізацією (нехтуванням інерцією), що робить відповідну теорію непридатною на дуже малих проміжках часу Δt. У застосуванні до найпростішого випадку броунівського руху вільної частинки теорія, що враховує вже й інерцію частинки, була в 1930 р. розвинута Г.Е. Уленбеком і Л.С. Орнштейном [207] (див. також праці Дж.Л. Дуба [208] та С. Чандрасекара [209]). У цій уточненій теорії траєкторії частинок виявляються вже диференційовними (але вони не мають другої похідної, так що тепер нескінченним виявляється прискорення частинки).

У 1934 р. А. М. Колмогоров [95] узагальнює уточнену теорію броунівського руху для довільної фізичної системи з n степенями вільності. Врахування інерції за А. М. Колмогоровим досягається тим, що стан системи задається значеннями n координат $q_1, ..., q_n$ і n їх похідних за часом (швидкостей) $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n$. Моделлю броунівського руху системи тут є неперервний марковський процес в $2n$-вимірному фазовому просторі координат і швидкостей. Коротко викладемо зміст цієї основної для нас праці А. М. Колмогорова [95]. Вона істотно використовує дві його більш ранні праці [210,211], в яких викладена класична теорія марковських випадкових процесів, що функціонують у неперервному часі. Перший варіант сучасної концепції цих процесів розроблений Дж. Дубом [212] і Є. Б. Динкіним [213].

Отже, розглядається система з n степенями вільності. Нехай $q_1, ..., q_n$ – координати системи. Вважається, що у випадку, коли відомі значення $q := = (q_1, ..., q_n)$ і $\dot{q} := (\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$ у момент часу t, може бути визначена густина ймовірності $G(t, q, \dot{q}; t', q', \dot{q}')$ можливих значень q' і $\dot{q}'$ координат системи та їх похідних за часом у довільний момент $t' > t$. Припускається, що G не залежить від поведінки системи перед моментом t (відсутня післядія, процес є марковським). Доводиться, що функція G є ФРЗК для диференціального рівняння Фоккера–Планка

$$\partial_{t'} g = -\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j^{'} \partial_{q_j^{'}} g - \sum_{j=1}^{n} \partial_{\dot{q}_j^{'}} (f_j(t', q', \dot{q}') g) + \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{\dot{q}_j^{'}} \partial_{\dot{q}_l^{'}} (k_{jl}(t', q', \dot{q}^{'}) g), \quad (1.64)$$

в якому елементи k_{jl}, $\{j, l\} \subset \mathbb{N}_n$, матриці дифузії і координати f_j, $j \in \mathbb{N}_n$, вектора переносу визначаються з рівностей

$$M(\Delta \dot{q}_j)^2 = k_{jj}(t, q, \dot{q})\Delta t + o(\Delta t),$$

$$M(\Delta \dot{q}_j \Delta \dot{q}_l)^2 = k_{jl}(t, q, \dot{q})\Delta t + o(\Delta t),$$

$$M(\Delta \dot{q}_j) = f_j(t, q, \dot{q})\Delta t + o(\Delta t),$$

де M – символ математичного сподівання.

Теорія Уленбека–Орнштейна броунівського руху вільної частинки одержується із загальної теорії А. М. Колмогорова при $n = 1$ (так що основне рівняння цієї теорії має вигляд (1.37)), $f = -\alpha q$ (де $\alpha = \beta/m$, m – маса частинки, β – коефіцієнт при силі в'язкого тертя, який дорівнює $6\pi\sigma\mu$ для сферичної частинки радіуса σ), а $k = k_0 T / m\beta$.

Рівняння (1.37) є прототипом сім'ї еволюційних рівнянь, які виникають у кінетичній теорії газу. У найбільш загальному випадку такі рівняння записують у формі

$$Su = I(u). \quad (1.65)$$

Тут функція $\mathbb{R}^{2n} \ni x \to u(x, t) \in \mathbb{R}$ є густиною частинок, що мають у момент часу t швидкості $(x_1, ..., x_n)$ і координати $(x_{n+1}, ..., x_{2n})$;

$$Su := \sum_{j=1}^{n} x_j \partial_{x_{n+j}} u + \partial_t u$$

є так званою повною похідною від u, а $I(u)$ описує різного роду зіткнення. Вираз $I(u)$ може мати як лінійну, так і нелінійну форму. Наприклад, у випадку звичайного рівняння Фоккера–Планка маємо

$$I(u) = -\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \partial_{x_j} \partial_{x_l} u + \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_{x_j} u + au, \tag{1.66}$$

де a_{jl}, a_j, a – функції від (t, x). Трапляється, що $I(u)$ має дивергентну форму

$$I(u) = -\sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j} \left(a_{jl} \partial_{x_l} u + b_j u \right) + \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_{x_j} u + cu, \tag{1.67}$$

У рівнянні Фоккера–Планка–Ландау нелінійний оператор зіткнень $I(u)$ має вигляд

$$I(u) = \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j} \left(a_{jl}(z, u) \partial_{x_l} u + b_j(z, u) \right), \tag{1.68}$$

в якому коефіцієнти a_{jl} і b_j залежать від $z \in \mathbb{R}^{2n+1}$ та невідомої функції u через деякі інтегральні вирази. Цей оператор є спрощеним варіантом оператора зіткнень Больцмана (моделі наведені в [214–216]).

У праці А. М. Ільїна і Р. З. Хасьмінського [217] розглядається фізична задача, математичний апарат розв'язування якої близький до запропонованого в праці [209]. У ній вивчається рух частинки маси m в полі сил F. Вважається, що середовище, в якому відбувається рух, заповнене однорідними частинками маси μ, з якими розглядувана частинка може зіштовхуватися, змінюючи свою швидкість за законом пружного удару. Вважається, що розподіл швидкостей частинок середовища заданий і не залежить від руху частинки маси m, а випадкове число зіткнень за час t є процесом Пуассона з параметром a. При цих припущеннях місцезнаходження $X_\mu(t)$ і швидкість $\dot{X}_\mu(t)$ частинки маси m в момент t утворюють у сукупності марковський процес $\{X_\mu(t), \dot{X}_\mu(t)\}$. Доводиться, що при $a \to \infty$, $\quad a\mu \to A/2 = \text{const}$ і незмінній температурі середовища T цей процес збігається до процесу броунівського руху в фазовому просторі, густина перехідних імовірностей якого є ФРЗК для рівняння

$$\partial_t u = \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \partial_{x_j} u + \sum_{j=1}^{n} F_j(x) \partial_{\dot{x}_j} u + \frac{A}{m} \left(\frac{T}{9m} \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{\dot{x}_j} u - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \partial_{\dot{x}_j} u \right). \quad (1.69)$$

У праці [217] доведено існування ФРЗК $G(t, x, y; \xi, \eta)$ для рівняння

$$\partial_t u = y \partial_x u + a \partial_y^2 u + g(x, y) \partial_y u, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}, \quad (1.70)$$

де a – додатна стала, а функція g є обмеженою і має неперервні та обмежені похідні за x і y. Для функції G і її похідних одержані оцінки та доведено, що ця функція є густиною перехідних імовірностей марковського процесу $\{X(t), Y(t)\}$, визначеного як розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто [218]

$$\begin{cases} dX = Y(t)dt, \\ dY = g(X(t), Y(t))dt + \sqrt{a} d\xi(t), \end{cases}$$

де $\{\xi(t)\}$ – вінерівський процес.

Крім того, в праці [217] досліджена асимптотична поведінка розв'язків задачі Коші для рівняння (1.70) за різних припущень щодо порядку величин A, T і m. Одержано члени асимптотичних розкладів за степенями малого параметра, зокрема при $A \to \infty$ і $m/A \to 0$.

Відомо [212, 213], що невироджені дифузійні процеси з досить регулярними характеристиками мають гладку перехідну густину. Виродження матриці дифузії, взагалі кажучи, призводять до відсутності густини в перехідної функції. Проте, існують деякі класи вироджених процесів, у яких є гладка густина. До таких процесів, як указано вище, відносяться процеси броунівського руху з інерцією, розглянуті А. М. Колмогоровим, А. М. Ільїним і Р. З. Хасьмінським, а також вироджені процеси І. М. Соніна [98].

Розглянемо загальну фінансову модель марковського типу, в якій динаміка визначається стохастичним диференціальним рівнянням в N-вимірному просторі станів

$$dX_t = (BX_t + b(t, X_t))dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (1.71)$$

де W – d-вимірний стандартний вінерівський процес, $d \leq N$, $\sigma = \sigma(t,x)$ – матриця розміру $N \times d$, $B = (b_{jl})_{j,l=1}^N$ – стала матриця , вектор $b = (b_1, ..., b_N)$ такий, що $0 = b_{d+1} = ... = b_N$.

Такі рівняння виникають при вивченні математичних моделей опціонів (відомих моделей Блека–Шоулза, Роджерса; див. огляд [153] і наведені там посилання).

За певних припущень на матриці σ, B, b в праці [219] доведено існування та єдиність слабкого розв'язку стохастичного диференціального рівняння (1.71), а також установлено, що густина ймовірностей переходу слабкого розв'язку цього рівняння є ФРЗК для рівняння вигляду

$$\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{d} a_{jl}(t,x)\partial_{x_j}\partial_{x_l}u(t,x) + \sum_{j,l=1}^{N} b_{jl}x_j\partial_{x_l}u(t,x) + \\ + \sum_{j=1}^{d} b_j(t,x)\partial_{x_j}u(t,x) + \partial_t u(t,x) = 0.$$

Останнім часом дослідженню математичних моделей опціонів присвячена велика кількість праць (див. [154, 220–226]). У цих працях вивчаються аналітичними, ймовірнісними і числовими методами різноманітні задачі, пов'язані з такими моделями.

Ультрапараболічні диференціальні рівняння з нелінійною повною похідною вигляду

$$\Delta_x u + \partial_y g(u) - \partial_t u = f, \quad x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \{y, t\} \subset \mathbb{R}, \tag{1.72}$$

виникають при вивченні моделей конвекції-дифузії [227,228] та моделей ціни опціонів з пам'яттю [229]. Так, лінеаризоване рівняння (1.72)

$$g'(u)\partial_y v - \partial_t v = -\Delta_x v,$$

якщо похідна $g'(u) \neq 0$ і досить гладка, може бути зведене до рівняння Колмогорова

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u + x_1\partial_{x_{n+1}} u - \partial_t u = 0.$$

Клас $\boldsymbol{K_4}$ є також узагальненням рівномірно параболічних за Петровським рівнянь. У 1960 р. С. Д. Ейдельман [230] виділив і почав досліджувати новий клас систем — клас $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Ці системи є природним узагальненням параболічних за Петровським систем на випадок, коли просторові змінні нерівноправні. Для таких систем С. Д. Ейдельманом і С. Д. Івасишеним [140,230] побудований і детально досліджений ФРЗК в припущенні, що коефіцієнти є обмеженими неперервними функціями, які задовольняють за просторовими змінними умову Гельдера відносно спеціальної $\overrightarrow{2b}$-параболічної відстані.

Побудові та вивченню властивостей ФРЗК для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи за умови, що її коефіцієнти задовольняють умову Діні, присвячені праці М. І. Матійчука [231] та М. І. Матійчука і С. Д. Ейдельмана [232].

Побудований й досліджений ФРЗК знайшов різноманітні важливі застосування до вивчення внутрішніх властивостей розв'язків параболічних за Петровським і за Ейдельианом систем, дослідження коректної розв'язності задачі Коші в широких класах функцій, одержання інтегрального зображення розв'язків задачі Коші та розв'язків, які визначені у відкритому шарі $\Pi_{(0,T]}$, встановлення локальної розв'язності задачі Коші для квазілінійних і нелінійних систем, дослідження можливості продовження їх розв'язків на ширший часовий інтервал та ін. Ці результати детально викладені в монографіях [2,3,4,14] та статтях [7,11,14,233].

Детальніше зупинимось на праці С. Д. Івасишена і С. Д. Ейдельмана [140], в якій підведено певний підсумок досліджень $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем до 1968 р. У ній проведено досить повне і точне дослідження ФРЗК Z задачі Коші та її властивостей, властивостей породжених Z потенціалів, , знайдено класи коректності задачі Коші для лінійних систем при різних припущеннях щодо коефіцієнтів і неоднорідності систем та початкових функцій, встановлено локальну розв'язність нелінійних систем і вивчено питання про продовження її розв'язків на ширший часовий інтервал, одержано внутрішні оцінки розв'язків та доведено гіпоеліптичність $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. Ці результати, з одного боку, узагальнюють результати з [3] для параболічних за Петровським систем, а з другого— уточнюють і доповнюють їх. Важливим є також те, що в [140], з належною повнотою, викладено всі етапи дослідження коректної розв'язності задач Коші, яке грунтується на методах теорії потенціалу. Коротко охарактеризуємо їх. Насамперед необхідно мати повний опис ФРЗК Z такої системи, включаючи оцінки Z та її похідних, а також оцінки їх приростів за всіма змінними. Ці результати для Z використовуються при дослідженні властивостей потеціалів, породжених ФРЗК. В основному це властивості, які пов'язані з гладкістю інтегралів Пуассона та об'ємних потенціалів за різних припущень щодо їх густин. Потрібна також інформація про інтегральні зображення розв'язків задачі Коші, а саме про те, до якого простору повинен належати розв'язок задачі Коші, щоб його можна було подати у вигляді суми інтеграла Пуассона та об'ємного потенціалу. Простори, до яких належать розв'язки,— це банахові простори функцій, що можуть зростати експоненціально при $|x| \to \infty$ і степеневим способом при $t \to 0$. За допомогою зазначених властивостей доводиться, що всякий регулярний розв'язок, тобто такий, що має неперервні похідні, які входять у систему, належить до деякого гельдерового простору і норма розв'язку в цьому просторі оцінюється через відповідні норми неоднорідності системи та початкової функції. Але досягти відразу гладкості, яка допускається досліджуваною системою не вдається. Спочатку доводиться, що розв'язок належить до гельдерового простору з показником Гельдера, нижчим від відповідного показника для коефіцієнтів і неоднорідності системи. Потім, використавши інше зображення розв'язку та спеціальну техніку, доводиться, що розглядуваний розв'язок належить до потрібного простору. Оцінки шаудерового типу для розв'язків задачі Коші одержані в [140] і для випадку початкових функцій, гладкість яких не є достатньою для того, щоб їх підставляти в систему. Одержані за допомогою такого підходу результати є повними, точними і в певному розумінні остаточними для параболічних за Петровським і за Ейдельманом систем рівнянь, коефіцієнти яких задовольняють умову Гельдера за сукупністю змінних.

У праці [234] В. О. Солонниковим побудована шаудерова та L_p-теорії розв'зності крайових задач і, зокрема, задачі Коші, для загальних параболічних систем, з рівноправними просторовими змінними, але використана ним методика не пов'язана безпосередньо з ФРЗК, їх властивостями та іншими специфічними методами теорії потенціалу.

Зазначимо, що в працях [3,140,233] та інших при одержанні інтегрального зображення розв'язків параболічних за Петровським і $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем достатні умови, що накладались на розв'язки, не завжди збігались з необхідними. У працях [141,235] С. Д. Івасишеним вперше знайдено необхідні й достатні умови, за яких розв'язки однорідних $\overrightarrow{2b}$-параболічних (і, отже, параболічних за Петровським) систем, які визначені в шарі $\Pi_{(0,T]}$, зображуються у вигляді інтегралів Пуассона функцій або узагальнених мір зі спеціальних вагових просторів. З'ясовано також, в якому сенсі ці розв'язки задовольняють початкові умови.

У дисертаційній роботі розглядаються класи рівнянь, які мають виродження на початковій гіперплощині. Тому зупинимось на огляді праць, пов'язаних з такими рівняннями і системами.

У працях А. С. Калашникова [236,237] знайдено класи коректності для вироджених за часовою змінною параболічних рівнянь другого порядку, що включають зростаючі функції. Ці результати одержані без використання ФРЗК. А. В. Глушак та С. Д. Шмулевич [238] побудували ФРЗК для вироджених на початковій гіперплощині $\{t = 0\}$ параболічних за Петровським рівнянь довільного порядку. Ними визначено також клас коректності задачі без початкових умов. Цей клас, побудований за допомогою ФРЗК, виявився ширшим, ніж клас, одержаний в [236]. Він містить функції, які зростають як при $|x| \to \infty$, так і при $t \to 0$. У праці В. П. Глушка [239] доведено, що для сильно виродженого рівняння не можна розглядати класичну задачу Коші з початковими даними, які задані в точці виродження. Тому природно задавати початкову умову з деякою вагою. Саме такі розв'язки були знайдені в [238].

У працях В. В. Городецького та І. В. Житарюка [196,197] вивчені властивості розв'язків задачі Коші для параболічних рівнянь зі слабким виродженням на початковій гіперплощині та початковими даними зі спеціальних просторів узагальнених функцій.

У підрозділі 1.3 вже аналізувалось, що було зроблено С. Д. Івасишеним, О. Г. Возняк і І. П. Мединським у працях [131–139] для параболічних за Петровським систем з виродженням на початковій гіперплошині та С. Д. Івасишеним і Л. П. Березан у працях [142–145] для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплошині. Також обговорювались результати С. Д. Івасишена і О. Г. Возняк з [119,151,152] для вироджених рівнянь типу Колмогорова.

Для квазілінійних рівнянь другого порядку відомі досить повні результати. Більшість з них викладені у монографії [4] і статті [240]. Дослідження задачі Коші для квазілінійної параболічної системи, що містить групу старших членів, коефіцієнти яких залежать від усіх незалежних змінних, невідомої функції та її похідних молодших порядків, проводились С.Д. Ейдельманом і С.Д. Івасишеним. Результати цих досліджень для квазілінійних параболічних за Петровським систем наведено в [3], для квазілінійних параболічних за Петровським систем і виродженням на початковій гіперплошині в [138,139], для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем— в [140]. У працях [3,140] розглядались і нелінійні параболічні системи загального вигляду. Доведено, що такі системи еквівалентні квазілінійним параболічним системам описаної вище структури.

Оскільки розв'язок нелінійної чи квазілінійної параболічної системи одержується визначеним на деякому часовому інтервалі, який, взагалі кажучи, є вужчим, ніж той, на якому задані функції, що визначають систему, то природно виникає питання про продовження таких розв'язків на ширший чи на ввесь часовий інтервал, на якому визначена система. У [3,140] вивчено питання про можливість продовження розв'язків параболічних за Петровським, а також $\overrightarrow{2b}$-параболічних квазілінійних і нелінійних систем. Знайдено умови, за яких таке продовження може бути здійсненим, та описано відповідні класи систем. Окремо в [3] вивчались майже лінійні системи, в яких нелінійною є тільки права частина. У цій праці доводяться також і деякі нелокальні теореми.

Г. Фуджітою [241] та Ж.-Л. Ліонсом [242] розглядалась задача Коші для квазілінійного рівняння $\partial_t u = \triangle_n u + u^{1+\beta}$, де $\triangle_n$— n-вимірний оператор Лапласа, $\beta > 0$. У цих працях доведено, що для $\beta \geq \frac{2}{n}$ задача Коші для такого рівняння має єдиний розв'язок, якщо початкова функція береться досить малою за деякою нормою. Цей результат виявився точним, бо, як було показано К. Хаякавою [243], для $\beta < \frac{2}{n}$ розв'язок за скінченний час досягає нескінченності, якою малою не була б початкова функція. Для доведення цього задачі Коші ставилось у відповідність інтегральне рівняння, яке розв'язувалось методом послідовних наближень. У подальшому ця методика використовувалась у [244–246] для встановлення глобальної розв'язності задачі Коші й для інших рівнянь. У праці [247] доведено загальну теорему, яка для широкого класу рівнянь визначає умови, за яких існує глобальний розв'язок задачі Коші. Природним є бажання застосувати цю теорему до рівнянь з розглядуваних у дисертації класів.

З вищенаведеного огляду праць випливають такі висновки та актуальні проблеми, вирішенню яких присвячена дисертаційна робота:

1) для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ в працях інших авторів немає повністю обґрунтованих результатів, що стосуються існування, точних оцінок і властивостей класичних ФРЗК; тому актуальною є проблема про знаходження умов на коефіцієнти рівнянь, за яких існують класичні ФРЗК з потрібними природними властивостями, в тому числі з точними оцінками, при цьому передбачається детальна розробка методів повного обґрунтування результатів;

2) для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$ у відомих працях інших авторів відсутнє детальне дослідження властивостей ФРЗК для кожного із типів вироджень на

початковій гіперплощині; в цьому полягає друга невирішена проблема;

3) третьою проблемою є знаходження різноманітних застосувань для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$, хоча би аналогічних до застосувань ФРЗК для невироджених параболічних рівнянь.

РОЗДІЛ 2
ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі наводяться означення і властивості оцінювальних функцій та деяких інтегралів, що містять оцінювальні функції; леми про існування та оцінки розв'язків деяких інтегральних рівнянь; леми про властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів; теореми про властивості й оцінки ФРЗК для допоміжних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$. Результати розділу опубліковано в працях [15,21,24,27,28,30,31,33,34,36].

2.1. Означення і властивості оцінювальних функцій

Для кожного класу $\boldsymbol{K_l}$, $l \in \mathbb{N}_4$, використовуватимемо відповідну оцінювальну функцію $E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi)$, $E_c^{(2)}(t-\tau, x, \xi)$, $E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi)$ і $E_c^{(4)}(t, \tau, x-\xi)$, де c—додатна стала, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$. Уведемо функції

$$E_c^{q,j}(t, z_j) := \exp\{-ct^{1-qj}|z_j|^q\}, c > 0, t > 0, q > 0, z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, j \in \mathbb{N}_3; \qquad (2.1)$$

$$E_c^{q,n}(t, x) := \exp\{-ct^{1-q}|x|^q\}, c > 0, t > 0, q > 0, x \in \mathbb{R}^n; \qquad (2.2)$$

$$E_c^2(t, x, \xi) := \prod_{j=1}^{3} E_c^{2,j}(t, X_j(t) - \xi_j), c > 0, t > 0, q > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \qquad (2.3)$$

$$E_c^n(t, x-\xi) := \prod_{j=1}^{n} E_c^{q_j,n}(t, x-\xi), c > 0, t > 0, q_j > 0, j \in \mathbb{N}_n, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

За допомогою (2.3) і (2.4) означимо такі оцінювальні функції:

$$E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi) := E_c^2(t-\tau, x, \xi); \qquad (2.5)$$

$$E_c^{(3)}(t, \tau, x, \xi) := E_c^2(B(t, \tau), x, \xi); \qquad (2.6)$$

$$E_c^{(4)}(t, \tau, x-\xi) := E_c^n(B(t, \tau), x-\xi), \qquad (2.7)$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$. У (2.6) і (2.7) $\tau > 0$, якщо $B(t, 0) = \infty$.

Оцінювальна функція $E_c^{(2)}(t, \tau, x, \xi)$ має складнішу структуру. За допомогою функції (2.1) означимо ще такі оцінювальні функції:

$$E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^{q,1}(t,X_1(t)-\xi_1),$$

$$E_c^{(2,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \prod_{j=1}^{2} E_c^{q,j}(t,X_j(t)-\xi_j),$$

$$E_c^{(2,3)}(t,x,\xi) := \prod_{j=1}^{3} E_c^{q,j}(t,X_j(t)-\xi_j),$$

$$t>0, \quad \{x_j,\xi_j\}\subset \mathbb{R}^{n_j}, \ \ j\in\mathbb{N}_3, \ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \tag{2.8}$$

$$a_j^{(\chi,\hat{C})}(t) := (\hat{C}\Gamma(\chi)t^{\chi})^j(\Gamma(j\chi+1))^{-1}, t>0, \hat{C}>0, \chi\in(0,1), j\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

(у формулі (2.9) $\Gamma(\,\cdot\,)$ —ґамма-функція Ейлера); (2.9)

$$E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1),$$

$$F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\hat{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1), t>0, \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.10}$$

$$E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\hat{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(2,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$$t>0, \{x_j,\xi_j\}\subset\mathbb{R}^{n_j}, j\in\mathbb{N}_2; \tag{2.11}$$

$$E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi) := E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi),$$

$$F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,\hat{C})}(t)E_{c\delta^j}^{(2,3)}(t,x,\xi), t>0, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

(у формулах (2.10)– (2.21) $\hat{C}$ і δ — деякі додатні сталі, причому $\delta<1$).

Отже,

$$E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi) := E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t-\tau,x,\xi), 0\le\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

Розглянемо функцію

$$E_c^{(0)}(t,x,\xi) := \exp\{-c[(4t)^{-1}|x_1-\xi_1|^2+3t^{-3}|x_2+2^{-1}t(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2|^2+$$

$$+180t^{-5}|x_3+2^{-1}t(x_2'+\xi_2')+(12)^{-1}t^2(x_1'-\xi_1')-\xi_3|^2]\}, t>0, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{2.14}$$

Зауважимо, що функція $E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, з

точністю до сталого множника визначає ФРЗК для модельного рівняння з класу $\boldsymbol{K_1}$ (тобто рівняння зі сталими коефіцієнтами). Аналогічно функція $E_c^{(0)}(B(t,\tau),x,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, визначає ФРЗК для модельного рівняння з класу $\boldsymbol{K_3}$.

Розглядатимемо також інтеграли від оцінювальних функцій, які залежать від параметричних точок. Вони визначаються такими співвідношеннями:

$$I_0^{(1,sl)}(x;\xi) := ((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{sl}(t-\beta),\xi)d\lambda, \tag{2.15}$$

$$I_1^{(1,sr)}(x;\xi) := (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{sr}(t-\beta),\xi)d\lambda_1, \tag{2.16}$$

$$I_2^{(1,s2)}(x_1,x_2;\xi) := (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$
$$\times E_c^{2,2}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{s2}(t-\beta),\xi)d\lambda_1 d\lambda_2, \tag{2.17}$$

$$I_0^{(3,sl)}(x;\xi) := (B(t,\beta)B(\beta,\tau))^{-M}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t,\beta,x,\lambda)E_c^{(3)}(\beta,\tau,\Lambda^{sl}(B(t,\beta)),\xi)d\lambda, \tag{2.18}$$

$$I_1^{(3,sr)}(x;\xi) := (B(t,\beta))^{-\hat{m}_1 n_1}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{2,1}(B(t,\beta),x_1-\lambda_1)E_c^{(1)}(B(\beta,\tau),\Lambda^{sr}(B(t,\beta)),\xi)d\lambda_1, \tag{2.19}$$

$$I_2^{(3,s2)}(x_1,x_2;\xi) := (B(t,\beta))^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_c^{2,1}(B(t,\beta),x_1-\lambda_1)\times$$
$$\times E_c^{2,2}(B(t,\beta),X_2(B(t,\beta))-\lambda_2)E_c^{(1)}(B(t,\beta),\Lambda^{s2}(B(t,\beta)),\xi)d\lambda_1 d\lambda_2, \tag{2.20}$$

$$I_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(2,3)}(B(t,\beta),x,\lambda)E_c^{(2,3)}(B(\beta,\tau),\lambda,\xi)(B(t,\beta)B(\beta,\tau))^{-M}\,d\lambda,$$
$$c>0,\quad 0<\tau<\beta<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \tag{2.21}$$

$$I_c^{(2,\chi,\hat{C})}(t,\tau,x,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(2,3)}(t-\beta,x,\lambda)E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)\left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M}d\lambda,$$

$$\chi \in (0,1], \;\; c>0, \;\; \hat{C}>0, \;\; 0 \le \tau < \beta < t, \;\; \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{2.22}$$

$$I_0^{(2,sl)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(2,3)}(t-\beta, x-\lambda) E_c^{(2,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sl}(t-\beta), \xi)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} d\lambda; \tag{2.23}$$

$$I_1^{(2,sr)} := (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{(2,1)}(t-\beta, x_1, \lambda_1) E_c^{(2,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sr}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1; \tag{2.24}$$

$$I_2^{(2,sr)} := (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_c^{(2,2)}(t-\beta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) E_c^{(2,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sr}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1 d\lambda_2; \tag{2.25}$$

$$I_0^{(2,\chi,\hat{C},sl)} :=$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(2,3)}(t-\beta, x-\lambda) E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sl}(t-\beta), \xi)((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} d\lambda; \tag{2.26}$$

$$I_1^{(2,\chi,\hat{C},sr)} := (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_c^{(2,1)}(t-\beta, x_1, \lambda_1) E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sr}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1; \tag{2.27}$$

$$I_2^{(2,\chi,\hat{C},s2)} := (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_c^{(2,3)}(t-\beta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{s2}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{2.28}$$

$$J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(x,\xi) := ((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t-\beta, x-\lambda) E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sl}(t-\beta), \xi) d\lambda; \tag{2.29}$$

$$J_{1,c,\hat{C}}^{(2,\chi,sr)} := (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,1)}(t-\beta, x_1, \lambda_1) E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{sr}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1; \tag{2.30}$$

$$J_{2,c,\hat{C}}^{(2,\chi,s2)} := (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,2)}(t-\beta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{s2}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{2.31}$$

У формулах (2.15)–(2.31)

$$\Lambda^{s0}(t) := Z^{(s)}(t),\ \ \Lambda^{s1}(t) := (\lambda_1, Z_2^{(s)}(t), Z_3^{(s)}(t)),\ \ \Lambda^{s2}(t) := (\lambda_1, \lambda_2, Z_3^{(s)}(t)),$$

$$\Lambda^{s3}(t) := \lambda,\ \ s \in \mathbb{Z}_3,\ \ r \in \{2,3\},\ \ 0 \le \tau < \beta < t \le T,\ \ \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Властивості оцінювальних функцій наводяться у наступних лемах.

Лема 2.1. *Правильні такі твердження:*

$$E_c^{(1)}(t,x,\xi) \le E_{c_1}^{(0)}(t,x,\xi) \le E_{c_2}^{(1)}(t,x,\xi),$$

$$t > 0,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ 0 < c_2 < c_1 < c; \tag{2.32}$$

$$E_c^{2,1}(t-\beta, x_1-\lambda_1)E_c^{2,1}(\beta-\tau, \lambda_1-\xi_1) \le E_c^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1),$$

$$0 \le \tau < \beta < t,\ \{x_1, \lambda_1, \xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.33}$$

$$E_c^{2,2}(t-\beta, X_2(t-\beta)-\lambda_2)E_c^{2,2}(\beta-\tau, \Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2) \le E_{-c/2}^{2,1}(t-\beta, x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times E_{c/4}^{2,2}(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2), 0 \le \tau < \beta < t,\ \ \{x_s, \lambda_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_2; \tag{2.34}$$

$$|X_s(t)-\xi_s|^{\alpha} E_c^{2,s}(t, X_s(t)-\xi_s) \le C\, t^{\hat{m}_s\alpha} E_{c_0}^{2,s}(t, X_s(t)-\xi_s),$$

$$t > 0, \quad \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \quad s \in \mathbb{N}_3; \tag{2.35}$$

$$|X_s(t)-\xi_s|^{\alpha_s} E_c^{(1)}(t,x,\xi) \le C t^{\hat{m}_s\alpha} E_{c_0}^{(1)}(t,x,\xi), t > 0, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{N}_3; \tag{2.36}$$

$$t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(1)}(t,x,\xi)\, d\xi = C,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n; \tag{2.37}$$

$$t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_c^{(1)}(t,x,\xi) d\xi_2 d\xi_3 \le C\, t^{-\hat{m}_1 n_1} E_c^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1),$$

$$t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \xi_1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.38}$$

$$t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_c^{(1)}(t,x,\xi) d\xi_3 \le C\, t^{-\hat{m}_1 \hat{n}_1 - \hat{m}_2 n_2} E_c^{2,1}(t, x_1-\xi_1) E_c^{2,2}(t, X_2(t)-\xi_2),$$

$$t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s},\ s \in \mathbb{N}_2; \tag{2.39}$$

$$t^{-\hat{m}_s n_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^{2,s}(t, X_s(t)-\xi_s) d\xi_s = C, t > \tau \ge 0, x_s \in \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_3; \tag{2.40}$$

$$E_c^{(1)}(t-\tau, y^{(s)}, \xi) \le E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi), 0 \le \tau < t, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{2.41}$$

$$E_c^{(1)}(\beta-\tau, Z^{(l)}(t-\beta), \xi) \le C E_{c/8}^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi),$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,\ \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ l \in \mathbb{N}_3; \tag{2.42}$$

$$E_c^{(1)}(\beta - \tau, X(t-\beta), \xi) \le E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi), 0 \le \tau < \beta < t,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{2.43}$$

$$E_c^{(1)}(\beta-\tau, (\lambda_1, Z_2^{(l)}(t-\beta), Z_3^{(l)}(t-\beta), \xi) \le E_{c/4}^{(1)}(\beta-\tau, (\lambda_1, X_2(t-\beta), X_3(t-\beta)), \xi),$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,\ \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, l \in \mathbb{N}_3; \tag{2.44}$$

$$E_c^{(1)}(\beta - \tau, (\lambda_1, X_2(t-\beta), X_3(t-\beta)), \xi) \le E_{-9c/4}^{2,1}(t-\beta, x_1 - \lambda_1) E_{c/2}^{(l)}(t-\tau, x, \xi),$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.45}$$

$$E_c^{(1)}(\beta - \tau, (\lambda_1, \lambda_2, Z_3^{(l)}(t-\beta)), \xi) \le C E_{c/2}^{(1)}(\beta - \tau, (\lambda_1, \lambda_2, X_3(t-\beta)), \xi),$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,\ \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \lambda_j \in \mathbb{R}^{n_j}, j \in \mathbb{N}_2, l \in \mathbb{Z}_3; \tag{2.46}$$

$$E_c^{(1)}(\beta-\tau, (\lambda_1, \lambda_2, X_3(t-\beta)), \xi) \le C E_c^{2,1}(\beta-\tau, \lambda_1-\xi_1) E_c^{2,2}(\beta-\tau, \Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2) \times$$

$$\times E_{-c/4}^{2,1}(t-\beta, x_1-\lambda_1) E_{-c/2}^{2,2}(t-\beta, X_2(t-\beta)-\lambda_2) E_{c/4}^{2,3}(t-\tau, X_3(t-\tau)-\xi_3),$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \lambda_j \in \mathbb{R}^{n_j}, j \in \mathbb{N}_2; \tag{2.47}$$

$$I_0^{(1,sl)}(z^{(r)}; \xi) \le C(t-\tau)^{-M} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi),$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,\ \{x, \xi, z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n, \{s, l, r\} \subset \mathbb{Z}_3; \tag{2.48}$$

$$I_1^{(1,sl)}(z_1; \xi) \le C I_1^{(1,sl)}(x_1; \xi) \le C E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi),$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,\ \{x_1, z_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ l \in \mathbb{Z}_1,\ \{s, r\} \subset \mathbb{Z}_3; \tag{2.49}$$

$$I_2^{(1,sl)}(z_1, z_2; \xi) \le C I_2^{(1,sl)}(x_1, z_2; \xi) \le C I_2^{(1,sl)}(x_1, x_2; \xi) \le C E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi),$$

$$0 \le \tau < t_1 \le \beta < t,\ \{x_r, z_r\} \subset \mathbb{R}^{n_r},\ r \in \mathbb{N}_2\, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{Z}_3, \tag{2.50}$$

де C, c *і* c_0 *— додатні сталі, причому* $c_0 < c$, *в (2.41)* $y^{(s)}$ *— точка на відрізку прямої, що сполучає точки* x *і* $z^{(s)}, s \in \mathbb{N}_3$, *у формулах (2.41)–(2.47)* $|x_s - - z_s|^{1/\hat{m}_s} \le (t-\tau)/4,\ s \in \mathbb{N}_3$, *а* $t_1 := (t+\tau)/2$.

Лема 2.2. *Правильні такі твердження:*

$$E_c^{(2,3)}(t, x, \xi) \le E_{c_1}^{(2,3)}(t, x, \xi),\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ 0 < c_1 < c; \tag{2.51}$$

$$E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t, x, \xi) \le F_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t, x, \xi),$$

$$t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad c > 0, \quad \hat{C} > 0, \quad \chi \in (0, 1]; \tag{2.52}$$

$$E_c^{(2,1)}(t-\beta,x_1,\lambda_1)E_c^{(2,1)}(\beta-\tau,\lambda_1,\xi_1)\leq E_c^{(2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1),$$
$$0\leq\tau<\beta<t\leq T,\quad \{x_1,\lambda_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.53}$$
$$E_c^{(2,2)}(t-\beta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)E_c^{(2,2)}(\beta-\tau,\lambda_1,\lambda_2,\xi_1,\xi_2)\leq E_{c_1}^{(2,2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$
$$0\leq\tau<\beta<t\leq T,\quad \{x_s,\lambda_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\quad s\in\mathbb{N}_2,$$
$$c_1=c\delta_1,\quad \delta_1=\min\{1-2^{-2/(2b-1)},2^{-2/(2b-1)}\}; \tag{2.54}$$
$$E_c^{(2,3)}(t-\beta,x,\lambda)E_c^{(2,3)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)\leq E_{c_2}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\leq\tau<\beta<t\leq T,$$
$$\{x,\lambda,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ c_2=c\delta_2,\ \ \delta_2=\min\{(1-2^{-2/(2b-1)})\delta_1,2^{-2/(2b-1)}\}; \tag{2.55}$$
$$E_{2c}^{(2,3)}(t,x,\xi)\leq E_c^{(2,1)}(t,x_1,\xi_1)E_c^{(2,3)}(t,x,\xi),\quad c>0,\quad t>0,$$
$$\{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1},\qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \tag{2.56}$$
$$|X_s(t)-\xi_s|^{\alpha_s}E_c^{2,s}(t,X_s(t)-\xi_s)\leq Ct^{\hat{m}_s\alpha_s}E_{c_0}^{2,s}(t,X_s(t)-\xi_s),$$
$$t>0,\quad c_0<c,\quad \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ \ s\in\mathbb{N}_3; \tag{2.57}$$
$$|X_s(t)-\xi_s|^{\alpha_s}E_c^{(2,3)}(t,x,\xi)\leq Ct^{\hat{m}_s\alpha_s}E_{c_0}^{(2,3)}(t,x,\xi),$$
$$t>0,\quad c_0<c,\quad \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ \ s\in\mathbb{N}_3; \tag{2.58}$$
$$E_c^{(3)}(t-\tau,y^{(s)},\xi)\leq CE_{c_0}^{(3)}(t-\tau,x,\xi),$$
$$0\leq\tau<\beta<t,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ c_0<c; \tag{2.59}$$
$$E_c^{(2,3)}(\beta-\tau,Z^{(l)}(t-\beta),\xi)\leq CE_{c_0}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),$$
$$0\leq\tau<t_1\leq\beta<t\leq T,\ \ \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ c_0<c,\ l\in\mathbb{N}_3; \tag{2.60}$$
$$E_c^{(2,3)}(\beta-\tau,(\lambda_1,Z_2^{(l)}(t-\beta),Z_3^{(l)}(t-\beta)),\xi)\leq$$
$$\leq E_{-c_0}^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c_0}^{(2,3)}(t-\beta,x,\xi),\ \ 0\leq\tau<t_1\leq\beta<t,$$
$$\{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1},\ \ l\in\mathbb{N}_3,\ \{c_0,c_1\}\subset(0,c); \tag{2.61}$$
$$E_c^{(2,3)}(\beta-\tau,(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(l)}(t-\beta)),\xi)\leq$$
$$\leq CE_c^{(2,1)}(\beta-\tau,\lambda_1,\xi_1)E_c^{2,2}(\beta-\tau,\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2)\times$$
$$\times E_{-c_1}^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{-c_2}^{2,2}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$
$$\times E_{c_3}^{2,3}(t-\tau,X_3(t-\tau)-\xi_3),\ \ 0\leq\tau<t_1\leq\beta<t,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ \lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j},\ \ j\in\mathbb{N}_2,\ l\in\mathbb{N}_3,\ \ \{c_0,c_1,c_2\}\subset(0,c); \tag{2.62}$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(2,3)}(t,x,\xi)\,d\xi = C,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n; \tag{2.63}$$

$$t^{-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3 n_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_c^{(2,3)}(t,x,\xi)d\xi_2 d\xi_3\le C\,E_c^{2,1}(t,x_1-\xi_1),$$
$$t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.64}$$

$$t^{-\hat{m}_3 n_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_c^{(2,3)}(t,x,\xi)\,d\xi_3\le CE_c^{(2,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$
$$t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ \ s\in\mathbb{N}_2; \tag{2.65}$$

$$t^{-\hat{m}_s n_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^{2,s}(t,X_s(t)-\xi_s)\,d\xi_s = C_s,\ \ t>0,\ \ \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ \ s\in\mathbb{N}_3; \tag{2.66}$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi)\,d\xi\le C,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n; \tag{2.67}$$

$$t^{-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3 n_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi)\,d\xi_2 d\xi_3\le C\,E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,1)}(t,x_1,\xi_1),$$
$$t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.68}$$

$$t^{-\hat{m}_3 n_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t,x,\xi)d\xi_3\le CE_{c,\hat{C}}^{(2,\chi,2)}(t,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$
$$t>0,\ \ x\in\mathbb{R}^n,\ \ \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\quad s\in\mathbb{N}_2; \tag{2.69}$$

$$I_c^{(2)}\le C_1(t-\tau)^{-M}E_{c_1}^{(3)}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau\le\beta<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$
$$\varepsilon>0,\quad c_1=c(1-\varepsilon)\delta_2,\quad C_1=2^n\varepsilon^{-n}C; \tag{2.70}$$

$$I_c^{(2,\chi,\hat{C})}\le C_1(t-\tau)^{-M}E_{c_1,\hat{C}}^{(2,\chi,3)}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau\le\beta<t,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$
$$c_1\ \textit{і}\ C_1\ -\ \textit{такі, як у}\ (2.70); \tag{2.71}$$

$$I_0^{(2,sl)}\le C\,(t-\tau)^{-M}E_{c_0}^{(3)}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad \{s,l\}\subset\mathbb{Z}_3,\ \textit{причому}\ \beta\in(\tau,t)\ \textit{для}\ l=3; \tag{2.72}$$

$$I_1^{(2,sl)}\le C\,E_{c_0}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad s\in\mathbb{Z}_3; \tag{2.73}$$

$$I_2^{(2,sl)}\le C\,E_{c_0}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad s\in\mathbb{Z}_3; \tag{2.74}$$

$$I_c^{(2,\chi,\hat{C})}\le C_1(t-\tau)^{-M}E^{(2,\chi,3)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau\le\beta<t,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$\varepsilon>0,\quad c_1=c(1-\varepsilon),\quad \hat{C}_1=\delta^{-n}\hat{C},\quad C_1=2^n\varepsilon^{-n}C; \tag{2.75}$$

$$I_0^{(2,sl)}\le C(t-\tau)^{-M}E^{(2,\chi,3)}_{c_0,\hat{C}}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \{s,l\}\subset\mathbb{Z}_3,\quad \chi\in(0,1),\ \textit{причому}\ \beta\in(\tau,t)\ \textit{для}\ l=3; \tag{2.76}$$

$$I_1^{(2,sl)}\le C\ E^{(2,\chi,3)}_{c_0,\hat{C}}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad s\in\mathbb{Z}_3,\quad \chi\in(0,1); \tag{2.77}$$

$$I_2^{(2,s2)}\le CE^{(2,\chi,3)}_{c_0,\hat{C}}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad s\in\mathbb{Z}_3,\quad \chi\in(0,1); \tag{2.78}$$

$$J^{(2,\chi,3)}_{0,c,\hat{C}}(x,\xi)\le C(t-\tau)^{-M}E^{(2,\chi,3)}_{c_0,\hat{C}_0}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad s\in\mathbb{Z}_3,\quad \chi\in(0,1),\ c_0<c,\ \hat{C}_0>\hat{C}. \tag{2.79}$$

$$J^{(2,\chi,1)}_{0,c,\hat{C}}(x_1,\xi_1)\le C(t-\tau)^{-M}E^{(2,\chi,3)}_{c_0,\hat{C}_0}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad s\in\mathbb{Z}_3,\quad \chi\in(0,1),\ c_0<c,\ \hat{C}_0>\hat{C}. \tag{2.80}$$

$$J^{(2,\chi,2)}_{0,c,\hat{C}}(x,\xi)\le C(t-\tau)^{-M}E^{(2,\chi,3)}_{c_0,\hat{C}_0}(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t_1\le\beta<t,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad s\in\mathbb{Z}_3,\quad \chi\in(0,1),\ c_0<c,\ \hat{C}_0>\hat{C}. \tag{2.81}$$

Тут $C>0$, *у нерівності* (2.59) $y^{(s)}$ *– точка відрізку прямої, що сполучає точки* x *і* $z^{(s)}$, $s\in\mathbb{N}_3$, *у нерівностях* (2.59)–(2.62) $|x_s-z_s|^{1/\hat{m}_s}\le(t-\tau)/4$, $s\in\mathbb{N}_3$, *а* $t_1:=(t+\tau)/2$. *У нерівності* (2.70) *стала* δ_2 *така, як в оцінці* (2.55), *а стала* C *з рівності* (2.63).

Лема 2.3. *Правильні такі твердження:*

$$E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi)\le E_{c_1}^{(0)}(B(t,\tau),x,\xi)\le E_{c_2}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),$$

$$t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_2<c_1<c; \tag{2.82}$$

$$E_c^{2,1}(B(t,\beta),x_1-\lambda_1)E_c^{2,1}(B(\beta,\tau),\lambda_1-\xi_1)\le E_c^{2,1}(B(t,\tau),x_1-\xi_1),$$

$$0\le\tau<\beta<t,\ \{x_1,\lambda_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.83}$$

$$E_c^{2,2}(B(t,\beta), X_2(B(t,\beta)) - \lambda_2) E_c^{2,2}(B(\beta,\tau), \Lambda_2(B(\beta,\tau)) - \xi_2) \leq$$
$$\leq E_{-c/2}^{2,1}(B(t,\beta), x_1 - \lambda_1) E_{c/4}^{2,2}(B(t,\beta), X_2(B(t,\beta)) - \xi_2),$$
$$0 \leq \tau < \beta < t, \ \{x_s, \lambda_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_2; \tag{2.84}$$

$$|X_s(B(t,\tau)) - \xi_s|^\alpha E_c^s(B(t,\tau), X_s(B(t,\tau)) - \xi_s) \leq$$
$$\leq C(B(t,\tau))^{\hat{m}_s \alpha} E_{c_0}^s(B(t,\tau), X_s(B(t,\tau)) - \xi_s),$$
$$t > 0, \ \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \ s \in \mathbb{N}_3; \tag{2.85}$$

$$|X_s(B(t,\tau)) - \xi_s|^{\alpha_s} E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi) \leq C(B(t,\tau))^{\hat{m}_s \alpha} \times$$
$$\times E_{c_0}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), t > 0, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ s \in \mathbb{N}_3; \tag{2.86}$$

$$(B(t,\tau))^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi)\, d\xi = C, \ 0 \leq \tau < t, \ x \in \mathbb{R}^n; \tag{2.87}$$

$$(B(t,\tau))^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}+\mathbb{R}^{n_3}} E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi) d\xi_2 d\xi_3 \leq C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1} E_c^{2,1}(B(t,\tau), x_1 - \xi_1),$$
$$t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \ x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.88}$$

$$(B(t,\tau))^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi) d\xi_3 \leq C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2} \times$$
$$\times E_c^{2,1}(B(t,\tau), x_1 - \xi_1) E_c^{2,2}(B(t,\tau), X_2(B(t,\tau)) - \xi_2),$$
$$t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \ \{x_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \ s \in \mathbb{N}_2; \tag{2.89}$$

$$(B(t,\tau))^{-\hat{m}_s n_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^{2,s}(B(t,\tau), X_s(B(t,\tau)) - \xi_s) d\xi_s = C,$$
$$0 \leq \tau < t, \ x_s \in \mathbb{R}^{n_s}, \ s \in \mathbb{N}_3; \tag{2.90}$$

$$E_c^{(3)}(t,\tau,y^{(s)},\xi) \leq E_{c_0}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), 0 \leq \tau < \beta < t, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{2.91}$$

$$E_c^{(3)}(\beta,\tau, Z^{(r)}(B(t,\tau)), \xi) \leq C E_{c/8}^{(3)}(t,\tau, X(B(t,\beta)), \xi),$$
$$0 \leq \tau < t_1 \leq \beta < t, \ \{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ r \in \mathbb{N}_3; \tag{2.92}$$

$$E_c^{(3)}(\beta,\tau, X(B(t,\tau)), \xi) \leq E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi),$$
$$0 \leq \tau < \beta < t, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{2.93}$$

$$E_c^{(3)}(\beta,\tau,(\lambda_1, Z_2^{(r)}(B(t,\beta)), Z_3^{(r)}(B(t,\beta))), \xi) \leq$$

$$\leq E^{(3)}_{c/4}(\beta,\tau,(\lambda_1,X_2(B(t,\beta)),X_3(B(t,\beta))),\xi),$$

$$0\leq\tau<t_1\leq\beta<t,\quad \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1},\quad r\in\mathbb{N}_3; \tag{2.94}$$

$$E^{(3)}_{c}(\beta,\tau,(\lambda_1,X_2(B(t,\beta)),X_3(B(t,\beta))),\xi)\leq E^{2,1}_{-9c/4}(B(t,\beta),x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times E^{(3)}_{c/2}(B(t,\tau),x,\xi),\ 0\leq\tau<t_1\leq\beta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.95}$$

$$E^{(3)}_{c}(\beta,\tau,(\lambda_1,\lambda_2,Z^{(r)}_3(B(t,\beta))),\xi)\leq CE^{(3)}_{c/2}(B(\beta,\tau),(\lambda_1,\lambda_2,X_3(B(t,\beta))),\xi),$$

$$0\leq\tau<t_1\leq\beta<t,\ \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j},j\in\mathbb{N}_2,r\in\mathbb{Z}_3; \tag{2.96}$$

$$E^{(3)}_{c}(B(\beta,\tau),(\lambda_1,\lambda_2,X_3(B(t,\beta))),\xi)\leq CE^{2,1}_{c}(B(\beta,\tau),\lambda_1-\xi_1)\times$$

$$\times E^{2,2}_{c}(B(\beta,\tau),\Lambda_2(B(\beta,\tau))-\xi_2)E^{2,1}_{-c/4}(B(t,\beta),x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times E^{2,2}_{-c/2}(B(t,\beta),X_2(B(t,\beta))-\lambda_2)E^{2,3}_{c/4}(B(t,\tau),X_3(B(t,\tau))-\xi_3),$$

$$0\leq\tau<t_1\leq\beta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j},j\in\mathbb{N}_2; \tag{2.97}$$

$$I^{(3,sl)}_0(z^{(r)};\xi)\leq C(B(t,\beta))^{-M}E^{(3)}_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0\leq\tau<t_1\leq\beta<t,\ \{x,\xi,z^{(s)}\}\subset\mathbb{R}^n,\{s,l,r\}\subset\mathbb{Z}_3; \tag{2.98}$$

$$I^{(3,sl)}_1(z_1;\xi)\leq CI^{(3,sl)}_1(x_1;\xi)\leq CE^{(3)}_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0\leq\tau<t_1\leq\beta<t,\ \{x_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1},\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ l\in\mathbb{Z}_1,\ \{s,r\}\subset\mathbb{Z}_3; \tag{2.99}$$

$$I^{(3,s2)}_2(z_1,z_2;\xi)\leq CI^{(3,s2)}_2(x_1,z_2;\xi)\leq CI^{(3,s2)}_2(x_1,x_2;\xi)\leq CE^{(3)}_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0\leq\tau<t_1\leq\beta<t,\ \{x_r,z_r\}\subset\mathbb{R}^{n_r},\ r\in\mathbb{N}_2\,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,s\in\mathbb{Z}_3, \tag{2.100}$$

де C, c і c_0 — додатні сталі, причому $c_0<c$, в (2.91) $y^{(s)}$— точка на відрізку прямої, що сполучає точки x і $z^{(s)}, s\in\mathbb{N}_3$, у формулах (2.91)–(2.97) $|x_s-$ $-z_s|^{1/\hat{m}_s}\leq B(t,\tau)/4,\ s\in\mathbb{N}_3$, а t_1 число з умови $B(t,t_1)=B(t_1,\tau)$.

Доведення лем 2.1 і 2.2 наведено в додатку Д.1. Твердження леми 2.3 доводяться як відповідні твердження з леми 2.1, з урахуванням властивостей оцінювальних функцій (2.1), (2.3) і (2.6).

Властивості функції $E^{(4)}_c(t,\tau,x-\xi),\ 0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, описуються в наступній лемі, твердження якої доведено в монографії [14].

Лема 2.4. *Правильні такі твердження:*

$$(B(t,\tau))^{-M_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(4)}(t,\tau,x-\xi)d\xi = C,\ t>\tau,\ x\in\mathbb{R}^n; \qquad (2.101)$$

$$E_c^{(4)}(t,\tau,y-\xi) \le C\,E_{c_0}^{(4)}(t,\tau,x-\xi),$$

$$0<\tau<\theta<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \qquad (2.102)$$

$$(p_0(x,\xi))^{\gamma}E_c^{(4)}(t,\tau,x-\xi) \le C\,(B(t,\tau))^{\gamma/2b}\,E_{c_1}^{(4)}(t,\tau,x-\xi),$$

$$0<\tau<\theta<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \gamma\in(0,1), \qquad (2.103)$$

де C, c *і* c_0*— додатні сталі, причому* $c_0<c$, *в (2.102)* y*— точка на відрізку прямої, що сполучає точки* x *і* z, $p_0(x,\xi) := \big(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j-\xi_j|^{2/m_j}\big)^{1/2}$, $M_0 := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j$.

2.2. Існування та оцінки розв'язків деяких інтегральних рівнянь

При застосуванні методу Леві до побудови ФРЗК для рівнянь із класів $\boldsymbol{K_1}$ і $\boldsymbol{K_2}$ виникають інтегральні рівняння другого роду вольтеррівського типу вигляду

$$u(t,x) = f(t,x) + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\tau,\xi)u(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \qquad (2.104)$$

або

$$u(t,x) = f(t,x) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\tau,\xi)u(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \qquad (2.105)$$

якщо рівняння належать до класів $\boldsymbol{K_3}$, $\boldsymbol{K_4}$, тобто мають виродження на початковій гіперплощині.

Ядром інтегральних рівнянь (2.104), (2.105) є неперервна функція

$$K: P^0_{[t_0,T]} \to \mathbb{C}, P^0_{[t_0,T]} := \left\{(t,x;\tau,\xi)\in\big(\Pi_{[t_0,T]}\times\Pi_{[t_0,T]}\big)\,\Big|\, t-\tau>0\right\}. \qquad (2.106)$$

Відомо, що за відповідних умов на ядро K існує єдиний розв'язок рівняння (2.104) для довільної підходящої функції f, який визначається формулою

$$u(t,x) = f(t,x) + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} R(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \qquad (2.107)$$

або для рівняння (2.105) — формулою

$$u(t,x) = f(t,x) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} R(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \quad (2.108)$$

Тут

$$R(t,x;\tau,\xi) := \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,x;\tau,\xi), \qquad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \quad (2.109)$$

$K_1 := K$, а K_m, $m > 1$,— повторні ядра, які визначаються відповідними рекурентними співвідношеннями

$$K_m(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,y) K_{m-1}(\beta,y;\tau,\xi) dy, (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \quad (2.110)$$

або

$$K_m(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{\alpha(\beta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,y) K_{m-1}(\beta,y;\tau,\xi) dy, (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}. \quad (2.111)$$

Функція R називається резольвентою рівняння (2.104) або (2.105), залежно від того, за якою формулою (2.110) чи (2.111) визначаються повторні ядра.

У дисертаційній роботі ФРЗК будуються для таких класів вироджених параболічних рівнянь: $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$. Тому в лемах, які наводяться нижче, формулюються умови на відповідні класи ядер, що виникають при побудові ФРЗК для рівнянь з відповідного класу. Для цих ядер ряд (2.109) збігається абсолютно і рівномірно в $P^{\delta}_{[t_0,T]}$ для довільного $\delta \in (0, T - t_0)$. Тому, існує резольвента (2.109) рівняння (2.104) або (2.105) і його розв'язок визначається відповідною формулою (2.107) чи (2.108). Для побудови ФРЗК використовується поетапний метод Леві.

Для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_1}$ на всіх (трьох) етапах методу Леві використовується наступна лема.

Лема 2.5. *Нехай ядро* (2.106) *є неперервним і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1 (t-\tau)^{-M+\chi-1} E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi), \ (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \quad (2.112)$$

де $C_1 > 0$, $c > 0$, $M = (n_1 + 3n_2 + 5n_3)/2$ *і* $\chi \in (0,1)$. *Тоді для резольвенти справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \le C\,(t-\tau)^{-M+\chi-1}E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi). \tag{2.113}$$

Доведення. Для оцінки повторних ядер використовується рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(0)}(t-\beta,x,\lambda)E_c^{(0)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}d\lambda =$$

$$= C_0\,(t-\tau)^{-M}\,E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi),\;\; t>\tau,\;\; \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{2.114}$$

Як уже згадувалось вище, функція (2.14) з точністю до сталого множника збігається з ФРЗК для модельного рівняння (див. [14,с. 188]). Для цього ФРЗК справджується формула згортки, наслідком якої є рівність (2.114).

Використовуючи нерівність (2.112), рівності (2.114) і

$$\int\limits_{\tau}^{t}\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{\chi-1}d\beta = (t-\tau)^{2\chi-1}\,\hat{B}(\chi,\chi), \tag{2.115}$$

де $\hat{B}$ — бета-функція Ейлера, отримуємо

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le C_1^2\int\limits_{\tau}^{t}\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{\chi-1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c^{(0)}(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times E_c^{(0)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}d\lambda = C_1^2\,C_0\,\hat{B}(\chi,\chi)(t-\tau)^{-M+2\chi-1}\times$$

$$\times\, E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi) = C_1^2\,C_0\,\left(\Gamma(\chi)\right)^2\left(\Gamma(2\chi)\right)^{-1}(t-\tau)^{-M+2\chi-1}E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi).$$

Аналогічно оцінюємо й наступні повторні ядра. Методом індукції доводиться, що для довільного $m \ge 2$ справджуються оцінки

$$|K_m(t,x;\tau,\xi)| \le C_1^m\,C_0^{m-1}\,\left(\Gamma(\chi)\right)^m\left(\Gamma(m\chi)\right)^{-1}(t-\tau)^{-M+m\chi-1}E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi).$$

З цих оцінок випливає твердження леми 2.5. ▶

Для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_2}$ на першому етапі побудови ФРЗК застосовується лема 1.9 з [14, с. 41–43], тобто така лема.

Лема 2.6. *Якщо ядро* (2.106) *є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \le C_1\,(t-\tau)^{-M+\chi-1}E_{c_1}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),\;\; (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]}, \tag{2.116}$$

з деякими сталими $C_1 > 0, c_1 > 0$ *і* $\chi \in (0,1)$, *то існує резольвента* (2.109), *яка є неперервною функцією і для якої справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \leq C_2\,(t-\tau)^{-M+\chi-1} E^{(2,\chi,3)}_{c,\hat{C}_2}(t-\tau,x,\xi). \qquad (2.117)$$

Тут $C_2 > 0$, $\hat{C}_2 > 0$ *і* $c_2 \in (0,c_1)$ *— деякі додатні сталі.*

Оскільки на другому етапі побудови ФРЗК оцінювальна функція для ядра K відповідного інтегрального рівняння має вигляд суми ряду, то використовуватимемо наступну лему.

Лема 2.7. *Якщо ядро* (2.106) *є неперервним і для нього справджується нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \leq C_3(t-\tau)^{-M+\chi-1} E^{(\chi,3)}_{c_3,\hat{C}_3}(t,x;\tau,\xi), \quad (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \quad (2.118)$$

з деякими сталими $C_3 > 0$, $\hat{C}_3 > 0$, $c_3 > 0$ *і* $\chi \in (0,1)$, *то існує резольвента* (2.109), *яка є неперервною функцією і для якої справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \leq C_4(t-\tau)^{-M+\chi-1} E^{(\chi,3)}_{c_4,\hat{C}_4}(t-\tau,x,\xi), \ (t,x;\tau,\xi) \in P^0_{[t_0,T]}, \quad (2.119)$$

в якій $C_4 > 0$, $\hat{C}_4 > 0$, $c_4 > 0$ *— деякі сталі, причому* $\hat{C}_4 > \hat{C}_3$, *а* $c_4 < c_3$.

Доведення. Подібно до доведення леми 2.6 отримуємо, що ряд (2.109) мажорується рядом

$$C_0\,(t-\tau)^{-M-1}\left(\sum_{m=1}^{m_0}(t-\tau)^{m\chi}\,E^{(\chi,3)}_{c,\hat{C}_1}(t,x;\tau,\xi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty}a_l^{(\chi,\hat{C}_2)}(t-\tau)E^{(\chi,3)}_{c,\hat{C}_1}(t,x;\tau,\xi)\right)=$$

$$=: C_0\,(t-\tau)^{-M-1}\,(R_1+R_2). \qquad (2.120)$$

Доданок R_1 має потрібну оцінку

$$R_1 \leq (t-\tau)^{\chi}\left(\sum_{m=1}^{m_0}T^{(m-1)\chi}\right)E^{(\chi,3)}_{c,\hat{C}_1}(t,x;\tau,\xi) =$$

$$= C_1\,(t-\tau)^{\chi}\,E^{(2,\chi,3)}_{c,\hat{C}_1}(t,x;\tau,\xi). \qquad (2.121)$$

Для оцінки R_2 використовуємо нерівності (2.51), (Д1.3)–(Д1.5):

$$R_2 = E_c^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1)\sum_{\mathrm{l}=1}^{\infty} a_{\mathrm{l}}^{(\chi,\hat{C}_2)}(t-\tau)\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(2,\chi,\hat{C}_1)}(t-\tau)E_{c\delta^j}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)a_0^{(\chi,\hat{C}_3)}(t-\tau)\sum_{\mathrm{l}=1}^{\infty} a_{\mathrm{l}}^{(\chi,\hat{C}_3)}(t-\tau)E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)+$$

$$+E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\mathrm{l}=1}^{\infty} a_{\mathrm{l}}^{(\chi,\hat{C}_2)}(t-\tau)a_{j-l+1}^{(\chi,\hat{C}_1)}(t-\tau)\times$$

$$\times E_{c\delta^{j-l+1}}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi) \leq C_2E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)(t-\tau)^{\chi}\sum_{l=0}^{\infty} a_l^{(\chi,\hat{C}_3)}(t-\tau)\times$$

$$\times E_{c\delta^l}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\sum_{j=1}^{\infty} a_{j+1}^{(\chi,2\hat{C}_3)}(t-\tau)\times$$

$$\times E_{c\delta^{j+1}}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)\sum_{l=1}^{j}2^{-l} \leq (C_2+C(\chi))(t-\tau)^{\chi}E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\chi,2\hat{C}_3)}(t-\tau)E_{c_{2,1}\delta^j}^{(3)}(t-\tau,x,\xi) =$$

$$= (C_2+C(\chi))\,(t-\tau)^{\chi}E_{c_1,2\hat{C}_3}^{(2,\chi,3)}(t-\tau,x,\xi), \quad c_1 = c\delta. \tag{2.122}$$

З (2.120)–(2.122) випливає оцінка (2.119), в якій $C_4 = C_0\max\{C_1, C_2 + C(\chi)\}$, $\hat{C}_4 = 2\hat{C}_3$, а $c_4 = c\delta$, $c < c_3$, $0 < \delta < 1$. ▶

Для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_3}$ використовується наступна лема.

Лема 2.8. *Нехай ядро* (2.106) *є неперервним і задовольняє нерівність*

$$|K(t,x;\tau,\xi)| \leq C_1\,\beta(\tau)(B(t,\tau))^{-M+\chi-1}E_c^{(0)}(B(t,\tau),x,\xi),\ (t,x;\tau,\xi)\in P^0_{[t_0,T]}, \tag{2.123}$$

де $C_1 > 0$, $c > 0$, $M = (n_1+3n_2+5n_3)/2$ *і* $\chi \in (0,1)$ — *деякі сталі. Тоді для резольвенти справджується оцінка*

$$|R(t,x;\tau,\xi)| \leq C\,(B(t,\tau))^{-M+\chi-1}E_c^{(0)}(t-\tau,x,\xi). \tag{2.124}$$

Доведення леми аналогічне доведенню леми 2.5, тільки замість (2.114), (2.115) використовуються відповідно рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(0)}(B(t,\beta),x,\lambda)E_c^{(0)}(B(\beta,\tau),\lambda,\xi)\big(B(t,\beta)B(\beta,\tau)\big)^{-M}d\lambda =$$

$$= C_0\,(B(t,\tau))^{-M}\,E_c^{(0)}(B(t,\tau),x,\xi),\ \ t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{2.125}$$

і

$$\int\limits_{\tau}^{t}\big(B(t,\beta)B(\beta,\tau)\big)^{\chi-1}d\beta = \,(B(t,\tau))^{2\chi-1}\,\hat{B}(\chi,\chi), \tag{2.126}$$

де $\hat{B}$ — бета-функція Ейлера. ▶

2.3. ФРЗК для допоміжних рівнянь

У цьому підрозділі наводяться результати побудови ФРЗК для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$, коефіцієнти яких залежать від t і параметра y, тобто допоміжних рівнянь з відповідних класів. Для побудови ФРЗК у цих випадках застосовується перетворення Фур'є.

Розглянемо задачу Коші

$$L_s^{(t,y)}u(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{2.127}$$

$$u(t,x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n,\ \ \tau\in[0,T), \tag{2.128}$$

де $s\in\mathbb{N}_3$ і φ —неперервна та обмежена функція.

Будемо припускати, що коефіцієнти з $\mathcal{A}_l$ задовольняють умову (A_{l1}) та умову Гельдера за змінною y у сенсі означення (A_{l2}), $l\in\mathbb{N}_3$. Після застосування перетворення Фур'є $F_{x\to\sigma}$ за просторовими змінними задача (2.127), (2.128) перетворюється в задачу Коші з початковою умовою

$$v\big|_{t=\tau} = \psi := F_{x\to\sigma}[\varphi] \tag{2.129}$$

для відповідного рівняння першого порядку

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2}\sigma_{2j}\partial_{\sigma_{1j}} - \sum_{j=1}^{n_3}\sigma_{3j}\partial_{\sigma_{2j}} + \sum_{j,l=1}^{n_1}a_{jl}(t,y)\sigma_j\sigma_l -$$

$$-i\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,y)\sigma_j - a_0(t,y)\Big)v=0,\ \text{коли}\quad s=1; \tag{2.130}$$

$$\Big(\partial_t-\sum_{j=1}^{n_2}\sigma_{2j}\partial_{\sigma_{1j}}-\sum_{j=1}^{n_3}\sigma_{3j}\partial_{\sigma_{2j}}-\sum_{|k_1|\le 2b}a_{k_1}(t,y)(i\sigma_1)^{k_1}\Big)v=0,\ \text{коли}\quad s=2; \tag{2.131}$$

$$\Big[\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{n_2}\sigma_{2j}\partial_{\sigma_{1j}}+\sum_{j=1}^{n_3}\sigma_{3j}\partial_{\sigma_{2j}}+\sum_{j,l=1}^{n_1}a_{jl}(t,y)\sigma_j\sigma_l\Big)-$$

$$-i\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,y)\sigma_j-a_0(t,y)\Big]v=0,\ \text{коли}\quad s=3. \tag{2.132}$$

Тут, як і вище, i — уявна одиниця.

Розв'язавши задачі (2.129)–(2.132) і застосувавши до їх розв'язків обернене перетворення Фур'є $F^{-1}_{\sigma\to z}$, отримуємо такі формули для ФРЗК:

$$Z_{s0}(t,x;\tau,\xi;y)=\Big(F^{-1}_{\sigma\to z}\big[V_s(t,\tau,y,\sigma)\big]\Big)(t,\tau,y,z)|_{z=\hat{X}_s(t,\tau)-\xi},$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,y,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{2.133}$$

де $\hat{X}_s(t,\tau):=X(t-\tau)$, якщо $s\in\mathbb{N}_2$, і $\hat{X}_3(t,\tau):=X(B(t,\tau))$,

$$V_1(t,\tau,y,\sigma)=\exp\Big\{-\int_\tau^t\Big(\sum_{j,l=1}^{n_1}a_{jl}(s,y)\big(\sigma_{1k}+(s-\tau)\eta(n_2-k)\sigma_{2k}+\frac{1}{2}(s-\tau)^2\eta(n_3-k)\sigma_{3k}\big)\times$$

$$\times\big(\sigma_{1j}+(s-\tau)\eta(n_2-j)\sigma_{2j}+\frac{1}{2}(s-\tau)^2\eta(n_3-j)\sigma_{3j}\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1}a_j(t,y)\big(\sigma_{1j}+(s-\tau)\eta(n_2-j)\sigma_{2j}+\frac{1}{2}(s-\tau)^2\eta(n_3-j)\sigma_{3j}\big)-a_0(t,y)\Big)ds\Big\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{y,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{2.134}$$

$$V_2(t,\tau,y,\sigma)=\exp\Big\{-\int_\tau^t\Big(\sum_{|k_1|\le 2b}a_{k_1}(s,y)\times$$

$$\times\big(\sigma_1'+(s-\tau)\sigma_2'+\frac{1}{2}(s-\tau)^2\sigma_{3k}\big)^{k_1'}\big(\sigma_1''+(s-\tau)\sigma_2''\big)^{k_1''}(\sigma_1''')^{k_1'''}\Big)ds\Big\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{y,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{2.135}$$

$$V_3(t,\tau,y,\sigma)=\exp\Big\{-\int_\tau^t\beta(s)\Big(\sum_{j,l=1}^{n_1}a_{jl}(s,y)\big(\sigma_{1k}+B(s,\tau)\eta(n_2-k)\sigma_{2k}+$$

$$+\frac{1}{2}(B(s,\tau))^2\eta(n_3-k)\sigma_{3k}\big)\big(\sigma_{1j}+B(s,\tau)\eta(n_2-j)\sigma_{2j}+\frac{1}{2}(B(s,\tau))^2\eta(n_3-j)\sigma_{3j}\big)+$$

$$+i\sum_{j=1}^{n_1}\beta(s)a_j(s,y)\Big(\sigma_{1j}+B(s,\tau)\eta(n_2-j)\sigma_{2j}+\frac{1}{2}(B(s,\tau))^2\eta(n_3-j)\sigma_{3j}\Big)-a_0(s,y)\Big)\frac{ds}{\alpha(s)}\Big\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{y,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{2.136}$$

У формулах (2.134) і (2.136) $\eta(\cdot)$ — характеристична функція множини $[0,\infty)$, а в (2.135) $\sigma_1' := (\sigma_{11},\ldots,\sigma_{1n_3})$, $\sigma_1'' := (\sigma_{1(n_3+1)},\ldots,\sigma_{1n_2})$ і $\sigma_1''' := = (\sigma_{1(n_2+1)},\ldots,\sigma_{1n_1})$.

Виконавши перетворення і встановивши оцінки функцій (2.134), (2.135) і (2.136), подібно до доведення теореми 3.1 і властивості 3.2 з [14, С. 185, 191], отримуємо властивості ФРЗК $Z_{s0}(t,x;\tau,\xi;y), 0\le\tau<t\le T, \{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n$, для рівнянь (2.127) з $s\in\mathbb{N}_3$, які описані в наступних теоремах.

Теорема 2.1. *Нехай коефіцієнти $\mathcal{A}_1$ рівняння* (2.127)*, як функції t і y, задовольняють умови* (A_{11}) *і* (A_{12})*. Тоді існує класичний ФРЗК Z_{10}, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y)|\le C_k(t-\tau)^{-M-M_k}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{2.137}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y)|\le C_{sk}(t-\tau)^{-M-M_k}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\begin{cases}|y_1-z_1|^{\gamma_1}, & \text{якщо } s=1;\\ (h^{\hat{m}_s\alpha_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s}), & \text{якщо } s\in\{2,3\},\end{cases} \tag{2.138}$$

а також рівності

$$\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi=0,\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y)dx=0,\qquad k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{2.139}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_2d\xi_3=0,\qquad\{k_2,k_3\}\in\mathbb{Z}_+^{n_2+n_3}\setminus\{0\}, \tag{2.140}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_3=0,\qquad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \tag{2.141}$$

$$\partial_x^k Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y)=(-\partial_\xi)^k Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y), \tag{2.142}$$

де $0\le\tau<t\le T, \{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, k:=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n, s\in\mathbb{N}_3$, C_k, C_{sk}– *додатні сталі*, $M_k:=\sum\limits_{j=1}^{3}\hat{m}_j|k_j|$, h *і* γ_s — *числа з відповідних умов*

(1.12) – (1.14).

Теорема 2.2. *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_2$ *рівняння* (2.127), *як функції* t *і* y, *задовольняють умови* (A_{21}) *і* (A_{22}). *Тоді існує класичний ФРЗК* Z_{20}, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_{20}(t,x;\tau,\xi;y)| \le C_k(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi), \tag{2.143}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{20}(t,x;\tau,\xi;y)| \le C_{sk}(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\begin{cases} |y_1-z_1|^{\gamma_1}, & \text{якщо } s=1; \\ (h^{\hat{m}_s\alpha_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s}), & \text{якщо } s\in\{2,3\}, \end{cases} \tag{2.144}$$

а також рівності

$$\partial_x^k \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_{20}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi = 0, \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_{20}(t,x;\tau,\xi;y)dx = 0, \qquad k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{2.145}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z_{20}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_2 d\xi_3 = 0, \qquad \{k_2,k_3\}\in\mathbb{Z}_+^{n_2+n_3}\setminus\{0\}, \tag{2.146}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{20}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_3 = 0, \qquad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \tag{2.147}$$

$$\partial_x^k Z_{20}(t,x;\tau,\xi;y) = (-\partial_\xi)^k Z_{20}(t,x;\tau,\xi;y), \tag{2.148}$$

де $0\le\tau<t\le T, \{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, k:=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n, s\in\mathbb{N}_3$, C_k, C_{sk} *— додатні сталі, числа* M_k, h *і* γ_s *— такі, як у теоремі 2.1.*

Теорема 2.3. *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_3$ *рівняння* (2.127), *як функції* t *і* y, *задовольняють умови* (A_{31}) *і* (A_{32}). *Тоді існує класичний ФРЗК* Z_{30}, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_{30}(t,x;\tau,\xi;y)| \le C_k(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), \tag{2.149}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{2,0}(t,x;\tau,\xi;y)| \le C_{sk}(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\begin{cases} |y_1-z_1|^{\gamma_1}, & \text{якщо } s=1; \\ (B(h,\tau))^{\hat{m}_s\alpha_s}+|Y_s(B(h,\tau))-z_s|^{\gamma_s}), & \text{якщо } s\in\{2,3\}, \end{cases} \tag{2.150}$$

а також рівності

$$\partial_x^k \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_{30}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi = 0, \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_{30}(t,x;\tau,\xi;y)dx = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \tag{2.151}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z_{30}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_2 d\xi_3 = 0, \qquad \{k_2,k_3\} \in \mathbb{Z}_+^{n_2+n_3} \setminus \{0\}, \tag{2.152}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{30}(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}, \tag{2.153}$$

$$\partial_x^k Z_{30}(t,x;\tau,\xi;y) = (-\partial_\xi)^k Z_{30}(t,x;\tau,\xi;y), \tag{2.154}$$

де $E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) := E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi)E^d(t,\tau), \quad E^d(t,\tau) := \exp\{dA(t,\tau)\}$, $0 < \tau < t \leq T, \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, k := (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n, s \in \mathbb{N}_3$, C_k, C_{sk} *— додатні сталі, числа* M_k, h *і* γ_s *— такі, як в теоремі 2.1.*

Як відзначалось у підрозділі 1.3, у працях [17,137,142–145] вивчались ФРЗК для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_4}$. Наведемо відповідні результати з праць [142,145] про властивості ФРЗК для таких рівнянь.

Теорема 2.4. *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_4$ *рівняння* (1.9) *задовольняють умови* (A_{41}) *і* (A_{42}). *Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* $Z_4(t,x;\tau,\xi), 0 < \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi) \leq C(B(t,\tau))^{-(M_0+\|k\|)/(2b)} E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi), \tag{2.155}$$

$$|\Delta_x^{x'}\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)| \leq C\big(p_0(x,x')\big)^{\gamma_4}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-(M_0+\|k\|+\gamma_4)/(2b)}\left(E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi) + E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x'-\xi)\right), \tag{2.156}$$

$$0 < \tau < t \leq T,\ \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ \|k\| \leq 2b,$$

де $E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi) := E_c^{(4)}(t,\tau,x-\xi)E^d(t,\tau),\ \ E^d(t,\tau) := \exp\{dA(t,\tau)\}$; $C > 0$, $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ *— деякі сталі; число* M_0 *таке, як у лемі 2.4;* γ_4 *— стала з умови* (1.14).

Якщо додатково виконується умова (1.16), *то для* Z_4 *правильні оцінки*

$$|\Delta_t^{t'}\partial_x^k Z_4(t,x;\tau,\xi)| \leq C\big(A(t',t)\big)^{1-(\|k\|-\gamma_4)/(2b)}\big(B(t,\tau)\big)^{1-(M_0+\gamma_4)/(2b)}\times$$

$$\times \Big(E^{(4)}_{c,d}(t', \tau, x-\xi) + E^{(4)}_{c,d}(t, \tau, x-\xi) \Big), 0<\tau<t<t' \le T,$$
$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < \|k\| \le 2b. \tag{2.157}$$

Наслідком оцінок (2.155)–(2.157) *є оцінки*

$$|\Delta^{t',x'}_{t,x} \partial^k_x Z_4(t, x; \tau, \xi)| \le C\big(p(t, x; t', x')\big)^{\gamma_4} \times$$
$$\times (B(t, \tau))^{-(M_0+\|k\|+\gamma_4)/(2b)} \Big(E^{(4)}_{c,d}(t, \tau, x-\xi) + E^{(4)}_{c,d}(t', \tau, x'-\xi) \Big),$$
$$0 < \tau < t < t' \le T, \; \{x, x', \xi\} \subset \mathbb{R}^n, 0 < \|k\| \le 2b, \tag{2.158}$$

а також оцінки

$$\left| \partial^k_x \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_4(t, x; \tau, \xi) d\xi \right| \le C\big(B(t, \tau)\big)^{-(\|k\|-\gamma_4)/(2b)} E^d(t, \tau),$$

$$\left| \Delta^{t',x'}_{t,x} \partial^k_x \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_4(t, x; \tau, \xi) d\xi \right| \le C\big(p(t, x; t', x')\big)^{\gamma_4} \big(B(t, \tau)\big)^{-\|k\|/(2b)} \times$$
$$\times E^d(\tilde{t}, \tau), \; 0 < \tau < t < t' \le T, \quad \{x, x', \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < \|k\| \le 2b, \tag{2.159}$$

де $\tilde{t} := t$ *при* $d \le 0$ *і* $\tilde{t} := t'$ *при* $d > 0$.

Якщо для коефіцієнтів рівняння (1.9), *крім указаних вище умов, виконуються ще умови* (A_{43}) *і* (A_{44}), *то ФРЗК* Z_4 *має властивість нормальності, для нього правильна формула згортки та існують похідні* $\partial^{k_0}_t \partial^k_x \partial^{s_0}_\tau \partial^s_\xi Z_4(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $2bk_0 + \|k\| \le 2b$, $2bs_0 + {} + \|s\| \le 2b$, *для яких справджуються оцінки*

$$\big| (\alpha(t)\partial_t)^{k_0} \partial^k_x (\alpha(\tau)\partial_\tau)^{s_0} \partial^s_\xi Z_4(t, x; \tau, \xi) \big| \le$$
$$\le C\big(B(t, \tau)\big)^{-(M_0+\|k\|+\|s\|)/(2b)-k_0-s_0} E^{(4)}_{c,d}(t, \tau, x-\xi). \tag{2.160}$$

2.4. Властивості об'ємних потенціалів

У цьому підрозділі описуються властивості інтегралів типу

$$u_l(t, x) := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_l(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \; l \in \mathbb{N}_2, \tag{2.161}$$

і

$$u_l(t, x) := \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_l(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \; l \in \mathbb{N}_4 \setminus \mathbb{N}_2. \tag{2.162}$$

Ядро K_l є комплекснозначною функцією, яка має властивості похідних від ФРЗК Z_{l0}, $l \in \mathbb{N}_3$, для відповідного рівняння (2.127) чи ФРЗК Z_4 для рівняння (1.9). Оцінки та властивості ФРЗК Z_{l0}, $l \in \mathbb{N}_3$, і Z_4 наведено в підрозділі 2.3. Властивості інтегралів (2.161) і (2.162) описуються належністю функцій u_l до відповідних функціональних просторів залежно від того, до яких просторів належить функція f, а також додаткових припущень стосовно функцій, що спричиняють виродження на початковій гіперплощині.

Опишемо властивості ядер K_l, $l \in \mathbb{N}_4$. Для цього позначимо:
$d(x;x') := \sum\limits_{j=1}^{3} |x_j - x'_j|^{1/(2b(j-1)+1)}$, $\hat{d}(x;x') := \sum\limits_{j=1}^{3} |x_j - x'_j|^{1/(2j-1)}$,
$d_1(x;x';\lambda) := |x_1 - x'_1|^{\lambda} + \sum\limits_{j=2}^{3} |x_j - x'_j|^{(\lambda+1)/(2b(j-1)+1)}$,
$\hat{d}_1(x;x';\lambda) := |x_1 - x'_1|^{\lambda} + \sum\limits_{j=2}^{3} |x_j - x'_j|^{(\lambda+1)/(2j-1)}$,
$d_2(x;x';\lambda) := |x_1 - x'_1|^{\lambda} + |x_2 - x'_2|^{(\lambda+1)/(2b+1)} + |x_3 - x'_3|^{(\lambda+2b+1)/(4b+1)}$,
$\hat{d}_2(x;x';\lambda) := |x_1 - x'_1|^{\lambda} + |x_2 - x'_2|^{(\lambda+1)/3} + |x_3 - x'_3|^{(\lambda+3)/5}$, якщо $t \in (0,T]$, $\{x, x', \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1]$. Зауважимо, що якщо $d(x;x') < 1$ і $\hat{d}(x;x') < 1$, то

$$d_2(x;x';\lambda) \le d_1(x;x';\lambda) \le 4^{1-\lambda} d(x;x')^{\lambda}, \ \ \{x, x'\} \subset \mathbb{R}^n, \lambda \in (0,1],$$

і

$$\hat{d}_2(x;x';\lambda) \le \hat{d}_1(x;x';\lambda) \le 4^{1-\lambda} \hat{d}(x;x')^{\lambda}, \ \ \{x, x'\} \subset \mathbb{R}^n, \lambda \in (0,1].$$

За ядра в інтегралах (2.161) і (2.162) братимемо функції K_l, які можуть бути подані у вигляді

$$K_l(t,x;\tau,\xi) := (t-\tau)^{-\nu-M} \Omega_l(t,x;\tau,\xi), l \in \mathbb{N}_2, \tag{2.163}$$

$$K_3(t,x;\tau,\xi) := (B(t,\tau))^{-\nu-M} \Omega_3(t,x;\tau,\xi), \tag{2.164}$$

$$K_4(t,x;\tau,\xi) := (B(t,\tau))^{-\nu-M_0/(2b)} \Omega_4(t,\tau,z), \tag{2.165}$$

де $0 \le \tau < t \le T$ і $0 < \tau < t \le T$, якщо $B(t,0) = \infty$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $z := (z_1, ..., z_n)$, $z_j := (B(t,\tau))^{-1/(2b_j)}(x_j - \xi_j)$, $j \in \mathbb{N}_n$, $\nu \in (\delta_{l1} + \delta_{l3})(0, \hat{m}_2] \cup \delta_{l2}(0, 2 + 1/(2b)] \cup \delta_{l4}(0,1]$, M, M_0 і δ_{lj} — такі, як вище.

Функція Ω_l зі значеннями в $\mathbb{C}$ для $l \in \mathbb{N}_3$ і відповідно в $\mathbb{C}_{NN}$ для $l = 4$ є неперервною і задовольняє такі умови:

(B_{l1}) $\forall\{t,\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall l\in\mathbb{N}_3:$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)d\xi=0\ \text{ для } \nu\in(\delta_{l1}+\delta_{l3})(1/2,1]\cup\delta_{l2}(1-1/(2b),1],$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)d\xi_2d\xi_3=0\ \text{ для } \nu\in(\delta_{l1}+\delta_{l3})(1,\hat{m}_2]\cup\delta_{l2}(1,1+1/(2b)],$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)d\xi_3=0\ \text{ для } \nu\in(\delta_{l1}+\delta_{l3})(\hat{m}_2,\hat{m}_3]\cup\delta_{l2}1+1/(2b),2+1/(2b)],$$

(B_{41}) $\forall\{t,\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t:$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Omega_4(t,\tau,x)dx=0;$$

(B_{l2}) $\exists C>0\ \forall\{t,\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t,\ \forall\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \forall l\in\mathbb{N}_4:$

$$|\Omega_l(t,x;\tau,\xi)|\le C[(\delta_{l1}+\delta_{l2})+(\delta_{l3}+\delta_{l4})E^d(t,\tau)]\hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x,\xi)\},$$

$$\Omega_4(t,x;\tau,\xi):=\Omega_4(t,\tau,x-\xi);$$

(B_{l3}) $\exists C>0\ \forall\{t,\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t,\ \forall\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ \forall l\in\mathbb{N}_4:$

$$|\Delta_x^{x'}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)|\le C[(d(x;x'))^\gamma(t-\tau)^{-\gamma/(2b)}\delta_{l2}+(\hat{d}(x;x'))^\gamma(t-\tau)^{-\gamma/(2)}\delta_{l1}+$$

$$+(\hat{d}(x;x'))^\gamma(B(t,\tau))^{-\gamma/(2)}\delta_{l3}+(p_0(x;x'))^\gamma\delta_{l4}][\hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x,\xi)\}+\hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x',\xi)\}];$$

(B_{44}) $\exists C>0\ \forall\{t,t',\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t<t',\ \forall x\in\mathbb{R}^n:$

$$|\Delta_t^{t'}\Omega_4(t,\tau,x)|\le C(A(t',t))^{\gamma/(2b)}(B(t,\tau))^{-\gamma/(2b)}E^d(\tilde{t},\tau)\hat{E}_c^{(4)}(t,\tau,x,\xi\};$$

(B_{45}) $\exists\gamma_0\in(0,\gamma)\ \exists C>0\ \forall t\in(0,T]:\ \int\limits_0^t(\Delta(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\le C.$

В умовах (B_{l2})–(B_{l4}) позначено $\hat{E}_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi):=E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)$, $\hat{E}_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi):=E_c^2(B(t,\tau),x,\xi)$, $\hat{E}_c^{(4)}(t,\tau,x,\xi):=\exp\{-c\sum\limits_{j=1}^n|x_j|^{q_j}\}$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, число $\tilde{t}$ таке, як у теоремі 2.4. В умові (B_{45}) $\Delta(t,\tau):=\int\limits_\tau^t\frac{\delta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta$, де $\delta:[0,T]\to[0,\infty)$ — неперервна функція така, що $\Delta(T,0)<\infty$.

В означення функцій $K_l,\ l\in\mathbb{N}_4$, входять числа ν, d, c і γ, які вважаються заданими. Через $\mathfrak{N}_l(\nu,d,c,\gamma)$ позначимо сукупність усіх функцій $K_l,\ l\in\mathbb{N}_3$, визначених формулою (2.163) чи (2.164), в якій функція Ω_l задовольняє умови (B_{l1}) – (B_{l3}), $l \in \mathbb{N}_3$, при заданих ν, d, c і γ. Відповідно $\mathcal{M}_l(\nu, d, c, \gamma)$ — сукупність усіх функцій K_4, визначених формулою (2.165), в якій функція Ω_4 задовольняє умови $(B_{41}), \ldots, (B_{4(5-l)})$, $l \in \{0, 1, 2\}$, при заданих ν, d, c, γ.

Зауважимо, що для $\nu \in (\delta_{l1}+\delta_{l2})[1, \hat{m}_2] \cup \delta_{l3}[1, 2b+1/(2b)] \cup \delta_{l4}\{1\}$ інтеграли (2.161) і (2.162) із функціями $K_l \in \mathcal{N}_l(\nu, d, c, \gamma)$, $l \in \mathbb{N}_3$, і $K_4 \in \mathcal{M}_l(\nu, d, c, \gamma)$, $l \in \{0, 1, 2\}$, розуміються як границі

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_0^{t-h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_l(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \; l \in \mathbb{N}_2,$$

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_0^{t-h} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_l(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \; l \in \mathbb{N}_4 \setminus \mathbb{N}_2,$$

які для підходящих f існують на підставі умов (B_{l1}), $l \in \mathbb{N}_4$, або (B_{45}).

Означимо простори, до яких функції f і u належитимуть. Це простори функцій, які є неперервними або задовольняють умову Гельдера і мають певні обмеження при $|x| \to \infty$. Їх поведінка при $|x| \to \infty$ описуватиметься функціями

$$\varphi_1(t, x) := \exp \sum_{j=1}^{3} k_{1j}(t, a_{1j}) |x_j|^2,$$

$$\varphi_2(t, x) := \exp \sum_{j=1}^{3} k_{2j}(t, a_{2j}) |x_j|^q,$$

$$\varphi_3(t, x) := \exp \sum_{j=1}^{3} k_{3j}(t, a_{3j}) |x_j|^2,$$

або

$$\psi_1(t, x) := \exp \sum_{j=1}^{3} s_{1j}(t) |x_j|^2, \; t \in [0, T], \; x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\psi_2(t, x) := \exp \sum_{j=1}^{3} s_{2j}(t) |x_j|^q, \; t \in [0, T], \; x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\psi_3(t, x) := \exp \sum_{j=1}^{3} s_{3j}(t) |x_j|^2, \; t \in [0, T], \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Тут для фіксованого числа c_0 з інтервалу $(0,c)$, де c – стала з умов (B_{l2}) і (B_{l3}), і для множини $a_l := (a_{l1}, a_{l2}, a_{l3})$ невід'ємних чисел a_{lj}, $\{l,j\} \subset \mathbb{N}_3$, таких, що $T < \min\limits_{j\in\mathbb{N}_3}(c_0/a_{1j})$, якщо $l \in \{1,3\}$ і $T < \min\limits_{j\in\mathbb{N}_3}(c_0/a_{1j})^{(2b-1)/(2b(l-1)+1)}$, якщо $l=2$.

$$k_{1j}(t,a_{1j}) := c_0 a_{1j}(c_0 - a_{1j}t^{2j-1})^{-1},\ j \in \mathbb{N}_3;$$

$$k_{2j}(t,a_{2j}) := c_0 a_{2j}(c_0^{2b-1} - a_{2j}^{2b-1}t^{2b(j-1)+1})^{1-q},\ j \in \mathbb{N}_3;$$

$$k_{3j}(t,a_{3j}) := c_0 a_{3j}(c_0 - a_{3j}(T - B(T,t))^{(2j-1)})^{-1},\ j \in \mathbb{N}_3;$$

$$s_{11}(t) := k_{11}(t,a_{11}) + 2t^2 k_{12}(t,a_{12}) + t^4 k_{13}(t,a_{13}),$$

$$s_{12}(t) := 2k_{12}(t,a_{12}) + 4t^2 k_{13}(t,a_{13}),\quad s_{13}(t) := 4k_{13}(t,a_{13}),\ t \in [0,T].$$

$$s_{21}(t) := k_{21}(t,a_{21}) + 2^{q-1}t^q k_{22}(t,a_{22}) + 2^{q-2}t^{2q}k_{23}(t,a_{23}),$$

$$s_{22}(t) := 2^{q-1}k_{22}(t,a_{22}) + 4^{q-1}t^q k_{23}(t,a_{23}),\quad s_{23}(t) := 4^{q-1}k_{23}(t,a_{23}),\ t \in [0,T].$$

$$s_{31}(t) := k_{31}(t,a_{31}) + 2t^2 k_{32}(t,a_{32}) + t^4 k_{33}(t,a_{33}),$$

$$s_{32}(t) := 2k_{32}(t,a_{32}) + 4t^2 k_{33}(t,a_{33}),\quad s_{33}(t) := 4k_{33}(t,a_{33}),\ t \in [0,T].$$

Функції $k_l(t) := (k_{l1}(t,a_{l1}), k_{l2}(t,a_{l2}), k_{l3}(t,a_{l3}))$ і $s_l(t) := (s_{l1}(t), s_{l2}(t), s_{l3}(t))$, $t \in [0,T]$, мають такі властивості [14, с.209]:

$$k_l(0) = a_l,\ a_{lj} \le k_{lj}(\tau,a_{lj}) < k_{lj}(t,a_{lj}) < s_{lj}(t),\ 0 \le \tau < t \le T,\ \{l,j\} \subset \mathbb{N}_3; \tag{2.166}$$

$$k_{lj}(t-\tau, k_{lj}(\tau,a_{lj})) \le k_{lj}(t,a_{lj}),\ 0 \le \tau < t \le T,\ \{l,j\} \subset \mathbb{N}_3; \tag{2.167}$$

$$\hat{E}_{c_0}^{(l)}\varphi_l(0,\xi) \le \varphi_l(t,X(t)) \le \psi_l(t,x),$$
$$0 \le \tau < t \le T,\quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\quad l \in \mathbb{N}_3. \tag{2.168}$$

З цих властивостей випливає, що

$$\varphi_l(\tau, X(t-\tau)) \le \varphi_l(t,X(t)) \le \psi_l(t,x),$$

$$\hat{E}_{c_0}^{(l)}\varphi_l(\tau,\xi) \le \psi_l(t,x),\ \ 0 \le \tau < t \le T,\ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ \ l \in \mathbb{N}_3. \tag{2.169}$$

Для заданих чисел $\lambda \in (0,1]$ і $l \in \mathbb{N}_3$ позначимо через $C_{\varphi_l}^0$, $C_{\varphi_l}^\lambda$, C_{1,φ_l}^λ і C_{2,φ_l}^λ простори неперервних функцій $u:\ \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, для яких скінченні відповідні норми $||u||_{\varphi_l}^0$, $||u||_{\varphi_l}^\lambda := ||u||_{\varphi_l}^0 + [u]_{\varphi_l}^\lambda$, $||u||_{1,\varphi_l}^\lambda := ||u||_{\varphi_l}^0 + [u]_{1,\varphi_l}^\lambda$ and $||u||_{2,\varphi_l}^\lambda :=$

$= ||u||^0_{\varphi_l} + [u]^\lambda_{2,\varphi_l}$, де

$$||u||^0_{\varphi_l} := \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} \frac{|u(t,x)|}{\varphi_l(t,x)},$$

$$[u]^\lambda_{\varphi_l} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]}\\(t,x)\neq(t,x')}} \frac{|\Delta_x^{x'} u(t,x)|}{(\tilde{d}(x;x'))^\lambda(\varphi_l(t,x)+\varphi_l(t,x'))},$$

$$[u]^\lambda_{1,\varphi_l} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]}\\(t,x)\neq(t,x')}} \frac{|\Delta_x^{x'} u(t,x)|}{\tilde{d}_1(x;x';\lambda)(\varphi_l(t,x)+\varphi_l(t,x'))},$$

$$[u]^\lambda_{2,\varphi_l} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]}\\(t,x)\neq(t,x')}} \frac{|\Delta_x^{x'} u(t,x)|}{\tilde{d}_2(x;x';\lambda)(\varphi_l(t,x)+\varphi_l(t,x'))}.$$

Тут $\tilde{d}(x;x') := d(x;x')\delta_{l2} + \hat{d}(x;x')(\delta_{l1}+\delta_{l3})$, $\tilde{d}_1(x;x';\lambda) := d_1(x;x';\lambda)\delta_{l2} +$ $+ \hat{d}_1(x;x';\lambda)(\delta_{l1}+\delta_{l3})$, $\tilde{d}_2(x;x';\lambda) := d_2(x;x';\lambda)\delta_{l2} + \hat{d}_2(x;x';\lambda)(\delta_{l1}+\delta_{l3})$.

Крім цих просторів, використовуватимемо простір $C^\lambda_{\psi_l}$. Означення цього простору отримується, якщо в означенні простору $C^\lambda_{\varphi_l}$ функцію φ_l замінити функцією ψ_l, $\quad l \in \mathbb{N}_3$.

Властивості інтегралів (2.161), (2.162) для $l \in \mathbb{N}_3$ наведено в наступній лемі.

Лема 2.9. *Нехай $K_l \in \mathfrak{N}_l(\nu, d, c, \gamma)$ і функція u_l визначена відповідною формулою* (2.161) *або* (2.162). *Тоді правильні такі твердження:*

a) *якщо $\nu \le (1-1/(2b))\delta_{l2} + (\delta_{l1}+\delta_{l3})/2$ і $f \in C^0_{\varphi_l}$, то $u \in C^\gamma_{\psi_l}$ і*

$$||u_l||^\gamma_{\psi_l} \le C_l ||f||^0_{\varphi_l}; \tag{2.170}$$

b) *якщо $\nu \in (1-1/(2b), 1]\delta_{l2} + (1/2, 1](\delta_{l1}+\delta_{l3})$ і $f \in C^\lambda_{\varphi_l}$, $\lambda \in (0,1]$, тоді при $(\nu + (\gamma-\lambda)/(2b))\delta_{l2} + (\nu + (\gamma-\lambda)/2)(\delta_{l1}+\delta_{l3}) < 1$ маємо $u \in C^\gamma_{\psi_l}$ і*

$$||u_l||^\gamma_{\psi_l} \le C_l ||f||^\lambda_{\varphi_l}, \tag{2.171}$$

а при $(\nu + (\gamma-\lambda)/(2b))\delta_{l2} + (\nu + (\gamma-\lambda)/2)(\delta_{l1}+\delta_{l3}) > 1$ маємо $u_l \in C^\lambda_{\psi_l}$ і

$$||u_l||^\lambda_{\psi_l} \le C_l ||f||^\lambda_{\varphi_l}; \tag{2.172}$$

c) *якщо $\nu \in (1, 1+1/(2b)]\delta_{l2} + (1, \hat{m}_2](\delta_{l1}+\delta_{l3})$ і $f \in C^\lambda_{1,\varphi_l}$, $\lambda \in (0,1]$, то* *при* $(\nu+(\gamma-\lambda)/(2b))\delta_{l2}+(\nu+(\gamma-\lambda)/2)(\delta_{l1}+\delta_{l3})<1$ *отримуємо* $u_l\in C^{\gamma}_{\psi_l}$ *і*

$$||u_l||^{\gamma}_{\psi_l}\le C||f||^{\lambda}_{1,\varphi_l}, \tag{2.173}$$

а при $(\nu+(\gamma-\lambda)/(2b))\delta_{l2}+(\nu+(\gamma-\lambda)/2)(\delta_{l1}+\delta_{l3})>1$ *отримуємо* $u_l\in C^{\lambda}_{\psi_l}$ *і*

$$||u_l||^{\lambda}_{\psi_l}\le C||f||^{\lambda}_{1,\varphi_l}; \tag{2.174}$$

d) *якщо* $\nu\in(1+1/(2b),2+1/(2b)]\delta_{l2}+(\hat m_2,\hat m_3](\delta_{l1}+\delta_{l3})$ *і* $f\in C^{\lambda}_{2,\varphi_l}$, $\lambda\in$ $\in(0,1]$, *тоді при* $(\nu-1+(\gamma-1-\lambda)/(2b))\delta_{l2}+(\nu-1+(\gamma-1-\lambda)/2)(\delta_{l1}+\delta_{l3})<1$ *маємо* $u_l\in C^{\gamma}_{\psi_l}$ *і*

$$||u_l||^{\gamma}_{\psi_l}\le C||f||^{\lambda}_{2,\varphi_l}, \tag{2.175}$$

а при $(\nu-1+(\gamma-1-\lambda)/(2b))\delta_{l2}+(\nu-1+(\gamma-1-\lambda)/2)(\delta_{l1}+\delta_{l3})>1$ *маємо* $u_l\in C^{\lambda}_{\psi_l}$ *і*

$$||u_l||^{\lambda}_{\psi_l}\le C_l||f||^{\lambda}_{2,\varphi_l}. \tag{2.176}$$

Сталі C_l *в нерівностях* (2.170)–(2.176) *залежать тільки від сталої* C *з умов* (B_{l2}) *і* (B_{l3}), $l\in\mathbb{N}_3$, *а також від чисел* n_1, n_2, n_3, b, ν, c, γ *і* λ.

Доведення леми наведено у додатку Д.1.

Властивості інтеграла (2.162) при $l=4$ також описуватимуться належністю функції u_4 до відповідних функціональних просторів залежно від того, до яких просторів належить функція f, а також додаткових припущень стосовно функцій, що спричиняють виродження. Означимо простори, до яких належать функції f і u. Це простори функцій, які є неперервними чи задовольняють умову Гельдера та мають певні обмеження при $t\to0$ і $|x|\to\infty$. Їх поведінка при $t\to0$ описується функцією

$$(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^{r}E^{-d}(T,t),\quad t\in(0,T],$$

а при $|x|\to\infty$ – функцією

$$\Psi(t,x):=\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\hat k_j(t)|x_j|^{q_j}\right\},\quad t\in[0,T],\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

де μ — ціле невід'ємне число, $r\in\mathbb{R}$; $\hat k_j(t):=c_0a_j(c_0^{2b_j-1}-(T-B(T,t))a_j^{2b_j-1})^{1-q_j}$ для $t\in(0,T]$ і $k_j(0):=0$, якщо $B(T,0)=\infty$; c_0— фіксоване число з проміжку

$(0,c)$, c — стала з умов (B_{42}), (B_{43}), (B_{44}), а числа a_j такі, що $0 \le a_j < c_0 T^{1-q_j}$.

Кожна з функцій $\hat{k}_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_n$, монотонно зростає і має таку властивість:

$$\forall \{\tau, t\} \subset [0,T],\ \tau < t,\ \forall \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}:$$

$$-c_0(B(t,\tau))^{1-q_j}|x-\xi|^{q_j} + \hat{k}_j(\tau)|\xi|^{q_j} \le \hat{k}_j(t)|x|^{q_j},$$

за допомогою якої доводиться нерівність

$$E^{(4)}_{c_0}(t,\tau,x-\xi)\Psi(\tau,\xi) \le \Psi(t,x), \quad 0 < \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Для заданих чисел $\lambda \in (0,1]$, $\mu \in \{0,1,...\}$ і $r \in \mathbb{R}$ позначимо через $C^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r}$, $C^{\lambda,0}_{\mu,r}$ і $C^{0,0}_{\mu,r}$ простори неперервних функцій $u:\ \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$, для яких скінченні відповідно норми

$$||u||^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r} := ||u||^{0,0}_{\mu,r} + [u]^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r}, \quad ||u||^{\lambda,0}_{\mu,r} := ||u||^{0,0}_{\mu,r} + [u]^{\lambda,0}_{\mu,r} \quad \text{і} \quad ||u||^{0,0}_{\mu,r},$$

де

$$||u||^{0,0}_{\mu,r} := \sup_{(t,x)\in\Pi_{(0,T]}} \left(\frac{|u(t,x)|E^d(T,t)}{\Psi(t,x)(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^r} \right),$$

$$[u]^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r} :=$$

$$= \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\}\subset\Pi_{(0,T]} \\ (t,x)\ne(t',x')}} \left(\frac{|\Delta^{t',x'}_{t,x} u(t,x)|(p(t,x;t',x'))^{-\lambda}}{(\delta(t))^{\mu}(\Delta(\bar{t},0))^{r-\lambda/(2b)}E^{-d}(T,\tilde{t})} (\Psi(t,x)+\Psi(t',x'))^{-1} \right),$$

$$||u||^{\lambda,0}_{\mu,r} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{(0,T]} \\ x\ne x'}} \left(\frac{|\Delta^{x'}_{x} u(t,x)|(\Psi(t,x)+\Psi(t,x'))^{-1}}{(d(x;x'))^{\lambda}(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^{r-\lambda/(2b)}E^{-d}(T,t)} \right).$$

Тут $\bar{t} := t + (t'-t)\eta(r-\lambda/(2b))$ і $\tilde{t} := t + (t'-t)\eta(d)$, де η — характеристична функція проміжку $[0,\infty)$.

Властивості інтегралів (2.162) при $l = 4$ описуються в наступних лемах.

Лема 2.10. *Нехай $K \in \mathfrak{M}_l(\nu,d,c,\gamma)$ і функція u_4 визначається формулою* (2.162). *Тоді правильні такі твердження:*

а) *якщо $l \in \{0,1,2\}$, $\nu + \gamma/(2b) < 1$ і $f \in C^{0,0}_{\mu,r}$ (при $r < \nu + \gamma/(2b) - 1$ додатково припускається, що*

$$F_{\mu l} := \int\limits_0^T W_0[f;\tau](\Delta(\tau,0))^{-\nu-\gamma/(2b)} E^d(T,\tau)(\delta(\tau))^{-\mu_l} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty,$$

$W_0[f;\tau] := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(\tau,x)|}{\Psi(\tau,x)}\right)\Bigg)$, *то* $u \in C^{\zeta_l,\zeta_l'/(2b)}_{\mu_l,r-\nu_l+1}$ *і справджується нерівність*

$$||u_4||^{\zeta_l,\zeta_l'/(2b)}_{\mu_l,r-\nu_l+1} \le C(||f||^{0,0}_{\mu_l',r} + \varkappa_{rl}F_{\mu l}), \tag{2.177}$$

де $\nu_l := \nu + \eta(-l)\gamma_0/(2b)$, $\varkappa_{rl} := \eta(\nu_l + \gamma/(2b) - 1 - r)$, $\zeta_l := \gamma - \gamma_0\eta(-l)\varkappa_{0l}$, $\zeta_l' := \zeta_l\eta(1-l)$, $\mu_l := \mu\eta(l-2)$, $\mu_l' := (\mu_l+1)\eta(l-1)$;

б) *якщо* $l \in \{0,1\}$, $f \in C^{\lambda,0}_{\mu_l',r}$, $\lambda \in (0,1]$, *і виконується додатково припущення з твердження а), то при* $1-\nu+(\gamma-\lambda)/(2b) > 0$ $\quad u_4 \in C^{\zeta_l,\zeta_l/(2b)}_{\mu_l,r-\nu_l+1}$ *і*

$$||u_4||^{\zeta_l,\zeta_l'/(2b)}_{\mu_l,r-\nu_l+1} \le C(||f||^{\lambda,0}_{\mu_l',r} + \varkappa_{rl}F_{\mu l}), \tag{2.178}$$

а при $1-\nu+(\gamma-\lambda)/(2b) < 0$ $\quad u \in C^{\lambda_l,\lambda_l/(2b)}_{\mu_l,r-\nu_l+1}$ *і*

$$||u_4||^{\lambda_l,\lambda_l'/(2b)}_{\mu_l,r-\nu_l+1} \le C(||f||^{\lambda,0}_{\mu_l',r} + \varkappa_{rl}F_{\mu l}), \tag{2.179}$$

де $\lambda_l := \lambda - \gamma_0\eta(-l)$.

Сталі C *в нерівностях* (2.177) – (2.179) *залежать лише від сталих* C *з умов* (B_{42}),...,(B_{45}), *а також чисел* n, b_1, ..., b_n, r, ν, d, c, γ, γ_0, λ, $\beta(T)$ *і* $\delta(T)$.

Доведення леми наведено у додатку Д.1.

Лема 2.11. *Нехай ядром інтеграла* (2.162) *є матриця*

$$K(t,\tau,x-\xi;t,x) := (B(t,\tau))^{-\nu-M_0/(2b)}\Omega(t,\tau,z;t,x),\ \nu\in(0,1],$$

$$z_j := (B(t,\tau))^{-1/(2b_j)}(x_j-\xi_j), j\in\{1,...,n\}, 0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

а матриця $\Omega(t,\tau,z;\theta,y)$ *як функція* t,τ *і* z *задовольняє умови* (B_{41}) – (B_{44}) *рівномірно стосовно* $(\theta,y)\in\Pi_{(0,T]}$ *та умову*

$$\exists C>0\ \forall\{t,\tau\}\subset(0,T],\ \tau<t,\quad \forall z\in\mathbb{R}^n\ \forall\{(\theta,y),(\theta',y')\}\subset\Pi_{(0,T]}:$$

$$|\Delta^{\theta',y'}_{\theta,y}\Omega(t,\tau,z;\theta,y)| \le C(p(\theta,y;\theta',y'))^\gamma E^d(t,\tau)\exp\left\{-c\sum_{j=1}^n|z_j|^{q_j}\right\},$$

$c>0$, $d\in\mathbb{R}$, $0<\lambda<\gamma\le1$, $1-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)<0$, $l\in\{0,1\}$.

Тоді якщо f *задовольняє умови* **б)** *з леми 2.10, то* $u_4 \in C^{\lambda_l,\lambda_l/(2b)}_{\mu_l,r-\nu_l+1}$ *і справджується нерівність* (2.179).

Доведення проводиться так само, як і леми 2.10, тільки при оцінюванні $\Delta_{t,x}^{t',x'} u$ з'являються такі додаткові доданки:

$$\int_0^{t_1} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} (K(t,\tau,x-\xi;t,x) - K(t,\tau,x-\xi;t',x'))f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$\int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} (K(t,\tau,x-\xi;t,x) - K(t,\tau,x-\xi;t',x'))\Delta_\xi^x f(\tau,\xi)d\xi,$$

потрібні оцінки яких одержуються аналогічно.

Лема 2.12. *Твердження* **а)** *леми 2.10 правильне для інтеграла* (2.162), *в якому замість K_4 взято матрицю L, яка задовольняє нерівності*

$$|L(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-\nu-M/(2b)} E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi),$$

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'} L(t,x;\tau,\xi)| \le C(p(t,x;t',x'))^\gamma \Big((B(t,\tau))^{-\nu-(M+\gamma)/(2b)} E_{c,d}^{(4)}(t,\tau,x-\xi) +$$
$$+ (B(t',\tau))^{-\nu-(M+\gamma)/(2b)} E_{c,d}^{(4)}(t',\tau,x'-\xi) \Big), \quad 0<\tau<t\le t'\le T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Якщо ж L задовольняє ще й умови

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} L(t,x;\tau,\xi)d\xi \right| \le (B(t,\tau))^{-\nu+\gamma/(2b)} E^d(t,\tau),$$

$$\left| \Delta_{t,x}^{t',x'} \int_{\mathbb{R}^n} L(t,x;\tau,\xi)d\xi \right| \le C(p(t,x;t',x'))^\gamma (B(t,\tau))^{-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)} E^d(\tilde{t},\tau),$$

$$0<\tau<t\le t'\le T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

то для такого інтеграла правильне твердження **б)** *леми 2.10.*

Доведення леми 2.12 ґрунтується на зображенні

$$u_4(t,x) = \int_0^{t_1} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} L(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} L(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^x f(\tau,\xi)d\xi + \int_{t_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} L(t,x;\tau,\xi)d\xi \right) \frac{f(\tau,x)}{\alpha(\tau)} d\tau.$$

Розглянемо властивості об'ємного потенціала

$$W_{l0}(t,x;\tau,\xi;y) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda, \qquad (2.180)$$

які описуються у лемах, наведених нижче.

Для неперервної функції f використовуватимемо такі умови:

1)

$$|f(t,x;\tau,\xi;y)| \leq C(t-\tau)^{-M-1+\gamma} \hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x,\xi); \qquad (2.181)$$

2)

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} f(t,x;\tau,\xi;y)| \leq C\,|x_s - z_s|^{\gamma_s} (t-\tau)^{-M-1+\gamma-m_s\gamma_s} \times$$

$$\times (\hat{E}_c^{(l)}(t,x;\tau,\xi) + \hat{E}_c^{(l)}(t,z^{(s)};\tau,\xi)); \qquad (2.182)$$

3) існують неперервні похідні $\partial_{x_{2j}} f$, для яких справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{2j}} f(t,x;\tau,\xi;y)| \leq C\,(t-\tau)^{-M-1+\gamma-\hat{m}_2} \hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x,\xi),\ j \in \mathbb{N}_{n_2}. \qquad (2.183)$$

4) існують неперервні похідні $\partial_{x_{3j}} f$, для яких справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{3j}} f(t,x;\tau,\xi;y)| \leq C\,(t-\tau)^{-M-1+\gamma-\hat{m}_3} \hat{E}_c^{(l)}(t,\tau,x,\xi),\ j \in \mathbb{N}_{n_3}. \qquad (2.184)$$

В умовах (2.181) – (2.184) $0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3, \{\gamma, \gamma_s, s \in \mathbb{N}_3\} \subset (0,1],\ l \in \mathbb{N}_{n_3},\ \hat{E}_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi) := E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)$, $\hat{E}_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi) := E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),\ \hat{E}_c^{(3)}(t,x;\tau,\xi) := E^d(t,\tau) E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi)$.

Лема 2.13. *Нехай функція f задовольняє умови **1** і **2**. Тоді правильні такі твердження:*

1) функцію (2.180) *можна диференціювати під знаками інтегралів за $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і правильні формули*

$$\partial_{x_{1j}} W_{l0}(t,x;\tau,\xi;y) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} G_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda; \qquad (2.185)$$

$$\partial_{x_{1k}} \partial_{x_{1j}} W_{l0}(t,x;\tau,\xi;y) =$$

$$= \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1k}} \partial_{x_{1j}} G_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1k}} \partial_{x_{1j}} G_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y) \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} f(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1k}} \partial_{x_{1j}} G_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y) d\lambda \right) f(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y) d\beta; \qquad (2.186)$$

2) оператор S можна застосовувати під знаками інтегралів, при цьому

$$SW_{l0}(t,x;\tau,\xi;y) = f(t,x;\tau,\xi;y) +$$

$$+ \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} SG_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} SG_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y) \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \big(\int_{\mathbb{R}^n} SG_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y) d\lambda f(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y) \big) d\beta, \qquad (2.187)$$

3) оператор $L_l := L_l^{(t,y)}$ можна застосовувати під знаками інтегралів, при цьому

$$L_l W_{l0}(t,x;\tau,\xi;y) = f(t,x;\tau,\xi;y) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} L_l G_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda,$$

4) для похідних (2.185)–(2.187) *справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1} W_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)| \le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_1|k_1|+\gamma} \hat{E}_c^{(l)}(t,x;\tau,\xi), \qquad (2.188)$$

$$|SW_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)| \le C(t-\tau)^{-M-1+\gamma} \hat{E}_{c_0}^{(l)}(t,x;\tau,\xi). \qquad (2.189)$$

У формулах (2.185)–(2.189) $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n, \{k,j\} \subset \subset \mathbb{N}_{n_1}$, $\hat{m}_1|k_1| \le (\delta_{l1}+\delta_{l3}) + \delta_{l3} 2b$, $l \in \mathbb{N}_{n_3}$, $t_1 := (t+\tau)/2$.

Доведення леми 2.13 наведено в додатку Д.1.

Лема 2.14. *Нехай функція f задовольняє умови **3**, **4**. Тоді правильні такі* *твердження:*

1) функцію (2.180) *можна диференціювати під знаками інтегралів за* $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ *і* $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ *і правильні формули*

$$\partial_{x_{2k}}\partial_{x_{3j}}W_{l0}(t,x;\tau,\xi;y) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{2k}}\partial_{x_{3j}}G_{l0}(t,x;\beta,\lambda;y)f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)\partial_{\lambda_{2k}}\partial_{\lambda_{3j}}f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda; \qquad (2.190)$$

2) справджуються оцінки

$$|\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}W_{l0}(t,x;\tau,\xi;y)| \leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2|k_2|-\hat{m}_3|k_3|+\gamma}\hat{E}_{c_0}^{(l)}(t,x;\tau,\xi), \qquad (2.191)$$

в яких $0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}, k \in \mathbb{N}_{n_2},\ j \in \mathbb{N}_{n_3}, c_0 \in (0,c)$, *число* t_1 *і функції* $\hat{E}_{c_0}^{(l)},\ l \in \mathbb{N}_{n_3}$, *такі, як у лемі 2.13.*

Існування відповідних невласних інтегралів доводиться аналогічно до того, як це робиться в лемі 2.13. Можливість переведення похідних на другий множник забезпечується відповідними властивостями (2.142), (2.148), (2.160) функції Z_{l0}, означенням параметриксу G_{l0}, виконанням припущення **3** чи **4** для функції f та їх оцінками (2.184) і (2.191).

Зробимо кілька зауважень.

1) З міркувань, які наведені в лемі 2.13 випливає, що доведення збіжності невласних інтегралів рівносильно встановленню їх оцінок через оцінювальну функцію. Надалі це буде постійно використовуватись.

2) Твердження лем 2.12, 2.13 залишаються правильними, якщо функція f залежить від основної (t,x) і параметричної (τ,ξ) точок та параметрів (y_2,y_3), чи y_3, якщо $y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$ або лише від основної точки (t,x), тобто якщо $f = f(t,x;\tau,\xi;(y_2,y_3))$, $f = f(t,x;\tau,\xi;y_3)$ або $f = f(t,x)$.

3) Твердження лем 2.12, 2.13 залишаються правильними, якщо замість умов (2.181))–(2.183) припускати, що функція f є неперервною і обмеженою разом із похідними за x_2 і x_3 та задовольняє за просторовими змінними локальну умову Гельдера з показником $\gamma \in (0,1]$.

РОЗДІЛ 3
КЛАСИЧНІ ФРЗК ДЛЯ РІВНЯНЬ З КЛАСУ $\boldsymbol{K_1}$

В розділі наведено основні результати побудови і дослідження класичного ФРЗК для рівнянь з класу $\mathbf{K_1}$, які опубліковано в працях [24,25,27,28].

3.1. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_1^{(t,x^1(y))}$

Параметрикс G_{11} на першому етапі визначається формулою (1.55). Наведемо його властивості.

Лема 3.1. *За умов теореми 2.1 для функції G_{11} справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \leq C_k(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{3.1}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \leq C_k|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)), \tag{3.2}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \leq C_k(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s}), s\in\{2,3\}, \tag{3.3}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \leq C(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k\neq 0, \tag{3.4}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_1\gamma_1}, k\neq 0, \tag{3.5}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\right| \leq$$
$$\leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}+\hat{m}_2\gamma_2}E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1), \quad k'\neq 0, \tag{3.6}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\right| \leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_2\gamma_2}\times$$
$$\times|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)+E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,z_1-\xi_1)), \quad k'\neq 0, \tag{3.7}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)}\times$$

$$\times E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{2,2}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2), \qquad k_3\ne 0, \tag{3.8}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{2,2}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2), \qquad k_3\ne 0, \tag{3.9}$$

а також рівності

$$\partial_x^{k'} G_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} G_{11}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{3.10}$$

$$\partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = 0, \qquad k'\ne 0, \tag{3.11}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = 0, \qquad k_3\ne 0, \tag{3.12}$$

де $0\le\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, y':=(y_2,y_3)\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}, \{x_s,y_s,z_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ k:= = (k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n,\ k':=(0,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n,\ \gamma_s^0\in(0,1], s\in\mathbb{N}_3,\ h$ *і* γ_s *– числа з умов* (1.11) – (1.13).

Припустимо, що функція Q_{11} з (1.54) задовольняє умови леми 2.13. Тоді для цієї функції отримаємо таке інтегральне рівняння:

$$Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = K_{11}(t,x;\tau,\xi;y') +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda, \tag{3.13}$$

в якому ядро K_{11} визначається формулою

$$K_{11}(t,x;\tau,\xi;y') := \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}} +$$

$$\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,x^1(y))\Bigg) G_{11}(t,x;\tau,\xi;y'), \quad 0\le\tau<t\le T,\ y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3},\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

З цієї формули випливають для $k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$ такі рівності:

$$\partial_x^{k'} K_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}} +$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t, x^1(y))\Big)\partial_x^{k'} G_{11}(t, x; \tau, \xi; y'), \tag{3.14}$$

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{11}(t, x; \tau, \xi; y') = \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}} +$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t, x^1(y))\Bigg)\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_{11}(t, x; \tau, \xi; y'), s \in \{2, 3\}, \tag{3.15}$$

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t, x; \tau, \xi; y') = \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_{jl}(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_j(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}} +$$

$$+\Delta_{y_s}^{z_s} a_0(t, (x_1, y'))\Bigg)\partial_x^{k'} G_{11}(t, x; \tau, \xi; y') - \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_{jl}(t, \xi^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_j(t, \xi^1(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{y_s}^{z_s} a_0(t, \xi^1(y))\Bigg)\partial_x^{k'} G_{11}(t, x; \tau, \xi; y') +$$

$$+\Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t, x^1(y))\Bigg)\Bigg|_{y_s = z_s} \times$$

$$\times\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_{11}(t, x; \tau, \xi; y'), s \in \{2, 3\}, \xi^1(y) := (\xi_1, y_2, y_3). \tag{3.16}$$

За допомогою інтегрування (3.16) і формул (3.11), (3.12), маємо ще такі рівності:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{11}(t, x; \tau, \xi; y') d\xi_2 d\xi_3 = \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t, x^1(y))\Bigg) \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_{11}(t, x; \tau, \xi; y') d\xi_2 d\xi_3,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{11}(t, x; \tau, \xi; y') d\xi_3 = \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t, x^1(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t, x^1(y))\Bigg) \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_{11}(t, x; \tau, \xi; y') d\xi_3. \tag{3.17}$$

Використовуючи рівності (3.15)–(3.17), оцінки (3.1)–(3.4), умови (1.11)–(1.13), нерівності (2.35),(2.36) і (2.38) та рівність (2.37), отримуємо оцінки

$$|\partial_x^{k'} K_{11}(t, x; \tau, \xi; y')| \le C(t - \tau)^{-M - M_{k'} - 1 + \hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t - \tau, x, \xi), \tag{3.18}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{11}(t, x; \tau, \xi; y')| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t - \tau)^{-M - M_{k'} - 1 + \hat{m}_1\gamma_1 - \hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times\left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \tag{3.19}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')|\le C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{3.20}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2d\xi_3\right|\le C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\hat{m}_1n_1-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1), \tag{3.21}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3\right|\le C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_2n_2-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{2,2}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2), \tag{3.22}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right|\le C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}. \tag{3.23}$$

В оцінках (3.18)– (3.23) $0\le\tau<t\le T$, $h\in[0,T]$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in$ $\in\{2,3\}$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $k'\in\mathbb{Z}_+^n$, причому в оцінках (3.21)– (3.23) $k'\neq 0$, а числа γ_s^0 і γ_s такі, як вище.

Оцінка (3.20) не є достатньою для встановлення точних показників Гельдера приростів функцій Q_{1j}, $j\in\mathbb{N}_3$, за просторовими змінними, але є достатньою для доведення існування класичного ФРЗК. Тому, надалі додатково припускатимемо виконання умови (A_{15}). Співвідношення (3.16) можна переписати у вигляді

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')=\left(\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{\xi_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_0(t,(x_1,y'))\right)\partial_x^{k'}G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')+$$

$$+\left(\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,x^1(y))\right)\Bigg|_{y_s=z_s}\times$$

$$\times\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}G_{11}(t,x;\tau,\xi;y'),\, s\in\{2,3\},\, \xi^1(y):=(\xi_1,y_2,y_3).$$

Оцінивши доданки цього зображення, отримаємо оцінку

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')|\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),\ s\in\{2,3\}. \tag{3.24}$$

Наведемо властивості функції Q_{11}.

Лема 3.2. *За умов* (A_{11}), (A_{12}) *і* (A_{15}) *для функції* Q_{11} *правильні оцінки*

$$|\partial_x^{k'}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')|\leq C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi); \tag{3.25}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')|\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)),\ \gamma_1^0\in(0,\gamma_1],\ \{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1]; \tag{3.26}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')\right|\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi); \tag{3.27}$$

$$\left|\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right|\leq C(t-\tau)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1},\qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n, \tag{3.28}$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right|\leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-\tau)^{-M_{1k'}-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)},\gamma_1^0\in(0,\gamma_1],k'\in\mathbb{Z}_+^n. \tag{3.29}$$

$$\left|\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2d\xi_3\right|\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}-1+\hat{m}_2\gamma_2}E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1),k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{3.30}$$

$$\left|\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right|\leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1(n_1-\gamma_1)-\hat{m}_2n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)-1}\times$$

$$\times E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)E_c^{2,2}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2),k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}. \tag{3.31}$$

У формулі (3.26) $s\in\mathbb{N}_3$, *а в* (3.27)— $s\in\{2,3\}$.

Перейдемо до дослідження об'ємного потенціалу (1.54).

Лема 3.3. *Нехай виконуються умови леми 3.2. Тоді правильні такі твердження:*

(A) *функція* (1.54), *має неперервні похідні* $\partial_x^kW_{11}$, $\hat{m}_1|k_1|\leq 1$, $k_1\in$

$\in \mathbb{Z}_+^{n_1}, k' = (0, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, *які визначаються формулами*

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda, |k_1| = 1; \tag{3.32}$$

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y') \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y') d\lambda \right) Q_{11}(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y') d\beta =:$$

$$=: \sum_{j=1}^{3} W_{11j}^{1k}, |k_1| = 2; \tag{3.33}$$

$$\partial_x^{k'} W_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k'} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y') \partial_\lambda^{k'} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda =: \sum_{j=1}^{2} W_{1j}^{k}; \tag{3.34}$$

(B) *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(t-\tau)^{-M-M_k+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{3.35}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-M-M_k+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times \left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right), \quad \gamma_s^0 \in (0,1], s \in \{2,3\}, \tag{3.36}$$

$$\left| \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} W_{11}(t,x;\tau,\xi;y') \right| \le C(|h|^{m_s\gamma_s} + |Y_s(h) - z_s|^{\gamma_s}) \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-M_{k'}+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), s \in \{2,3\}, k \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{3.37}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;y') d\xi \right| \le C(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \tag{3.38}$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;y') d\xi \right| \le$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k - \hat{m}_s\gamma_s^0 + \hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \tag{3.39}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3 \right| \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - M_{k'} + \hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1), \qquad k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \tag{3.40}$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3 \right| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - M_k - \hat{m}_s\gamma_s^0 + \hat{m}_2\gamma_2} \left(E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1) + E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, z_1-\xi_1) \right), k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \tag{3.41}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3 \right| \leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - M_k + \hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1) E_{c_0}^{2,2}(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2), k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}, \tag{3.42}$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3 \right| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - M_k - \hat{m}_s\gamma_s^0 + \hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1) E_{c_0}^{2,2}(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2), k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}. \tag{3.43}$$

У формулах (3.36), (3.39), (3.41) *і* (3.43) $\gamma_1^0 \in (0, \gamma_1]$, $\gamma_s^0 \in (0, 1]$, $s \in \{2, 3\}$.

Доведення лем 3.1, 3.2 і 3.3 наведено у додатку Д.2.

Наведемо основний результат першого етапу.

Теорема 3.1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.52) *виконуються умови* (A_{11}), (A_{12}) *і* (A_{15}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_{11} *і є правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \leq C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi); \tag{3.44}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times \big(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \big); \tag{3.45}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^k Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \leq C(t-\tau)^{-M-M_{lk}} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) \times$$

$$\times (h^{\hat{m}_s\gamma_s} + |Y_s(h) - z_s|^{\gamma_s}), s \in \{2,3\}; \tag{3.46}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi| \leq C(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}; \tag{3.47}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}, k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\};$$

$$(3.48)$$

$$| \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_2 d\xi_3| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - M_{k'} + \hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1), k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \qquad (3.49)$$

$$| \int_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} Z_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - M_k + \hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1) E_{c_0}^{2,2}(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2), k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}, \qquad (3.50)$$

а також рівності

$$\partial_x^{k'} \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = 0, \qquad k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}; \qquad (3.51)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}; \qquad (3.52)$$

$$\partial_x^{k'} Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} Z_{11}(t,x;\tau,\xi;y'), \qquad k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \qquad (3.53)$$

де $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}, \{y_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_3, \gamma_1^0 \in \in (0,\gamma_1], \ \{\gamma_2^0, \gamma_3^0\} \subset (0,1], k \in \mathbb{Z}_+^n, |k_1| \le 2.$

Доведення. Оцінки (3.44)– (3.53) випливають з означення (1.53) і відповідних оцінок параметриксу G_{11} і об'ємного потенціалу W_{11}.▶

3.2. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_1^{(t,x^2(y))}$

На другому етапі параметрикс G_{12} визначається за формулою (1.59). Наведемо оцінки і властивості параметриксу G_{12}.

Лема 3.4. *За умов леми 3.3 для функції* G_{12} *є правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi); \qquad (3.54)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times \left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right); \qquad (3.55)$$

$$\left|\Delta_{y_3}^{z_3} \partial_x^k G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)\right| \le C\left(h^{\hat{m}_3\gamma_3^0} + |Y_3(h) - z_3|^{\gamma_3^0}\right) \times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi); \tag{3.56}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{12}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k+m(k)}, \tag{3.57}$$

$$m(k) := \begin{cases} \hat{m}_1\gamma_1, & \text{якщо } k_1 \neq 0, \text{ а } k_2 = 0 \text{ і } k_3 = 0, \\ \hat{m}_2\gamma_2, & \text{якщо } k_2 \neq 0, \text{ а } k_1 = 0 \text{ і } k_3 = 0, \\ \hat{m}_2\gamma_2, & \text{якщо } k_3 \neq 0, \text{ а } k_1 = 0 \text{ і } k_2 = 0, \end{cases} k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\};$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k+m(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0}, k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}; \tag{3.58}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{12}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m'(k)} E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1), \tag{3.59}$$

$$m'(k) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } k' = 0; \\ \hat{m}_2\gamma_2, & \text{якщо } k' \neq 0, \end{cases} k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\};$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_{lk}-\hat{m}_1 n_1+m'(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times \left(E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1) + E_c^{2,1}(t-\tau,z_1-\xi_1)\right); \tag{3.60}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}; \tag{3.61}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} G_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} G_2(t,x;\tau,\xi;y_3), \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}, \tag{3.62}$$

де $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}, \{x_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_3, k \in \mathbb{Z}_+^n, |k_1| \le 2.$ *У формулах* (3.55), (3.58) *і* (3.60) $\gamma_1^0 \in (0,\gamma_1],\ \gamma_2^0 \in (0,1],\ \gamma_3^0 \in (0,1].$

Доведення. Оцінки (3.54)— (3.61), рівності (3.62) безпосередньо випливають з оцінок (3.44)— (3.50), означення параметриксу (1.59) і рівностей (3.53). ►

Інтегральне рівняння для густини Q_{12} отримуємо аналогічно до рівняння (3.13) для густини Q_{11}. Це рівняння має вигляд

$$Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda. \tag{3.63}$$

Ядро K_{12} визначається формулою

$$K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_0(t,x^2(y))\Bigg) G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3),$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ y_3 \in \mathbb{R}^{n_3},\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.64}$$

З (3.64) випливають такі рівності:

$$\partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_0(t,x^2(y))\Bigg) \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3),$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ y_3 \in \mathbb{R}^{n_3},\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.65}$$

$$\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2}\Delta_{y_3}^{z_3} a_{jl}(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2}\Delta_{y_3}^{z_3} a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_2}^{\xi_2}\Delta_{y_3}^{z_3} a_0(t,x^2(y))\Bigg) \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}+$$

$$+\Delta_{x_2}^{\xi_2} a_0(t,x^2(y))\Bigg)\Bigg|_{y_3=z_3} \Delta_{y_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3),$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.66}$$

Доданки з (3.65), (3.66) оцінюємо подібно до оцінювання доданків з (3.14), (3.15). Отримаємо

$$|\partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3|k_3|} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),\ k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}; \tag{3.67}$$

$$|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C\big(h^{\hat{m}_3\gamma_3} + |Y_3(h)-z_3|^{\gamma_3}\big)(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3(|k_3|+\gamma_3)}\times$$

$$\times\left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\right),\ \gamma_3^0 \in (0,1],\ k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}. \tag{3.68}$$

З (3.67) і властивості (3.62) параметриксу випливає рівність

$$\partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3),\ k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}. \tag{3.69}$$

Перейдемо до оцінки приростів за змінною x_1 похідних від ядра K_{12}. Для цього використовуємо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,x_2(y)) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_j(t,x^2(y)) \partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{z_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_0(t,x^2(y)) \right) \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) +$$

$$+ \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,x^2(y)) \Big|_{x_1=z_1} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_j(x^2(y)) \Big|_{x_1=z_1} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) +$$

$$+ \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_0(t,x^2(y)) \Big|_{x_1=z_1} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3). \tag{3.70}$$

Оцінивши доданки з (3.70) за допомогою умов (1.11), (1.12), оцінок (3.54) і (3.55) при $s = 1$, отримаємо такі оцінки:

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} (t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3| - \hat{m}_1(\gamma_1^0 - \gamma_1) + \hat{m}_2\gamma_2} \times$$

$$\times \left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(1)},\xi) \right),\ \gamma_1^0 \in (0,\gamma_1]. \tag{3.71}$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) d\xi| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} (t-\tau)^{-1-\hat{m}_3|k_3| + \hat{m}_1(\gamma_1 - \gamma_1^0)}. \tag{3.72}$$

У (3.71) і (3.72) мультиіндекс $k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}$— довільний.

Для приростів за змінною x_2 маємо таке зображення:

$$\Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{z_2} a_{jl}(t,x^2(y)) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{z_2} a_j(t,x^2(y)) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) + \Delta_{x_2}^{z_2} a_0(t,x^2(y)) \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) +$$

$$+ \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{z_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,(x_1,z_2,y_3)) \Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{z_2}^{\xi_2} a_j(t,(x_1,z_2,y_3)) \times$$

$$\times\Delta^{z_2}_{x_2}\partial_{x_{1j}}\partial^{k'}_{x}G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)+\Delta^{\xi_2}_{z_2}a_0(t,(x_1,z_2,y_3))\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_3}_{x_3}G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3); \quad (3.73)$$

Доданки в (3.73) оцінюємо аналогічно до (3.71) за допомогою умови (1.12), оцінок (3.54), (3.55) при $s=2$. Отримаємо оцінки

$$|\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_3}_{x_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C(t-\tau)^{-M-1-\hat m_3|k_3|}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat m_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right)\times$$
$$\left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(2)},\xi)\right),\ |k_3|\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_2^0\in(0,1]. \quad (3.74)$$

Тут γ_2^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$, а γ_2 число з умови (1.12). Інтегруючи оцінки (3.74) за відповідними групами змінних, отримуємо

$$|\Delta^{z_2}_{x_2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{k_3}_{x_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi|\le C(t-\tau)^{-1-\hat m_3|k_3|+m(k)}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat m_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right); \quad (3.75)$$

$$|\Delta^{z_2}_{x_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial^{k_3}_{x_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2d\xi_3|\le C(t-\tau)^{-\hat m_1n_1-1-\hat m_3|k_3|}(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+$$
$$+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat m_2(\gamma_2^0-\gamma_2)})\left(E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)+E_c^{2,1}(t-\tau,z_1-\xi_1)\right); \quad (3.76)$$

$$|\Delta^{z_2}_{x_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial^{k_3}_{x_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3|\le C(t-\tau)^{-\hat m_1n_1-\hat m_2n_2-1-\hat m_3|k_3|}(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+$$
$$+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat m_2(\gamma_2^0-\gamma_2)})\left(E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)E_c^{2,2}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)+\right.$$
$$\left.+E_c^{2,1}(t-\tau,z_1-\xi_1)E_c^{2,2}(t-\tau,Z_2(t-\tau)-\xi_2)\right). \quad (3.77)$$

Для оцінки приростів за змінною x_3 використовуємо зображення

$$\Delta^{z_3}_{x_3}\partial^{k_3}_{x_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)=\sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}\partial^{k_3}_{x_3}\partial_{\zeta_{3j}}K_{12}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)d\zeta_{3j},$$

де точки $\zeta_3^{(j)},\ j\in\mathbb{N}_{n_3}$— такі як вище.

$$|\Delta^{z_3}_{x_3}\partial^{k_3}_{x_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)|=|\sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}\partial^{k_3}_{x_3}\partial_{\zeta_{3j}}K_{12}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)d\zeta_{3j}|\le$$

$$\le\left|\sum_{j=1}^{n_3}|\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}|\partial^{k_3}_{x_3}\partial_{\zeta_{3j}}K_{12}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)|d\zeta_{3j}\right|\le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n_3}|x_{sj}-z_{sj}|(t-\tau)^{-M-1-\hat m_3(|k_3|-1)+\hat m_2\gamma_2}\Big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+$$

$$+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\Big)\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-M-1-\hat m_3|k_3|+\hat m_2\gamma_2-\hat m_3\gamma_3^0}\Big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+$$

$$+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\Big),\ k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_3^0\in(0,1]; \tag{3.78}$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-1-\hat m_3|k_3|+\hat m_2\gamma_2-\hat m_3\gamma_3^0},$$

$$k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\gamma_3^0\in(0,1]; \tag{3.79}$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2d\xi_3|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-\hat m_1n_1-1-\hat m_3|k_3|+m_2\gamma_2-m_3\gamma_3^0}\times$$

$$\times\left(E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)+E_c^{2,1}(t-\tau,z_1-\xi_1)\right),\ k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_3^0\in(0,1]; \tag{3.80}$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\int_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3|\le C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat m_1n_1-\hat m_2n_2-1-\hat m_3|k_3|+\hat m_2\gamma_2-\hat m_3\gamma_3^0}\times$$

$$\times\left(E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)E_c^{2,2}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)+\right.$$

$$\left.+E_c^{2,1}(t-\tau,z_1-\xi_1)E_c^{2,2}(t-\tau,Z_2(t-\tau)-\xi_2)\right),\ k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_3^0\in(0,1]. \tag{3.81}$$

Наведемо властивості функції Q_{12}.

Лема 3.5. *Для функції Q_{12} справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_3}^{k_3}Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C(t-\tau)^{-M-1-\hat m_3|k_3|+\hat m_2\gamma_2}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi); \tag{3.82}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_3}^{k_3}Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-1-\hat m_3|k_3|+\hat m_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$

$$\times\Big(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\Big),\gamma_s^0\in(0,\gamma_s),s\in\mathbb{N}_2,k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}; \tag{3.83}$$

$$|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3}Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C(h^{\hat m_3\gamma_3}+|Y_3(h)-z_3|^{\gamma_3})\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-\hat m_3|k_3|-1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi); \tag{3.84}$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3}\int_{\mathbb{R}^n}Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi|\le C(t-\tau)^{-1-\hat m_3|k_3|+\hat m_2\gamma_2}; \tag{3.85}$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2d\xi_3|\le C(t-\tau)^{-\hat m_1n_1-1-\hat m_3|k_3|+\hat m_2\gamma_2}E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1); \tag{3.86}$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{12}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi_3| \leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - 1 - \hat{m}_3 |k_3| + \hat{m}_2 \gamma_2} \times$$

$$\times E_c^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1) E_c^{2,2}(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2); \tag{3.87}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}; \tag{3.88}$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{12}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi_3| \leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - 1 + \hat{m}_2 \gamma_2 + \hat{m}_3(\gamma_3 - |k_3|)} \times$$

$$\times E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1) E_{c_0}^{2,2}(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2), \tag{3.89}$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi, z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{N}_3$, $k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}$, *причому* $k_3 \in \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}$ *в* (3.85)–(3.89), $\gamma_l^0 \in (0, \gamma_l]$, $l \in \mathbb{N}_2$, $\gamma_3^0 \in (0,1]$, γ_l, $l \in \mathbb{N}_2$ — *числа з умов* (1.11), (1.12) *і* (1.13).

Доведення леми наведено у додатку 2.

Отримані властивості параметриксу G_{12} та густини потенціалу Q_{12} дозволяють дослідити об'ємний потенціал (1.58), отримати його оцінки і довести таку лему.

Лема 3.6. *Нехай виконуються умови леми 3.4 і леми 3.5. Тоді для функції* (1.58) *правильні такі твердження:*

(A) *для* $k''' := (k_1, k_2, 0) \in \mathbb{Z}_+^n, 2|k_1| + |k_2| \leq 1$, *існують похідні* $\partial_x^{k'''} W_{12}$, *які визначаються формулами*

$$\partial_x^{k''} W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda \right) Q_{12}(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\beta; \tag{3.90}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_2}^{k_2} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) d\lambda_2 d\lambda_3 \Bigg) \times$$

$$\times \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\tau)} Q_{12}(\beta, \Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi;y_3) d\lambda_1 + \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \times$$

$$\times \left(\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{12}(\beta, \Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi;y_3) + \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) \right) d\lambda$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) d\lambda \right) Q_{12}(\beta, X(t-\tau);\tau,\xi;y_3) d\beta =: \sum_{j=1}^{4} W_{12j}^{k'''}, \tag{3.91}$$

(B) *для* $k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}$, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $|k_1| = 1$ *існують похідні* $\partial_{x_3}^{k_3} \partial_{x_1}^{k_1} W_{12}$, *які визначаються формулами*

$$\partial_{x_3}^{k_3} \partial_{x_1}^{k_1} W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda =: \sum_{j=1}^{2} W_{12j}^{k'}; \tag{3.92}$$

(C) *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k+m_k} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{3.93}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k W_{12}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-M-M_k+\bar{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \times$$

$$\times \left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right),$$

$$\bar{m}_s = \hat{m}_s, s \in \mathbb{N}_2, \bar{m}_3 = \hat{m}_2, \gamma_1^0 \in (0,\gamma_1], \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2], \gamma_3^0 \in (0,1]. \tag{3.94}$$

Доведення леми 3.6 наведено у додатку 2.

Результати другого етапу побудови класичного ФРЗК наведені в наступній теоремі.

Теорема 3.2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.52) *виконуються умови* (A_{11}), (A_{12}) *і* (A_{15}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_{12} *і є* *правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$k \in \{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n \mid \hat{m}_1|k_1| + |k_2| \le 1\}; \qquad (3.95)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0} (E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi$$

$$\gamma_1^0 \in (0,\gamma_1],\ \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2],\ \gamma_3^0 \in (0,1]; \qquad (3.96)$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k+m(k)}, k \in \{\mathbb{Z}_+^n | 0 < \hat{m}_1|k_1| + |k_2| \le 1\}; \qquad (3.97)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-M_k+m(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0},$$

$$k \in \{\mathbb{Z}_+^n \mid \hat{m}_1|k_1| + |k_2| \le 1\}, \gamma_1^0 \in (0,\gamma_1],\ \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2],\ \gamma_3^0 \in (0,1]; \qquad (3.98)$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')} E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1), k \ne 0; \qquad (3.99)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')-\hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times (E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1) + E_c^{2,1}(t-\tau,z_1-\xi_1)), \gamma_1^0 \in (0,\gamma_1],\ \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2],\ \gamma_3^0 \in (0,1]; \qquad (3.100)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}; \qquad (3.101)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} Z_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3), \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}, \qquad (3.102)$$

У формулах (3.95)–(3.102) $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$.

Доведення. Оцінки (3.95), (3.96) випливають з означення ФРЗК (1.57) і відповідних оцінок (3.54), (3.55), (3.93) і (3.94).

Щоб отримати оцінки (3.97)– (3.100) потрібно спершу отримати такі оцінки для інтегралів від похідних W_2 та їх приростів. Інтегруючи оцінки (3.93) і (3.94) відповідно за $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^n$ і $(\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, із урахуванням рівностей

(**??**), (**??**), отримаємо такі нерівності:

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k+m(k)}; \tag{3.103}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k+m(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0}; \tag{3.104}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')}E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1); \tag{3.105}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times,$$

$$\times(E_c^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)+E_c^{2,1}(t-\tau,z_1-\xi_1)). \tag{3.106}$$

В нерівностях (3.103)–(3.105) $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, а числа $m_(k)$ і $m(k)'$ —такі як вище. З нерівностей (3.103)–(3.105), (3.57)–(3.59) випливають оцінки (3.97)— (3.100).

Рівності (3.101) є наслідком рівностей (3.61) і (3.88). Аналогічно, за допомогою (3.62) і (3.88) доводиться рівності (3.102). ►

3.3. Побудова та властивості ФРЗК для основного рівняння

Оцінки параметриксу G_{13}, який на третьому етапі визначається за формулою (**??**) наводяться в наступній лемі.

Лема 3.7. *Для функції G_{13} справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k G_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi); \tag{3.107}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)); \tag{3.108}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_s}^{k_s} G_{13}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_{k_s}+\hat{m}_s\gamma_s}, k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}\setminus\{0\},\ s\in\mathbb{N}_3; \tag{3.109}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_l}^{k_l} G_{13}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_{k_l}+\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_s\gamma_s^0}; \tag{3.110}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{13}(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-M_{k_l}-\hat{m}_1 n_1+\hat{m}_l\gamma_l}E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1); \tag{3.111}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{13}(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_{k_l}-\hat{m}_1 n_1+\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)+E_c^1(t-\tau,z_1-\xi_1)); \qquad (3.112)$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{13}(t,x;\tau,\xi)d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)}\times$$

$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_c^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2); \qquad (3.113)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{13}(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-M_{k_l}+\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_c^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)+E_c^1(t-\tau,z_1-\xi_1)E_c^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)+$$

$$+E_c^1(t-\tau,z_1-\xi_1)E_c^2(t-\tau,Z_2^{(s)}(t-\tau)-\xi_2)+E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_c^2(t-\tau,Z_2^{(s)}(t-\tau)-\xi_2)); \qquad (3.114)$$

де $0 \le \tau < t \le T, k \in \{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n, \hat{m}_1|k_1|+|k_2|+|k_3| \le 1\}, \{x,\xi\} \subset \subset \mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_3, \gamma_1^0 \in (0,\gamma_1], \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2], \gamma_3^0 \in (0,1]$.

Доведення. Оцінки (3.107)–(3.113) безпосередньо випливають з оцінок (3.95)–(3.100) ФРЗК $Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3), 0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$. ►

Розглянемо властивості густини Q_{13} потенціалу W_{13}.

Лема 3.8. *Для функції* Q_{13} *справджуються оцінки*

$$|Q_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \qquad (3.115)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} Q_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$

$$\times\left(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), 0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\{x_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s},\ s \in \mathbb{N}_3,\ \gamma_1^0 \in (0,\gamma_1],\ \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2],\ \gamma_3^0 \in (3/5,\gamma_3]. \qquad (3.116)$$

Доведення. За зроблених припущень функція Q_{13} задовольняє інтегральне рівняння

$$Q_{13}(t,x;\tau,\xi) = K_{13}(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \quad (3.117)$$

в якому ядро K_{13} визначається формулою

$$K_{13}(t,x;\tau,\xi) := \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_0(t,x)\right)\times$$
$$\times G_{13}(t,x;\tau,\xi),\ 0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.118}$$

Оцінимо доданки з (3.118) за допомогою умови (A_{12}), нерівностей (**??**), (3.107), (2.36) і (2.48). Маємо

$$|K_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{3.119}$$

де c_0–стала з оцінки (2.36).

З отриманої оцінки випливає, що ядро K_{13} інтегрального рівняння (4.129) задовольняє умови леми 2.6. На підставі цієї леми для функції Q_{13} справджується оцінка (3.115). Для функції Q_{13} справджуються також оцінки (3.116).

З (3.118) випливають такі рівності:

$$\Delta_{x_s}^{z_s} K_{13}(t,x;\tau,\xi) = \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_s}^{z_s}\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_s}^{z_s}\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}}+\right.$$
$$\left.+\Delta_{x_s}^{z_s}\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_0(t,x)\right) G_{13}(t,x;\tau,\xi) + \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_j(t,x\partial_{x_{1j}}+\right.$$
$$\left.\left.+\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_0(t,x)\right)\right|_{x_s=z_s} \Delta_{x_s}^{z_s} G_{13}(t,x;\tau,\xi), 0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{N}_2. \tag{3.120}$$

$$\Delta_{x_3}^{z_3} K_{13}(t,x;\tau,\xi) = \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{z_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{z_3} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_3}^{z_3} a_0(t,x)\right)\times$$
$$\times G_{13}(t,x;\tau,\xi)\Big|_{x_s=z_s} + \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}}+\right.$$
$$\left.+\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_0(t,x)\right)\Delta_{x_3}^{z_3} G_{13}(t,x;\tau,\xi), \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.121}$$

Оцінки доданків зображень (3.120),(3.121) досить встановити у випадку $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le (t-\tau)/4, s \in \mathbb{N}_3$. За допомогою умов (A_{12}), (A_{15}), оцінок (3.107), (3.108) і нерівностей (2.36) отримаємо оцінки

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} K_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$

$$\times\left(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right),0\le\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$\{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},s\in\mathbb{N}_3,\gamma_1^0\in(0,\gamma_1],\gamma_2^0\in(1/3,\gamma_2],\gamma_3^0\in(3/5,\gamma_3]. \qquad (3.122)$$

Інтегруючи (3.120),(3.121) із урахуванням (A_{12}), (A_{15}) і оцінок (3.109), (3.110), маємо

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{13}(t,x;\tau,\xi)d\xi|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_s\gamma_s},$$

$$0\le\tau<t\le T,\ x\subset\mathbb{R}^n,\ \{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_2. \qquad (3.123)$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{13}(t,x;\tau,\xi)d\xi|\le$$

$$\le C\left(|x_3-z_3|^{\gamma_3}(t-\tau)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}+|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-1+\hat{m}_3(\gamma_3-\gamma_3^0)}\right),$$

$$0\le\tau<t\le T,x\in\mathbb{R}^n,\{x_3,z_3\}\subset\mathbb{R}^{n_3}. \qquad (3.124)$$

У формулах (3.123),(3.124) γ_s, $s\in\mathbb{N}_3$, — числа з умови (A_{12}), а γ_3^0 — довільне число з проміжку $(0,1]$. Щоб оцінити прирости функції Q_{13} за допомогою (4.129) запишемо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s}Q_{13}(t,x;\tau,\xi)=\Delta_{x_s}^{z_s}K_{13}(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}K_{13}(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}K_{13}(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda=:\sum_{j=1}^{5}Q_{13j}, \qquad (3.125)$$

де $0\le\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\eta_s:=t-|x_s-z_s|^{1/\hat{m}_s},s\in\mathbb{N}_3$, а число t_1– таке як раніше. Далі для $\eta_s=t-|x_s-z_s|^{1/\hat{m}_s},|x_s-z_s|^{1/\hat{m}_s}\le(t-$

$-\tau)/4, s \in \mathbb{N}_3$, використовуватимемо нерівності

$$J_s(\gamma) := \int\limits_{t_1}^{\eta_s} (t-\beta)^{-1+\gamma} d\beta \le \begin{cases} C(t-\tau)^{\gamma}, & \text{якщо } \gamma > 0, \\ C|x_s - z_s|^{\gamma/\hat{m}_s}, & \text{якщо } \gamma < 0, \; s \in \mathbb{N}_3. \end{cases} \tag{3.126}$$

Оцінимо доданки $Q_{13j}, j \in \mathbb{N}_5$. Для Q_{131} справджуються оцінки (3.122). За допомогою оцінок (3.115), (3.122) і (2.48) отримаємо

$$|Q_{132}| \le \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_s}^{z_s} K_{13}(t,x;\beta,\lambda)||Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-t_1)^{-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \int\limits_{\tau}^{t_1} (\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} d\beta (I_0^{(1,s3)}(x,\xi) + I_0^{(1,s3)}(z^{(3)},\xi)) \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_3^0)} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

$$|Q_{133}| \le \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_s}^{z_s} K_{13}(t,x;\beta,\lambda)||Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} J_s(\hat{m}_s(\gamma_s - \gamma_s^0))(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} (I_0^{(1,s3)}(x,\xi) + I_0^{(1,s3)}(z^{(3)},\xi)) \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-1-M+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Доданки Q_{134} і Q_{135} оцінюємо однаково. Тому оцінимо перший з них. За допомогою (3.119), (3.115) і (2.48) маємо

$$|Q_{134}| \le \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_{13}(t,x;\beta,\lambda)||Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \int\limits_{\eta_s}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} d\beta (I_0^{(1,s3)}(x,\xi) + I_0^{(1,s3)}(z^{(3)},\xi)) \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\hat{m}_3\gamma_3\hat{m}_s^{-1}} (t-\tau)^{-1-M+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Оцінка Q_{135} відрізняється від цієї оцінки лише тим, що в ній x замінено на $z^{(s)}, \; s \in \mathbb{N}_2$.

Отже, встановлено оцінки (3.116) для випадку, коли $\gamma_s^0 \in (0, \gamma_s)$. Ці оцінки справджуються і для $\gamma_s^0 = \gamma_s$, $s \in \mathbb{N}_3$. Щоб у цьому переконатися, уточнимо оцінку інтеграла Q_{133}, записавши його у вигляді

$$Q_{133} = \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{13}(t,x;\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_s} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi) d\beta =: Q'_{133} + Q''_{133}.$$

За допомогою нерівностей (2.38), (2.48), оцінок (3.122) при $\gamma_s^0 = \gamma_s$ і (3.116) при $\gamma_s^0 < \gamma_s$ й (Д2.10), отримуємо

$$|Q'_{133}| \le C \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-1} |x_s - z_s|^{\gamma_s} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{3} |X_s(t-\beta) - \lambda_s|^{\gamma_s^0} (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s - \gamma_s^0)} \sum_{j=s-1}^{s} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi) d\lambda \le$$

$$\le C |x_s - z_s|^{\gamma_s} \sum_{s=1}^{3} J_s(\hat{m}_s \gamma_s^0)(t_1 - \tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s - \gamma_s^0)} \sum_{j=s-1}^{s} I_0^{(1,0j)}(x;\xi) \Big) \le$$

$$\le C |x_s - z_s|^{\gamma_s} (t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s \gamma_s} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

Для оцінки доданка Q''_{133} у випадку $s \in \mathbb{N}_2$, використовуємо оцінки (3.123), (2.43), (3.115) і (Д2.10). Маємо

$$|Q''_{133}| \le C \int\limits_{t_1}^{\eta_s} |x_s - z_s|^{\gamma_s} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_s\gamma_s} (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_c^{(1)}(t-\tau, X(t-\beta), \xi) d\beta \le C |x_s - z_s|^{\gamma_s} J_s(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_s\gamma_s) \times$$

$$\times (t_1 - \tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi) \le$$

$$\le C |x_s - z_s|^{\gamma_s} (t-\tau)^{-M-1+2\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_s\gamma_s} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

У випадку $s = 3$ використовуємо оцінки (3.124) при $\gamma_3^0 > \gamma_3$, (2.43), (3.115) і (Д2.10). Отримаємо

$$|Q''_{133}| \le C \int\limits_{t_1}^{\eta_3} \Big(|x_3 - z_3|^{\gamma_3} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} + |x_3 - z_3|^{\gamma_3^0} (t-\beta)^{-1-\hat{m}_3(\gamma_3^0 - \gamma_3)} \Big) \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau, X(t-\beta), \xi) d\beta \le C \big(|x_3 - z_3|^{\gamma_3} J_3(\hat{m}_1\gamma_1) +$$

$$+|x_3 - z_3|^{\gamma_3^0} J_3(-\hat{m}_3(\gamma_3^0 - \gamma_3))\big)(t_1 - \tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi) \le$$

$$\le C|x_3 - z_3|^{\gamma_3}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

З цих оцінок та оцінок $Q_{13j}, j \in \mathbb{N}_5$, випливають оцінки (3.116), в яких $\gamma_s^0 = \gamma_s,\ s \in \mathbb{N}_3$. ▶

Перейдемо до дослідження об'ємного потенціалу (**??**).

Лема 3.9. *Нехай виконуються умови леми 3.7 для параметриксу G_{13} і леми 3.8 для функції Q_{13}. Тоді для об'ємного потенціалу* (**??**) *правильні такі твердження:*

(A) *для $k \in \{\mathbb{Z}_+^n \,|\, m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \le 1\}$, існують похідні $\partial_x^k W_3$, які визначаються формулами*

$$\partial_x^{k''} W_{13}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi) d\beta =: \sum_{j=1}^{3} W_{3j}^{11}; \qquad (3.127)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} W_{13}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_2}^{k_2} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\tau)} Q_{13}(\beta, \Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi) d\lambda_1 +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) \Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{13}(\beta, \Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) \Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\beta,X(t-\tau);\tau,\xi)d\beta =: \sum_{j=1}^{5}W_{3j}^{12}, \qquad (3.128)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}W_{13}(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_2 d\lambda_3\right)\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\tau)}Q_{13}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_3\right)\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1 d\lambda_2+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)}Q_3(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\beta,X(t-\tau);\tau,\xi)d\beta =: \sum_{j=1}^{5}W_{3j}^{13}, \qquad (3.129)$$

(B) *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k W_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k+\gamma}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi). \qquad (3.130)$$

У формулах (3.127)–(3.130) $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \gamma = \min\{m_1\gamma_1, m_2\gamma_2, m_3\gamma_3\}, k \in \mathbb{Z}_+^n,\ m_1|k_1|+|k_2|+|k_3| \le 1,\quad k'' = (k_1,0,0).$

Доведення. Існування похідних від W_{13} та їх оцінки встановлюється аналогічно до попереднього. Відмінність полягає в тому, що перекидання похідних за змінною x_3 з ядра на густину Q_{13} неможливе. Розглянемо інтеграли

$$V_{\beta}^{k,s}(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_s}^{k_s}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$

$$0 \le \tau \le \beta \le t \le T,\ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ \ k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s},\ \ s \in \mathbb{N}_3.$$

Оцінимо їх за допомогою оцінок (3.107), (3.115) і нерівності (2.48). Маємо

$$|V_{\beta}^{k,s}(t,x;\tau,\xi)| \le |\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial_{x_s}^{k_s}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)||Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda| \le$$

$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-\hat{m}_s|k_s|}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\leq$$

$$\leq C(t-\beta)^{-\hat{m}_s|k_s|}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}I_0^{(1,03)}(x,\xi)\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-\hat{m}_s|k_s|}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0\leq\tau\leq\beta\leq t\leq T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{Z}_+^n,s\in\mathbb{N}_3. \qquad (3.131)$$

Перейдемо до доведення твердження **A**. Нехай $m_1|k_1|+|k_2|+|k_3|=1$. Доведемо формулу (3.127). Вона доводиться аналогічно до доведення відповідної формули з леми 3.6. Оцінимо доданки $W_{3j}^{11},j\in\mathbb{N}_4$. Зауважимо, що оцінка (3.131) є достатньою для встановлення оцінок доданків $W_{31}^{1s},s\in\mathbb{N}_3$. Справді

$$|W_{31}^{1s}|\leq\int\limits_{\tau}^{t_1}|V_\beta^{k,s}(t,x;\tau,\xi)|d\beta\leq C(t-\tau)^{-M}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t_1}(t-\beta)^{-\hat{m}_s|k_s|}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta\leq C(t-\tau)^{-M}(t-t_1)^{-\hat{m}_s|k_s|}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_s|k_s|+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),s\in\mathbb{N}_3,\hat{m}_1|k_1|+|k_2|+|k_3|=1. \quad (3.132)$$

Для встановлення оцінки другого доданка потрібна формула для повного приросту $\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}Q_3$. За допомогою оцінок (3.116) маємо

$$|\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|\leq|\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|+$$

$$+|\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|+|\Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|\leq C\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\leq C\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s^0}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi). \qquad (3.133)$$

$$|W_{32}^{11}|\leq\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial_x^{k''}G_3(t,x;\beta,\lambda)||\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda\leq$$

$$\leq\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s^0}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$

$$\times \sum_{j=s-1}^{s} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi) d\lambda \le C \sum_{s=1}^{3} (t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s^0} d\beta \times$$

$$\times \sum_{j=s-1}^{s} I_0^{(1,0j)}(x,\xi) \le C \sum_{s=1}^{3} (t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} (t-t_1)^{\hat{m}_s\gamma_s} (t-\tau)^{-M} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi) \le$$

$$\le C \sum_{s=1}^{3} (t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) \le C(t-\tau)^{-M-1+\gamma} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi),$$

де $\gamma = \min\{m_1\gamma_1, m_2\gamma_2, m_3\gamma_3\}$, $0 < c_0 < c$.

$$|W_{33}^{11}| \le \int_{t_1}^{t} |\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda| |Q_{13}(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi)| d\beta \le$$

$$\le C \int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi) d\beta \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

З оцінок доданків $W_{3j}^{11}, j \in \mathbb{N}_3$, маємо

$$|\partial_x^k W_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k+\gamma} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi), 0 \le \tau < t \le T,$$

$$\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}_+^n, m_1|k_1| = 1, |k_2| = |k_3| = 0, \gamma = \min\{m_1\gamma_1, m_2\gamma_2, m_3\gamma_3\}. \tag{3.134}$$

Перейдемо до оцінок доданків зображення (3.128). Почнемо з другого доданка. За допомогою оцінок (3.111), (3.116), нерівностей (2.35), (2.49) і (2.50) отримуємо

$$|W_{32}^{12}| \le$$

$$\le \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left| \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_2}^{k_2} G_3(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \right| \left| \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)} Q_3(\beta, \Lambda^{01}(t-\beta); \tau, \xi) \right| d\lambda_1 \le$$

$$\le C \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2(1-\gamma_2)} E_c^1(t-\beta, x_1-\lambda_1) |x_1-\lambda_1|^{\gamma_1^0} \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)} \big(E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{01}(t-\beta), \xi) +$$

$$+ E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{00}(t-\beta), \xi) \big) d\lambda_1 \le C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)} \times$$

$$\times \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_2(1-\gamma_2)+\hat{m}_1\gamma_1^0} d\beta \left(I_1^{(1,00)}(x,\xi) + I_1^{(1,01)}(x,\xi) \right) \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2(1-\gamma_2)+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi),$$

бо $1-\hat{m}_2(1-\gamma_2)+m_1\gamma_1^0>0$ для довільного $\gamma_1^0 \in [0,\gamma_1]$ і $\gamma_2>1/3$.

Аналогічно, використовуючи оцінки (3.107), (3.116) та нерівності (2.35) і (2.48), оцінюємо доданки W_{23}^{12} і W_{24}^{12}. Маємо

$$|W_{23}^{12}| \leq \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_2}^{k_2} G_{13}(t,x;\beta,\lambda)| |\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)| d\lambda \leq$$

$$\leq C \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-m_2} E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1} \sum_{j=1}^{2} E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi) \times$$

$$\times |X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2^0} (\beta-\tau)^{\hat{m}_2(\gamma_2-\gamma_2^0)} d\lambda \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1+m_2(\gamma_2-\gamma_2^0)} \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-m_2(1-\gamma_2^0)} d\beta \sum_{j=1}^{2} I_0^{(1,0j))}(x,\xi) \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2+\gamma_1} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

$$|W_{24}^{12}| \leq \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_2}^{k_2} G_{13}(t,x;\beta,\lambda)| |\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)| d\lambda \leq$$

$$\leq C \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-\hat{m}_2} E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1} \sum_{j=1}^{2} E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi) \times$$

$$\times |X_3(t-\beta)-\lambda_3|^{\gamma_3^0} (\beta-\tau)^{m_3(\gamma_3-\gamma_3^0)} d\lambda \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3(\gamma_3-\gamma_3^0)} \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_2+\hat{m}_3\gamma_s^0} d\beta 3 \sum_{j=1}^{3} I_0^{(1,0j)}(x,\xi) \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка W_{35}^{12} використовуємо (3.109), (3.115) і (2.43). Здобудемо

$$|W_{35}^{12}| \leq \int\limits_{t_1}^{t} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda \right| \left| Q_{13}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi) \right| d\beta \leq$$

$$\leq C\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-\hat m_2(1-\gamma_2)}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(\beta-\tau),\xi)d\beta$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-\hat m_2(1-\gamma_2)}d\beta E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat m_2(1-\gamma_2)+\hat m_3\gamma_3}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

З отриманих оцінок доданків випливає оцінка

$$|\partial_{x_2}^{k_2}W_{13}(t,x;\tau,\xi)|\leq C(t-\tau)^{-M-m_2+\bar\gamma}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{3.135}$$

де $0\leq\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |k_2|=1\ \bar\gamma=\min\{m_2\gamma_2,m_3\gamma_3\}$.

Залишилось оцінити доданки $W_{3j}^{13}, j\in\mathbb{N}_5$. Для першого доданка справджується оцінка (3.132). За допомогою оцінок (3.111), (3.116), нерівностей (2.35), (2.49) і (2.50) отримуємо

$$|W_{32}^{13}|\leq$$

$$\leq\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\left|\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\right|\left|\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)\right|d\lambda_1\leq$$

$$\leq C\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^{n_1}}(t-\beta)^{-\hat m_1n_1-\hat m_3(1-\gamma_3)}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times\left(E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{01}(t-\beta),\xi)+E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{00}(t-\beta),\xi)\right)d\lambda_1\leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_1\gamma_1^0}d\beta\left(I_1^{(1,00)}(x,\xi)+I_1^{(1,01)}(x,\xi)\right)\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_1\gamma_1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

бо $-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_1\gamma_1>0$ для довільного $\gamma_1\in[0,1]$ і $\gamma_2>1/3$.

Аналогічно, використовуючи оцінки (3.107), (3.116) та нерівності (2.35) і (2.50), оцінюємо доданки W_{33}^{13} і W_{34}^{13}. Маємо

$$|W_{33}^{13}|\leq\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\left|\int_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_3\right|\times$$

$$\times \left| \Delta^{\Lambda^{01}(t-\beta)}_{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{13}(\beta, \Lambda^{02}(t-\beta); \tau, \xi) \right| d\lambda_1 d\lambda_2 \le C \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_c^{2,1}(t-\beta, x_1-\lambda_1) E_c^{2,2}(t-\beta, X_2(t-\beta)-\lambda_2) |X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2} \times$$

$$\times (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)} (\beta-\tau)^{-M-1} \sum_{j=1}^{2} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi) d\lambda_1 d\lambda_2 \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-M-1} \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)+\hat{m}_2\gamma_2} d\beta \sum_{j=1}^{2} I_2^{(1,0j)}(x_1, x_2, \xi) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)+\hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

$$|W_{34}^{13}| \le \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \partial_{x_3}^{k_3} G_{13}(t, x; \beta, \lambda) d\lambda_3 \right| \left| \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{13}(\beta, \lambda; \tau, \xi) \right| d\lambda \le$$

$$\le C \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-\hat{m}_3} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) |X_3(t-\beta)-\lambda_3|^{\gamma_3} \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1} \sum_{j=2}^{3} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi) d\lambda \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-M-1} \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)} d\beta \sum_{j=2}^{3} I_0^{(1,0j)}(x, \xi) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_0}(t-\tau, x, \xi).$$

Для оцінки доданка W_{35}^{13} використовуємо (3.109), (3.115) і (2.43). Здобудемо

$$|W_{35}^{13}| \le \int\limits_{t_1}^{t} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t, x; \beta, \lambda) d\lambda \right| |Q_3(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi)| \, d\beta \le$$

$$\le C \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)} (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(\beta-\tau), \xi) d\beta$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)}d\beta E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3(1-\gamma_3)+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

оскільки $-\hat{m}_3(1-\gamma_3)>0$, якщо $\gamma_3>3/5$.

З отриманих оцінок доданків випливає оцінка

$$|\partial_{x_3}^{k_3}W_{13}(t,x;\tau,\xi)|\leq C(t-\tau)^{-M-m_3|k_3|+\gamma}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{3.136}$$

де $0\leq\tau<t\leq T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{Z}_+^n,k_1=k_2=0,|k_3|=1,\ \gamma=$ $=\min\{m_1\gamma_1,m_2\gamma_2,m_3\gamma_3\}$.

Оцінки (3.129) встановлено. З отриманих оцінок (3.135)–(3.136) випливають оцінки (3.127).►

Результати заключного етапу побудови класичного ФРЗК підсумовано в наступній теоремі.

Теорема 3.3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.60) *виконуються умови* (A_{11}), (A_{12}) *і* (A_{15}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_{13} *і справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_{13}(t,x;\tau,\xi)|\leq C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n,\hat{m}_1|k_1|+|k_2|+|k_3|\leq 1\}; \tag{3.137}$$

$$|SZ_{13}(t,x;\tau,\xi|\leq C(t-\tau)^{-M-1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{3.138}$$

$$0\leq\tau<t\leq T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Доведення. Існування класичного ФРЗК Z_{13} для рівняння (1.60), його оцінки і оцінки похідних від Z_{13} за просторовими змінними і похідної S випливають із означення (1.61) та леми 3.7 і леми 3.9. ►

Розглянемо питання існування Лі-ФРЗК. Для цього слід показати, що похідна Лі S_L від Z_{13} існує в кожній точці $t,x)\in\Pi_{(0,T]}$. Оскільки використовується поетапний метод Леві, згідно з яким за параметрикс на кожному етапі береться ФРЗК, який побудований на попередньому етапі. За виконання умов

(A_{11}) і (A_{12}) на підставі теореми 2.1 існує $S_L Z_{10}$, а, отже, існує похідна Лі від параметриксу G_{11}. Припустимо, за індукцією, що для параметриксу G_{13} існує SG_{13} справджується оцінка

$$|SG_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T,\ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.139}$$

Доведемо існування похідної Лі від об'ємного потенціалу W_{13}. Існування похідних Лі від потенціалів W_{11} і W_{12} проводяться аналогічно. Для цього розглянемо множину функцій, які залежать від параметра ε:

$$W_{13}^{\varepsilon}(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$
$$0 < \varepsilon < \tau < t \le T,\ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.140}$$

Запишемо

$$h^{-1}\left(W_{13}^{\varepsilon}(t+h,X(h);\tau,\xi) - W_{13}^{\varepsilon}(t,x;\tau,\xi)\right) =$$
$$= \int\limits_{\tau}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} h^{-1}\left(G_{13}(t+h,X(h);\beta,\lambda) - G_{13}(t,x;\beta,\lambda)\right) Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$
$$+ \int\limits_{t-\varepsilon}^{t+h-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} h^{-1} G_{13}(t+h,X(h);\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda =: J_1^h + J_2^h$$

і знайдемо границі інтегралів J_1^h, J_2^h при $h \to 0$. Маємо

$$\lim_{h\to 0} J_1^h = \int\limits_{\tau}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

В інтегралі J_2^h зробимо заміну змінної за формулою $\gamma = h^{-1}(\beta - t + \varepsilon)$, тоді

$$J_2^h = \int\limits_0^1 d\gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{13}(t+h,X(h);h\gamma+t-\varepsilon,\lambda)Q_{13}(h\gamma+t-\varepsilon,\lambda;\tau,\xi)d\lambda$$

і

$$\lim_{h\to 0} J_2^h = \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_{13}(t,x;t-\varepsilon,\lambda)Q_{13}(t-\varepsilon,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

Отже,

$$S_L W_{13}^{\varepsilon}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_{13}(t,x;t-\varepsilon,\lambda)Q_{13}(t-\varepsilon,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t_1(\varepsilon)} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (A_1(t,(x_1,x_2,\lambda_3),\partial_{x_1}) - A_1(t,x,\partial_{x_1}))\times$$

$$\times G_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} A_1(t,x,\partial_{x_1})G_{13}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} A_1(t,x,\partial_{x_1})G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda Q_{13}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)\right) d\beta =:$$

$$=: \sum_{j=1}^{5} K_{3j}^{\varepsilon},\ 0<\varepsilon<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ t_1(\varepsilon) := (t+\tau-\varepsilon)/2. \quad (3.141)$$

Враховуючи властивість параметриксу G_{13}, маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K_{31}^{\varepsilon} = Q_{13}(t,x;\tau,\xi),\ \ 0\le\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \quad (3.142)$$

Оцінимо доданки $K_{3j}^{\varepsilon},\ j\in\mathbb{N}_5$. За допомогою оцінок (3.139), (3.115) і нерівності (2.48), маємо

$$|K_{32}^{\varepsilon}| \le C\int\limits_{\tau}^{t_1(\varepsilon)} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le C(t-t_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{\tau}^{t_1(\varepsilon)} (\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} I_0^{(1,00)}(x;\xi)d\beta \le C(t-\tau+\varepsilon)^{-1}(t-\tau)^{-M}\times$$

$$\times(t-\tau-\varepsilon)^{\hat{m}_3\gamma_3}E_{c_1}^{(1)}(t-\tau,x,\xi),\ 0<\varepsilon<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_1<c. \quad (3.143)$$

За допомогою умови (1.13), оцінок (3.107), (3.115) і нерівностей (2.35), (2.48) отримаємо

$$|K_{33}^{\varepsilon}| \leq C \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left((t-\beta)^{-M-1}+(t-\beta)^{-M-1/2}+(t-\beta)^{-M}\right)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times\left(|t-\beta|^{\hat{m}_3\gamma_3}+|X_3(t-\beta)-\lambda_3|^{\gamma_3}\right)E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \leq$$

$$\leq C \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} ((t-\beta)(\beta-\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} I_0^{(1,00)}(x;\xi)d\beta \leq C(t-\tau)^{-M}E_{c_1}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} ((t-\beta)(\beta-\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta,\ 0<\varepsilon<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n\ 0<c_1<c. \tag{3.144}$$

Беручи до уваги обмеженість коефіцієнтів, оцінки (3.107), (5.144) і нерівності (2.35), (2.48) одержуємо

$$|K_{34}^{\varepsilon}| \leq C \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left((t-\beta)^{-M-1}+(t-\beta)^{-M-1/2}+(t-\beta)^{-M}\right)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)d\lambda \leq$$

$$\leq C \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} \sum_{s=1}^{3}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}\sum_{j=s-1}^{s} I_0^{(1,0j)}(x;\xi)d\beta \leq$$

$$\leq C \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} (t-\beta)^{\gamma}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta(t-\tau)^{-M}E_{c_1}^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0<\varepsilon<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_1<c,\ \gamma=\min\{\hat{m}_1\gamma_1,\hat{m}_2\gamma_2,\hat{m}_3\gamma_3.\} \tag{3.145}$$

Оцінку доданка K_{35}^{ε} проводимо аналогічно за допомогою припущення (A_{11}), оцінок (3.109),(3.115) і нерівності (2.43). Маємо

$$|K_{35}^{\varepsilon}| \leq C \int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta \leq$$

$$\le C(t-\tau)^{-M}\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta E_{c_1}^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0<\varepsilon<\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ 0<c_1<c. \tag{3.146}$$

З оцінок (3.143) – (4.157), співвідношення (3.142) випливає існування $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}K_{3j}^{\varepsilon},\ j\in\mathbb{N}_5$, формула для похідної Лі від W_{13}

$$S_LW_{13}(t,x;\tau,\xi)=Q_{13}(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}SG_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}SG_{13}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}SG_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta \tag{3.147}$$

та оцінки

$$|S_LW_{13}(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c_1}^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ 0<c_1<c. \tag{3.148}$$

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 3.4. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.60) *виконуються умови* (A_{11}) *і* (A_{12}) *в яких числа* γ_1, γ_2 *і* γ_3 *—довільні з проміжку* $(0,1)$. *Тоді для цього рівняння існує Лі-ФРЗК* Z_{13} *і справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_{13}(t,x;\tau,\xi;y_3|\le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n,\hat{m}_1|k_1|+\hat{m}_2|k_2|+\hat{m}_3|k_3|\le 1\}; \tag{3.149}$$

$$|S_LZ_{13}(t,x;\tau,\xi|\le C(t-\tau)^{-M-1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{3.150}$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Зауважимо, що аналогічно до доведення існування похідної Лі від Z_{13} доводиться існування та оцінки ∂_tZ_{13}. Правильне таке твердження:

Теорема 3.5. *За умов теореми 3.3 існує похідна* ∂_tW_{13} *яка визначається* *формулою*

$$\partial_t W_{13}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G_{13}(t,x;\beta,\lambda) Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_t G_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\tau)} Q_{13}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi) d\lambda_1 +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_t G_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_3 \right) \Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi) d\lambda_1 d\lambda_2 +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G_{13}(t,x;\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_3(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, X(t-\tau);\tau,\xi) d\beta + Q_3(t,x;\tau,\xi), \quad (3.151)$$

і справджуються оцінки

$$\partial_t Z_{13}(t,x;\tau,\xi| \le C(t-\tau)^{-M-1} \left(1 + (t-\tau)^{-\hat{m}_1}|x_1| + (t-\tau)^{-\hat{m}_1}|x_2|\right) \times$$

$$|E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi),\ 0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (3.152)$$

3.4. Оцінки приростів похідних ФРЗК для основного рівняння

Основні результати підрозділу містяться в наступній теоремі.

Теорема 3.6. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.60) *виконуються умови* (A_{11})*,* (A_{12}) *і* (A_{15})*. Тоді справджуються такі оцінки:*

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_l}^{k_l} Z_{13}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l\gamma_l - \hat{m}_{l-1})} (t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s} \times$$

$$\times \left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right), 0 < \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s},\ \{l,s\} \subset \mathbb{N}_3,\ \hat{m}_1|k_1| = |k_2| = |k_3| = 1,\ \hat{m}_0 \equiv 0; \quad (3.153)$$

Доведення. Класичний ФРЗК Z_{13} для рівняння (1.60) визначається формулою (1.61), тобто $Z_{13} = G_{13} + W_{13}$. Оцінки приростів похідних за просторовими змінними параметриксу G_{13} визначаються формулами (3.108). Тому для доведення теореми досить встановити оцінки для похідних від об'ємного потенціалу W_{13}.

Оцінки приростів старших похідних за просторовими змінними досить провести за умови $|x_s-z_s|^{1/m_s}<(t-\tau)/4,\ \ s\in\mathbb{N}_3$. На підставі (3.127) запишемо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{13}(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{z_1}^{k_1}G_{13}(t,z^{(1)};\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{Z^{(1)}(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+$$

$$+\int\limits_{\eta_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+$$

$$-\int\limits_{\eta_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{13}(t,z^{(1)};\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\beta,Z^{(1)}(t-\beta);\tau,\xi)d\beta=:\sum_{j=1}^{7}D_{3j}^1;\quad(3.154)$$

$$|D_{31}^1|\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-t_1)^{-1-\hat{m}_1\gamma_1}\int\limits_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta I_0^{(1,03)}(x,\xi)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Використовуючи зображення

$$G_{13}(t,x;\beta,\lambda)=G_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))+W_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))+W_{12}(t,x;\beta,\lambda;\lambda_3), \tag{3.155}$$

подамо другий доданок з (3.154) у вигляді суми

$$D_{32}^{1}=D_{32}^{11}+D_{32}^{12}+D_{32}^{13},$$

де

$$D_{32}^{11}:=\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda;$$

$$D_{32}^{12}:=\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda;$$

$$D_{32}^{13}:=\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{12}(t,x;\beta,\lambda;\lambda_3)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

Оцінимо D_{32}^{11} за допомогою оцінок (3.2) при $\gamma_1^0>\gamma_1$ і оцінок (3.116) при $\gamma_s^0=\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1,\ s\in\mathbb{N}_3$.

$$|D_{32}^{11}|\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1^0}\big(E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)+E_c^{(1)}(t-\beta,z^{(1)},\lambda)\big)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s-\hat{m}_1\gamma_1}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}J_1(\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0))\sum_{s=1}^{3}(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s-\hat{m}_1\gamma_1}\sum_{j=0}^{2}\big(I_0^{(1,0j)}(x,\xi)+I_0^{(1,0j)}(z^{(1)},\xi)\big)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\big).$$

Доданок D_{32}^{12} оцінюємо за допомогою оцінок (3.36) при $\gamma_1^0=\gamma_1$ і оцінок (3.116) при $\gamma_s^0=\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1,\ s\in\mathbb{N}_3$. Маємо

$$|D_{32}^{12}|\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}\big(E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)+E_c^{(1)}(t-\beta,z^{(1)},\lambda)\big)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s-\hat{m}_1\gamma_1}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)\le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} J_1(\hat{m}_1\gamma_1) \sum_{s=1}^{3} (t_1 - \tau)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s - \hat{m}_1\gamma_1} \sum_{j=0}^{2} \big(I_0^{(1,0j)}(x,\xi) + I_0^{(1,0j)}(z^{(1)},\xi)\big) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (t-\tau)^{-M-1+\gamma} \big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, z^{(1)}, \xi)\big),$$

де γ — таке як вище.

Доданок D_{32}^{13} оцінюємо аналогічно до D_{32}^{12}, тільки замість оцінок (3.36) використовуємо оцінки (3.94) при $\tau = \beta$, $\xi = \lambda$, $y_3 = \lambda_3$. З оцінок доданків D_{32}^{1j}, $j \in \mathbb{N}_3$, випливає оцінка

$$|D_{32}^{1}| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (t-\tau)^{-M-1} \big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, z^{(1)}, \xi)\big) \quad (3.156)$$

Доданки D_{33}^{1} і D_{34}^{1} оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D_{33}^{1}| \le C \int_{\eta_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) \sum_{s=1}^{3} |X_s(t-\beta) - \lambda_s|^{\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s - \hat{m}_1\gamma_1} \sum_{j=s-1}^{s} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta); \xi) \le$$

$$\le C \int_{\eta_1}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} d\beta \sum_{s=1}^{3} (t_1 - \tau)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s - \hat{m}_1\gamma_1} \sum_{j=0}^{2} \big(I_0^{(1,0j)}(x,\xi) +$$

$$+ I_0^{(1,0j)}(z^{(1)},\xi)\big) \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (t-\tau)^{-M-1} \big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, z^{(1)}, \xi)\big),$$

Доданок D_{35}^{1} оцінюємо подібно до D_{32}^{1}. За допомогою (3.155) подамо цей доданок у вигляді суми

$$D_{35}^{1} = D_{35}^{11} + D_{35}^{12} + D_{35}^{13},$$

де

$$D_{35}^{11} := \int_{t_1}^{\eta_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} G_{11}(t, x; \beta, \lambda; (\lambda_2, \lambda_3)) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi) d\beta;$$

$$D_{35}^{12} := \int_{t_1}^{\eta_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} W_{11}(t, x; \beta, \lambda; (\lambda_2, \lambda_3)) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi) d\beta;$$

$$D_{35}^{13} := \int_{t_1}^{\eta_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} W_{12}(t, x; \beta, \lambda; \lambda_3) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi) d\beta.$$

Оцінимо D_{35}^{11} за допомогою оцінок (3.2) при $\gamma_1^0 > \gamma_1$ і оцінок (3.115). Маємо

$$|D_{35}^{11}| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} \int\limits_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)} \big(E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) +$$

$$+ E_c^{(1)}(t-\beta, z^{(1)}, \lambda)\big) d\lambda (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} J_1(\hat{m}_1(\gamma_1 - \gamma_1^0))(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1\hat{m}_3\gamma_3}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, z^{(1)}, \xi)\big).$$

Зауважимо, що при $\beta \in [t_1, \eta_1]$ справджується оцінка

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} W_{11}(t, x; \beta, \lambda; (\lambda_2, \lambda_3))| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

За допомогою цієї оцінки оцінюємо доданок D_{35}^{12}

$$|D_{35}^{12}| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \int\limits_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi) d\lambda \times$$

$$\times E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta); \xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} J_1(\hat{m}_1\gamma_1)(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

Доданок D_{35}^{13} оцінюємо аналогічно до D_{35}^{12}, тільки замість оцінок (3.36) використовуємо оцінки (3.94) при $\tau = \beta$, $\xi = \lambda$, $y_3 = \lambda_3$. З оцінок доданків D_{35}^{1j}, $j \in \mathbb{N}_3$, випливає

$$|D_{35}^{1}| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, z^{(1)}, \xi)\big) \quad (3.157)$$

Доданки D_{36}^1, D_{37}^1 оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D_{36}^{1}| \le C \int\limits_{\eta_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi) d\beta \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \int\limits_{\eta_1}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} d\beta E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

З оцінок доданків $D^1_{3j},\ j\in\mathbb{N}_7$, випливає така оцінка:

$$\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_1}_{x_1}W_{13}(t,x;\tau,\xi)|\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\big(E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,x,\xi)+E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\big). \qquad (3.158)$$

Перейдемо до оцінок приростів за змінною x_2. Запишемо таке зображення:

$$\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}W_{13}(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_2}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\Bigg)\Delta^{X(t-\beta)}_{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_2}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)\Bigg(\Delta^{\Lambda^{01}(t-\beta)}_{\Lambda^{02}(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\Delta^{X(t-\beta)}_{\lambda}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)\Bigg)d\lambda+\int\limits_{\eta_2}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{k_1}_{x_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)\Delta^{X(t-\beta)}_{\lambda}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_2}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{k_1}_{z_1}G_{13}(t,z^{(2)};\beta,\lambda)\Delta^{Z^{(2)}(t-\beta)}_{\lambda}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_2}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_1}_{x_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\Bigg)Q_{13}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+$$

$$+\int\limits_{\eta_2}^{t}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\Bigg)Q_{13}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+$$

$$-\int\limits_{\eta_2}^{t}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{k_1}_{x_1}G_{13}(t,z^{(2)};\beta,\lambda)d\lambda\Bigg)Q_{13}(\beta,Z^{(2)}(t-\beta);\tau,\xi)d\beta=:\sum_{j=1}^{8}D^2_{3j}; \quad (3.159)$$

$$|D^2_{31}|\le C|x_2-z_2|^{\gamma_2}\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat m_2\gamma_2}E^{(1)}_c(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}\times$$

$$\times E^{(1)}_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|x_2-z_2|^{\gamma_2}(t-t_1)^{-1-\hat m_2\gamma_2}\int\limits_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-1+\hat m_3\gamma_3}d\beta I^{(1,03)}_0(x,\xi)\le$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_2\gamma_2}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Другий доданок оцінюємо за допомогою оцінок (3.112), (3.116) при $\gamma_2^0 = \gamma_2$ і нерівностей (2.49). Маємо

$$|D_{32}^2| \leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}\int\limits_{t_1}^{\eta_2} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - 1 - \hat{m}_2\gamma_2}E_c^{2,1}(t-\beta, x_1 - \lambda_1)|x_1 - z_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\leq (\beta-\tau)^{-M-1}\sum_{j=0}^{1} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)d\lambda_1 \leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}(t_1-\tau)^{-1}J_2(\hat{m}_1\gamma_1 - \hat{m}_2\gamma_2)\sum_{s=0}^{1} I_1^{(1,0j)}(x_1,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(2)},\xi)\big).$$

За допомогою рівності

$$G_{13}(t,x;\beta,\lambda) = G_{12}(t,x;\beta,\lambda;\lambda_3) + W_{12}(t,x;\beta,\lambda;\lambda_3),$$

маємо $D_{33}^2 = D_{33}^{21} + D_{33}^{22}$.

Перший доданок суми оцінюємо за допомогою оцінок (3.108) при $\gamma_2^0 > \gamma_2$ і (3.116) при $\gamma_s^0 = (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2,\ s \in \{2,3\}$.

$$D_{33}^{21} \leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0}\int\limits_{t_1}^{\eta_2} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_2\gamma_2^0}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times\sum_{s=2}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2}\sum_{j=s-1}^{s}\Bigg(E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)+$$

$$+E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{2j}(t-\beta),\xi)\Bigg)\leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0}(t_1-\tau)^{-1}J_2(\hat{m}_2(\gamma_2-\gamma_2^0))\sum_{j=s-1}^{s}\Bigg(I_0^{(1,0j)}(x,\xi) + I_0^{(1,0j)}(z^{(2)},\xi)\Bigg)\leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(2)},\xi)\big).$$

Аналогічно за допомогою оцінок (3.94) при $\gamma_2^0 = \gamma_2$ і (3.116) при $\gamma_s^0 =$

$= (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2,\ s \in \{2,3\}$, оцінюємо другий доданок.

$$D_{33}^{22} \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} \int\limits_{t_1}^{\eta_2} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda)(\beta-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times \sum_{s=2}^{3} |X_s(t-\beta) - \lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2} \sum_{j=s-1}^{s} \Big(E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi) +$$

$$+ E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{2j}(t-\beta), \xi) \Big) \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}(t_1-\tau)^{-1} J_2(\hat{m}_2\gamma_2) \sum_{j=s-1}^{s} \Big(I_0^{(1,0j)}(x,\xi) + I_0^{(1,0j)}(z^{(2)},\xi) \Big) \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} \big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, z^{(2)}, \xi) \big).$$

Отже, справджується оцінка

$$|D_{33}^2| \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}(t-\tau)^{-M-1} \big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, z^{(2)}, \xi) \big).$$

Оцінимо D_{34}^2. За допомогою оцінок (3.107) і (3.116) при $\gamma_s^0 = (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2,\ s \in$ $\in \{2,3\}$, маємо

$$D_{34}^{22} \le C \int\limits_{\eta_2}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda)(\beta-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{3} |X_s(t-\beta) - \lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2} \sum_{j=s-1}^{s} \Big(E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi) +$$

$$+ E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{2j}(t-\beta), \xi) \Big) \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1} J_2(\hat{m}_1\gamma_1) \sum_{j=s-1}^{s} \Big(I_0^{(1,0j)}(x,\xi) + I_0^{(1,0j)}(z^{(2)},\xi) \Big) \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} \big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, z^{(2)}, \xi) \big).$$

Доданок D_{35}^2 має аналогічну оцінку. Оцінимо D_{36}^2 за допомогою (3.112) при $\gamma_2^0 < \gamma_2$ і (3.115).

$$D_{36}^2 \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \int\limits_{\eta_2}^{t} (t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_2(\gamma_2-\gamma_2^0)}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi) d\beta \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0}(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times \int\limits_{\eta_2}^{t} (t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_2(\gamma_2-\gamma_2^0)} d\beta E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_2-z_2|^{\gamma_2}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

За допомогою оцінок (3.112) і (3.115) оцінимо D_{37}^2

$$D_{37}^2 \leq C \int\limits_{\eta_2}^{t} (t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \int\limits_{\eta_2}^{t} (t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1} d\beta E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_2-z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Доданок D_{38}^2 має аналогічну оцінку. З оцінок доданків D_{3j}^2, $j \in \mathbb{N}_8$, випливає така оцінка:

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1} W_{13}(t,x;\tau,\xi)| \leq C|x_2-z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(2)},\xi)\big). \tag{3.160}$$

Для того, щоб встановити оцінки приростів за змінною x_3, використовуватимемо таке зображення:

$$\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1} W_{13}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_3} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \Bigg) \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_3} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_3 \Bigg) \Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{\eta_3}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{13}(t,x;\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda -$$

$$-\int\limits_{\eta_3}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{13}(t,z^{(3)};\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{Z^{(3)}(t-\beta)} Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_3}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+$$

$$+\int\limits_{\eta_3}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{13}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta-$$

$$-\int\limits_{\eta_3}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{13}(t,z^{(3)};\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\beta,Z^{(3)}(t-\beta);\tau,\xi)d\beta=:\sum_{j=1}^{8}D_{3j}^{3};\quad(3.161)$$

$$|D_{31}^3|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(t-t_1)^{-1-\hat{m}_3\gamma_3}\int\limits_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta I_0^{(1,03)}(x,\xi)\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(t-\tau)^{-M-1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Другий доданок оцінюємо за допомогою оцінок (3.112), (3.116) при $\gamma_3^0=\gamma_3$ і нерівностей (2.49). Маємо

$$|D_{32}^3|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}\int\limits_{t_1}^{\eta_3}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}(t-\beta)^{-\hat{m}_1n_1-1-\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)|x_1-z_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\le(\beta-\tau)^{-M-1}\sum_{j=0}^{1}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)d\lambda_1\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(t_1-\tau)^{-1}J_3(\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_3\gamma_3)\sum_{s=0}^{1}I_1^{(1,0j)}(x_1,\xi)\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(2)},\xi)\big).$$

Доданок D_{33}^3 оцінюємо за допомогою оцінок (3.114) при $\gamma_3^0=\gamma_3$, (3.116) при $\gamma_2^0=\gamma_2$ і нерівностей (2.49).

$$|D_{33}^3|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}\int\limits_{t_1}^{\eta_3}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}(t-\beta)^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_2n_2-1}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times E_c^{2,2}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2}(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times \sum_{s=1}^{2} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)d\lambda_1 d\lambda_2 \leq$$

$$\leq C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(t_1-\tau)^{-1}J_3(\hat{m}_2\gamma_2)\sum_{s=1}^{2} I_2^{(1,0j)}(x_1,x_2;\xi) \leq$$

$$\leq C|x_3-z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\big).$$

Доданки D_{34}^3 і D_{35}^3 оцінюються однаково. Оцінимо D_{34}^3. За допомогою оцінок (3.107) і (3.116) при $\gamma_s^0=(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1,\ s\in\mathbb{N}_3$, маємо

$$|D_{34}^3| \leq C\int\limits_{\eta_3}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times \sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)d\lambda \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1}\int\limits_{\eta_3}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=s-1}^{s}I_0^{(1,0j)}(x;\xi) \leq$$

$$\leq C|x_3-z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Доданок D_{36}^3 оцінюємо аналогічно за допомогою оцінок (3.112) при $\gamma_3^0>\gamma_3$ і (3.115). Маємо

$$|D_{36}^3| \leq C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}\int\limits_{t_1}^{\eta_3}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_3(\gamma_3-\gamma_3^0)}E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi) \leq$$

$$\leq C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}J_3(\hat{m}_3(\gamma_3-\gamma_3^0))E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_3-z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Доданки D_{37}^3 і D_{38}^3 оцінюються однаково. За допомогою оцінок (3.107) і (3.115) оцінимо перший з них.

$$|D_{37}^3| \leq C\int\limits_{\eta_3}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta_3}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(t-\tau,x),\xi) \leq$$

$$\leq C|x_3 - z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

З оцінок доданків D_{3j}^3, $j \in \mathbb{N}_8$, випливає оцінка

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1}W_{13}(t, x; \tau, \xi)| \leq C|x_3 - z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, z^{(1)}, \xi)\big). \qquad (3.162)$$

За допомогою формул (3.128) і (3.129) запишемо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}W_{13}(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}G_{13}(t, x; \beta, \lambda)Q_{13}(\beta, \lambda; \tau, \xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}G_{13}(t, x; \beta, \lambda)d\lambda_2 d\lambda_3\Bigg)\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta, \Lambda^{01}(t-\beta); \tau, \xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_l}^{k_l}G_{13}(t, x; \beta, \lambda)d\lambda_2 d\lambda_3\Bigg)\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta, \Lambda^{01}(t-\beta); \tau, \xi)d\lambda_1$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_l}^{k_l}G_{13}(t, z^{(s)}; \beta, \lambda)d\lambda_2 d\lambda_3\Bigg)\Delta_{\Lambda^{s1}(t-\beta)}^{Z^{(s)}(t-\beta)}Q_{13}(\beta, \Lambda^{s1}(t-\beta); \tau, \xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}G_{13}(t, x; \beta, \lambda)d\lambda_3\Bigg)\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{13}(\beta, \Lambda^{02}(t-\beta); \tau, \xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_l}^{k_l}G_{13}(t, x; \beta, \lambda)d\lambda_3\Bigg)\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{13}(\beta, \Lambda^{02}(t-\beta); \tau, \xi)d\lambda_1 -$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_l}^{k_l}G_{13}(t, z^{(s)}; \beta, \lambda)d\lambda_3\Bigg)\Delta_{\Lambda^{s2}(t-\beta)}^{\Lambda^{s1}(t-\beta)}Q_{13}(\beta, \Lambda^{s2}(t-\beta); \tau, \xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}G_{13}(t, x; \beta, \lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)}Q_{13}(\beta, \lambda; \tau, \xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_l}^{k_l}G_{13}(t, x; \beta, \lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)}Q_{13}(\beta, \lambda; \tau, \xi)d\lambda -$$

$$
-\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_l}^{k_l} G_{13}(t, z^{(s)}; \beta, \lambda) \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{s2(t-\beta)}(t-\beta)} Q_{13}(\beta, \lambda; \tau, \xi) d\lambda +
$$

$$
+\int\limits_{t_1}^{\eta_s} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_l}^{k_l} G_{13}(t, x; \beta, \lambda) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi) d\beta +
$$

$$
+\int\limits_{\eta_s}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_l}^{k_l} G_{13}(t, x; \beta, \lambda) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi) d\beta -
$$

$$
-\int\limits_{\eta_s}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_l}^{k_l} G_{13}(t, z^{(s)}; \beta, \lambda) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, Z^{(s)}(t-\beta); \tau, \xi) d\beta =:
$$

$$
=: \sum_{j=1}^{13} D_{3j}^{ls}, \;\; l \in \{2, 3\}, \;\; s \in \mathbb{N}_3.
$$

Доданок D_{31}^{ls} оцінюємо за допомогою оцінок (3.112), (3.115) і нерівностей (2.49). Маємо для $l \in \{2, 3\}, \;\; s \in \mathbb{N}_3$

$$
|D_{31}^{ls}| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times
$$

$$
\times E_c^{(1)}(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (t-t_1)^{-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s} \int\limits_{\tau}^{t} (\beta-\tau)^{-\hat{m}_l+\hat{m}_3\gamma_3} d\beta \times
$$

$$
\times I_0^{(1,03)}(x, \xi) \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (t-\tau)^{-M-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).
$$

Другий доданок оцінюємо за допомогою оцінок (3.112), (3.116) при $\gamma_s^0 = \gamma_s$ і нерівностей (2.49).

$$
|D_{32}^{ls}| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_l(1-\gamma_l) - \hat{m}_s\gamma_s} E_c^{2,1}(t-\beta, x_1 - \lambda_1) |x_1 - \lambda_1|^{\gamma_1} \times
$$

$$
\times (\beta-\tau)^{-M-1} \left(E_c^{(1)}(\beta-\tau, \Lambda^{01}(t-\tau), \xi) + E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\tau), \xi) \right) d\lambda_1 \leq
$$

$$
\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (t_1-\tau)^{-l} J_s(\gamma_{ls}) \left(I_1^{(1,01)}(x_1, \xi) + I_1^{(1,00)}(x_1, \xi) \right), \tag{3.163}
$$

де $\gamma_{ls} = 1 + \hat{m}_1\gamma_1 - \hat{m}_l(1-\gamma_l) - \hat{m}_s\gamma_s, \;\; l \in \{2, 3\}, \;\; s \in \mathbb{N}_3$.

Щоб оцінити (3.163) використовуватимемо нерівності

$$|x_s - z_s|^{\gamma_s} J_s(\gamma_{ls}) \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s-(\hat m_s)^{-1}\hat m_{s-1}}(t-\tau)^{\hat m_{s-1}+\gamma_{ls}},\ \{l,s\}\subset \mathbb{N}_3 \quad (3.164)$$

За умов (A_{12}) справджуються нерівності $\gamma_s - (\hat m_s)^{-1}\hat m_{s-1} > 0$, $s\in\mathbb{N}_3$, $\hat m_0 \equiv 0$ і $\hat m_{s-1}+\gamma_{ls} > 0$, $\{l,s\}\subset\mathbb{N}_3$. Тому $|x_s - z_s|^{\gamma_s}J_s(\gamma_{ls}) \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}|x_s-z_s|^{\gamma_{ls}} =$ $= C|x_s-z_s|^{\gamma_s-(\hat m_s)^{-1}\hat m_{s-1}}|x_s-z_s|^{(\hat m_s)^{-1}\hat m_{s-1}+\gamma_{ls}} \le |x_s-z_s|^{\gamma_s-(\hat m_s)^{-1}\hat m_{s-1}}(t-\tau)^{\hat m_{s-1}+\gamma_{ls}}$, і нерівність (3.164) доведено. Отже, з (3.163) і (3.164), маємо

$$|D_{32}^{ls}| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s-(\hat m_s)^{-1}\hat m_{s-1}}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_{s-1}+\gamma_{ls}}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Доданки D_{33}^{ls}, D_{34}^{ls} оцінюються однаково. За допомогою оцінок (3.111), (3.116) і нерівностей (2.49) оцінимо перший з них.

$$|D_{33}^{ls}| \le C\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-\hat m_1 n_1-\hat m_l(1-\gamma_l)}|x_1-z_1|^{\gamma_1}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}\times\left(E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{01}(t-\tau),\xi)+E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(t-\tau),\xi)\right)d\lambda_1 \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1+\hat m_3\gamma_3}\left(I_1^{(1,01)}(x_1,\xi)+I_1^{(1,00)}(x_1,\xi)\right)\int\limits_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-\hat m_l(1-\gamma_l)+\hat m_1\gamma_1}d\beta \le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s-(\hat m_s)^{-1}\hat m_{s-1}}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_{s-1}+\gamma_{ls}}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Оцінимо D_{35}^{ls}. Для цього використаємо оцінки (3.114), (3.116) і (2.50). Для $s\in$ $\in\mathbb{N}_3$ маємо для $l=2$ і $s\in\mathbb{N}_3$

$$|D_{35}^{2s}| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}(t-\beta)^{-\hat m_1 n_1-\hat m_2 n_2-\hat m_2-\hat m_s\gamma_s}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2}E_c^{2,2}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 \le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-1}J_s(\hat m_2\gamma_2-\hat m_1-\hat m_s\gamma_s)\times$$

$$\times\left(I_2^{(1,01)}(x_1,x_2;\xi)+I_2^{(1,00)}(x_1,x_2;\xi)\right)\le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{(\hat m_s)^{-1}(\hat m_2\gamma_2-\hat m_1)}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Аналогічно оцінюємо у випадку $l=3$ і $s\in\mathbb{N}_3$

$$|D_{35}^{3s}|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}(t-\beta)^{-\hat m_1n_1-\hat m_2n_2-\hat m_3(1-\gamma_3)-\hat m_s\gamma_s}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2}E_c^{2,2}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-1}J_s(1-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_2\gamma_2-\hat m_s\gamma_s)\times$$
$$\times\left(I_2^{(1,01)}(x_1,x_2;\xi)+I_2^{(1,00)}(x_1,x_2;\xi)\right)\le$$
$$\le C\begin{cases}|x_2-z_2|^{\gamma_2}(t-\tau)^{-M-1-\hat m_2+\hat m_3\gamma_3+\hat m_2\gamma_2}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), & \text{при } l=2,\\ |x_3-z_3|^{(\hat m_s)^{-1}(\hat m_3\gamma_3-\hat m_2)}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3+\hat m_2\gamma_2}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), & \text{при } l=3.\end{cases}$$

Доданки D_{36}^{ls} і D_{37}^{ls} також оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D_{36}^{2s}|\le C\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}(t-\beta)^{-\hat m_1n_1-\hat m_2n_2-\hat m_2}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2}E_c^{2,2}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-1}\left(I_2^{(1,01)}(x_1,x_2;\xi)+I_2^{(1,02)}(x_1,x_2;\xi)\right)\int\limits_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-\hat m_2(1-\gamma_2)}d\beta\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{(\hat m_s)^{-1}(\hat m_2\gamma_2-\hat m_1)}(t-\tau)^{-M-1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

$$|D_{36}^{3s}|\le C\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}(t-\beta)^{-\hat m_1n_1-\hat m_2n_2-\hat m_3(1-\gamma_3)}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2}E_c^{2,2}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-1}\int\limits_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_2\gamma_2}d\beta\times$$
$$\times\left(I_2^{(1,01)}(x_1,x_2;\xi)+I_2^{(1,02)}(x_1,x_2;\xi)\right)\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{(\hat m_s)^{-1}(\hat m_3\gamma_3-\hat m_2)}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_2\gamma_2}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Оцінимо тепер D_{38}^{ls}. Для цього використаємо оцінки (3.108), (3.116) і (2.48).

Отримаємо

$$|D_{38}^{ls}| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1} |X_3(t-\beta) - \lambda_3|^{\gamma_3} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (t_1-\tau)^{-1} J_s(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_{l-1} - \hat{m}_s\gamma_s) \times$$

$$\times \left(I_2^{(1,03)}(x_1, x_2; \xi) + I_2^{(1,00)}(x_1, x_2; \xi) \right) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_{l-1})} (t-\tau)^{-M-1} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

Доданки D_{39}^{ls} і D_{310}^{ls} також оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D_{39}^{ls}| \leq C \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-\hat{m}_l} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) |X_3(t-\beta) - \lambda_3|^{\gamma_3} \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \leq (t_1-\tau)^{-1} I_0^{(1,00)}(x, \xi) \int\limits_{\eta_s}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_l + \hat{m}_3\gamma_3)} d\beta \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_{l-1})} (t-\tau)^{-M-1} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

Оцінимо D_{311}^{ls}. Для цього використаємо оцінки (3.110), (3.115) і (2.43). Отримаємо

$$|D_{311}^{3s}| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} \int\limits_{t_1}^{\eta_s} (t-\beta)^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l) - \hat{m}_s\gamma_s} (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi) d\beta \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} J_s(\hat{m}_l\gamma_l - \hat{m}_{l-1} - \hat{m}_s\gamma_s) \times$$

$$\times E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi) \leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l\gamma_l - \hat{m}_{l-1})} (t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

Доданки D_{312}^{ls} і D_{313}^{ls} також оцінюються аналогічно. Оцінимо перший з них. Використовуючи оцінки (3.109), (3.115) і (2.43), отримуємо

$$|D_{312}^{3s}| \leq C \int\limits_{\eta_s}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l)} (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi) d\beta \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \int\limits_{\eta_s}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l)} d\beta E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l\gamma_l - \hat{m}_{l-1})}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

З оцінок доданків D^{ls}_{3j}, $j \in \mathbb{N}_{13}$, нерівностей (3.158), (4.171) і (3.162), означення (1.61) і оцінок (3.108) випливають оцінки (3.153). ▶

РОЗДІЛ 4

КЛАСИЧНІ ФРЗК ДЛЯ РІВНЯНЬ З КЛАСУ $\boldsymbol{K_2}$

В розділі наведено результати побудови і дослідження класичного ФРЗК для рівнянь з класу $\mathbf{K_2}$, основні з яких опубліковано в праці [33].

4.1. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_2^{(t,x^1(y))}$

На першому етапі ФРЗК для рівняння

$$L_2^{(t,x^{(1)}(y))}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad y' \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \tag{4.1}$$

шукаємо у вигляді

$$Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = G_{21}(t,x;\tau,\xi;y') + W_{21}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{4.2}$$

де

$$W_{21}(t,x;\tau,\xi;y') := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{21}(t,x;\beta,\lambda;y')Q_{21}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda, \tag{4.3}$$

G_{21} — параметрикс, а Q_{21} — невідома функція. За параметрикс G_{21} на першому етапі побудови ФРЗК беремо функцію

$$G_{21}(t,x;\tau,\xi;y') := Z_{20}(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y')),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y' := (y_2,y_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3},$$

де Z_{20} — ФРЗК з теореми 2.2. Наведемо властивості параметриксу.

Лема 4.1. *За умов теореми 2.2 для функції G_{21} справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C_k(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi), \tag{4.4}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C_k|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times(E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(2,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)), \tag{4.5}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C_k(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times(h^{m_s\gamma_s} + |Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s}), s \in \{2,3\}, \tag{4.6}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k\ne 0, \tag{4.7}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_1\gamma_1}, k\ne 0, \tag{4.8}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}+\hat{m}_2\gamma_2}E_{c_0}^{(2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1), \quad k'\ne 0, \tag{4.9}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_2\gamma_2}\times$$

$$\times|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(E_{c_0}^{(2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1)+E_{c_0}^{(2,1)}(t-\tau,z_1,\xi_1)), \quad k'\ne 0, \tag{4.10}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1)E_{c_0}^{2,2}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), \qquad k_3\ne 0, \tag{4.11}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}E_{c_0}^{(2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1)E_{c_0}^{(2,2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), \qquad k_3\ne 0, \tag{4.12}$$

а також рівності

$$\partial_x^{k'} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{4.13}$$

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = 0, \qquad k'\ne 0, \tag{4.14}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = 0, \qquad k_3\ne 0, \tag{4.15}$$

де $0\le\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, y':=(y_2,y_3)\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}, \{x_s,y_s,z_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ k:= =(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n,\ k':=(0,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n,\ \gamma_s^0\in(0,1], s\in\mathbb{N}_3,\ h$ *і* γ_s *– числа з умов* (1.11) – (1.13).

Припустимо, що функція Q_{21} задовольняє умови леми 2.13. Тоді для цієї функції отримаємо таке інтегральне рівняння:

$$Q_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = K_{21}(t,x;\tau,\xi;y') + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_{21}(t,x;\beta,\lambda;y')Q_{21}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda, \tag{4.16}$$

в якому ядро K_{21} визначається формулою

$$K_{21}(t,x;\tau,\xi;y') := \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{k_1}(t,x^1(y))\partial_{x_1}^{k_1} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y'),$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3},\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

З цієї формули випливають для $k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ такі рівності:

$$\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{k_1}(t,x^1(y))\partial_{x_1}^{k_1}\partial_x^{k'} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{4.17}$$

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{k_1}(t,x^1(y))\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}\partial_x^{k'} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y'), s \in \{2,3\}, \tag{4.18}$$

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{k_1}(t,x^1(y))\partial_{x_1}^{k_1}\partial_x^{k'} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y') + \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{k_1}(t,x^1(y))\Big|_{y_s=z_s} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}\partial_x^{k'} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y'), s \in \{2,3\}. \tag{4.19}$$

За допомогою інтегрування (4.19) і формул (4.14), (4.15), маємо ще такі рівності:

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{k_1}(t,x^1(y))\partial_{x_1}^{k_1} \times \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3,\ s \in \{2,3\}. \tag{4.20}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{k_1}(t,x^1(y))\partial_{x_1}^{k_1} \times \int_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3,\ s \in \{2,3\}. \tag{4.21}$$

Використовуючи рівності (4.18)–(4.20), оцінки (4.4)–(4.7), умови (1.11)–

(1.13), нерівності (2.54),(2.55) і (2.57) та рівність (2.56), отримуємо оцінки

$$|\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi), \tag{4.22}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times\Big(E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(2,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\Big), \tag{4.23}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1}\times$$
$$\times E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi), \tag{4.24}$$

$$\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3\Bigg| \le C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$
$$\times(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c_0}^{(2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1), \tag{4.25}$$

$$\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3\Bigg| \le C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$
$$\times(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c_0}^{(2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1)E_{c_0}^{(2,2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), \tag{4.26}$$

$$\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\Bigg| \le C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}. \tag{4.27}$$

В оцінках (4.22) – (4.27) $0\le\tau<t\le T$, $h\in[0,T]$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\in\{2,3\}$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $k'\in\mathbb{Z}_+^n$, причому в оцінках (4.25)– (4.27) $k'\neq 0$, а числа γ_s^0 і γ_s такі, як вище.

Оцінка (4.24) не є достатньою для встановлення точних показників Гельдера приростів функцій Q_{21}, за просторовими змінними, але є достатньою для доведення існування класичного ФРЗК. Тому, надалі додатково припускатимемо виконання умови (A_{25}). Співвідношення (4.19) можна переписати у вигляді

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{21}(t,x;\tau,\xi;y')=\sum_{|k_1|\le 2b}\Delta_{x_1}^{\xi_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_{k_1}(t,x^1(y))\partial_{x_1}^{k_1}\partial_x^{k'}G_{21}(t,x;\tau,\xi;y')+$$
$$+\Bigg(\sum_{|k_1|\le 2b}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{k_1}(t,x^1(y))\Bigg)\Bigg|_{y_s=z_s}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}G_{21}(t,x;\tau,\xi;y'), s\in\{2,3\}.$$

Оцінивши доданки цього зображення, отримаємо оцінку

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{21}(t,x;\tau,\xi;y')|\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),\ s\in\{2,3\}. \tag{4.28}$$

Наведемо властивості функції Q_{21}.

Лема 4.2. *За умов* (A_{21}), (A_{22}) *і* (A_{25}) *для функції* Q_{21} *правильні оцінки*

$$|\partial_x^{k'}Q_{21}(t,x;\tau,\xi;y')|\leq C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi); \tag{4.29}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')|\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)),\ \gamma_1^0\in(0,\gamma_1],\ \{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1]; \tag{4.30}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{21}(t,x;\tau,\xi;y')\right|\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi); \tag{4.31}$$

$$\left|\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right|\leq C(t-\tau)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1},\qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n, \tag{4.32}$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right|\leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-\tau)^{-M_{1k'}-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)},\gamma_1^0\in(0,\gamma_1],k'\in\mathbb{Z}_+^n. \tag{4.33}$$

$$\left|\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Q_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2d\xi_3\right|\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-m_1n_1-M_{k'}-1+\hat{m}_2\gamma_2}E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1),k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{4.34}$$

$$\left|\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}Q_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right|\leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1(n_1-\gamma_1)-\hat{m}_2n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)-1}\times$$

$$\times E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,2)}(t-\tau,x_1,x_1,\xi_2),k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}. \tag{4.35}$$

У формулі (4.30) $s\in\mathbb{N}_3$, *а в* (4.31) — $s\in\{2,3\}$, *причому* $c_1<c$, *де* c *стала з оцінок параметриксу* G_{21} *із теореми 4.1.*

Перейдемо до дослідження об'ємного потенціалу (4.3), властивості і оцінки ядра G_{21} якого наведено в лемі 4.1, а густини Q_{21} — в лемі 4.2.

Лема 4.3. *Нехай виконуються умови леми 4.2. Тоді правильні такі твердження:*

(A) *функція* (4.3), *має неперервні похідні* $\partial_x^k W_{21}$, $|k_1| \le 2b$, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, k' = (0, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, *які визначаються формулами*

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{21}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{21}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda, |k_1| < 2b; \tag{4.36}$$

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{21}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{21}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{21}(t,x;\beta,\lambda;y') \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q_{21}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{21}(t,x;\beta,\lambda;y') d\lambda \right) Q_{21}(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y') d\beta =:$$
$$=: \sum_{j=1}^{3} W_{11j}^{1k}, |k_1| = 2b; \tag{4.37}$$

$$\partial_x^{k'} W_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k'} G_{21}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{21}(t,x;\beta,\lambda;y') \partial_{\lambda}^{k'} Q_{21}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda =: \sum_{j=1}^{2} W_{1j}^{k}; \tag{4.38}$$

(B) *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k W_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(t-\tau)^{-M-M_k+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi), \tag{4.39}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k W_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t-\tau)^{-M-M_k+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$
$$\times \left(E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right), \quad s \in \{2,3\}, \tag{4.40}$$

$$\left| \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} W_{21}(t,x;\tau,\xi;y') \right| \le C(|h|^{m_s\gamma_s} + |Y_s(h) - z_s|^{\gamma_s}) \times$$
$$\times (t-\tau)^{-M-M_{k'}+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi), s \in \{2,3\}, k \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{4.41}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{4.42}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_1\gamma_1}, k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{4.43}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} W_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}+\hat{m}_2\gamma_2}E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1), \qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{4.44}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} W_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\right| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_2\gamma_2}\left(E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1)+E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,z_1,\xi_1)\right), k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{4.45}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} W_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-|\hat{m}_3|(1-\gamma_3)}\times$$

$$\times E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \tag{4.46}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^k W_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}. \tag{4.47}$$

У формулах (4.40), (4.43), (4.45) *і* (4.47) $\gamma_1^0\in(0,\gamma_1]$, $\gamma_s^0\in(0,1]$, $s\in\{2,3\}$.

Доведення лем 4.1, 4.2 і 4.3 наведено у додатку Д.2.

Наведемо основний результат першого етапу.

Теорема 4.1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (4.1) *виконуються умови* (A_{21}), (A_{22}) *і* (A_{25}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_{21} *і є правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi); \tag{4.48}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\big(E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\big); \tag{4.49}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(t-\tau)^{-M-M_{lk}} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s}), s\in\{2,3\}; \tag{4.50}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}; \tag{4.51}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}, k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}; \tag{4.52}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} Z_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_2 d\xi_3| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}+\hat{m}_2\gamma_2} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1), k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{4.53}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3} Z_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-M_k+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$
$$\times E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \tag{4.54}$$

а також рівності

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = 0, \qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}; \tag{4.55}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = 0, \qquad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}; \tag{4.56}$$

$$\partial_x^{k'} Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} Z_{21}(t,x;\tau,\xi;y'), \qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{4.57}$$

де $0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}, \{y_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, s\in\mathbb{N}_3,$
$\gamma_1^0\in(0,\gamma_1],\quad \{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1],\quad k\in\mathbb{Z}_+^n,\quad |k_1|\le 2b.$

Доведення. Оцінки (4.48)– (4.57) випливають з означення (4.2) і відповідних оцінок параметриксу G_{21} і об'ємного потенціалу W_{21}.▶

4.2. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_2^{(t,x^2(y))}$

На другому етапі рівняння має вигляд

$$L_2^{(t,x^{(2)}(y))}u(t,x) := (S-A_1(t,x^{(2)}(y)),\partial_{x_1}))u(t,x)=0, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ y_3\in\mathbb{R}^{n_3}, \tag{4.58}$$

і ФРЗК шукаємо у вигляді

$$Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)=G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)+W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3), \tag{4.59}$$

де

$$W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3):=\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3)Q_{22}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda, \tag{4.60}$$

G_{22} — параметрикс, а Q_{22} — невідома функція. За параметрикс беремо функцію

$$G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3):=Z_{21}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3)),0\le\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,y_3\in\mathbb{R}^{n_3}. \tag{4.61}$$

Наведемо спочатку оцінки і властивості параметриксу G_{22}.

Лема 4.4. *За умов леми 4.3 для функції* G_{22} *є правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi); \tag{4.62}$$

$$\begin{gathered}|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times\\ \times\left(E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(2,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right);\end{gathered} \tag{4.63}$$

$$\begin{gathered}\left|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_x^k G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)\right|\le C\big(h^{\hat{m}_3\gamma_3}+|Y_3(h)-z_3|^{\gamma_3}\big)\times\\ \times(t-\tau)^{-M-M_k}E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,2)}(t-\tau,x,\xi);\end{gathered} \tag{4.64}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_{22}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi|\le C(t-\tau)^{-M_k+m(k)}, \tag{4.65}$$

$$m(k):=\begin{cases}\hat{m}_1\gamma_1, & \textit{якщо } k_1\ne0, \textit{ а } k_2=0 \textit{ і } k_3=0,\\ \hat{m}_2\gamma_2, & \textit{якщо } k_2\ne0, \textit{ а } k_1=0 \textit{ і } k_3=0,\\ \hat{m}_2\gamma_2, & \textit{якщо } k_3\ne0, \textit{ а } k_1=0 \textit{ і } k_2=0,\end{cases} k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\};$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k+m(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0},k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}; \tag{4.66}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{22}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m'(k)} E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1), \tag{4.67}$$

$$m'(k) := \begin{cases} 0, & \textit{якщо } k'=0; \\ \hat{m}_2\gamma_2, & \textit{якщо } k' \ne 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\};$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_{lk}-\hat{m}_1 n_1+m'(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\left(E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1)+E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,z_1,\xi_1)\right); \tag{4.68}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}; \tag{4.69}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3), \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \tag{4.70}$$

де $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}, \{x_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_3, k \in \mathbb{Z}_+^n, |k_1| \le 2b$. *У формулах* (4.63), (4.66) *і* (4.68) $\gamma_1^0 \in (0,\gamma_1],\ \gamma_2^0 \in (0,1],\ \gamma_3^0 \in (0,1]$, *сталі* $c,\ \hat{C}$ *такі, як відповідні сталі з оцінок ФРЗК* Z_{21} *у теоремі 4.1.*

Доведення. Оцінки (4.62)— (4.69), рівності (4.70) безпосередньо випливають з оцінок (4.48)— (4.54), означення параметриксу (4.61) і рівностей (4.57). ▶

Інтегральне рівняння для густини Q_{22} отримуємо аналогічно до рівняння (4.16) для густини Q_{21}. Це рівняння має вигляд

$$Q_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) = K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3)Q_{22}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda. \tag{4.71}$$

Ядро K_{22} визначається формулою

$$K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{k_1}(t,x^2(y))\partial_{x_1}^{k_1} G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3),$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ y_3 \in \mathbb{R}^{n_3},\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.72}$$

З (4.72) випливають такі рівності:

$$\partial_{x_3}^{k_3} K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{k_1}(t,x^2(y))\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_3}^{k_3} G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3),$$

$$0\le\tau<t\le T,\, y_3\in\mathbb{R}^{n_3},\, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{4.73}$$

$$\Delta^{z_3}_{y_3}\partial^{k_3}_{x_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3):=\sum_{|k_1|\le 2b}\Delta^{\xi_2}_{x_2}\Delta^{z_3}_{y_3}a_{k_1}(t,x^2(y))\partial^{k_1}_{x_1}\partial^{k_3}_{x_3}G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$
$$+\left(\sum_{|k_1|\le 2b}\Delta^{\xi_2}_{x_2}a_{k_1}(t,x^2(y))\right)\Bigg|_{y_3=z_3}\Delta^{z_3}_{y_3}\partial^{k_3}_{x_3}G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3),$$
$$0\le\tau<t\le T,\; y_3\in\mathbb{R}^{n_3}, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{4.74}$$

Доданки з (4.73), (4.74) оцінюємо подібно до оцінювання доданків з (4.17), (4.18). Отримаємо

$$|\partial^{k_3}_{x_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C(t-\tau)^{-M-1+\hat m_2\gamma_2-\hat m_3|k_3|}E^{(2,\hat m_1\gamma_1,3)}_{c,\hat C}(t-\tau,x,\xi),\; k_3\in\mathbb{Z}^{n_3}_+; \tag{4.75}$$

$$|\Delta^{z_3}_{y_3}\partial^{k_3}_{x_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C\big(h^{\hat m_3\gamma_3}+|Y_3(h)-z_3|^{\gamma_3}\big)(t-\tau)^{-M-1+\hat m_2\gamma_2-\hat m_3(|k_3|+\gamma_3)}\times$$
$$\times\left(E^{(2,\hat m_1\gamma_1,2)}_{c,\hat C}(t-\tau,x,\xi)+E^{(2,\hat m_1\gamma_1,2)}_{c,\hat C}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\right),\;\gamma^0_3\in(0,1],\; k_3\in\mathbb{Z}^{n_3}_+. \tag{4.76}$$

З (4.75) і властивості (4.70) параметриксу випливає рівність

$$\partial^{k_3}_{x_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)=(-\partial_{\xi_3})^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3),\; k_3\in\mathbb{Z}^{n_3}_+. \tag{4.77}$$

Перейдемо до оцінки приростів за змінною x_1 похідних від ядра K_{22}. Для цього використовуємо зображення

$$\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_3}_{x_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)=\sum_{|k_1|\le 2b}\Delta^{z_1}_{x_1}\Delta^{\xi_2}_{x_2}a_{k_1}(t,x_2(y))\partial^{k_1}_{x_1}\partial^{k_3}_{x_3}G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$
$$+\left(\sum_{|k_1|\le 2b}\Delta^{z_1}_{x_1}\Delta^{\xi_2}_{x_2}a_{k_1}(t,x^2(y))\right)\Bigg|_{x_1=z_1}\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_1}_{x_1}\partial^{k_3}_{x_3}G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3). \tag{4.78}$$

Оцінивши доданки з (4.78) за допомогою умов (1.11), (1.12), оцінок (4.62) і (4.63) при $s=1$, отримаємо такі оцінки:

$$|\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_3}_{x_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C|x_1-z_1|^{\gamma^0_1}(t-\tau)^{-M-1-\hat m_3|k_3|-\hat m_1(\gamma^0_1-\gamma_1)+\hat m_2\gamma_2}\times$$
$$\times\left(E^{(2,\hat m_1\gamma_1,3)}_{c,\hat C}(t-\tau,x,\xi)+E^{(2,\hat m_1\gamma_1,3)}_{c,\hat C}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\right),\;\gamma^0_1\in(0,\gamma_1]. \tag{4.79}$$

$$|\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_3}_{x_3}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi|\le C|x_1-z_1|^{\gamma^0_1}(t-\tau)^{-1-\hat m_3|k_3|+\hat m_1(\gamma_1-\gamma^0_1)}. \tag{4.80}$$

У (4.79) і (4.80) мультиіндекс $k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}$ — довільний.

Для приростів за змінною x_2 маємо таке зображення:

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \sum_{|k_1|\le 2b}\Delta_{x_2}^{z_2}a_{k_1}(t,x^2(y))\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_3}^{k_3}G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$
$$+\sum_{|k_1|\le 2b}\Delta_{z_2}^{\xi_2}a_{k_1}(t,(x_1,z_2,y_3))\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_3}^{k_3}G_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3); \tag{4.81}$$

Доданки в (4.81) оцінюємо аналогічно до (4.79) за допомогою умови (1.12), оцінок (4.62), (4.63) при $s=2$. Отримаємо оцінки

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right)\times$$
$$\left(E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,z^{(2)},\xi)\right),\ |k_3|\in\mathbb{Z}_+^{n_3}. \tag{4.82}$$

Тут γ_2^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$, а γ_2 — число з умови (1.12). Інтегруючи оцінки (4.82) за відповідними групами змінних, отримуємо

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-1-\hat{m}_3|k_3|+m(k)}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right); \tag{4.83}$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1n_1-1-\hat{m}_3|k_3|}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right)E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1); \tag{4.84}$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_2n_2-1-\hat{m}_3|k_3|}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right)\times$$
$$\times\left(E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2))+E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,2)}(t-\tau,x_1,z_2,\xi_1,\xi_2)\right). \tag{4.85}$$

Для оцінки приростів за змінною x_3 використовуємо зображення

$$\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\zeta_{3j}}K_{22}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)d\zeta_{3j},$$

де точки $\zeta_3^{(j)},\ j \in \mathbb{N}_{n_3}$— такі як вище.

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)| = |\sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\zeta_{3j}}K_{22}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)d\zeta_{3j}| \le$$

$$\le \left|\sum_{j=1}^{n_3}|\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}|\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\zeta_{3j}}K_{22}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)|d\zeta_{3j}|\right| \le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n_3}|x_{sj}-z_{sj}|(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3(|k_3|-1)+\hat{m}_2\gamma_2}\Bigg(E_{c_1,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi)+$$

$$+E_{c_1,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\Bigg) \le C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3\gamma_3^0}\times$$

$$\times\Bigg(E_{c_1,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_1,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,3)}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\Bigg),\ k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_3^0\in(0,1]; \quad (4.86)$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3\gamma_3^0},$$

$$k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\gamma_3^0\in(0,1]; \quad (4.87)$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2d\xi_3|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_1n_1-1-\hat{m}_3|k_3|+m_2\gamma_2-m_3\gamma_3^0}\times$$

$$\times E_{c_1,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1),\quad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\quad \gamma_3^0\in(0,1]; \quad (4.88)$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}K_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3|\le C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_2n_2-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3\gamma_3^0}\times$$

$$\times E_{c_1,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,2)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),\ k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_3^0\in(0,1]. \quad (4.89)$$

Властивості функції Q_{22} наведемо в наступній лемі.

Лема 4.5. *Для функції Q_{22} справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_3}^{k_3}Q_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2}E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,x,\xi); \quad (4.90)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_3}^{k_3}Q_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$

$$\times\left(E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right); \quad (4.91)$$

$$|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3}Q_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(h^{\hat{m}_3\gamma_3}+|Y_3(h)-z_3|^{\gamma_3})\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1}E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,x,\xi); \quad (4.92)$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \leq C(t-\tau)^{-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2}; \tag{4.93}$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1); \tag{4.94}$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3| \leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2}\times$$

$$\times E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2); \tag{4.95}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}; \tag{4.96}$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{22}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi_3| \leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-1+\hat{m}_2\gamma_2+\hat{m}_3(\gamma_3-|k_3|)}\times$$

$$\times E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{2,2}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2), \tag{4.97}$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi,z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{N}_3$, $k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}$, *причому* $k_3 \in \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}$ *в* (4.93)–(4.97), $\gamma_l^0 \in (0,\gamma_l]$, $l \in \mathbb{N}_2$, $\gamma_3^0 \in (0,1]$, γ_l, $l \in \mathbb{N}_2$ — *числа з умов* (1.11), (1.12) *і* (1.13).

Доведення леми наведено у додатку 2.

Отримані властивості параметриксу G_{22} та густини потенціалу Q_{22} дозволяють дослідити об'ємний потенціал (4.60), отримати його оцінки і довести таку лему.

Лема 4.6. *Нехай виконуються умови леми 4.4 і леми 4.5. Тоді для функції* (4.60) *правильні такі твердження:*

(A) *для* $k''' := (k_1,k_2,0) \in \mathbb{Z}_+^n, |k_1|/(2b)+|k_2| \leq 1$, *існують похідні* $\partial_x^{k'''}W_{22}$, *які визначаються формулами*

$$\partial_x^{k''}W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''}G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3)Q_{22}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{22}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda\right) Q_{22}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\beta; \tag{4.98}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_{22}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_2}^{k_2} G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda_2 d\lambda_3\right)\times$$

$$\times \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\tau)} Q_{22}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\lambda_1 + \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\times$$

$$\times\left(\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{22}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi;y_3) + \Delta_\lambda^{\Lambda^{02}} Q_{22}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)\right)d\lambda$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda\right) Q_{22}(\beta,X(t-\tau);\tau,\xi;y_3)d\beta =: \sum_{j=1}^{4} W_{12j}^{k'''}, \tag{4.99}$$

(B) *для* $k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}$, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $|k_1| = 1$ *існують похідні* $\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{x_1}^{k_1} W_{22}$, *які визначаються формулами*

$$\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{x_1}^{k_1} W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3}\partial_{x_1}^{k_1} G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_{22}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{22}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{22}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda =: \sum_{j=1}^{2} W_{12j}^{k'}; \tag{4.100}$$

(C) *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k+m_k} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,x,\xi), \tag{4.101}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k W_{22}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k+\bar{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$

$$\times\left(E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right),$$

$$\bar{m}_s = \hat{m}_s, s \in \mathbb{N}_2, \bar{m}_3 = \hat{m}_2, \gamma_1^0 \in (0,\gamma_1], \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2], \gamma_3^0 \in (0,1]. \tag{4.102}$$

Доведення леми 4.6 наведено у додатку 2.

Результати другого етапу побудови класичного ФРЗК наведені в наступній теоремі.

Теорема 4.2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (4.58) *виконуються умови* (A_{21}), (A_{22}) *і* (A_{25}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_{22} *і є правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,x,\xi),$$
$$k \in \{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n \mid |k_1|/(2b)+|k_2| \le 1\}; \tag{4.103}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times\left(E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right),$$
$$\gamma_1^0 \in (0,\gamma_1],\ \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2],\ \gamma_3^0 \in (0,1]; \tag{4.104}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k+m(k)}, k \in \{\mathbb{Z}_+^n|\, 0<|k_1|/(2b)+|k_2| \le 1\}; \tag{4.105}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k+m(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0},$$
$$k \in \{\mathbb{Z}_+^n \mid |k_1|/(2b)+|k_2| \le 1\}, \gamma_1^0 \in (0,\gamma_1],\ \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2],\ \gamma_3^0 \in (0,1]; \tag{4.106}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^k Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}(t-\tau,x_1-\xi_1); \tag{4.107}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^k Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times(E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1)+E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,1)}(t-\tau,z_1,\xi_1)),$$
$$\gamma_1^0 \in (0,\gamma_1],\ \ \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2],\ \ \gamma_3^0 \in (0,1]; \tag{4.108}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}; \tag{4.109}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} Z_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3), \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \tag{4.110}$$

У формулах (4.103)–(4.110) $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$.

Доведення. Оцінки (4.103), (4.104) випливають з означення ФРЗК (4.59) і відповідних оцінок (4.62), (4.63), (4.101) і (4.102).

Щоб отримати оцінки (4.105) — (4.108) потрібно спершу отримати такі оцінки для інтегралів від похідних W_2 та їх приростів. Інтегруючи оцінки (4.101) і (4.102) відповідно за $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^n$ і $(\xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, із урахуванням рівностей (??), (??), отримаємо такі нерівності:

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k+m(k)}; \tag{4.111}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k+m(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0}; \tag{4.112}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')} E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1); \tag{4.113}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_{22}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')-\hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times (E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,1)}(t-\tau,x_1,\xi_1) + E_{c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,1)}(t-\tau,z_1,\xi_1)). \tag{4.114}$$

В нерівностях (4.111)–(4.113) $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, а числа $m_(k)$ і $m(k')$ —такі як вище. З нерівностей (4.111)–(4.113), (4.65)–(4.67) випливають оцінки (4.105)– (4.108).

Рівності (4.109) є наслідком рівностей (4.69) і (4.96). Аналогічно, за допомогою (4.70) і (4.96) доводиться рівності (4.110). ►

4.3. Побудова та властивості ФРЗК для основного рівняння

На третьому етапі розглядаємо рівняння

$$L_2^{(t,x^{(3)}(y))} u(t,x) := (S - A_2(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{4.115}$$

де диференціальні вирази S і $A_2(t,x,\partial_{x_1})$ — такі, як вище. Аналогічно до попереднього ФРЗК для рівняння (4.115) шукаємо у вигляді

$$Z_{23}(t,x;\tau,\xi) = G_{23}(t,x;\tau,\xi) + W_{23}(t,x;\tau,\xi), \tag{4.116}$$

де

$$W_{23}(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \tag{4.117}$$

G_{23} — параметрикс, а Q_{23} — невідома функція. За параметрикс беремо функцію

$$G_{23}(t,x;\tau,\xi) := Z_{22}(t,x;\tau,\xi;\xi_3), 0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.118}$$

Оцінки параметриксу G_{23} наводяться в наступній лемі.

Лема 4.7. *Для функції G_{23} справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k G_{23}(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x,\xi); \tag{4.119}$$

$$|\Delta^{z_s}_{x_s}\partial_x^k G_{23}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x,\xi) + E^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,3)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,z^{(s)},\xi); \tag{4.120}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^{k_s}_{x_s} G_{23}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_{k_s}+\hat{m}_s\gamma_s}, k_s \in \mathbb{Z}^{n_s}_+ \setminus \{0\},\ s \in \mathbb{N}_3; \tag{4.121}$$

$$|\Delta^{z_s}_{x_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^{k_l}_{x_l} G_{23}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_{k_l}+\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_s\gamma_s^0}; \tag{4.122}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial^{k_l}_{x_l} G_{23}(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-M_{k_l}-\hat{m}_1 n_1+\hat{m}_l\gamma_l} E^1_c(t-\tau,x_1-\xi_1); \tag{4.123}$$

$$|\Delta^{z_s}_{x_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial^{k_l}_{x_l} G_{23}(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_{k_l}-\hat{m}_1 n_1+\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\left(E^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,1)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x_1,\xi_1) + E^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,1)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,z_1,\xi_1)\right); \tag{4.124}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial^{k_3}_{x_3} G_{23}(t,x;\tau,\xi)d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)}\times$$

$$\times E^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,2)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2); \tag{4.125}$$

$$|\Delta^{z_s}_{x_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial^{k_l}_{x_l} G_{23}(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-M_{k_l}+\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\left(E^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,2)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) + E^{(2,\hat{m}_2\gamma_2,2)}_{c_1,\hat{C}_1}(t-\tau,z_1,z_2,\xi_1,\xi_2)\right); \tag{4.126}$$

де $0 \le \tau < t \le T, k \in \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n, |k_1|/(2b) + |k_2| + |k_3| \le 1\}$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_3, \gamma_1^0 \in (0, \gamma_1], \gamma_2^0 \in (1/3, \gamma_2], \gamma_3^0 \in (0, 1]$. *В оцінках* (4.119)–(**??**) *сталі* c_1 *і* $\hat{C}_1$ *— такі, як в теоремі 4.2.*

Доведення. Оцінки (4.119)–(4.125) безпосередньо випливають з оцінок (4.103)–(4.108) ФРЗК $Z_{22}(t, x; \tau, \xi; y_3), 0 \le \tau < t \le T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$. ▶

Розглянемо властивості густини Q_{23} потенціалу W_{23}.

Лема 4.8. *Для функції* Q_{23} *справджуються оцінки*

$$|Q_{23}(t, x; \tau, \xi)| \le C(t - \tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_1, \hat{C}_1}^{(2, \hat{m}_3\gamma_3, 3)}(t - \tau, x, \xi), \tag{4.127}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} Q_{23}(t, x; \tau, \xi)| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t - \tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s - \gamma_s^0)} \times$$
$$\times \left(E_{c_1, \hat{C}_1}^{(2, \hat{m}_3\gamma_3, 3)}(t - \tau, x, \xi) + E_{c_1, \hat{C}_1}^{(2, \hat{m}_3\gamma_3, 2)}(t - \tau, z^{(s)}, \xi)\right), 0 \le \tau < t \le T,$$
$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_3, \gamma_1^0 \in (0, \gamma_1], \gamma_2^0 \in (1/3, \gamma_2], \gamma_3^0 \in (3/5, \gamma_3]. \tag{4.128}$$

Доведення. За зроблених припущень функція Q_{23} задовольняє інтегральне рівняння

$$Q_{23}(t, x; \tau, \xi) = K_{23}(t, x; \tau, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_{23}(t, x; \beta, \lambda) Q_{23}(\beta, \lambda; \tau, \xi) d\lambda, \tag{4.129}$$

в якому ядро K_{23} визначається формулою

$$K_{23}(t, x; \tau, \xi) := \sum_{|k_1| \le 2b} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{k_1}(t, x) \partial_{x_1}^{k_1} G_{23}(t, x; \tau, \xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.130}$$

Оцінимо доданки з (4.130) за допомогою умови (A_{22}), нерівностей (4.119), (2.55) і (2.67). Маємо

$$|K_{23}(t, x; \tau, \xi)| \le C(t - \tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_1, \hat{C}_1}^{(2, \hat{m}_3\gamma_3, 3)}(t - \tau, x, \xi), \ c_1 < c_0, \tag{4.131}$$

де c_0 — стала з оцінки (2.55).

З отриманої оцінки випливає, що ядро K_{23} інтегрального рівняння (**??**) задовольняє умови леми 2.7. На підставі цієї леми для функції Q_{23} справджується оцінка (4.127). Для функції Q_{23} справджуються також оцінки (4.128).

З (4.130) випливають такі рівності:

$$\Delta_{x_s}^{z_s} K_{23}(t,x;\tau,\xi) = \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_s}^{z_s}\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{k_1}(t,x)\partial_{x_1}^{k_1} G_{23}(t,x;\tau,\xi) +$$

$$+ \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{k_1}(t,z^{(s)})\partial_{x_1}^{k_1}\Delta_{x_s}^{z_s} G_{23}(t,x;\tau,\xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{N}_2. \qquad (4.132)$$

$$\Delta_{x_3}^{z_3} K_{23}(t,x;\tau,\xi) = \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_3}^{z_3} a_{k_1}(t,x)\partial_{x_1}^{k_1} G_{23}(t,z^{(3)};\tau,\xi) +$$

$$+ \sum_{|k_1|\le 2b} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{k_1}(t,x)\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1} G_{23}(t,x;\tau,\xi),\ 0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (4.133)$$

Оцінки доданків зображень (4.132),(4.133) досить встановити у випадку $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le (t-\tau)/4, s \in \mathbb{N}_3$. За допомогою умов (A_{22}), (A_{25}), оцінок (4.119), (4.120) і нерівностей (**??**) отримаємо оцінки

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} K_{23}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \times$$

$$\times \left(E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,3)}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,3)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right), 0 \le \tau < t \le T,$$

$$\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \gamma_s^0 \in (\hat{m}_{s-1}/\hat{m}_s, \gamma_s], s \in \mathbb{N}_3, \hat{m}_0 = 0. \qquad (4.134)$$

Інтегруючи (4.132),(4.133) із урахуванням (A_{22}), (A_{25}) і оцінок (4.121), (4.122), маємо

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} K_{23}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s}(t-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_s\gamma_s},$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ x \subset \mathbb{R}^n,\ \{x_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s},\ s \in \mathbb{N}_2. \qquad (4.135)$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3} \int_{\mathbb{R}^n} K_{23}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le$$

$$\le C\left(|x_3 - z_3|^{\gamma_3}(t-\tau)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} + |x_3 - z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-1+\hat{m}_3(\gamma_3-\gamma_3^0)} \right),$$

$$0 \le \tau < t \le T, x \in \mathbb{R}^n, \{x_3,z_3\} \subset \mathbb{R}^{n_3}. \qquad (4.136)$$

У формулах (4.135),(4.136) γ_s, $s \in \mathbb{N}_3$, — числа з умови (A_{22}), а γ_3^0 — довільне число з проміжку $(0,1]$. Щоб оцінити прирости функції Q_{23} за допомогою (**??**) запишемо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s} Q_{23}(t,x;\tau,\xi) = \Delta_{x_s}^{z_s} K_{23}(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{23}(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda + \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{23}(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda + \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{23}(t,x;\beta,\lambda) Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda -$$

$$- \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{23}(t,x;\beta,\lambda) Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda =: \sum_{j=1}^{5} Q_{23j}, \tag{4.137}$$

де $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, \eta_s := t - |x_s - z_s|^{1/\hat{m}_s}, s \in \mathbb{N}_3$, а число t_1– таке, як раніше.

Оцінимо доданки $Q_{23j}, j \in \mathbb{N}_5$. Для Q_{231} справджуються оцінки (4.134). За допомогою оцінок (4.127), (4.134) і (2.79) отримаємо

$$|Q_{232}| \le \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_s}^{z_s} K_{23}(t,x;\beta,\lambda)||Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-t_1)^{-1+\hat{m}_s(\gamma_s - \gamma_s^0)} \int\limits_{\tau}^{t_1} (\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} d\beta \times$$

$$\times \left(J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,s3)}(x,\xi) + J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,s3)}(z^{(3)},\xi) \right) \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_3^0)} E_{c_1,\hat{C}_1}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,3)}(t-\tau,x,\xi).$$

$$|Q_{233}| \le \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_s}^{z_s} K_{23}(t,x;\beta,\lambda)||Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} J_s(\hat{m}_s(\gamma_s - \gamma_s^0))(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times \left(J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,s3)}(x,\xi) + J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,s3)}(z^{(3)},\xi) \right) \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-1-M+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданки Q_{234} і Q_{235} оцінюємо однаково. Тому оцінимо перший з них. За допомогою (4.131), (4.127) і (2.79) маємо

$$|Q_{234}| \leq \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_{23}(t,x;\beta,\lambda)||Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \int\limits_{\eta_s}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} d\beta \times$$

$$\times \left(J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,s3)}(x,\xi) + J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,s3)}(z^{(3)},\xi) \right) \leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{\hat{m}_3\gamma_3\hat{m}_s^{-1}}(t-\tau)^{-1-M+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Оцінка Q_{235} відрізняється від цієї оцінки лише тим, що в ній x замінено на $z^{(s)},\ s \in \mathbb{N}_2$.

Отже, встановлено оцінки (4.128) для випадку, коли $\gamma_s^0 \in (0, \gamma_s)$. Ці оцінки справджуються і для $\gamma_s^0 = \gamma_s$, $s \in \mathbb{N}_3$. Щоб у цьому переконатися, уточнимо оцінку інтеграла Q_{233}, записавши його у вигляді

$$Q_{233} = \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{23}(t,x;\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_s} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda \right) Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta =: Q'_{233} + Q''_{233}.$$

За допомогою нерівностей (2.57), (2.67), оцінок (4.134) при $\gamma_s^0 = \gamma_s$ і (4.128) при $\gamma_s^0 < \gamma_s$ й (Д2.10), отримуємо

$$|Q'_{233}| \leq C \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-1}|x_s-z_s|^{\gamma_s} E_c^{(2)}(t-\beta,x,\lambda) \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{3} |X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s^0}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \sum_{j=s-1}^{s} E_c^{(2)}(\beta,\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)d\lambda \leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s} \sum_{s=1}^{3} J_s(\hat{m}_s\gamma_s^0)(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \sum_{j=s-1}^{s} J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x;\xi) \Bigg) \leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s} E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка Q''_{233} у випадку $s \in \mathbb{N}_2$, використовуємо оцінки (4.135), (2.43), (4.127) і (Д2.10). Маємо

$$|Q''_{233}| \le C \int\limits_{t_1}^{\eta_s} |x_s - z_s|^{\gamma_s} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_s\gamma_s} (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_c^{(2)}(t,\tau,X(t-\beta),\xi) d\beta \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s} J_s(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_s\gamma_s) \times$$

$$\times (t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi) \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (t-\tau)^{-M-1+2\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_s\gamma_s} E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

У випадку $s=3$ використовуємо оцінки (4.136) при $\gamma_3^0 > \gamma_3$, (2.62), (4.127) і (Д2.10). Отримаємо

$$|Q''_{233}| \le C \int\limits_{t_1}^{\eta_3} \Big(|x_3 - z_3|^{\gamma_3} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} + |x_3 - z_3|^{\gamma_3^0} (t-\beta)^{-1-\hat{m}_3(\gamma_3^0-\gamma_3)} \Big) \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(t,\tau,X(t-\beta),\xi) d\beta \le C\big(|x_3 - z_3|^{\gamma_3} J_3(\hat{m}_1\gamma_1) +$$

$$+ |x_3 - z_3|^{\gamma_3^0} J_3(-\hat{m}_3(\gamma_3^0 - \gamma_3))\big)(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi) \le$$

$$\le C|x_3 - z_3|^{\gamma_3} (t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

З цих оцінок та оцінок $Q_{23j}, j \in \mathbb{N}_5$, випливають оцінки (4.128), в яких $\gamma_s^0 = \gamma_s,\ s \in \mathbb{N}_3$. ►

Перейдемо до дослідження об'ємного потенціалу (4.117).

Лема 4.9. *Нехай виконуються умови леми 4.7 для параметриксу G_{23} і леми 4.8 для функції Q_{23}. Тоді для об'ємного потенціалу* (4.117) *правильні такі твердження:*

(A) *для $k \in \{\mathbb{Z}_+^n \,|\, |k_1|/(2b) + |k_2| + |k_3| \le 1\}$, існують похідні $\partial_x^k W_{23}$, які визначаються формулами*

$$\partial_x^{k''} W_{23}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{23}(t,x;\beta,\lambda) Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{23}(t,x;\beta,\lambda) \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k''}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta=:\sum_{j=1}^{3}W_{3j}^{21};\qquad(4.138)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}W_{23}(t,x;\tau,\xi)=\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_2}^{k_2}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\right)\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\tau)}Q_{23}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{23}(\beta,X(t-\tau);\tau,\xi)d\beta=:\sum_{j=1}^{5}W_{3j}^{22},\qquad(4.139)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}W_{23}(t,x;\tau,\xi)=\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\right)\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\tau)}Q_{23}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_3\right)\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1d\lambda_2+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{23}(\beta,X(t-\tau);\tau,\xi)d\beta=:\sum_{j=1}^{5}W_{3j}^{23},\qquad(4.140)$$

(B) *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^kW_{23}(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-M_k+\gamma}E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi).\qquad(4.141)$$

У формулах (4.138)–(4.141) $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \gamma = \min\{m_1\gamma_1, m_2\gamma_2, m_3\gamma_3\}, k \in \mathbb{Z}_+^n,\ |k_1|/(2b)+|k_2|+|k_3| \le 1,\ \ k'' = (k_1,0,0)$.

Доведення. Існування похідних від W_{23} та їх оцінки встановлюється аналогічно до попереднього. Відмінність полягає в тому, що перекидання похідних за змінною x_3 з ядра на густину Q_{23} неможливе. Розглянемо інтеграли

$$V_\beta^{k,s}(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_s}^{k_s} G_{23}(t,x;\beta,\lambda) Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$

$$0 \le \tau \le \beta \le t \le T,\ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ \ k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s},\ \ s \in \mathbb{N}_3.$$

Оцінимо їх за допомогою оцінок (4.119), (4.127). Маємо

$$|V_\beta^{k,s}(t,x;\tau,\xi)| \le |\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_s}^{k_s} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)||Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda| \le$$

$$\le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-\hat{m}_s|k_s|} E_c^{(2)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le C(t-\beta)^{-\hat{m}_s|k_s|}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,03)}(x,\xi) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-\hat{m}_s|k_s|}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0 \le \tau \le \beta \le t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}_+^n, s \in \mathbb{N}_3. \tag{4.142}$$

Перейдемо до доведення твердження **A**. Нехай $|k_1|/(2b)+|k_2|+|k_3| = 1$. Доведемо формулу (4.138). Вона доводиться аналогічно до доведення відповідної формули з леми 4.6. Оцінимо доданки $W_{3j}^{21}, j \in \mathbb{N}_4$. Зауважимо, що оцінка (4.142) є достатньою для встановлення оцінок доданків $W_{31}^{2s}, s \in \mathbb{N}_3$. Справді

$$|W_{31}^{2s}| \le \int\limits_\tau^{t_1} |V_\beta^{k,s}(t,x;\tau,\xi)|d\beta \le C(t-\tau)^{-M} E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times \int\limits_\tau^{t_1} (t-\beta)^{-\hat{m}_s|k_s|}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} d\beta \le C(t-\tau)^{-M}(t-t_1)^{-\hat{m}_s|k_s|} E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_s|k_s|+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi), s \in \mathbb{N}_3, |k_1|/(2b)+|k_2|+|k_3| = 1. \tag{4.143}$$

Для встановлення оцінки другого доданка потрібна формула для повного приросту $\Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{23}$. За допомогою оцінок (4.128) маємо

$$|\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|\le|\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|+$$

$$+|\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|+|\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|\le C\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\le C\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s^0}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi). \tag{4.144}$$

$$|W_{32}^{21}|\le\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_x^{k''}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)||\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda\le$$

$$\le\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c^{(2)}(t-\beta,x,\lambda)\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)d\lambda\le$$

$$\le C\sum_{s=1}^{3}(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s^0}d\beta\sum_{j=s-1}^{s}J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x,\xi)\le$$

$$\le C\sum_{s=1}^{3}(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}(t-t_1)^{\hat{m}_s\gamma_s}(t-\tau)^{-M}E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi)\le$$

$$\le C\sum_{s=1}^{3}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s}E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi)\le C(t-\tau)^{-M-1+\gamma}E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi),$$

де $\gamma=\min\{\hat{m}_1\gamma_1,\hat{m}_2\gamma_2,\hat{m}_3\gamma_3\},\ 0<c_0<c.$

$$|W_{33}^{21}|\le\int_{t_1}^{t}|\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k''}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda||Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)|d\beta\le$$

$$\le C\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків $W_{3j}^{21}, j\in\mathbb{N}_3$, маємо

$$|\partial_x^k W_{23}(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-M_k+\gamma}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi),0\le\tau<t\le T,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, k\in\mathbb{Z}_+^n, |k_1|=2b, |k_2|=|k_3|=0. \tag{4.145}$$

У формулі (4.145) стала γ — така, як вище.

Перейдемо до оцінок доданків зображення (4.139). Почнемо з другого доданка. За допомогою оцінок (4.123), (4.128), нерівностей (2.54), (2.68) і (2.69) отримуємо

$$|W_{32}^{22}|\le\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\left|\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_2}^{k_2}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\right|\times$$

$$\times\left|\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)\right|d\lambda_1\le$$

$$\le C\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^{n_1}}(t-\beta)^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_2(1-\gamma_2)}E_c^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1^0}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)}\big(E_c^{(2)}(\beta,\tau,\Lambda^{01}(t-\beta),\xi)+$$

$$+E_c^{(2)}(\beta,\tau,\Lambda^{00}(t-\beta),\xi)\big)d\lambda_1\le C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)}\times$$

$$\times\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-\hat{m}_2(1-\gamma_2)+\hat{m}_1\gamma_1^0}d\beta\left(I_1^{(1,00)}(x,\xi)+I_1^{(1,01)}(x,\xi)\right)\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2(1-\gamma_2)+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi),$$

бо $1-\hat{m}_2(1-\gamma_2)+m_1\gamma_1^0>0$ для довільного $\gamma_1^0\in[0,\gamma_1]$ і $\gamma_2>1/3$.

Аналогічно, використовуючи оцінки (4.119), (4.128) та нерівності (2.54) і (2.67), оцінюємо доданки W_{23}^{22} і W_{24}^{22}. Маємо

$$|W_{23}^{22}|\le\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_{x_2}^{k_2}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)||\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)|d\lambda\le$$

$$\le C\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_2}E_c^{(2)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1}\sum_{j=1}^{2}E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)\times$$

$$\times|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2^0}(\beta-\tau)^{\hat{m}_2(\gamma_2-\gamma_2^0)}d\lambda\le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1+m_2(\gamma_2-\gamma_2^0)}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-m_2(1-\gamma_2^0)}d\beta\sum_{j=1}^{2}J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j))}(x,\xi)\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2+\gamma_1}E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

$$|W_{24}^{22}| \le \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_2}^{k_2} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)||\Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \le$$

$$\le C\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-\hat{m}_2} E_c^{(2)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1} \sum_{j=1}^{2} E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)\times$$

$$\times|X_3(t-\beta)-\lambda_3|^{\gamma_3^0}(\beta-\tau)^{m_3(\gamma_3-\gamma_3^0)}d\lambda \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3(\gamma_3-\gamma_3^0)} \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_2+\hat{m}_3\gamma_s^0} d\beta 3 \sum_{j=1}^{3} J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j))}(x,\xi) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка W_{35}^{22} використовуємо (4.121), (4.127) і (2.52). Здобудемо

$$|W_{35}^{22}| \le \int\limits_{t_1}^{t} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda \right| \left| Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi) \right| d\beta \le$$

$$\le C\int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_2(1-\gamma_2)}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(\beta-\tau,X(\beta-\tau),\xi)d\beta$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_2(1-\gamma_2)} d\beta E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2(1-\gamma_2)+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

З отриманих оцінок доданків випливає оцінка

$$|\partial_{x_2}^{k_2} W_{23}(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-m_2+\bar{\gamma}} E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi), \tag{4.146}$$

де $0 \le \tau < t \le T,\ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ \ |k_2| = 1\ \ \bar{\gamma} = \min\{\hat{m}_2\gamma_2, \hat{m}_3\gamma_3\}$.

Залишилось оцінити доданки $W_{3j}^{23}, j \in \mathbb{N}_5$. Для першого доданка справджується оцінка (4.143). За допомогою оцінок (4.123), (4.128), нерівностей (2.54), (2.68) і (2.69) отримуємо

$$|W_{32}^{23}| \le$$

$$\leq \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big| \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{23}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \Big| \Big| \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi) \Big| d\lambda_1 \leq$$

$$\leq C \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_3(1-\gamma_3)} E_{c,\hat{C}}^{2,\hat{m}_3\gamma_3,1}(t-\beta,x_1,\lambda_1)|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times \Big(E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{01}(t-\beta),\xi) + E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{00}(t-\beta),\xi) \Big) d\lambda_1 \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1} \int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)+\hat{m}_1\gamma_1^0} d\beta \Big(J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,00))}(x,\xi) +$$

$$+ J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,01))}(x,\xi) \Big) \leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3(1-\gamma_3)+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi),$$

бо $-\hat{m}_3(1-\gamma_3)+\hat{m}_1\gamma_1 > 0$ для довільного $\gamma_1 \in [0,1]$ і $\gamma_2 > 1/3$.

Аналогічно, використовуючи оцінки (4.119), (4.128) та нерівності (2.54) і (2.68), оцінюємо доданки W_{33}^{23} і W_{34}^{23}. Маємо

$$|W_{33}^{13}| \leq \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Big| \int_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{23}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_3 \Big| \times$$

$$\times \Big| \Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi) \Big| d\lambda_1 d\lambda_2 \leq C \int_{t_1}^{t} d\beta \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_{c,\hat{C}}^{2,\hat{m}_3\gamma_3,2}(t-\beta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2} \times$$

$$\times (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)}(\beta-\tau)^{-M-1} \sum_{j=1}^{2} E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi) d\lambda_1 d\lambda_2 \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1} \int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)+\hat{m}_2\gamma_2} d\beta \sum_{j=1}^{2} J_{2,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x_1,x_2,\xi) \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)+\hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

$$|W_{34}^{23}| \leq \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n}} \Big| \partial_{x_3}^{k_3} G_{23}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_3 \Big| \Big| \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi) \Big| d\lambda \leq$$

$$\leq C\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-\hat{m}_3} E_c^{(2,3)}(t-\beta, x, \lambda)|X_3(t-\beta)-\lambda_3|^{\gamma_3}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}\sum_{j=2}^{3} E_c^{(2,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi)d\lambda \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)}d\beta\sum_{j=2}^{3} J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x,\xi) \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка W_{35}^{23} використовуємо (4.121), (4.127) і (2.62). Здобудемо

$$|W_{35}^{23}| \leq \int\limits_{t_1}^{t}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_3(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\Big|\,|Q_{23}(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi)|\,d\beta \leq$$

$$\leq C\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2,3)}(\beta-\tau, X(\beta-\tau),\xi)d\beta$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)}d\beta E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3(1-\gamma_3)+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi),$$

оскільки $-\hat{m}_3(1-\gamma_3) > 0$, якщо $\gamma_3 > 3/5$.

З отриманих оцінок доданків випливає оцінка

$$|\partial_{x_3}^{k_3}W_{23}(t,x;\tau,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-M-m_3|k_3|+\gamma}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi), \qquad (4.147)$$

де $0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}_+^n, k_1 = k_2 = 0, |k_3| = 1$, γ — таке, як вище.

Оцінки (4.140) встановлено. З отриманих оцінок (4.146)–(4.147) випливають оцінки (4.138).▶ Результати заключного етапу побудови класичного ФРЗК підсумовано в наступній теоремі.

Теорема 4.3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (4.115) *виконуються умови* (A_{21}), (A_{22}) *і* (A_{25}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_{23} *і справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_{23}(t,x;\tau,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n, |k_1|/(2b)+|k_2|+|k_3|\le 1\}; \tag{4.148}$$

$$|SZ_{23}(t,x;\tau,\xi|\le C(t-\tau)^{-M-1}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi), \tag{4.149}$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Доведення. Існування класичного ФРЗК Z_{23} для рівняння (4.115), його оцінки і оцінки похідних від Z_{23} за просторовими змінними і похідної S випливають із означення (4.116) та леми 4.7 і леми 4.9. ►

Розглянемо питання існування Лі-ФРЗК. Для цього слід показати, що похідна Лі S_L від Z_{23} існує в кожній точці $t,x)\in\Pi_{(0,T]}$. Оскільки використовується поетапний метод Леві, згідно з яким за параметрикс на кожному етапі береться ФРЗК, який побудований на попередньому етапі. За виконання умов (A_{21}) і (A_{22}) на підставі теореми 2.2 існує S_LZ_{10}, а, отже, існує похідна Лі від параметриксу G_{21}. Припустимо, за індукцією, що для параметриксу G_{23} існує SG_{23} і справджується оцінка

$$|SG_{23}(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-1}E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{4.150}$$

Доведемо існування похідної Лі від об'ємного потенціалу W_{23}. Існування похідних Лі від потенціалів W_{21} і W_{22} проводяться аналогічно. Для цього розглянемо множину функцій, які залежать від параметра ε:

$$W_{23}^{\varepsilon}(t,x;\tau,\xi):=\int\limits_{\tau}^{t-\varepsilon}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$

$$0<\varepsilon<\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{4.151}$$

Запишемо

$$h^{-1}\left(W_{23}^{\varepsilon}(t+h,X(h);\tau,\xi)-W_{23}^{\varepsilon}(t,x;\tau,\xi)\right)=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{t-\varepsilon}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}h^{-1}\left(G_{23}(t+h,X(h);\beta,\lambda)-G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\right)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+h-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} h^{-1}G_{23}(t+h,X(h);\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda =: J_1^h + J_2^h$$

і знайдемо границі інтегралів J_1^h, J_2^h при $h \to 0$. Маємо

$$\lim_{h\to 0} J_1^h = \int\limits_{\tau}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

В інтегралі J_2^h зробимо заміну змінної за формулою $\gamma = h^{-1}(\beta - t + \varepsilon)$, тоді

$$J_2^h = \int\limits_0^1 d\gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{23}(t+h,X(h);h\gamma+t-\varepsilon,\lambda)Q_{23}(h\gamma+t-\varepsilon,\lambda;\tau,\xi)d\lambda$$

і

$$\lim_{h\to 0} J_2^h = \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_{23}(t,x;t-\varepsilon,\lambda)Q_{23}(t-\varepsilon,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

Отже,

$$S_L W_{23}^{\varepsilon}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_{23}(t,x;t-\varepsilon,\lambda)Q_{23}(t-\varepsilon,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t_1(\varepsilon)} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (A_2(t,(x_1,x_2,\lambda_3),\partial_{x_1}) - A_2(t,x,\partial_{x_1}))\times$$

$$\times G_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} A_2(t,x,\partial_{x_1})G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} A_2(t,x,\partial_{x_1})G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)\right) d\beta =:$$

$$=: \sum_{j=1}^{5} K_{3j}^{\varepsilon},\ 0<\varepsilon<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ t_1(\varepsilon) := (t+\tau-\varepsilon)/2. \quad (4.152)$$

Враховуючи властивість параметриксу G_{23}, маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K^{\varepsilon}_{31} = Q_{23}(t,x;\tau,\xi), \ \ 0\le\tau<t\le T, \ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{4.153}$$

Оцінимо доданки $K^{\varepsilon}_{3j}, \ j\in\mathbb{N}_5$. За допомогою оцінок (4.150), (4.127) і нерівності (2.79), маємо

$$|K^{\varepsilon}_{32}| \le C\int\limits_{\tau}^{t_1(\varepsilon)} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E^{(2)}_{c}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} E^{(2)}_{c}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le C(t-t_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{\tau}^{t_1(\varepsilon)}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} J^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,00)}_{0,c,\hat{C}}(x;\xi)d\beta \le C(t-\tau+\varepsilon)^{-1}(t-\tau)^{-M}\times$$

$$\times(t-\tau-\varepsilon)^{\hat{m}_3\gamma_3} E^{(2)}_{c_1}(t-\tau,x,\xi),\ 0<\varepsilon<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_1<c. \tag{4.154}$$

За допомогою умови (1.13), оцінок (4.119), (4.127) і нерівностей (2.54), (2.79) отримаємо

$$|K^{\varepsilon}_{33}| \le C\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left((t-\beta)^{-M-1}+(t-\beta)^{-M-1/(2b)}+(t-\beta)^{-M}\right)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times\left(|t-\beta|^{\hat{m}_3\gamma_3}+|X_3(t-\beta)-\lambda_3|^{\gamma_3}\right)E^{(2)}_{c}(t-\beta,x,\lambda)E^{(2,3)}_{c}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le C\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon}((t-\beta)(\beta-\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} J^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,00)}_{0,c,\hat{C}}(x;\xi)d\beta \le C(t-\tau)^{-M}E^{(2)}_{c_1}(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon}((t-\beta)(\beta-\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta, 0<\varepsilon<\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, 0<c_1<c. \tag{4.155}$$

Беручи до уваги обмеженість коефіцієнтів, оцінки (4.119), (5.144) і нерівностей (2.54), (2.79) одержуємо

$$|K^{\varepsilon}_{34}| \le C\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left((t-\beta)^{-M-1}+(t-\beta)^{-M-1/2}+(t-\beta)^{-M}\right)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E^{(2)}_{c}(t-\beta,x,\lambda)\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s}\sum_{j=s-1}^{s}E^{(2)}_{c}(\beta,\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)d\lambda \le$$

$$\leq C\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon}\sum_{s=1}^{3}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}\sum_{j=s-1}^{s}J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x;\xi)d\beta\leq$$

$$\leq C\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon}(t-\beta)^{\gamma}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta(t-\tau)^{-M}E_{c_1}^{(2)}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\varepsilon<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_1<c,\ \gamma=\min\{\hat{m}_1\gamma_1,\hat{m}_2\gamma_2,\hat{m}_3\gamma_3.\}\tag{4.156}$$

Оцінку доданка K_{35}^{ε} проводимо аналогічно за допомогою припущення (A_{21}), оцінок (4.121),(4.127) і нерівності (2.60). Маємо

$$|K_{35}^{\varepsilon}|\leq C\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2)}(\beta,\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M}\int\limits_{t_1(\varepsilon)}^{t-\varepsilon}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta E_{c_1}^{(2)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0<\varepsilon<\tau<t\leq T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ 0<c_1<c.\tag{4.157}$$

З оцінок (4.154) – (**??**), співвідношення (4.153) випливає існування $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}K_{3j}^{\varepsilon},\ j\in\mathbb{N}_5$, формула для похідної Лі від W_{23}

$$S_LW_{23}(t,x;\tau,\xi)=Q_{23}(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}SG_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}SG_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}SG_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta\tag{4.158}$$

та оцінки

$$|S_LW_{23}(t,x;\tau,\xi)|\leq C(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c_1}^{(2)}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0\leq\tau<t\leq T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ 0<c_1<c.\tag{4.159}$$

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 4.4. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (4.115) *виконуються умови* (A_{21}) *і* (A_{22})*, в яких числа* γ_1*,* γ_2 *і* γ_3 *—довільні з проміжку* $(0,1)$*. Тоді для цього рівняння існує Лі-ФРЗК* Z_{23} *і справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_{23}(t,x;\tau,\xi;y_3| \leq C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n, |k_1|/(2b)+\hat{m}_2|k_2|+\hat{m}_3|k_3|\leq 1\}; \tag{4.160}$$

$$|S_L Z_{23}(t,x;\tau,\xi| \leq C(t-\tau)^{-M-1} E_c^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi), \tag{4.161}$$

$$0\leq\tau<t\leq T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Зауважимо, що аналогічно до доведення існування похідної Лі від Z_{23} доводиться існування та оцінки $\partial_t Z_{23}$. Правильне таке твердження:

Теорема 4.5. *За умов теореми 4.3 існує похідна* $\partial_t W_{23}$*, яка визначається формулою*

$$\partial_t W_{23}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G_{23}(t,x;\beta,\lambda) Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_t G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\tau)} Q_{23}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_t G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_3 \right) \Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1 d\lambda_2 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G_{23}(t,x;\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda \right) Q_{23}(\beta,X(t-\tau);\tau,\xi)d\beta + Q_{23}(t,x;\tau,\xi), \tag{4.162}$$

і справджуються оцінки

$$\partial_t Z_{23}(t,x;\tau,\xi| \leq C(t-\tau)^{-M-1}\left(1+(t-\tau)^{-\hat{m}_1}|x_1|+(t-\tau)^{-\hat{m}_1}|x_2|\right)\times$$

$$|E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi),\ 0\leq\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{4.163}$$

4.4. Оцінки приростів похідних ФРЗК для основного рівняння

Основні результати підрозділу містяться в наступній теоремі.

Теорема 4.6. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (4.115) *виконуються умови* (A_{21}), (A_{22}) *і* (A_{25}). *Тоді справджуються такі оцінки:*

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}Z_{23}(t,x;\tau,\xi)| \leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l\gamma_l - \hat{m}_{l-1})}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s}\times$$
$$\times\left(E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(2)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), 0\leq\tau<t\leq T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$
$$k_s\in\mathbb{Z}_+^{n_s},\ \{l,s\}\subset\mathbb{N}_3,\ |k_1| = 2b,\ |k_2| = |k_3| = 1,\ \hat{m}_0\equiv 0; \tag{4.164}$$

Доведення. Класичний ФРЗК Z_{23} для рівняння (4.115) визначається формулою (4.116), тобто $Z_{23} = G_{23} + W_{23}$. Оцінки приростів похідних за просторовими змінними параметриксу G_{23} визначаються формулами (4.120). Тому для доведення теореми досить встановити оцінки для похідних від об'ємного потенціалу W_{23}.

Оцінки приростів старших похідних за просторовими змінними досить провести за умови $|x_s - z_s|^{1/m_s} < (t-\tau)/4,\ s\in\mathbb{N}_3$. На підставі (4.138) запишемо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{23}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$
$$-\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{z_1}^{k_1}G_{23}(t,z^{(1)};\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{Z^{(1)}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$
$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+$$

$$+\int\limits_{\eta_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+$$

$$-\int\limits_{\eta_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,z^{(1)};\beta,\lambda)d\lambda\right)Q_{23}(\beta,Z^{(1)}(t-\beta);\tau,\xi)d\beta=:\sum_{j=1}^{7}D_{3j}^{1};\quad(4.165)$$

$$|D_{31}^{1}|\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(2)}(t,\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_c^{(2)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-t_1)^{-1-\hat{m}_1\gamma_1}\int\limits_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta\times$$

$$\times J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,03)}(x,\xi)\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Використовуючи зображення

$$G_{23}(t,x;\beta,\lambda)=G_{21}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))+W_{21}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))+W_{22}(t,x;\beta,\lambda;\lambda_3),\quad(4.166)$$

подамо другий доданок з (4.165) у вигляді суми

$$D_{32}^{1}=D_{32}^{11}+D_{32}^{12}+D_{32}^{13},$$

де

$$D_{32}^{11}:=\int\limits_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{21}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda;$$

$$D_{32}^{12}:=\int\limits_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{21}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda;$$

$$D_{32}^{13}:=\int\limits_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{22}(t,x;\beta,\lambda;\lambda_3)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda.$$

Оцінимо D_{32}^{11} за допомогою оцінок (4.5) при $\gamma_1^0>\gamma_1$ і оцінок (4.128) при $\gamma_s^0=\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1,\ s\in\mathbb{N}_3$.

$$|D_{32}^{11}|\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\int\limits_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1^0}\big(E_c^{(2)}(t,\beta,x,\lambda)+E_c^{(2)}(t,\beta,z^{(1)},\lambda)\big)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\hat m_s^{-1}\hat m_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat m_s\gamma_s-\hat m_1\gamma_1}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}J_1(\hat m_1(\gamma_1-\gamma_1^0))\sum_{s=1}^{3}(t_1-\tau)^{-1+\hat m_s\gamma_s-\hat m_1\gamma_1}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{2}\big(J_{0,c,\hat C}^{(2,\hat m_1\gamma_1,0j)}(x,\xi)+J_{0,c,\hat C}^{(2,\hat m_1\gamma_1,0j)}(z^{(1)},\xi)\big)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\big).$$

Доданок D_{32}^{12} оцінюємо за допомогою оцінок (4.40) при $\gamma_1^0=\gamma_1$ і оцінок (4.128) при $\gamma_s^0=\hat m_s^{-1}\hat m_1\gamma_1,\ s\in\mathbb{N}_3$. Маємо

$$|D_{32}^{12}|\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}\big(E_c^{(2,3)}(t-\beta,x,\lambda)+E_c^{(2,3)}(t-\beta,z^{(1)},\lambda)\big)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\hat m_s^{-1}\hat m_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat m_s\gamma_s-\hat m_1\gamma_1}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}J_1(\hat m_1\gamma_1)\sum_{s=1}^{3}(t_1-\tau)^{-1+\hat m_s\gamma_s-\hat m_1\gamma_1}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{2}\big(J_{0,c,\hat C}^{(1,\hat m_3\gamma_3,0j)}(x,\xi)+J_{0,c,\hat C}^{(1,\hat m_3\gamma_3,0j)}(z^{(1)},\xi)\big)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\gamma}\big(E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\big),$$

де γ — таке як вище.

Доданок D_{32}^{13} оцінюємо аналогічно до D_{32}^{12}, тільки замість оцінок (4.40) використовуємо оцінки (4.102) при $\tau=\beta$, $\xi=\lambda$, $y_3=\lambda_3$. З оцінок доданків $D_{32}^{1j},\ j\in\mathbb{N}_3$, випливає оцінка

$$|D_{32}^{1}|\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big).\qquad(4.167)$$

Доданки D_{33}^{1} і D_{34}^{1} оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D_{33}^{1}|\le C\int_{\eta_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c^{(2)}(t-\beta,x,\lambda)\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\hat m_s^{-1}\hat m_1\gamma_1}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s-\hat{m}_1\gamma_1}\sum_{j=s-1}^{s}E_c^{(2)}(\beta,\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)\leq$$

$$\leq C\int_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta\sum_{s=1}^{3}(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s-\hat{m}_1\gamma_1}\sum_{j=0}^{2}\big(J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x,\xi)+$$

$$+J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(z^{(1)},\xi)\big)\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big).$$

Доданок D_{35}^{1} оцінюємо подібно до D_{32}^{1}. За допомогою (4.166) подамо цей доданок у вигляді суми

$$D_{35}^{1}=D_{35}^{11}+D_{35}^{12}+D_{35}^{13},$$

де

$$D_{35}^{11}:=\int_{t_1}^{\eta_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{21}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))d\lambda\right)Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta;$$

$$D_{35}^{12}:=\int_{t_1}^{\eta_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{21}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))d\lambda\right)Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta;$$

$$D_{35}^{13}:=\int_{t_1}^{\eta_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{22}(t,x;\beta,\lambda;\lambda_3)d\lambda\right)Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta.$$

Оцінимо D_{35}^{11} за допомогою оцінок (4.5) при $\gamma_1^0>\gamma_1$ і оцінок (4.127). Маємо

$$|D_{35}^{11}|\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)}\times$$

$$\times\big(E_c^{(2)}(t,\beta,x,\lambda)+E_c^{(2)}(t,\beta,z^{(1)},\lambda)\big)d\lambda(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_c^{(2)}(\beta,\tau,X(t-\beta),\xi)\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}J_1(\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0))E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1\hat{m}_3\gamma_3}\big(E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\big).$$

Зауважимо, що при $\beta\in[t_1,\eta_1]$ справджується оцінка

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{21}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))|\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

За допомогою цієї оцінки оцінюємо доданок D_{35}^{12}

$$|D_{35}^{12}|\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi)d\lambda\times$$

$$\times E_c^{(2)}(\beta,\tau,X(t-\beta);\xi) \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1} J_1(\hat m_1\gamma_1)(t_1-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi) \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3+\hat m_1\gamma_1} E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

Доданок D_{35}^{13} оцінюємо аналогічно до D_{35}^{12}, тільки замість оцінок (4.40) використовуємо оцінки (4.102) при $\tau=\beta$, $\xi=\lambda$, $y_3=\lambda_3$.

З оцінок доданків D_{35}^{1j}, $j\in\mathbb{N}_3$, випливає

$$|D_{35}^1| \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}\big(E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big). \quad (4.168)$$

Доданки D_{36}^1, D_{37}^1 оцінюються однаково. Оцінимо, наприклад, перший з них.

$$|D_{36}^1| \le C\int_{\eta_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-1+\hat m_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3} E_c^{(2)}(\beta,\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1+\hat m_3\gamma_3}\int_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat m_1\gamma_1}d\beta E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi) \le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків D_{3j}^1, $j\in\mathbb{N}_7$, випливає така оцінка:

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{23}(t,x;\tau,\xi)| \le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big). \quad (4.169)$$

Перейдемо до оцінок приростів за змінною x_2. Запишемо таке зображення:

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1}W_{23}(t,x;\tau,\xi) = \int_{\tau}^{t_1} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_2} d\beta\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_2 d\lambda_3\Big)\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_2} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Big(\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)\Big)d\lambda + \int_{\eta_2}^{t} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_2}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{z_1}^{k_1} G_{23}(t, z^{(2)}; \beta, \lambda) \Delta_{\lambda}^{Z^{(2)}(t-\beta)} Q_{23}(\beta, \lambda; \tau, \xi) d\lambda -$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} G_{23}(t, x; \beta, \lambda) d\lambda \right) Q_{23}(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi) d\beta +$$

$$+\int\limits_{\eta_2}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_1}^{k_1} G_{23}(t, x; \beta, \lambda) d\lambda \right) Q_{13}(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi) d\beta +$$

$$-\int\limits_{\eta_2}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{23}(t, z^{(2)}; \beta, \lambda) d\lambda \right) Q_{23}(\beta, Z^{(2)}(t-\beta); \tau, \xi) d\beta =: \sum_{j=1}^{8} D_{3j}^2; \quad (4.170)$$

$$|D_{31}^2| \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_2\gamma_2} E_c^{(2)}(t, \beta, x, \lambda) (\beta - \tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_c^{(2)}(\beta - \tau, \lambda, \xi) d\lambda \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (t - t_1)^{-1-\hat{m}_2\gamma_2} \int\limits_{\tau}^{t} (\beta - \tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} d\beta \times$$

$$\times J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,03)}(x, \xi) \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (t - \tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_2\gamma_2} E_c^{(2)}(t - \tau, x, \xi).$$

Другий доданок оцінюємо за допомогою оцінок (4.124), (4.128) при $\gamma_2^0 = \gamma_2$ і нерівностей (2.79). Маємо

$$|D_{32}^2| \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} \int\limits_{t_1}^{\eta_2} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - 1 - \hat{m}_2\gamma_2} E_c^{2,1}(t - \beta, x_1 - \lambda_1) |x_1 - z_1|^{\gamma_1} \times$$

$$\le (\beta - \tau)^{-M-1} \sum_{j=0}^{1} E_c^{(2)}(\beta - \tau, \Lambda^{0j}(t - \beta); \xi) d\lambda_1 \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (t_1 - \tau)^{-1} J_2(\hat{m}_1\gamma_1 - \hat{m}_2\gamma_2) \sum_{j=0}^{1} J_{1,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x_1, \xi) \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} (t - \tau)^{-M-1} \big(E_{c_0}^{(2)}(t - \tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(2)}(t - \tau, z^{(2)}, \xi) \big).$$

За допомогою рівності

$$G_{23}(t, x; \beta, \lambda) = G_{22}(t, x; \beta, \lambda; \lambda_3) + W_{22}(t, x; \beta, \lambda; \lambda_3),$$

маємо $D_{33}^2 = D_{33}^{21} + D_{33}^{22}$.

Перший доданок суми оцінюємо за допомогою оцінок (4.120) при $\gamma_2^0 > \gamma_2$ і (4.128) при $\gamma_s^0 = (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2,\ s \in \{2,3\}$.

$$D_{33}^{21} \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \int\limits_{t_1}^{\eta_2} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_2\gamma_2^0} E_c^{(2,3)}(t-\beta, x, \lambda)(\beta-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times \sum_{s=2}^{3} |X_s(t-\beta) - \lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2} \sum_{j=s-1}^{s} \Bigg(E_c^{(2)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi) +$$

$$+ E_c^{(2)}(\beta-\tau, \Lambda^{2j}(t-\beta), \xi) \Bigg) \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} (t_1 - \tau)^{-1} J_2(\hat{m}_2(\gamma_2 - \gamma_2^0)) \times$$

$$\times \sum_{j=s-1}^{s} \Bigg(J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x, \xi) + J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(z^{(2)}, \xi) \Bigg) \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (t-\tau)^{-M-1} \big(E_{c_0}^{(2)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(2)}(t-\tau, z^{(2)}, \xi) \big).$$

Аналогічно за допомогою оцінок (4.102) при $\gamma_2^0 = \gamma_2$ і (4.128) при $\gamma_s^0 = (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2,\ s \in \{2,3\}$, оцінюємо другий доданок.

$$D_{33}^{22} \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} \int\limits_{t_1}^{\eta_2} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E_c^{(2)}(t-\beta, x, \lambda)(\beta-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times \sum_{s=2}^{3} |X_s(t-\beta) - \lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2} \sum_{j=s-1}^{s} \Bigg(E_c^{(2)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta), \xi) +$$

$$+ E_c^{(2)}(\beta-\tau, \Lambda^{2j}(t-\beta), \xi) \Bigg) \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (t_1 - \tau)^{-1} J_2(\hat{m}_2\gamma_2) \sum_{j=s-1}^{s} \Bigg(J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x, \xi) + J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(z^{(2)}, \xi) \Bigg) \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} \big(E_{c_0}^{(2)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(2)}(t-\tau, z^{(2)}, \xi) \big).$$

Отже, справджується оцінка

$$|D_{33}^{2}| \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (t-\tau)^{-M-1} \big(E_{c_0}^{(2)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(2)}(t-\tau, z^{(2)}, \xi) \big).$$

Оцінимо D_{34}^2. За допомогою оцінок (4.119) і (4.128) при $\gamma_s^0 = (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2,\ s \in \in \{2,3\}$, маємо

$$D_{34}^{22} \le C \int\limits_{\eta_2}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E_c^{(2)}(t-\beta, x, \lambda)(\beta-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2}\sum_{j=s-1}^{s}\Big(E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)+$$

$$+E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{2j}(t-\beta),\xi)\Big)\leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1}J_2(\hat{m}_1\gamma_1)\sum_{j=s-1}^{s}\Big(J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(x,\xi)+J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0j)}(z^{(2)},\xi)\Big)\leq$$

$$\leq C|x_2-z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2}\big(E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,z^{(2)},\xi)\big).$$

Доданок D_{35}^2 має аналогічну оцінку. Оцінимо D_{36}^2 за допомогою (4.124) при $\gamma_2^0<\gamma_2$ і (4.127).

$$D_{36}^2\leq C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}\int_{\eta_2}^{t}(t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_2(\gamma_2-\gamma_2^0)}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_c^{(2,3)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\leq C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times\int_{\eta_2}^{t}(t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_2(\gamma_2-\gamma_2^0)}d\beta E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C|x_2-z_2|^{\gamma_2}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

За допомогою оцінок (4.124) і (4.127) оцінимо D_{37}^2

$$D_{37}^2\leq C\int_{\eta_2}^{t}(t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2)}(\beta,\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}\int_{\eta_2}^{t}(t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C|x_2-z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданок D_{38}^2 має аналогічну оцінку. З оцінок доданків $D_{3j}^2,\ j\in\mathbb{N}_8$, випливає така оцінка:

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1}W_{23}(t,x;\tau,\xi)|\leq C|x_2-z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,z^{(2)},\xi)\big).\qquad(4.171)$$

Для того, щоб встановити оцінки приростів за змінною x_3, використовуватимемо таке зображення:

$$\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1}W_{23}(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_3}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_2 d\lambda_3\Bigg)\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_3}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_3\Bigg)\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{\eta_3}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{13}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_3}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,z^{(3)};\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{Z^{(3)}(t-\beta)}Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_3}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\Bigg)Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+$$

$$+\int\limits_{\eta_3}^{t}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\Bigg)Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta-$$

$$-\int\limits_{\eta_3}^{t}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{23}(t,z^{(3)};\beta,\lambda)d\lambda\Bigg)Q_{23}(\beta,Z^{(3)}(t-\beta);\tau,\xi)d\beta=:\sum_{j=1}^{8}D_{3j}^3;\quad(4.172)$$

$$|D_{31}^3|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_c^{(2)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(t-t_1)^{-1-\hat{m}_3\gamma_3}\int\limits_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta\times$$

$$\times J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,03)}(x,\xi)\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(t-\tau)^{-M-1}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

Другий доданок оцінюємо за допомогою оцінок (4.124), (4.128) при $\gamma_3^0=\gamma_3$ і нерівностей (**??**). Маємо

$$|D_{32}^3| \le C|x_3 - z_3|^{\gamma_3} \int\limits_{t_1}^{\eta_3} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - 1 - \hat{m}_3\gamma_3} E_c^{2,1}(t-\beta, x_1-\lambda_1)|x_1-z_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\le (\beta-\tau)^{-M-1} \sum_{j=0}^{1} E_c^{(2,3)}(\beta-\tau, \Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)d\lambda_1 \le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(t_1-\tau)^{-1} J_3(\hat{m}_1\gamma_1 - \hat{m}_3\gamma_3) \sum_{s=0}^{1} J_{1,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,0s)}(x_1,\xi) \le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,z^{(2)},\xi)\big).$$

Доданок D_{33}^3 оцінюємо за допомогою оцінок (4.126) при $\gamma_3^0 = \gamma_3$, (4.128) при $\gamma_2^0 = \gamma_2$ і нерівностей (2.81).

$$|D_{33}^3| \le C|x_3-z_3|^{\gamma_3} \int\limits_{t_1}^{\eta_3} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (t-\beta)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - 1} E_{c,\hat{C}}^{2,\hat{m}_3\gamma_3,2}(t-\beta, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)\times$$

$$\times|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2}(\beta-\tau)^{-M-1}\sum_{s=1}^{2} E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)d\lambda_1 d\lambda_2 \le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(t_1-\tau)^{-1}J_3(\hat{m}_2\gamma_2)\sum_{s=1}^{2} I_2^{(1,0j)}(x_1,x_2;\xi) \le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2}\big(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\big).$$

Доданки D_{34}^3 і D_{35}^3 оцінюються однаково. Оцінимо D_{34}^3. За допомогою оцінок (4.119) і (4.128) при $\gamma_s^0 = (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1,\ s \in \mathbb{N}_3$, маємо

$$|D_{34}^3| \le C \int\limits_{\eta_3}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E_c^{(2)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times \sum_{s=1}^{3} |X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} \sum_{j=s-1}^{s} E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta);\xi)d\lambda \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1}\int\limits_{\eta_3}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta \sum_{s=1}^{3}\sum_{j=s-1}^{s} J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,0j)}(x;\xi) \le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1}E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданок D_{36}^3 оцінюємо аналогічно за допомогою оцінок (4.124) при $\gamma_3^0 > \gamma_3$ і

(4.127). Маємо

$$|D_{36}^3| \le C|x_3 - z_3|^{\gamma_3^0} \int\limits_{t_1}^{\eta_3} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_3(\gamma_3-\gamma_3^0)} E_c^{(2)}(\beta, \tau, X(t-\beta), \xi) \le$$

$$\le C|x_3 - z_3|^{\gamma_3^0}(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} J_3(\hat{m}_3(\gamma_3-\gamma_3^0)) E_c^{(2)}(t-\tau, x, \xi) \le$$

$$\le C|x_3 - z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1} E_{c_0}^{(2)}(t, \tau, x, \xi).$$

Доданки D_{37}^3 і D_{38}^3 оцінюються однаково. За допомогою оцінок (4.119) і (4.127) оцінимо перший з них.

$$|D_{37}^3| \le C \int\limits_{\eta_3}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} d\beta E_c^{(2)}(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi) d\beta \le$$

$$\le C \int\limits_{\eta_3}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} d\beta (t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(t, \tau, x), \xi) \le$$

$$\le C|x_3 - z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(2)}(t, \tau, x, \xi).$$

З оцінок доданків D_{3j}^3, $j \in \mathbb{N}_8$, випливає оцінка

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1} W_{23}(t, x; \tau, \xi)| \le C|x_3 - z_3|^{(\hat{m}_3)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times \big(E_{c_0}^{(2)}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_0}^{(2)}(t, \tau, z^{(1)}, \xi)\big). \tag{4.173}$$

За допомогою формул (4.139) і (4.140) запишемо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l} W_{23}(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t, x; \beta, \lambda) Q_{23}(\beta, \lambda; \tau, \xi) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t, x; \beta, \lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \Bigg) \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)} Q_{23}(\beta, \Lambda^{01}(t-\beta); \tau, \xi) d\lambda_1 +$$

$$+ \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t, x; \beta, \lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \Bigg) \Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)} Q_{23}(\beta, \Lambda^{01}(t-\beta); \tau, \xi) d\lambda_1$$

$$- \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t, z^{(s)}; \beta, \lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \Bigg) \Delta_{\Lambda^{s1}(t-\beta)}^{Z^{(s)}(t-\beta)} Q_{23}(\beta, \Lambda^{s1}(t-\beta); \tau, \xi) d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_3\right)\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_3\right)\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1-$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t,z^{(s)};\beta,\lambda)d\lambda_3\right)\Delta_{\Lambda^{s2}(t-\beta)}^{\Lambda^{s1}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\Lambda^{s2}(t-\beta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t,z^{(s)};\beta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{s2(t-\beta)}(t-\beta)} Q_{23}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right) Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta+$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda\right) Q_{23}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi)d\beta-$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \partial_{x_l}^{k_l} G_{23}(t,z^{(s)};\beta,\lambda)d\lambda\right) Q_{23}(\beta,Z^{(s)}(t-\beta);\tau,\xi)d\beta =:$$

$$=: \sum_{j=1}^{13} D_{3j}^{ls},\ l\in\{2,3\},\ s\in\mathbb{N}_3.$$

Доданок D_{31}^{ls} оцінюємо за допомогою оцінок (4.124), (4.127) і нерівностей (2.79). Маємо для $l\in\{2,3\},\ s\in\mathbb{N}_3$

$$|D_{31}^{ls}|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s} E_c^{(2)}(t,\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_c^{(2)}(\beta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda \leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t-t_1)^{-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s}\int\limits_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-\hat{m}_l+\hat{m}_3\gamma_3}d\beta\times$$

$$\times J_{0,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,03)}(x,\xi) \leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t-\tau)^{-M-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Другий доданок оцінюємо за допомогою оцінок (4.124), (4.128) при $\gamma_s^0=\gamma_s$ і нерівностей (2.68).

$$|D_{32}^{ls}| \leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}(t-\beta)^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_l(1-\gamma_l)-\hat{m}_s\gamma_s}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}\Big(E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{01}(t-\tau),\xi)+E_c^{(2)}(\beta-\tau,X(t-\tau),\xi)\Big)d\lambda_1 \leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-l}J_s(\gamma_{ls})\Big(J_{1,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,03)}(x_1,\xi)+J_{1,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,03)}(x_1,\xi)\Big), \quad (4.174)$$

де $\gamma_{ls}=1+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_l(1-\gamma_l)-\hat{m}_s\gamma_s,\ l\in\{2,3\},\ s\in\mathbb{N}_3$.

З нерівностей (4.174) і (3.164), випливає

$$|D_{32}^{ls}| \leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s-(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_{s-1}}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_{s-1}+\gamma_{ls}}E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданки D_{33}^{ls}, D_{34}^{ls} оцінюються однаково. За допомогою оцінок (4.123), (4.128) і нерівностей (2.80) оцінимо перший з них.

$$|D_{33}^{ls}| \leq C\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_l(1-\gamma_l)}|x_1-z_1|^{\gamma_1}E_c^{2,1}(t-\beta,x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\Big(E_c^{(2)}(\beta,\tau,\Lambda^{01}(t-\tau),\xi)+E_c^{(2)}(\beta,\tau,X(t-\tau),\xi)\Big)d\lambda_1 \leq$$

$$\leq C\Big(J_{1,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,01)}(x_1,\xi)+J_{1,c,\hat{C}}^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,00)}(x_1,\xi)\Big)\int\limits_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l)+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta\times$$

$$\times(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s-(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_{s-1}}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_{s-1}+\gamma_{ls}}E_{c_0}^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

Оцінимо D_{35}^{ls}. Для цього використаємо оцінки (4.126), (4.128) і (2.81). Для $s\in\in\mathbb{N}_3$ маємо для $l=2$ і $s\in\mathbb{N}_3$

$$|D_{35}^{2s}| \leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}(t-\beta)^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_2n_2-\hat{m}_2-\hat{m}_s\gamma_s}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2}E_{c,\hat{C}}^{2,\hat{m}_3\gamma_3,2}(t-\beta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2 \leq$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-1} J_s(\hat m_2\gamma_2 - \hat m_1 - \hat m_s\gamma_s)\times$$
$$\times\left(J^{(2,\hat m_3\gamma_3,01)}_{2,c,\hat C}(x_1,x_2;\xi) + J^{(2,\hat m_3\gamma_3,00)}_{2,c,\hat C}(x_1,x_2;\xi)(x_1,x_2;\xi)\right) \le$$
$$\le C|x_s - z_s|^{(\hat m_s)^{-1}(\hat m_2\gamma_2-\hat m_1)}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3} E^{(2)}_c(t-\tau,x,\xi).$$

Аналогічно оцінюємо у випадку $l=3$ і $s\in\mathbb{N}_3$

$$|D^{3s}_{35}| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (t-\beta)^{-\hat m_1 n_1 - \hat m_2 n_2 - \hat m_3(1-\gamma_3)-\hat m_s\gamma_s}\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2} E^{2,\hat m_3\gamma_3,2}_{c,\hat C}(t-\beta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 \le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-1}J_s(1-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_2\gamma_2 - \hat m_s\gamma_s)\times$$
$$\times\left(J^{(2,\hat m_3\gamma_3,01)}_{2,c,\hat C}(x_1,x_2;\xi) + J^{(2,\hat m_3\gamma_3,00)}_{2,c,\hat C}(x_1,x_2;\xi)(x_1,x_2;\xi)\right) \le$$
$$\le C\begin{cases} |x_2-z_2|^{\gamma_2}(t-\tau)^{-M-1-\hat m_2+\hat m_3\gamma_3+\hat m_2\gamma_2}E^{(2)}_c(t,\tau,x,\xi), & \text{при } l=2,\\ |x_3-z_3|^{(\hat m_s)^{-1}(\hat m_3\gamma_3-\hat m_2)}(t-\tau)^{-M-1+\hat m_3\gamma_3+\hat m_2\gamma_2}E^{(2)}_c(t,\tau,x,\xi), & \text{при } l=3.\end{cases}$$

Доданки D^{ls}_{36} і D^{ls}_{37} також оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D^{2s}_{36}| \le C\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}(t-\beta)^{-\hat m_1 n_1-\hat m_2 n_2 - \hat m_2}\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2}E^{2,\hat m_3\gamma_3,2}_{c,\hat C}(t-\beta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2))d\lambda_1 d\lambda_2 \le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-1}\left(J^{(2,\hat m_3\gamma_3,01)}_{2,c,\hat C}(x_1,x_2;\xi)+J^{(2,\hat m_3\gamma_3,02)}_{2,c,\hat C}(x_1,x_2;\xi)\right)\times$$
$$\times\int\limits_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-\hat m_2(1-\gamma_2)}d\beta \le\le C|x_s-z_s|^{(\hat m_s)^{-1}(\hat m_2\gamma_2-\hat m_1)}(t-\tau)^{-M-1}E^{(2)}_c(t-\tau,x,\xi).$$

$$|D^{3s}_{36}| \le C\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}(t-\beta)^{-\hat m_1 n_1-\hat m_2 n_2-\hat m_3(1-\gamma_3)}\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\gamma_2}E^{2,\hat m_3\gamma_3,2}_{c,\hat C}(t-\beta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 \le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-1}\int\limits_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_2\gamma_2}d\beta\times$$

$$\times\left(J^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,01)}_{2,c,\hat{C}}(x_1,x_2;\xi)+J^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,02)}_{2,c,\hat{C}}(x_1,x_2;\xi)\right)\leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_2)}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2}E^{(2)}_c(t-\tau,x,\xi).$$

Оцінимо тепер D^{ls}_{38}. Для цього використаємо оцінки (4.120), (4.128) і (2.81). Отримаємо

$$|D^{ls}_{38}|\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s}E^{(2,3)}_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}|X_3(t-\beta)-\lambda_3|^{\gamma_3}E^{(2)}_c(\beta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-1}\times$$

$$\times J_s(\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_{l-1}-\hat{m}_s\gamma_s)\left(J^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,01)}_{2,c,\hat{C}}(x_1,x_2;\xi)+J^{(2,\hat{m}_3\gamma_3,00)}_{2,c,\hat{C}}(x_1,x_2;\xi)\right)\leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_{l-1})}(t-\tau)^{-M-1}E^{(2)}_c(t,\tau,x,\xi).$$

Доданки D^{ls}_{39} і D^{ls}_{310} також оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D^{ls}_{39}|\leq C\int\limits_{\eta_s}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-\hat{m}_l}E^{(2)}_c(t,\beta,x,\lambda)|X_3(t-\beta)-\lambda_3|^{\gamma_3}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}E^{(2)}_c(\beta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\leq C(t_1-\tau)^{-1}J^{(2,\hat{m}_1\gamma_1,00)}_{0,c,\hat{C}}(x;\xi)\int\limits_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_l}d\beta\leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_{l-1})}(t-\tau)^{-M-1}E^{(2)}_{c_0}(t,\tau,x,\xi).$$

Оцінимо D^{ls}_{311}. Для цього використаємо оцінки (4.122), (4.127) і (2.62). Отримаємо

$$|D^{3s}_{311}|\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{t_1}^{\eta_s}(t-\beta)^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l)-\hat{m}_s\gamma_s}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E^{(2,3)}_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times J_s(\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_{l-1}-\hat{m}_s\gamma_s)E^{(2)}_c(t,\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_{l-1})}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E^{(2)}_c(t-\tau,x,\xi).$$

Доданки D^{ls}_{312} і D^{ls}_{313} також оцінюються аналогічно. Оцінимо перший з них.

Використовуючи оцінки (4.121), (4.127) і (2.62), отримуємо

$$|D_{312}^{3s}| \leq C\int\limits_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l)}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\int\limits_{\eta_s}^{t}(t-\beta)^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l)}d\beta E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_{l-1})}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків D_{3j}^{ls}, $j \in \mathbb{N}_{13}$, нерівностей (4.169), (**??**) і (4.173), означення (4.116) і оцінок (4.120) випливають оцінки (4.164). ►

РОЗДІЛ 5
КЛАСИЧНІ ФРЗК ДЛЯ РІВНЯНЬ З КЛАСУ $\boldsymbol{K_3}$

В розділі наведено основні результати побудови і дослідження класичного ФРЗК для рівнянь з класу $\boldsymbol{K_3}$, які опубліковано в працях [22,30,31,36].

5.1. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_3^{(t,x^1(y))}$

На першому етапі ФРЗК для рівняння

$$L_3^{(t,x^{(1)}(y))}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad y' \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \tag{5.1}$$

шукаємо у вигляді

$$Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y') = G_{31}(t,x;\tau,\xi;y') + W_{31}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{5.2}$$

де

$$W_{31}(t,x;\tau,\xi;y') := \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{31}(t,x;\theta,\lambda;y')Q_{31}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda, \tag{5.3}$$

G_{31} — параметрикс, а G_{31} — невідома функція. За параметрикс G_{31} на першому етапі побудови ФРЗК беремо функцію

$$G_{31}(t,x;\tau,\xi;y') := Z_{30}(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y')),$$

$$0 < \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y' := (y_2,y_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3},$$

де Z_{30} — ФРЗК з теореми 2.3.

В цьому розділі і далі будемо використовувати такі позначення:

$$E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) := E^d(t,\tau)E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi),$$

$$E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1) := E^d(t,\tau)E_c^{(2,1)}(B(t,\tau),x_1,\xi_1),$$

$$E_{c,d}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) := E^d(t,\tau)E_c^{(2,2)}(B(t,\tau),x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),$$

$E^d(t,\tau) := \exp\{dA(t,\tau)\}$, функції $A(t,\tau)$ і $B(t,\tau)$ — такі, як означені у розділі 1. Тут $0 < \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_s,\xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_2$, $c > > 0$, $d \in \mathbb{R}$.

Наведемо властивості параметриксу.

Лема 5.1. *За умов теореми 2.3 для функції* G_{31} *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C_k (B(t,\tau))^{-M-M_k} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), \tag{5.4}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C_k |x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (B(t,\tau))^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times (E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \tag{5.5}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^k G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C_k (B(t,\tau)^{-M-M_k} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) \times$$

$$\times \big((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s} + |Y_s((B(h,\tau))) - z_s|^{\gamma_s}\big), s \in \{2,3\}, \tag{5.6}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{31}(t,x;\tau,\xi;y') d\xi \right| \le C(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k \ne 0, \tag{5.7}$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{31}(t,x;\tau,\xi;y') d\xi \right| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (B(t,\tau))^{-M_k - \hat{m}_s\gamma_s^0 + \hat{m}_1\gamma_1}, k \ne 0, \tag{5.8}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3)) d\xi_2 d\xi_3 \right| \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1 - M_{k'} + \hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1), \quad k' \ne 0, \tag{5.9}$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3)) d\xi_2 d\xi_3 \right| \le C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1 - M_{k'} - \hat{m}_s\gamma_s^0 + \hat{m}_2\gamma_2} \times$$

$$\times |x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (E_{c_0,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1) + E_{c_0,d}^{(2,1)}(t,\tau,z_1,\xi_1)), \quad k' \ne 0, \tag{5.10}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)) d\xi_3 \right| \le C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)} \times$$

$$\times E_{c_0,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1) E_{c_0,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), \qquad k_3 \ne 0, \tag{5.11}$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)) d\xi_3 \right| \le C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3) - \hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times |x_s - z_s|^{\gamma_s^0} E_{c_0,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1) E_{c_0,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), \qquad k_3 \ne 0, \tag{5.12}$$

а також рівності

$$\partial_x^{k'} G_{31}(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} G_{31}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{5.13}$$

$$\partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = 0, \qquad k' \neq 0, \tag{5.14}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \neq 0, \tag{5.15}$$

де $0 < \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, y' := (y_2, y_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}, \{x_s, y_s, z_s, \xi_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s},\ k := = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n,\ k' := (0, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n,\ \gamma_s^0 \in (0,1], s \in \mathbb{N}_3,\ h$ *і* γ_s *– числа з умов* (1.11) – (1.13), $d_1 + d_2 = d$.

За зроблених припущень функція Q_{31} задовольняє таке інтегральне рівняння:

$$Q_{31}(t,x;\tau,\xi;y') = K_{31}(t,x;\tau,\xi;y') +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{31}(t,x;\theta,\lambda;y')Q_{31}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda, \tag{5.16}$$

в якому ядро K_{31} визначається формулою

$$K_{31}(t,x;\tau,\xi;y') := \Bigg(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$
$$+\beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Bigg) G_{31}(t,x;\tau,\xi;y'),$$
$$0 < \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}.$$

З цієї формули випливають для $k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ такі рівності:

$$\partial_x^{k'} K_{31}(t,x;\tau,\xi;y') = \Bigg(\beta(t) \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$
$$+\beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,x^1(y))\Bigg)\partial_x^{k'} G_{31}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{5.17}$$

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_{31}(t,x;\tau,\xi;y') = \Bigg(\beta(t) \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$
$$+\beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,x^1(y))\Bigg) \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_{31}(t,x;\tau,\xi;y'), s \in \{2,3\}, \tag{5.18}$$

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')=\Bigg(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{y_s}^{z_s}a_0(t,(x_1,y'))\Bigg)\times$$

$$\times\partial_x^{k'}G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')-\Bigg(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_{jl}(t,\xi^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_j(t,\xi^1(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{y_s}^{z_s}a_0(t,\xi^1(y))\Bigg)\partial_x^{k'}G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')+$$

$$+\Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,x^1(y))\Bigg)\Bigg|_{y_s=z_s}\times$$

$$\times\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}G_{31}(t,x;\tau,\xi;y'),s\in\{2,3\},\xi^1(y):=(\xi_1,y_2,y_3). \qquad (5.19)$$

За допомогою інтегрування (5.19) і формул (5.14), (5.15), маємо ще такі рівності:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2d\xi_3=\Bigg(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,x^1(y))\Bigg)\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2d\xi_3,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3=\Bigg(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,x^1(y))\Bigg)\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3. \qquad (5.20)$$

Використовуючи рівності (5.18)–(5.20), оцінки (5.4)–(5.7), умови (1.11)–(1.13), нерівності (2.85),(2.86) і (2.88) та рівність (2.87), отримуємо оцінки

$$|\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')|\le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+\hat m_1\gamma_1}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), \qquad (5.21)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+\hat m_1\gamma_1-\hat m_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\Big(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\Big), \qquad (5.22)$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), \tag{5.23}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3\right| \le C\Big((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(B(h,\tau))-z_s|^{\gamma_s}\Big)\times$$

$$\times\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1), \tag{5.24}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3\right| \le C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)\times$$

$$\times E_{c_0,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),\ d_1+d_2=d, \tag{5.25}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}\times$$

$$\times\big((B(h,\tau))^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(B(h,\tau))-z_s|^{\gamma_s}\big). \tag{5.26}$$

В оцінках (5.21) – (5.26) $0<\tau<t\le T$, $h\in[0,T]$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in$ $\in\{2,3\}$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $k'\in\mathbb{Z}_+^n$, причому в оцінках (5.24)– (5.26) $k'\ne 0$, а числа γ_s^0 і γ_s такі, як вище.

Оцінка (5.23) не є достатньою для встановлення точних показників Гельдера приростів функцій Q_{31}, за просторовими змінними, але є достатньою для доведення існування класичного ФРЗК. Тому, надалі додатково припускатимемо виконання умови (A_{35}). Співвідношення (5.19) можна переписати у вигляді

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')=\Bigg(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{\xi_1}\Delta_{y_s}^{z_s}a_0(t,(x_1,y'))\Bigg)\partial_x^{k'}G_{31}(t,x;\tau,\xi;y')+$$

$$+\Bigg(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_j(t,x^1(y))\partial_{x_{1j}}+$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,x^1(y))\Bigg)\Bigg|_{y_s=z_s}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}G_{31}(t,x;\tau,\xi;y'),s\in\{2,3\},\xi^1(y):=(\xi_1,y_2,y_3).$$

Оцінивши доданки цього зображення, отримаємо оцінку

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C\big((B(h,\tau))^{\hat{m}_s\gamma_s} + |Y_s(B(h,\tau)) - z_s|^{\gamma_s}\big)\times$$

$$\times\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),\ s\in\{2,3\}. \tag{5.27}$$

Наведемо властивості функції Q_{31}.

Лема 5.2. *За умов* (A_{31}), (A_{32}) *і* (A_{35}) *для функції* Q_{31} *правильні оцінки*

$$|\partial_x^{k'}Q_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi); \tag{5.28}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right),\ \gamma_1^0\in(0,\gamma_1],\ \{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1]; \tag{5.29}$$

$$\left|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{31}(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le C((B(h,\tau))^{\hat{m}_s\gamma_s} + |Y_s(B(h,\tau)) - z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi); \tag{5.30}$$

$$\left|\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1},\qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n, \tag{5.31}$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0}\beta(t)(B(t,\tau))^{-M_{1k'}-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)},\gamma_1^0\in(0,\gamma_1],k'\in\mathbb{Z}_+^n. \tag{5.32}$$

$$\left|\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Q_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2d\xi_3\right| \le$$

$$\le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}-1+\hat{m}_2\gamma_2}E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1),k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{5.33}$$

$$\left|\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}Q_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1(n_1-\gamma_1)-\hat{m}_2n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)-1}\times$$

$$\times E_{c,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)E_{c,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}. \tag{5.34}$$

У формулі (5.29) $s\in\mathbb{N}_3$, *а в* (5.30) — $s\in\{2,3\}$.

Перейдемо до дослідження об'ємного потенціалу (5.3), властивості і оцінки ядра G_{31} якого наведено в лемі 5.1, а густини Q_{31} — в лемі 5.2.

Лема 5.3. *Нехай виконуються умови леми 5.2. Тоді правильні такі твер-*

дження:

(A) *функція* (5.3), *має неперервні похідні* $\partial_x^k W_{31}$, $|k_1| \le 2$, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, k' =$ $= (0, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, *які визначаються формулами*

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_{31}(t,x;\tau,\xi;y') = \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{31}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{31}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda, |k_1| < 2; \tag{5.35}$$

$$\partial_{x_1}^{k_1} W_{31}(t,x;\tau,\xi;y') = \int_\tau^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{31}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{31}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{31}(t,x;\beta,\lambda;y') \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{31}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{31}(t,x;\beta,\lambda;y') d\lambda \right) Q_{31}(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y') \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} =:$$

$$=: \sum_{j=1}^3 W_{11j}^{1k}, |k_1| = 2; \tag{5.36}$$

$$\partial_x^{k'} W_{31}(t,x;\tau,\xi;y') = \int_\tau^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k'} G_{31}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{31}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} G_{31}(t,x;\beta,\lambda;y') \partial_\lambda^{k'} Q_{31}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda =: \sum_{j=1}^2 W_{1j}^k; \tag{5.37}$$

(B) *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k W_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(t-\tau)^{-M-M_k+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), \tag{5.38}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k W_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (B(t,\tau))^{-M-M_k+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times \left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi) \right), \quad s \in \{2,3\}, \tag{5.39}$$

$$\left| \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} W_{31}(t,x;\tau,\xi;y') \right| \le C\big((B(h,\tau))^{\hat{m}_s\gamma_s} + |Y_s(B(h,\tau)) - z_s|^{\gamma_s} \big) \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M-M_{k'}+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), s \in \{2,3\}, k \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{5.40}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le C(B(t,\tau))^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{5.41}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_1\gamma_1}, k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{5.42}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} W_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}+\hat{m}_2\gamma_2}E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1), \qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{5.43}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} W_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\right| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_2\gamma_2}\left(E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)+E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,z_1,\xi_1)\right), k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \tag{5.44}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} W_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-|\hat{m}_3|(1-\gamma_3)}\times$$

$$\times E_{c,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)E_{c,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \tag{5.45}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^{k} W_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-M_k}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-\hat{m}_s\gamma_s^0+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)E_{c,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}. \tag{5.46}$$

У формулах (5.39), (5.42), (5.44) *і* (5.46) $\gamma_1^0\in(0,\gamma_1]$, $\gamma_s^0\in(0,1]$, $s\in\{2,3\}$, *а* t_1 *таке, що* $B(t,t_1)=B(t_1,\tau)$.

Доведення лем 5.1, 5.2 і 5.3 аналогічно до доведення відповідних лем 3.1, 3.2 і 3.3.

Наведемо основний результат першого етапу.

Теорема 5.1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (5.1) *виконуються умови* (A_{31}), (A_{32}) *і* (A_{35}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_{31} *і є правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi); \tag{5.47}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\big(E_{c,d}^{(3)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\big); \qquad (5.48)$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(B(t,\tau))^{-M-M_{lk}}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\big((B(h,\tau))^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(B(h,\tau))-z_s|^{\gamma_s}\big), s\in\{2,3\}; \qquad (5.49)$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi| \le C(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}, \qquad k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}; \qquad (5.50)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}, k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}; \qquad (5.51)$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} Z_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_2 d\xi_3| \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}+\hat{m}_2\gamma_2}E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1), k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \qquad (5.52)$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3} Z_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3| \le C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-M_k+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_{c,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)E_{c,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \qquad (5.53)$$

а також рівності

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = 0, \qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}; \qquad (5.54)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = 0, \qquad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}; \qquad (5.55)$$

$$\partial_x^{k'}Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'}Z_{31}(t,x;\tau,\xi;y'), \qquad k'\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}, \qquad (5.56)$$

де $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}, \{y_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, s\in\mathbb{N}_3$, $\gamma_1^0\in(0,\gamma_1]$, $\{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1]$, $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $|k_1|\le 2$.

Доведення. Оцінки (5.47)– (5.56) випливають з означення (5.2) і відповідних оцінок параметриксу G_{31} і об'ємного потенціалу W_{31}.▶

5.2. Побудова та властивості ФРЗК для оператора $L_3^{(t,x^2(y))}$

На другому етапі рівняння має вигляд

$$L_3^{(t,x^{(2)}(y))}u(t,x)=0, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ y_3\in\mathbb{R}^{n_3}, \qquad (5.57)$$

і ФРЗК шукаємо у вигляді

$$Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)=G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3), \tag{5.58}$$

де

$$W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3):=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3)Q_{32}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda, \tag{5.59}$$

G_{32} — параметрикс, а Q_{32} — невідома функція. За параметрикс беремо функцію

$$G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3):=Z_{31}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3)),0<\tau<t\leq T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,y_3\in\mathbb{R}^{n_3}. \tag{5.60}$$

Наведемо спочатку оцінки і властивості параметриксу G_{32}.

Лема 5.4. *За умов леми 5.3 для функції G_{32} є правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\leq C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi); \tag{5.61}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times\Big(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\Big); \tag{5.62}$$

$$\left|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_x^k G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)\right|\leq C\big((B(h,\tau))^{\hat{m}_3\gamma_3}+|Y_3(B(h,\tau))-z_3|^{\gamma_3}\big)\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi); \tag{5.63}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_{32}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi|\leq C(t-\tau)^{-M_k+m(k)}, \tag{5.64}$$

$$m(k):=\begin{cases}\hat{m}_1\gamma_1, & \text{якщо } k_1\neq 0, \text{ а } k_2=0 \text{ і } k_3=0,\\ \hat{m}_2\gamma_2, & \text{якщо } k_2\neq 0, \text{ а } k_1=0 \text{ і } k_3=0,\\ \hat{m}_2\gamma_2, & \text{якщо } k_3\neq 0, \text{ а } k_1=0 \text{ і } k_2=0,\end{cases} k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\};$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi|\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_k+m(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0},k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}; \tag{5.65}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{32}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C(B(t,\tau))^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m'(k)} E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1),$$
(5.66)

$$m'(k) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } k'=0; \\ \hat{m}_2\gamma_2, & \text{якщо } k' \ne 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\};$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_{lk}-\hat{m}_1 n_1+m'(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times\left(E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)(t,\tau,x_1,\xi_1)+E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)(t,\tau,z_1,\xi_1)\right); \qquad (5.67)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}; \qquad (5.68)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3), \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \qquad (5.69)$$

де $0<\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, y_3\in\mathbb{R}^{n_3}, \{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, s\in\mathbb{N}_3, k\in\mathbb{Z}_+^n, |k_1|\le 2.$ *У формулах* (5.62), (5.65) *і* (5.67) $\gamma_1^0\in(0,\gamma_1],\ \gamma_2^0\in(0,1],\ \gamma_3^0\in(0,1]$.

Доведення. Оцінки (5.61)— (5.68), рівності (5.69) безпосередньо випливають з оцінок (5.47)— (5.53), означення параметриксу (5.60) і рівностей (5.56). ▶

Інтегральне рівняння для густини Q_{32} отримуємо аналогічно до рівняння (5.16) для густини Q_{31}. Це рівняння має вигляд

$$Q_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) = K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$
$$+\int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3)Q_{32}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda. \qquad (5.70)$$

Ядро K_{32} визначається формулою

$$K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \left(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_{jl}(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+\right.$$
$$\left.+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_0(t,x^2(y))\right)G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3),$$
$$0<\tau<t\le T,\ y_3\in\mathbb{R}^{n_3},\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (5.71)$$

З (5.71) випливають такі рівності:

$$\partial_{x_3}^{k_3} K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \Bigg(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_0(t,x^2(y))\Bigg)\partial_{x_3}^{k_3} G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3),$$

$$0<\tau<t\le T,\ y_3\in\mathbb{R}^{n_3},\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{5.72}$$

$$\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3} K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \Bigg(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2}\Delta_{y_3}^{z_3} a_{jl}(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2}\Delta_{y_3}^{z_3} a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_2}^{\xi_2}\Delta_{y_3}^{z_3} a_0(t,x^2(y))\Bigg)\partial_{x_3}^{k_3} G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\Bigg(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}+$$

$$+\Delta_{x_2}^{\xi_2} a_0(t,x^2(y))\Bigg)\Bigg|_{y_3=z_3} \Delta_{y_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3} G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \ y_3\in\mathbb{R}^{n_3}, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{5.73}$$

Доданки з (5.72), (5.73) оцінюємо подібно до оцінювання доданків з (5.17), (5.18). Отримаємо

$$|\partial_{x_3}^{k_3} K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\hat m_2\gamma_2-\hat m_3|k_3|} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi); \tag{5.74}$$

$$|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3} K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C\big((B(h,\tau))^{\hat m_3\gamma_3} + |Y_3(B(h,\tau)) - z_3|^{\gamma_3}\big)\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+\hat m_2\gamma_2-\hat m_3(|k_3|+\gamma_3)}\big(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(3)},\xi)\big). \tag{5.75}$$

У формулах (5.74), (5.75) мультиіндекс $k_3\in\mathbb{R}^{n_3}$ — довільний.

З (5.74) і властивості (5.69) параметриксу випливає рівність

$$\partial_{x_3}^{k_3} K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3),\ k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}. \tag{5.76}$$

Перейдемо до оцінки приростів за змінною x_1 похідних від ядра K_{32}. Для цього використовуємо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_3}^{k_3} K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,x_2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_3}^{k_3} G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\left(\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_0(t,x^2(y))\right)\partial_{x_3}^{k_3}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_{jl}(t,x^2(y))\Big|_{x_1=z_1}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_j(x^2(y))\Big|_{x_1=z_1}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_0(t,x^2(y))\Big|_{x_1=z_1}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_3}^{k_3}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3). \qquad (5.77)$$

Оцінивши доданки з (5.77) за допомогою умов (1.11), (1.12), оцінок (5.61) і (5.62) при $s=1$, отримаємо такі оцінки:

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_3}^{k_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1-\hat m_3|k_3|-\hat m_1(\gamma_1^0-\gamma_1)+\hat m_2\gamma_2}\times$$
$$\times\left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\right),\ \gamma_1^0\in(0,\gamma_1]. \qquad (5.78)$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi|\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\beta(t)(B(t,\tau))^{-1-\hat m_3|k_3|+\hat m_1(\gamma_1-\gamma_1^0)}. \qquad (5.79)$$

У (5.78) і (5.79) мультиіндекс $k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}$ — довільний.

Для приростів за змінною x_2 маємо таке зображення:

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_3}^{k_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)=\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a_{jl}(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a_j(t,x^2(y))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+\Delta_{x_2}^{z_2}a_0(t,x^2(y))\times$$

$$\times\partial_{x_3}^{k_3}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{z_2}^{\xi_2}a_{jl}(t,(x_1,z_2,y_3))\times$$

$$\times\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{z_2}^{\xi_2}a_j(t,(x_1,z_2,y_3))\times$$

$$\times\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_x^{k'}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)+\Delta_{z_2}^{\xi_2}a_0(t,(x_1,z_2,y_3))\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_3}^{k_3}G_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3); \qquad (5.80)$$

Доданки в (5.80) оцінюємо аналогічно до (5.78) за допомогою умови (1.12), оцінок (5.61), (5.62) при $s = 2$. Отримаємо оцінки

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_3}^{k_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right)\times$$
$$\left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(2)},\xi)\right),\ |k_3|\in\mathbb{Z}_+^{n_3}. \tag{5.81}$$

Тут γ_2^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$, а γ_2 — число з умови (1.12). Інтегруючи оцінки (5.81) за відповідними групами змінних, отримуємо

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-1-\hat{m}_3|k_3|+m(k)}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right); \tag{5.82}$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1n_1-1-\hat{m}_3|k_3|}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right)E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1); \tag{5.83}$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_2n_2-1-\hat{m}_3|k_3|}\times$$
$$\times\left(|x_2-z_2|^{\gamma_2}+|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_2(\gamma_2^0-\gamma_2)}\right)\times$$
$$\times E_{c,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)\left(E_{c,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)+E_{c,d_2}^{(2,2)}(t-\tau,x_1,z_2,\xi_1,\xi_2)\right). \tag{5.84}$$

Для оцінки приростів за змінною x_3 використовуємо зображення

$$\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \beta(t)\sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\zeta_{3j}}K_{32}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)d\zeta_{3j},$$

де точки $\zeta_3^{(j)},\ j\in\mathbb{N}_{n_3}$ — такі як вище.

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)| = \beta(t)|\sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\zeta_{3j}}K_{12}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)d\zeta_{3j}| \le$$

$$\le \beta(t)\left|\sum_{j=1}^{n_3}|\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}|\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\zeta_{3j}}K_{12}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)|d\zeta_{3j}\right| \le$$

$$\leq C\beta(t)\sum_{j=1}^{n_3}|x_{sj}-z_{sj}|(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3(|k_3|-1)+\hat{m}_2\gamma_2}\Bigg(E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi)+$$

$$+E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,z^{(3)},\xi)\Bigg)\leq C\beta(t)|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3\gamma_3^0}\times$$

$$\times\Bigg(E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi)+E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,z^{(3)},\xi)\Bigg),\ k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_3^0\in(0,1]; \qquad (5.85)$$

$$|\Delta^{z_3}_{x_3}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{k_3}_{x_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi|\leq C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}\times$$

$$\times\beta(t)(B(t,\tau))^{-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3\gamma_3^0}, k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}, \gamma_3^0\in(0,1]; \qquad (5.86)$$

$$|\Delta^{z_3}_{x_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial^{k_3}_{x_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2d\xi_3|\leq C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}\beta(t)\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1n_1-1-\hat{m}_3|k_3|+m_2\gamma_2-m_3\gamma_3^0}E^{(2,1)}_{c,d}(t,\tau,x_1,\xi_1),\ k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_3^0\in(0,1]; \quad (5.87)$$

$$|\Delta^{z_3}_{x_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial^{k_3}_{x_3}K_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3|\leq C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_2n_2-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3\gamma_3^0}\times$$

$$\times E^{(2,1)}_{c,d_1}(t,\tau,x_1,\xi_1)E^{(2,2)}_{c,d_2}(t-\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2),\ k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_3^0\in(0,1]. \qquad (5.88)$$

Властивості функції Q_{32} наводяться у наступній лемі.

Лема 5.5. *Для функції Q_{32} справджуються оцінки*

$$|\partial^{k_3}_{x_3}Q_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\leq C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi); \qquad (5.89)$$

$$|\Delta^{z_s}_{x_s}\partial^{k_3}_{x_3}Q_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$

$$\times\left(E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi)+E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right); \qquad (5.90)$$

$$|\Delta^{z_3}_{y_3}\partial^{k_3}_{x_3}Q_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\leq C(h^{\hat{m}_3\gamma_3}+|Y_3(h)-z_3|^{\gamma_3})\times$$

$$\times\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi); \qquad (5.91)$$

$$|\partial^{k_3}_{x_3}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi|\leq C\beta(t)(B(t,\tau))^{-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2}; \qquad (5.92)$$

$$|\partial^{k_3}_{x_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Q_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2d\xi_3|\leq$$

$$\leq C\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1n_1-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2}E^{(2,1)}_{c,d}(t,\tau,x_1,\xi_1); \qquad (5.93)$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3| \leq C\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - 1 - \hat{m}_3|k_3| + \hat{m}_2\gamma_2}\times$$

$$\times E_{c,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)E_{c,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2); \tag{5.94}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}; \tag{5.95}$$

$$|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{32}(t,x;\tau,\xi;\xi_3)d\xi_3| \leq C\beta(t)(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - 1 + \hat{m}_2\gamma_2 + \hat{m}_3(\gamma_3 - |k_3|)}\times$$

$$\times E_{c,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)E_{c,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2), \tag{5.96}$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi,z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{N}_3$, $k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}$, *причому* $k_3 \in \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}$ *в* (5.92)–(5.96), $\gamma_l^0 \in (0,\gamma_l]$, $l \in \mathbb{N}_2$, $\gamma_3^0 \in (0,1]$, γ_l, $l \in \mathbb{N}_2$ — *числа з умов* (1.11), (1.12) *і* (1.13).

Отримані властивості параметриксу G_{32} та густини потенціалу Q_{32} дозволяють дослідити об'ємний потенціал (5.59), отримати його оцінки і довести таку лему.

Лема 5.6. *Нехай виконуються умови леми 5.4 і леми 5.5. Тоді для функції* (5.59) *правильні такі твердження:*

(A) *для* $k''' := (k_1,k_2,0) \in \mathbb{Z}_+^n, |k_1|/2 + |k_2| \leq 1$, *існують похідні* $\partial_x^{k'''} W_{32}$, *які визначаються формулами*

$$\partial_x^{k''} W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3) Q_{32}(\hat{\beta},\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3) \Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{32}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3)d\lambda \right) Q_{32}(\theta, X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}; \tag{5.97}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3) Q_{32}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_2}^{k_2}G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3)d\lambda_2 d\lambda_3\Bigg)\times$$

$$\times\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\tau)}Q_{32}(\theta,\Lambda^{01}(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\lambda_1+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3)\times$$

$$\times\left(\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}Q_{32}(\theta,\Lambda^{02}(t-\beta);\tau,\xi;y_3)+\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}}Q_{32}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)\right)d\lambda$$

$$+\int_{t_1}^{t}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3)d\lambda\Bigg)Q_{32}(\theta,X(t-\tau);\tau,\xi;y_3)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}=:\sum_{j=1}^{4}W_{12j}^{k'''},\tag{5.98}$$

(B) *для* $k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}$, $k_1\in\mathbb{Z}_+^{n_1}$, $|k_1|=1$ *існують похідні* $\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{x_1}^{k_1}W_{32}$, *які визначаються формулами*

$$\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{x_1}^{k_1}W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3):=\int_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{x_1}^{k_1}G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3)Q_{32}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{32}(t,x;\theta,\lambda;y_3)\partial_{\lambda_3}^{k_3}Q_{32}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda=:\sum_{j=1}^{2}W_{12j}^{k'};\tag{5.99}$$

(C) *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)|\le C(B(t,\tau))^{-M-M_k+m_k}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),\tag{5.100}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k W_{32}(t,x;\tau,\xi)|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_k+\bar m_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$

$$\times\left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right),$$

$$\bar m_s=\hat m_s, s\in\mathbb{N}_2, \bar m_3=\hat m_2, \gamma_1^0\in(0,\gamma_1], \gamma_2^0\in(1/3,\gamma_2], \gamma_3^0\in(0,1].\tag{5.101}$$

Доведення леми 5.5 і леми 5.6 проводиться аналогічно до доведень відповідних лем з розділу 3.

Результати другого етапу побудови класичного ФРЗК наведені в наступній теоремі.

Теорема 5.2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (5.57) *виконуються умови* (A_{31}), (A_{32}) *і* (A_{35}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_{32} *і є* *правильними такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),$$

$$k \in \{(k_1,k_2,k_3)\in \mathbb{Z}_+^n \mid |k_1|/2+|k_2|\le 1\}; \tag{5.102}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right),\ \gamma_1^0\in(0,\gamma_1],\ \gamma_2^0\in(1/3,\gamma_2],\ \gamma_3^0\in(0,1]; \tag{5.103}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(B(t,\tau))^{-M_k+m(k)}, k\in\{\mathbb{Z}_+^n|\, 0<|k_1|/2+|k_2|\le 1\}; \tag{5.104}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_k+m(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0},$$

$$k\in\{\mathbb{Z}_+^n\ |k_1|/2+|k_2|\le 1\}, \gamma_1^0\in(0,\gamma_1],\ \gamma_2^0\in(1/3,\gamma_2],\ \gamma_3^0\in(0,1]; \tag{5.105}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^k Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(B(t,\tau))^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')} E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1); \tag{5.106}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^k Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1),\ \ \gamma_1^0\in(0,\gamma_1],\ \ \gamma_2^0\in(1/3,\gamma_2],\ \ \gamma_3^0\in(0,1]; \tag{5.107}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0, \qquad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}; \tag{5.108}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3), \qquad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \tag{5.109}$$

У формулах (5.102)–(5.109) $0\le\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, y_3\in\mathbb{R}^{n_3}$.

Доведення. Оцінки (5.102), (5.103) випливають з означення ФРЗК (5.58) і відповідних оцінок (5.61), (5.62), (5.100) і (5.101).

Щоб отримати оцінки (5.104) — (5.107) потрібно спершу отримати такі оцінки для інтегралів від похідних W_2 та їх приростів. Інтегруючи оцінки (5.100) і (5.101) відповідно за $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^n$ і $(\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, із урахуванням рівностей (**??**), (**??**), отримаємо такі нерівності:

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(B(t,\tau))^{-M_k+m(k)}; \tag{5.110}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_k+m(k)-\hat{m}_s\gamma_s^0}; \tag{5.111}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi| \le C(B(t,\tau))^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')}E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1); \tag{5.112}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^k W_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_k-\hat{m}_1 n_1+m(k')-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1) + E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,z_1,\xi_1)). \tag{5.113}$$

В нерівностях (5.110)–(5.112) $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, а числа $m_(k)$ і $m(k')$ —такі як вище. З нерівностей (5.110)–(5.112), (5.64)–(5.66) випливають оцінки (5.104)– (5.107).

Рівності (5.108) є наслідком рівностей (5.68) і (5.95). Аналогічно, за допомогою (5.69) і (5.95) доводиться рівності (5.109). ▶

5.3. Побудова та властивості ФРЗК для основного рівняння

На третьому етапі розглядаємо рівняння

$$L_3^{(t,x^{(3)}(y))}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{5.114}$$

Аналогічно до попереднього ФРЗК для рівняння (5.114) шукаємо у вигляді

$$Z_{33}(t,x;\tau,\xi) = G_{33}(t,x;\tau,\xi) + W_{33}(t,x;\tau,\xi), \tag{5.115}$$

де

$$W_{33}(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{33}(t,x;\theta,\lambda)Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \tag{5.116}$$

G_{33} — параметрикс, а Q_{33} — невідома функція. За параметрикс беремо функцію

$$G_{33}(t,x;\tau,\xi) := Z_{32}(t,x;\tau,\xi;\xi_3), 0 < \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{5.117}$$

Оцінки параметриксу G_{33} наводяться в наступній лемі.

Лема 5.7. *Для функції* G_{33} *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k G_{33}(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi); \tag{5.118}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_{33}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times\Big(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\Big); \tag{5.119}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_s}^{k_s}G_{33}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le C(B(t,\tau))^{-M_{k_s}+\hat{m}_s\gamma_s}, k_s\in\mathbb{Z}_+^{n_s}\setminus\{0\},\ s\in\mathbb{N}_3; \tag{5.120}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_{k_l}+\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_s\gamma_s^0}; \tag{5.121}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C(B(t,\tau))^{-M_{k_l}-\hat{m}_1 n_1+\hat{m}_l\gamma_l}E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1-\xi_1); \tag{5.122}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_{k_l}-\hat{m}_1 n_1+\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times\Big(E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)+E_{c,d}^{(2,1)}(t,\tau,z_1,\xi_1)\Big); \tag{5.123}$$

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{33}(t,x;\tau,\xi)d\xi_3| \le C(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)}\times$$
$$\times E_{c,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)E_{c,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2); \tag{5.124}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-M_{k_l}+\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times E_{c,d_1}^{(2,1)}(t,\tau,x_1,\xi_1)E_{c,d_2}^{(2,2)}(t,\tau,x_1,x_2,\xi_1,\xi_2); \tag{5.125}$$

де $0<\tau<t\le T, k\in\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n, |k_1|/2+|k_2|+|k_3|\le 1\}$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, s\in\mathbb{N}_3, \gamma_1^0\in(0,\gamma_1], \gamma_2^0\in(1/3,\gamma_2], \gamma_3^0\in(0,1]$.

Доведення. Оцінки (5.118)–(5.124) безпосередньо випливають з оцінок (5.102)–(5.107) ФРЗК $Z_{32}(t,x;\tau,\xi;y_3), 0<\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, y_3\in\mathbb{R}^{n_3}$. ▶

Розглянемо тепер властивості густини Q_{33} потенціалу W_{33}.

Лема 5.8. *Для функції* Q_{33} *справджуються оцінки*

$$|Q_{33}(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), \tag{5.126}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} Q_{33}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$
$$\times\left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right), 0 \le \tau < t \le T,$$
$$\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \mathbb{N}_3, \gamma_1^0 \in (0,\gamma_1], \gamma_2^0 \in (1/3,\gamma_2], \gamma_3^0 \in (3/5,\gamma_3]. \tag{5.127}$$

Доведення. За зроблених припущень функція Q_{33} задовольняє інтегральне рівняння

$$Q_{33}(t,x;\tau,\xi) = K_{33}(t,x;\tau,\xi) + \int_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} K_{33}(t,x;\theta,\lambda) Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda, \tag{5.128}$$

в якому ядро K_{33} визначається формулою

$$K_{33}(t,x;\tau,\xi) := \left(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + \right.$$
$$\left. + \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_0(t,x)\right) G_{33}(t,x;\tau,\xi),\ 0 < \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{5.129}$$

Оцінимо доданки з (5.129) за допомогою умови (A_{32}), нерівностей (5.118), (2.86) і (2.98). Маємо

$$|K_{33}(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), \tag{5.130}$$

де c_0 —стала з оцінки (2.86).

З отриманої оцінки випливає, що ядро K_{33} інтегрального рівняння (5.128) задовольняє умови леми 2.8. На підставі цієї леми для функції Q_{33} справджується оцінка (5.126). Для функції Q_{33} справджуються також оцінки (5.127).

З (5.129) випливають такі рівності:

$$\Delta_{x_s}^{z_s} K_{33}(t,x;\tau,\xi) = \left(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_s}^{z_s}\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \right.$$
$$\left. +\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_s}^{z_s}\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_s}^{z_s}\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_0(t,x)\right) G_{33}(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+\left(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_j(t,x\partial_{x_{1j}} + \right.$$

$$+\Delta_{x_3}^{\xi_3} a_0(t,x)\Big)\Big|_{x_s=z_s} \Delta_{x_s}^{z_s} G_{33}(t,x;\tau,\xi), 0<\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, s\in\mathbb{N}_2. \tag{5.131}$$

$$\Delta_{x_3}^{z_3} K_{33}(t,x;\tau,\xi) = \Big(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{z_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{z_3} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} +$$
$$+\Delta_{x_3}^{z_3} a_0(t,x)\Big) G_{33}(t,x;\tau,\xi)\Big|_{x_s=z_s} + \Big(\beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$
$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_3}^{\xi_3} a_0(t,x)\Big)\Delta_{x_3}^{z_3} G_{33}(t,x;\tau,\xi),$$
$$0<\tau<t\le T, \qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{5.132}$$

Оцінки доданків зображень (5.131),(5.132) досить встановити у випадку $|x_s-z_s|^{1/m_s}\le B(t,\tau)/4, s\in\mathbb{N}_3$. За допомогою умов (A_{32}), (A_{35}), оцінок (5.118), (5.119) і нерівностей (2.86) отримаємо оцінки

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} K_{33}(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\beta(t)(B(t,\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$
$$\times\left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right), 0<\tau<t\le T,$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}, \gamma_s^0\in(\hat{m}_{s-1}/\hat{m}_s,\gamma_s], s\in\mathbb{N}_3, \hat{m}_0=0. \tag{5.133}$$

Інтегруючи (5.131),(5.132) із урахуванням (A_{32}), (A_{35}) і оцінок (5.120), (5.121), маємо

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\int_{\mathbb{R}^n} K_{33}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\beta(t)(B(t,\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_s\gamma_s},$$
$$0<\tau<t\le T,\ x\subset\mathbb{R}^n,\ \{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_2. \tag{5.134}$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\int_{\mathbb{R}^n} K_{33}(t,x;\tau,\xi)d\xi| \le$$
$$\le C\beta(t)\Big(|x_3-z_3|^{\gamma_3}(B(t,\tau)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} + |x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(B(t,\tau)^{-1+\hat{m}_3(\gamma_3-\gamma_3^0)}\Big),$$
$$0\le\tau<t\le T, x\in\mathbb{R}^n, \{x_3,z_3\}\subset\mathbb{R}^{n_3}. \tag{5.135}$$

У формулах (5.134),(5.135) γ_s, $s\in\mathbb{N}_3$, — числа з умови (A_{32}), а γ_3^0 — довільне число з проміжку $(0,1]$. Щоб оцінити прирости функції Q_{33} за допомогою (5.128) запишемо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s} Q_{33}(t,x;\tau,\xi) = \Delta_{x_s}^{z_s} K_{33}(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{33}(t,x;\theta,\lambda)\times$$

$$\times Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda + \int\limits_{t_1}^{\eta_s} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{33}(t,x;\theta,\lambda)\times$$

$$\times Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda + \int\limits_{\eta_s}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{33}(t,x;\theta,\lambda) Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda -$$

$$- \int\limits_{\eta_s}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{33}(t,x;\theta,\lambda) Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda =: \sum_{j=1}^{5} Q_{33j}, \qquad (5.136)$$

де $0 < \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}$, η_s —число з умови $B(t,\eta_s) = = |x_s - z_s|^{1/\hat{m}_s}$, а число t_1 — таке, як раніше.

Далі для $|x_s - z_s|^{1/\hat{m}_s} \leq B(t,\tau)/4, s \in \mathbb{N}_3$, використовуватимемо нерівності

$$\hat{J}_s(\gamma) := \int\limits_{t_1}^{\eta_s} (B(t,\theta))^{-1+\gamma} \frac{d(\theta)}{\alpha(\theta)} \leq \begin{cases} C(B(t,\tau))^{\gamma}, & \text{якщо } \gamma > 0, \\ C|x_s - z_s|^{\gamma/\hat{m}_s}, & \text{якщо } \gamma < 0,\ s \in \mathbb{N}_3. \end{cases} \qquad (5.137)$$

Оцінимо доданки $Q_{33j}, j \in \mathbb{N}_5$. Для Q_{331} справджуються оцінки (5.133). За допомогою оцінок (5.126), (5.133) і (2.98) отримаємо

$$|Q_{332}| \leq \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_s}^{z_s} K_{33}(t,x;\theta,\lambda)||Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (t - t_1)^{-1+\hat{m}_s(\gamma_s - \gamma_s^0)} \int\limits_{\tau}^{t_1} \beta(\theta)(B(\theta,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\times$$

$$\times \left(I_0^{(3,s3)}(x,\xi) + I_0^{(3,s3)}(z^{(3)},\xi) \right) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_3^0)} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

$$|Q_{333}| \leq \int\limits_{t_1}^{\eta_s} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_s}^{z_s} K_{33}(t,x;\theta,\lambda)||Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \hat{J}_s(\hat{m}_s(\gamma_s - \gamma_s^0))(B(t_1,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}\bigg(I_0^{(3,03)}(x,\xi)+$$

$$+I_0^{(3,s3)}(z^{(s)},\xi)\bigg) \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-1-M+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданки Q_{334} і Q_{335} оцінюємо однаково. Тому оцінимо перший з них. За допомогою (5.130), (5.126) і (2.98) маємо

$$|Q_{334}| \leq \int\limits_{\eta_s}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_{33}(t,x;\theta,\lambda)||Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda \leq$$

$$\leq C(B(t_1,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \int\limits_{\eta_s}^{t} (B(t,\theta)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \times$$

$$\times\bigg(I_0^{(3,s3)}(x,\xi) + I_0^{(3,s3)}(z^{(s)},\xi)\bigg) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\hat{m}_3\gamma_3\hat{m}_s^{-1}}(B(t,\tau)^{-1-M+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Оцінка Q_{335} відрізняється від цієї оцінки лише тим, що в ній x замінено на $z^{(s)},\ s \in \mathbb{N}_2$.

Отже, встановлено оцінки (5.127) для випадку, коли $\gamma_s^0 \in (0,\gamma_s)$. Ці оцінки справджуються і для $\gamma_s^0 = \gamma_s$, $s \in \mathbb{N}_3$. Щоб у цьому переконатися, уточнимо оцінку інтеграла Q_{333}, записавши його у вигляді

$$Q_{333} = \int\limits_{t_1}^{\eta_s} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(B(t,\beta)}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}K_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\Bigg)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta);\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)} =: Q'_{233} + Q''_{233}.$$

За допомогою нерівностей (2.88), (2.98), оцінок (5.133) при $\gamma_s^0 = \gamma_s$ і (5.127) при $\gamma_s^0 < \gamma_s$ й (5.137), отримуємо

$$|Q'_{333}| \leq C\int\limits_{t_1}^{\eta_s} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-1}|x_s - z_s|^{\gamma_s}E_c^{(3)}(t,\theta,x,\lambda) \times$$

$$\times\sum_{s=1}^{3}|X_s(B(t,\theta))-\lambda_s|^{\gamma_s^0}(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\sum_{j=s-1}^{s}E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta),\xi)d\lambda\leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} \sum_{s=1}^{3} \hat{J}_s(\hat{m}_s \gamma_s^0)(B(t_1,\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \sum_{j=s-1}^{s} I_0^{(3,0j)}(x;\xi) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s} E_{c_0,d}^{(2)}(t,\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка Q''_{333} у випадку $s \in \mathbb{N}_2$, використовуємо оцінки (5.134), (2.93), (5.126) і (5.137). Маємо

$$|Q''_{333}| \leq C \int_{t_1}^{\eta_s} |x_s - z_s|^{\gamma_s}(B(t,\theta))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_s\gamma_s}(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,X(B(t,\theta)),\xi)\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s}\hat{J}_s(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_s\gamma_s) \times$$

$$\times (B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-1+2\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_s\gamma_s} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

У випадку $s = 3$ використовуємо оцінки (5.135) при $\gamma_3^0 > \gamma_3$, (2.93), (5.126) і (5.137). Отримаємо

$$|Q''_{233}| \leq C \int_{t_1}^{\eta_3} \Big(|x_3 - z_3|^{\gamma_3}(B(t,\theta))^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} + |x_3 - z_3|^{\gamma_3^0}(B(t,\theta))^{-1-\hat{m}_3(\gamma_3^0-\gamma_3)}\Big) \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,X(B(t,\theta)),\xi)\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \leq C\big(|x_3 - z_3|^{\gamma_3}\hat{J}_3(\hat{m}_1\gamma_1) +$$

$$+ |x_3 - z_3|^{\gamma_3^0}\hat{J}_3(-\hat{m}_3(\gamma_3^0 - \gamma_3))\big)(B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c,d}^{(3)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_3 - z_3|^{\gamma_3}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

З цих оцінок та оцінок $Q_{33j}, j \in \mathbb{N}_5$, випливають оцінки (5.127), в яких $\gamma_s^0 = \gamma_s,\ s \in \mathbb{N}_3$. ▶

Перейдемо до дослідження об'ємного потенціалу (5.116).

Лема 5.9. *Нехай виконуються умови леми 5.7 для параметриксу G_{33} і леми 5.8 для функції Q_{33}. Тоді для об'ємного потенціалу* (5.116) *правильні такі твердження:*

(A) *для $k \in \{\mathbb{Z}_+^n \,|\, |k_1|/2 + |k_2| + |k_3| \leq 1\}$, існують похідні $\partial_x^k W_{33}$, які* *визначаються формулами*

$$\partial_x^{k''} W_{33}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{33}(t,x;\theta,\lambda) Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{33}(t,x;\theta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k''} G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda \right) Q_{33}(\theta, X(B(t,\theta));\tau,\xi) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} =: \sum_{j=1}^{3} W_{3j}^{21}; \quad (5.138)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} W_{33}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{33}(t,x;\theta,\lambda) Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_2}^{k_2} G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \times$$

$$\times \Delta_{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta, \Lambda^{01}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1 +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{33}(t,x;\theta,\lambda) \Delta_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}^{\Lambda^{01}(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta, \Lambda^{02}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{33}(t,x;\theta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda \right) Q_{33}(\theta, X(B(t,\tau));\tau,\xi) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} =: \sum_{j=1}^{5} W_{3j}^{22}, \quad (5.139)$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} W_{33}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} G_{33}(t,x;\theta,\lambda) Q_{13}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \times$$

$$\times \Delta_{\Lambda^{01}(B(t,\tau))}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}(\beta, \Lambda^{01}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_3\right)\times$$

$$\times\Delta_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}^{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}Q_{33}(\beta,\Lambda^{02}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1 d\lambda_2+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}=:\sum_{j=1}^{5}W_{3j}^{23},\quad (5.140)$$

(B) *справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k W_{33}(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M-M_k+\gamma}E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi).\qquad (5.141)$$

У формулах (5.138)–(5.141) $0<\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\gamma=$ $=\min\{m_1\gamma_1,m_2\gamma_2,m_3\gamma_3\},k\in\mathbb{Z}_+^n,\ |k_1|/2+|k_2|+|k_3|\le 1,\quad k''=(k_1,0,0).$

Доведення. Існування похідних від W_{33} та їх оцінки встановлюється аналогічно до попереднього. Відмінність полягає в тому, що перекидання похідних за змінною x_3 з ядра на густину Q_{33} неможливе. Розглянемо інтеграли

$$V_\beta^{k,s}(t,x;\tau,\xi):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_s}^{k_s}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$

$$0<\tau\le\theta\le t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ k_s\in\mathbb{Z}_+^{n_s},\ \ s\in\mathbb{N}_3.$$

Оцінимо їх за допомогою оцінок (5.118), (5.126) і нерівності (2.98). Маємо

$$|V_\beta^{k,s}(t,x;\tau,\xi)|\le|\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial_{x_s}^{k_s}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)||Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda|\le$$

$$\le C\beta(\theta)\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-\hat m_s|k_s|}E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda)(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le$$

$$\le C\beta(\theta)(B(t,\beta))^{-\hat m_s|k_s|}(\beta-\tau)^{-1+\hat m_3\gamma_3}I_0^{(3,03)}(x,\xi)\le$$

$$\le C\beta(\theta)(B(t,\tau))^{-M}(B(t,\theta))^{-\hat m_s|k_s|}(B(\theta,\tau))^{-1+\hat m_3\gamma_3}E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau\le\theta\le t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{Z}_+^n,s\in\mathbb{N}_3.\qquad (5.142)$$

Перейдемо до доведення твердження **A**. Нехай $|k_1|/2+|k_2|+|k_3|=1$. Доведемо формулу (5.138). Вона доводиться аналогічно до доведення відповідної формули з леми 5.6. Оцінимо доданки $W_{3j}^{21}, j \in \mathbb{N}_4$. Зауважимо, що оцінка (5.142) є достатньою для встановлення оцінок доданків $W_{31}^{2s}, s \in \mathbb{N}_3$. Справді

$$|W_{31}^{2s}| \le \int\limits_{\tau}^{t_1} |V_{\beta}^{k,s}(t,x;\tau,\xi)| \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \le$$

$$\le C(B(t,\tau)^{-M} E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi) \int\limits_{\tau}^{t_1} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_s|k_s|}(B(\theta,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M}(B(t,t_1))^{-\hat{m}_s|k_s|} E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi) \times$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M-\hat{m}_s|k_s|+\hat{m}_3\gamma_3} E_c^{(3)}(t,\tau,x,\xi), s \in \mathbb{N}_3, |k_1|/2+|k_2|+|k_3| = 1. \quad (5.143)$$

Для встановлення оцінки другого доданка потрібна формула для повного приросту $\Delta_{\lambda}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}$. За допомогою оцінок (5.127) маємо

$$|\Delta_{\lambda}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)| \le |\Delta_{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)| +$$

$$+|\Delta_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}^{\Lambda^{01}(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)| + |\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)| \le$$

$$\le C\beta(\theta) \sum_{s=1}^{3} |X_s(B(t,\theta)) - \lambda_s|^{\gamma_s^0} (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \times$$

$$\times \sum_{j=s-1}^{s} E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta)),\xi). \quad (5.144)$$

$$|W_{32}^{21}| \le \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^{k''} G_{33}(t,x;\beta,\lambda)||\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q_{33}(\beta,\lambda;\tau,\xi)| d\lambda \le$$

$$\le \int\limits_{t_1}^{t} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1} E_c^{(3)}(B(t,\theta),x,\lambda) \sum_{s=1}^{3} |X_s(B(t,\theta)) - \lambda_s|^{\gamma_s^0} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau)^{-M-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \sum_{j=s-1}^{s} E_{c,d}^{(3)}(\theta,\Lambda^{0j}(B(t,\theta)),\xi) d\lambda \le$$

$$\le C \sum_{s=1}^{3} (B(t_1,\tau))^{-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)} \int\limits_{t_1}^{t} (B(t,\theta))^{-1+\hat{m}_s\gamma_s^0} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \sum_{j=s-1}^{s} I_0^{(3,0j)}(x,\xi) \le$$

$$\leq C\sum_{s=1}^{3}(B(t_1,\tau))^{-1+\hat m_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}(B(t,t_1))^{\hat m_s\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M}E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C\sum_{s=1}^{3}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat m_s\gamma_s}E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi)\leq C(B(t,\tau))^{-M-1+\gamma}E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi),$$

де $\gamma=\min\{\hat m_1\gamma_1,\hat m_2\gamma_2,\hat m_3\gamma_3\},\ 0<c_0<c$.

$$|W^{21}_{33}|\leq\int\limits_{t_1}^{t}|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k''}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda||Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)|\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\leq$$

$$\leq C\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta)^{-1+\hat m_1\gamma_1}(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,X(B(t,\theta)),\xi)\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\leq$$

$$\leq C(B(t,\tau))^{-M-1+\hat m_3\gamma_3+\hat m_1\gamma_1}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків $W^{21}_{3j},j\in\mathbb{N}_3$, маємо

$$|\partial_x^kW_{33}(t,x;\tau,\xi)|\leq C(B(t,\tau))^{-M-M_k+\gamma}E^{(3)}_{c}(t,\tau,x,\xi),0<\tau<t\leq T,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\qquad k\in\mathbb{Z}^n_+,\qquad |k_1|=2,|k_2|=|k_3|=0. \tag{5.145}$$

У формулі (5.145) стала γ — така, як вище.

Перейдемо до оцінок доданків зображення (5.139). Почнемо з другого доданка. За допомогою оцінок (5.122), (5.127), нерівностей (2.85), (2.99) і (2.100) отримуємо

$$|W^{22}_{32}|\leq\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_2}^{k_2}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\right|\times$$

$$\times\left|\Delta^{X(B(t,\theta))}_{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{01}(B(t,\theta));\tau,\xi)\right|d\lambda_1\leq$$

$$\leq C\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}(B(t,\theta))^{-\hat m_1n_1-\hat m_2(1-\gamma_2)}E^{(2,1)}_{c,d}(B(t,\theta),x_1,\lambda_1)|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1^0}\times$$

$$\times\beta(\theta)(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat m_1(\gamma_1-\gamma_1^0)}\big(E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,\Lambda^{01}(B(t,\theta)),\xi)+$$

$$+E^{(3)}_{c}(\theta,\tau,\Lambda^{00}(B(t,\theta)),\xi)\big)d\lambda_1\leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat m_1(\gamma_1-\gamma_1^0)}\times$$

$$\times\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat m_2(1-\gamma_2)+\hat m_1\gamma_1^0}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\left(I_1^{(3,00)}(x,\xi)+I_1^{(3,01)}(x,\xi)\right)\leq$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M-\hat m_2(1-\gamma_2)+\hat m_1\gamma_1}E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi),$$

бо $1-\hat m_2(1-\gamma_2)+m_1\gamma_1^0>0$ для довільного $\gamma_1^0\in[0,\gamma_1]$ і $\gamma_2>1/3$.

Аналогічно, використовуючи оцінки (5.118), (5.127) та нерівності (2.85) і (2.98), оцінюємо доданки W^{22}_{33} і W^{22}_{34}. Маємо

$$|W^{22}_{33}|\le\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb R^n}|\partial^{k_2}_{x_2}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)||\Delta^{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{02}(B(t,\theta));\tau,\xi)|d\lambda\le$$

$$\le C\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb R^n}(B(t,\theta))^{-M-m_2}E^{(3)}_{c}(t,\theta,x,\lambda)(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2}E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta)),\xi)|X_2(B(t,\theta))-\lambda_2|^{\gamma_2^0}(\beta-\tau)^{\hat m_2(\gamma_2-\gamma_2^0)}d\lambda\le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1+m_2(\gamma_2-\gamma_2^0)}\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-m_2(1-\gamma_2^0)}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\sum_{j=1}^{2}I_0^{(3,0j))}(x,\xi)\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M-\hat m_2+\gamma_1}E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi).$$

$$|W^{22}_{34}|\le\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb R^n}|\partial^{k_2}_{x_2}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)||\Delta^{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}_{\lambda}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda\le$$

$$\le C\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb R^n}(B(t,\theta))^{-M-\hat m_2}E^{(3)}_{c,d}(t,\theta,x,\lambda)(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2}E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta)),\xi)|X_3(B(t,\theta))-\lambda_3|^{\gamma_3^0}(B(\theta,\tau))^{m_3(\gamma_3-\gamma_3^0)}d\lambda\le$$

$$\le C(B(t_1,\tau))^{-1+\hat m_3(\gamma_3-\gamma_3^0)}\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat m_2+\hat m_3\gamma_s^0}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\sum_{j=1}^{3}I_0^{(3,0j))}(x,\xi)\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M-\hat m_2+\hat m_3\gamma_3}E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка W^{22}_{35} використовуємо (5.120), (5.126) і (2.93). Здобудемо

$$|W^{22}_{35}|\le\int\limits_{t_1}^{t}\left|\int\limits_{\mathbb R^n}\partial^{k_2}_{x_2}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right|\left|Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\right|\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\le$$

$$\leq C\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat m_2(1-\gamma_2)}(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}E_c^{(3)}(\theta,\tau,X(B(\theta,\tau),\xi)\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\leq$$

$$\leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat m_2(1-\gamma_2)}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C(B(t,\tau))^{-M-\hat m_2(1-\gamma_2)+\hat m_3\gamma_3}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

З отриманих оцінок доданків випливає оцінка

$$|\partial_{x_2}^{k_2}W_{33}(t,x;\tau,\xi)|\leq C(B(t,\tau))^{-M-m_2+\bar\gamma}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),\qquad(5.146)$$

де $0<\tau<t\leq T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ |k_2|=1\ \ \bar\gamma=\min\{\hat m_2\gamma_2,\hat m_3\gamma_3\}$.

Залишилось оцінити доданки $W_{3j}^{23}, j\in\mathbb{N}_5$. Для першого доданка справджується оцінка (5.143). За допомогою оцінок (5.122), (5.127), нерівностей (2.85), (2.99) і (2.100) отримуємо

$$|W_{32}^{23}|\leq\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\right|\times$$

$$\times\left|\Delta_{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}^{X(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{01}(B(t,\theta));\tau,\xi)\right|d\lambda_1\leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1}\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}(B(t,\theta))^{-\hat m_1n_1-\hat m_3(1-\gamma_3)}E_{c,d}^{(2,1)}(t,\theta,x_1,\lambda_1)|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\times\left(E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{01}(B(t,\theta)),\xi)+E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{00}(B(t,\theta)),\xi)\right)d\lambda_1\leq$$

$$\leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1}\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_1\gamma_1^0}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\left(I_0^{(3,00)}(x,\xi)+\right.$$

$$\left.+I_0^{(3,01)}(x,\xi)\right)\leq C(B(t,\tau))^{-M-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_1\gamma_1}E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),$$

бо $-\hat m_3(1-\gamma_3)+\hat m_1\gamma_1>0$ для довільного $\gamma_1\in[0,1]$ і $\gamma_2>1/3$.

Аналогічно, використовуючи оцінки (5.118), (5.127) та нерівності (2.85) і

(2.100), оцінюємо доданки W_{33}^{23} і W_{34}^{23}. Маємо

$$|W_{33}^{13}| \le \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left| \int_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{33}(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_3 \right| \times$$

$$\times \left| \Delta_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}^{\Lambda^{01}(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta, \Lambda^{02}(B(t,\theta)); \tau, \xi) \right| d\lambda_1 d\lambda_2 \le C \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_{c,d}^{(2,2)}(t,\theta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) |X_2(B(t,\theta) - \lambda_2|^{\gamma_2} (B(\theta,\tau))^{-M-1} \times$$

$$\times (B(t,\theta))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)} \sum_{j=1}^{2} E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta),\xi) d\lambda_1 d\lambda_2 \le$$

$$\le C(B(t_1,\tau))^{-M-1} \int_{t_1}^{t} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)+\hat{m}_2\gamma_2} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \sum_{j=1}^{2} I_2^{(3,0j)}(x_1,x_2,\xi) \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)+\hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

$$|W_{34}^{23}| \le \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \partial_{x_3}^{k_3} G_{33}(t,x;\theta,\lambda) d\lambda_3 \right| \left| \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\theta)} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi) \right| d\lambda \le$$

$$\le C \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-\hat{m}_3} E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda) |X_3(t-\beta) - \lambda_3|^{\gamma_3} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1} \sum_{j=2}^{3} E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta)),\xi) d\lambda \le$$

$$\le C(B(t_1,\tau))^{-M-1} \int_{t_1}^{t} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \sum_{j=2}^{3} I_0^{(3,0j)}(x,\xi) \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка W_{35}^{23} використовуємо (5.120), (5.126) і (2.93). Здобудемо

$$|W_{35}^{23}| \le \int_{t_1}^{t} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\theta,\lambda) d\lambda \right| |Q_{33}(\theta, X(B(t,\theta)); \tau, \xi)| \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \le$$

$$\leq C\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)}(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,X(B(\theta,\tau)),\xi)\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}$$

$$\leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C(B(t,\tau)^{-M-\hat{m}_3(1-\gamma_3)+\hat{m}_3\gamma_3}E^{(3)}_{c,d}(t-\tau,x,\xi),$$

оскільки $-\hat{m}_3(1-\gamma_3)>0$, якщо $\gamma_3>3/5$.

З отриманих оцінок доданків випливає оцінка

$$|\partial^{k_3}_{x_3}W_{33}(t,x;\tau,\xi)|\leq C(t-\tau)^{-M-m_3|k_3|+\gamma}E^{(2)}_{c}(t-\tau,x,\xi), \tag{5.147}$$

де $0\leq\tau<t\leq T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{Z}^n_+,k_1=k_2=0,|k_3|=1$, γ — таке, як вище.

Оцінки (5.140) встановлено. З отриманих оцінок (5.146)–(5.147) випливають оцінки (5.138).▶

Результати заключного етапу побудови класичного ФРЗК підсумовано в наступній теоремі.

Теорема 5.3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (5.114) *виконуються умови* (A_{31}), (A_{32}) *і* (A_{35}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_{33} *і справджуються оцінки*

$$|\partial^{k}_{x}Z_{33}(t,x;\tau,\xi)|\leq C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi),$$

$$\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}^n_+,|k_1|/2+|k_2|+|k_3|\leq 1\}; \tag{5.148}$$

Доведення. Існування класичного ФРЗК Z_{33} для рівняння (5.114), його оцінки і оцінки похідних від Z_{33} за просторовими змінними випливають із означення (5.115) та лем 5.7 і 5.9. ▶

Розглянемо питання існування похідної $S(t)Z_{33}$. Подамо оператор $L^{(t,x)}_3$ з (1.8) у вигляді

$$L^{(t,x)}_3u(t,x):=S(t)-\beta(t)A^0_1(t,x,\partial_{x_1})-a_0(t,x),$$

де

$$S(t) := \big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\ \big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\ \big)\big),$$

а

$$A_1^0(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}}, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Отже, справджується тотожність

$$S(t)Z_{33}(t,x;\tau,\xi) = \big(\beta(t)A_1^0(t,x,\partial_{x_1}) - a_0(t,x)\big)\,Z_{33}(t,x;\tau,\xi),$$

$$0<\tau<t\le T, \qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Ця тотожність є визначальною для доведення існування та отримання оцінок диференціального виразу $S(t)Z_{33}$.

Розглянемо питання існування $S(t)Z_{10}$. Оскільки використовується поетапний метод Леві, згідно з яким за параметрикс на кожному етапі береться ФРЗК, який побудований на попередньому етапі. За виконання умов (A_{31}) і (A_{32}) на підставі теореми 2.3 існує $S(t)Z_{10}$, а, отже, існує похідна $S(t)G_{31}$. За індукцією доводимо, що для параметриксу G_{33} існує $S(t)G_{33}$ і справджується оцінка

$$|S(t)G_{33}(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau)^{-M-1}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{5.149}$$

Доведення існування $S(t)W_{33}$ проводиться аналогічно до відповідного доведення у випадку рівнянь з класу $\boldsymbol{K_1}$ на основі оцінок (5.149) і формули для похідної $S(t)W_{33}$

$$S(t)W_{33}(t,x;\tau,\xi) = Q_{33}(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\int_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n} S(t)G_{33}(t,x;\theta,\lambda)Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n} S(t)G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta_\lambda^{X(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S(t)G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right) Q_{33}(\theta, X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}. \qquad (5.150)$$

Оцінивши доданки з (5.150), отримуємо оцінки

$$|S(t)W_{33}(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E^{(3)}_{c_1,d}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ 0<c_1<c. \qquad (5.151)$$

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 5.4. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (5.114) *виконуються умови* *(*A_{21}*) і (*A_{22}*), в яких числа* γ_1*,* γ_2 *і* γ_3 *—довільні з проміжку* $(0,1)$*. Тоді для цього рівняння існує ФРЗК* Z_{33} *і справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_{33}(t,x;\tau,\xi;y_3| \le C(t-\tau)^{-M-M_k}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi),$$

$$\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}^n_+, |k_1|/(2)+\hat{m}_2|k_2|+\hat{m}_3|k_3|\le 1\}; \qquad (5.152)$$

$$|S(t)Z_{33}(t,x;\tau,\xi| \le C(t-\tau)^{-M-1}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi), \qquad (5.153)$$

$$0<\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Зауважимо, що аналогічно до доведення існування похідної $S(t)Z_{33}$ доводиться існування та оцінки $\alpha(t)\partial_t Z_{33}$. Правильне таке твердження:

Теорема 5.5. *За умов теореми 5.3 існує похідна* $\alpha(t)\partial_t W_{33}$*, яка визначається формулою*

$$\alpha(t)\partial_t W_{33}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)\partial_t G_{33}(t,x;\theta,\lambda)Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\alpha(t)\partial_t G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2 d\lambda_3\right)\times$$

$$\times\Delta^{X(B(t,\theta))}_{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{01}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\alpha(t)\partial_t G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_3\right)\times$$

$$\times\Delta^{\Lambda^{01}(B(t,\theta,\beta))}_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{02}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1 d\lambda_2 +$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)\partial_t G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)\partial_t G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta);\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+Q_{33}(t,x;\tau,\xi), \tag{5.154}$$

і справджуються оцінки

$$\alpha(t)\partial_t Z_{33}(t,x;\tau,\xi| \le C(b(t,\tau)^{-M-1}\left(1+(t-\tau)^{-\hat{m}_1}|x_1|+(t-\tau)^{-\hat{m}_1}|x_2|\right)\times$$
$$|E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi),\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{5.155}$$

5.4. Оцінки приростів похідних ФРЗК для основного рівняння

Основні результати підрозділу містяться в наступній теоремі.

Теорема 5.6. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (5.114) *виконуються умови* (A_{31}), (A_{32}) *і* (A_{35}). *Тоді справджуються такі оцінки:*

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}Z_{33}(t,x;\tau,\xi)|\le C|x_s-z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_{l-1})}(B(t,\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s}\times$$
$$\times\left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi)+E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\right),0<\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$
$$k_s\in\mathbb{Z}_+^{n_s},\ \{l,s\}\subset\mathbb{N}_3,\ |k_1|=2,\ |k_2|=|k_3|=1,\ \hat{m}_0\equiv 0; \tag{5.156}$$

Доведення. Класичний ФРЗК Z_{33} для рівняння (5.114) визначається формулою (5.115). Оцінки приростів похідних за просторовими змінними параметриксу G_{33} визначаються формулами (5.119). Тому для доведення теореми зводиться до встановлення оцінок приростів похідних від об'ємного потенціалу W_{33}.

Оцінки приростів старших похідних за просторовими змінними досить провести за умови $|x_s-z_s|^{1/m_s}<B(t,\tau)/4,\ s\in\mathbb{N}_3$. На підставі (5.138) запишемо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{33}(t,x;\tau,\xi)=\int_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta_\lambda^{X(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\eta_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta_\lambda^{X(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{z_1}^{k_1}G_{33}(t,z^{(1)};\theta,\lambda)\Delta_\lambda^{Z^{(1)}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+$$

$$+\int\limits_{\eta_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+$$

$$-\int\limits_{\eta_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,z^{(1)};\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,Z^{(1)}(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}=:\sum_{j=1}^{7}D_{3j}^1; \tag{5.157}$$

$$|D_{31}^1|\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1}E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda)\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\times(B(t,t_1))^{-1-\hat{m}_1\gamma_1}I_0^{(3,03)}(x,\xi)\int\limits_{\tau}^{t}(B(\theta,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_1\gamma_1}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Використовуючи зображення

$$G_{33}(t,x;\beta,\lambda)=G_{31}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))+W_{31}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))+W_{32}(t,x;\beta,\lambda;\lambda_3), \tag{5.158}$$

подамо другий доданок з (5.157) у вигляді суми

$$D_{32}^1=D_{32}^{11}+D_{32}^{12}+D_{32}^{13},$$

де

$$D_{32}^{11} := \int_{t_1}^{\eta_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} G_{31}(t,x;\theta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3)) \Delta_{\lambda}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda;$$

$$D_{32}^{12} := \int_{t_1}^{\eta_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} W_{31}(t,x;\theta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3)) \Delta_{\lambda}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda;$$

$$D_{32}^{13} := \int_{t_1}^{\eta_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} W_{32}(t,x;\theta,\lambda;\lambda_3) \Delta_{\lambda}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda.$$

Оцінимо D_{32}^{11} за допомогою оцінок (5.5) при $\gamma_1^0 > \gamma_1$ і оцінок (5.127) при $\gamma_s^0 = \hat{m}_s^{-1} \hat{m}_1 \gamma_1,\ s \in \mathbb{N}_3$.

$$|D_{32}^{11}| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} \int_{t_1}^{\eta_1} \frac{\beta(\theta) d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1^0} \sum_{s=1}^{3} |X_s(B(t,\theta)) - \lambda_s|^{\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} \times$$

$$\times \big(E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda) + E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,z^{(1)},\lambda)\big) \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s - \hat{m}_1\gamma_1} \sum_{j=s-1}^{s} E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta));\xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} J_1(\hat{m}_1(\gamma_1 - \gamma_1^0)) \sum_{s=1}^{3} (B(t_1,\tau))^{-1+\hat{m}_s\gamma_s - \hat{m}_1\gamma_1} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{2} \big(I_0^{(3,0j)}(x,\xi) + I_0^{(3,0j)}(z^{(1)},\xi)\big) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t,\tau))^{-M-1} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big).$$

Доданок D_{32}^{12} оцінюємо за допомогою оцінок (5.39) при $\gamma_1^0 = \gamma_1$ і оцінок (5.127) при $\gamma_s^0 = \hat{m}_s^{-1} \hat{m}_1 \gamma_1,\ s \in \mathbb{N}_3$. Маємо

$$|D_{32}^{12}| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \int_{t_1}^{\eta_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1} \big(E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda) + E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,z^{(1)},\lambda)\big) \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{3} |X_s(B(t,\theta)) - \lambda_s|^{\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s - \hat{m}_1\gamma_1} \times$$

$$\times \sum_{j=s-1}^{s} E_{c,d}^{(3)}(B(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta));\xi) \le$$

$$\leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} J_1(\hat{m}_1\gamma_1) \sum_{s=1}^{3} (B(t_1,\tau))^{-1+\hat{m}_s\gamma_s-\hat{m}_1\gamma_1} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{2} \big(I_0^{(3,0j)}(x,\xi) + I_0^{(3,0j)}(z^{(1)},\xi)\big) \leq$$

$$\leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t,\tau))^{-M-1+\gamma} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big),$$

де γ — таке як вище.

Доданок D_{32}^{13} оцінюємо аналогічно до D_{32}^{12}, тільки замість оцінок (5.39) використовуємо оцінки (5.101) при $\tau = \beta$, $\xi = \lambda$, $y_3 = \lambda_3$. З оцінок доданків D_{32}^{1j}, $j \in \mathbb{N}_3$, випливає оцінка

$$|D_{32}^{1}| \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t,\tau))^{-M-1} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big). \quad (5.159)$$

Доданки D_{33}^{1} і D_{34}^{1} оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D_{33}^{1}| \leq C \int_{\eta_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1} E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda) \sum_{s=1}^{3} |X_s(B(t,\theta)) - \lambda_s|^{\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_s\gamma_s-\hat{m}_1\gamma_1} \sum_{j=s-1}^{s} E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta));\xi) \leq$$

$$\leq C \int_{\eta_1}^{t} (B(t,\theta))^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \sum_{s=1}^{3} (B(t_1,\tau)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s-\hat{m}_1\gamma_1} \sum_{j=s-1}^{s} \big(I_0^{(3,0j)}(x,\xi) +$$

$$+ I_0^{(3,0j)}(z^{(1)},\xi)\big) \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t,\tau)^{-M-1} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big).$$

Доданок D_{35}^{1} оцінюємо подібно до D_{32}^{1}. За допомогою (5.158) подамо цей доданок у вигляді суми

$$D_{35}^{1} = D_{35}^{11} + D_{35}^{12} + D_{35}^{13},$$

де

$$D_{35}^{11} := \int_{t_1}^{\eta_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} G_{31}(t,x;\theta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3)) d\lambda \right) Q_{33}(\theta, X(B(t,\theta));\tau,\xi) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)};$$

$$D_{35}^{12} := \int_{t_1}^{\eta_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} W_{31}(t,x;\theta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3)) d\lambda \right) Q_{33}(\theta, X(B(t,\theta));\tau,\xi) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)};$$

$$D_{35}^{13} := \int\limits_{t_1}^{\eta_1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} W_{32}(t,x;\theta,\lambda;\lambda_3) d\lambda \right) Q_{33}(\theta, X(B(t,\theta));\tau,\xi) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}.$$

Оцінимо D_{35}^{11} за допомогою оцінок (5.5) при $\gamma_1^0 > \gamma_1$ і оцінок (5.126). Маємо

$$|D_{35}^{11}| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} \int\limits_{t_1}^{\eta_1} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1-\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)} \times$$

$$\times \big(E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda) + E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,z^{(1)},\lambda)\big) d\lambda (B(t_1,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_c^{(2)}(\beta,\tau,X(B(t,\theta)),\xi) \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} J_1(\hat{m}_1(\gamma_1 - \gamma_1^0)) E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (t-\tau)^{-M-1\hat{m}_3\gamma_3} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big).$$

Зауважимо, що при $\theta \in [t_1, \eta_1]$ справджується оцінка

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} W_{31}(t,x;\theta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3))| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t,\tau))^{-M-1\hat{m}_1\gamma_1} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

За допомогою цієї оцінки оцінюємо доданок D_{35}^{12}

$$|D_{35}^{12}| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \int\limits_{t_1}^{\eta_1} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) d\lambda \times$$

$$\times E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,X(B(t,\theta));\xi) \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} J_1(\hat{m}_1\gamma_1) (B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданок D_{35}^{13} оцінюємо аналогічно до D_{35}^{12}, тільки замість оцінок (5.39) використовуємо оцінки (5.101) при $\tau = \beta$, $\xi = \lambda$, $y_3 = \lambda_3$.

З оцінок доданків D_{35}^{1j}, $j \in \mathbb{N}_3$, випливає

$$|D_{35}^{1}| \le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big). \tag{5.160}$$

Доданки D_{36}^{1}, D_{37}^{1} оцінюються однаково. Оцінимо, наприклад, перший з них.

$$|D_{36}^{1}| \le C \int\limits_{\eta_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_{c,d}^{(3)}(\beta,\tau,X(B(t,\theta)),\xi) \beta(\theta) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \le$$

$$\leq C(B(t_1,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}\int\limits_{\eta_1}^{t}(B(t,\theta))^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}\beta(\theta)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків $D^1_{3j},\ j\in\mathbb{N}_7$, випливає така оцінка:

$$\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_1}_{x_1}W_{33}(t,x;\tau,\xi)|\leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau)^{-M-1}\big(E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi)+E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,z^{(1)},\xi)\big). \tag{5.161}$$

Перейдемо до оцінок приростів за змінною x_2. Запишемо таке зображення:

$$\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}W_{33}(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_2}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\Bigg)\times$$

$$\times\Delta^{X(B(t,\theta))}_{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{01}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_2}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\big(\Delta^{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\Delta^{X(B(t,\theta))}_{\lambda}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)\big)d\lambda+\int\limits_{\eta_2}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{k_1}_{x_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta^{X(B(t,\theta))}_{\lambda}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_2}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{k_1}_{z_1}G_{33}(t,z^{(2)};\theta,\lambda)\Delta^{Z^{(2)}(B(t,\theta))}_{\lambda}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_1}_{x_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+$$

$$+\int\limits_{\eta_2}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_2}_{x_2}\partial^{k_1}_{x_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{13}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+$$

$$-\int\limits_{\eta_2}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{k_1}_{x_1}G_{33}(t,z^{(2)};\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\beta,Z^{(2)}((t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}=:\sum_{j=1}^{8}D^2_{3j}; \tag{5.162}$$

$$|D_{31}^2| \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1-\hat{m}_2\gamma_2} E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda)\times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}(B(t,t_1))^{-1-\hat{m}_2\gamma_2} \int\limits_{\tau}^{t} (B(\theta,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\times$$

$$\times I_0^{(3,03)}(x,\xi) \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3-\hat{m}_2\gamma_2} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Другий доданок оцінюємо за допомогою оцінок (5.123), (5.127) при $\gamma_2^0 = \gamma_2$ і нерівностей (2.79). Маємо

$$|D_{32}^2| \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} \int\limits_{t_1}^{\eta_2} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c,d}^{(2,1)}(t,\theta,x_1,\lambda_1)|x_1 - z_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\times (B(t,\theta))^{-\hat{m}_1 n_1 - 1 - \hat{m}_2\gamma_2}(B(\theta,\tau))^{-M-1} \sum_{j=0}^{1} E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta));\xi)d\lambda_1 \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2}(B(t_1,\tau))^{-1} J_2(\hat{m}_1\gamma_1 - \hat{m}_2\gamma_2) \sum_{j=0}^{1} I_1^{(3,0j)}(x_1,\xi) \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-1}\Big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(2)},\xi)\Big).$$

За допомогою рівності

$$G_{33}(t,x;\theta,\lambda) = G_{32}(t,x;\theta,\lambda;\lambda_3) + W_{32}(t,x;\theta,\lambda;\lambda_3),$$

маємо $D_{33}^2 = D_{33}^{21} + D_{33}^{22}$.

Перший доданок суми оцінюємо за допомогою оцінок (5.119) при $\gamma_2^0 > \gamma_2$ і (5.127) при $\gamma_s^0 = (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2,\ s \in \{2,3\}$.

$$D_{33}^{21} \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \int\limits_{t_1}^{\eta_2} \frac{d\beta(\theta)\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1-\hat{m}_2\gamma_2^0} E_c^{(2,3)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times \sum_{s=2}^{3} |X_s(B(t,\theta)) - \lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2} \sum_{j=s-1}^{s} \Bigg(E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)+$$

$$+E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{2j}(B(t,\theta)),\xi)\Bigg) \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0}(B(t_1,\tau))^{-1} J_2(\hat{m}_2(\gamma_2 - \gamma_2^0))\times$$

$$\times \sum_{j=s-1}^{s} \Big(I_0^{(3,0j)}(x,\xi) + I_0^{(3,0j)}(z^{(2)},\xi) \Big) \leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (B(t,\tau))^{-M-1} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(3)},\xi) \big).$$

Аналогічно за допомогою оцінок (5.101) при $\gamma_2^0 = \gamma_2$ і (5.127) при $\gamma_s^0 = (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2,\ s \in \{2,3\}$, оцінюємо другий доданок.

$$D_{33}^{22} \leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} \int_{t_1}^{\eta_2} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1} E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda)(B(\theta,\tau))^{-M-1} \times$$

$$\times \sum_{s=2}^{3} |X_s(B(t,\theta)) - \lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2} \sum_{j=s-1}^{s} \Big(E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta),\xi) +$$

$$+ E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{2j}(t-\beta),\xi) \Big) d\lambda \leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (t_1-\tau)^{-1} J_2(\hat{m}_2\gamma_2) \sum_{j=s-1}^{s} \Big(I_0^{(3,0j)}(x,\xi) + I_0^{(3,0j)}(z^{(2)},\xi) \Big) \leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(2)},\xi) \big).$$

Отже, справджується оцінка

$$|D_{33}^{2}| \leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (B(t,\tau))^{-M-1} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(2)},\xi) \big).$$

Оцінимо D_{34}^2. За допомогою оцінок (5.118) і (5.127) при $\gamma_s^0 = (\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2,\ s \in \{2,3\}$, маємо

$$D_{34}^{22} \leq C \int_{\eta_2}^{t} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-1} E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda)(B(\theta,\tau))^{-M-1} \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{3} |X_s(B(t,\theta)) - \lambda_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2} \sum_{j=s-1}^{s} \Big(E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi) +$$

$$+ E_c^{(2)}(\beta-\tau,\Lambda^{2j}(t-\beta),\xi) \Big) d\lambda \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1} J_2(\hat{m}_1\gamma_1) \sum_{j=s-1}^{s} \Big(I_0^{(3,0j)}(x,\xi) + I_0^{(3,0j)}(z^{(2)},\xi) \Big) \leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} (B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} \big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(2)},\xi) \big).$$

Доданок D_{35}^2 має аналогічну оцінку. Оцінимо D_{36}^2 за допомогою (5.123) при

$\gamma_2^0 < \gamma_2$ і (5.126).

$$D_{36}^2 \leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \int\limits_{\eta_2}^{t} (B(t,\theta))^{-M-1+\hat{m}_2(\gamma_2-\gamma_2^0)} (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,X(B(t,\theta)),\xi)\beta(\theta)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} (B(t_1,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times \int\limits_{\eta_2}^{t} (B(t,\theta))^{-M-1+\hat{m}_2(\gamma_2-\gamma_2^0)} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} E_{c,d}^{(3)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{\gamma_2} (B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

За допомогою оцінок (5.123) і (5.126) оцінимо D_{37}^2

$$D_{37}^2 \leq C \int\limits_{\eta_2}^{t} (B(t,\theta))^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1} (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,X(B(t,\theta)),\xi)\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1+\hat{m}_3\gamma_3} \int\limits_{\eta_2}^{t} (B(t,\theta))^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_2 - z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} (B(t,\tau)^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданок D_{38}^2 має аналогічну оцінку. З оцінок доданків D_{3j}^2, $j \in \mathbb{N}_8$, випливає така оцінка:

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1} W_{33}(t,x;\tau,\xi)| \leq C|x_2 - z_2|^{(\hat{m}_2)^{-1}\hat{m}_1\gamma_1} \times$$

$$\times (B(t,\tau)^{-M-1}\big(E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(2)},\xi)\big). \qquad (5.163)$$

Для того, щоб встановити оцінки приростів за змінною x_3, використовуватимемо таке зображення:

$$\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1} W_{33}(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1} G_{33}(t,x;\theta,\lambda) Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_3} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1} G_{33}(t,x;\theta,\lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \bigg) \times$$

$$\times \Delta_{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}^{X(B(t,\theta))} Q_{33}(\theta,\Lambda^{01}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_3}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_3\right)\times$$

$$\times\Delta_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}^{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{02}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{\eta_3}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{X(B(t,\theta))}Q_{13}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_3}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,z^{(3)};\theta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{Z^{(3)}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_3}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+$$

$$+\int\limits_{\eta_3}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}-$$

$$-\int\limits_{\eta_3}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{33}(t,z^{(3)};\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,Z^{(3)}(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}=:\sum_{j=1}^{8}D_{3j}^{3};\tag{5.164}$$

$$|D_{31}^3|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-1-\hat{m}_3\gamma_3}E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda)\times$$

$$\times\beta(\theta)(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(B(t,t_1))^{-1-\hat{m}_3\gamma_3}\int\limits_{\tau}^{t}(B(\theta,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}I_0^{(3,03)}(x,\xi)\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(B(t,\tau))^{-M-1}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Другий доданок оцінюємо за допомогою оцінок (5.123), (5.127) при $\gamma_3^0=\gamma_3$ і нерівностей (**??**). Маємо

$$|D_{32}^3|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}\int\limits_{t_1}^{\eta_3}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}E_{c,d}^{(2,1)}(t,\theta,x_1,\lambda_1)|x_1-z_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\times(B(t,\theta))^{-\hat m_1 n_1-1-\hat m_3\gamma_3}(B(\theta,\tau)))^{-M-1}\sum_{j=0}^{1}E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta));\xi)d\lambda_1\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(B(t_1,\tau))^{-1}J_3(\hat m_1\gamma_1-\hat m_3\gamma_3)\sum_{s=0}^{1}I_1^{(3,0s)}(x_1,\xi)\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{(\hat m_3)^{-1}\hat m_1\gamma_1}(B(t,\tau)^{-M-1}\big(E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi)+E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,z^{(2)},\xi)\big).$$

Доданок D^3_{33} оцінюємо за допомогою оцінок (5.125) при $\gamma_3^0=\gamma_3$, (5.127) при $\gamma_2^0=\gamma_2$ і нерівностей (2.81).

$$|D^3_{33}|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}\int\limits_{t_1}^{\eta_3}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}|X_2(B(t,\theta))-\lambda_2|^{\gamma_2}E^{(2,2)}_{c,d}(t,\theta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)\times$$

$$\times(B(t,\theta))^{-\hat m_1 n_1-\hat m_2 n_2-1}(B(\theta,\tau))^{-M-1}\sum_{s=1}^{2}E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta));\xi)d\lambda_1 d\lambda_2\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3}(B(t_1,\tau))^{-1}J_3(\hat m_2\gamma_2)\sum_{s=1}^{2}I_2^{(3,0j)}(x_1,x_2;\xi)\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{(\hat m_3)^{-1}\hat m_1\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat m_2\gamma_2}\big(E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi)+E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,z^{(3)},\xi)\big).$$

Доданки D^3_{34} і D^3_{35} оцінюються однаково. Оцінимо D^3_{34}. За допомогою оцінок (5.118) і (5.127) при $\gamma_s^0=(\hat m_s)^{-1}\hat m_1\gamma_1,\ s\in\mathbb{N}_3$, маємо

$$|D^3_{34}|\le C\int\limits_{\eta_3}^{t}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\beta))^{-M-1}E^{(3)}_{c,d}(t,\theta,x,\lambda)(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{3}|X_s(B(t,\theta))-\lambda_s|^{(\hat m_s)^{-1}\hat m_1\gamma_1}\sum_{j=s-1}^{s}E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,\Lambda^{0j}(B(t,\theta));\xi)d\lambda\le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1}\int\limits_{\eta_3}^{t}(B(t,\theta))^{-1+\hat m_1\gamma_1}\beta(\theta)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=s-1}^{s}I_0^{(3,0j)}(x;\xi)\le$$

$$\le C|x_3-z_3|^{(\hat m_3)^{-1}\hat m_1\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-1}E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданок D^3_{36} оцінюємо аналогічно за допомогою оцінок (5.123) при $\gamma_3^0>\gamma_3$ і (5.126). Маємо

$$|D^3_{36}|\le C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}\int\limits_{t_1}^{\eta_3}(B(t,\theta))^{-M-1+\hat m_3(\gamma_3-\gamma_3^0)}E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,X(B(t,\theta)),\xi)\beta(\theta)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\le$$

$$\leq C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}J_3(\hat m_3(\gamma_3-\gamma_3^0))E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C|x_3-z_3|^{(\hat m_3)^{-1}\hat m_1\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-1}E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданки D^3_{37} і D^3_{38} оцінюються однаково. За допомогою оцінок (5.118) і (5.126) оцінимо перший з них.

$$|D^3_{37}|\leq C\int\limits_{\eta_3}^{t}(B(t,\theta))^{-1+\hat m_1\gamma_1}(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,X(B(t,\theta)),\xi)\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta_3}^{t}(B(t,\theta))^{-1+\hat m_1\gamma_1}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}(B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x),\xi)\leq$$

$$\leq C|x_3-z_3|^{(\hat m_3)^{-1}\hat m_1\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat m_3\gamma_3}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків $D^3_{3j},\ j\in\mathbb{N}_8$, випливає оцінка

$$|\Delta^{z_3}_{x_3}\partial^{k_1}_{x_1}W_{33}(t,x;\tau,\xi)|\leq C|x_3-z_3|^{(\hat m_3)^{-1}\hat m_1\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-1}\times$$

$$\times\big(E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi)+E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,z^{(3)},\xi)\big). \tag{5.165}$$

За допомогою формул (5.139) і (5.140) запишемо зображення

$$\Delta^{z_s}_{x_s}\partial^{k_l}_{x_l}W_{33}(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{z_s}_{x_s}\partial^{k_l}_{x_l}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\Delta^{z_s}_{x_s}\partial^{k_l}_{x_l}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\Bigg)\times$$

$$\times\Delta^{X(B(t,\theta))}_{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{01}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial^{k_l}_{x_l}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\Bigg)\times$$

$$\times\Delta^{X(B(t,\theta))}_{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{01}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1-$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial^{k_l}_{x_l}G_{33}(t,z^{(s)};\theta,\lambda)d\lambda_2d\lambda_3\Bigg)\times$$

$$\times\Delta^{Z^{(s)}(B(t,\theta))}_{\Lambda^{s1}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{s1}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_3\right)\times$$

$$\times\Delta_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}^{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{02}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\beta,\lambda)d\lambda_3\right)\Delta_{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}^{\Lambda^{01}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{02}(B(t\theta));\tau,\xi)d\lambda_1-$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,z^{(s)};\theta,\lambda)d\lambda_3\right)\times$$

$$\times\Delta_{\Lambda^{s2}(B(t,\theta))}^{\Lambda^{s1}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\Lambda^{s2}(B(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}Q_{33}(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,z^{(s)};\theta,\lambda)\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{s2(B(t,\theta))}(B(t,\theta))}Q_{33}(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_s}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+$$

$$+\int\limits_{\eta_s}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\theta,X(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}-$$

$$-\int\limits_{\eta_s}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_l}^{k_l}G_{33}(t,z^{(s)};\theta,\lambda)d\lambda\right)Q_{33}(\beta,Z^{(s)}(B(t,\theta));\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}=:$$

$$=:\sum_{j=1}^{13}D_{3j}^{ls},\ \ l\in\{2,3\},\ \ s\in\mathbb{N}_3.$$

Доданок D_{31}^{ls} оцінюємо за допомогою оцінок (5.123), (5.126) і нерівностей (2.79).

Маємо для $l\in\{2,3\},\ s\in\mathbb{N}_3$

$$|D_{31}^{ls}|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s}E_{c,d}^{(3)}(t,\theta,x,\lambda)\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t,t_1))^{-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-\hat{m}_l+\hat{m}_3\gamma_3}\beta(\theta)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}I_0^{(3,03)}(x,\xi)\le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-\hat{m}_l-\hat{m}_s\gamma_s+\hat{m}_3\gamma_3}E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Другий доданок оцінюємо за допомогою оцінок (5.123), (5.127) при $\gamma_s^0=\gamma_s$ і нерівностей (2.68).

$$|D_{32}^{ls}|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}\int\limits_{t_1}^{\eta_s}\beta(\theta)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}(B(t,\theta))^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_l(1-\gamma_l)-\hat{m}_s\gamma_s}\times$$

$$\times E_{c,}^{(2,1)}(t,\theta,x_1,\lambda_1)|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1}(B(\theta,\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times\Bigg(E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{01}(B(t,\tau)),\xi)+E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,X(B(t,\tau)),\xi)\Bigg)d\lambda_1\le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t_1,\tau))^{-l}J_s(\gamma_{ls})\Bigg(I_1^{(3,03)}(x_1,\xi)+I_1^{(3,03)}(x_1,\xi)\Bigg),\tag{5.166}$$

де $\gamma_{ls}=1+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_l(1-\gamma_l)-\hat{m}_s\gamma_s,\ l\in\{2,3\},\ s\in\mathbb{N}_3.$

З нерівностей (5.166) і (**??**), випливає

$$|D_{32}^{ls}|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s-(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_{s-1}}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_{s-1}+\gamma_{ls}}E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданки D_{33}^{ls}, D_{34}^{ls} оцінюються однаково. За допомогою оцінок (5.122), (5.127) і нерівностей (2.80) оцінимо перший з них.

$$|D_{33}^{ls}|\le C\int\limits_{\eta_s}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-\hat{m}_1n_1-\hat{m}_l(1-\gamma_l)}|x_1-z_1|^{\gamma_1}E_c^{2,1}(t,\theta,x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\Bigg(E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,\Lambda^{01}(B(t,\theta)),\xi)+E_{c,d}^{(3)}(\theta,\tau,X(B(t,\theta)),\xi)\Bigg)d\lambda_1\le$$

$$\le C\Bigg(I_1^{(3,01)}(x_1,\xi)+I_1^{(3,00)}(x_1,\xi)\Bigg)\int\limits_{\eta_s}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l)+\hat{m}_1\gamma_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\times$$

$$\times(B(t_1,\tau))^{-1+\hat{m}_3\gamma_3}\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s-(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_{s-1}}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_{s-1}+\gamma_{ls}}E_{c_0,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Оцінимо D_{35}^{ls}. Для цього використаємо оцінки (5.125), (5.127) і (2.81). Для $s \in \in \mathbb{N}_3$ маємо для $l=2$ і $s \in \mathbb{N}_3$

$$|D_{35}^{2s}| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} \int\limits_{t_1}^{\eta_s} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_2 - \hat{m}_s\gamma_s} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau)^{-M-1}|X_2(B(t,\theta)) - \lambda_2|^{\gamma_2} E_{c,d}^{(2,2)}(t,\theta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s}(B(t_1,\tau))^{-1} J_s(\hat{m}_2\gamma_2 - \hat{m}_1 - \hat{m}_s\gamma_s)\times$$
$$\times\left(I_2^{(3,01)}(x_1,x_2;\xi) + I_2^{(3,00)}(x_1,x_2;\xi)(x_1,x_2;\xi)\right) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_2\gamma_2 - \hat{m}_1)}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

Аналогічно оцінюємо у випадку $l=3$ і $s \in \mathbb{N}_3$

$$|D_{35}^{3s}| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} \int\limits_{t_1}^{\eta_s} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_3(1-\gamma_3) - \hat{m}_s\gamma_s} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1}|X_2(B(t,\theta)) - \lambda_2|^{\gamma_2} E_{c,d}^{(2,2)}(t,\theta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s}(B(t_1,\tau))^{-1} J_s(1 - \hat{m}_3(1-\gamma_3) + \hat{m}_2\gamma_2 - \hat{m}_s\gamma_s)\times$$
$$\times\left(I_2^{(3,01)}(x_1,x_2;\xi) + I_2^{(3,00)}(x_1,x_2;\xi)(x_1,x_2;\xi)\right) \leq$$

$$\leq C \begin{cases} |x_2 - z_2|^{\gamma_2}(B(t,\tau))^{-M-1-\hat{m}_2+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_2\gamma_2} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), & \text{при } s=2, \\ |x_3 - z_3|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_2)}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3+\hat{m}_2\gamma_2} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi), & \text{при } s=3. \end{cases}$$

Доданки D_{36}^{ls} і D_{37}^{ls} також оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D_{36}^{2s}| \leq C \int\limits_{\eta_s}^{t} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_2} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau)^{-M-1}|X_2(B(t,\theta)) - \lambda_2|^{\gamma_2} E_{c,d}^{(2,2)}(t,\theta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2))d\lambda_1 d\lambda_2 \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s}(B(t_1,\tau))^{-1}\left(I_2^{(3,01)}(x_1,x_2;\xi) + I_2^{(3,02)}(x_1,x_2;\xi)\right)\times$$

$$\times \int\limits_{\eta_s}^{t} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_2(1-\gamma_2)} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_2\gamma_2 - \hat{m}_1)}(B(t,\tau))^{-M-1} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi).$$

$$|D^{3s}_{36}| \leq C \int\limits_{\eta_s}^{t} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_3(1-\gamma_3)} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1} |X_2(B(t,\theta)) - \lambda_2|^{\gamma_2} E^{(2,2)}_{c,d}(t,\theta,x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (B(t_1,\tau))^{-1} \int\limits_{\eta_s}^{t} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_3(1-\gamma_3)+\hat{m}_2\gamma_2} \beta(\theta) \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \times$$

$$\times \left(I^{(3,01)}_2(x_1,x_2;\xi) + I^{(3,02)}_2(x_1,x_2;\xi) \right) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_2)} (B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi).$$

Оцінимо тепер D^{ls}_{38}. Для цього використаємо оцінки (5.119), (5.127) і (2.81). Отримаємо

$$|D^{ls}_{38}| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} \int\limits_{t_1}^{\eta_s} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-\hat{m}_l - \hat{m}_s\gamma_s} E^{(2,3)}_c(t-\beta,x,\lambda) \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1} |X_3(B(t,\theta)) - \lambda_3|^{\gamma_3} E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (B(t_1,\tau))^{-1} \times$$

$$\times J_s(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_{l-1} - \hat{m}_s\gamma_s) \left(I^{(3,01)}_2(x_1,x_2;\xi) + I^{(3,00)}_2(x_1,x_2;\xi) \right) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_{l-1})} (B(t,\tau))^{-M-1} E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданки D^{ls}_{39} і D^{ls}_{310} також оцінюються однаково. Оцінимо перший з них.

$$|D^{ls}_{39}| \leq C \int\limits_{\eta_s}^{t} \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-\hat{m}_l} E^{(3)}_{c,d}(t,\theta,x,\lambda) |X_3(B(t,\theta)) - \lambda_3|^{\gamma_3} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1} E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda \leq C(B(t_1,\tau))^{-1} I^{(3,00)}_0(x;\xi) \times$$

$$\times \int\limits_{\eta_s}^{t} (B(t,\beta))^{\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_l} \beta(\theta) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_3\gamma_3 - \hat{m}_{l-1})} (B(t,\tau))^{-M-1} E^{(3)}_{c_0,d}(t,\tau,x,\xi).$$

Оцінимо D^{ls}_{311}. Для цього використаємо оцінки (5.121), (5.126) і (2.93). Отримаємо

$$|D^{3s}_{311}| \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s} \int\limits_{t_1}^{\eta_s} (B(t,\theta))^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l) - \hat{m}_s\gamma_s} (B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3} \times$$

$$\times E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,X(B(t,\theta)),\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$
$$\times J_s(\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_{l-1}-\hat{m}_s\gamma_s)E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi)\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_{l-1})}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi).$$

Доданки D^{ls}_{312} і D^{ls}_{313} також оцінюються аналогічно. Оцінимо перший з них. Використовуючи оцінки (5.120), (5.126) і (2.93), отримуємо

$$|D^{3s}_{312}| \le C\int\limits_{\eta_s}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l)}(B(\theta,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\times$$
$$\times E^{(3)}_{c,d}(\theta,\tau,X(B(t,\theta),\xi)\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}\le$$
$$\le C(B(t_1,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}\int\limits_{\eta_s}^{t}(B(t,\theta))^{-\hat{m}_l(1-\gamma_l)}\frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi)\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}(\hat{m}_l\gamma_l-\hat{m}_{l-1})}(B(t,\tau))^{-M-1+\hat{m}_3\gamma_3}E^{(3)}_{c,d}(t,\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків D^{ls}_{3j}, $j\in\mathbb{N}_{13}$, нерівностей (5.161), (5.163) і (5.165), означення (5.115) і оцінок (5.119) випливають оцінки (5.156). ►

РОЗДІЛ 6
ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ФРЗК

В цьому розділі наводяться застосування ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ і $\boldsymbol{K_4}$, які побудовано і досліджено у попередніх розділах 3, 4 і 5. Основні результати розділу опубліковано в працях [16 –20,22,32,35,37].

6.1. Задача Коші для вироджених рівнянь типу Колмогорова

С. Д. Ейдельманом і С. Д. Івасишеним запропоновано підхід Е-І, який дозволяє повністю характеризувати широкі класи U розв'язків параболічних рівнянь. Розв'язки з цих класів визначені в областях $\Pi_{(0,T]}$ і $Q_T := (0,T] \times \Omega$, де $T > 0$, Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$, і як функції просторової змінної x мають при $|x| \to \infty$ експоненціальний ріст максимально можливого порядку із залежним від часової змінної t типом. При реалізації підходу Е-І для класу U вирішуються такі питання : 1) за яких умов існує і є єдиним розв'язок із класу U; 2) якими є множини початкових значень (при $t = 0$) розв'язку і в якому сенсі розв'язок задовольняє початкову умову; 3) за яких умов правильне інтегральне зображення розв'язку через його початкові значення? Підхід Е-І багатократно реалізовувався багатьма авторами (див. огляд в [203]).

Отримана в розділах 3, 4 і 5 інформація про ФРЗК для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{K_2}$ і $\boldsymbol{K_3}$ дає змогу отримати для цих рівнянь в області $\Pi_{(0,T]}$ результати, подібні до результатів з [203]. Наведенню таких результатів присвячений цей підрозділ.

Означимо простори, які будуть використовуватись далі.

Нехай $p \in [1,\infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, — задана комплекснозначна функція, вимірна при будь-якому $t \in [0,T]$. Для кожного $t \in [0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k_l(t)} := \left\| \frac{u(t,x)}{\varphi_l(t,X(t))} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{s_l(t)} := \left\| \frac{u(t,x)}{\psi_l(t,x)} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \ l \in \mathbb{N}_3,$$

де функції $\varphi_l, \ \psi_l, \ k_l$ і $s_l, \ l \in \mathbb{N}_3$ — такі, як означені в підрозділі 2.4. За допомогою цих норм означимо простори.

$L_p^{k_l(t)}$, $t \in [0,T]$, $p \in [1,\infty]$, — простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{k_l(t)}$, і $L_p^{a_l} := L_p^{k_l(0)}, \ l \in \mathbb{N}_3$;

M^{a_l} — простір зліченно-адитивних функцій $\mu : \mathbf{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борелевих мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умови

$$\|\mu\|^{a_l} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi_l(0,x))^{-1} \, d\,|\mu|\,(x) < \infty, \quad l \in \mathbb{N}_3,$$

де B — σ-алгебра борелевих множин простору $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ — повна варіація μ;

$L_1^{-s_l(T)}$ — простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_1^{-s_l(T)} := \left\| \frac{\psi(x)}{\psi_l(T,x)} \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}, \quad l \in \mathbb{N}_3;$$

$C_0^{-s_l(T)}$ — простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що при $|x| \to \to \infty$ маємо $|\psi(x)|\,\psi_l(T,x) \to 0$. Норму в $C_0^{-s_l(T)}$ означимо як

$$\|\psi\|_\infty^{-s_l(T)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(|\psi(x)|\,\psi_l(T,x)\right), \quad l \in \mathbb{N}_3.$$

Зауважимо, що

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{s_l(t)} \le \|u(t,\cdot)\|_p^{k_l(t)}, \qquad t \in [0,T], \qquad p \in [1,\infty], \quad l \in \mathbb{N}_3. \tag{6.1}$$

Оскільки, зважаючи на (2.166), $s_l(t) \ge a_l$, то для $\varphi \in L_p^{a_l}, \ l \in \mathbb{N}_3$, маємо

$$\|\varphi\|_p^{s_l(t)} \leq \|\varphi\|_p^{a_l}, \qquad t \in [0,T], \qquad p \in [1,\infty], \quad l \in \mathbb{N}_3. \tag{6.2}$$

Нехай існують вирази L_l^*, які є спряженими за Лаґранжем до виразів L_l. Тоді спряжені рівняння матимуть вигляд

$$L_1^* v(\tau,\xi) := \left(-\partial_\tau + \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}} \right) v(\tau,\xi) -$$

$$-\sum_{j,\ell=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1\ell}}(\overline{a_{j\ell}(\tau,\xi)}\, v(\tau,\xi)) + \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}}(\overline{a_j(\tau,\xi)}\, v(\tau,\xi)) -$$

$$-\overline{a_0(\tau,\xi)}\, v(\tau,\xi) = 0, \qquad (\tau,\xi) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n. \tag{6.3}$$

$$L_2^* v(\tau,\xi) := \left(-\partial_\tau + \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}} \right) v(\tau,\xi) -$$

$$-\sum_{|k| \leq 2b} \partial_{\xi_{k_1}}^{k_1}(\overline{a_{j\ell}(\tau,\xi)}\, v(\tau,\xi))$$

$$-\overline{a_0(\tau,\xi)}\, v(\tau,\xi) = 0, \qquad (\tau,\xi) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n. \tag{6.4}$$

$$L_3^* v(\tau,\xi) := \left(-\partial_\tau + \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}} + \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}} \right) v(\tau,\xi) -$$

$$-\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \sum_{j,\ell=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1\ell}}(\overline{a_{j\ell}(\tau,\xi)}\, v(\tau,\xi)) + \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}}(\overline{a_j(\tau,\xi)}\, v(\tau,\xi)) -$$

$$-\frac{\overline{a_0(\tau,\xi)}}{\alpha(\tau)}\, v(\tau,\xi) = 0, \qquad (\tau,\xi) \in \Pi_{[t_0,T)}. \tag{6.5}$$

Тут і далі риска над виразом означає перехід у ньому до комплексного спряження. У формулі (6.5) $t_0 = 0$, якщо виродження слабке і $t_0 > 0$, якщо виродження сильне.

Нехай γ_1, γ_2 і γ_3 — числа з умов (A_{l1}), $l \in \mathbb{N}_3$. Позначимо через $\gamma :=$ $= \min\{\gamma_1, 3\gamma_2 - 1, 5\gamma_3 - 3\}$. Для зручності сформулюємо основні результати побудови ФРЗК для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_l}$ в термінах відстаней $p_l(x,\xi)$, $l \in \mathbb{N}_3$, де $p_l(x,\xi) = \hat{d}(x,\xi)$, якщо $l \in \{1,3\}$ і $p_2(x,\xi) = d(x,\xi)$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, а відстані d і $\hat{d}$ означені у підрозділі 2.4.

Справджуються такі твердження:

Теорема 6.1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.1) *виконуються умови* (A_{11}), (A_{12}) *і* (A_{15}). *Тоді справджуються такі оцінки:*

$$\partial_{x_l}^{k_l} Z_1(t,x;\tau,\xi)| \le E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi); \tag{6.6}$$

$$|\Delta_x^z \partial_{x_l}^{k_l} Z_1(t,x;\tau,\xi)| \le Cp_1(x,z)^\gamma (t-\tau)^{-M-M_k-\gamma/2} \times \\ \times \left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right). \tag{6.7}$$

У формулах (6.6) *і* (6.7) $Z_1(t,x;\tau,\xi) = Z_{13}(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}$, $\{l,s\} \subset \mathbb{N}_3$, $\hat{m}_1|k_1| = |k_2| = |k_3| = 1$.

Теорема 6.2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.6) *виконуються умови* (A_{21}), (A_{22}) *і* (A_{25}). *Тоді справджуються такі оцінки:*

$$\partial_{x_l}^{k_l} Z_2(t,x;\tau,\xi)| \le E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi); \tag{6.8}$$

$$|\Delta_x^z \partial_{x_l}^{k_l} Z_2(t,x;\tau,\xi)| \le Cp_1(x,z)^\gamma (t-\tau)^{-M-M_k-\gamma/(2b)} \times \\ \times \left(E_c^{(2)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(2)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \right). \tag{6.9}$$

У формулах (6.8) *і* (6.9) $Z_2(t,x;\tau,\xi) = Z_{23}(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}$, $\{l,s\} \subset \mathbb{N}_3$, $|k_1| \le 2b$, $|k_2| = |k_3| = 1$.

Теорема 6.3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.8) *виконуються умови* (A_{31}), (A_{32}) *і* (A_{35}). *Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z_3 *і справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_l}^{k_l} Z_3(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi); \tag{6.10}$$

$$|\Delta_x^z \partial_{x_l}^{k_l} Z_3(t,x;\tau,\xi)| \le Cp_3(x,z)^\gamma (B(t,\tau)^{-M-M_k-\gamma/2} \times \\ \times \left(E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,x,\xi) + E_{c,d}^{(3)}(t,\tau,z^{(s)},\xi) \right). \tag{6.11}$$

У формулах (6.10) *і* (6.11) $Z_3(t,x;\tau,\xi) = Z_{33}(t,x;\tau,\xi),\ 0 < \tau < t \le T,$ $\{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s},\ \{l,s\} \subset \mathbb{N}_3,\ \hat{m}_1|k_1| = |k_2| = |k_3| = 1.$

Спочатку наведемо додаткові властивості ФРЗК.

Теорема 6.4. *Нехай для коефіцієнтів* A_l *рівняння з класу* $\boldsymbol{K_l}$ *виконуються відповідні умови* (A_{l1})*–*(A_{l4})*,* $l \in \mathbb{N}_3$*. Тоді правильні такі твердження:*

1) *існує класичний ФРЗК* Z_l^**,* $l \in \mathbb{N}_3$ *для відповідного спряженого рівняння* (6.3)*,* (6.4) *чи* (6.5)*, який зв'язаний із ФРЗК* Z_l *рівністю*

$$Z_l^*(\tau,\xi;t,x) = \overline{Z_l(t,x;\tau,\xi)}, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ l \in \mathbb{N}_3. \quad (6.12)$$

Класичний ФРЗК Z_l*,* $l \in \mathbb{N}_3$*, для якого справджується ця рівність, називають нормальним;*

2) *класичний ФРЗК* Z_l *є розв'язком функціонального рівняння*

$$Z_l(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_l(t,x;\beta,\lambda)\, Z_l(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$

$$0 \le \tau < \beta < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ l \in \mathbb{N}_3; \quad (6.13)$$

3) *існує лише один нормальний класичний ФРЗК* Z_l*,* $l \in \mathbb{N}_3$*, для якого справджуються оцінки* (6.6) *і* (6.7)*,* (6.8) *і* (6.9) *чи* (6.10) *і* (6.11)*.*

Доведення. Усі твердження теореми доводяться окремо для кожного $l \in \mathbb{N}_3$. Почнемо з доведення твердження 1) теореми. Зауважимо, що рівняння (6.3),(6.4) і (6.5) є рівняннями того типу, що й рівняння з відповідних класів $\boldsymbol{K_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, якщо замість τ ввести нову змінну $\tau' = -\tau$. Тому при виконанні умов (A_{l1})–(A_{l4}) існує КФРЗК $Z_l^*(\tau,\xi;t,x),\ 0 \le \tau < t \le T,\ \{\xi,x\} \in \mathrm{R}^n$, $l \in \mathbb{N}_3$. Решта тверджень теореми доводяться подібно для кожного $l \in \mathbb{N}_3$. Тому проведемо доведення для випадку $l = 1$.

Далі скористаємось такою формулою Ґріна – Остроградського:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{B_R} \left(\bar{v}Lu - u\overline{L^* v}\right)(\theta, y)dy = \int\limits_{B_R} (\bar{v}u)(\theta, y)|_{\theta=t_1}^{t_2} dy-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\Gamma_R} \left(\sum_{j=1}^{n_2} y_{1j}\mu_{2j} + \sum_{j=1}^{n_3} y_{2j}\mu_{3j}\right)(\bar{v}u)(\theta, y)dS_y+$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} B^j[v,u](\theta, y)\mu_{1j} dS_y,$$

де $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, B_R – куля в R^n радіуса R з центром у початку координат, Γ_R– її межа, $(\mu_{11}, \ldots, \mu_{1n_1}, \mu_{21}, \ldots, \mu_{2n_2}, \mu_{31}, \ldots, \mu_{3n_3})$ — орт зовнішньої нормалі до Γ_R.L і L^* — спряжені диференціальні вирази з (1.1) і (6.3),

$$B^j[v,u] := -\sum_{l=1}^{n_1}(a_{jl}\partial_{y_{1l}} u\bar{v} - u\partial_{y_{1l}}(a_{jl}\bar{v})) + a_j u\bar{v},\ j \in \mathrm{N}_{n_1},$$

u і v — досить гладкі функції. Перехід у цій формулі до границі для підходящих функцій u і v приводить до формули

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\mathrm{R}^n} \left(\bar{v}Lu - u\overline{L^* v}\right)(\theta, y)dy = \int\limits_{\mathrm{R}^n} (\bar{v}u)(\theta, y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy. \tag{6.14}$$

На підставі оцінок (6.6) та аналогічних оцінок для Z^* є правильною формула , в якій $u(\theta, y) = Z(\theta, y; \tau, \xi)$, $v(\theta, y) = Z^*(\theta, y; t, x)$, $t_1 = \tau + \varepsilon$ і $t_2 = t - \varepsilon$, де ε — досить мале додатне число, тобто формула

$$\int\limits_{\mathrm{R}^n} \overline{Z_1^*(\tau+\varepsilon, y; t, x)} Z_1(\tau+\varepsilon, y; \tau, \xi)dy = \int\limits_{\mathrm{R}^n} \overline{Z_1^*(t-\varepsilon, y; t, x)} Z_1(t-\varepsilon, y; \tau, \xi)dy,$$

з якої після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ випливає рівність (6.12).

Аналогічно до попереднього одержуємо рівність

$$\int\limits_{\mathrm{R}^n} \overline{Z_1^*(\beta, y; t, x)} Z(\beta, y; \tau, \xi)dy = \int\limits_{\mathrm{R}^n} \overline{Z_1^*(t-\varepsilon, y; t, x)} Z_1(t-\varepsilon, y; \tau, \xi)dy. \tag{6.15}$$

Рівність (6.13) одержується, якщо в (6.15) перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ і скористатись формулою (6.12) і властивістю класичного ФРЗК Z_1.

Перейдемо до доведення твердження 3) теореми 1. Нехай Z_{11} і Z_{12} — два нормальні класичні КФРЗК для рівняння (1.1). Скористаємось формулою (6.15), поклавши в ній $u(\theta, y) = Z_{11}(\theta, y; \tau, \xi)$, $v(\theta, y) = Z_2(t, x; \theta, y)$. Тоді одержимо рівність

$$\int\limits_{\mathrm{R}^n} \overline{Z_{11}(t_2, y; \tau, \xi)} Z_{12}(t, x; t_2, y) dy = \int\limits_{\mathrm{R}^n} \overline{Z_{11}(t_1, y; \tau, \xi)} Z_{12}(t, x; t_1, y) dy.$$

На підставі довільності вибору t_1 і t_2 з інтервалу (τ, t) остання рівність означає, що функція

$$\int\limits_{\mathrm{R}^n} \overline{Z_{11}(\theta, y; \tau, \xi)} Z_{12}(t, x; \theta, y) dy,\ \theta \in (\tau, t),\ \{x, \xi\} \subset \mathrm{R}^n,$$

не залежить від θ. Позначимо цю функцію через $\Phi_1(t, x; \tau, \xi)$. Отже

$$\Phi_1(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\mathrm{R}^n} \overline{Z_{11}(\theta, y; \tau, \xi)} Z_{12}(t, x; \theta, y) dy,\ \theta \in (\tau, t),\ \{x, \xi\} \subset \mathrm{R}^n. \quad (6.16)$$

Спрямувавши в рівності (6.16) θ спочатку до τ, а потім до t, одержимо, що

$$\Phi_1(t, x; \tau, \xi) = Z_{12}(t, x; \tau, \xi) = Z_{11}(t, x; \tau, \xi),\ 0 \le \tau < t \le T,\ \ \{x, \xi\} \subset \mathrm{R}^n.$$

▶

Теорема 6.5. *Нехай для коефіцієнтів A_l рівняння з класу $\boldsymbol{K_l}$ виконуються відповідні умови (A_{l1})–(A_{l4}), $l \in \mathbb{N}_3$. Тоді правильні такі твердження:*

1) *для будь-яких функцій $\varphi \in L_p^{a_l}$ та узагальненої міри $\mu \in M^{a_l}$ формули*

$$u_{l1}(t, x) := (P_l \varphi)(t, x), \qquad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad l \in \mathbb{N}_3; \qquad (6.17)$$

$$u_{l0}(t, x) := (P_l \mu)(t, x), \qquad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad l \in \mathbb{N}_3; \qquad (6.18)$$

визначають єдині в шарі $\Pi_{(0,T]}$ *класичні розв'язки відповідного однорідного рівняння;*

2)*існує стала* $C_l > 0$*, яка не залежить від* $\varphi \in L_p^{a_l}$ *та* $\mu \in M^{a_l}$*, така, що для довільного* $t \in (0,T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u_{l1}(t,\,\cdot\,)\|_p^{k(t,a)} \leq \, C_l \, \|\varphi\|_p^{a_l}, \quad l \in \mathbb{N}_3,$$

$$\|u_{l0}(t,\,\cdot\,)\|_1^{k_l(t)} \leq \, C_l \, \|\mu\|^{a}, \quad l \in \mathbb{N}_3;$$

3) *при* $p \in [1,\infty)$ *справджується рівність* $\lim\limits_{t\to\infty} \|u_{l1}(t,\,\cdot\,) - \varphi(\,\cdot\,)\|_p^{s_l(t)} = 0$*, а при* $p = \infty$ *— граничні співвідношення* $u_{l1}(t,\,\cdot\,) \underset{t\to 0}{\to} \varphi$ *і* $u_{l0}(t,\,\cdot\,) \underset{t\to 0}{\to} \mu$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *відповідно з просторів* $L_1^{-s_l(T)}$ *і* $C_0^{-s_l(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u_{l1}(t,x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)\, dx$$

і

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u_{l1}(t,x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, d\mu(x), \quad l \in \mathbb{N}_3.$$

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 6.5.

Теорема 6.6. *Нехай виконуються умови теореми 6.5 і* u_l *— класичний розв'язок в* $\Pi_{(0,T]}$ *однорідного рівняння з відповідного класу* $\boldsymbol{K_l}$*, який задовольняє умову*

$$\|u_l(t,\,\cdot\,)\|_p^{k_l(t)} \leq C_l, \qquad t \in (0,T], \qquad l \in \mathbb{N}_3. \tag{6.19}$$

з деякими сталою $C_l > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$*. Тоді при* $p \in (1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{a_l}$*, а при* $p = 1$ *— єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{a_l}$*, такі, що розв'язок* u_l*,* $l \in \mathbb{N}_3$ *зображується відповідно у вигляді (6.1) і (6.15).*

Доведення теорем 6.5 і 6.6 проводити не будемо, оскільки, по-перше, вони є досить громіздкими, а, по-друге, вони повторюють доведення, які наведено в працях [14, 180]. Як і в згаданих працях при доведеннях істотну роль відіграють вагові функції, їх властивості, які наведено у підрозділі 2.4.

Теореми 6.5 і 6.6 є реалізацією вищеописаного підходу Е-І до класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження і коефіцієнтами, залежними від усіх змінних.

Нехай U_{lp}, $p \in [1, \infty]$, — класи усіх класичних розв'язків рівнянь з класів $\boldsymbol{K_l}$, які при кожному $t \in (0, T]$ належать до відповідних просторів $L_p^{k_l(t)},\ l \in \mathbb{N}_3$ як функції x і для яких виконується умова (6.19). З теорем 2 і 3 випливають такі важливі наслідки.

Наслідок 6.1. Множинами початкових значень розв'язків із класів U_{lp}, $p \in (1, \infty]$, та U_1 є відповідно простори $L_p^{a_l}$ та $M^{a_l},\ l \in \mathbb{N}_3$ і тільки вони.

Наслідок 6.2. Класи U_{lp}, $p \in (1, \infty]$, і U_{l1} є множинами значень операторів Пуассона, визначених формулами (6.17) і (6.18) на просторах відповідно $L_p^{a_l}$ і $M^{a_l},\ l \in \mathbb{N}_3$, причому ці оператори є ізоморфізмами.

Дослідження коректної розв'язності задачі Коші для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$ розпочнемо з дослідження об'ємного потенціалу. У випадку рівнянь з класу $\boldsymbol{K_3}$ будемо вважати, що має місце слабке виродження.

$$u_l(t, x) := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_l(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]},\ \ l \in \mathbb{N}_2; \tag{6.20}$$

$$u_3(t, x) := \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_3(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{6.21}$$

Для функції $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ будемо використовувати наступні умови:

(F_0) функція f є неперервною, локально гельдеровою за x_1, x_2 і x_3 з відповідними показниками γ_1, γ_2 і γ_3 рівномірно стосовно t і для довільного $t \in (0, T]$ скінченними є величини $\|f(t, \cdot)\|_0^{k_l(t)} := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\dfrac{|u(t, x)|}{\varphi_l(t, x)} \right)$ і $F_0(t) := = \int\limits_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_0^{k_l(\tau)} d\tau$, $l \in \mathbb{N}_3$;

(F_p) функція f є неперервною, локально гельдеровою за x_1, x_2 і x_3 з відповідними показниками γ_1, γ_2 і γ_3 рівномірно стосовно t і для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $\|f(t,\cdot)\|_p^{k_l(t)}$ и $F_p(t) := \int\limits_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{k_l(\tau)} d\tau$, де $p \in [1,\infty]$, $l \in \mathbb{N}_3$.

В умовах (F_0) і (F_p) числа γ_1, γ_2 і γ_3 — такі, як в умові (A_{l1}), $l \in \mathbb{N}_3$.

Лема 6.1. *Якщо функція f задовольняє умову (F_0) або (F_p), то функція* (6.20) *має неперервні похідні $\partial_{x_s}^{k_s} u_l$, $k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $(\delta_{1l}2 + \delta_{2l}2b)^{-1}|k_1| + |k_2| + |k_3| \le 1$, і Su_l, для $l \in \mathbb{N}_2$. У випадку $l = 3$ функція* (6.21) *має неперервні похідні $\partial_{x_s}^{k_s} u_3$, $k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $|k_1|/2 + |k_2| + |k_3| \le 1$, і $S(t)u_l$. Для цих похідних справджуються формули*

$$\partial_{x_1}^{k_1} u_l(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_l(t,x;\tau,\lambda) f(\tau,\lambda) d\lambda, \ (\delta_{1l}2 + \delta_{2l}2b)^{-1}|k_1| < 1;$$

$$\partial_{x_1}^{k_1} u_3(t,x) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_l(t,x;\tau,\lambda) f(\tau,\lambda) d\lambda, \ |k_1| = 1;$$

$$\partial_{x_s}^{k_s} u_l(t,x) = \int\limits_0^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_s}^{k_s} Z_l(t,x;\tau,\lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \Delta_{\Lambda^{01}(t-\tau)}^{X(t-\tau)} f(\beta, \Lambda^{01}(t-\tau)) d\lambda_1 +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_s}^{k_s} Z_l(t,x;\tau,\lambda) d\lambda_3 \right) \Delta_{\Lambda^{02}(t-\tau)}^{\Lambda^{01}(t-\tau)} f(\tau, \Lambda^{02}(t-\tau)) d\lambda_1 d\lambda_2 +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_s}^{k_s} Z_l(t,x;\tau,\lambda) \Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t-\tau)} Q_3(\tau,\lambda) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_s}^{k_s} Z_l(t,x;\tau,\lambda) d\lambda \right) f(\tau, X(t-\tau)) d\tau.$$

$$\partial_{x_s}^{k_s} u_3(t,x) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_s}^{k_s} Z_l(t,x;\tau,\lambda) d\lambda_2 d\lambda_3 \right) \Delta_{\Lambda^{01}(t-\tau)}^{X(t-\tau)} f(\beta, \Lambda^{01}(t-\tau)) d\lambda_1 +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_s}^{k_s} Z_l(t,x;\tau,\lambda) d\lambda_3 \right) \Delta_{\Lambda^{02}(t-\tau)}^{\Lambda^{01}(t-\tau)} f(\tau, \Lambda^{02}(t-\tau)) d\lambda_1 d\lambda_2 +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_s}^{k_s} Z_l(t,x;\tau,\lambda) \Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t-\tau)} Q_3(\tau,\lambda) d\lambda +$$

$$+\int\limits_0^t \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_s}^{k_s} Z_l(t,x;\tau,\lambda) d\lambda \right) f(\tau, X(t-\tau)) d\tau.$$

$$Su_l(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} SZ_l(t,x;\tau,\lambda) \Delta_\lambda^{X(t-\tau)} f(\tau,\lambda) d\lambda +$$

$$+\int\limits_0^t \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} SZ_l(t,x;\tau,\lambda) d\lambda \right) f(\tau, X(t-\tau)) d\tau;$$

$$S(t)u_3(t,x) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} S(t) Z_3(t,x;\tau,\lambda) \Delta_\lambda^{X(t-\tau)} f(\tau,\lambda) d\lambda +$$

$$+\int\limits_0^t \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S(t) Z_3(t,x;\tau,\lambda) d\lambda \right) f(\tau, X(t-\tau)) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)},$$

$0 < t \le T,\ x \in \mathbb{R}^n$.

Доведення.Лема доводиться за допомогою оцінок класичних ФРЗК (6.6)–(6.11) і стандартної методики, яка використовувалась при доведенні відповідних лем 3.9, 4.9 і 5.9.▶

Лема 6.2. *Нехай для функції f виконана умова F_0. Тоді функція* (6.20) *чи* (6.21) *є розв'язком рівняння відповідного рівняння* (1.1)*,* (1.6) *чи* (1.8)*, для якого справджується оцінка*

$$\|u_l(t,\cdot)\|_0^{k_l(t)} \le CF_0(t), \quad t \in (0,T], \quad l \in \mathbb{N}_3, \tag{6.22}$$

и для довільного компакту $K \subset \mathbb{R}^n$

$$u_l(t,x) \underset{t\to 0}{\to} 0 \quad \text{рівномірно по } x \in K,\ l \in \mathbb{N}_3. \tag{6.23}$$

Доведення. Те, що функції (6.20) і (6.21) є розв'язком відповідних рівнянь обгрунтовується як у попередній лемі. Оцінки (6.22) доводяться аналогічно до доведень з леми 2.9. Співвідношення (6.23) є наслідком оцінок (6.22).▶

Лема 6.3. *Якщо функція f задовольняє умову F_p, то функція* (6.20) *чи* (6.21) *є розв'язком рівняння відповідного рівняння* (1.1), (1.6) *чи* (1.8), *яка має такі властивості:*

$$\|u_l(t,\cdot)\|_p^{k_l(t)} \leq CF_p(t), \quad t \in (0,T],\ l \in \mathbb{N}_3, \tag{6.24}$$

$$\lim_{t\to 0} \|u_l(t,\cdot)\|_p^{s_l(t)} = 0,\ l \in \mathbb{N}_3. \tag{6.25}$$

Доведення. Для доведення леми достатньо установити правильність оцінок (6.24). З цієї оцінки і того, що $F_p(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$, випливає (6.25).

Зауважимо, що справджується нерівність

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k_l(t)} \leq \int\limits_0^t \|P_l(t,\tau,\cdot)\|_p^{k(t)} d\tau, \quad t \in (0,T],\ l \in \mathbb{N}_3, \tag{6.26}$$

де

$$P_l(t,\tau,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi\ l \in \mathbb{N}_3.$$

Для $p \in \{1,\infty\}$ нервність (6.26) очевидно справджується, а для $p \in (1,\infty)$ вона справджується на підставі нерівності Мінковського. Аналогічно доводиться нерівність

$$\|P_l(t,\tau,\cdot)\|_p^{k_l(t)} \leq C\|f(\tau,\cdot)\|_p^{k_l(\tau)}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,\ l \in \mathbb{N}_3.$$

З неї і нерівності (6.26) випливають оцінки (6.24). ▶

Сформулюємо основні теореми для неоднорідних рівнянь з класів $\boldsymbol{K_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, які є аналогами теорем 6.5, 6.6 для однорідних рівнянь.

Теорема 6.7. *Нехай для коефіцієнтів $\mathcal{A}_l$ рівняння з класу $\boldsymbol{K_l}$ виконуються відповідні умови (A_{l1})–(A_{l4}), $l \in \mathbb{N}_3$. Тоді правильні такі твердження:*

1) для довільних функції $\varphi \in L_p^{a_l}$ и функції f, яка задовольняє умову F_p,

$p \in [1, \infty]$, формулами

$$u_l(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_l(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}} Z_l(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, l\in\mathbb{N}_2, \tag{6.27}$$

$$u_3(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_3(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}} Z_3(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{6.28}$$

визначають єдині розв'язки рівнянь (1.1), (1.6) *і* (1.8), *для яких справджуються оцінки*

$$\|u_l(t,\cdot)\|_p^{k_l(t} \le C(\|\varphi\|_p^{a_l} + F_p(t)), \quad t\in(0,T],\ l\in\mathbb{N}_3,$$

і співвідношення 3) з теореми 6.5 відповідно для $p \in [1,\infty)$ і $p = \infty$;

2) для довільних узагальненої міри $\mu \in M^{a_l}$ і функції f, яка задовольняє умову F_1, формулами

$$u_l(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_l(t,x;0,\xi)d\mu(\xi)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}} Z_l(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, l\in\mathbb{N}_2, \tag{6.29}$$

$$u_3(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_3(t,x;0,\xi)d\mu(\xi) + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}} Z_3(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{6.30}$$

визначають єдині розв'язки рівнянь (1.1), (1.6) *і* (1.8), *для яких справджуються оцінки*

$$\|u_l(t,\cdot)\|_1^{k_l(t)} \le C(\|\mu\|^{a_l} + F_1(t)), \quad t\in(0,T], \quad l\in\mathbb{N}_3$$

і відповідні співвідношення з теореми 6.5.

Теорема 6.8. *Нехай для коефіцієнтів $\mathcal{A}_l$ рівняння з класу $\boldsymbol{K_l}$ виконуються відповідні умови (A_{l1})–(A_{l4}), $l \in \mathbb{N}_3$, для правої частини f — умова F_p, а для розв'язку u_l, визначеного в шарі $\Pi_{(0,T]}$, справджується нерівність*

$$\|u_l(t,\cdot)\|_p^{k_l(t)} \le C, \quad t\in(0,T], \quad l\in\mathbb{N}_3$$

з деякими сталою $C > 0$ і $p \in [1, \infty]$. Тоді при $p \in (1, \infty]$ існує єдина функція $\varphi \in L_p^{a_l}$, а при $p = 1$ — єдина узагальнена міра $\mu \in M^{a_l}$ такі, що розв'язок u_l зображається у вигляді (6.27), (6.28), (6.29) *і* (6.30).

Доведення теорем 6.7 і 3.11 із урахуванням леми 6.3 є фактично повторенням додоведень теорем 6.5 і 6.6.

Зауваження. Теореми 6.7 і 6.8 мають такі ж наслідки, що і наслідки 1 і 2 з теорем 6.5 і 6.6. Отже, для рівнянь (1.1), (1.6) і (1.8), коефіцієнти яких залежать від усіх змінних, реалізовано підхід E-I.

Наведемо ще теорему про коректну розв'язність задачі Коші для рівнянь з класів $\boldsymbol{K_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, за припущення, що початкова функція належить до простору $C_0^{a_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, непрерывных функций $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Теорема 6.9. *Якщо виконані умови (A_{l1})–(A_{l4}) для коефіцієнтів $\mathcal{A}_l$ рівняння з класу $\boldsymbol{K_l}$, умова F_p для правої частини f і $\varphi \in C_0^{a_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, то формулами* (6.27) *і* (6.28) *визначаються єдині розв'язки відповідних рівнянь, для яких справджуються оцінки*

$$\|u_l(t, \cdot)\|_0^{k_l(t)} \le C(\|\varphi\|_0^{a_l} + F_0(t)), \quad t \in (0, T], , \ l \in \mathbb{N}_3$$

і для довільного компакту $K \subset \mathbb{R}^n$ співвідношення

$$u_l(t, x) \underset{t \to 0}{\to} \varphi(x) \quad \text{равномерно} \quad \text{по} \quad x \in K.$$

Доведення. Доведення цієї теореми проводиться аналогічно. При цьому використовується лема 6.2 для об'ємного потенціалу.▶

6.2. Задача Коші для рівнянь з класу K_4

Для функцій $u : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ використовуються простори $C_{\cdot,\cdot}^{\cdot,\cdot}$ з розділу 2 у випадку $\delta = \beta$. За допомогою цих просторів означимо простори $U_{\mu,r}^{\gamma,\lambda}$ і $U_d^{\gamma,\lambda}$ для заданих чисел $\{\gamma, \lambda\} \subset (0, 1]$, $\mu \in \{0, 1, ...\}$ і $\{d, r\} \subset \mathbb{R}$. Вони складаються відповідно з функцій $u \in C_{\mu,r+1}^{0,0}$ і $u \in C_d^{0,0}$, які мають похідні $\partial_x^k u$, $0 < ||k|| \le 2b$, що належать відповідно до просторів $C_{\mu,r+1-||k||/(2b)}^{\zeta,\zeta/(2b)}$ і $C_d^{\zeta,\zeta/(2b)}$, де $\zeta = \gamma$ для $||k|| < 2b$ і $\zeta = \lambda$ для $||k|| = 2b$. Норми в просторах визначаються відповідно формулами

$$||u||_{U^{\gamma,\lambda}_{\mu,r}} := ||u||^{0,0}_{\mu,r+1} + \sum_{0<||k||<2b} ||\partial^k_x u||^{\gamma,\gamma/(2b)}_{\mu,r+1-||k||/(2b)} + \sum_{||k||=2b} ||\partial^k_x u||^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r},$$

$$||u||_{U_{d^{\gamma,\lambda}}} := ||u||^{0,0}_{d} + \sum_{0<||k||<2b} ||\partial^k_x u||^{\gamma,\gamma/(2b)}_{d} + \sum_{||k||=2b} ||\partial^k_x u||^{\lambda,\lambda/(2b)}_{d}.$$

ФРЗК Z_4 породжує об'ємний потенціал

$$u_4(t,x) \equiv \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6.31}$$

властивості якого описані в наступних лемах.

Лема 6.4. *Нехай для коефіцієнтів системи* (1.9) *виконуються умови* (A_{41})*і*(A_{42}). *Тоді правильні твердження:*

а) якщо $f \in C^{\lambda,0}_{\mu+1,r}$, $\lambda \leq \gamma$, $\mu \in \{0,1,...\}$, $r \geq 0$, *то функція* (6.31) *має неперервні похідні, які входять у систему* (1.9) *і обчислюються за такими формулами:*

$$\partial^k_x u_4(t,x) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^k_x Z_4(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad ||k|| < 2b, \tag{6.32}$$

$$\partial^k_x u_4(t,x) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^k_x Z_4(t,x;\tau,\xi) \Delta^x_\xi f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^k_x Z(t,x;\tau,\xi) d\xi \right) f(\tau,x) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad ||k|| = 2b, \tag{6.33}$$

$$\alpha(t)\partial_t u_4(t,x) = f(t,x) + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\partial_t Z_4(t,x;\tau,\xi) \Delta^x_\xi f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha(t)\partial_t Z(t,x;\tau,\xi) d\xi \right) f(\tau,x) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}; \tag{6.34}$$

б) якщо $f \in C^{\lambda,0}_{0,0}$, $\lambda \leq \gamma$, *і додатково припускається виконання умови* (1.17) *з деяким* $\gamma_0 < \lambda$, *то для функції* (6.31) *має місце те саме, що й у твердженні а);*

в) якщо $f \in C^{0,0}_{\mu+1,r}$, $\mu \in \{0, 1, ...\}$, $r \geq 0$, *то для функції* (6.31) *та її похідних, які обчислюються за формулами* (6.32) – (6.34), *справджуються оцінки*

$$||\partial_x^k u||^{0,0}_{\mu,1+r-||k||/(2b)} \leq C||f||^{0,0}_{\mu+1,r}, \quad ||k|| < 2b, \tag{6.35}$$

$$[\partial_x^k u]^{\gamma,0}_{\mu,1+r-||k||/(2b)} \leq C||f||^{0,0}_{\mu+1,r}, \quad ||k|| < 2b. \tag{6.36}$$

З оцінок (6.35), (6.36) випливає, що $\partial_x^k u \in C^{\gamma,0}_{\mu,1+r-||k||/(2b)}$, $||k|| < 2b$, для довільних $\mu \in \{0, 1, ...\}$ і $r \geq 0$ і, отже, $\partial_x^k u \in C^{\gamma,0}_{\mu,r}$, $||k|| < 2b$.

Лема 6.5. *Нехай у системі* (1.9) *коефіцієнти* a_k, $||k|| \leq 2b$, *залежать тільки від параметрів* $(\theta, y) \in \Pi_{[0,T]}$, *причому вони, як функції цих параметрів, задовольняють умови* (A_{41}),(A_{42})*і* (1.16). *Нехай, далі,* $Z_40(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot; \theta, y)$ – *ФРЗК для такої системи.*

Якщо $f \in C^{\gamma,0}_{1,r}$, $r > \gamma/(2b)$, *то для інтеграла*

$$v(t, x; \theta, y) \equiv \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t, x; \tau, \xi; \theta, y) f(\tau, \xi) d\xi, \quad \{(t, x), (\theta, y)\} \subset \Pi_{(0,T]},$$

правильне таке твердження: функції

$$v_k(t, x) \equiv \partial_x^k v(t, x; \theta, y)|_{(\theta,y)=(t,x)}, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]},$$

належать до просторів $C^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,r+1-||k||/(2b)}$, $0 < ||k|| \leq 2b$, *і справджуються оцінки*

$$||v_k||^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,1+r-||k||/(2b)} \leq C||f||^{\gamma,0}_{1,r}, \quad 0 < ||k|| \leq 2b.$$

Якщо $f \in C^{\gamma,0}_{0,0}$ *і додатково виконується умова* **5** *з* $\gamma_0 < \gamma$, *то* v_k, $0 <$ $< ||k|| \leq 2b$, *належить до просторів* $C^{\gamma_1,\gamma_1/(2b)}_{0,0}$ *і справджуються оцінки*

$$||v_k||^{\gamma_1,\gamma_1/(2b)}_{0,0} \leq C||f||^{\gamma,0}_{0,0}, \quad 0 < ||k|| \leq 2b,$$

де $\gamma_1 = \gamma$, *якщо* $||k|| < 2b$ *і* $\gamma_1 = \gamma - \gamma_0$, *якщо* $||k|| = 2b$.

Леми доводяться за допомогою відповідних тверджень з розділу 2.

Наведемо властивості інтеграла Пуассона функції φ, тобто

$$u_\varphi(t, x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_4(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6.37}$$

та інтеграла Пуассона узагальненої міри μ

$$u_\mu(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_4(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6.38}$$

породжених ФРЗК Z_4 слабко виродженої системи (1.9). При цьому функція φ та узагальнена міра μ беруться зі спеціальних вагових просторів.

Нехай c_0, a_1, ...,a_n і T – задані числа такі, що $0 < c_0 < c$, $0 \le a_j < c_0 T^{1-q_j}$, $j \in \{1,...,n\}$, де c – стала з оцінок (6.6), (6.7) для ФМРЗК для системи (1.9), коефіцієнти якої задовольняють такі умови, як вище. $a = (a_1, ..., a_n)$, $k(t) \equiv (k_1(t), ..., k_n(t))$, де k_j, $j \in \{1,...,n\}$, і $\Psi(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, — функції, які означені вище; $u: \ \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_N$ — задана функція, вимірна за змінною $x \in \mathbb{R}^n$ при кожному $t \in [0,T]$.

Для будь-яких $t \in [0,T]$ і $p \in [1,\infty]$ означимо норми

$$||u(t,\cdot)||_p^{k(t)} \equiv ||(\Psi(t,\cdot))^{-1}u(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де $L_p(\mathbb{R}^n)$ – L_p-простір Лебега функцій зі значеннями в $\mathbb{C}_N$, визначених на $\mathbb{R}^n$.

Позначимо через $L_p^{k(0)}$ простір усіх вимірних за Лебегом функцій φ : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченна норма $||\varphi||_p^{k(0)}$.

Нехай $\mathcal{B}_n$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^n$. Через $M^{k(0)}$ позначимо простір усіх зліченно-адитивних функцій $\mu: \ \mathcal{B}_n \to \mathbb{C}_N$ (узагальнених борельових мір) таких, що

$$||\mu||^{k(0)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Psi(0,x))^{-1} d|\mu|(x) < \infty,$$

де $|\mu|$ – повна варіація μ.

Наведемо властивості інтегралів (6.37), (6.37), які описуються у наступних лемах, де припускається, що коефіцієнти системи (1.9) задовольняють умови (A_{41}), (A_{42}), (1.17) і $A(T,0) < \infty$.

Лема 6.6. *Якщо $\varphi \in L_p^{k(0)}$, то функція u_φ, що визначена формулою* (6.37), *є розв'язком однорідної системи*

$$(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t) \sum_{1 \le ||k|| \le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k - a_0(t,x))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6.39}$$

для якого:

1) $\exists C>0\ \forall t\in(0,T]:\ ||u_\varphi(t,\cdot)||_p^{k(t)}\leq C||\varphi||_p^{k(0)}$,

причому стала C не залежить від φ;

2) при $1\leq p<\infty$

$$\lim_{t\to 0+}||u_\varphi(t,\cdot)-\varphi(\cdot)||_p^{k(t)}=0,$$

а при $p=\infty$

$$\forall\eta\in L_1^{-k(T)}:\quad \lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)u_\varphi(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\varphi(x)dx,$$

де $L_1^{-k(T)}$ – множина всіх вимірних за Лебегом функцій $\eta:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$, для яких скінченна норма

$$||\Psi(T,\cdot)\eta(\cdot)||_{L(\mathbb{R}^n)}.$$

Лема 6.7. *Нехай $\mu\in M^{k(0)}$. Тоді функція u_μ з формули* (6.37) *є розв'язком системи* (6.39)*, для якого:*

1) існує така стала $C>0$, що

$$\forall t\in(0,T]:\ ||u_\mu(t,\cdot)||_1^{k(t)}\leq C||\mu||^{k(0)},$$

причому C не залежить від μ;

2) $\forall\eta\in C_0^{-k(T)}$:

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)u_\mu(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)d\mu(x),$$

де $C_0^{-k(T)}$ – множина всіх неперервних функцій $\eta:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$ таких, що $\Psi(T,x)|\eta(x)|\to 0$, якщо $|x|\to\infty$.

Зауваження. Розв'язки системи (6.39), які описані в лемах 6.6 і 6.7, є єдиними. Це доводиться за допомогою лем про інтегральне зображення розв'язків, які аналогічні наступним двом лемам. Доведення цих лем грунтується на відповідній формулі Гріна-Остроградського.

Лема 6.8. *Нехай функція $u: \ \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_N$ неперервна, задовольняє умову*

$$\exists C > 0 \ \forall t \in (0,T]: \ W_0[u;t] \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n}((\Psi(t,x))^{-1}|u(t,x)|) \le C$$

і є в $\Pi_{(0,T]}$ розв'язком системи (1.9), в якій f неперервна в $\Pi_{(0,T]}$ і задовольняє умову $\int\limits_0^T W_0[f;\tau]\frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$. Якщо виконуються умови (A_{41}), (A_{42}), (1.17) і $A(T,0) < \infty$, то правильна формула

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_4(t,x;0,\xi)u(0,\xi)d\xi + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де Z_4— ФРЗК для системи (1.9).

Лема 6.9. *Припустимо, що виконуються умови (A_{41}), (A_{42}), (1.17) та $A(T,0) = \infty$ $B(T,0) < \infty$. Нехай функція $u: \ \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ неперервна і задовольняє умови:*

а) $\exists C > 0 \ \forall t \in (0,T]: \ W_0[u;t]E^d(T,t) \le C$;

б) функція u є розв'язком системи (1.9) з неперервною функцією $f: \ \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$, для якої збігається інтеграл

$$\int\limits_0^T W_0[f;\tau]E^d(T,\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)};$$

в) $\lim\limits_{t\to 0}(u(t,x)E^d(T,t)) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$.

Тоді правильне зображення

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_4(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де

$$Z_0(t,x;\xi) := \lim_{\tau\to 0}(Z_4(t,x;\tau,\xi)E^{-d}(T,\tau)).$$

Справджуються теореми.

Теорема 6.10. *Нехай коефіцієнти $\mathcal{A}_4$ задовольняють умови (A_{41}), (A_{42}), (1.16) і виконується умова (1.17), $A(T,0) < \infty$, $f \in C_{0,0}^{\gamma,0}$ і $\varphi \in C^{2b+\gamma}$. Тоді, якщо u— регулярний розв'язок задачі Коші з простору $U_0^{0,0}$, то $u \in U_0^{\gamma,\gamma_1}$*

і справджується оцінка

$$\|u\|_{U_0^{\gamma,\gamma_1}} \le C\left(\|\varphi\|^{2b+\gamma} + \|f|_{0,0}^{\gamma,0}\right),$$

де число $\gamma_1 = \gamma - \gamma_0$ *таке, як в лемі 6.5.*

Теорема 6.11. *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_4$ *задовольняють умови* (A_{41}), (A_{42}), (1.16) *і виконується умова* (1.17), $A(T,0) = \infty$, $B(T,0) < \infty$, $f \in C_d^{\gamma,0}$ *і* $\varphi \in C^{2b+\gamma}$. *Тоді, якщо* u*— регулярний розв'язок задачі Коші з простору* $U_d^{0,0}$, *то* $u \in U_0^{\gamma,\gamma_1}$ *і справджується оцінка*

$$\|u\|_{U_0^{\gamma,\gamma_1}} \le C\left(\|\varphi\|^{2b+\gamma} + \|f|_d^{\gamma,0}\right),$$

де $\gamma_1 = \gamma - \gamma_0$ *,а число* γ_0*— таке як в умові* (1.17).

За допомогою теорем про апріорні оцінки і підвищення гладкості доводяться наступні теореми про коректну розв'язність задачі Коші.

Теорема 6.12. *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_4$ *задовольняють умови* (A_{41}), (A_{42}), (1.16) *і виконується умова* (1.17), $A(T,0) < \infty$, $f \in C_0^{\gamma,0}$ *і* $\varphi \in C^{2b+\gamma}$. *Тоді простір* U_0^{γ,γ_1} *є класом коректності задачі Коші,* γ_1 *— таке, як вище.*

Теорема 6.13. *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_4$ *задовольняють умови* (A_{41}), (A_{42}), (1.16) *і виконується умова* (1.17), $A(T,0) = \infty$, $B(T,0) < \infty$, $f \in C_0^{\gamma,0}$ *і* $\varphi \in C^{2b+\gamma}$. *Тоді простір* U_d^{γ,γ_1} *є класом коректності задачі Коші, з ваговою початковою умовою,* γ_1 *— таке, як вище.*

Теорема 6.14. *Нехай коефіцієнти* $\mathcal{A}_4$ *задовольняють умови* (A_{41}), (A_{42}), (1.16) *і* $f \in C_{3,r}^{\gamma,0}$, $r > \gamma/(2b)$. *Тоді простір* $U_{0,r}^{\gamma,\gamma}$ *є класом коректності системи* (1.9).

Доведення цих теорем проводиться за допомогою методики, запозиченої з праці [3] і відповідно модифікованої, щоб мати можливість враховувати виродження системи.

6.3. Локальна розв'язність квазілінійних рівнянь

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{\|k\|=2b} a_k(t,x,D_x^{2b-1}u)\partial_x^k)u(t,x)$$
$$= f(t,x,D_x^{2b-1}u),(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{6.40}$$

з початковою умовою

$$u(t,x)\big|_{t=+0} = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{6.41}$$

Використовуватимемо ще такі позначення:

$$D_x^p u := \{\partial_x^k u_j \,|\, |k|\le p, j\in\mathbb{N}_0\},$$

якщо $u\in\mathbb{C}_N$, де $p\in\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 := \{1,\ldots,N\}$; L_p — кількість елементів множини $D_x^p u$; $\mathbb{N}_1^p := \{1,\ldots,L_p\}$; $G_p(\mathbb{R}) := \{y\in\mathbb{R}^{L_p}\,|\,|y_j|\le R_j, j\in\mathbb{N}_1\}$, де $R_j, j\in\mathbb{N}_1$ — додатні сталі,$\mathbb{R} := (R_1,\ldots,R_{L_p})$і $\mathbf{R_0} := (R_1,\ldots,R_{L_p})$, якщо $R_1 = \ldots = R_{L_p} = R_0$, де $R_0>0$ — деяка стала ; $Q_H^p(\mathbf{R}) := \{(t,x,y)\,|\,(t,x)\in\Pi_H, y\in G_p(\mathbf{R})\}$, $\Pi_H := H\times\mathbb{R}^n$.

Для зручності сформулюємо припущення на коефіцієнти і праву частину рівняння (6.40).

$\mathbf{A_1}$. Вираз $(I\partial_t - \sum_{\|k\|=2b} a_k(t,x,y)\partial_x^k)$ рівномірно параболічний за Петровським в $Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0})$.

$\mathbf{A_2}$. Коефіцієнти $a_k : Q_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{NN}$, $\|k\| = 2b$, обмежені, неперервні за змінною t рівномірно щодо x та y, задовольняють у $Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0})$ рівномірну умову Гельдера за x з показником $\lambda\in(0,1)$ та умову Ліпшиця за змінною y.

$\mathbf{A_3}$. $\exists\, C>0\ \forall\,\{t,t'\}\subset[0,T]$, $t<t'$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n\ \forall\, y\in G_{2b-1}(\mathbf{R_0})\ \forall\, k, \|k\| = 2b$: $|\Delta_t^{t'} a_k(t,x,y)| := |a_k(t',x,y) - a_k(t,x,y)| \le CA(t',t)^{\gamma/(2b)}$,$\gamma\in(0,1)$.

$\mathbf{A_4}$.$\exists\,\gamma_0\in(0,1)\ \ \exists\, M>0\ \ \forall\, t\in(0,T]$:
$$\int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le M.$$

Клас функцій, що разом із своїми похідними до p-го порядку включно, задовольняють серію умов $\mathbf{A_1}$—$\mathbf{A_3}$ з певними λ і γ, позначаються через $\mathcal{A}^{p,\lambda,\gamma/(2b)}(Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R_0}))$. У випадку, коли коефіцієнти системи (6.40) функції $a_k : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{NN}$, $|k| = 2b$ не залежать від змінної $y\in G_{2b-1}(\mathbf{R_0})$, то відповідний клас функцій позначатимемо через $\mathcal{A}^{p,\lambda,\gamma/(2b)}(\Pi_{[0,T]})$. Стосовно функції $f : Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}) \to \mathbb{C}_N$ припускатимемо виконаними наступні умови.

$\mathbf{F_1}$. Функція f неперервна в $Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0})$.

$\mathbf{F_2}$. $\exists\, C > 0\ \forall\ (t,x,y) \in Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}) : |f(t,x,y)| \le C\sigma(t)$, де $\sigma : [0,T] \to$ $\to [0,\infty)$ — неперервна функція.

$\mathbf{F_3}$. $\exists\, C > 0\ \forall\ \{(t,x,y),(t,x',y)\} \subset Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}) : |\Delta_x^{x'} f(t,x,y)| :=$ $= |f(t,x',y) - f(t,x,y)| \le C\sigma(t)|x-x'|^{\lambda}$, $\lambda \in (0,1)$.

$\mathbf{F_4}$. $\exists\, C > 0\ \forall\ \{(t,x,y),(t,x,y')\} \subset Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}) : |\Delta_y^{y'} f(t,x,y)| :=$ $= |f(t,x,y') - f(t,x,y)| \le C\sigma(t)|y-y'|$.

Клас функцій, які задовольняють серію умов $\mathbf{F_1}$—$\mathbf{F_4}$ з певними λ і σ, позначаються через $\mathcal{F}^{\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$.Позначатимемо через $\mathcal{F}^{p,\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$ клас функцій f, які разом зі своїми похідними за просторовою змінною до порядку p включно належать до класу $\mathcal{F}^{\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R_0}))$.

Означимо простори функцій. Розглядатимемо простори функцій , які є неперервними чи задовольняють умову Гельдера та мають певні обмеження при $t \to 0$. Їх поведінка при $t \to 0$ описуватиметься функцією

$$(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^{r} E^{-d}(T,t), \quad t \in (0,T],$$

де $\mu = \{0,1\}$, $r \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$; δ — неперервна монотонно неспадна на $[0,T]$ функція така, що $0 < \delta(t) \le \beta(t)$ для $t \in (0,T]$ та збігається інтеграл $\Delta(T,0) :=$ $= \int_0^T (\delta(\theta)/\alpha(\theta))d\theta$. Для заданих чисел $\lambda \in (0,1]$, $\mu \in \{0,1\}$ і $r \in \mathbb{R}$ позначимо через $C^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r}$, $C^{\lambda,0}_{\mu,r}$ і $C^{0,0}_{\mu,r}$ простори неперервних функцій $u : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченні відповідно норми

$$\|u\|^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r} := \|u\|^{0,0}_{\mu,r} + [u]^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r},$$

$$\|u\|^{\lambda,0}_{\mu,r} := \|u\|^{0,0}_{\mu,r} + [u]^{\lambda,0}_{\mu,r} \quad \text{і} \quad \|u\|^{0,0}_{\mu,r},$$

де

$$\|u\|^{0,0}_{\mu,r} := \sup_{(t,x)\in\Pi_{(0,T]}} \left(\frac{|u(t,x)|E^{d}(T,t)}{(\delta(t))^{\mu}(\Delta(t,0))^{r}} \right),$$

$$[u]^{\lambda,\lambda/(2b)}_{\mu,r} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\}\subset\Pi_{(0,T]}\\(t,x)\neq(t',x')}} \left(\frac{|\Delta^{t',x'}_{t,x} u(t,x)|}{(\Delta(\bar{t},0))^{r-\lambda/(2b)}} \right.$$

$$\left. \times\delta(t)^{-\mu} p(t',x';t,x)^{-\lambda} E^d(T,\tilde{t}) \right),$$

$$[u]^{\lambda,0}_{\mu,r} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{(0,T]}\\x\neq x'}} \left(|\Delta^{x'}_{x} u(t,x)| \times \right.$$

$$\left. \times(\delta(t))^{-\mu}(\Delta(t,0))^{-r+\lambda/(2b)}|x-x'|^{-\lambda} E^d(T,t) \right).$$

Тут $\bar{t} := t+(t'-t)\eta(r-\lambda/(2b))$ і $\tilde{t} := t+(t'-t)\eta(d)$, а $\eta(\cdot)$– характеристична функція множини $[0,\infty)$.

За допомогою означених просторів уведемо простір $U^{\gamma,\lambda}_r$. Він складається з функцій $u \in C^{0,0}_{0,r+1}$, які мають похідні $\partial^k_x u \in C^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,r+1-|k|/(2b)}$, $0 < |k| < 2b$, та похідні $\partial^k_x u \in C^{\lambda,\lambda/(2b)}_{0,r}$, $|k| = 2b$. Норма в просторі $U^{\gamma,\lambda}_r$ визначається формулою

$$\|u\|_{U^{\gamma,\lambda}_r} := \|u\|^{0,0}_{0,r+1} + \sum_{0<|k|<2b} \|\partial^k_x u\|^{\gamma,\gamma/(2b)}_{0,r+1-|k|/(2b)}$$

$$+ \sum_{|k|=2b} \|\partial^k_x u\|^{\lambda,\lambda/(2b)}_{0,r}.$$

Простори $U^{\gamma,\lambda}_r$, в яких функції u визначені в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$, $T_0 \le T$, позначатимемо через $U^{\gamma,\lambda}_r(\Pi_{(0,T_0]})$.

Теорема 6.15. *Нехай для системи* (6.40) *виконуються припущення* $\mathbf{A_1}$,$\mathbf{A_2}$ *і* $\mathbf{A_3}$, *функція* f *належить до класу* $\mathcal{F}^{\lambda}_{\sigma}(Q^{2b-1}_{[0,T]}(\mathbf{R}_0))$ *з* $0 < \lambda < \gamma$ *та* $\sigma(\cdot) := \delta(\cdot\cdot)(\Delta(\cdot,0))^{s-1}$, *де* s *— таке додатне число, що виконується умова*

$$\beta(t)(\Delta(t,0))^{\nu} \le \delta(t), \quad \nu :=$$

$$s + \lambda/(2b) - 1 > \gamma/(2b), \tag{6.42}$$

принаймні для малих $t > 0$. *Тоді існує таке число* $T_0 \in (0,T]$, *що задача Коші* (6.40), (6.41) *має єдиний розв'язок з простору* $U^{\gamma,\lambda}_{\nu}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Розглянемо випадок, коли $B(T,0) < \infty$. У цьому випадку за функцію δ

можна взяти β. Тоді нерівність (12) виконується для всіх $t \in (0, T_0]$ таких, що $B(T_0, 0) < 1$. Простір функцій, до якого належить розв'язок у цьому випадку, позначимо через $\overset{\circ}{U}{}_{\nu}^{\gamma,\lambda}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Теорема 6.16. *Нехай для коефіцієнтів системи* (6.40) *виконуються припущення теореми 6.15. і* $B(T, 0) < \infty$. *Якщо* f *належить до класу* $\mathcal{F}_{\sigma}^{\lambda}(Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R}_0))$ *з* $0 < \lambda \leq \gamma$ *і* $\sigma(\cdot) = \beta(\cdot)(B(t, 0))^{s-1}$, $s \geq 1 + (\gamma - \lambda)/(2b)$, *то існує таке число* $T_0 > 0$, *що задача Коші* (6.40), (6.41) *має єдиний розв'язок з простору* $\overset{\circ}{U}{}_{\nu}^{\gamma,\lambda}(\Pi_{(0,T_0]})$, *де* ν *таке ж, як у* (12).

У випадку слабкого виродження ($A(T, 0) < \infty$), припускаючи додатково виконаною умову $\mathbf{A_4}$, локальну розв'язність задачі Коші встановлено для систем, праві частини яких належать до класу $\mathcal{F}_1^{\lambda}$. Цей клас є таким, як і у випадку квазілінійних параболічних систем без виродження . Крім того, розглянемо систему (6.40) з неоднорідною початковою умовою

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.43}$$

де функція φ є неперервною і обмеженою разом з усіма похідними до порядку $2b$ включно, котрі задовольняють умову Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1)$, тобто до класу $C_0^{2b+\gamma}$.

Теорема 6.17. *Нехай для коефіцієнтів системи* (6.40) *виконуються умови* $\mathbf{A_1}$,$\mathbf{A_2}$,$\mathbf{A_3}$ *і* $\mathbf{A_4}$, *функція* f *належить до класу* $\mathcal{F}_1^{\gamma}(Q_{[0,T]}^{2b-1}(\mathbf{R}_0))$. *Тоді існує таке число* $T_0 > 0$, *що неоднорідна задача Коші* (6.40), (13) *має єдиний розв'язок з простору* $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}(\Pi_{(0,T_0]})$.*початковій гіперплощтні.*

Доведення теореми проводиться за методикою,яка використовувалась для систем без виродження на початковій гіперплощтні.

Наведемо результати досідження локальної розв'язності задачі Коші для квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова вигляду

$$(Lu)(t, x) := (\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t) \partial_{x_{1k}} \partial_{x_{1j}} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t)\partial_{x_{1j}} - -a_0(t))u(t,x) = 0, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (6.44)$$

Нехай коефіцієнти $\mathcal{A}_1$ рівняння (6.44), як функції t, задовольняють умови (A_{11}) і (A_{12}) тоді, на підставі теореми 2.1, існує класичний ФРЗК Z_{10} для якого справджуються оцінки (2.137).

Розглянемо інтеграл

$$w(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{10}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (6.45)$$

де Z_{10}— ФРЗК для рівняння (6.44).

Його гладкість вивчатимемо в термінах спеціальних гельдерових норм і просторів. Для функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ покладемо $||w|| := \sup\limits_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} (|w(t,x)|)$, $[w]^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} := \sup\limits_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]}\\ x\neq x'}} |\Delta_x^{x'} w(t,x)| d[x,x';\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}$, $||w||^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} := = ||w|| + [w]^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$, де $\alpha_1 \in (0,1)$, $\alpha_2 \in (0,3)$, $\alpha_3 \in (0,5)$; $d[x,x';\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] := = (\sum\limits_{l=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_l} |x_{lj} - x'_{lj}|^{2\alpha_l/(2l-1)})^{1/2}$ – спеціальна відстань між точками x і x' з $\mathbb{R}^n$.

Використовуватимемо також позначення: $d[x,x';\alpha] := d[x,x';\alpha,\alpha,\alpha]$, $||w||^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)} := ||w||^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} + \sum_{l=1}^{3}\sum_{0<|m_l|\le p_l} ||\partial_{x_l}^{m_l} w||_{k(\cdot)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$, $p_1 \in \in \{0,1,2\}$, $p_2 \in \{0,1\}$, $p_3 \in \{0,1\}$.

Означимо такі простори функцій:

$C(\Pi_{[0,T]})$ – простір усіх неперервних функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма $||w||$;

$C^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\Pi_{[0,T]})$, $\alpha_1 \in (0,1)$, $\alpha_2 \in (0,3)$, $\alpha_3 \in (0,5)$, – простір усіх функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма $||w||^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$;

$C^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)}(\Pi_{[0,T]})$ – простір функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, які разом зі своїми похідними $\partial_{x_l}^{m_l} w$, $|m_l| \le p_l$, $l \in \mathcal{M}$, належать до простору $C^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\Pi_{[0,T]})$, тобто є скінченною норма $||w||^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)}$. Розглядатимемо простори функцій в яких $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$.

З результатів підрозділу 6.1 випливає таке твердження.

Теорема 6.18. *Нехай коефіцієнти рівняння* (6.44) *задовольняють умови*

(A_{11}), (A_{12}) *і* $f \in C^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)}$, $\alpha \in (0,1)$. *Тоді формулою* (6.45) *визначається єдиний розв'язок рівняння* $(Lu)(t,x) = f(t,x), (t,x) \in \Pi_{(0,T]}$ *,який належить до простору* $C^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}$ *і для якого справджуються оцінки*

$$||w||^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)} \le C||f||^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)}, \tag{6.46}$$

$$|w(t,x)| \le Ct, \tag{6.47}$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} w(t,x)| \le Ct^{1+(2l-1)(\alpha_l-|m_l|)/2}, \tag{6.48}$$

$$|\Delta_x^{x'}\partial_{x_l}^{m_l} w(t,x)| \le Cd(x,x';\alpha), l \in M, \tag{6.49}$$

де $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = (1+\alpha)/3$, $\alpha_3 = (3+\alpha)/5$. *Причому стала* C *в оцінках* (6.46)–(6.51) *залежить від сталих з умов* (A_{11}), (A_{12}), *з оцінок ФРЗК* (2.137) *та інших сталих із означення класу* $C^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)}(\Pi_{[0,T]})$.

Розглянемо тепер задачу Коші

$$(Lu)(t,x) = f(t,x,D_{x_1}^1 u(t,x)), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6.50}$$

$$u(t,x)|_{t=+0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.51}$$

Стосовно функції $f : Q_{[0,T]}^1(\mathbf{R_0}) \to \mathbb{C}$ припускатимемо виконаними умови $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_4}$ та умову

$\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{3}$. $\exists\, C > 0 \ \forall \ \{(t,x,y),(t,x',y)\} \subset Q_{[0,T]}^1(R_0)$:
$|\Delta_x^{x'} f(t,x,y)| \le C\sigma(t)d(x,x';\lambda)$, $\lambda \in (0,1)$. , $\lambda \in (0,1)$.

Клас функцій, які задовольняють серію умов $\mathbf{F_1}$,$\mathbf{F_2}$,$\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{3}$ і $\mathbf{F_4}$ з певними λ і σ, позначатимемо через $\hat{\mathfrak{F}}_\sigma^\lambda(Q_{[0,T]}^1(\mathbf{R_0}))$.

Наведемо теорему про локальну розв'язність задачі Коші (6.50),(6.51).

Теорема 6.19. *Нехай коефіцієнти рівняння* (6.50) *задовольняють умови* (A_{11}) *і* (A_{12}), *функція* f *належить до класу* $\hat{\mathfrak{F}}_1^\lambda(Q_{[0,T]}^1(\mathbf{R_0}))$ *з деяким* $0 < \lambda < 1$. *Тоді існує таке число* $T_0 \in (0,T]$, *що задача Коші* (6.50),(6.51) *має єдиний розв'язок з простору6.52* $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Доведення. Розглянемо послідовність функцій $\{u^s : s \ge 0\}$, які задовольняють рівняння

$$(Lu^s)(t,x) = f(t,x,D^1_{x_1}u^{s-1}(t,x)), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, s \geq 1, \tag{6.52$_l$}$$

$$(Lu^0)(t,x) = f(t,x,0), (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6.52$_0$}$$

і початкові умови

$$u^s(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.53$_l$}$$

та визначаються формулами

$$u^s(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{10}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi,D^1_{\xi_1}u^{s-1}(\tau,\xi))d\xi,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, l \geq 0, u_{-1} := 0. \tag{6.54$_l$}$$

Розглянемо задачу (6.52_0), (6.53_0). З умов теореми 6.19. випливає, що функція u_0, яка визначена формулою (6.54_0) є розв'язком цієї задачі. Оскільки виконані умови теореми 6.18., то на підставі цієї теореми маємо, що $u^0 \in \in C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T]})$ і справджуються оцінки

$$|u^0(t,x)| \leq C_0 t, (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

$$|\partial^{m_l}_{x_l} u^0(t,x)| \leq C_0 t^{1+(2l-1)(\lambda_l - |m_l|)/2},$$

$$|\Delta^{x'}_x \partial^{m_l}_{x_l} u^0(t,x)| \leq C_0 d(x,x';\lambda), l \in M,$$

Виберемо $T_0 < 1$ таким, щоб

$$C_0 \max_{m_l \leq p_l, l \in M} (T_0^{1+(2l-1)(\lambda_l - |m_l|)/2}) < R_0$$

Тоді одержимо такі оцінки:

$$|\partial^{m_1}_{x_1} u^0(t,x)| \leq R_0, |m_1| < p_1, \tag{6.55$_0$}$$

$$|\partial^{m_l}_{x_l} u^0(t,x)| \leq R_1 T_0^{\lambda/2}, \tag{6.56$_0$}$$

$$|\Delta^{x'}_x \partial^{m_l}_{x_l} u^0(t,x)| \leq R_1 d(x,x';\lambda) \tag{6.57$_0$}$$

Зауважимо, що простір $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$, як випливає з теореми 6.17., є класом єдиності розв'язку.

Розглянемо тепер розв'язок u^1 задачі (6.52_1), (6.53_1). Коефіцієнти рівняння (6.52_1) такі ж як і у рівняння (6.52_0), на підставі зроблених припущень існує ФРЗК Z_{10} для такого рівняння і для Z_{10} правильними є оцінки (**??**). Оскільки виконані в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$ умови теореми 6.17., то єдиний розв'язок задачі (6.52_1), (6.53_1) визначається формулою (6.541_1).

На підставі теореми 6.18. маємо, що для такого розв'язку справджуються нерівності

$$|u(t,x)^1| \le C_1 t, (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u^1(t,x)| \le C_1 t^{1+(2l-1)(\lambda_l - |m_l|)/2},$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_l}^{m_l} u^1(t,x)| \le C_1 d(x,x';\lambda), l \in M,$$

де λ — таке ж, як раніше, а C_1 — деяка стала, яка залежить від R_0, R_1, T_0.

Зменшивши, якщо потрібно, T_0 одержимо оцінки

$$|\partial_{x_1}^{m_1} u^1(t,x)| \le R_0, |m_1| < p_1, \qquad (6.55_1)$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u^1(t,x)| \le R_1 T_0^{\lambda/2}, \qquad (6.56_1)$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_l}^{m_l} u^1(t,x)| \le R_1 d(x,x';\lambda) \qquad (6.57_1)$$

з такими ж, як і в (6.55_0) — (6.57_0), сталими R_0, R_1. Розв'язок $u^1(t,x)$ задачі Коші (6.52_1), (6.53_1) належить до простору $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

За індукцією встановлюємо існування послідовності розв'язків $\{u^s : s \ge 1\}$ задач (6.52_s), (6.53_s), які визначаються формулами (6.54_s) і для яких у шарі $\Pi_{(0,T_0]}$ справджуються нерівності

$$|\partial_{x_1}^{m_1} u^s(t,x)| \le R_0, |m_1| < p_1, \qquad (6.55_s)$$

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u^s(t,x)| \le R_1 T_0^{\lambda/2}, \qquad (6.56_s)$$

$$|\Delta_x^{x'} \partial_{x_l}^{m_l} u^s(t,x)| \le R_1 d(x,x';\lambda) \qquad (6.57_s)$$

Ці розв'язки будуть єдиними розв'язками задач Коші (6.52_s), (6.53_s) з простору $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Доведемо збіжність послідовності $\{u^s : s \ge 0\}$. Для цього розглянемо функції $\{\varepsilon_s(t) : s \ge 0\}$, які визначаються формулами

$$\varepsilon_s(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|m_1|<2} |\partial_{x_1}^{m_1}(u^s(t,x) - u^{s-1}(t,x))|,$$

$$\varepsilon_0(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|m_1|<2} |\partial_{x_1}^{m_1} u^0(t,x)|, \quad t\in(0,T_0].$$

Використовуючи (6.52_s), (6.52_{s+1}), запишемо рівняння для різниці $v^s := = u^{s+1} - u^s$:

$$(Lv^s)(t,x) = f(t,x,D_{x_1}^1 u^s) - f(t,x,D_{x_1}^1 u^{s-1}) := \Phi_{s,s-1}(t,x), (t,x)\in\Pi_{(0,T_0]},$$

$$v^s(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

причому для функції v^s правильне зображення

$$v^s(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_{10}(t,x;\tau,\xi)\Phi_{s,s-1}(\tau,\xi)d\xi, (t,x)\in\Pi_{(0,T_0]}. \tag{6.58}$$

Оцінимо $|\Phi_{s,s-1}|$. За допомогою умови $\mathbf{F_4}$ маємо

$$|\Phi_{s,s-1}(t,x)| \le |f(t,x,D_{x_1}^1 u^s) - -f(t,x,D_{x_1}^1 u^{s-1})| \le C\varepsilon_s(t), (t,x)\in\Pi_{(0,T_0]}, s\ge 0. \tag{6.59}$$

Використавши (6.58) і (6.59), одержимо нерівність

$$\varepsilon_{s+1}(t) \le C\int_0^t (t-\tau)^{-1+1/2}\varepsilon_s(\tau)d\tau,$$
$$t\in(0,T_0], \quad s\ge 0. \tag{6.60}$$

З (34) за індукцією випливають нерівності

$$\varepsilon_s(t) \le (C(T_0)^{1/2})^s \sup_{t\in(0,T_0]} \varepsilon_0(t),$$
$$s\ge 1, \quad t\in(0,T_0]. \tag{6.61}$$

Ряд $\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s$ є рівномірно збіжним на $(0,T_0]$, якщо число T_0 вибрати таким, щоб $C(T_0)^{1/2} < 1$. Оскільки $\sum_{s=0}^{\infty} |\partial_{x_1}^{m_1}(u^s - u^{s-1})| \le \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s$, то послідовності $\{\partial_{x_1}^{m_1} u^s : s\ge 0\}$, $|m_1| < p_1$, є рівномірно збіжними в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$.

Розглянемо тепер послідовності старших похідних $\{\partial_{x_l}^{m_l} u^s :\ s\ge 0\}$, $|m_l| = = p_l$, $l\in\mathcal{M}$. З оцінок (30_s) і (31_s) випливає їх компактність в кожному циліндрі $V_{r,\tau} := \{(t,x)\in\Pi_{(0,T_0]} \,|\, |x|\le r, t\in(0,\tau)\}$. Тому існують підпослідовності $\{\partial_{x_l}^{m_l} u^{s_j} :\ j\ge 1\}$,$|m_l| = p_l$,$l\in\mathcal{M}$, які є рівномірно збіжними в кожному циліндрі $V_{r,\tau}$. Нехай v^* — гранична функція. Оскільки $\{\partial_{x_1}^{m_1} u^s :\ s\ge 0\}$, $|m_1| < < p_1$, рівномірно збігаються до $\partial_{x_1}^{m_1} u$, $|m_1| < p_1$, то, на підставі замкненості операції диференціювання $v^* = \partial_{x_l}^{m_l} u$, $|m_l| = p_l$,$l\in\mathcal{M}$.

Аналогічно доводимо рівномімірну в циліндрі $V_{r,\tau}$ збіжність підпослідовності $\{\partial_t u^{s_j} \, : \, j \geq 1\}$. Спрямуємо в (6.22_{s_j}) j до нескінченності, тоді одержимо, що гранична функція u є розв'язком рівняння (6.20) з простору $C^{(2+\lambda,3+\lambda,5+\lambda)}(\Pi_{(0,T_0]})$.

Доведемо єдиність одержаного розв'язку. Нехай, крім побудованого розв'язку u, є ще розв'язок $\bar{u}$ задачі Коші (6.20), (6.21). Тоді для їх різниці $\bar{w} := u - \bar{u}$ маємо задачу

$$L(\bar{w})(t,x) = \Phi(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T_0]},$$

$$\bar{w}(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.62}$$

де

$$\Phi(t,x) := f(t,x,D^1_{x_1}u) - f(t,x,D^1_{x_1}\bar{u}).$$

Для розв'язку $\bar{w}$ задачі (6.62) правильним є таке зображення:

$$\bar{w}(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_n} Z_{10}(t,x;\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}. \tag{6.63}$$

За допомогою (**??**) і $\mathbf{F_4}$ із (6.63) одержимо нерівності

$$|\partial^k_x \bar{w}(t,x)| \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-|m_l|/2} w_0(\tau)d\tau,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}, \quad |m_l| < p_l, l \in \mathcal{M}, \tag{6.64}$$

де

$$w_0(\tau) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|m_l|<p_l} |\partial^{m_l}_{x_l} \bar{w}(\tau,x)|.$$

З (38) випливає нерівність

$$w_0(t) \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} w_0(\tau)d\tau.$$

Зінтегрувавши обидві частини цієї нерівності по t, після зміни порядку інтегрування одержимо

$$\int_0^t w_0(\tau)d\tau \leq C_1 t^{1/2} \int_0^t w_0(\tau)d\tau, t \in (0,T_0].$$

Звідси випливає, що $w_0(t) := 0$ для тих значень $t \in (0,T_0]$, які задовольняють умову $C_1(t)^{1/(2)} < 1$, тобто $w(t) = 0$ для таких t. Повторюючи, якщо потрібно, ці міркування потрібну кількість разів, одержимо, що $w := 0$ в шарі $\Pi_{(0,T_0]}$. ►

Перейдемо до глобальних розв'язків задачі Коші для деяких квазілінійних ультрапараболічних рівнянь. Так називають розв'язки, які визначені для всіх значень $t > 0$. У шарі $\Pi := (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ розглядається задача Коші

$$(L_c u)(t, x) = f(t, u(t, x)), \quad (t, x) \in \Pi, \tag{6.65}$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.66}$$

де $L_c := \partial_t - \sum\limits_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum\limits_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - - \sum\limits_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}} - \sum\limits_{j=1}^{n_1} a_j\partial_{x_{1j}} - a_0$ — ультрапараболічний диференціальний вираз типу Колмогорова, в якому коефіцієнти a_{kj}, a_j, $\{j, k\} \subset \mathbb{N}_{n_1}$, і a_0 є дійсними числами, причому матриця $(a_{kj})_{k,j=1}^{n_1}$ є симетричною і має додатні власні числа.

Нехай $\mathcal{F}$ — простір неперервних функцій $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють умову

$$\exists\ C > 0\ \forall\ t \in [0, \infty)\ \forall\ \{u, u_1, u_2\} \subset \mathbb{R} :$$

$$|f(t, u)| \le C|u|^{1+\beta},$$

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \le$$

$$\le C|u_1 - u_2| max\{|u_1|^\beta, |u_2|^\beta\},$$

де β — додатна стала.

ФРЗК для лінійного рівняння з оператором L_c визначається такою формулою :

$$Z(t, x; \tau, \xi) := 2^{-n_1} 3^{n_2/2} 180^{n_3/2} \pi^{-n/2} \times$$

$$(\det A_1 \det A_2 \det A_3)^{-1/2} (t - \tau)^{-N} \times$$

$$\times \exp\{-\frac{1}{4(t-\tau)} \sum_{j,s=1}^{n_1} a_1^{js} (x_{1j} +$$

$$+ a_j(t - \tau) - \xi_{1j})(x_{1s} + a_s(t - \tau) - \xi_{1s}) - \frac{3}{(t-\tau)^3} \times$$

$$\times \sum_{j,s=1}^{n_2} a_2^{js} (x_{2j} + \frac{1}{2}(t - \tau)(x_{1j} + \xi_{1j}) - \xi_{2j}) \times$$

$$\times (x_{2s} + \frac{1}{2}(t - \tau)(x_{1s} + \xi_{1s}) - \xi_{2s}) - \frac{180}{(t-\tau)^5} \times$$

$$\times \sum_{j,s=1}^{n_3} a_3^{js}(x_{3j} + \frac{1}{2}(t-\tau)(x_{2j} + \xi_{2j}) +$$

$$+\frac{1}{12}(t-\tau)^2(x_{1j} - \xi_{1j}) - \xi_{3j})(x_{3s} + \frac{1}{2}(t-\tau)\times$$

$$\times(x_{2s} + \xi_{2s}) + \frac{1}{12}(t-\tau)^2(x_{1s} - \xi_{1s}) - \xi_{3s}) +$$

$$+a(t-\tau)\}, \quad t > \tau, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{6.67}$$

де a_l^{js} — елементи матриці, оберненої до матриці $A_l := (a_{js})_{j,s=1}^{n_l}$, $l \in M$.

Явний вираз (6.67) дозволяє одержати для Z оцінку

$$|Z(t, x; \tau, \xi)| \leq CE_\mu(t, x; \tau, \xi), 0 \leq \tau < t < \infty, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де C — додатна стала, а

$$E_\mu(t, x; \tau, \xi) := (t-\tau)^{-N} \exp\{-c_0(\frac{1}{4(t-\tau)}|x_1 - \xi_1|^2 +$$

$$+\frac{3}{(t-\tau)^3}|x_2 + \frac{1}{2}(x_1'' + \xi_1'') - \xi_2|^2 + \frac{180}{(t-\tau)^5}|x_3 + \frac{1}{2}(t-\tau)(x_2' + \xi_2') +$$

$$+\frac{1}{12}(t-\tau)^2(x_1' + \xi_1') - \xi_3|^2 - \mu(t-\tau)\},$$

$x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3})$, $x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3})$, $\xi_1' := (\xi_{11}, \ldots, \xi_{1n_3})$, $\xi_2' := = (\xi_{21}, \ldots, \xi_{2n_3})$, $x_1'' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $\xi_1'' := (\xi_{11}, \ldots, \xi_{1n_2})$, $c_0 := c_1(1-\varepsilon)$, $\mu := -c + \frac{1}{4}c_1|a|^2(1 - 1/\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$.

Тут $a := (a_1, \ldots, a_{n_1})$, $c_1 := \min\limits_{l \in \mathbb{N}_3}((\max\limits_{j \in \mathbb{N}_{n_1}} \lambda_j^{(l)}))^{-1}$, де $\lambda_j^{(l)}$ — власні числа матриці A_l.

Зауважимо, що потрібні властивості функції E_μ випливають з того, що вона є з точністю до сталого множника ФРЗК для модельного рівняння

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - a^2 \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{x_{1j}}^2 - \mu)u = 0.$$

Використаємо також функцію

$$V_\mu(t, x) := (t+\gamma)^{-N} \exp\{-c_0(\frac{1}{4(t+\gamma)}|x_1|^2 +$$

$$+\frac{3}{(t+\gamma)^3}|x_2 + \frac{1}{2}(t+\gamma)x_1''|^2 + \frac{180}{(t+\gamma)^5}|x_3 + \frac{1}{2}(t+\gamma)x_2' +$$

$$+\frac{1}{12}(t+\gamma)^2 x_1'|^2 - \mu(t+\gamma)\}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де γ — фіксоване додатне число.

Позначимо через U простір неперервних функцій $u : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}$, для яких скінченною є норма

$$\|u\|_1 := \sup_{(t,x)\in\overline{\Pi}} \left(\frac{|u(t,x)|}{V_\mu(t,x)} \right),$$

і які рівномірно щодо t задовольняють локальну умову Гельдера за змінними x_1, x_2, x_3 з показниками відповідно $\lambda_1 \in (0,1]$, $\lambda_2 \in (\frac{1}{3},1]$, $\lambda_3 \in (\frac{3}{5},1]$.

Множину неперервних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для яких скінченною є норма

$$\|\varphi\|_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{|\varphi(x)|}{V_\mu(0,x)} \right),$$

позначимо через Φ. Покладемо $\Phi^+ := \{\varphi \in \Phi \,|\, \varphi(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$. Основним результатом є така теорема.

Теорема 6.20. *Правильні такі твердження:*

1) *якщо $\mu > 0$, $\beta > 0$, $f \in \mathfrak{F}$, то задача Коші (6.65), (6.66) має єдиний глобальний розв'язок $u \in U$ для будь-якої початкової функції $\varphi \in \Phi$;*

2) *якщо $\mu = 0$, $\beta > 1/N$, $f \in \mathfrak{F}$, то задача Коші (6.65), (6.66) має єдиний глобальний розв'язок $u \in U$ для деякої достатньо малої функції $\varphi \in \Phi$;*

3) *якщо $\mu \leq 0$, $\beta \in (0, 1/N]$, $f = u^{1+\beta}$ і $\varphi \in \Phi^+$, то існує число $T^* \in$ $\in (0,\infty)$ таке, що для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ $u(t,x) \to \infty$ при $t \to T^* - 0$, де u — розв'язок задачі Коші (6.65), (6.66).*

Для доведення перших двох тверджень теореми використовується загальна теорема про глобальну розв'язність з праці [247], а також властивості відповідних потенціалів.

Зауважимо,що твердження 3) теореми фактично означає, що в класі невід'ємних функцій (за зроблених припущень) $u \equiv 0$ є єдиним глобальним розв'язком задачі Коші (6.65), (6.66). Істотну роль при доведенні відіграє принцип максимуму.

6.4. ФРЗК для рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова

В цьому підрозділі будемо розглядати рівняння з дійснозначними коефіцієнтами, що належать до класу $\boldsymbol{K_1}$. Вже зазначалося, що такі рівняння належать до класу ультрапараболічних рівнянь і зустрічаються при дослідженні різних фізичних явищ у так званому дифузійному наближенні. Ці математичні моделі в багатьох випадках (наприклад, при вивченні броунівського руху) досить адекватно і відносно просто описують реальні явища. Зазвичай ці рівняння, які на початку минулого століття почали систематично застосовуватись до вивчення фізичних явищ, називаються рівняннями Фоккера–Планка. Часто ці рівняння визначають еволюцію марковського випадкового процесу, який функціонує в неперервному часі. Саме при вивченні моделей броунівського руху А. М. Колмогоров почав вивчати марковські випадкові процеси, еволюція яких визачається рівняннями із класу $\boldsymbol{K_1}$ з дійснозначними коефіцієнтами. Природно їх називати рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова. ФРЗК $Z(t,x;\tau,\xi), 0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ — природно розглядати як густину перехідних ймовірностей переходу марковського випадкового процесу дифузійного типу зі значеннями в фазовому просторі $\mathbb{R}^n$ з трьома різними групами фазових координат $x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$, $x_2 = (x_{21}, \ldots, x_{2n_2})$ і $x_3 = (x_{31}, \ldots, x_{3n_3})$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$, $1 \le n_3 \le n_2 \le n_1$.

Будемо розглядати однорідне рівняння (1.1), тобто рівняння

$$(Lu)\,(t,x) := \big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\,\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} - a_0(t,x)\big)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (6.68)$$

і спряжене до нього рівняння

$$(L^*u)\,(\tau,\xi) := \big(-\partial_\tau - \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}}\big)v(\tau,\xi) - \sum_{j,l=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1l}}(a_{jl}(\tau,\xi)\,v(\tau,\xi)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{\xi_{1j}}\left(a_j(\tau,\xi)\,v(\tau,\xi)\right)-a_0(\tau,\xi)\,v(\tau,\xi)=0,\quad (\tau,\xi)\in\Pi_{[0,T)}. \tag{6.69}$$

В цьому підрозділі будемо використовувати формулу Гріна – Остроградського, яка для цього випадку має вигляд

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}d\theta\int\limits_{B_R}(vLu-uL^*v)(\theta,y)dy=\int\limits_{B_R}(vu)(\theta,y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2}dy-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}d\theta\int\limits_{\Gamma_R}\Bigg(\sum_{j=1}^{n_2}y_{1j}\mu_{2j}+\sum_{j=1}^{n_3}y_{2j}\mu_{3j}\Bigg)(vu)(\theta,y)dS_y+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}d\theta\int\limits_{\Gamma_R}\sum_{j=1}^{n_1}B^j[v,u](\theta,y)\mu_{1j}dS_y, \tag{6.70}$$

де $t_1<t_2$, B_R — куля $\{y\in\mathbb{R}^n\big|\,|y|\le R\}$, Γ_R — її межа, $(\mu_{11},\ldots,\mu_{1n_1},\mu_{21},\ldots,\mu_{2n_2},\mu_{31},\ldots,\ \mu_{3n_3})$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_R, L and L^* — диференціальні вирази з (6.68) і (6.69), $B^j[v,u]$, $j\in\in\mathbb{N}_{n_1}$ —білінійні форми, що містять похідні від v і u за y_1 не вище першого порядку.

$$B^j[v,u]:=-\sum_{l=1}^{n_1}\left(a_{jl}\partial_{y_{1l}}uv-u\partial_{y_{1l}}(a_{jl}v)\right)+a_juv,\quad j\in\{1,\ldots,n_1\}.$$

Перехід у цій формулі до границі при $R\to\infty$, для підходящих функцій u і v приводить до формули

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(vLu-uL^*v)(\theta,y)dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(vu)(\theta,y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2}dy. \tag{6.71}$$

Ця формула буде часто використовуватись далі.

Для дійснозначних коефіцієнтів рівняння (6.68) припускатимемо виконання умов (A_{11}) – (A_{15}) з розділу 1.

Справджується наступна теорема.

Теорема 6.21. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (6.68) виконуються умови* (A_{11}) *–* (A_{12})*. Тоді для цього рівняння існує класичний ФРЗК* Z *і справджу-*

ються оцінки

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t,x;\tau,\xi),$$

$$\left|SZ(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t,x;\tau,\xi), \tag{6.72}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, C *і* c *— додатні сталі.*

Доведення. Доведення теореми проводиться аналогічно до доведення теореми 1.3.▶

Якщо додатково до умов теореми 6.1.виконуються умови (A_{13}), (A_{14}) то існує класичний ФРЗК Z^* і для нього справджуються оцінки, аналогічні до оцінок (6.72).

Наведемо властивості Z.

Властивість 6.1 (нормальність). Нехай Z — ФРЗК для вихідного рівняння (6.68), а Z^* — ФРЗК для спряженого рівняння (6.69). Тоді справджуєтья рівність

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = Z(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{\xi,x\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{6.73}$$

ФРЗК Z, для якого справджується ця рівність, називається *нормальним* ФРЗК (НФРЗК).

Доведення. На підставі оцінок (6.72) для Z і аналогічних оцінок для Z^* справджується формула (6.71). Покладемо в ній $u(\theta,y) = Z(\theta,y;\tau,\xi)$, $v(\theta,y) = Z^*(\theta,y;t,x)$, $t_1 = \tau+\varepsilon$, і $t_2 = t-\varepsilon$, де ε — досить мале додатне число. Тоді отримаємо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(\tau+\varepsilon,y;t,x)\, Z(\tau+\varepsilon,y;\tau,\xi)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(t-\varepsilon,y;t,x)\, Z(t-\varepsilon,y;\tau,\xi)dy, \tag{6.74}$$

з якої, після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$, випливає потрібна рівність (6.73). ▶

Властивість 6.2 (формула згортки). Функція Z є розв'язком функціонального рівняння

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\lambda,y)Z(\lambda,y;\tau,\xi)dy,\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{6.75}$$

Доведення. Аналогічно до доведення властивості 6.1, отримуємо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(\lambda,y;t,x)\,Z(\lambda,y;\tau,\xi)dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(t-\varepsilon,y;t,x)\,Z(t-\varepsilon,y;\tau,\xi)dy. \tag{6.76}$$

Рівність (6.75) одержується, якщо в (6.76) перейти до границі при $\varepsilon\to0$ і скористатися формулою (6.73). ►

Рівняння (6.68) містить важливу інформацію про те, що випадковий процес, який розглядається, є марковським (процесом без післядії).

Властивість 6.3 (єдиність НФРЗК). Існує тільки один НФРЗК для рівняння (6.68), для якого справджуються оцінки (6.72).

Доведення. Нехай Z_1 і Z_2 — два НФРЗК для рівняння (6.68). Скористаємось формулою (6.71), поклавши в ній $u(\theta,y)=Z_1(\theta,y;\tau,\xi)$, $v(\theta,y)=$ $=Z_2(t,x;\theta,y)$. Тоді отримаємо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_2,y;\tau,\xi)\,Z_2(t,x;t_2,y)dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_1,y;\tau,\xi)\,Z_2(t,x;t_1,y)dy.$$

Оскільки точки t_1 і t_2 з проміжку (τ,t) є довільними, то остання рівність означає, що функція

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(\theta,y;\tau,\xi)\,Z_2(t,x;\theta,y)dy,\quad \theta\in(\tau,t),\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

не залежить від θ. Позначимо цю функцію через $\Phi(t,x;\tau,\xi)$. Отже,

$$\Phi(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(\theta,y;\tau,\xi)\,Z_2(t,x;\theta,y)dy. \tag{6.77}$$

Спрямувавши в рівності (6.77) спочатку $\theta\to\tau$, а потім $\theta\to t$, отримаємо, що

$$\Phi(t,x;\tau,\xi)=Z_2(t,x;\tau,\xi)=Z_1(t,x;\tau,\xi),\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset$$
$\subset\mathbb{R}^n$. ►

Досліджуваний процес характеризується матрицею дифузії $A(t,x)\ :=$

$= (a_{jl}(t,x))_{j=1,l=1}^{n_1,n_1}$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, і вектором знесення $a(t,x) := (a_1(t,x), \ldots, a_{n_1}(t,x))$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, елементами яких є відповідні коефіцієнти рівняння (6.68). Подамо ці важливі характеристики через густину перехідних ймовірностей випадкового процесу, тобто ФРЗК Z.

Властивість 6.4 (зображення матриці дифузії і вектора знесення через функцію Z. Справджуються наступні формули:

$$a(t,x) = \lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_1 - x_1)\, Z(t,x;\tau,y)dy\right),$$

$$A(t,x) = \left(2^{-1}\lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_{1j} - x_{1j})(y_{1l} - x_{1l})\, Z(t,x;\tau,y)dy\right)\right)_{j=1,l=1}^{n_1,n_1},$$

Тут $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$.

Доведення.Доведення досить провести для першої координати a_1 вектора a і елемента a_{11} матриці A. Встановимо для $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$ формули

$$a_1(t,x) = \lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_{11} - x_{11})\, Z(t,x;\tau,y)dy\right),$$

$$a_{11}(t,x) = 2^{-1}\lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_{11} - x_{11})^2\, Z(t,x;\tau,y)dy\right). \tag{6.78}$$

Доведення ґрунтується на формулі (6.71). Покладемо в цій формулі $u(\theta,y) = y_{11} - x_{11}$ і $v(\theta,y) = Z(t,x;\theta,y)$, тоді отримаємо рівність

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)\big(a_1(\theta,y) + a_0(\theta,y)(y_{11} - x_{11})\big)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}(y_{11} - x_{11})\, Z(t,x;\theta,y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy. \tag{6.79}$$

Якщо в (6.79) покладемо $t_1 = \tau$, $t_2 = t - \varepsilon$, перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$, розділимо результат на $t-\tau$ і отримаємо рівність

$$(t-\tau)^{-1}\int\limits_{\tau}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)\, a_1(\theta,y)dy = (t-\tau)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_{11} - x_{11})\, Z(t,x;\tau,y)dy$$

$$-(t-\tau)^{-1}\int\limits_{\tau}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)\, a_0(\theta,y)(y_{11} - x_{11})dy. \tag{6.80}$$

Рівність (6.78) безпосередньо випливає з (6.70), оскільки границя при $\tau \to \to t$ лівої частини збігається з $a_1(t,x)$ на підставі властивостей ФРЗК Z і теореми про середнє значення для інтегралів, а другий доданок правої частини рівності (6.70) прямує до нуля на підставі припущень про функцію a_0. Для того, щоб довести рівність (6.79), у формулі (6.71) покладемо $u(\theta,y) = (y_{11} - - x_{11})^2$ і $v(\theta,y) = Z(t,x;\theta,y)$. Тоді ця формула набуде вигляду

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)\left(2a_{11}(\theta,y) + 2a_1(\theta,y)(y_{11}-x_{11}) + a_0(\theta,y)(y_{11}-x_{11})^2\right)dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (y_{11}-x_{11})^2 Z(t,x;\theta,y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy.$$

Далі, повторюються міркування попереднього випадку і отримується рівність

$$(t-\tau)^{-1}\int\limits_{\tau}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)a_{11}(\theta,y)dy = (2(t-\tau))^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(y_{11}-x_{11})^2 Z(t,x;\tau,y)dy$$

$$-(t-\tau)^{-1}\int\limits_{\tau}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}^n}\left(a_1(\theta,y)(y_{11}-x_{11}) + 2^{-1}a_0(\theta,y)(y_{11}-x_{11})^2\right)Z(t,x;\theta,y)dy.$$

З цієї рівності за допомогою міркувань, які викладені вище, випливає формула (6.79). ▶

За допомогою аналогічних міркувань отримується зображення через функцію Z функції — a_0, коефіцієнта інтенсивності лінійних джерел дифузійного процесу, еволюція якого описується рівнянням Фоккера–Планка–Колмогорова (6.68).

Властивість 6.5 (зображення коефіцієнта a_0 через функцію Z. Справджується формула

$$a_0(t,x) = \lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\left(\int\limits_{\tau}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)dy - 1\right)\right), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}.$$

Властивість 6.6 (додатність функції Z. Справджується нерівність

$$Z(t,x;\tau,\xi) > 0, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Доведення. Нехай g — неперервна невід'ємна функція з компактним носієм. Розглянемо функцію

$$v(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)g(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}. \tag{6.71}$$

Для функції v виконані умови теореми 3.16 [14, с.208]. Справді, вона задовольняє рівняння (6.68), тобто $(Lv)(t,x) = 0$, $(t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}$, задовольняє умови $v(\tau,x) = g(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, і $\lim_{|x|\to\infty} v(t,x) \geq 0$, $t \in (\tau,T]$. Тому, на підставі згаданої теореми, маємо $v(t,x) \geq 0$, $(t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}$.

Візьмемо тепер дельтаподібну послідовність функцій g_ν, $\nu \geq 1$, таку, що $g_\nu(\xi) = 0$ при $|\xi - \xi^0| > 1/\nu$ і $\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(\xi)d\xi = 1$, і позначимо через v_ν функцію (6.71), яка відповідає цій функції при $g = g_\nu$ і $\tau = \tau^0$. Тоді для довільно фіксованих точок (t^0,x^0) і (τ^0,ξ^0), with $\tau^0 < t^0$, маємо $\lim_{\nu\to\infty} v_\nu(t^0,x^0) = Z(t^0,x^0;\tau^0,\xi^0)$. Оскільки $v_\nu(t^0,x^0) \geq 0$ для всіх $\nu \geq 1$, то $Z(t^0,x^0;\tau^0,\xi^0) \geq 0$. Зауваживши,нарешті,що для кожної фіксованої точки (τ,ξ) функція $Z(t,x;\tau,\xi)$, $(t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}$, не є сталою, і використовуючи сильний принцип максимуму, отримуємо строгу додатність функції Z. ►

Властивість 6.7 (оцінка знизу функції Z**.** Існує число $\Delta \in (0,T)$ таке, що будь-яких $t_0 \in [0, T-\Delta]$, $(t,x) \in \Pi_{(t_0,t_0+\Delta]}$, і $\delta \in (0, t-t_0)$ існують числа $\omega > 0$ і $\gamma > 0$, з якими виконуються нерівності

$$Z(t,x;\tau,\xi) \geq \omega \exp\left\{-\gamma|\xi|^2\right\}, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[t_0,t-\delta]}.$$

Доведення.Проводиться аналогічно до доведення властивості 3.13 [14, с. 214–217]. ►

Отримані результати для ФРЗК Z дозволяють провести дослідження потенціалів, породжених ФРЗК, і за допомогою цих властивостей встановити різні теореми про коректну розв'язність задачі Коші для рівняння (6.68). Доведення цих теорем проводяться аналогічно до відповідних теорем з підрозділу 6.1. Тобто в теоремах 6.7, 6.9 описані класи коректності, а, отже, і класи єдиності розв'язків задачі Коші для рівняння (6.68).

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена побудові і дослідженню властивостей класичних ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь з класів $\boldsymbol{K1}$, $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{K_3}$ та $\boldsymbol{K_4}$ і застосування їх до дослідження коректної розв'язності відповідних задач Коші.

Для цих класів рівнянь отримано такі основні результати:

1. Для вироджених параболічних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$ знайдено умови на коефіцієнти рівнянь за яких існує класичний ФРЗК і Лі-ФРЗК.

2. Розроблено новий підхід до побудови і дослідження фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$, який ґрунтується на поетапному застосуванні класичного методу Леві.

3. За допомогою поетапного методу Леві побудовано і досліджено властивості фундаментальних розв'язків задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$, отримано точні оцінки фундаментальних розв'язків та їх похідних.

4. Досліджено властивості параболічних потенціалів, ядром яких є відповідний ФРЗК в широких класах вагових функцій.

5. Отримано інтегральні зображення розв'язків задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$.

6. Побудовано ФРЗК для рівнянням Фоккера-Планка-Колмогорова деякого виродженого дифузійного процесу і досліджено деякі його властивості.

7. Розширено класи існування, єдиності і коректної розв'язності задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з класів $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{K_3}$. Отримано інтегральні зображення розв'язків задачі Коші для однорідних і неоднорідних рівнянь з означених класів.

8. Доведено теореми про локальну і глобальну розв'язність відповідних задач Коші для нелінійних і квазілінійних рівнянь.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у теорії рівнянь з частинними похідними та у математичній фізиці при подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії випадкових процесів при вивченні дифузійних процесів, перехідні імовірності яких є фундаментальними розв'язками відповідних вироджених параболічних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Петровский И. Г.** О проблеме Коши для систем дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. *Бюлл. МГУ. Математика и механика.* 1938. Т.1, №7. С.1–72.

2. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968. 427 с.

3. **Эйдельман С. Д.** Параболические системы. Москва: Наука, 1964. 443 с.

4. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. 736 с.

5. **Ивасишен С. Д.** Матрицы Грина параболических граничных задач. Киев: Выща школа, 1990. 200 с.

6. **Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.** Параболические граничные задачи. Кишинёв: Штиинца, 1992. 328 с.

7. **Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.** Линейные уравнения второго порядка параболического типа. *Успехи мат. наук.* 1962. Т.17, №3. С. 3–146.

8. **Агранович М. С., Вишик М. И.** Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. *Успехи мат. наук.* 1964. Т.19, №3. С. 53–161.

9. **Солонников В. А.** О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.* 1965. Т.83. С.3–163.

10. **Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д.** Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их применения. *Успехи мат. наук.* 1984. Т.39, №3. С. 107–156.

11. **Эйдельман С. Д.** Параболические уравнения. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники.* Москва: ВИНИТИ, 1990. Т.63. С. 201–313.

12. **Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М., Шапошников С. В.** Уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. Москва: Изд-во: Ин-т компьютерных исследований, 2013. 579 с.

13. **Процах Н. П., Пташник Б. Й.** Нелінійні ультрапараболічні рівняння та варіаційні нерівності. Київ: Наук. думка, 2017. 278 с.

14. **Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.** Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Basel: Birkhäuser, 2004. 390 p. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. Vol. 152). htts://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.

15. **Івасишен С. Д., Free Мединський І. П.** Властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2002. Т. 45, №4. С. 76–86.

16. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2004. Т. 47, №4. С. 110–114.

17. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2003. Т. 46, №3. С. 15–24.

18. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування. *Нелінійний аналіз: Праці Українського математичного конгресу.* 2001. Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. С. 28–41.

19. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Theory of stochastic processes.* Vol. 16 (32), №1, 2010. P. 57–66.

20. **Мединський І. П.** Дослідження С. Д. Ейдельмана нелінійних задачі та їх розвиток. *Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту імені Юрія Федьковича.* Сер. : Математика. Т. 1, №1–2. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. С. 114–128.

21. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *Буковинський мат. журн.* 2014. Т. 2, №2–3. С. 94–106.

22. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. *Буковинський мат. журн.* 2015. Т. 3, №3–4. С. 41–51.

23. **Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.** Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Буковинський мат. журн.* 2016. Т. 4, №3–4. С. 57–68.

24. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичні фундаментальні розв'язки для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України.* 2016. Т. 13, №1. С. 108–155.

25. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2016. Т. 59, №2. С. 28–42. Те саме: S. D. Ivasyshen, I. P. Medyns'kyi On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables. *J. Math. Sci.* 2018. Vol. 231, №4. P. 507–526. https:doi.org//10.1007/s10958-018-3830-0.

26. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations. *Mat. Stud.* 2017. Vol. 47, №1. C. 33–46. https:doi.org//10.30970/ms.47.1.33-46.

27. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. Т. 60, №3. С. 9–31. Те саме: S. D. Ivasyshen, I. P. Medynsky Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, №2. P. 121–151. https:doi.org//10.1007/s10958-020-04726-z.

28. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. Т. 60, №4. С. 7–24. Те саме: S. D. Ivasyshen, I. P. Medynsky Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. II. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 247, №1, P. 1–23. https:doi.org//10.1007/s10958-020-04786-1.

29. **Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.** Параболічні рівняння з різними особливостями та виродженнями. *Некласичні зада-*

чі теорії диференціальних рівнянь.: Зб. наук. праць присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2017. С. 68–76.

30. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка".*:Серія: фіз.-мат. науки. 2017, №871. С. 46–64.

31. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник нац. університету "Львівська політехніка".*: Серія: фіз.-мат. науки. 2018, №898. С. 13–21.

32. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Властивості фундаментальних розв'язків, теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2018. Т. 61, №4. С. 7–16.

33. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2019. Т. 62, №1. С. 7–24.

34. **Dron' V. S., Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.** Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for one Kolmogorov-type ultraparabolic arbitrary order equations. *Carpatian Math. Publ.* 2019. Vol. 11, №2, P. 268–280. https:doi.org//10.15330/cmp.11.2.268-280.

35. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу

Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2019. Т. 62, №4. С. 39–48.

36. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник Львів. ун-ту.*: Серія мех.-мат. 2019. Вип. 88. С. 107–127. https://dx.doi.org/10.30570/vmm.2019.88.107-127.

37. **Medynsky I. P.** On properties of solutions for Fokker-Planck-Kolmogorov equations. *Math. Model. Comp.* 2020. Vol. 7, №1. P. 158–168. https:doi.org//10.23939/mmc2020.01.158.

38. **Ivasyshen S., Medynsky I.** The well-posedness of problem with weighting initial conditions for parabolic system with degenerations of the initial hyperplane in Banach spaces of Hölder. *Intern. Conf. Func. Anal. and its Appl.*, Dedicated to the 110-th anniversary of Stefan Banach. May 28–31, 2002, Lviv: Book of Abstracts. Lviv, 2002. P. 92–93.

39. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *VI Міжнар. наук. конф. "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур"*, 26–29 трав. 2003 р., Львів: тези доп.: Львів, 2003. С.491–492.

40. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Апріорні оцінки розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування. *Міжнар. наук. конф. "Шості боголюбовські читання"*, 26–30 серп., 2003 р., Чернівці: тези доп.: Київ, 2003. С. 84.

41. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про коректну розв'язність задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *III Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 9–12 ве-

рес. 2003 р., Івано-Франківськ: тези доп.: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2003. С. 42.

42. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи з виродженням на початковій гіперплощині. *Міжнар. конфер. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, 6–9 черв. 2005 р., Київ: тези доп.: Київ, 2005. С. 32.

43. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь у вагових L_p просторах. *Міжнар. наук. конф. з диференціальних рівнянь, присвячена 100 річниці з дня народження Я. Б. Лопатинського*, 12–17 верес. 2006 р., Львів: тези доп.: Львів, С. 27–28.

44. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Розвиток досліджень С. Д. Ейдельмана фундаментальних розв'язків параболічних рівнянь та їх застосування. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, 11–14 жовт., 2006 р., Чернівці: тези доп.: Чернівці, 2006. С. 54.

45. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про глобальні розв'язки задачі Коші для деяких квазілінійних ультрапараболічних рівнянь. *Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробагатька*, 24–28 верес. 2007 р., Дрогобич: тези доп.: Львів, 2007. С. 189.

46. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічних рівнянь з виродженнями за часовою змінною. *XII Міжн. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 15–17 трав. 2008 р., Київ: тези доп.: Київ. 2008. С. 162.

47. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про задачу Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *IV Всеукр.*

наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу", 10–12 верес. 2008 р., Івано-Франківськь: тези доп. Івано-Франківськь, 2008. С. 39.

48. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Intern. conf. "Stochastic analysis and random dynamics"*, June 14–20, 2009, Lviv: Abstracts. Lviv, 2009. P. 95–96.

49. **Мединський І. П.** Задача Коші для квазілінійних ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *XIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 13–15 травня, 2010 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування.: НТУУ "КПІ", 2010. С. 271.

50. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *Third International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Appliccations dedicated to Yaroslav Lopatynsky* , 3–6 November, 2010, Lviv: Book of Abstracts. Donetsk, 2010. P. 76.

51. **Мединський І.** Локальна розв'язність задачі Коші для одного класу квазілінійних вироджених параболічних рівнянь. *Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька*, 19–23 верес. 2011 р., Дрогобич: тези доп. Львів, 2011. С. 134.

52. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, присвяченої 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, 8–10 черв., 2011 р., Київ: матеріали конф.: Київ, 2011. С. 120.

53. **Medynsky I.** Cauchy problem for a semilinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type. *Intern. Conf. dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach*, September 17–21, 2012, Lviv: Abstracts of Reports. Lviv, 2012. P. 217.

54. **Мединський І. П.** Задача Коші для квазілінійного рівняння типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною і виродженням. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, присвяченої 70-річчю проф. В.В. Маринця, 26–29 верес. 2012 р., Ужгород: матеріали конф.: Ужгород, 2012. С. 60.

55. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Параболічні моделі. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. V Міжнар. наук. конф. 4–5 квіт. 2012 р. Кам'янець-Подільський, 2012. С. 35.

56. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких класів вироджених параболічних рівнянь. *XIV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 19–21 квітня 2012 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ 2012. С. 198.

57. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Деякі вироджені параболічні моделі. *Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці"*, присвячена 50-річчю каф. прикладної математики Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича, 11–23 черв. 2012 р., Чернівці: матеріали конф., Чернівецький нац. ун-т, 2012. С. 80.

58. **С. Івасишен, І. Мединський** Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 21–25 трав. 2013 р., Львів: зб. наук. праць в 3-х т. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1. С. 36–38.

59. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про метод Леві побудови та дослідження фундаментальних розв'язків вироджених параболічних рівнянь

типу Колмогорова. *V Всеукр. наук. конф. “Нелінійні проблеми аналізу”*, 19–21 верес. 2013 р., Івано-Франківськ: тези доп., Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2013. С. 28.

60. **Мединський І. П., Івасишен С. Д.** Про деякі вироджені параболічні моделі. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. VI Міжнар. наук. конф. 4–5 квіт. 2014 р. Кам’янець-Подільський, 2014. С. 106.

61. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичний фундаментальний розв’язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *XV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 15–17 трав. 2014 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ 2014. С. 123–124.

62. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв’язок задачі Коші для узагальненого виродженого рівняння Колмогорова. *IV Міжнар. ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народженння Ганса Гана*, 30 черв.–05 лип. 2014 р., Чернівці: тези доп.: Чернівецький нац. ун-т, 2014. С. 62–63.

63. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичний фундаментальний розв’язок виродженого рівняння Колмогорова. *XVI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 14–15 трав. 2015 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ : НТУУ "КПІ 2015. С. 106–107.

64. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Метод Леві та його модифікації у дослідженнях вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Наук. конф., присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та*

М.К. Фаге, 1–4 лип. 2015 р., Чернівці: тези доп.: Чернівецький нац. ун-т, 2015. С. 48–49.

65. **Medynsky I.** On investigations of S.D. Eidelman in the theory of the degenerate parabolic equations of Kolmogorov type and their development. *Intern. V. Skorobohatko Math. Conf.* August 25–28, 2015, Drogobych: Abstracts. Lviv, 2015. P. 104.

66. **Voznyak O., Ivasyshen S., Medynsky I.** On fundamental solution of the ultraparabolic Kolmogorov equation with degeneration on the initial hyperplane. *Intern. V. Skorobohatko Math. Conf.*, August 25–28, 2015, Drogobych: Abstracts. Lviv, 2015. P. 172.

67. **Івасишен С. Д., Мединський І. П. Пасічник Г. С.** Параболічні моделі з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. VII Міжнар. наук. конф. 21–22 квіт. 2016 р. Кам'янець-Подільський, 2016. С. 83–84.

68. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про останні результати побудови та дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого параболічного рівняння типу рівняння дифузії з інерцією. *XVII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 19–20 трав. 2016 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ : НТУУ "КПІ", 2016. С. 127–128.

69. **Dron' V., Ivasyshen S., Medynsky I.** On applications of Levi's parametrix method in Theory of Parabolic equations. *Intern. Conf. On Diff. Eq.*, Dedicated to the 110 Anniversary of Ya.B.Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv: Book of Abstracts. Lviv, 2016. P. 44.

70. **Дронь В., Івасишен С., Мединський І.** Властивості об'ємного потенціалу лля одного ультрапараболічного рівняння. *Міжнар. наук. конф.*

"Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І.Фодчука (1936-1992) та 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь, 28–30 верес. 2016 р., Чернівці: матеріали конф. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. С. 44.

71. **Івасишен С., Мединський І.,Пасічник Г.** Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"*, присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І.Фодчука (1936-1992) та 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь, 28–30 верес. 2016 р., Чернівці: матеріали конф. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. С. 50–51.

72. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з гладкими коефіцієнтами. *XVIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 7–10 жовт. 2017 р., Луцьк–Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ 2017. С. 60–63.

73. **Івасишен С., Мединський І.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 22–25 трав. 2018 р., Львів: зб. наук. праць у 3-х т./ за заг. ред. А.М.Самойленка та Р.М.Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 34–35. Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

74. **Возняк О., Мединський І.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 22–25 трав. 2018 р.: зб. наук. праць у 3-х т./ за заг. ред. А.М.Самойленка та Р.М.Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки та математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України. 2018. Т.3. С. 101–102. Режим доступу до ресурсу : www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

75. **І. Мединський, С. Івасишен** Про побудову та оцінки класичного фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях.* Міжнар. наук. конф. присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича, 17–19 верес. 2018, Чернівці: матеріали конф. Чернівці, 2018. С. 84.

76. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійного виродженого ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *VI Всеукр. матем. конф. імені Б. В. Василишина,* 26–28 верес. 2018, Івано-Франківськ–Микуличин. Івано-Франківськ: Голіней, 2018. С. 18–19.

77. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** Properties of Green operators generated by fundamental solutions of degenerated parabolic equations. *Intern. Conf. "Infinite Dimensional Analysis and Topology"*, Dedicated to the 70-th Anniversary of Professor Oleh Lopushansky. Oktober 15–20, 2019, Ivano-Frankivsk: Book of Abstracts. Ivano-Frankivsk, 2019. P. 25–26.

78. **Мединський І.,Дронь В.** Про фундаментальний розв'зок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь довільного порядку. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування"*, присвячена 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана, 16–19 верес. 2020 р., Чернівці: матеріали конф. [Електронний ресурс]. Чернівецький нац. ун-т, 2020. С. 165–166.Режим доступу до ресурсу: www.sde100.fmi.org.ua.

79. **Medynsky I., Voznyak O.** Fundamental solutions of ultraparabolic

Kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and degeneration on the initial hyperplane. *XI Intern. Skorobohatko Math. Conf.*, October 26–30, 2020, Lviv: Abstracts. [Electronic publication ISBN 978-96602-9390-8]. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. 2020. P. 75.75. https://www.iapmm.lviv.ua/conf_skorob2020.

80. **Dressel F.** The fundamental solution of the parabolic equation. *Duke Math J.* 1940. Vol.7, №4. P. 186–203. 1946. Vol.13, №1. P. 61–70.

81. **Ладыженская О.А.** О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения. *Мат. сб.* 1950. Т.27, N2. С. 175–184.

82. **Pogorzelski W.** Etude de la solution fondamentale de l'equation parabolique. *Ricerche di Mat.* 1956. Vol.5. P.25–57.

83. **Aronson D.G.** The fundamental solution of a linear parabolic equation containing a small parameter. III. *J. Math.* 1959. Vol.3. P. 580–619.

84. **Брук С.З.** Фундаментальные решения систем дифференциальных уравнений параболического типа. Докл. АН СССР. 1948. Т.60, №1. С. 9–12.

85. **Эйдельман С.Д.** О фундаментальных решениях параболических систем. I. *Мат. сб.* 1956. Т.38, №1. С. 51–92.

86. **Эйдельман С.Д.** Фундаментальные матрицы решений общих параболических систем. *Докл. АН СССР.* 1958. Т.120, №5. С. 980–983.

87. **Эйдельман С.Д.** О фундаментальных решениях параболических систем. II. *Мат. сб.* 1961. Т.53, №1. С. 73–136.

88. **Pogorzelski W.** Étude de la matrice des solution fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivees partielles. *Ricerche di Mat.* 1958. Vol.7. P. 153–185.

89. **Pogorzelski W.** Propriétés de solution du système parabolique d'équation aux dérivos partielles. *Math. Scand.* 1958. Vol.6. P. 237–262.

90. **Слободецкий Л.Н.** О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы. *Мат.сб.* 1958. Т.46, №2. С. 229–258.

91. **Aronson D.G.** On the initial value problem for parabolic systems of differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1959. Vol.65. P.310–318.

92. **Матийчук М.И., Эйдельман С.Д.** Задача Коши для параболических систем, коэффициенты которых имеют малую гладкость. *Укр. мат. журн.* 1970. Т.29, №1. С. 22–36.

93. **Levi E. E.** Sulle equazioni lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali. *Rend. Circ. Matem. Palermo.* 1907. Vol. 24. P. 275–317.

94. **Di Francesco M., Pascucci A.** On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type. *AMRX Appl. Math. Res. Express.* 2005. № 3. P. 77–116.

95. **Kolmogorov A. N.** Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung). *Ann. Math.* 1934. Vol. 35. P. 116–117.

96. **Weber M.** The fundamental solution of a degenerate partial differential equation of parabolic type. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1951. Vol. 71. P. 24–37.

97. **Ильин А.М.** Об одном классе ультрапараболических уравнений. *Докл. АН. СССР.* 1964. Т. 159, № 6. С. 1214–1217.

98. **Сонин И.М.** Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов. *Теория вероятн. и ее примен.* 1967. Т. 12, №3. С. 540–547.

99. **Шатыро Я.И.** Внутренние оценки для решений одного класса ультрапараболических уравнений. *Мат. записки Уральского ун-та.* 1970. Т. 7, №4. С. 131–154.

100. **Шатыро Я.И.** О гладкости решений некоторых вырожденных уравнений второго порядка. *Мат. заметки.* 1971. Т. 10, №1. С. 101–111.

101. **Купцов Л.П.** О фундаментальных решениях одного класса эллиптико-параболических уравнений второго порядка. *Дифференц. уравнения.* 1972. Т. 8, № 9. С. 1649–1660.

102. **Купцов Л.П.** Теорема о среднем и принцип максимума для уравнения Колмогорова. *Мат. заметки.* 1974. Т. 15, №3. С. 479–489.

103. **Купцов Л.П.** О фундаментальных решениях некоторых вырожденных параболических уравнений второго порядка. *Мат. заметки.* 1982. Т. 31, №4. С. 559–570.

104. **Купцов Л.П.** О свойстве среднего для обобщенного уравнения А.Н. Колмогорова. I. *Дифференц. уравнения.* 1983. Т. 19, №2. С. 295–304.

105. **Малицкая А.П.** Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений. *Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений: тем. сб. статей.* Киев: Киев. пед. ин-т, 1973. С. 109–130.

106. **Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.** Об уравнениях диффузии с инерцией и растущими коэффициентами. *Доп. АН УРСР.* Сер. А. 1974. №2. С. 106–110.

107. **Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.** О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений. *Дифференц. уравнения.* 1975. Т. 11, №7. С. 1316–1330.

108. **Ейдельман С. Д., Тичинська Л. М.** Побудова фундаментальних розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь довільного порядку. *Доп. АН УРСР.* Сер. А. 1979. №11. С. 896–899.

109. **Малицкая А.П.** Построение фундаментального решения для одного класса вырождающихся параболических уравнений высокого порядка. *Укр. мат. журн.* 1980. Т. 32, №6. С. 754–762.

110. **Малицкая А.П.** Построение фундаментальных решений некоторых уравнений высокого порядка. *Укр. мат. журн.* 1985. Т. 37, №6. С. 713–718.

111. **Ивасишен С.Д.** О начальных значениях решений ультрапараболических уравнений. *Успехи мат. наук.* 1988. Т. 43, №4. С. 188–189.

112. **Ивасишен С.Д., Андросова Л. Н.** Об интегральном представлении и начальных значениях решений некоторых вырождающихся параболических уравнений. *Докл. АН УССР.* Сер. А. 1989. №1. С. 16–19.

113. **Малицкая А.П.** О вырождающихся параболических уравнениях с возрастающими коэффициентами / *Укр. мат. журн.* 1989. Т. 41, №2. С. 176–181.

114. **Івасишен С. Д., Тичинська Л. М., Ейдельман С. Д.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь другого порядку. *Доп. АН УРСР.* Сер. А. 1990. №5. С. 6–8.

115. **Ивасишен С.Д., Андросова Л. Н.** Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова. *Дифференц. уравнения.* 1991. Т. 27, №3. С. 479–487.

116. **Тычинская Л.М., Эйдельман С. Д.** Задача Коши для некоторых уравнений диффузии с инерцией и растущими коэффициентами. *Доп. АН України.* 1993. №6. С. 18–21.

117. **Дронь В. С., Івасишен С. Д.** Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь. *Укр. мат. журн.* 1998. Т. 50, №11, С. 1482–1496.

118. **Eidelman S.D., Ivasyshen S. D., Malytska H. P.** A modified Levi method: development and application. *Доп. НАН України.* 1998. №5. C. 14–19.

119. **Івасишен С.Д., Возняк О. Г.** Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 1998. Т. 41, №2. С. 13–19.

120. **Дронь В.С.** Про коректну розв'язність задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 1999. Т. 42, №3. С. 52–55.

121. **Scornazzani V.** Sulle soluzioni non negative dell'equazione di Kolmogorov. *Rend. mat. e appl.* 1982. Vol. 2, №4. P. 689–709.

122. **Widder D.V.** Positive temperatures on an infinite rod. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1944. Vol. 55. P. 85–95.

123. **Дронь В.С.** Про принцип максимуму для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: зб. наук. праць.* Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. Вип. 12. С. 272–277.

124. **Малицька Г.П.** Про принцип максимуму для ультрапараболічних рівнянь. *Укр. мат. журн.* 1996. Т. 48, №2. С. 195–201.

125. **Kato Y.** The hypoellipticity of degenerate parabolic differential operators. *J. of Funct. Anal.* 1971. Vol. 7. P. 116–131.

126. **Hörmander L.** Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.* 1967. Vol. 119. P. 147–171.

127. **Леви Е. Э.** О линейных эллиптических уравнениях в частных производных. *Успехи мат. наук.* 1941. Вып. 8. С. 249–292.

128. **Шапиро З. Я.** Об эллиптических системах уравнений с частными производными. *Докл. АН СССР.* 1945. Т. 46, №4. С. 146–149.

129. **Лопатинский Я. Б.** Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.* 1951. Т. 3, №1. С. 3–38.

130. **Іасишен С. Д.** Про вплив ідей Я. Б. Лопатинського на розвиток теорії параболічних систем. *Нелинейные граничные задачи.* 2010. Т. 20. С. 45–53.

131. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д.** Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. *Доп. АН України.* 1994. №6. С. 7–11.

132. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д.** Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. Чернівецький нац. ун-т. Чернівці, 1995. 51 с. Деп. в ДНТБ України 12.07.95, №18-08-Ук95.

133. **Возняк О. Г.** Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням. *Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.* Чернівці: Рута, 1995. С. 42–60.

134. **Мединський І. П.** Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням. *Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка".* №337. Прикладна математика. Т. 1. Львів: Вид-во Держ. ун-ту "Львівська політехніка", 1998. С. 133–136.

135. **Мединський І. П.** Про властивості розв'язків Фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка".* №364 Прикладна математика. Львів: Вид-во Держ. ун-ту "Львівська політехніка", 1999. С. 298–307.

136. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane. *Mat. студії.* 2000. Т. 13, №1. С. 33–46.

137. **Мединський І. П.** Про апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка".* №407 Прикладна математика. Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2000. С. 185–194.

138. **Мединський І. П.** Про локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійної параболічної системи з слабким виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка".* №411 Прикладна математика. Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2000. С. 241–247.

139. **Мединський І. П.** Задача Коші лінійних і квазілінійних параболічних систем з виродженням: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. ф.-м. наук: 01.01.02. Чернівці, 2001. 16 с.

140. **Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.** $\overrightarrow{2b}$-параболические системы. *Тр. семинара по функц. анализу.* К.: Ин-т математики АН УССР, 1968. Вып.1. С. 3–175, 271–273.

141. **Ивасишен С.Д.** Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем. *Укр. мат. журн.* 1990. Т.42, №4.— С. 500–506.

142. **Березан Л. П., Івасишен С. Д.** Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи. *Доп. НАН України.* 1998. №12. С. 7–12.

143. **Березан Л. П., Івасишен С. Д.** Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи. *Вісник Держ. ун-ту "Львівська

політехніка". №337. Прикладна математика. Т. 1. Львів: Вид-во Держ. ун-ту "Львівська політехніка", 1998. С. 73–76.

144. **Березан Л. П.** Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту .*: Зб. наук. пр. Вип. 46. Математика. Чернівці: ЧДУ, 1999. С. 13–18.

145. **Березан Л. П.** Деякі властивості Фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту .*: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. Чернівці: Рута, 2000. С. 5–10.

146. **Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д.** Об одном новом классе вырождающихся параболических уравнений. *Успехи мат. наук.* 1996. Т. 51, №5. С. 227.

147. **Ивасишен С.Д., Эйдельман С. Д.** $\overrightarrow{2b}$-параболические уравнения с вырождением по части переменных. *Докл. АН.* 1998. Т. 360, №3. С. 303–305.

148. **Ивасишен С.Д., Эйдельман С. Д.** О фундаментальных решениях задачи Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных. *Дифференц. уравнения.* 1998. Т. 34, №11. С. 1536–1545.

149. **Ивасишен С.Д., Эйдельман С. Д.** О задаче Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных. *Дифференц. уравнения.* 2000. Т. 36, №4. С. 527–536.

150. **Ивасишен С.Д., Эйдельман С. Д.** Об интегральном представлении решений вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных. *Дифференц. уравнения.* 2000. Т. 36, №5. С. 647–655.

151. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь та їх застосування. *Доп. НАН України.* 1996. №10. С. 11–16.

152. **Возняк О.Г., Івасишен С. Д.** Однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь з узагальненими початковими даними. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2001. Т. 44, №4. С. 27–39.

153. **Pascucci A.** Kolmogorov equations in physics and in finance. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.* Basel: Birkhäuser, 2005. Vol. 63. P. 313–324.

154. **Foschi P., Pascucci A.** Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems. *Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica.* Università degli Studi della Basilicata. 2007. VI. P. 145–156.

155. **Lanconelli E., Polidoro S.** On a class hypoelliptic evolution operators. *Rend. Sem. Mat.* Univ. Pol. Torino. 1994. Vol. 52, № 1. P. 29–63.

156. **Polidoro S.** On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov–Fokker–Planck type. *Le Matematiche.* 1994. Vol. 49, № 1. P. 53–105.

157. **Polidoro S.** Uniqueness and representation theorems for solutions of Kolmogorov–Fokker–Planck equations. *Rend. Mat. Appl.* (7). 1995. Vol. 15, №4. P. 535–560.

158. **Polidoro S.** A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov–Fokker–Planck equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1997. Vol. 137, №4. P. 321–340.

159. **Polidoro S., Ragusa M. A.** Sobolev–Morrey spaces related to an ultraparabolic equation. *Manuscripta Math.* 1998. Vol. 96. P. 371–392.

160. **Manfredini M., Polidoro S.** Interior regularity for weak solutions of ultraparabolic equations in divergence form with discontinuous coefficients. *Boll. Un. Mat. Ital.* (8). 1998. Vol. 1-B. P. 651–675.

161. **Ragusa M. A.** On weak solutions of ultraparabolic equations. *Nonlinear Analysis.* 2001. Vol. 47. P. 503–511.

162. **Polidoro S., Ragusa M. A.** Hölder regularity for solutions of an ultraparabolic equations in divergence form. *Potential Analysis.* 2001. Vol. 14. P. 341–350.

163. **Pascucci A., Polidoro S.** A Gaussian upper bound for the fundamental solutions of a class of ultraparabolic equations. *J. Math. Anal. Appl.* 2003. Vol. 282, №1. P. 396–409.

164. **Pascucci A., Polidoro S.** The Moser's iterative method for a class of ultraparabolic equations. *Commun. Contemp. Math.* 2004. Vol. 6, №3. P. 395–417.

165. **Di Francesco M., Polidoro S.** Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov type operators in non-divergence form. *Advances in Differential Equations.* 2006. Vol. 11. P. 1261–1320.

166. **Лаюк В. В.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 239. Математика.* Чернівці: Рута, 2005. С. 82–85.

167. **Івасишен С. Д., Лаюк В. В.** Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2007. Т. 50, №3. С. 56–65.

168. **Івасишен С. Д., Лаюк В. В.** Про коректну розв'язність задачі Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Наук. віс-*

ник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 421. Математика. Чернівці: Рута, 2008. С. 37–40.

169. **Лаюк В. В.** Властивості розв'язків одного класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *Доп. НАН України.* 2009. №4. С. 28–32.

170. **Івасишен С. Д., Лаюк В. В.** Характеризація розв'язків одного класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *Укр. мат. вісник.* 2010. Т. 7, №1. С. 1–38.

171. **Івасишен С. Д., Лаюк В. В.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Укр. мат. журн.* 2011. Т. 63, №11. С. 1469–1500.

172. **Ивасишен С. Д., Лавренчук В. П.** Об интегральном представлении решений параболической системы линейных уравнений с оператором Бесселя. *Нелинейные граничные задачи: Респ. межвед. сб. науч. тр.* 1992. Вып. 4. С. 19–25.

173. **Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Мельничук Л. М.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 288. Математика.* Чернівці: Рута, 2006. С. 5–11.

174. **Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Мельничук Л. М.** Задача Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 314–315. Математика.* Чернівці: Рута, 2006. С. 7–16.

175. **Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Мельничук Л. М.** Інтегральне зображення розв'язку для деяких параболічних

рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 336–337. Математика.* Чернівці: Рута, 2007. С. 7–15.

176. **Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.** Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі зростаючими коефіцієнтами. *Укр. мат. журн.* 2000. Т. 52, №11. С. 1484–1490.

177. **Пасічник Г. С.** Про задачу Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2004. Т. 47, №4. С. 138–143.

178. **Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.** Задача Коші для рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2010. Т. 53, №1. С. 15–22.

179. **Дронь В.С.** Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип.76. Математика.* Чернівці: Рута, 2000. С. 32–41.

180. **Дронь В. С., Івасишен С. Д.** Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Укр. мат. вісник.* 2004. Т. 1, №1. С. 61–68.

181. **Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України.* 2014. Т. 11, №2. С. 126–153.

182. **Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.** Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів. *Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка.* 2014. Т. 11. С. 73–87.

183. **Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.** Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України.* 2015. Т. 12, №2. С. 205–229.

184. **Дронь В. С., Івасишен С. Д.** Властивості об'ємного потенціалу для одного класу ультрапараболічних рівнянь довільного порядку. *Буков. мат. журн.* 2016. Т. 4, №3–4. С. 47–56.

185. **Дронь В. С., Івасишен С. Д.** Властивості об'ємного потенціалу для вироджених $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Буков. мат. журн.* 2017. Т. 5, №1–2. С. 80–86.

186. **Дрінь Я. М., Ейдельман С. Д.** До теорії систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь. *Доп. АН УРСР. Сер.А.* 1989. №4. С. 10–12.

187. **Дрінь Я. М., Ейдельман С. Д.** Фундаментальні матриці розв'язків псевдодиференціальних параболічних систем з негладкими символами. *Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: зб. наук. праць.* Чернівці. 1990. С. 21–31.

188. **Eidelman S. D., Drin R. Ya.** About properties of the solutions of diffusion equations with the pseudodifferential summand. *Доп. АН УРСР.* 1995. №4. С. 9–12.

189. **Дрінь Р. Я., Ейдельман С. Д.** Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком. *Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.* Чернівці: Рута, 1995. С. 78–88.

190. **Городецький В. В., Дрінь Я. М.** Параболічні с рівняння у просторах узагальнених періодичних функцій. *Доп. АН УРСР.* 1991. №8. С. 18–22.

191. **Городецький В. В.** Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1993. 219 с.

192. **Літовченко В. А.** Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем з цілими аналітичними символами диференціювання. *Укр. мат. журн.* 2006. Т. 58, №9. С. 1211–1233.

193. **Літовченко В. А.** Задача Коші для сингулярних псевдодиференціальних систем параболічного типу. *Укр. мат. вісник.* 2007. Т. 4, №1. С. 21–55.

194. **Городецкий В. В., Житарюк И. В.** О скорости локализации решений задачи Коши для уравнений параболического типа с вырождением. *Дифференц. уравнения.* 1991. Т. 27, №4. С. 697–699.

195. **Городецький В. В., Житарюк І. В.** Задача Коші для одного класу параболічних систем з оператором Бесселя в просторах узагальнених функцій. *Доп. АН УРСР.* 1991. №7. С. 20–23.

196. **Городецький В.В., Житарюк І.В.** Про розв'язки задачі Коші для рівнянь параболічного типу з виродженням. *Доп. АН УРСР. Сер.А.* 1989. №12. С. 5–8.

197. **Городецкий В.В., Житарюк И.В.** О разрешимости задачи Коши для эволюционных уравнений параболического типа с вырождением в некоторых пространствах. *Дифференц. уравнения.* 1992. Т.28, №8. С.1373–1381.

198. **Івасишен С. Д., Андросова Л. М.** Принцип локалізації для розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь. *Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: зб. наук. праць.* Чернівці. 1990. С. 48–61.

199. **Івасишен С. Д., Літовченко В. А.** Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з додатним родом. *Укр. мат. журн.* 2009. Т. 61, №8. С. 1066–1087.

200. **Івасишен С. Д., Літовченко В. А.** Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з недодатним родом. *Укр. мат. журн.* 2010. Т. 62, №10. С. 1330–1350.

201. **Городецький В. В.** Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута. 1998. 235 с.

202. **Матійчук М. І.** Параболічні сингулярні крайові задачі. Київ: Ін-т математики НАН України. 1999. 176 с.

203. **Івасишен С. Д.** Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу. *Мат. студії.* 2013. Т. 40, №2. С. 172–181.

204. **Эйнштейн А., Смолуховский М.** Броуновское движение: сб. ст. Москва–Ленинград: ОНТИ, 1936.

205. **Эйнштейн А.** Собрание научных трудов. Т. 3. Москва: Наука, 1966. 632 с.

206. **Винер Н., Пэли Р.** Преобразование Фурье в комплексной области. Москва: Наука, 1964. 267 с.

207. **Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.** On the theory of the Brownian motion. *Phys. Rev.* 1930. Vol. 36. P. 823–841.

208. **Doob J. L.** The Brownian movement and stochastic equations. *Ann. Math.* 1942. Vol. 43, №2. P 351–369.

209. **Чандрасекар С.** Стохастические проблемы в физике и астрономии. Москва: Изд-во иностр. лит., 1947.

210. **Kolmogoroff A.N.** Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.* 1931. Bd. 104, H. 3. S. 415–458.

211. **Kolmogoroff A.N.** Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse / *Math. Ann.* 1933. Bd. 108, H. 1. S. 149–160.

212. **Дуб Дж.** Вероятностные процессы Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. 605 с.

213. **Дынкин Е.Б.** Марковские процессы. Москва: Физматгиз, 1963. 859 с.

214. **Chandresekhar S.** Stochastic problems in physics and astronomy. *Rev. Modern Phys.* 1943. Vol. 15. P. 1–89.

215. **Duderstadt J J., Martin W. R.** Transport theory. New York-Chichester-Brisbane, 1979.

216. **Chapman S., Gowling T. G.** The mathematical theory of nonuniform gases. Cambridge University Press, 1990.

217. **Ильин А.М., Хасьминский Р. З.** Об уравнениях броуновского движения. *Теория вероятн. и ее примен.* 1964. Т. 9, №3 С. 466–491.

218. **Ито К.** О стохастических дифференциальных уравнениях. *Математика период. сб перев. иностр. статей* Москва: Мир, 1957. Т. 1,№1. С. 78–116.

219. **Pascucci A.** Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options. *Finance and Stoch.* 2008. Vol. 12. P. 21–41.

220. **Polidoro S.** On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance. *Proceedings of the III-rd World Congress of Nonlinear Analysis.* Nonlinear Analysis: Series A Theory, Methods and Applications. 2001. 47/1. P. 491–502.

221. **Citti G., Pascucci A., Polidoro S.** On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance. *Differential and Integral Equations.* 2001. Vol. 14, № 6. P. 701–738.

222. **Di Francesco M., Pascucci A.** On the complete model with stochastic volatility by Hobson and Rogers. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 2004. Vol. 460. P. 3327–3338.

223. **Di Francesco M., Foschi P., Pascucci A.** Analysis of an uncertain volatility model. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences.* 2006. Vol. 2006. Article ID 15609, 17 p.

224. **Foschi P., Pascucci A.** Path dependent volatility. *Decis. Econ. Finance.* 2007. Vol. 31, № 1. P. 1–20.

225. **Di Francesco M., Pascucci A.** A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing. *J. Math. Anal. Appl.* 2007. Vol. 336. P. 1026–1041.

226. **Foschi P., Pascucci A.** Calibration of the Hobson & Rogers model: empirical tests. *Preprint AMS Acta.* Università di Bologna, 2007. 26 p.

227. **Escobedo M., Vazquez J. L., Zuazua E.** Entropy solutions for diffusion-convection equations with partial diffusivity. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1994. Vol. 343. P. 829–842.

228. **Pascucci A., Pascucci A.** Hölder regularity for a Kolmogorov equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* 2003. Vol. 355. P. 901–924.

229. **Peszek R.** PDE models for pricing stocks and options with memory feedback. *Appl. Math. Finance.* 1995. Vol. 2. P. 211–223.

230. **Эйдельман С.Д.** Об одном классе параболических систем. *Докл. АН СССР.* 1960. Т. 133, №1. С. 40–43.

231. **Матійчук М.І.** Фундаментальні матриці розв'язків загальних $\overrightarrow{2b}$-параболічних і $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера. *Доп. АН УРСР.* 1964. №8. С. 1010–1013.

232. **Матийчук М.И., Эйдельман С.Д.** О параболических системах с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини. *Докл. АН СССР.* 1965. Т.165, №3. С. 482–485.

233. **Chabrowski J.** Representation theorems for parabolic systems. *J. Austral. Math. Soc.* 1982. A.32, №2. P.246–288.

234. **Солонников В.А.** О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. *Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова.* 1965. Т.83. С. 3–162.

235. **Ивасишен С.Д.** Об интегральных представлениях и свойстве Фату для решений параболических систем. *Успехи мат. наук.* 1986. Т.41, вып.4. С. 173–174.

236. **Калашников А.С.** О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой. *Мат. заметки.* 1968. Т.3, №2. С.171–178.

237. **Калашников А.С.** Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка. *Вест. МГУ. Сер. матем., механ.* 1971. №2,3. С. 42–48, 3–9.

238. **Глушак А.В., Шмулевич С.Д.** О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной. *Дифференц. уравнения.* 1986. Т.22, №6. С.1065–1068.

239. **Глушко В.П.** Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II. *Дифференц. уравнения.* 1968. Т.4, №11. С.1956–1966.

240. **Кружков С.Н., Олейник О.А.** Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными. *Успехи мат. наук.* 1961. Т.16, вып.5. С.115–155.

241. **Fujita H.** On the blowing up of solutions of the Cauchy problem $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo.* Sect.1. Part 2. 1966. Vol. 13. P. 109–124.

242. **Лионс Ж.—Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 587 с.

243. **Hayakawa K.** On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations // Proc. Japan Acad.— 1973.— Vol.49, №7.— P.503–505.

244. **Лавренчук В.П., Матийчук М.И.** О нелинейных B-параболических краевых задачах // Мат. физика.— 1977.— Вып.21.— С.80–85.

245. **Лавренчук В.П., Матийчук М.И.** Глобальная разрешимость граничной задачи для квазилинейной параболической системы и задача без начальных условий // Укр. мат. журн.— 1982.— Т.34, №6.— С.710–717.

246. **Лавренчук В.П.** Задача Коші для квазілінійного параболічного рівняння другого порядку з інтегральним коефіцієнтом // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр.— Чернівці, 1990.— С.120–127.

247. **Івасишен С.Д., Launch Мединський І.П.** Про глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 1999.— Т.42, №2.— С.31–38.

ДОДАТКИ

Д1. Доведення тверджень з розділу 2

Доведення леми 2.2. Твердження (2.32), (2.33), (2.35) – (2.41) доведено в [14]. Установимо оцінки (2.34), (2.42) – (2.50). Використовуватимемо елементарні нерівності

$$\forall\{a,b\}\subset\mathbb{R}^r: 2^{-1}|a|^2-|b|^2\le|a+b|^2\le 2\left(|a|^2+|b|^2\right), r\ge 1,$$

та припущення $\beta\in[t_1,t)$ і $|x_l-z_l|^{1/m_l}\le(t-\tau)/4,\ l\in\mathbb{N}_3$.

Нерівність (2.34) справджується, бо

$$(t-\beta)^{-3}|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^2+(\beta-\tau)^{-3}|\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2|^2\ge$$

$$\ge 2^{-1}(\beta-\tau)^{-3}|x_2+(t-\beta)\hat{x}_1-\lambda_2+\lambda_2+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^2=$$

$$=2^{-1}(\beta-\tau)^{-3}|(X_2(t-\tau)-\xi_2)+(\beta-\tau)(\hat{\lambda}_1-\hat{x}_1)|^2\ge$$

$$\ge 4^{-1}(t-\tau)^{-3}|(X_2(t-\tau)-\xi_2)|^2-2^{-1}(t-\beta)^{-1}|x_1-\lambda_1|^2.$$

Оскільки $Z_1^{(l)}(t)-X_1(t)=\delta_{1l}(z_1-x_1)$, $Z_2^{(l)}(t)-X_2(t)=\delta_{1l}t(\hat{z}_1-\hat{x}_1)+$ $+\delta_{2l}(z_2-x_2)$, $Z_3^{(l)}(t)-X_3(t)=\delta_{1l}2^{-1}t^2(z_1'-x_1')+\delta_{2l}t(z_2'-x_2')+\delta_{3l}(z_3-x_3)$, δ_{kl}–символ Кронекера, $\{k,l\}\subset\mathbb{N}_3$, то

$$(\beta-\tau)^{-1}|Z_1^{(l)}(t-\beta)-X_1(t-\beta)|^2=(\beta-\tau)^{-1}|z_1-x_1|^2\le\frac{1}{2}, l\in\mathbb{N}_3;$$

$$(\beta-\tau)^{-3}|Z_2^{(l)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)|^2\le 2(\beta-\tau)^{-3}\times$$

$$\times((t-\beta)^2|\hat{z}_1-\hat{x}_1|^2+|z_2-x_2|^2)\le\frac{17}{4},\ l\in\mathbb{N}_3;$$

$$(\beta-\tau)^{-5}|Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)|^2\le 4(\beta-\tau)^{-5}(4^{-1}(t-\beta)^4|z_1'-x_1'|^2+$$

$$+(t-\beta)^2|z_2'-x_2'|^2+|z_3-x_3|^2)\le\frac{81}{8}, l\in\mathbb{N}_3;$$

$E_c^{(1)}(\beta-\tau,Z^{(l)}(t-\beta),\xi)=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|Z_1^{(l)}(t-\beta)-\xi_1|^2+(\beta-\tau)^{-3}|Z_2^{(l)}(t-\beta)+$ $+(\beta-\tau)\hat{Z}_1^{(l)}(t-\beta)-\xi_2|^2+(\beta-\tau)^{-5}|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)Z_2^{(l)\prime}(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2Z_1^{(l)\prime}-$ $-\xi_3|^2]\}=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|(X_1(t-\beta)-\xi_1)+(Z_1^{(l)}(t-\beta)-X_1(t-\beta))|^2+(\beta-\tau)^{-3}\times$ $\times|(X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{X}_1(t-\beta)-\xi_2)+(\beta-\tau)(\hat{Z}_1^{(l)}(t-\beta)-\hat{X}_1(t-\beta))+(Z_2^{(l)}(t-\beta)-$

$$-X_2(t-\beta))|^2+(\beta-\tau)^{-5}|(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2X_1'(t-\beta)-\xi_3)+$$

$$+(Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta))++(\beta-\tau)(Z_2^{(l)'}(t-\beta)-X_2'(t-\beta))+2^{-1}(\beta-\tau)^2\times$$

$$\times(Z_1^{(l)'}(t-\beta)-X_1'(t-\beta))|^2]\} \le \exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}(2^{-1}|X_1(t-\beta)-\xi_1|^2-$$

$$-|Z_1^{(l)}(t-\beta)-X_1(t-\beta)|^2)+(\beta-\tau)^{-3}(4^{-1}|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{X}_1(t-\beta)-\xi_2|^2-$$

$$-2^{-1}(\beta-\tau)^2|\hat{Z}_1^{(l)}(t-\beta)-\hat{X}_1(t-\beta)|^2-|Z_2^{(l)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)|^2)+(\beta-\tau)^{-5}\times$$

$$\times(8^{-1}|(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2X_1'(t-\beta)-\xi_3|^2-$$

$$-4^{-1}|Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)|^2-2^{-1}(\beta-\tau)^2|Z_2^{(l)'}(t-\beta)-X_2'(t-\beta)|^2-2^{-1}(\beta-\tau)^4\times$$

$$\times|Z_1^{(l)'}(t-\beta)-X_1'(t-\beta)|^2)]\} \le CE_{c/8}(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi)$$

і нерівність (2.42) доведено.

Для доведення (2.43) запишемо

$$E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi)=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|x_1-\xi_1|^2+$$

$$+(\beta-\tau)^{-3}|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{x}_1-\xi_2|^2+(\beta-\tau)^{-5}|X_3(t-\beta)+$$

$$+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2x_1'-\xi_3|^2]\}=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|x_1-\xi_1|^2+$$

$$+(\beta-\tau)^{-3}|X_2(t-\tau)-\xi_2|^2+(\beta-\tau)^{-5}|X_3(t-\tau)-\xi_3|^2]\} \le E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Твердження (2.44) і (2.46) доводимо аналогічно до (2.42). Оскільки

$$E_c^{(1)}(\beta-\tau,(\lambda_1, Z_2^{(l)}(t-\beta), Z_3^{(l)}(t-\beta)),\xi)=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|\lambda_1-\xi_1|^2+$$

$$+(\beta-\tau)^{-3}|Z_2^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^2+(\beta-\tau)^{-5}|Z_3^{(l)}(t-\beta)+$$

$$+(\beta-\tau)Z_2^{(l)'}(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2]\}$$

і

$$E_c^{(1)}(\beta-\tau,(\lambda_1,\lambda_2, Z_3^{(l)}(t-\beta)),\xi)=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|\lambda_1-\xi_1|^2+(\beta-\tau)^{-3}\times$$

$$\times|\Lambda_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^2+(\beta-\tau)^{-5}|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2]\},$$

то з нерівностей

$$|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)Z_2^{(l)'}(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2=$$

$$=|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3+(\beta-\tau)(Z_2^{(l)'}(t-\beta)-$$

$$-X_2'(t-\beta))|^2 \geq 2^{-1}|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2-(\beta-\tau)^2\times$$

$$\times|Z_2^{(l)'}(t-\beta)-X_2'(t-\beta)|^2 \geq 4^{-1}|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2-$$

$$-2^{-1}|Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)|^2-(\beta-\tau)^2|Z_2^{(l)'}(t-\beta)-X_2'(t-\beta)|^2, l \in \mathbb{N}_3,$$

$$|Z_2^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^2=|(X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2)+(Z_2^{(l)}(t-\beta)-X_2(t-\beta))|^2\geq$$

$$\geq 2^{-1}|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^2-|Z_2^{(l)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)|^2, l \in \mathbb{N}_3,$$

і

$$|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2=$$

$$=|(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3)+(Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta))|^2\geq$$

$$\geq 2^{-1}|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2-|Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)|^2,$$

випливають нерівності (2.44) і (2.46).

Твердження (2.45) є наслідком з нерівностей

$$(\beta-\tau)^{-3}|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^2=(\beta-\tau)^{-3}|(X_2(t-\tau)-\xi_2)+(\beta-\tau)(\hat{\lambda}_1-\hat{x}_1)|^2\geq$$

$$\geq 2^{-1}(t-\tau)^{-3}|X_2(t-\tau)-\xi_2|^2-(t-\beta)^{-1}|\lambda_1-x_1|^2,$$

$$(\beta-\tau)^{-5}|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2=(\beta-\tau)^{-5}|x_3+$$

$$+(t-\beta)x_2'+2^{-1}(t-\beta)^2x_1'+(\beta-\tau)x_2'+(\beta-\tau)(t-\beta)x_1'+2^{-1}(\beta-\tau)^2x_1'-\xi_3+$$

$$+2^{-1}(\beta-\tau)^2(\lambda_1'-x_1')|^2\geq 2^{-1}(t-\tau)^{-5}|X_3(t-\tau)-\xi_3|^2-4^{-1}(t-\beta)^{-1}|x_1-\lambda_1|^2.$$

Аналогічно з нерівності

$$|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2=$$

$$=|(X_3(t-\tau)-\xi_3)+(\beta-\tau)(\lambda_2'-X_2'(t-\beta))+2^{-1}(\beta-\tau)^2(\lambda_1'-x_1')|^2\geq$$

$$\geq 4^{-1}|X_3(t-\tau)-\xi_3|^2-2^{-1}(\beta-\tau)^2|\lambda_2'-X_2'(t-\beta)|^2-4^{-1}(\beta-\tau)^4|\lambda_1'-x_1'|^2$$

здобудемо (2.47).

Беручи до уваги нерівності

$$E_c^{(1)}(t,z^{(r)},\xi)=\exp\{-c[t^{-1}|(x_1-\xi_1)+\delta_{r1}(z_1-x_1)|^2+t^{-3}|(X_2(t)-\xi_2)+t\delta_{r1}(\hat{z}_1-\hat{x}_1)+$$

$$+\delta_{r2}(z_2-x_2)|^2+t^{-5}|(X_3(t)-\xi_3)+2^{-1}t^2\delta_{r1}(z_1'-x_1')+\delta_{r2}t(z_2'-x_2')+\delta_{r3}(z_3-x_3)|^2]\}\leq$$

$$\leq \exp\{-c[2^{-1}t^{-1}|x_1-\xi_1|^2-\delta_{r1}|z_1-x_1)|^2+2^{-1}t^{-3}|X_2(t)-\xi_2|^2-t^2\delta_{r1}|\hat{z}_1-\hat{x}_1)|^2+$$

$$+2^{-1}\delta_{r2}|z_2-x_2|^2+2^{-1}t^{-5}|X_3(t)-\xi_3|^2-4^{-1}\delta_{r1}t^{-1}|z_1'-x_1'|^2+\delta_{r2}t^{-3}|z_2'-x_2'|^2-$$

$$-\delta_{r3}t^{-5}|z_3-x_3|^2]\}\leq CE^{(1)}_{c/2}(t,x,\xi),\ t>0,\ \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ r\in\mathbb{N}_3,$$

та нерівності (2.32), отримуємо

$$E^{(1)}_c(t,z^{(r)},\xi)\leq CE_{c/2}(t,x,\xi),\ t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ r\in\mathbb{Z}_3,$$

З цієї нерівності та оцінок (2.42), (2.44) і (2.46) випливає, що твердження (2.48) досить довести для $r=s=0$, тобто оцінити інтеграли $I_0^{(1,0l)}(x;\xi)$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $l\in\mathbb{Z}_3$. Якщо $l=0$, то потрібна оцінка випливає безпосередньо з означення (2.15) та рівності (2.37). У випадку $l=1$ за допомогою нерівності (2.46) і рівності (2.37) здобудемо

$$I_0^{(1,01)}(x;\xi)\leq((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E^{(1)}_{c_0}(t-\beta,x,\lambda)E^{2,1}_{-c_0/4}(t-\beta,x_1-\lambda_1)d\lambda E^{(1)}_{c_0/10}(t-\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq(t_1-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E^{(1)}_{3c_0/4}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda E^{(1)}_{c_0/10}(t-\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq CE^{(1)}_{c_0/10}(t,x,\xi),\ t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{Д1.1}$$

Якщо $l=2$, то використовуємо нерівності (2.33), (2.34), (2.47) і рівності (2.37):

$$I_0^{(1,02)}(x;\xi)\leq((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E^{(1)}_{c_0}(t-\beta,x,\lambda)E^{2,1}_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$

$$\times E^{2,2}_{c_0/3}(\beta-\tau,\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2)E^{2,1}_{-c_0/12}(t-\beta,x_1-\lambda_1)d\lambda E^{2,3}_{c_0/12}(t-\tau,X_3(t-\tau)-\xi_3)=$$

$$=((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E^{(1)}_{11c_0/12}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^{2,1}_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$

$$\times E^{2,2}_{2c_0/3}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)(E^{2,2}_{c_0/3}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)E^{2,2}_{c_0/3}(\beta-\tau,\Lambda_2(\beta-\tau)-\xi_2))\times$$

$$\times E^{2,3}_{c_0}(t-\beta,X_3(t-\beta)-\lambda_3)d\lambda E^{2,3}_{c_0/12}(t-\tau,X_3(t-\tau)-\xi_3)\leq$$

$$\leq((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E^{(1)}_{5c_0/12}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^{2,1}_{c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^{2,1}_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$

$$\times E^{2,2}_{2c_0/3}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)E^{2,3}_{c_0}(t-\beta,X_3(t-\beta)-\lambda_3)d\lambda E^{2,2}_{c_0/12}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)\times$$

$$\times E^{2,3}_{c_0/12}(t-\tau, X_3(t-\tau)-\xi_3) \le (t_1-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(1)}_{5c_0/12}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda\times$$

$$\times E^{(1)}_{c_0/12}(t-\tau,x,\xi) \le CE^{(1)}_{c_0/12}(t-\tau,x,\xi),\ t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (Д1.2)$$

З нерівностей (Д1.1) і (Д1.2) випливає твердження (2.48), оскільки для випадку $l=2$ оцінка встановлена в [14]. Твердження (2.49) і (2.50) доводяться аналогічно. ▶

Доведення леми 2.3. Твердження (2.51) – (2.59), (2.63) – (2.66) і (2.70) доведено в [14]. Установимо оцінки (2.60) – (2.62), (2.67) – (2.69) і (2.71) – (2.78). Для цього використовуватимемо елементарні нерівності з [14,c. 25]

$$\forall\{a,b,c\}\subset\mathbb{R}^r: 2^{1-p}|a|^p-|b|^p \le |a+b|^p \le 2^{P-1}\left(|a|^p+|b|^p\right), r\ge 1,$$

$$4^{1-p}|a|^p-2^{1-p}|b|^p-|c|^p \le |a+b+c|^p \le 4^{p-1}\left(|a|^p+|b|^p+|c|^p\right), p\in[1,\infty),$$

та припущення $\beta\in[t_1,t)$ і $|x_l-z_l|^{1/m_l}\le(t-\tau)/4,\ l\in\mathbb{N}_3$.

Оскільки $Z^{(l)}_1(t)-X_1(t)=\delta_{1l}(z_1-x_1)$, $Z^{(l)}_2(t)-X_2(t)=\delta_{1l}t(\hat z_1-\hat x_1)+$ $+\delta_{2l}(z_2-x_2)$, $Z^{(l)}_3(t)-X_3(t)=\delta_{1l}2^{-1}t^2(z'_1-x'_1)+\delta_{2l}t(z'_2-x'_2)+\delta_{3l}(z_3-x_3)$, δ_{kl}–символ Кронекера, $\{k,l\}\subset\mathbb{N}_3$, то

$$(\beta-\tau)^{1-q}|Z^{(l)}_1(t-\beta)-X_1(t-\beta)|^q=(\beta-\tau)^{1-q}|z_1-x_1|^q\le 2^{-1/(2b-1)}=:d_1, l\in\mathbb{N}_3;$$

$$(\beta-\tau)^{1-2q}|Z^{(l)}_2(t-\beta)-X_2(t-\beta)|^q\le 2^{q-1}(\beta-\tau)^{1-2q}((t-\beta)^q|\hat z_1-\hat x_1|^q+|z_2-x_2|^q)\le$$

$$\le 2^{q-1}((\beta-\tau)^{1-q}|z_1-x_1|^q+(\beta-\tau)^{1-2q}|z_2-x_2|^q)\le$$

$$\le 2^{q-1}(2^{-1/(2b-1)}+2^{-3(2b+1)/(2b-1)})=1+2^{-2(3b+1)/(2b-1)}=:d_2, l\in\mathbb{N}_3;$$

$$(\beta-\tau)^{1-3q}|Z^{(l)}_3(t-\beta)-X_3(t-\beta)|^2\le$$

$$\le 4^{q-1}(\beta-\tau)^{1-3q}(2^{-q}(t-\beta)^{2q}|z'_1-x'_1|^q+(t-\beta)^q|z'_2-x'_2|^q+|z_3-x_3|^q)\le$$

$$\le 4^{q-1}(2^{-q}(\beta-\tau)^{1-q}|z_1-x_1|^q+(\beta-\tau)^{1-2q}|z_2-x_2|^q+(\beta-\tau)^{1-3q}|z_3-x_3|^q)\le$$

$$\le 2^{-1}+2^{-(6b-1)/(2b-1)}+2^{-(4b+1)/(2b-1)}=:d_3, l\in\mathbb{N}_3;$$

$$E^{(2,3)}_c(\beta-\tau, Z^{(l)}(t-\beta),\xi)=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{1-q}|Z^{(l)}_1(t-\beta)-\xi_1|^q+(\beta-\tau)^{1-2q}\times$$

$$\times|Z^{(l)}_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat Z^{(l)}_1(t-\beta)-\xi_2|^q+(\beta-\tau)^{1-3q}|Z^{(l)}_3(t-\beta)+(\beta-\tau)Z^{(l)'}_2(t-\beta)+$$

$$+2^{-1}(\beta-\tau)^2Z^{(l)'}_1-\xi_3|^q]\}=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{1-q}|(X_1(t-\beta)-\xi_1)+$$

$$+(Z_1^{(l)}(t-\beta)-X_1(t-\beta))|^q+(\beta-\tau)^{1-2q}|(X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{X}_1(t-\beta)-\xi_2)+$$

$$+(\beta-\tau)(\hat{Z}_1^{(l)}(t-\beta)-\hat{X}_1(t-\beta))+(Z_2^{(l)}(t-\beta)-X_2(t-\beta))|^q+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-3q}|(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2X_1'(t-\beta)-\xi_3)+$$

$$+(Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta))+(\beta-\tau)(Z_2^{(l)'}(t-\beta)-X_2'(t-\beta))+$$

$$+2^{-1}(\beta-\tau)^2(Z_1^{(l)'}(t-\beta)-X_1'(t-\beta))|^q]\}\leq$$

$$\leq\exp\{-c[(\beta-\tau)^{1-q}(2^{-1}|X_1(t-\beta)-\xi_1|^q-|Z_1^{(l)}(t-\beta)-X_1(t-\beta)|^q)+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-2q}(4^{1-q}|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{X}_1(t-\beta)-\xi_2|^q-2^{1-q}(\beta-\tau)^q\times$$

$$\times|\hat{Z}_1^{(l)}(t-\beta)-\hat{X}_1(t-\beta)|^2-|Z_2^{(l)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)|^q)+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-3q}(8^{1-q}|(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+$$

$$+2^{-1}(\beta-\tau)^2X_1'(t-\beta)-\xi_3|^2-4^{1-q}|Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)|^q-2^{1-q}(\beta-\tau)^2|Z_2^{(l)'}(t-\beta)-$$

$$-X_2'(t-\beta)|^2-2^{-q}(\beta-\tau)^{2q}|Z_1^{(l)'}(t-\beta)-X_1'(t-\beta)|^q)]\}\leq C_1E_{c_1}^{(2,3)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi),$$

де $C_1=\exp\{c(d_1(1+2^{1-q}+2^{-q})+d_2(1+2^{1-q})+d_3\}$, а $c_1=c8^{1-q}$.

Для завершення доведення запишемо

$$E_{c_1}^{(2,3)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)=\exp\{-c_1[(\beta-\tau)^{1-q}|x_1-\xi_1|^q+(\beta-\tau)^{1-2q}\times$$

$$\times|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{x}_1-\xi_2|^q+(\beta-\tau)^{1-3q}|X_3(t-\beta)+$$

$$+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2x_1'-\xi_3|^q]\}=\exp\{-c_1[(\beta-\tau)^{1-q}|x_1-\xi_1|^q+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-2q}|X_2(t-\tau)-\xi_2|^q+(\beta-\tau)^{1-3q}|X_3(t-\tau)-\xi_3|^q]\}\leq E_{c_1}^{(2,3)}(t-\tau,x,\xi)$$

і нерівність (2.60) доведено.Твердження (2.61) і (2.62) доводимо аналогічно до (2.60). Оскільки

$$E_c^{(2,3)}(\beta-\tau,(\lambda_1,Z_2^{(l)}(t-\beta),Z_3^{(l)}(t-\beta)),\xi)=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{1-q}|\lambda_1-\xi_1|^q+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-2q}|Z_2^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^q+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-3q}|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)Z_2^{(l)'}(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^q]\}$$

і

$$E_c^{(2,3)}(\beta-\tau,(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(l)}(t-\beta)),\xi)=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{1-q}|\lambda_1-\xi_1|^q+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-2q}\Lambda_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^q+$$

$$+(\beta-\tau)^{1-3q}|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^q]\},$$

то з нерівностей

$$|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)Z_2^{(l)'}(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^q=$$

$$=|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3+(\beta-\tau)(Z_2^{(l)'}(t-\beta)-$$

$$-X_2'(t-\beta))|^q\geq 2^{1-q}|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^q-$$

$$-(\beta-\tau)^q|Z_2^{(l)'}(t-\beta)-X_2'(t-\beta)|^q\geq 4^{1-q}|X_3(t-\beta)+$$

$$+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^q-2^{1-q}|Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)|^q-$$

$$-2^{1-q}|Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)|^q-(\beta-\tau)^q|Z_2^{(l)'}(t-\beta)-X_2'(t-\beta)|^q, l\in\mathbb{N}_3,$$

$$|Z_2^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^q=|(X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2)+$$

$$+(Z_2^{(l)}(t-\beta)-X_2(t-\beta))|^q\geq$$

$$\geq 2^{1-q}|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^q-|Z_2^{(l)}(t-\beta)-X_2(t-\beta)|^q, l\in\mathbb{N}_3,$$

і

$$|Z_3^{(l)}(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^q=$$

$$=|(X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3)+(Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta))|^q\geq$$

$$\geq 2^{1-q}|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^q-|Z_3^{(l)}(t-\beta)-X_3(t-\beta)|^q, l\in\mathbb{N}_3.$$

Твердження (2.61) є наслідком з нерівностей

$$(\beta-\tau)^{1-2q}|X_2(t-\beta)+(\beta-\tau)\hat{\lambda}_1-\xi_2|^q=(\beta-\tau)^{1-2q}|(X_2(t-\tau)-\xi_2)+$$

$$+(\beta-\tau)(\hat{\lambda}_1-\hat{x}_1)|^q\geq 2^{1-q}(t-\tau)^{1-2q}|X_2(t-\tau)-\xi_2|^q-(t-\beta)^{1-q}|\lambda_1-x_1|^q,$$

$$(\beta-\tau)^{1-3q}|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)X_2'(t-\beta)+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^q=$$

$$(\beta-\tau)^{1-3q}|x_3+(t-\beta)x_2'+2^{-1}(t-\beta)^2x_1'+(\beta-\tau)x_2'+$$

$$+(\beta-\tau)(t-\beta)x_1'+2^{-1}(\beta-\tau)^2x_1'-\xi_3+2^{-1}(\beta-\tau)^2(\lambda_1'-x_1')|^q\geq$$

$$\geq 2^{1-q}(t-\tau)^{1-3q}|X_3(t-\tau)-\xi_3|^q-2^{-q}(t-\beta)^{1-q}|x_1-\lambda_1|^2.$$

Аналогічно з нерівності

$$|X_3(t-\beta)+(\beta-\tau)\lambda_2'+2^{-1}(\beta-\tau)^2\lambda_1'-\xi_3|^2=$$

$$=|(X_3(t-\tau)-\xi_3)+(\beta-\tau)(\lambda_2'-X_2'(t-\beta))+2^{-1}(\beta-\tau)^2(\lambda_1'-x_1')|^q\geq$$

$$\geq 4^{1-q}|X_3(t-\tau)-\xi_3|^q-2^{1-q}(\beta-\tau)^q|\lambda_2'-X_2'(t-\beta)|^q-2^{-q}(\beta-\tau)^2q|\lambda_1'-x_1'|^q$$

здобудемо (2.62) з $c_1=c4^{1-q}, c_2=c2^{1-q}$, і $c_3=c_1$.

Наведемо деякі співвідношення для коефіцієнтів ряду, які визначаються формулами (2.9). Нехай $\hat{C}_1>0$, $\hat{C}_2>0$— деякі сталі, $C=\max\{\hat{C}_1,\ \hat{C}_2\}$, а $\hat{C}_3:=2eC$. Для заданого числа $\chi\in(0,1)$ позначимо через j_0 найменше натуральне число, для якого справджується нерівність $j_0\chi\geq 1$. Використовуватимемо ще такі позначення: $\hat{C}_0^{\chi}:=\max\limits_{1\leq j\leq j_0}\{\Gamma(j\chi+1)(\Gamma((j+1)\chi+1))^{-1}\}$, $C(\chi):=\hat{C}_1\Gamma(\chi)\hat{C}_0^{\chi}$. Тоді

$$\hat{C}_1^l a_l^{(\chi,\hat{C}_2)}(t)=a_l^{(\chi,\hat{C}_1\hat{C}_2)}(t),\ t>0,\ l\in\mathbb{N}; \tag{Д1.3}$$

$$a_{l+1}^{(\chi,\hat{C}_1)}(t)\leq C(\chi)t^{\chi}a_l^{(\chi,\hat{C}_1)}(t),\ t>0,\ l\in\mathbb{N}; \tag{Д1.4}$$

$$a_l^{(\chi,\hat{C}_1)}(t)a_j^{(\chi,\hat{C}_2)}(t)\leq a_{j+l}^{(\chi,\hat{C}_3)}(t),\ t>0,\ \{j,l\}\subset\mathbb{N}. \tag{Д1.5}$$

Співвідношення (Д1.3), (Д1.4) безпосередньо випливають з означення (2.9). Доведемо нерівність (Д1.5). Розглянемо спершу випадок $l\leq j$. Маємо

$$a_l^{(\chi,\hat{C}_1)}(t)a_j^{(\chi,\hat{C}_2)}(t)\leq a_l^{(\chi,\hat{C})}(t)a_j^{(\chi,\hat{C})}(t)=(\hat{C}\Gamma(\chi)t^{\chi})^{l+j}(\Gamma(l\chi+1)\Gamma(j\chi+1))^{-1}=$$

$$=(\hat{C}\Gamma(\chi)t^{\chi})^{j+l}(\Gamma((j+l)\chi+2))^{-1}(B(l\chi+1,j\chi+1))^{-1}=$$

$$=a_{j+l}^{(\chi,\hat{C}))}(t)((j+l)\chi+1)(B(l\chi+1,j\chi+1))^{-1},$$

де B— бета-функція Ейлера. Оцінимо знизу добуток

$$((j+l)\chi+1)(B(l\chi+1,j\chi+1))^{-1}\geq$$

$$\geq((j+l)\chi+1)\int\limits_{2^{-1}((j+l)\chi+1)^{-1/(l\chi+1)}}^{((j+l)\chi+1)^{-1/(l\chi+1)}}s^{l\chi}(1-s)^{j\chi}ds\geq$$

$$\geq((j+l)\chi+1)(2^{-1}((j+l)\chi+1)^{-1/(l\chi+1)})^{l\chi}\times$$

$$\times(1-((j+l)\chi+1)^{-1/(l\chi+1)})^{j\chi}\int\limits_{2^{-1}((j+l)\chi+1)^{-1/(l\chi+1)}}^{((j+l)\chi+1)^{-1/(l\chi+1)}} ds \geq$$

$$\geq 2^{-1-l\chi}(1-((j+l)\chi+1)^{-1/(l\chi+1)})^{\left[(((j+l)\chi+1))^{1/(l\chi+1)}\right]^{(1+l\chi)}} \geq$$

$$\geq (2e)^{-(1+l\chi)} \geq (2e)^{-(l+j)}.$$

Отже, нерівність (Д1.5) справджується для $l \leq j$, при цьому $\hat{C}_3 = (2e)^{-(l+j)}\hat{C}$. Протилежний випадок $l > j$ розглядається аналогічно.

За допомогою означень(2.8)– (2.22) та оцінок (2.63) – (2.65) маємо

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(2,\chi,3)}_{c,\hat{C}}(t,x,\xi)\,d\xi \leq t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{(2,\chi,3)}_{c,\hat{C}}(t,x,\xi)\,d\xi \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{\chi,\hat{C}}(t)t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(2,3)}_{c\delta^j}(t,x,\xi)\,d\xi =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{\chi,\hat{C}}(t)\delta^{-\frac{nj}{q}}t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(2,3)}_{c}(t,x,\xi)\,d\xi = C\,F_0^{(\chi,\hat{C}_1)}(t), \qquad \text{(Д1.6)}$$

де $F_0^{(\chi,\hat{C}_1)}(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j^{\chi,\hat{C}_1}(t)$, $\hat{C}_1 = \hat{C}\delta^{-n/q}$, а C— стала з рівності (2.63).

$$t^{-m_2n_2-m_3n_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E^{(2,\chi,3)}_{c,\hat{C}}(t,x,\xi)\,d\xi_2 d\xi_3 = E_c^1(t,x_1-\xi_1)\times$$

$$\times t^{-m_2n_2-m_3n_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} F^{(2,\chi,3)}_{c,\hat{C}}(t,x,\xi)\,d\xi_2 d\xi_3 =$$

$$= E_c^1(t,x_1-\xi_1)\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{\chi,\hat{C}}(t)(\delta^{-\frac{(n_1+n_2)}{q}})^j E^1_{c\delta^j}(t,x_1-\xi_1)\times$$

$$\times t^{-m_2n_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} E_c^{2,2}(t,X_2(t)-\xi_2)\,d\xi_2\, t^{-m_3n_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_c^{2,3}(t,X_3-\xi_3)\,d\xi_3 =$$

$$= C\,E_c^1(t,x_1-\xi_1)\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{\chi,\hat{C}_2}(t)E^1_{c\delta^j}(t,x_1-\xi_1) = C\,E^{(2,\chi,1)}_{c,\hat{C}_2}(t,x_1,\xi_1), \qquad \text{(Д1.7)}$$

де $\hat{C}_2 = \hat{C}\delta^{-(n_1+n_2)/q}$, $C = C_2\,C_3$, а C_2, C_3— сталі з відповідних рівностей (2.66).

$$t^{-m_3n_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E^{(2,\chi,3)}_{c,\hat{C}}(t,x,\xi)\,d\xi_3 = E_c^1(t,x_1-\xi_1)\,t^{-m_3n_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} F^{(2,\chi,3)}_{c,\hat{C}}(t,x,\xi)\,d\xi_3 =$$

$$= E_c^1(t, x_1-\xi_1)\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{\chi,\hat{C}}(t) E_{c\delta^j}^{(2,2)}(t, x_2, x_3, \xi_2, \xi_3)\, t^{-m_3n_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E_{c\delta^j}^{2,3}(t, X_3-\xi_3)\, d\xi_3 =$$

$$= C_3\, E_c^1(t, x_1-\xi_1)\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{\chi,\hat{C}_3}(t) E_{c\delta^j}^{(2,2)}(t, x_2, x_3, \xi_2, \xi_3) = C_3\, E_{c,\hat{C}_3}^{(2,\chi,1)}(t, x_1, \xi_1), \tag{Д1.8}$$

де $\hat{C}_3 = \hat{C}\delta^{-m_3n_3/q}$, а C_3— така як вище.

В оцінках (Д1.6)–(Д1.8) C_j, $j \in \mathbb{N}_3$, такі, як у (2.63)–(2.65). З нерівностей (Д1.6)–(Д1.8) випливають оцінки (2.67)–(2.69). Оцінка (2.71) є наслідком (2.70).

При доведенні (Д1.6) застосовано нерівність (2.63) та рівність

$$(\hat{C}_1)^j a_j^{\chi,\hat{C}}(t) = a_j^{(\chi,\hat{C}\hat{C}_1)}(t), \hat{C} > 0, \hat{C}_1 > 0, t > 0, \chi \in (0,1), j \in \mathbb{N}.$$

Остання рівність використовується і при доведенні (Д1.7) і (Д1.8).

Беручи до уваги нерівності

$$E_c^{(1)}(t, z^{(r)}, \xi) = \exp\{-c[t^{1-q}|(x_1-\xi_1) + \delta_{r1}(z_1-x_1)|^q +$$

$$+t^{1-2q}|(X_2(t)-\xi_2) + t\delta_{r1}(\hat{z}_1-\hat{x}_1) + \delta_{r2}(z_2-x_2)|^q +$$

$$+t^{1-3q}|(X_3(t)-\xi_3) + 2^{-1}t^2\delta_{r1}(z_1'-x_1') + \delta_{r2}t(z_2'-x_2') + \delta_{r3}(z_3-x_3)|^q]\} \le$$

$$\le \exp\{-c[2^{1-q}t^{1-q}|x_1-\xi_1|^q - \delta_{r1}t^{1-q}|z_1-x_1)|^q + 4^{1-q}t^{1-2q}|X_2(t)-\xi_2|^q -$$

$$-2^{1-q}t^{1-q}\delta_{r1}|\hat{z}_1-\hat{x}_1)|^q - \delta_{r2}t^{1-2q}|z_2-x_2|^q +$$

$$+8^{1-q}t^{1-3q}|X_3(t)-\xi_3|^q - 4^{1-q}\delta_{r1}t^{1-q}|z_1'-x_1'|^q + \delta_{r2}t^{1-2q}|z_2'-x_2'|^q -$$

$$-\delta_{r3}t^{1-3q}|z_3-x_3|^q]\} \le CE_{c/2}^{(1)}(t, x, \xi),\ t > 0,\ \{x, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{N}_3,$$

та нерівності (2.51 отримуємо

$$E_c^{(2,3)}(t, z^{(r)}, \xi) \le CE_{c_1}^{(2,3)}(t, x, \xi),\ c_1 = c2^{1-q},\ t > 0,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{Z}_3.$$

З цієї нерівності та оцінок (2.60)–(2.62) випливає, що твердження (2.72) досить довести для $r = s = 0$, тобто оцінити інтеграли $I_0^{(2,0l)}$, $l \in \mathbb{N}_3$. Доведення оцінок (2.72)–(2.74) для інтегралів $I_0^{(2,sl)}$, $I_1^{(2,sl)}$, $l \in \mathbb{N}_3$ та $I_2^{(2,s2)}$, $s \in \in \mathbb{N}_3$, проводимо аналогічно до відповідних доведень з леми 2.1.. За допомогою цих оцінок, а також означення (2.21) оцінювальної функції отримуємо оцінки

(2.75)–(2.78). ►

Доведення леми 2.9 Доведення проведемо для випадку $l \in \{1, 2\}$. Твердження леми у випадку $l = 3$ розглядаються аналогічно до випадку $l = 1$. У випадку $l = 1$ приймаємо $b = 1$. Далі різні сталі позначатимуться тими самими літерами, якщо нас не цікавить їхнє значення.

а) Використовуючи рівність з [14]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-M} \exp\{-c'\rho_l(t-\tau, x, \xi)\} d\xi = C, \quad 0 < \tau < t \le T,\ x \in \mathbb{R}^n,\ c' > 0, \tag{Д1.9}$$

на підставі означення норми $||f||^0_{\varphi_l}$ маємо

$$|u_l(t,x)| \le C \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\nu-N} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-c\rho_l(t-\tau, x, \xi)\} |f(\tau,\xi)| d\xi =$$

$$= C \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\nu-N} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-c_0\rho_l(t-\tau, x, \xi)\} \varphi_l(\tau,\xi) \frac{|f(\tau,\xi)|}{\varphi_l(\tau,\xi)} \times$$

$$\times \exp\{-(c-c_0)\rho_l(t-\tau, x, \xi)\} d\xi \le C\psi_l(t,x) \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\nu} d\tau ||f||^0_{\varphi_l} =$$

$$= C\psi_l(t,x) t^{1-\nu} ||f||^0_{\varphi_l}, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{Д1.10}$$

Нехай x і x' – довільні фіксовані точки з $\mathbb{R}^n$ і $d := d(x;x')$. Оцінимо різницю $\Delta_x^{x'} u$.

Коли $d^{2b} > t$, за допомогою оцінки (Д1.10) отримаємо

$$|\Delta_x^{x'} u_l(t,x)| \le |u_l(t,x)| + |u_l(t,x')| \le C(\psi_l(t,x) + \psi_l(t,x')) t^{1-\nu} ||f||^0_{\varphi_l}$$

$$\le C(\psi_l(t,x) + \psi_l(t,x'))(d(x;x'))^{\gamma} t^{1-\nu-\gamma/(2b)} ||f||^0_{\varphi_l},$$

$$t \in (0,T],\ \{x, x'\} \subset \mathbb{R}^n,\ \gamma \in (0,1]. \tag{Д1.11}$$

Розглянемо випадок $d^{2b} < t$. Маємо

$$|\Delta_x^{x'} u_l(t,x)| \le \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_x^{x'} K_l(t,x;\tau,\xi)|\, |f(\tau,\xi)| d\xi, \quad t \in (0,T],\ \{x, x'\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{Д1.12}$$

Доведемо для різниці $\Delta K_l := \Delta_x^{x'} K_l(t,x;\tau,\xi)$ нерівність

$$|\Delta K_l| \le C d^{\gamma} (t-\tau)^{-\gamma/(2b)-\nu-M} \exp\{-c\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}. \qquad (\text{Д}1.13)$$

Окремо розглянемо такі випадки: 1) $d^{2b} \ge t-\tau$, 2) $d^{2b} < t-\tau$.

У першому випадку ми одержуємо оцінку (Д1.13) безпосередньо з нерівності $|\Delta K_l| \le |K_l(t,x;\tau,\xi)| + |K_l(t,x';\tau,\xi)|$. У випадку 2) зауважимо, що

$$\Delta K_l = (t-\tau)^{-\nu-M} \Delta_x^{x'} \Omega_l(t,x;\tau,\xi).$$

На підставі (B_{l3}) отримуємо оцінку (Д1.13) у випадку 2).

З допомогою (Д1.12) і (Д1.13) маємо

$$|\Delta_x^{x'} u_l(t,x)| \le C(\psi_l(t,x) + \psi_l(t,x')) d^{\gamma} t^{1-\nu-\gamma/(2b)} ||f||_{\varphi_l}^0,$$

$$t \in (0,T],\ \{x,x'\} \subset \mathbb{R}^n, \gamma \in (0, 1-1/(2b)]. \qquad (\text{Д}1.14)$$

З (Д1.11) і (Д1.14) випливає оцінка

$$[u]_{\psi_l}^{\gamma} \le C||f||_{\varphi_l}^0$$

і разом з (Д1.10) вони доводять **a)**.

b) Нехай $\nu \in (1-1/(2b), 1]$. Подамо інтеграл у вигляді

$$u_l(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} K_l(t,x;\tau,\xi) \Delta_{\xi}^{X_1(t-\tau)} f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (\text{Д}1.15)$$

де $X_1(t) := (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_3(t))$.

Отримуємо

$$|u(t,x)| \le$$

$$\le C \int_0^t (t-\tau)^{-\nu-M} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-(c-c_0)\rho_l(t-\tau,x,\xi)\} \exp\{-c_0\rho_l(t-\tau,x,\xi)\} \times$$

$$\times (\varphi_l(\tau,\xi) + \varphi_l(\tau, X_1(t-\tau))) \frac{|\Delta_{\xi}^{X_1(t-\tau)} f(\tau,\xi)|}{\varphi_l(\tau,\xi) + \varphi_l(\tau, X_1(t-\tau))} d\xi \le$$

$$\le C \int_0^t (t-\tau)^{-\nu-M} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-(c-c_0)\rho_l(t-\tau,x,\xi)\} \times$$

$$\times (d(\xi, X_1(t-\tau)))^{\lambda} d\xi \psi_l(t,x) [f]_{\varphi}^{\lambda}.$$

Зараз використаємо нерівність

$$(d(\xi, X_1(t-\tau)))^\lambda \exp\{-\bar{c}\rho_l(t-\tau, x, \xi)\} \leq C(t-\tau)^{\lambda/(2b)} \exp\{-\bar{c}_1\rho_l(t-\tau, x, \xi)\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ 0 < \bar{c}_1 < \bar{c},\ \lambda \in (0, 1]. \qquad (Д1.16)$$

Для $\bar{c} = c - c_0$ з допомогою (Д1.9) ми маємо

$$|u_l(t, x)| \leq C \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\nu-M+\lambda/(2b)} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-\bar{c}_1\rho_l(t-\tau, x, \xi)\} d\xi \psi(t, x)[f]^\lambda_\varphi$$

$$= C\psi(t, x)[f]^\lambda_{\varphi_l} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\nu+\lambda/(2b)} d\tau = C\psi(t, x)[f]^\lambda_{\varphi_l} t^{1-\nu+\lambda/(2b)},\quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}.$$

$$(Д1.17)$$

Отже,

$$||u_l||^0_{\psi_l} \leq C[f]^\lambda_{\varphi_l}. \qquad (Д1.18)$$

Оцінимо різницю $\Delta^{x'}_x u$. Якщо $d^{2b} \geq t$, де $d := d(x; x')$, то за умови (Д1.17) маємо оцінку

$$|\Delta^{x'}_x u_l(t, x)| \leq C(\psi_l(t, x) + \psi_l(t, x'))[f]^\lambda_{\varphi_l} t^{1-\nu+\lambda/(2b)},\quad t \in (0, T],\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Одержимо

$$|\Delta^{x'}_x u_l(t, x)| \leq C(\psi_l(t, x) + \psi_l(t, x'))[f]^\lambda_{\varphi_l} d^\lambda t^{1-\nu} \leq$$

$$\leq C(\psi_l(t, x) + \psi_l(t, x'))d^\lambda [f]^\lambda_{\varphi_l},\ t \in (0, T],\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \qquad (Д1.19)$$

і з $\nu + (\gamma - \lambda)/(2b) < 1$ маємо

$$|\Delta^{x'}_x u_l(t, x)| \leq C(\psi_l(t, x) + \psi_l(t, x'))[f]^\lambda_{\varphi_l} t^{1-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)} t^{\gamma/(2b)} \leq$$

$$\leq C(\psi_l(t, x) + \psi_l(t, x'))[f]^\lambda_{\varphi_l} t^{1-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)} d^\gamma \leq$$

$$\leq C(\psi_l(t, x) + \psi_l(t, x'))d^\gamma [f]^\lambda_{\varphi_l},\ t \in (0, T],\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (Д1.20)$$

Достатньо розглянути випадок, коли $d^{2b} < t$. Подібно до (Д1.15) запишемо

$$\Delta^{x'}_x u_l(t, x) = \int\limits_0^{t-d^{2b}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta^{x'}_x K_l(t, x; \tau, \xi) \Delta^{X_1(t-\tau)}_\xi f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+\int\limits_{t-d^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_l(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_1(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_{t-d^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_l(t,x';\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_1'(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi =: \sum_{j=1}^{3} K_{lj}, \tag{Д1.21}$$

де $X_1'(t) := X_1(t)|_{x=x'}$.

Одержимо

$$|K_{l1}| \le C \int\limits_{0}^{t-d^{2b}} (t-\tau)^{-\nu-M} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (d(x;x'))^\gamma (t-\tau)^{-\gamma/(2b)} \exp\{-c\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\times$$

$$\times(\varphi_l(\tau,\xi)+\varphi_l(\tau,X_1(t-\tau)))\frac{|\Delta_\xi^{X_1(t-\tau)} f(\tau,\xi)|}{\varphi_l(\tau,\xi)+\varphi_l(\tau,X_1(t-\tau))} d\xi \le$$

$$\le C \int\limits_{0}^{t-d^{2b}} (t-\tau)^{-\nu-M-\gamma/(2b)} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_l(t,x) \exp\{-(c-c_0)\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\times$$

$$\times(d(\xi;X_1(t-\tau)))^\lambda d\xi d^\gamma [f]_{\varphi_l}^\lambda.$$

Використаємо нерівність (Д1.16) і рівність (Д1.9). Маємо

$$|K_{l1}| \le C d^\gamma \int\limits_{0}^{t-d^{2b}} (t-\tau)^{-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)} d\tau \psi_l(t,x)[f]_{\varphi_l}^\lambda. \tag{Д1.22}$$

Якщо $\nu+(\gamma-\lambda)/(2b)<1$, тоді з (Д1.22) одержимо

$$|K_{l1}| \le C d^\gamma \psi_l(t,x)[f]_{\varphi_l}^\lambda (t-\tau)^{1-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)}|_{\tau=t-d^{2b}}^{0} =$$

$$= C d^\gamma \psi_l(t,x)[f]_{\varphi_l}^\lambda (t^{1-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)} - d^{2b(1-\nu)-\gamma+\lambda}) \le C d^\gamma \psi_l(t,x)[f]_{\varphi_l}^\lambda.$$

Якщо $\nu+(\gamma-\lambda)/(2b)>1$, тоді з (Д1.22) отримаємо

$$|K_{l1}| \le C d^\gamma \psi(t,x)[f]_{\varphi_l}^\lambda (t-\tau)^{1-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)}|_{\tau=0}^{t-d^{2b}} = C d^\gamma \psi_l(t,x)[f]_{\varphi}^\lambda\times$$

$$\times(d^{2b(1-\nu)-\gamma+\lambda} - t^{1-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)}) \le C d^{2b(1-\nu)+\lambda} \psi_l(t,x)[f]_\varphi^\lambda =$$

$$= C d^\lambda \psi_l(t,x)[f]_{\varphi_l}^\lambda.$$

Оцінимо K_{l2}, маємо

$$|K_{l2}| \le C \int\limits_{t-d^{2b}}^{t} (t-\tau)^{-\nu-M} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (d(\xi;X_1(t-\tau)))^\lambda \times \exp\{-c\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}$$

$$\times(\varphi_l(\tau,\xi)+\varphi_l(\tau,X_1(t-\tau)))d\xi[f]^{\lambda}_{\varphi_l}\le C\int\limits_{t-d^{2b}}^{t}(t-\tau)^{-\nu-M}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}(d(\xi;X_1(t-\tau)))^{\lambda}\exp\{-(c-c_0)\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\psi_l(t,x)d\xi[f]^{\lambda}_{\varphi_l}\le$$

$$\le C\int\limits_{t-d^{2b}}^{t}(t-\tau)^{-\nu-M+\lambda/(2b)}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-\bar c_1\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\psi_l(t,x)d\xi[f]^{\lambda}_{\varphi_l}.$$

При використанні (Д1.9) з $c'=\bar c_1$ будемо мати

$$|K_{l2}|\le C\int\limits_{t-d^{2b}}^{t}(t-\tau)^{-\nu+\lambda/(2b)}d\tau\psi(t,x)[f]^{\lambda}_{\varphi_l}.$$

Оскільки $-\nu+\lambda/(2b)>-1$, то

$$|K_{l2}|\le C(t-\tau)^{1-\nu+\lambda/(2b)}\big|^{t-d^{2b}}_{\tau=t}\psi_l(t,x)[f]^{\lambda}_{\varphi_l}=Cd^{2b(1-\nu)+\lambda}\psi_l(t,x)[f]^{\lambda}_{\varphi_l}\qquad(\text{Д}1.23)$$

і, отже,

$$|K_{l2}|\le Cd^{\lambda}d^{2b(1-\nu)}\psi_l(t,x)[f]^{\lambda}_{\varphi_l}\le Cd^{\lambda}\psi_l(t,x)[f]^{\lambda}_{\varphi},$$

якщо $\nu+(\gamma-\lambda)/(2b)>1$. У випадку, коли $\nu+(\gamma-\lambda)/(2b)<1$, ми отримуємо з (Д1.23) таку нерівність:

$$|K_{l2}|\le Cd^{\gamma}d^{2b(1-\nu)+\lambda-\gamma}\psi_l(t,x)[f]^{\lambda}_{\varphi_l}\le Cd^{\gamma}\psi_l(t,x)[f]^{\lambda}_{\varphi_l}.$$

Аналогічно можна отримати

$$|K_{l3}|\le Cd^{\lambda}\psi_l(t,x')[f]^{\lambda}_{\varphi_l}$$

у випадку, коли $\nu\in(1-1/(2b),1]$, і

$$|K_{l3}|\le Cd^{\gamma}\psi_l(t,x')[f]^{\lambda}_{\varphi_l}$$

у випадку, якщо $\nu\in(1-1/(2b),1]$ і $\nu-(\gamma-\lambda)/(2b)<1$.

З (Д1.18), (Д1.19), (Д1.20) і з оцінок для K_l, $j\in\mathbb{N}_3$, випливають потрібні оцінки при $\nu\in(1-1/(2b),1]$.

c) Нехай $\nu\in(1,1+1/(2b)]$. Подамо інтеграл (2.161) у вигляді

$$u_l(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}(t-\tau)^{-\nu-M}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)\Delta_{\xi}^{X_2(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi_2d\xi_3\Big)d\xi_1,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{Д1.24}$$

де $X_2(t):=(\xi_1,\bar{x}_2(t),\bar{x}_3(t))$, з $\bar{x}_l(t)$, $l\in\{2,3\}$, такі,як вище означені.

Отримуємо

$$|u_l(t,x)|\le$$

$$\le C\int\limits_0^t (t-\tau)^{-\nu-M}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-(c-c_0)\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\exp\{-c_0\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\times$$

$$\times(\varphi_l(\tau,\xi)+\varphi_l(\tau,X_2(t-\tau))\frac{|\Delta_\xi^{X_2(t-\tau)}f(\tau,\xi)|}{\varphi_l(\tau,\xi)+\varphi_l(\tau,X_2(t-\tau))}d\xi\le$$

$$\le C\int\limits_0^t (t-\tau)^{-\nu-M}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-(c-c_0)\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\times$$

$$\times d_1(\xi;X_2(t-\tau);\lambda)d\xi\psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}.$$

Наступні нерівність випливає з означень d, d_1 і X_2.

$$d_1(\xi;X_2(t-\tau);\lambda)=\sum_{j=2}^3|\xi_j-\bar{x}_j(t-\tau)|^{(\lambda+1)/(2b(j-1)+1)}\le$$

$$\le C\left(\sum_{j=2}^3|\xi_j-\bar{x}_j(t-\tau)|^{1/(2b(j-1)+1}\right)^{\lambda+1}=$$

$$=C\left(d(\xi;X_2(t-\tau))\right)^{\lambda+1},\qquad 0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad\lambda\in(0,1].$$

Тут $C>0$ – деяка стала. Враховуючи нерівність (Д1.16), отримуємо

$$d_1(\xi;X_2(t-\tau);\lambda)\exp\{-\bar{c}\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\le$$

$$\le C(d(\xi;X_2(t-\tau)))^{1+\lambda}\exp\{-\bar{c}\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\le$$

$$\le C(t-\tau)^{(1+\lambda)/(2b)}\exp\{-\bar{c}_1\rho_l(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<\bar{c}_1<\bar{c},\ \lambda\in(0,1]. \tag{Д1.25}$$

При $\bar{c}=c-c_0$ на підставі (Д1.9) маємо

$$|u_l(t,x)|\le C\int\limits_0^t(t-\tau)^{-\nu-M+(1+\lambda)/(2b)}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-\bar{c}_1\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}d\xi\times$$

$$\times\psi_l(t,x)[f]^{\lambda}_{1,\varphi_l} = C\psi_l(t,x)[f]^{\lambda}_{1,\varphi_l}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-\nu+(1+\lambda)/(2b)}d\tau =$$

$$= C\psi_l(t,x)[f]^{\lambda}_{1,\varphi_l}t^{1-\nu+(1+\lambda)/(2b)}, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{Д1.26}$$

Отже,

$$||u_l||^0_{\psi_l} \le C[f]^{\lambda}_{1,\varphi_l}. \tag{Д1.27}$$

Оцінимо різницю $\Delta^{x'}_x u_l$. Якщо $d^{2b}\ge t$, де $d := d(x;x')$, тоді за допомогою оцінки (Д1.26) маємо нерівність

$$|\Delta^{x'}_x u_l(t,x)| \le C(\psi_l(t,x)+\psi_l(t,x'))[f]^{\lambda}_{1,\varphi_l}d^{\lambda}t^{1-\nu+1/(2b)} \le$$

$$\le C(\psi_l(t,x)+\psi_l(t,x'))d^{\lambda}[f]^{\lambda}_{1,\varphi_l},\ t\in(0,T],\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{Д1.28}$$

і з $\nu+(\gamma-1-\lambda)/(2b)<1$ одержуємо

$$|\Delta^{x'}_x u_l(t,x)| \le C(\psi_l(t,x)+\psi_l(t,x'))[f]^{\lambda}_{1,\varphi_l}t^{1-\nu-(\gamma-1-\lambda)/(2b)}t^{\gamma/(2b)} \le$$

$$\le C(\psi_l(t,x)+\psi_l(t,x'))[f]^{\lambda}_{1,\varphi_l}t^{1-\nu-(\gamma-1-\lambda)/(2b)}d^{\gamma} \le$$

$$\le C(\psi_l(t,x)+\psi_l(t,x'))d^{\gamma}[f]^{\lambda}_{1,\varphi_l},\ t\in(0,T],\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{Д1.29}$$

Достатньо розглянути випадок, коли $d^{2b}<t$. Подібно до (Д1.24) запишемо

$$\Delta^{x'}_x u_l(t,x) = \int\limits_0^{t-d^{2b}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta^{x'}_x K_l(t,x;\tau,\xi)\Delta_{\xi}^{X_2(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3\Big)d\xi_1 +$$

$$+\int\limits_{t-d^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} K_l(t,x;\tau,\xi)\Delta_{\xi}^{X_2(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3\Big)d\xi_1 -$$

$$-\int\limits_{t-d^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} K_l(t,x';\tau,\xi)\Delta_{\xi}^{X_2'(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3\Big)d\xi_1 =$$

$$=: \sum_{j=1}^{3} K'_{lj}, \tag{Д1.30}$$

де $X_2'(t) := X_2(t)|_{x=x'}$.

Маємо

$$|K'_{l1}| \le C \int\limits_0^{t-d^{2b}} (t-\tau)^{-\nu-M} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (d(x;x'))^\gamma (t-\tau)^{-\gamma/(2b)} \times$$

$$\times \exp\{-c\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}(\varphi_l(\tau,\xi)+\varphi_l(\tau,X_2(t-\tau)))\times$$

$$\times \frac{|\Delta_\xi^{X_2(t-\tau)} f(\tau,\xi)|}{\varphi_l(\tau,\xi)+\varphi_l(\tau,X_2(t-\tau))} d\xi \le C \int\limits_0^{t-d^{2b}} (t-\tau)^{-\nu-M-\gamma/(2b)} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_l(\tau,x)\exp\{-(c-c_0)\rho_l(t-\tau,x,\xi)\} d_1(\xi;X_2(t-\tau);\lambda) d\xi d^\gamma [f]^\lambda_{1,\varphi}.$$

Тепер використаємо нерівність (Д1.25) і рівність (Д1.9). Одержимо

$$|K'_{l1}| \le Cd^\gamma \int\limits_0^{t-d^{2b}} (t-\tau)^{-\nu-M-\gamma/(2b)+(1+\lambda)/(2b)} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\tau,x)\exp\{-\bar{c}_1\rho_l(t-\tau,x,\xi)\} d\xi d^\gamma [f]^\lambda_{1,\varphi_l} =$$

$$= Cd^\gamma \int\limits_0^{t-d^{2b}} (t-\tau)^{-\nu-(\gamma-1-\lambda)/(2b)} d\tau \psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}.$$

Якщо $\nu+(\gamma-1-\lambda)/(2b) > 1$, то

$$|K'_{l1}| \le Cd^\gamma \psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}(t-\tau)^{1-\nu-(\gamma-1-\lambda)/(2b)}|_{\tau=0}^{t-d^{2b}} =$$

$$= Cd^\gamma \psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}(d^{2b(1-\nu)-\gamma+1+\lambda} - t^{1-\nu-(\gamma-1-\lambda)/(2b)}) \le$$

$$\le Cd^{2b(1-\nu)+1+\lambda}\psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l} \le Cd^\lambda \psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi}.$$

Якщо $\nu+(\gamma-1-\lambda)/(2b) < 1$, тоді

$$|K'_{l1}| \le Cd^\gamma \psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}(t-\tau)^{1-\nu-(\gamma-1-\lambda)/(2b)}|^0_{\tau=t-d^{2b}} = Cd^\gamma \psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}\times$$

$$\times(t^{1-\nu-(\gamma-1-\lambda)/(2b)} - d^{2b(1-\nu)-\gamma+1+\lambda}) \le Cd^\gamma \psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}.$$

Оцінимо K'_2. З допомогою (Д1.25) одержимо

$$|K'_{l2}| \le C \int\limits_{t-d^{2b}}^{t} (t-\tau)^{-\nu-M} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} d_1(\xi;X_2(t-\tau);\lambda)\exp\{-c\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\times$$

$$\times(\varphi_l(\tau,\xi)+\varphi_l(\tau,X_2(t-\tau)))d\xi[f]^\lambda_{1,\varphi_l}\le C\int\limits_{t-d^{2b}}^{t}(t-\tau)^{-\nu-M}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}d_1(\xi;X_2(t-\tau);\lambda)\exp\{-(c-c_0)\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\psi_l(t,x)d\xi[f]^\lambda_{1,\varphi_l}\le$$

$$\le C\int\limits_{t-d^{2b}}^{t}(t-\tau)^{-\nu-M+(1+\lambda)/(2b)}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-\bar{c}_1\rho_l(t-\tau,x,\xi)\}\psi_l(t,x)d\xi[f]^\lambda_{1,\varphi_l}.$$

Використавши (Д1.9) з $c'=\bar{c}_1$, одержимо

$$|K'_{l2}|\le C\int\limits_{t-d^{2b}}^{t}(t-\tau)^{-\nu+(1+\lambda)/(2b)}d\tau\psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}.$$

Оскільки $\nu-(1+\lambda)/(2b)<1$, то

$$|K'_{l2}|\le C(t-\tau)^{1-\nu+(1+\lambda)/(2b)}|_{\tau=t}^{t-d^{2b}}\psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}=Cd^{2b(1-\nu)+1+\lambda}\psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}. \tag{Д1.31}$$

Оцінка

$$|K'_{l2}|\le Cd^\gamma d^{2b(1-\nu)+1+\lambda-\gamma}\psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}\le Cd^\gamma\psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}$$

випливає з (Д1.31) якщо $\nu+(\gamma-1-\lambda)/(2b)<1$, і має місце оцінка

$$|K'_{l2}|\le Cd^\lambda d^{2b(1-\nu)+1}\psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l}\le Cd^\lambda\psi_l(t,x)[f]^\lambda_{1,\varphi_l},$$

якщо $\nu+(\gamma-1-\lambda)/(2b)>1$.

Аналогічно отримуємо

$$|K'_{L3}|\le Cd^\gamma\psi_l(t,x')[f]^\lambda_{1,\varphi_l}$$

коли $\nu+(\gamma-1-\lambda)/(2b)<1$, і

$$|K'_l3|\le Cd^\lambda\psi_l(t,x')[f]^\lambda_{1,\varphi_l}$$

якщо $\nu+(\gamma-1-\lambda)/(2b)>1$.

З (Д1.27), (Д1.29), (Д1.30) і з оцінок для K'_{lj}, $j\in\mathbb{N}_3$, випливають оцінки (**??**) і (**??**).

d) Твердження у цьому випадку доводиться так само, як у випадку **c)**.

$$u_l(t,x)=\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} (t-\tau)^{-\nu-M}\Omega_l(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_3(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi_3\Big)d\xi_1 d\xi_2,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

де $X_3(t):=(\xi_1,\xi_2,\bar{x}_3(t))$;

$$d_2(\xi;X_3(t-\tau);\lambda)\exp\{-\bar{c}\rho(t-\tau,x,\xi)\}\le$$

$$\le C(d(\xi;X_3(t-\tau)))^{1+2b+\lambda}\exp\{-\bar{c}\rho(t-\tau,x,\xi)\}\le$$

$$\le C(t-\tau)^{(1+2b+\lambda)/(2b)}\exp\{-\bar{c}_1\rho_l(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad 0<\bar{c}_1<\bar{c},\quad \lambda\in(0,1].$$

Ці оцінки отримуються так само, як оцінки (Д1.25).▶

Доведення леми 2.10. *а*) Використовуватимемо позначення

$$I_\nu^{r,\mu}(t_1,t_2,t_3)=\int\limits_{t_1}^{t_2}(B(t_3,\tau))^{-\nu}(\Delta(\tau,0))^r\frac{(\delta(\tau))^\mu}{\alpha(\tau)}d\tau,$$

$$t_1\in[0,T),\quad \{t_2,t_3\}\subset(0,T]. \tag{Д1.32}$$

В доведенні леми $u:=u_4$. За допомогою (2.165), (2.162),(2.101), умови A_{42} та означення норми $\|f\|^{0,0}_{\mu_l',\nu}$ при $\nu>-1$ маємо

$$|u(t,x)|\le C\int\limits_0^t (B(t,\tau))^{-\nu-M_0/(2b)}E^d(t,\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c^{(4)}(t,\tau,x,\xi)=$$

$$=C\int\limits_0^t(B(t,\tau))^{-\nu}E^d(t,\tau)E^{-d}(T,\tau)(\Delta(\tau,0))^r\frac{(\delta(\tau))^{\mu_l'}}{\alpha(\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big((B(t,\tau))^{-M_0/(2b)}E^{(4)}_{c-c_0}(t,\tau,x,\xi)\Big)\Big(E^{(4)}_{c_0}(t,\tau,x,\xi)\Psi(\tau,\xi)\Big)\times$$

$$\times\frac{|f(\tau,\xi)|E^d(T,\tau)d\xi}{\Psi(\tau,\xi)(\delta(\tau))^{\mu_l'}(\Delta(\tau,0))^r}\le CE^{-d}(T,t)\Psi(t,x)\|f\|^{0,0}_{\mu_l',\nu}I_\nu^{r,\mu_l'}(0,t,t). \tag{Д1.33}$$

Для інтеграла (Д1.32) в [136] встановлено оцінку

$$I_\nu^{r,1}(0,t,t)\le(\Delta(t,0))^{r-\nu+1},\ \ r>\nu-1,\ \ t\in(0,T]. \tag{Д1.34}$$

У випадку $\mu > 1$, на підставі монотонності функції δ, маємо

$$I_\nu^{r,\mu}(0,t,t) \le (\delta(t))^{\mu-1} I_\nu^{r,1}(0,t,t) \le$$

$$\le (\delta(t))^{\mu-1}(\Delta(t,0))^{r-\nu+1}, \ \ r > \nu - 1, \ \ t \in (0,T]. \tag{Д1.35}$$

Якщо $\mu = 0$, то за допомогою умови A_{45} одержуємо

$$I_\nu^{r,0}(0,t,t) = \int\limits_0^t (\Delta(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)}(B(t,\tau))^{-\nu}(\Delta(t,\tau))^{1-\gamma_0/(2b)}(\Delta(\tau,0))^r \frac{(d\tau}{\alpha(\tau)} \le$$

$$\le (\Delta(t,0))^r \int\limits_0^t (\Delta(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)}(\Delta(t,\tau))^{1-\nu-\gamma_0/(2b)} \frac{(d\tau}{\alpha(\tau)} \le$$

$$\le (\Delta(t,0))^{1-\nu-\gamma_0/(2b)+r}, \ \ r \ge 0, \ \ t \in (0,T]. \tag{Д1.36}$$

Якщо $r \le \nu - 1$, то маємо

$$|u(t,x)| \le CE^{-d}(T,t)\Psi(t,x)\Bigg((\Delta(t,0))^{r-\nu+1}(\Delta(T,0))^{-r+\nu-\gamma_0/(2b)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{t_1} W_0[f;\tau](\Delta(\tau,0))^{-\nu-\gamma_0/(2b)}E^d(T,\tau)(\delta(\tau))^{\mu_l}(\delta(\tau))^{-\mu_l}\frac{(d\tau}{\alpha(\tau)} +$$

$$+(\Delta(t_1,0))^r \int\limits_{t_1}^t (B(t,\tau))^{-\nu}\frac{((\delta(\tau))^{\mu_l'}}{\alpha(\tau)} d\tau \|f\|_{\mu_l',r}^{0,0}\Bigg) \le$$

$$\le CE^{-d}(T,t)\Psi(t,x)(\delta(t))^{\mu_l}(\Delta(t,0))^{r-\nu_1+1}(F_{\mu l} + \|f\|_{\mu_l',r}^{0,0}), \tag{Д1.37}$$

де $t_1 \in (0,t)$ таке, що $B(t,t_1) = \Delta(t_1,0)$.

З (Д1.33)–(Д1.37) випливає оцінка

$$\|u\|_{\mu_l,r-\nu_1+1}^{0,0} \le C(\|f\|_{\mu_l',r}^{0,0} + \chi_{rl}' F_{\mu l}), \tag{Д1.38}$$

де $\chi_{rl}' := \eta(\nu - 1 - r)$.

Нехай $(t,x),(t',x')$— довільно фіксовані точки шару $\Pi_{(0,T]}$, причому $t \le t'$, і нехай $p := p(t,x;t',x')$. Оцінимо різницю $\Delta_{t,x}^{t',x'}u$. Спочатку розглянемо випадок $l = 1$. Коли $p^{2b} > \Delta(t,0)$, то за допомогою оцінки (Д1.38) одержуємо

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'}u| \le |u(t,x)| + |u(t',x')| \le C(\|f\|_{\mu_l',r}^{0,0} + \chi_{r1}' F_{\mu 1}) \times$$

$$\times \big((\Delta(t,0))^{r-\nu_1+1}E^{-d}(T,t)\Psi(t,x) + (\Delta(t',0))^{r-\nu_1+1}E^{-d}(T,t')\Psi(t',x')\big) \le$$

$$\leq C(\|f\|^{0,0}_{\mu'_l,r} + \chi'_{r1}F_{\mu 1})p^{\gamma}(\Delta(\bar{t},0))^{r-\nu_1+1-\gamma/(2b)}E^{-d}(T,\tilde{t})\times$$

$$\times\left(\Psi(t,x)+\Psi(t',x')\right), \tag{Д1.39}$$

де $\bar{t} := t + (t'-t)\eta(r-\nu_1+1-\gamma/(2b))$ і $\tilde{t} := t + (t'-t)\eta(d)$. У випадку $p^{2b} < \Delta(t,0)$ маємо

$$|\Delta^{t',x'}_{t,x}u| \leq \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Delta^{t',x'}_{t,x}K_4(t,x;\tau,\xi)||f(\tau,\xi)|d\xi +$$

$$\int\limits_0^{t'}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|K_4(t',x';\tau,\xi)||f(\tau,\xi)|d\xi := J_1 + J_2. \tag{Д1.40}$$

Доданок J_2 оцінюється аналогічно до (Д1.33). маємо

$$J_2 \leq C\int\limits_t^{t'}(B(t,\tau))^{-\nu-M_0/(2b)}E^d(t',\tau)E^{-d}(T,\tau)(\Delta(\tau,0))^r\frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E^{(4)}_{c-c_0}(t,\tau,x,\xi)\left(E^{(4)}_{c_0}(t',\tau,x',\xi)\Psi(\tau,\xi)\right)\frac{|f(\tau,\xi)|E^d(T,\tau)d\xi}{\Psi(\tau,\xi)(\delta(\tau))^{\mu'_l}(\Delta(\tau,0))^r}$$

$$\leq CE^{-d}(T,t')\Psi(t',x')\|f\|^{0,0}_{\mu'_l,\nu}I^{r,l}_{\nu}(0,t',t'). \tag{Д1.41}$$

Для інтеграла (Д1.32) в [136] встановлено нерівність

$$I^{r,1}_{\nu}(0,t',t') \leq p^{\gamma}(\Delta(t,0))^{r-\nu+1-\gamma/(2b)}. \tag{Д1.42}$$

З (Д1.41) і (Д1.42) випливає оцінка

$$J_2 \leq C\|f\|^{0,0}_{\mu'_l,\nu}p^{\gamma}(\Delta(t,0))^{r-\nu+1-\gamma/(2b)}E^{-d}(T,t')\Psi(t',x'). \tag{Д1.43}$$

Щоб оцінити J_1, для різниці $\Delta K_4 := \Delta^{t',x'}_{t,x}K_4(t,x;\tau,\xi)$ доводимо нерівність

$$|\Delta K_4| \leq Cp^{\gamma}(B(t,\tau))^{-\gamma/(2b)}\Big((B(t,\tau))^{-\nu-M_0/(2b)}E^{(4)}_{c_1}(t,\tau,x,\xi)+$$

$$+(B(t',\tau))^{-\nu-M_0/(2b)}E^{(4)}_{c_1}(t',\tau,x',\xi)\Big)E^d(\tilde{t},\tau), \tag{Д1.44}$$

де $c_0 < c_1 < c$, $\tilde{t}$ — таке, як раніше.

За допомогою (Д1.44) при $r > \nu + \gamma/(2b) - 1$ одержуємо

$$J_1 \leq C\|f\|^{0,0}_{\mu'_l,\nu}p^{\gamma}E^{-d}(T,\tilde{t}\,(\Psi(t,x)+\Psi(t',x'))\,I^{r,l}_{\nu+\gamma/(2b)}(0,t,t) \leq$$

$$\leq C\|f\|^{0,0}_{\mu'_l,\nu}p^{\gamma}E^{-d}(T,\tilde{t}(\Delta(t,0))^{r-\nu_1-\gamma/(2b)+1}\left(\Psi(t,x)+\Psi(t',x')\right). \tag{Д1.45}$$

Якщо $r \le \nu + \gamma/(2b) - 1$, то аналогічно маємо

$$J_1 \le Cp^\gamma E^{-d}(T, \tilde{t}\,(\Psi(t,x) + \Psi(t',x')) \times$$

$$\times\big((\Delta(t,0))^{r-\nu-\gamma/(2b)-1}(\Delta(T,0))^{-r+\nu_1+\gamma/(2b)+1}\times$$

$$\times\int\limits_0^{t_1} W_0[f;\tau](\Delta(\tau,0))^{-\nu-\gamma/(2b)}E^d(T,\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}+$$

$$+\|f\|^{0,0}_{\mu_l',\nu}\int\limits_{t_1}^{t}(B(t,\tau))^{-\nu-\gamma/(2b)}\frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau(\Delta(t_1,0))^r\big) \le$$

$$\le C\left(F_{\mu 1} + \|f\|^{0,0}_{\mu_l',\nu}\right)p^\gamma E^d(T, \tilde{t}\,(\Psi(t,x) + \Psi(t',x'))\,(\Delta(\bar{t},0))^{r-\nu_1-\gamma/(2b)+1}.$$

З (Д1.39) – (Д1.43) і (Д1.45) випливає оцінка

$$[u]^{\gamma,\gamma/(2b)}_{\mu_1,r-\nu_1+1} \le C\left(\|f\|^{0,0}_{\mu_l',r} + \chi_{r1}F_{\mu 1}\right). \qquad (Д1.46)$$

Нехай $l = 0$ і $p^{2b} > \Delta(t,0)$. Тоді за допомогою (Д1.38) одержуємо

$$|\Delta^{t',x'}_{t,x}u| \le C\left(\|f\|^{0,0}_{\mu_0',r} + \chi'_{r0}F_{\mu 0}\right)\Big((\Delta(t,0))^{r-\nu_0+1}E^{-d}(T,t)\Psi(t,x)+$$

$$+\Delta(t',0))^{r-\nu_0+1}E^{-d}(T,t')\Psi(t',x')\Big) leq C\left(\|f\|^{0,0}_{\mu_0',r} + \chi'_{r0}F_{\mu 0}\right)\times$$

$$\times(\Delta(\bar{t},0))^{r-\nu_0+1-(\gamma-\gamma_0)/(2b)}E^{-d}(T,\tilde{t})\,(\Psi(t,x) + \Psi(t',x')). \qquad (Д1.47)$$

Якщо $1 - \nu - (\gamma + \gamma_0)/(2b) > 0$, то

$$|\Delta^{t',x'}_{t,x}u| \le C\left(\|f\|^{0,0}_{\mu_0',r} + \chi'_{r0}F_{\mu 0}\right)p^\gamma(\Delta(\bar{t},0))^{r-\nu_0+1-\gamma/(2b)}\times$$

$$\times E^{-d}(T,\tilde{t})\,(\Psi(t,x) + \Psi(t',x')).$$

У випадку $p^{2b} < \Delta(t,0)$ використовуємо зображення (Д1.40). Подібно до (Д1.41) для J_2 одержуємо нерівність

$$J_2 \le E^{-d}(T,t')\Psi(t',x')\|f\|^{0,0}_{\mu_0',r}I^{r,0}_\nu(t,t',t'), \qquad (Д1.48)$$

а для $I^{r,0}_\nu(t,t',t')$—нерівність

$$I^{r,0}_\nu(t,t',t') \le Cp^{\zeta_0}(\Delta(t,0))^{r-\nu_0+1-\zeta_0/(2b)}, \qquad (Д1.49)$$

З (Д1.48) і (Д1.49) випливає оцінка

$$J_2 \le C\|f\|^{0,0}_{\mu_0',r}p^{\zeta_0}(\Delta(t,0))^{r-\nu_0+1-\zeta_0/(2b)}E^{-d}(T,t')\Psi(t',x'). \qquad (Д1.50)$$

Щоб оцінити J_1, використовуємо (2.179), (Д1.32), (Д1.36) і (Д1.44)

$$J_1 \leq C\left(F_{\mu 0} + \|f\|^{0,0}_{\mu_0',r}\right) p^{\zeta_0} E^d(T,\tilde{t})(\Delta(\bar{t},0))^{r-\nu_0+1-\zeta_0/(2b)} \times$$

$$\times \left(\Psi(t,x) + \Psi(t',x')\right). \qquad \text{(Д1.51)}$$

З (Д1.40), (Д1.44), (Д1.47), (Д1.48), (Д1.50) і (Д1.51) випливає оцінка

$$[u]^{\zeta_0,\zeta_0/(2b)}_{\mu_0,r-\nu_0-1} \leq C\left(\|f\|^{0,0}_{\mu_0',r} + \chi_{r0}F_{\mu 0}\right). \qquad \text{(Д1.52)}$$

Розглянемо випадок $l = 2$. Нехай $p_0 := p_0(x;x)$, $\{\} \subset \mathbb{R}^n$. Оцінимо різницю $\Delta^{t',x'}_{t,x} u$. Коли $p_0^{2b} > \Delta(t,0)$, то за допомогою (Д1.36) одержуємо

$$|\Delta^{t',x'}_{t,x} u| \leq |u(t,x)| + |u(t',x')| \leq C\left(\|f\|^{0,0}_{\mu_2',r} + \chi'_{r2}F_{\mu 2}\right) E^{-d}(T,t) \times$$

$$\times (\delta(t))^{\mu_2}(\Delta(t,0))^{r-\nu_2+1}\left(\Psi(t,x) + \Psi(t',x')\right) \leq$$

$$\leq C\left(\|f\|^{0,0}_{\mu_2',r} + \chi'_{r2}F_{\mu 2}\right) E^{-d}(T,t)(\delta(t))^{\mu_2}(\Delta(t,0))^{r-\nu_2+1-\gamma/(2b)} p_0^{\gamma} \times$$

$$\times \left(\Psi(t,x) + \Psi(t',x')\right). \qquad \text{(Д1.53)}$$

Якщо $p_0^{2b} < \Delta(t,0)$, то

$$|\Delta^{x'}_x u| \leq \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta^{x'}_x K_4(t,x;\tau,\xi)||f(\tau,\xi)| d\xi \leq$$

$$\leq C\|f\|^{0,0}_{\mu_2',r} p_0^{\gamma} E^{-d}(T,\tilde{t})(\delta(t))^{\mu_2}(\Delta(t,0))^{r-\nu_2+1-\gamma/(2b)}\left(\Psi(t,x) + \Psi(t',x')\right) \quad \text{(Д1.54)}$$

для $r > \nu_2 + \gamma/(2b) - 1$ і

$$|\Delta^{x'}_x u| \leq \left(F_{\mu 2} + \|f\|^{0,0}_{\mu_2',r}\right)(\delta(t))^{\mu_2} E^{-d}(T,\tilde{t}) \times$$

$$\times (\Delta(t,0))^{r-\nu_2+1-\gamma/(2b)}\left(\Psi(t,x) + \Psi(t',x')\right) \qquad \text{(Д1.55)}$$

для $r \leq \nu_2 + \gamma/(2b) - 1$.

З (Д1.52)–(Д1.55) випливає оцінка

$$[u]^{\zeta,\zeta/(2b)}_{\mu_2,r-\nu_2+1} \leq C\left(\|f\|^{0,0}_{\mu_2',r} + \chi_{r2}F_{\mu 2}\right), \qquad \text{(Д1.56)}$$

а з (Д1.37), (Д1.46), (Д1.52) і (Д1.55) — оцінка (2.177).

б) На підставі умови A_{45} інтеграл (2.162) запишемо у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_0^{t_1} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_4(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi + \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_4(t,x;\tau,\xi) \Delta^x_{\xi} f(\tau,\xi) d\xi,$$

де число t_1 таке ж, як і раніше. Аналогічно одержуємо оцінку

$$\|u\|^{0,0}_{\mu_l, r-\nu_l+1} \leq C\left(\|f\|^{\lambda,0}_{\mu_l,r} + \chi'_{rl} F_{\mu l}\right). \tag{Д1.57}$$

Оцінимо різницю $\Delta^{t',x'}_{t,x} u$. Досить розглянути випадок, коли $p^{2b} < \Delta(t,0)$. Якщо ж $p^{2b} \geq \Delta(t,0)$, то на підставі (Д1.57) маємо

$$|\Delta^{t',x'}_{t,x} u| \leq C\left(\|f\|^{\lambda,0}_{\mu_l,r} + \chi'_{rl} F_{\mu l}\right) (\Delta(t,0))^{r-\nu_l+1-\zeta_l/(2b)} \times$$

$$\times E^{-d}(T,\tilde{t})\, (\Psi(t,x) + \Psi(t',x')). \tag{Д1.58}$$

Нехай точки t_1 і t_2 такі, що $B(t,t_1) = \Delta(t_1,0)$ і $B(t,t_2) = p^{2b}$. Якщо $t_1 < t_2$, то на підставі умови A_{41} запишемо

$$|\Delta^{t',x'}_{t,x} u| = \int\limits_0^{t_1} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta^{t',x'}_{t,x} K_4(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+! \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta^{t',x'}_{t,x} K_4(t,x;\tau,\xi) \Delta^x_\xi f(\tau,\xi) d\xi + \int\limits_{t_2}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_4(t,x;\tau,\xi) \Delta^x_\xi f(\tau,\xi) d\xi -$$

$$- \int\limits_{t_2}^{t'} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_4(t',x';\tau,\xi) \Delta^{x'}_\xi f(\tau,\xi) d\xi =: \sum_{j=1}^{4} K_j. \tag{Д1.59}$$

Використовуючи (2.162), (Д1.32), (2.101), (Д1.34), (Д1.36) і (Д1.44), одержуємо

$$|K_1| \leq C\left(\|f\|^{0,0}_{\mu'_l,r} + \chi_{rl} F_{\mu l}\right) p^{\zeta_l} E^{-d}(T,\tilde{t}) (\Delta(\bar{t},0))^{r-\nu_l+1-\zeta_l/(2b)} (\Psi(t,x) + \Psi(t',x')).$$

Оцінимо K_2. За допомогою (2.162), (Д1.32), (2.101),(Д1.44) і (Д1.45), одержуємо

$$|K_2| \leq C[f]^{\lambda,0}_{\mu'_l,r} p^\gamma E^{-d}(T,\tilde{t})\, (\Psi(t,x) + \Psi(t',x')) \left(I^{r-\lambda/(2b),\mu'_l}_{\nu+(\gamma-\lambda)/(2b)}(t_1,t_2,t) + \right.$$

$$\left. + p^\lambda I^{r-\lambda/(2b),\mu'_l}_{\nu+\gamma/(2b)}(t_1,t_2,t) \right) \leq C[f]^{\lambda,0}_{\mu'_l,r} E^{-d}(T,\tilde{t})\, (\Psi(t,x) + \Psi(t',x'))\, p^\gamma \times$$

$$\times I^{r-\lambda/(2b),\mu'_l}_{\nu+(\gamma-\lambda)/(2b)}(t_1,t_2,t) \leq C[f]^{\lambda,0}_{\mu'_l,r} E^{-d}(T,\tilde{t})\, (\Psi(t,x) + \Psi(t',x'))\, P^l_{\gamma\lambda},$$

$$P^l_{\gamma\lambda} := \begin{cases} p^{\zeta_l} (\Delta(t,0))^{r-\nu_l+1-\zeta_l/(2b)}, & 1-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b) > 0, \\ p^{\lambda_l} (\Delta(t,0))^{r-\nu_l+1-\lambda_l/(2b)}, & 1-\nu-(\gamma-\lambda)/(2b) < 0. \end{cases}$$

Аналогічно одержуємо оцінки

$$|K_3| \le C[f]^{\lambda,0}_{\mu'_l,r} p^\gamma E^{-d}(T,t)\Psi(t,x)P^l_{\gamma\lambda}, \ \ |K_3| \le C[f]^{\lambda,0}_{\mu'_l,r} p^\gamma E^{-d}(T,t')\Psi(t',x')P^l_{\gamma\lambda}.$$

У випадку, коли $t_1 \ge t_2$, замість (Д1.59) використовуємо зображення $\Delta^{t',x'}_{t,x} u = K_1 + K'_3 + K'_4$, де K_1 таке ж, як у (Д1.59), а K'_3 і K'_4 відповідно від K_3 і K_4 тим, що в них t_2 замінено на t_1. Оцінки K'_3 і K'_4 одержуються подібно до оцінок K_3 і K_4.

З (Д1.55) – (Д1.59) та оцінок K_j, $j \in \mathbb{N}_4$, K'_3 і K'_4 випливають оцінки (2.178) і (2.179). ►

Доведення леми 2.13. Для $0 \le \tau < t \le T, \beta \in (\tau,t)$ і $k \in \mathbb{Z}^n_+$ маємо

$$\partial^k_x \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{01}(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^k_x G_{10} t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda := V^{(k)}(t,\beta,\tau;x,\xi;y). \qquad (Д1.60)$$

Для того щоб довести (Д1.60) треба переконатися, що інтеграл $V^{(k)}$ збігається рівномірно щодо $\{x,\xi\} \subset B_R$ для довільно фіксованих $y \in \mathbb{R}^n$, t, β, τ і $R > 0$. Маємо

$$|V^{(k)}(t,\beta,\tau;x,\xi;y)| = |\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^k_x G_{01}(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda| \le$$

$$\le \int\limits_{B_{2R}} |\partial^k_x G_{01}(t,x;\beta,\lambda;y)||f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)|d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} |\partial^k_x G(t,x;\beta,\lambda;y)| \times |f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)|d\lambda \le C(t-\beta)^{-M-M_{k0}} \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+\gamma} \Bigg(\int\limits_{B_{2R}} E^{(1)}_c(t-\beta,x,\lambda)d\lambda +$$

$$+ \exp\{-c((\beta-\tau)^{-1} + (\beta-\tau)^{-3})R^2\} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} E^{(1)}_c(t-\beta,x,\lambda)d\lambda \Bigg) \le$$

$$\leq C(t-\beta)^{-M-M_{k0}}(\beta-\tau)^{-M-1+\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c*(1)(t-\beta,x,\lambda)d\lambda\times$$

$$\times\left(1+\exp\{-c((\beta-\tau)^{-1}+(\beta-\tau)^{-3})R^2\right)\leq C(t-\beta)^{-M_{k0}}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+\gamma}\left(1+\exp\{-c((\beta-\tau)^{-1}+(\beta-\tau)^{-3})R^2\}\right).$$

Доведена оцінка гарантує рівномірну збіжність інтеграла (Д1.60). Отже, отримуємо оцінку

$$|V^{(k)}(t,\beta,\tau;x,\xi;y)|\leq C(t-\beta)^{-M_{k0}}(\beta-\tau)^{-1+\gamma}E_c^{(l)}(t-\tau,x,\xi). \qquad (Д1.61)$$

Оцінка (Д1.61) дозволяє інтегрувати функцію $V^{(k)}$ за змінною $\beta\in[\tau,t]$ лише у випадку $M_{k0}<1$, тобто якщо $|k_1|<1$, оскільки інтеграл

$$\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-M_{k0}}(\beta-\tau)^{-1+\gamma}d\beta$$

є збіжним для довільних $0\leq\tau<t\leq T$. Щоб покращити оцінку (Д1.60) запишемо таке зображення:

$$V^{(k)}(t,\beta,\tau;x,\xi;y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_{10}(t,x;\beta,\lambda;y)\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda+$$

$$+\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}}G_{01}(t,x;\beta,\lambda;y)d\lambda\right)f(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y). \qquad (Д1.62)$$

Оскільки в оцінки приростів f входить така ж сама оцінна функція, що й входить в оцінку f, то збіжність інтегралів у формулі (Д1.64) доводимо подібно до доведення збіжності інтегралів (Д1.60). Аналогічно до зображення (Д1.62) обгрунтовується зображення в якому використовується не повний приріст функції $\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}f$, а часткові прирости $\Delta_{(\lambda_1,X_2(t-\beta)}^{X(t-\beta)}f$ і $\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t-\beta)}f$. Тобто

$$V^{(k)}(t,\beta,\tau;x,\xi;y)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}\partial_x^k G_{10}(t,x;\beta,\lambda;y)d\lambda_2\right)\times$$

$$\times\Delta_{(\lambda_1,X_2(t-\beta)}^{X(t-\beta)}f(\beta,(\lambda_1,X_2(t-\beta);\tau,\xi;y)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_0(t,x;\beta,\lambda;y)\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t-\beta)}f(\beta,(\lambda_1,X_2(t-\beta);\tau,\xi;y)d\lambda+$$

$$+\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1i}}\partial_x^k G_{10}(t,x;\beta,\lambda;y)d\lambda\right)f(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y). \qquad (Д1.63)$$

Оцінимо (2.185). За допомогою оцінок (**??**),(2.181) та нерівності (**??**) маємо

$$|\partial_{x_{1j}}W_{10}(t,x;\tau,\xi;y)|\le$$

$$\le\int\limits_\tau^t d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\partial_{x_{1j}}G_{10}(t,x;\beta,\lambda;y)||f(\beta,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda\le$$

$$\le C\int\limits_\tau^t d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1}E_c^{(l)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\gamma}\times$$

$$\times E_c^{(l)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C\int\limits_\tau^t(t-\beta)^{-m_1}(\beta-\tau)^{-1+\gamma}d\beta\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c^{(l)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1+\gamma}E_{c_0}^{(l)}(t-\tau,x,\xi), \qquad (Д1.64)$$

де c_0— стала з оцінки (**??**).

Позначимо через $W_0^j, j\in\{1,2,3\}$— доданки з правої частини (2.186). Доданок W_0^1 оцінюємо аналогічно до (Д1.64) за допомогою (**??**),(2.181) та (**??**). Отримаємо оцінку

$$|W_{01}^1|\le C(t-\tau)^{-M-1+\gamma}E_{c_0}^{(l)}(t-\tau,x,\xi). \qquad (Д1.65)$$

Щоб оцінити W_{01}^2, спершу оцінимо повний приріст $\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}f$. За допомогою умови (2.182) маємо

$$|\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)|\le|\Delta_{(\lambda_1,X_2(t-\beta)}^{X(t-\beta)}f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)|+$$

$$+|\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t-\beta))}f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)|\le C|x_1-\lambda_1|^\alpha(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times(E_c^{(l)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)+E_c^{(l)}(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi))+$$

$$+C|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha-m_2\alpha_2}\times$$

$$\times(E_c^{(l)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)+E_c^{(l)}(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)). \qquad (\text{Д}1.66)$$

На підставі (??) і (Д1.66) одержуємо

$$|W_{01}^2|\leq C\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c^{(l)}(t-\beta,x,\lambda)|x_1-\lambda_1|^{\alpha_1}(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times E_c^{(l)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\lambda+C\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c^{(l)}(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times|x_1-\lambda_1|^{\alpha}(\beta-\tau)^{-M-1}E_c^{(l)}(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)d\lambda+$$

$$+C\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c^{(l)}(t-\beta,x,\lambda)|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha-m_2\alpha_2}E_c^{(l)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda+C\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}\times$$

$$\times E_c^{(l)}(t-\beta,x,\lambda)|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2\alpha_2}\times$$

$$\times E_c^{(l)}(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta),\xi)d\lambda:=\sum_{k=1}^{4}W_0^{2k}. \qquad (\text{Д}1.67)$$

Оцінимо кожний доданок окремо, використовуючи рівність (??) і нерівності (??) – (??). Маємо

$$W_{10}^{21}\leq C(t_1-\tau)^{-M-1}E_c^{(l)}(t-\tau,X(t-\tau),\xi)\times$$

$$\times\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}^{(l)}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda\times$$

$$\times(t-\beta)^{-M}\leq C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c^{(l)}(t-\tau,x,\xi), \qquad (\text{Д}1.68)$$

$$W_{10}^{22}\leq C(t_1-\tau)^{-M-1}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1}d\beta\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_0}^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c_0}^2(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$

$$\times E_{-c_0/3}^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c_0/3}^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda\times$$

$$\times(t-\beta)^{-M}E^2_{c_0/6}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)=C(t_1-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}E^1_{c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^2_{c_0}(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$

$$\times E^1_{c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^1_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda E^2_{c_0/6}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)\times$$

$$\times(t-\beta)^{-M}\leq C(t_1-\tau)^{-M-1}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1}d\beta\times$$

$$\times(t-\beta)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E^1_{c_0/3}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda\times$$

$$\times E^1_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi)\leq C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E^1_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi), \tag{Д1.69}$$

$$W^{23}_{01}\leq C\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_2\alpha_2}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha}d\beta\times$$

$$\times(t_1-\tau)^{-m_2\alpha_2}\left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E^1_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times E^1_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\leq C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi), \tag{Д1.70}$$

$$W^{24}_{10}\leq C\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_2\alpha_2}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha}d\beta\times$$

$$\times(t_1-\tau)^{-M-m_2\alpha_2}(t-\beta)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_0}(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times E^1_{-c_0/3}(t-\beta,x_1-\lambda_1)E^1_{c_0/3}(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda\times$$

$$\times E^2_{c_0/6}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)\leq C(t-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times(t-\tau)^{m_1\alpha}E^{(l)}_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi). \tag{Д1.71}$$

З оцінок (Д1.67) – (Д1.71) випливає потрібна оцінка для W^2_{01}. Оцінка для W^3_{10} встановлюється аналогічно. Наслідком оцінок для W^1_0, W^2_0, W^3_0 є оцінка (2.186).

Доведення тверджень 2 і 3 леми 2.13 проводиться аналогічно до доведення відповідних тверджень для рівномірно параболічних рівнянь [14]. При цьому, для отримання оцінок (2.189) використовуємо обмеженість коефіцієнтів рівняння, оцінки (2.188) та тотожність

$$SG_{10}(t,x;\tau,\xi;y) = A(t,y,\partial_{x_1})G_{10}(t,x;\tau,\xi;y),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \ \ \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \blacktriangleright$$

Д2. Доведення тверджень з розділу 3

Доведення леми 3.1. Оцінки (3.1), (3.3) та рівності (3.10)–(3.12) випливають з означення (1.55) і відповідних оцінок ФРЗК Z_{10} з теореми 2.1. Оцінки (3.2) у випадку $|x_s - z_s|^{1/m_s} > (t-\tau)/4, s \in \mathbb{N}_3$, випливають безпосередньо з оцінок (3.1). Дійсно,

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \le |\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| + |\partial_x^k G_{11}(t,z^{(s)};\tau,\xi;y')| \le$$

$$\le C((t-\tau)^{-M-M_k}|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}|x_s - z_s|^{-\gamma_s^0}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+$$

$$+(t-\tau)^{-M-M_k}|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}|x_s - z_s|^{-\gamma_s^0}E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi) \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma_s^0}(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) + E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)).$$

У випадку $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le (t-\tau)/4, s \in \mathbb{N}_3$, використовуємо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{j=1}^{n_s}\int_{x_{sj}}^{z_{sj}} \partial_{\zeta_{sj}}\partial_x^k Z_{10}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y)|_{y_1=\xi_1}d\zeta_{sj}, \qquad \text{(Д2.1)}$$

де

$$\zeta_1^{(j)} := (x_{11},\dots,x_{1(j-1)},\zeta_{1j},z_{1(j+1)},\dots,z_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2n_2},x_{31},\dots,x_{3n_3}), j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$\zeta_2^{(j)} := (x_{11},\dots,x_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2(j-1)},\zeta_{2j},z_{2(j+1)},\dots,z_{2n_2},x_{31},\dots,x_{3n_3}), j \in \mathbb{N}_{n_2},$$

$$\zeta_3^{(j)} := (x_{11},\dots,x_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2n_2}),x_{31},\dots,x_{3(j-1)},\zeta_{3j},z_{3(j+1)},\dots,z_{3n_3}), j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

і за допомогою оцінок (2.41) і (3.1) маємо

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \le \sum_{j=1}^{n_s}\left|\int_{x_{sj}}^{z_{sj}} |\partial_{\zeta_{sj}}\partial_x^k G_{11}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y')|d\zeta_{sj}\right| \le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n_s}\left|\int_{x_{sj}}^{z_{sj}}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s}E_c^{(1)}(t-\tau,\zeta_s^{(j)},\xi)d\zeta_{sj}\right| \le$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s} E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\sum_{j=1}^{n_s}|z_{sj}-x_{sj}| \leq$$

$$\leq C|x_s-z_s|^{\gamma^0_s}(t-\tau)^{-M-M_k-\hat{m}_s\gamma^0_s} E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,x,\xi).$$

Для встановлення оцінок (3.4), (3.6) і (3.8) використовуємо рівності (2.37), (2.40) і (2.139)– (2.141) та оцінки (2.36) (2.38) і (2.39) і (2.138). Отримаємо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^k_x G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| = \left|-\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta^{\xi_1}_{y_1}\partial^k_x Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y)\Big|_{y_1=x_1} d\xi\right| \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-M_k}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x_1-\xi_1|^{\gamma_1} E^{(1)}_{c}(t-\tau,x,\xi)d\xi \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-M_k+\hat{m}_1\gamma_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,x,\xi)d\xi \leq C(t-\tau)^{-M_k+\hat{m}_1\gamma_1};$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial^{k'}_x G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')\Big|_{y_2=\xi_2} d\xi_2 d\xi_3\right| =$$

$$= \left|-\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta^{\xi_2}_{y_2}\partial^{k'}_x Z_{10}(t,x;\tau,\xi;y)\Big|_{y_2=x_2} d\xi\right| \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-M_{k'}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} ((t-\tau)^{\hat{m}_2\gamma_2}+|X_2(t-\tau)-\xi_2|^{\gamma_2})E^{(1)}_{c}(t-\tau,x,\xi)d\xi_2 d\xi_3 \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-M_{k'}+\hat{m}_2\gamma_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,x,\xi)d\xi \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-M_{k'}+\hat{m}_2\gamma_2} E^{2,1}_{c_0}(t-\tau,x_1-\xi_1);$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial^{k_3}_{x_3} G_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| =$$

$$= \left|-\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta^{\xi_3}_{y_3}\partial^{k_3}_{x_3} Z_{10}(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,\xi_2,y_3))|_{y_3=x_3} d\xi\right| \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} ((t-\tau)^{\hat{m}_3\gamma_3}+|X_3(t-\tau)-\xi_3|^{\gamma_3})E^{(1)}_{c}(t-\tau,x,\xi)d\xi_3 \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,x,\xi)d\xi_3 \leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)}\times$$

$$\times E^{2,1}_{c_0}(t-\tau,x_1-\xi_1)E^{2,2}_{c_0}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2).$$

Аналогічно доводимо оцінки (3.5), (3.7) і (3.9). У припущенні, що $|x_s - z_s|^{1/m_s} \leq (t-\tau)/4$, $s \in \mathbb{N}_3$, за допомогою (2.138) і (Д2.1) маємо

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n_s} \int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\Delta_{y_1}^{\xi_1} \partial_{\zeta_s^{(j)}}^k \partial_{\zeta_{sj}} Z_{10}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y)\right)\Big|_{y_1=x_1} d\xi d\zeta_{sj}\right| \leq$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{n_s} \left|\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}} (t-\tau)^{-M_k - \hat{m}_s + \hat{m}_1\gamma_1} d\zeta_{sj}\right| \leq$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{n_s} |z_{sj} - x_{sj}|(t-\tau)^{-M_k - \hat{m}_s + \hat{m}_1\gamma_1} \leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M_k - \hat{m}_s\gamma_s^0 + \hat{m}_1\gamma_1};$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')\Big|_{y_2=\xi_2} d\xi_2 d\xi_3\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n_s} \int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \left(-\Delta_{y_2}^{\xi_2} \partial_{\zeta_s^{(j)}}^{k'} \partial_{\zeta_{sj}} Z_{10}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;(\xi_1,y_2,y_3))\right)\Big|_{y_2=x_2} d\xi_2 d\xi_3 d\zeta_{sj}\right| \leq$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{n_s} \left|\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}} (t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - M_k - \hat{m}_s + \hat{m}_2\gamma_2} d\zeta_{sj}\right| E_{c_0}^1(t-\tau, x_1-\xi_1) \leq$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{n_s} |z_{sj} - x_{sj}|(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - M_k - \hat{m}_s + \hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1) \leq$$

$$\leq C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - M_{k'} - \hat{m}_s\gamma_s^0 + \hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1);$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n_s} \int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \left(-\Delta_{y_3}^{\xi_3} \partial_{\zeta_3^{(j)}}^{k_3} \partial_{\zeta_{sj}} Z_{10}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;(\xi_1,\xi_2,y_3))\right)\Big|_{y_3=x_3} d\xi_3 d\zeta_{sj}\right| \leq$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{n_s} \left|\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}} (t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1 - \hat{m}_2 n_2 - \hat{m}_3(|k_3| - \gamma_3) - \hat{m}_s} d\zeta_{sj}\right| E_{c_0}^{2,1}(t-\tau, x_1-\xi_1) \times$$

$$\times E^{2,2}_{c_0}(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2) \leq C\sum_{j=1}^{n_s}|z_{sj}-x_{sj}|(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)-\hat{m}_s}$$

$$\times E^{2,1}_{c_0}(t-\tau, x_1-\xi_1)E^{2,2}_{c_0}(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2) \leq C|x_s-z_s|^{\gamma^0_s}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\hat{m}_1 n_1-\hat{m}_2 n_2-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)-\hat{m}_s\gamma^0_s}E^{2,1}_{c_0}(t-\tau, x_1-\xi_1)E^{2,2}_{c_0}(t-\tau, X_2(t-\tau)-\xi_2). \blacktriangleright$$

Доведення леми 3.2. Оскільки ядро K_{11} інтегрального рівняння (3.13) задовольняє умови леми 2.5, то на підставі цієї леми маємо

$$Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{j=1}^{\infty} K_{11j}(t,x;\tau,\xi;y'), \qquad (Д2.2)$$

де

$$K_{11j}(t,x;\tau,\xi;y') = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')K_{11(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda, j>1,$$

$$K_{111} := K_{11},\ 0\leq\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}.$$

Повторюючи міркування з леми 2.14, доводимо формулу

$$\partial^{k'}_x K_{11j}(t,x;\tau,\xi;y') = \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{k'}_x K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')K_{11(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\partial^{k'}_\lambda K_{11(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda, j>1, t_1 := (t+\tau)/2,$$

(Д2.3)

та оцінки

$$|\partial^{k'}_x K_{11j}(t,x;\tau,\xi;y')| \leq C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+j\hat{m}_1\gamma_1}E^{(1)}_c(t-\tau,x,\xi), j\in\mathbb{N}. \qquad (Д2.4)$$

З (Д2.2) і оцінок (Д2.4) випливають оцінки (3.25). Аналогічно до того, як доводиться формула (Д2.3), встановлюється формула

$$\partial^{k'}_x Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \partial^{k'}_x K_{11}(t,x;\tau,\xi;y') + \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{k'}_x K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\times$$

$$\times Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda + \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\partial^{k'}_\lambda Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda. \qquad (Д2.5)$$

Оцінки приростів за змінними x_2 і x_3 цих похідних отримуються за допомогою зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')=\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}\partial_{\zeta_{sj}}\partial_x^{k'}Q_{11}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y')d\zeta_{sj}, \tag{Д2.6}$$

аналогічного до (Д2.1). Використовуючи оцінки (3.25) і нерівність (2.41), маємо

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')|\le\sum_{j=1}^{n_s}\left|\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}|\partial_{\zeta_{sj}}\partial_x^{k'}Q_{11}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y')|d\zeta_{sj}\right|\le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n_s}\left|\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-\hat{m}_s+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\tau,\zeta_s^{(j)},\xi)d\zeta_{sj}\right|\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-\hat{m}_s+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\sum_{j=1}^{n_s}|x_{sj}-z_{sj}|\le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-M_{k'}+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Тут розглянуто випадок, коли $|x_s-z_s|^{1/m_s}\le(t-\tau)/4$, $s\in\{2,3\}$. У протилежному випадку оцінки (3.26) безпосередньо випливають з оцінок (3.25).

Перейдемо до встановлення оцінок приросту похідних $\partial_x^{k'}Q_{11}$ за змінною x_1. Досить розглянути випадок, коли $|x_1-z_1|^2\le(t-\tau)/4$. Спершу оцінимо приріст $\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_{11}$. Із рівності (3.14) випливає, що

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')=\Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{z_1}a_0(t,(x_1,y'))\Bigg)\partial_x^{k'}G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')+$$

$$+\Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,(z_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_x^{k'}G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_j(t,(z_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_x^{k'}G_{11}(t,x;\tau,\xi;y')+\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_0(t,(z_1,y')\Bigg)\times$$

$$\times\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}G_{11}(t,x;\tau,\xi;y'),0\le\tau<t\le T,y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3},\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

За допомогою умови (1.11), оцінок (3.1) і (3.2) та нерівності (2.35) отримуємо

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1}\times$$
$$\times\left(|x_1-z_1|^{\gamma_1}+|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_1(\gamma_1^0-\gamma_1)}\right)E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), \tag{Д2.7}$$

де γ_1^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$, а γ_1 – число з умови (1.11). Якщо додатково скористатися нерівністю (3.4) і рівністю (2.37), то отримаємо оцінку

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_{k'}-1}\times$$
$$\times\left(|x_1-z_1|^{\gamma_1}+|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-\tau)^{-\hat{m}_1(\gamma_1^0-\gamma_1)}\right),\ \ \gamma_1^0\in(0,1]. \tag{Д2.8}$$

З нерівності (Д2.7) випливають оцінки

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \le CE_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\begin{cases}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1-\hat{m}_1(\gamma_1^0-\gamma_1)}, & \text{якщо } \gamma_1^0<\gamma_1,\\ |x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1}, & \text{якщо } \gamma_1^0=\gamma_1.\end{cases} \tag{Д2.9}$$

Тепер оцінимо прирости похідних від функції Q_{11} за змінною x_1 . Виходячи з (Д2.5), запишемо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')=\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')+\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\times$$
$$\times Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+\int\limits_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\partial_\lambda^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$
$$+\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\partial_\lambda^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda-$$
$$-\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_{11}(t,z^{(1)};\beta,\lambda;y')\partial_\lambda^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda=:\sum_{j=1}^{5}Q_{11j},$$

де $\eta_1:=t-|x_1-z_1|^2, |x_1-z_1|^2\le(t-\tau)/4$, а число t_1 таке, як вище.

Доданок Q_{111} має потрібну оцінку на підставі оцінки (Д2.8).

За допомогою оцінок (2.48), (3.25) і (Д2.8) отримуємо

$$|Q_{112}| \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-M_{k'}-1} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) \times$$

$$\times (\beta - \tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(\beta - \tau, \lambda, \xi) d\lambda \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \times$$

$$\times I_0^{(1,03)}(x;\xi)(t-t_1)^{-M_{k'}-1} \int\limits_{\tau}^{t} (\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} d\beta \leq$$

$$\leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

Далі для $\eta_s := t - |x_s - z_s|^{1/m_s}, |x_s - z_s|^{1/m_s} \leq (t-\tau)/4, s \in \mathbb{N}_3$, використовуватимемо нерівності

$$J_s(\gamma) := \int\limits_{t_1}^{\eta_s} (t-\beta)^{-1+\gamma} d\beta \leq \begin{cases} C(t-\tau)^{\gamma}, & \text{якщо } \gamma > 0, \\ C|x_s - z_s|^{\gamma/m_s}, & \text{якщо } \gamma < 0, \ s \in \mathbb{N}_3. \end{cases} \tag{Д2.10}$$

Оцінювання інтеграла Q_{113} проводимо за допомогою оцінок (2.48), (3.25) і (Д2.8) для $\gamma_1^0 < \gamma_1$. Маємо

$$|Q_{113}| \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} \int\limits_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1(\gamma_1^0-\gamma_1)} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} \times$$

$$\times (t_1 - \tau)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} J_1(\hat{m}_1(\gamma_1 - \gamma_1^0)) \times$$

$$\times I_0^{(1,03)}(x;\xi) \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\gamma_1-\hat{m}_1\gamma_1^0} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi), \ \gamma_1^0 < \gamma_1.$$

На підставі оцінок (2.48), (3.18) і (3.25) отримуємо

$$|Q_{114}| \leq C \int\limits_{\eta_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\beta, x, \lambda) \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} \int\limits_{\eta_1}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} d\beta I_0^{(1,03)}(x;\xi) \leq C(t-\eta_1)^{\hat{m}_1\gamma_1} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi) =$$

$$= C|x_1 - z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau, x, \xi).$$

Оцінка Q_{115} відрізняється від цієї оцінки лише тим, що в ній x замінено на $z^{(1)}$.

Отже, встановлено оцінки (3.25) для випадку, коли $\gamma_1^0 \in (0, \gamma_1)$. Оцінки (3.28) і (3.29) отримуються інтегруванням відповідно оцінок (3.25) і (3.26).

Для отримання оцінок (3.27) на підставі (3.13) запишемо зображення

$$\Delta_{y_s}^{z_s} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \Delta_{y_s}^{z_s} K_{11}(t,x;\tau,\xi;y') +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_s}^{z_s} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')|_{y_s=z_s} \Delta_{y_s}^{z_s} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda. \tag{Д2.11}$$

Запровадивши позначення

$$\Phi_{11}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s) := \Delta_{y_s}^{z_s} K_{11}(t,x;\tau,\xi;y') +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_s}^{z_s} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y') Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda,$$

отримаємо для функцій $\Delta_{y_s}^{z_s} Q_{11}, s \in \{2,3\}$, такі інтегральні рівняння:

$$\Delta_{y_s}^{z_s} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \Phi_1(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s) +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')|_{y_s=z_s} \Delta_{y_s}^{z_s} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y') d\lambda, \ s \in \{2,3\}, \tag{Д2.12}$$

які є рівняннями такого самого типу, що й (3.13). Оскільки, ядро K_{11} задовольняє умови леми 2.5, то на підставі цієї леми маємо

$$\Delta_{y_s}^{z_s} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y') = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{11j}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s), \tag{Д2.13}$$

де

$$\Phi_{11j}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')|_{y_s=z_s} \Phi_{11(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s) d\lambda,$$
$$j \geq 2, \Phi_{111} := \Phi_{11}, 0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n \ \{y_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \{2,3\}, \tag{Д2.14}$$

причому ряд із (Д2.13) рівномірно збіжний. Диференціюючи обидві частини рівності (Д2.13), отримуємо

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')=\sum_{j=1}^{\infty}\partial_x^{k'}\Phi_{11j}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s), k'\in\mathbb{Z}_+^n, s\in\{2,3\}, \tag{Д2.15}$$

де

$$\partial_x^{k'}\Phi_{111}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s):=\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')+$$
$$+\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}\partial_\lambda^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')d\lambda\right)\partial_\lambda^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')|_{\lambda=X(t-\beta)}d\beta=:\sum_{j=1}^{4}\Phi_{11}^{j}, \tag{Д2.16}$$

$$\partial_x^{k'}\Phi_{11j}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s)=\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')|_{y_s=z_s}\times$$
$$\times\Phi_{11(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')|_{y_s=z_s}\partial_\lambda^{k'}\Phi_{11(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)d\lambda, j\geq 2. \tag{Д2.17}$$

Формули (Д2.16) і (Д2.17) доводяться аналогічно до доведення (Д2.3).

Перейдемо до встановлення оцінок. Щоб оцінити $\partial_x^{k'}\Phi_{11}$ необхідно оцінити доданки $\Phi_{11}^{j}, j\in\mathbb{N}_4$. Для доданка Φ_{11}^{1} справджується оцінка (**??**). За допомогою оцінок (2.48), (3.20) і (3.25) отримуємо

$$|\Phi_{11}^{2}|\leq C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$
$$\times\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-M_{k'}-1}E_c(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\leq$$

$$\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-t_1)^{-M_{k'}-1}\int\limits_{\tau}^{t}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta I_0^{(1,03)}(x;\xi)\leq$$

$$\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Щоб оцінити доданка Φ_{11}^3 і Φ_{11}^4, спочатку на підставі оцінок (3.26) маємо

$$|\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}\partial_{\lambda}^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')|\leq|\Delta_{\Lambda^{01}(t-\beta)}^{X(t-\beta)}\partial_{\lambda}^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')|+$$

$$+|\Delta_{\Lambda^{02}(t-\beta)}^{\Lambda^{01}(t-\beta)}\partial_{\lambda}^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')|+|\Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t-\beta)}\partial_{\lambda}^{k'}Q_{1}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')|\leq$$

$$\leq C\sum_{l=1}^{3}|X_l(t-\beta)-\lambda_l|^{\gamma_l^0}(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_l\gamma_l^0}\times$$

$$\times\sum_{j=l-1}^{l}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi). \qquad (Д2.18)$$

Беручи в оцінках (Д2.18) $\gamma_l^0=\hat{m}_1\gamma_1/\hat{m}_l, l\in\mathbb{N}_3$, та використовуючи оцінки (2.36), (2.43), (2.48),(3.23), (3.25),(Д2.8) і (Д2.10), одержуємо

$$|\Phi_{11}^3|\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}\sum_{l=1}^{3}|X_l(t-\beta)-\lambda_l|^{\hat{m}_1\gamma_1/\hat{m}_l}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1}\sum_{j=l-1}^{l}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0j}(t-\beta),\xi)d\lambda\leq$$

$$\leq C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\sum_{l=1}^{3}(t_1-\tau)^{-M_{k'}-1}\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta\sum_{j=l-1}^{l}I_0^{(1,0j)}(x;\xi)\leq$$

$$\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi);$$

$$|\Phi_{11}^4|\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\leq$$

$$\leq C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t_1-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C(h^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\gamma_1}E_c(t-\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків $\Phi_{11}^j, j\in\mathbb{N}_4$, суми (Д2.16) і того, що $\Phi_{11}=\Phi_{111}$, випливає оцінка

$$|\partial_x^{k'}\Phi_{11}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s)|\le C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi). \tag{Д2.19}$$

Оцінювання інших доданків суми з (Д2.15) здійснюється методом математичної індукції з використанням рівності (Д2.17) та оцінок (2.48), (3.18) і (Д2.19). Маємо

$$|\partial_x^{k'}\Phi_{112}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s)|\le\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\big|_{y_s=z_s}\right|\times$$
$$\times|\Phi_{111}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)|d\lambda+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\big|_{y_s=z_s}\right|\times$$
$$\times|\partial_\lambda^{k'}\Phi_{111}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)|d\lambda\le C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$
$$\times\Bigg(\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}\times$$
$$\times E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\Bigg)\le C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$
$$\times\Bigg((t-t_1)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}\int\limits_{\tau}^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta+(t_1-\tau)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta\Bigg)\times$$
$$\times\left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le$$
$$\le C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+2\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi),$$

$$|\partial_x^{k'}\Phi_{11(j+1)}(t,x;\tau,\xi;y_s,z_s)|\le\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_x^{k'}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\big|_{y_s=z_s}\right|\times$$
$$\times|\Phi_{11j}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)|d\lambda+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\big|_{y_s=z_s}\right|\times$$

$$\times|\partial_\lambda^{k'}\Phi_{11j}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_s,z_s)|d\lambda \le C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times\Big(\int\limits_\tau^{t_1} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1+j\hat{m}_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-M_{k'}-1+j\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\Big)\le C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times\Big((t-t_1)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}\int\limits_\tau^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+j\hat{m}_1\gamma_1}d\beta+(t_1-\tau)^{-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\gamma_1}d\beta\Big)\times$$

$$\times\left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le$$

$$\le C(h^{\hat{m}_s\gamma_s}+|Y_s(h)-z_s|^{\gamma_s})(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+(j+1)\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi),\ j\ge 3.$$

З цих оцінок і випливають оцінки (3.27). Інтегруванням з оцінок (3.25) і (3.26) отримуємо (3.28) і (3.29).

Перейдемо до доведення оцінок (3.30), (3.31). Спочатку, зінтегрувавши рівність (3.14) та врахувавши рівності (3.11) і (3.12), отримаємо такі співвідношення:

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y'))d\xi_2 d\xi_3=0,\qquad k'\in\mathbb{Z}_+^{n_2+n_3}\setminus\{0\},$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3=0,\qquad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}.$$

З (Д2.3) та цих рівностей за індукцією отримуємо

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}K_{11j}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3=0,\qquad k'\in\mathbb{Z}_+^{n}\setminus\{0\}, j\ge 1,$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}K_{11j}(t,x;\tau,\xi;(y_2,y_3))d\xi_3=0,\qquad k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, j\ge 1.$$

Отже,

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3=0,\qquad k'\in\mathbb{Z}_+^{n}\setminus\{0\},$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}.$$

За допомогою цих рівностей запишемо такі зображення:

$$\partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3 =$$

$$= \partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} (-\Delta_{y_2}^{\xi_2} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;y'))\Big|_{y_2=x_2} d\xi_2 d\xi_3, \qquad k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\},$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3 =$$

$$= \partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} (-\Delta_{y_3}^{\xi_3} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3)))\Big|_{y_3=x_3} d\xi_3 = 0, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}.$$

За допомогою цих зображень та оцінок (2.36), (2.38), (2.39) і (3.27) отримуємо

$$\left|\partial_x^{k'} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\right| \leq$$

$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \left((t-\tau)^{\hat{m}_2\gamma_2} + |X_2(t-\tau)-\xi_2|^{\gamma_2}\right)(t-\tau)^{-M-M_{k'}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)d\xi_2 d\xi_3 \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1(n_1-\gamma_1)-M_{k'}-1+\hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1),\ k' \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\},$$

$$\left|\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\right| \leq$$

$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} ((t-\tau)^{\hat{m}_3\gamma_3} + |X_3(t-\tau)-\xi_3|^{\gamma_3})(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)d\xi_3 \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-\hat{m}_1(n_1-\gamma_1)-\hat{m}_2\gamma_2-1-\hat{m}_3(|k_3|-\gamma_3)} E_{c_0}^{2,1}(t-\tau,x_1-\xi_1) E_{c_0}^{2,2}(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2).$$

Тут $k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}$. Оцінки (3.30), (3.31) встановлено і лему 3.2 доведено. ▶

Доведення леми 3.3 Існування похідних від W_{11} доводиться аналогічно як в лемі 2.13. Розглянемо невласні інтеграли

$$V_{1,\beta}^{k,\tilde{k}}(t,x;\tau,\xi;y') := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y') \partial_\lambda^{\tilde{k}} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda,$$

$$0 \leq \tau < \beta < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}, \{k,\tilde{k}\} \subset \mathbb{Z}_+^n.$$

Оцінимо їх за допомогою оцінок (3.1), (3.25) і нерівності (2.48). Маємо

$$|V_{1,\beta}^{k,\tilde{k}}(t,x;\tau,\xi;y')| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^k G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')||\partial_\lambda^{\tilde{k}} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')|d\lambda| \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-M_k} E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-M_{\tilde{k}}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda =$$

$$= C(t-\beta)^{-M_k}(\beta-\tau)^{-M_{\tilde{k}}-1+\hat{m}_1\gamma_1} I_0^{(1,03)}(x;\xi) \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-M_k}(\beta-\tau)^{-M_{\tilde{k}}-1+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi). \qquad (Д2.20)$$

Оцінка (Д2.20) є достатньою для обґрунтування формули (3.32). За допомогою властивості (3.9) доводимо формулу

$$V_{1,\beta}^{k,0}(t,x;\tau,\xi;y') = V_{1,\beta}^{k_1',k'}(t,x;\tau,\xi;y'), \qquad (Д2.21)$$

$$0 \leq \tau < \beta < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}, k_1' := (k_1,0,0), \{k_1',k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n.$$

Оцінимо доданки в правій частині (3.34) за допомогою (Д2.20) і (Д2.21) . Отримаємо

$$|\partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;y')| \leq \left|\int\limits_\tau^{t_1} |V_{1,\beta}^{k,0}(t,x;\tau,\xi;y')|d\beta\right| + \left|\int\limits_{t_1}^{t} |V_{1,\beta}^{k'',k'}(t,x;\tau,\xi;y')|d\beta\right| \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-M_k+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), k' \in \mathbb{Z}_+^n, |k''| \leq 1. \qquad (Д2.22)$$

Перейдемо до доведення (3.33). Для цього оцінимо інтеграли $W_{11j}^{1k}, j \in \mathbb{N}_3$. Маємо

$$|W_{111}^{1k}| \leq \left|\int\limits_\tau^{t_1} |V_\beta^{k_1',0}(t,x;\tau,\xi;y')|d\beta\right| \leq C(t-\tau)^{-M}(t-t_1)^{-M_{k_1'}} \times$$

$$\times \int\limits_\tau^{t_1} (\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1} d\beta E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) \leq C(t-\tau)^{-M-M_{k_1'}+\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Використовуючи оцінки (3.1) і (Д2.18) та нерівності (2.35) і (2.48), оцінюємо доданок W_{112}^{1k}. Маємо

$$|W_{112}^{1k}| \leq C\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1} E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda) \times$$

$$\times\left(\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma_s^0}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{4}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0,j-1}(t-\beta),\xi)\right)d\lambda\leq C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1-\hat{m}_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{3}\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_s\gamma_s^0}d\beta\left(\sum_{j=1}^{4}I_0^{(1,0(j-1))}(x,\xi)\right)\leq C(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Для оцінки доданка W_{113}^{1k} використовуємо (3.5) і (3.25) і (2.43). Здобудемо

$$|W_{113}^{1k}|\leq C(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\int_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-1+\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

З отриманих оцінок доданків випливає оцінка (3.35).

Оцінимо прирости старших похідних за просторовими змінними. На підставі рівності (3.33) запишемо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_{11}(t,x;\tau,\xi;y')=\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{\eta_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda-$$

$$-\int_{\eta_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{z_1}^{k_1}G_{11}(t,z^{(1)};\beta,\lambda;y')\Delta_{\lambda}^{Z^{(1)}(t-\beta)}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_1}\Delta_{x_1}^{z_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')d\lambda\right)Q_{11}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y')d\beta+$$

$$+\int_{\eta_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')d\lambda\right)Q_{11}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y')d\beta-$$

$$-\int\limits_{\eta_1}^{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{z_1}^{k_1}G_{11}(t,z^{(1)};\beta,\lambda;y')d\lambda\right)Q_{11}(\beta,Z^{(1)}(t-\beta);\tau,\xi;y')d\beta =: \sum_{j=1}^{7}W_{11j}^{1}. \tag{Д2.23}$$

Оцінимо доданки в (Д2.23). W_{111}^1 оцінимо за допомогою оцінок (3.1), (3.25) і (2.48). Маємо

$$|W_{111}^1| \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1^0}\times$$

$$\times\left(E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)+E_c^{(1)}(t-\beta,z^{(1)},\lambda)\right)(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-t_1)^{-1-\hat{m}_1\gamma_1^0}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta\left(I_0^{(1,03)}(x;\xi)+I_0^{(1,03)}(z^{(1)};\xi)\right)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-t_1)^{-M-1-\hat{m}_1(\gamma_1^0-\gamma_1)}\left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\right).$$

Для оцінки другого доданка в оцінках (3.2) беремо $\gamma_1^0>\gamma_1$, а в нерівності (Д2.18) покладемо $\gamma_s^0=\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1'$, $s\in\mathbb{Z}_3$, $\gamma_1'<\gamma_1$. Отримуємо

$$|W_{112}^1| \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\int\limits_{t_1}^{\eta_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1^0}\left(E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)+E_c^{(1)}(t-\beta,z^{(1)},\lambda)\right)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}\left(\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma_1'}\right)\left(\sum_{j=1}^{4}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0,j-1}(t-\beta),\xi)\right)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}J(\hat{m}_1(\gamma_1'-\gamma_1^0))(t_1-\tau)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{4}I_0^{(1,0(j-1))}(x,\xi)+\sum_{j=1}^{4}I_0^{(1,0(j-1))}(z^{(1)},\xi)\right)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}|x_1-z_1|^{\gamma_1'-\gamma_1^0}(t-\tau)^{-M-1}\left(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\right)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1'}(t-\tau)^{-M-1}\left(E_{c_0}^{(1)}(t\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t\tau,z^{(1)},\xi)\right).$$

Доданки W_{113}^1, W_{114}^1 оцінюються однаково. Оцінимо, наприклад, перший з них. Для цього скористаємося оцінками (3.1) та нерівністю (Д2.18).

$$|W_{113}^1| \le C\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\hat{m}_s^{-1}m_1\gamma_1'}\Bigg)\Bigg(\sum_{j=1}^{4}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\Lambda^{0,j-1}(t-\beta),\xi)\Bigg)\leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-1}\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\gamma_1'}d\beta\Bigg(\sum_{j=1}^{4}I_0^{(1,0(j-1))}(x,\xi)\Bigg)\leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1'}(t-\tau)^{-M-1}\Bigg(E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\Bigg).$$

Оцінимо W_{115}^1. Для цього в оцінках (3.6) покладемо $\gamma_1^0>\gamma_1$. Із урахуванням оцінок (3.1),(**??**), нерівностей (2.43) і (Д2.10) отримуємо

$$|W_{115}^1|\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\int\limits_{t_1}^{\eta_1}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}J_1(\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0))E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Доданки W_{116}^1 і W_{117}^1 також оцінюються однаково за допомогою відповідних оцінок (3.5) і (3.25). Для першого з цих доданків маємо

$$|W_{116}^1|\leq C\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)\leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1\gamma_1}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків $W_{11j}^1, j\in\mathbb{N}_7$ оцінки (3.35).

Аналогічно до доведення формул (3.34), (3.33) доводиться формула

$$\partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;y')=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\partial_x^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\Delta_\lambda^{X(t-\beta)}\partial_\lambda^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')d\lambda\Big)\partial_\lambda^{k'}Q_{11}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y')d\beta. \qquad (Д2.24)$$

У (Д2.24) $|k_1|=2$, а $k'\in\mathbb{Z}_+^n$. Тобто старші похідні за основною змінною мають ще неперервні й обмежені похідні за змінними групи виродження. Це дозволяє для приростів за змінними x_2 і x_3 записати зображення, подібне до (Д2.1)

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k W_{11}(t,x;\tau,\xi;y')=\sum_{j=1}^{n_s}\int\limits_{x_{sj}}^{z_{sj}}\partial_{\zeta_{sj}}\partial_x^k W_{11}(t,\zeta_s^{(j)};\tau,\xi;y')d\zeta_{sj},\ s\in\{2,3\}, \qquad (Д2.25)$$

де $\zeta_s^{(j)}$, $j\in\mathbb{N}_{n_s}$, $s\in\{1,2\}$– такі як вище. і обґрунтувати оцінки (3.36) у цьому випадку.

Для встановлення оцінок приростів $\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}W_{11}, s\in\{2,3\}$, використовуємо зображення

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}W_{11}(t,x;\tau,\xi;y')=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi')d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')|_{y_s=z_s}\Delta_{y_s}^{z_s}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi')d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_s}^{z_s}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\partial_\lambda^{k'}Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_{11}(t,x;\beta,\lambda;y')\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_\lambda^{k'}Q_{11}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y')d\lambda, s\in\{2,3\}, k'\in\mathbb{Z}_+^n,$$

та оцінки (3.3) і (3.27). Інтегруючи оцінки (3.38) і (3.39) одержуємо відповідно оцінки (3.38) і (3.39). Для доведення (3.40) зінтегруємо за $(\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$ рівність (3.34) попередньо поклавши в ній $y'=(\xi_2,\xi_3)$. Отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'}W_{11}(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_2 d\xi_3=$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k'} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\xi_2,\xi_3)) Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)) d\lambda d\xi_2 d\xi_3 +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\xi_2,\xi_3)) \partial_\lambda^{k'} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)) d\lambda d\xi_2 d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{(\xi_2,\xi_3)}^{(\lambda_2,\lambda_3)} \partial_x^{k'} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\xi_2,\xi_3)) Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)) d\lambda d\xi_2 d\xi_3 +$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^{k'} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3)) \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)) d\xi_2 d\xi_3 \Bigg) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{(\xi_2,\xi_3)}^{(\lambda_2,\lambda_3)} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\xi_2,\xi_3)) \partial_x^{k'} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)) d\lambda d\xi_2 d\xi_3 +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{11}(t,x;\beta,\lambda;(\lambda_2,\lambda_3)) \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Q_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3)) d\xi_2 d\xi_3 \Bigg) d\lambda;$$

Доданки зображення оцінюємо за допомогою оцінок (3.1), (3.3), (3.25) і (3.30). Оцінки (3.40) встановлюють аналогічно.▶

Доведення леми 3.4. Ядро K_{12} інтегрального рівняння (3.63) задовольняє умови леми 2.5, то, на підставі цієї леми, маємо

$$Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{12j}(t,x;\tau,\xi;y_3), \tag{Д2.26}$$

де

$$K_{12j}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) K_{12(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda,\ j > 1,$$

$$K_{121} := K_{12},\ 0 \le \tau < t \le T,\ y_3 \in \mathbb{R}^{n_3},\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Повторюючи міркування з леми 2.14, доводимо для $j > 1$ формули

$$\partial_{x_3}^{k_3} K_{12j}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \partial_{\lambda_3}^{k_3} K_{12(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda, \tag{Д2.27}$$

та для $j \in \mathbb{N}$ оцінки

$$|\partial_{x_3}^{k_3} K_{12j}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+j\hat{m}_1\gamma_1} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi). \qquad (Д2.28)$$

З (Д2.26) і оцінок (Д2.28) випливають оцінки (3.82).

Аналогічно до того, як це робилось для Q_{11}, доводимо, що для похідних від Q_{12} за x_3 справджується формула

$$\partial_{x_3}^{k_3} Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) + \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\times$$

$$\times Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda + \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\times$$

$$\times\partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda,\ k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3},\ t_1 = (t+\tau)/2. \qquad (Д2.29)$$

Перейдемо до оцінок приростів. Оцінки (3.83) досить довести для випадку $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le (t-\tau)/4,\ s \in \mathbb{N}_3$, оскільки для $|x_s - z_s|^{1/m_s} > (t-\tau)/2,\ s \in \in \mathbb{N}_3$ потрібна оцінка безпосередньо випливає з (3.82). Прирости за $x_1,\ x_2$ оцінюються подібно. Спочатку доводимо, що справджуються оцінки (3.83) з $\gamma_s^0 < \gamma_s,\ s \in \mathbb{N}_2$. Для цього, виходячи з (Д2.29), запишемо зображення

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_3}^{k_3} Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) + \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\times$$

$$\times Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda + \int\limits_{t_1}^{\eta_s} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda -$$

$$- \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,z^{(1)};\beta,\lambda;y_3)\partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda =: \sum_{j=1}^{5} Q_{12j}, \qquad (Д2.30)$$

де $\eta_s := t - |x_s - z_s|^{1/\hat{m}_s}, |x_s - z_s|^{1/\hat{m}_s} \le (t-\tau)/2$, а число t_1– таке як вище.

З оцінок (3.71) і (3.74) випливають такі оцінки приростів:

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|-\hat{m}_s(\gamma_s^0-\gamma_s)}|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)\times$$

$$\left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right),\ |k_3|\in\mathbb{Z}_+^{n_3},\ \gamma_s^0\in(0,\gamma_s),s\in\mathbb{N}_2. \tag{Д2.31}$$

Доданок Q_{121} має оцінку (Д2.31).

Для встановлення оцінки доданка Q_{122} використаємо оцінки (Д2.29) і (Д2.31). За допомогою нерівностей (2.48), отримаємо

$$|Q_{122}|\le\left|\int\limits_\tau^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_3}^{k_3}K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)||Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|d\lambda\right|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\times\int\limits_\tau^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|-\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\left(E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)+E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda\right)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_2\gamma_2}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\left(I_0^{(1,03)}(x,\xi)+\right.$$

$$\left.+I_0^{(1,03)}(z^{(s)},\xi)\right)(t-t_1)^{-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\int\limits_\tau^t(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_2\gamma_2}d\beta\le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)+\hat{m}_2\gamma_2}\left(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right).$$

Доданок Q_{123} оцінюємо за допомогою оцінок (Д2.29) і (Д2.31) при $k_3=0$. Маємо

$$|Q_{123}|\le\left|\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Delta_{x_s}^{z_s}K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)||\partial_{\lambda_3}^{k_3}Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|d\lambda\right|\le$$

$$+C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\int\limits_{t_1}^{\eta_s}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\left(E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)+E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda\right)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\left(I_0^{(1,03)}(x,\xi)+I_0^{(1,03)}(z^{(s)},\xi)\right)\times$$

$$\times(t_1-\tau)^{-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_2\gamma_2}\int\limits_\tau^t(t-\beta)^{-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}d\beta\le$$

$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)+\hat{m}_2\gamma_2}\left(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right).$$

Доданки Q_{124} і Q_{125} оцінюються однаково, тому оцінимо перший. За допомогою оцінок (**??**), (3.82) і нерівностей (2.48), маємо

$$|Q_{124}| \leq \left| \int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)||\partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|d\lambda \right| \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta_s}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_2\gamma_2}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \leq C(t_1-\tau)^{-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_2\gamma_2}\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-1+\hat{m}_2\gamma_2}d\beta\times$$

$$\times I_0^{(1,03)}(x,\xi) \leq C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_2\gamma_2}(t-\eta_s)^{\hat{m}_2\gamma_2}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi) =$$

$$= C|x_s-z_s|^{(\hat{m}_s)^{-1}\hat{m}_2\gamma_2}(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_2\gamma_2}E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Отже, встановлено оцінки

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'}Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \leq C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma_s^0)}\times$$

$$\times\left(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\right), k_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}, \gamma_s^0\in(0,\gamma_s),\ s\in\mathbb{N}_2.$$

Залишилось оцінити прирости за змінною x_3. Досить розглянути випадок $|x_3-z_3|^{1/m_3} \leq (t-\tau)/4$. Для оцінки приростів за цією змінною використовуємо зображення

$$\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3}Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\zeta_{3j}}Q_{12}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)d\zeta_{3j},$$

де $\zeta_3^{(j)},\ j\in\mathbb{N}_{n_3}$ – такі як вище.

$$|\Delta_{x_3}^{z_3}\partial_{x_3}^{k_3}Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| = |\sum_{j=1}^{n_3}\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\zeta_{3j}}Q_{12}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)d\zeta_{3j}| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{j=1}^{n_3}|\int\limits_{x_{3j}}^{z_{3j}}|\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\zeta_{3j}}Q_{12}(t,\zeta_3^{(j)};\tau,\xi;y_3)|d\zeta_{3j}|\right| \leq$$

$$\leq C\sum_{j=1}^{n_3}|x_{sj}-z_{sj}|(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3(|k_3|-1)+\hat{m}_2\gamma_2}\Bigg(E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+$$

$$+E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\Bigg) \leq C|x_3-z_3|^{\gamma_3^0}(t-\tau)^{-M-1-\hat{m}_3|k_3|+\hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3\gamma_3^0}\times$$

$$\times\left(E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,x,\xi)+E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,z^{(3)},\xi)\right),\ k_3\in\mathbb{Z}^{n_3}_+,\ \gamma^0_3\in(0,1]; \qquad (Д2.32)$$

Для встановлення оцінок (Д2.32) використали оцінки (3.82) і нерівність (2.41).

Перейдемо до встановлення оцінки повного приросту $\Delta^{X(t-\beta)}_{\lambda}\partial^{k_3}_{\lambda_3}Q_{12}$. Маємо

$$|\Delta^{X(t-\beta)}_{\lambda}\partial^{k_3}_{\lambda_3}Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|\le|\Delta^{X(t-\beta)}_{\Lambda^{01}(t-\beta)}\partial^{k_3}_{\lambda_3}Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|+$$

$$+|\Delta^{\Lambda^{01}(t-\beta)}_{\Lambda^{02}(t-\beta)}\partial^{k_3}_{\lambda_3}Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|+|\Delta^{\Lambda^{02}(t-\beta)}_{\lambda}\partial^{k_3}_{\lambda_3}Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|\le$$

$$\le C\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\gamma^0_s}(\beta-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+\widehat{m}_s}\sum_{j=1}^{4}E^{(1)}_c(\beta-\tau,\Lambda^{0,j-1}(t-\beta),\xi), \qquad (Д2.33)$$

де $\bar{m}_s:=\begin{cases}\hat{m}_s(\gamma_s-\gamma^0_s), & \text{якщо } s\in\mathbb{N}_2,\\ \hat{m}_2\gamma_2-\hat{m}_3\gamma^0_3, & \text{якщо } s=3,\end{cases}\quad k_3\in\mathbb{Z}^{n_3}_+.$

Оцінки (3.83) доведено. Для доведення оцінок (3.84) поступимо як на попередньому етапі. Спочатку оцінимо приріст ядра K_{12}

$$\Delta^{z_3}_{y_3}\partial^{k_3}_{x_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)=\Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta^{z_3}_{y_3}a_{jl}(t,(x_1,x_2,y_3))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta^{z_3}_{y_3}a_j(t,(x_1,x_2,y_3))\partial_{x_{1j}}+\Delta^{z_3}_{y_3}a_0(t,(x_1,x_2,y_3))\Bigg)\times$$

$$\times\partial^{k_3}_{x_3}G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)+\Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta^{z_3}_{y_3}a_{jl}(t,(x_1,\xi_2,y_3))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta^{z_3}_{y_3}a_j(t,(x_1,\xi_1,y_3))\partial_{x_{1j}}+\Delta^{z_3}_{y_3}a_0(t,(x_1,\xi_1,y_3))\Bigg)\partial^{k_3}_{x_3}G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\Bigg(\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta^{\xi_2}_{x_2}a_{jl}(t,(x_1,x_2,y_3))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta^{\xi_2}_{x_2}a_j(t,(x_1,x_2,y_3))\partial_{x_{1j}}+$$

$$+\Delta^{\xi_2}_{x_2}a_0(t,(x_1,x_1,y_3))\Bigg)\Delta^{z_3}_{y_3}\partial^{k_3}_{x_3}G_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3). \qquad (Д2.34)$$

Для доведення (3.84) на підставі (Д2.29) запишемо зображення

$$\Delta^{z_3}_{y_3}Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)=\Delta^{z_3}_{y_3}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_3}^{z_3} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \Delta_{y_3}^{z_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda, \qquad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}. \tag{Д2.35}$$

Позначивши через

$$\Phi_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3,z_3) := \Delta_{y_3}^{z_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_3}^{z_3} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda,$$

отримаємо для функції $\Delta_{y_3}^{z_3} Q_{12}$ таке інтегральне рівняння:

$$\Delta_{y_3}^{z_3} Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \Phi_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3,z_3) +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \Delta_{y_3}^{z_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda, k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}. \tag{Д2.36}$$

Інтегральне рівняння (Д2.36) є такого самого типу, що й (Д2.12). Ядро K_{11} задовольняє умови леми 2.5, то, на підставі цієї леми, маємо

$$\Delta_{y_3}^{z_3} Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{12j}(t,x;\tau,\xi;y_3,z_3), \tag{Д2.37}$$

де

$$\Phi_{12j}(t,x;\tau,\xi;y_3,z_3) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \Phi_{12(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3,z_3) d\lambda,$$

де $j > 1$, $\Phi_{121} := \Phi_{12}$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ $\{y_3,z_3\} \subset \mathbb{R}^{n_3}$, причому ряд в правій частині (Д2.37) є рівномірно збіжним. Диференціюючи обидві частини рівності (Д2.37), отримаємо

$$\Delta_{y_3}^{z_3} \partial_x^{k'} Q_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \sum_{j=1}^{\infty} \partial_x^{k'} \Phi_{12j}(t,x;\tau,\xi;y_3,z_3), k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}, \tag{Д2.38}$$

де

$$\partial_{x_3}^{k_3} \Phi_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3,z_3) := \Delta_{y_3}^{z_3} \partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) +$$

$$+\int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_3}^{z_3} \partial_{x_3}^{k_3} K_2(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_3}^{z_3} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} \partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_3}^{z_3} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) d\lambda \partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|_{\lambda=X(t-\beta)} \right) d\beta =: \sum_{j=1}^{4} \Phi_{12}^{j}, \tag{Д2.39}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \Phi_{12j}(t,x;\tau,\xi;y_3,z_3) = \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \Phi_{12(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3,z_3) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3,z_3) \partial_{\lambda_3}^{k_3} \Phi_{12(j-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3,z_3) d\lambda, j>1, \tag{Д2.40}$$

де $\Phi_{12j}, j \geq 1$ означені вище, а формули (Д2.39),(Д2.40) доводяться аналогічно до (Д2.16),(Д2.17).

Оцінки доданків $\Phi_{12j}, j \geq 1$ проводимо аналогічно до встановлення оцінок $\Phi_{11j}, j \geq 1$. За індукцією для $j \geq 1$ маємо такі оцінки:

$$|\Phi_{12j}(t,x;\tau,\xi;y_3,z_3)| \leq C(|h|^{\hat{m}_3\gamma_3} + |Y_3(h) - z_3|^{\gamma_3}) \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+(j-1)\hat{m}_2\gamma_2} E_{c_0}^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

З цих оцінок випливають оцінки (3.84). Інтегруючи оцінки (3.82) і (3.83) отримуємо (3.85) і (**??**). Доведення решти оцінок аналогічно до доведення відповідних оцінок з леми 3.2.▶

Доведення леми 3.6. Існування похідних від W_{112} доводиться аналогічно. Спершу доведемо формулу (3.33). Розглянемо інтеграли

$$V_{\beta}^{k,k_3}(t,x;\tau,\xi;y_3) := \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) \partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3) d\lambda,$$

$$0 \leq \tau \leq \beta \leq t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}, k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}.$$

Оцінимо їх за допомогою оцінок (3.54), (3.82) і нерівності (2.48). Маємо

$$|V_\beta^{k,k_3}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le |\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)||\partial_{\lambda_3}^{k_3} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|d\lambda| \le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-M_k|}E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)(\beta-\tau)^{-M-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_2\gamma_2}E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$= C(t-\beta)^{-M_k}(\beta-\tau)^{-M_{\tilde{k}}-1+\hat{m}_1\gamma_1}I_0^{03}(x,\xi) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-M_k}(\beta-\tau)^{-\hat{m}_3|k_3|-1+\hat{m}_2\gamma_2}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi). \qquad (Д2.41)$$

Подібно до (Д2.41), врахувавши властивість (3.62), доводимо формулу

$$V_\beta^{k,0}(t,x;\tau,\xi;y_3) = V_\beta^{k''',k_3}(t,x;\tau,\xi;y_3), \qquad (Д2.42)$$

$$0 \le \tau \le \beta \le t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}, k''' \in \mathbb{Z}_+^n, k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}.$$

Оцінимо доданки в правій частині (3.92) за допомогою (Д2.41) і (Д2.42) . Отримаємо

$$|D_x^{1,k}W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3)| \le C(t-\tau)^{-M-M_k+\hat{m}_2\gamma_2}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi), k' \in \mathbb{Z}_+^n, |k'''| < 1. \qquad (Д2.43)$$

Твердження **B** леми доведено. Перейдемо до доведення твердження **A**. Будемо його доводимо окремо для різних $k \in \mathbb{N}_+^n$.

Нехай $|k_1|+2|k_2|=2$. На підставі оцінок (3.57) і оцінок повного приросту густини потенціалу (Д2.33) доведення формули (3.90) є подібним до доведення формули (3.32). Аналогічно встановлюємо і оцінки похідних від об'ємного потенціалу. У випадку $|k_1|=0, |k_2|=1$ похідна від ядра за x_2 має вищу особливість, ніж при диференціюванні за x_1. Тому для похідних за x_2 використовуємо зображення (3.91) . Оцінимо $W_{121}^{1k'''}$. Маємо

$$|W_{121}^{1k'''}| = |\int\limits_\tau^{t_1} V_\beta^{k''',0}(t,x;\tau,\xi;y')d\beta| \le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2(1-\gamma_2)}E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

За допомогою оцінок (3.59), (3.61), (3.83), нерівностей (2.35), (2.49) і (2.50) отримуємо

$$|W_{122}^{1,k'''}| \le \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} D_x^{1,k'''}G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda_2 d\lambda_3 \right| \times$$

$$\times \left| \Delta^{X(t-\beta)}_{\Lambda^{01}(t-\beta)} Q_{12}(\beta, \Lambda^{01}(t-\beta); \tau, \xi; y_3) \right| d\lambda_1 \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2(1-\gamma_2)+m_1\gamma_1} E^{(1)}_{c_0}(t-\tau, x, \xi),$$

бо $1 - \hat{m}_2(1-\gamma_2) + m_1\gamma_1^0 = \hat{m}_2\gamma_2 - \hat{m}_1(1-\gamma_1^0) > 0$ для довільного $\gamma_1^0 \in [0, \gamma_1)$ і $\gamma_2 > 1/3$.

Аналогічно, використовуючи оцінки (3.54) і (3.83) при $\gamma_3^0 = \hat{m}_2(\hat{m}_3)^{-1}\gamma_2^0$ та нерівності (2.35) і (2.48), оцінюємо доданок $W^{1,k'''}_{123}$. Маємо

$$|W^{1,k'''}_{123}| \le \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |D^{1,k'''}_x G_{12}(t, x; \beta, \lambda; y_3)| \times$$
$$\times \Big(|\Delta^{\Lambda^{01}(t-\beta)}_{\Lambda^{02}(t-\beta)} Q_{12}(\beta, \Lambda^{02}(t-\beta); \tau, \xi; y_3)| + |\Delta^{\Lambda^{02}(t-\beta)}_{\lambda} Q_{12}(\beta, \lambda; \tau, \xi; y_3)| \Big) d\lambda \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-M-\hat{m}_2(1-\gamma_2)} E^{(1)}_{c_0}(t-\tau, x, \xi).$$

Зауважимо, що саме при встановленні оцінки доданка $W^{1,k'''}_{123}$ виникає обмеження знизу на показник Гельдера γ_2^0 приросту за змінною x_2 густини потенціалу за Q_2. Оскільки для збіжності інтеграла потрібно вибирати число $\gamma_2^0 \in (0, \gamma_2)$ таким, щоб виконувалась умова $-\hat{m}_2(1-\gamma_2^0) > -1$, тобто $\gamma_2^0 \in$ $\in (1/3, \gamma_2)$. Для оцінки доданка $W^{1,k'''}_{124}$ використовуємо (3.57), (3.82) і (2.43). Здобудемо

$$|W^{1,k''}_{124}| \le \int\limits_{t_1}^{t} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^{1,k'''}_x G_{12}(t, x; \beta, \lambda; y_3) d\lambda \right| |Q_{12}(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi; y_3)| d\beta \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-M+\gamma} E^{(1)}_{c}(t-\tau, x, \xi), \ \ \gamma := 1 - \hat{m}_2(1-\gamma_2) > 0.$$

З отриманих оцінок доданків випливає оцінка (3.93) для $|k_1| = 0, |k_2| = 1$. Оцінки (3.93) встановлено.

Перейдемо до оцінок приростів старших похідних ($|k_1| = 2$) за основними просторовими змінними. Оцінки приростів проводимо за умови $\eta_1 = |x_1 -$ $- z_1|^2 < (t-\tau)/4$. На підставі рівності (3.90) запишемо зображення

$$\Delta^{z_1}_{x_1} \partial^{k_1}_{x_1} W_{12}(t, x; \tau, \xi; y_3) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta^{z_1}_{x_1} \partial^{k_1}_{x_1} G_{12}(t, x; \beta, \lambda; y_3) Q_{12}(\beta, \lambda; \tau, \xi; y_3) d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1} G_1 2(t,x;\beta,\lambda;y_3)\Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\eta_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{z_1}^{k_1} G_{12}(t,z^{(1)};\beta,\lambda;y_3)\Delta_\lambda^{Z^{(1)}(t-\beta)} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_1} \left(\Delta_{x_1}^{z_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda\right) Q_{12}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\beta+$$

$$+\int\limits_{\eta_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda\right) Q_{12}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\beta-$$

$$-\int\limits_{\eta_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{z_1}^{k_1} G_{12}(t,z^{(1)};\beta,\lambda;y_3)d\lambda\right) Q_{12}(\beta,Z^{(1)}(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\beta =: \sum_{j=1}^{7} W_{12j}^1. \tag{Д2.44}$$

Оцінимо доданки в (Д2.44). W_{121}^1 оцінимо за допомогою (3.54), (3.82) і (2.48). Маємо

$$|W_{121}^1| \le \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y')||Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|d\lambda \le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1^0}\left(E_c^{(1)}(t-\beta,x,\lambda)+E_c^{(1)}(t-\beta,z^{(1)},\lambda)\right)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} E_c^{(1)}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-t_1)^{-1-m_1\gamma_1^0}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t_1} (\beta-\tau)^{-1+m_2\gamma_2} d\beta\left(I_0^{03}(x,\xi)+I_0^{03}(z^{(1)},\xi)\right) \le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-t_1)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma_1^0+\hat{m}_2\gamma_2}\left(E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi)+E_c^{(1)}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\right).$$

Оцінимо доданки в (Д2.44). W_{21}^1 оцінимо за допомогою (3.54), (3.82) і (2.48).

Маємо

$$|W^1_{121}| \le \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_1}_{x_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y')||Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|d\lambda \le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma^0_1} \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma^0_1} \left(E^{(1)}_c(t-\beta,x,\lambda)+E^{(1)}_c(t-\beta,z^{(1)},\lambda)\right)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} E^{(1)}_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le C|x_1-z_1|^{\gamma^0_1}(t-t_1)^{-1-m_1\gamma^0_1}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+\hat{m}_2\gamma_2}d\beta\left(I^{03}_0(x,\xi)+I^{03}_0(z^{(1)},\xi)\right)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma^0_1}(t-t_1)^{-M-1-\hat{m}_1\gamma^0_1+\hat{m}_2\gamma_2}\left(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(1)},\xi)\right).$$

Для оцінки другого доданка в оцінках (3.55) беремо $\gamma^0_1=\gamma_1$, а в нерівності (Д2.33) покладемо $\gamma^0_s=m_s^{-1}m_1\gamma'_1, s\in\mathbb{Z}_3, \gamma'_1<\gamma^0_1$. Отримаємо

$$|W^1_{122}| \le \int\limits_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta^{z_1}_{x_1}\partial^{k_1}_{x_1}G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)||\Delta^{X(t-\tau)}_{\lambda}Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi_3)|d\lambda \le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma'_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma'_1)}\left(E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,x,\xi)+E^{(1)}_{c_0}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\right).$$

Доданки W^1_{123}, W^1_{124} оцінюються однаково. Оцінимо, наприклад, перший з них. Для цього скористаємося оцінками (3.54) та нерівністю (Д2.33) з $\gamma^0_s=$ $=m_s^{-1}m_1\gamma'_1, s\in\mathbb{Z}_3, \gamma'_1<\gamma_1$.

$$|W^1_{123}| \le \int\limits_{\eta_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial^{k_1}_{x_1}G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)||\Delta^{X(t-\tau)}_{\lambda}Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)|d\lambda \le$$

$$\le C\int\limits_{\eta_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1}E^{(1)}_c(t-\beta,x,\lambda)\left(\sum_{s=1}^{3}|X_s(t-\beta)-\lambda_s|^{\hat{m}_s^{-1}\hat{m}_1\gamma'_1}\right)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma'_1)}\left(\sum_{j=1}^{4}E^{(1)}_c(\beta-\tau,\Lambda^{0,j-1}(t-\beta),\xi)\right)d\lambda\le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1+m_1(\gamma_1-\gamma'_1)}\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-1+m_1\gamma'_1}d\beta\left(\sum_{j=1}^{4}I^{0,j-1}_0(x,\xi)\right)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma'_1}(t-\tau)^{-M-1+m_1(\gamma_1-\gamma'_1)}\left(E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_0}(t-\tau,z^{(1)},\xi)\right).$$

Оцінимо W_{25}^1. Із урахуванням оцінок (3.58),(3.82), нерівностей (2.43) і (Д2.10) отримуємо

$$|W_{125}^1| \leq \int\limits_{t_1}^{\eta_1} |\Delta_{x_1}^{z_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3 d\lambda||Q_{12}(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)|d\beta \leq$$

$$\leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} \int\limits_{t_1}^{\eta_1} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi)d\beta \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0} J_1(\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0))E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_1(\gamma_1-\gamma_1^0)+\hat{m}_2\gamma_2} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

Доданки W_{26}^1 і W_{27}^1 також оцінюються однаково за допомогою відповідних оцінок (3.57) і (3.82). Для першого з цих доданків маємо

$$|W_{126}^1| \leq \int\limits_{\eta_1}^{t} |\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda||Q_{12}(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)|d\beta \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta_1}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}(\beta-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} E_c^{(1)}(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi)d\beta \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\eta_1}^{t} (t-\beta)^{-1+\hat{m}_1\gamma_1}d\beta(t_1-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi) \leq$$

$$\leq C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(t-\tau)^{-M-1+\hat{m}_2\gamma_2} E_c^{(1)}(t-\tau,x,\xi).$$

З оцінок доданків $W_{12j}^1, j \in \mathbb{N}_7$ оцінки (3.93) для випадку $|k_1| = 2, |k_2| = 0, |k_3| = 0$.

Оцінимо тепер прирости за змінною $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Оцінки приростів проводимо за умови $\eta_2 = |x_2 - z_2|^2 < (t-\tau)/4$. На підставі рівності (3.90) запишемо зображення

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1} W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_2} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\eta_2}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{\eta_2}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{z_1}^{k_1} G_{12}(t,z^{(1)};\beta,\lambda;y_3)\Delta_{\lambda}^{Z^{(2)}(t-\beta)} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_2} \Delta_{x_2}^{z_2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda\right) Q_{12}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\beta+$$

$$+\int\limits_{\eta_2}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda\right) Q_{12}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\beta-$$

$$-\int\limits_{\eta_2}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{z_1}^{k_1} G_{12}(t,z^{(2)};\beta,\lambda;y_3)d\lambda\right) Q_{12}(\beta,Z^{(2)}(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\beta =: \sum_{j=1}^{7} W_{12j}^2. \tag{Д2.45}$$

Доданки $W_{2j}^2, j \in \mathbb{N}_7$ оцінюємо аналолічно. З оцінок цих доданків випливають оцінки (3.93) для випадку $|k_1| = 2, |k_2| = 0, |k_3| = 0$. Аналогічно до доведення формул (??), (??) доводиться для випадку $|k''| = 1$, $k' \in \mathbb{Z}_+^n$, формула

$$\partial_x^k W_{12}(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3) Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{\lambda}^{k''} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}\partial_{\lambda}^{k'} Q_{12}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{\lambda}^{k''} G_{12}(t,x;\beta,\lambda;y_3)d\lambda\right) \partial_{\lambda}^{k'} Q_{12}(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y_3)d\beta. \tag{Д2.46}$$

Тобто старші похідні за основною змінною мають неперервні й обмежені похідні за змінною x_3. Це дозволяє для приростів за змінною x_3 побудувати зображення подібне до (Д2.1) і обгрунтувати оцінки (3.94) у цьому випадку. Існування похідної SW_2 її оцінки випливають із властивостей параметриксу та доведених вище оцінок похідних $\partial_x^k W_2, |k'| = 2$ і їх приростів.▶

Д3. Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2002. Т. 45, №4. С. 76–86.
2. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2004. Т. 47, №4. С. 110–114.
3. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2003. Т. 46, №3. С. 15–24.
4. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування. *Нелінійний аналіз: Праці Українського математичного конгресу.* 2001. Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. С. 28–41.
5. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Theory of stochastic processes.* Vol. 16 (32), №1, 2010. P. 57–66.
6. **Мединський І. П.** Дослідження С. Д. Ейдельмана нелінійних задач та їх розвиток. *Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича.* Сер. : мат. Т. 1, №1–2. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. С. 114–128.
7. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *Буковинський мат. журн.* 2014. Т. 2, №2–3. С. 94–106.
8. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. *Буковинський мат.*

журн. 2015. Т. 3, №3–4. С. 41–51.

9. **Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.** Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Буковинський мат. журн.* 2016. Т. 4, №3–4. С. 57–68.
10. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичні фундаментальні розв'язки для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2016. Т. 13, №1. С. 108–155.
11. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2016. Т. 59, №2. С. 28–42. Те саме: Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P. On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables. *J. Math. Sci.* 2018. Vol.231, №4. P. 507–526. https: doi.org//10.1007/s10958-018-3830-0.
12. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations. *Mat. Stud.* 2017. Vol. 47, №1. C. 33–46. https:doi.org//10.30970/ms.47.1.33-46.
13. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. Т. 60, №3. С. 9–31. Те саме: Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, №2. P. 121–151. https:doi.org//10.1007/s10958-020-04726-z.
14. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогоро-

ва з двома групами просторових змінних виродження. II. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2017. Т. 60, №4. С. 7–24. Те саме: Ivasyshen S. D., Medynsky I. P. Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. II. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 247, №1, P. 1–23. https: doi.org//10.1007/s10958-020-04786-1.

15. **Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.** Параболічні рівняння з різними особливостями та виродженнями. *Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь.*: Зб. наук. праць присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2017. С. 68–76.

16. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині.*Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка".*: Серія: фіз.-мат. науки. 2017, №871. С. 46–64.

17. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник нац. університету "Львівська політехніка".*: Серія: фіз.-мат. науки. 2018, №898. С. 13–21.

18. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Властивості фундаментальних розв'язків, теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2018. Т. 61, №4. С. 7–16.

19. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2019. Т. 62, №1. С. 7–24.

20. **Dron' V. S., Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.** Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for one Kolmogorov-type ultraparabolic arbitrary order equations. *Carpatian Math. Publ.* 2019. Vol. 11, №2, P. 268–280. https:doi.org//10.15330/cmp.11.2.268-280.

21. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2019. Т. 62, №4. С. 39–48.

22. **Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині. *Вісник Львів. ун-ту.*: Серія мех.-мат. 2019. Вип. 88. С. 107–127. https://dx.doi.org/10.30570/vmm.2019.88.107-127.

23. **Medynsky I. P.** On properties of solutions for Fokker-Planck-Kolmogorov equations. *Math. Model. Comp.* 2020. Vol. 7, №1. P. 158–168. https: doi.org //10.23939/mmc2020.01.158.

24. **Ivasyshen S., Medynsky I.** The well-posedness of problem with weighting initial conditions for parabolic system with degenerations of the initial hyperplane in Banach spaces of Hölder. *Intern. Conf. Func. Anal. and its Appl.*, Dedicated to the 110-th anniversary of Stefan Banach. May 28–31, 2002, Lviv: Book of Abstracts. Lviv, 2002. P. 92–93.

25. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *VI Міжнар. наук. конф. "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур"*, 26–29 трав. 2003 р., Львів: тези доп.: Львів, 2003. С.491–492.

26. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Апріорні оцінки розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування. *Міжнар. наук. конф. "Шості боголюбовські читання"*, 26–30 серп., 2003 р., Чернівці: тези доп.: Київ, 2003. С. 84.

27. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про коректну розв'язність задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині. *III Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 9–12 верес. 2003 р., Івано-Франківськ: тези доп.: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2003. С. 42.

28. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи з виродженням на початковій гіперплощині. *Міжнар. конфер. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, 6–9 черв. 2005 р., Київ: тези доп.: Київ, 2005. С. 32.

29. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь у вагових L_p-просторах. *Міжнар. наук. конф. з диференціальних рівнянь, присвячена 100 річниці з дня народження Я. Б. Лопатинського*, 12–17 верес. 2006 р., Львів: тези доп.: Львів, 2006. С. 27–28.

30. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Розвиток досліджень С. Д. Ейдельмана фундаментальних розв'язків параболічних рівнянь та їх застосування. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, 11–14 жовт., 2006 р., Чернівці: тези доп.: Чернівці, 2006. С. 54.

31. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про глобальні розв'язки задачі Коші для деяких квазілінійних ультрапараболічних рівнянь. *Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробагатька*, 24–28 верес. 2007 р., Дрогобич: тези доп.: Львів, 2007. С. 189.

32. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічних рівнянь з виродженнями за часовою змінною. *XII Міжн. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 15–17 трав. 2008 р., Київ: тези доп.: Київ. 2008. С. 162.

33. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про задачу Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *IV Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 10–12 верес. 2008 р., Івано-

Франківськ: тези доп.: Івано-Франківськ, 2008. С. 39.

34. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes. *Intern. conf. "Stochastic analysis and random dynamics"*, June 14–20, 2009, Lviv: Abstracts. Lviv, 2009. P. 95–96.

35. **Мединський І. П.** Задача Коші для квазілінійних ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *XIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 13–15 травня, 2010 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2010. С. 271.

36. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *Third International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Appliccations dedicated to Yaroslav Lopatynsky* , 3–6 November, 2010, Lviv: Book of Abstracts. Donetsk, 2010. P. 76.

37. **Мединський І.** Локальна розв'язність задачі Коші для одного класу квазілінійних вироджених параболічних рівнянь. *Міжнар. матем. конф. ім. В. Я. Скоробогатька*, 19–23 верес. 2011 р., Дрогобич: тези доп.: Львів, 2011. С. 134.

38. **Мединський І. П.** Коректна розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, присвяченої 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, 8–10 черв., 2011 р., Київ: матеріали конф.: Київ, 2011. С. 120.

39. **Medynsky I.** Cauchy problem for a semilinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type *Intern. Conf. dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach*, September 17–21, 2012, Lviv: Abstracts of Reports. Lviv, 2012. P. 217.

40. **Мединський І. П.** Задача Коші для квазілінійного рівняння типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною і виродженням. *Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"*, присвяченої 70-

річчю проф. В.В. Маринця, 26–29 верес. 2012 р., Ужгород: матеріали конф.: Ужгород, 2012. С. 60.

41. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Параболічні моделі. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. V Міжнар. наук. конф. 4–5 квіт. 2012 р. Кам'янець-Подільський, 2012. С. 35.

42. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких класів вироджених параболічних рівнянь. *XIV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 19–21 квітня 2012 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2012. С. 198.

43. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Деякі вироджені параболічні моделі. *Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці"*, присвячена 50-річчю каф. прикладної математики Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича, 11–23 черв. 2012 р., Чернівці: матеріали конф., Чернівецький нац. ун-т, 2012. С. 80.

44. **С. Івасишен, І. Мединський** Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 21–25 трав. 2013 р., Львів: зб. наук. праць в 3-х т. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. Т. 1. С. 36–38.

45. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про метод Леві побудови та дослідження фундаментальних розв'язків вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *V Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу"*, 19–21 верес. 2013 р., Івано-Франківськ: тези доп., Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2013. С. 28.

46. **Мединський І. П., Івасишен С. Д.** Про деякі вироджені параболічні моделі. *Сучасні проблеми математичного моделювання, про-*

гнозування та оптимізації: тези доп. VI Міжнар. наук. конф. 4–5 квіт. 2014 р. Кам'янець-Подільський, 2014. С. 106.

47. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *XV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 15–17 трав. 2014 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2014. С. 123–124.
48. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для узагальненого виродженого рівняння Колмогорова. *IV Міжнар. ганська конф., присвячена 135 річниці від дня народженння Ганса Гана*, 30 черв.–05 лип. 2014 р., Чернівці: тези доп.: Чернівецький нац. ун-т, 2014. С. 62–63.
49. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова. *XVI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 14–15 трав. 2015 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ : НТУУ "КПІ", 2015. С. 106–107.
50. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Метод Леві та його модифікації у дослідженнях вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Наук. конф., присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге*, 1–4 лип. 2015 р., Чернівці: тези доп.: Чернівецький нац. ун-т, 2015. С. 48–49.
51. **Medynsky I.** On investigations of S.D. Eidelman in the theory of the degenerate parabolic equations of Kolmogorov type and their development *Intern. V. Skorobohatko Math. Conf.* August 25–28, 2015, Drogobych: Abstracts. Lviv, 2015. P. 104.
52. **Voznyak O., Ivasyshen S., Medynsky I.** On fundamental solution of the ultraparabolic Kolmogorov equation with degeneration on the

initial hyperplane. *Intern. V. Skorobohatko Math. Conf.*, August 25–28, 2015, Drogobych: Abstracts. Lviv, 2015. P. 172.

53. **Івасишен С. Д., Мединський І. П. Пасічник Г. С.** Параболічні моделі з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доп. VII Міжнар. наук. конф. 21–22 квіт. 2016 р. Кам'янець-Подільський, 2016. С. 83–84.

54. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про останні результати побудови та дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого параболічного рівняння типу рівняння дифузії з інерцією. *XVII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 19–20 трав. 2016 р., Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ : НТУУ "КПІ", 2016. С. 127–128.

55. **Dron' V., Ivasyshen S., Medynsky I.** On applications of Levi's parametrix method in Theory of Parabolic equations. *Intern. Conf. On Diff. Eq.*, Dedicated to the 110 Anniversary of Ya.B.Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv: Book of Abstracts. Lviv, 2016. P. 44.

56. **Дронь В., Івасишен С., Мединський І.** Властивості об'ємного потенціалу лля одного ультрапараболічного рівняння. *Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"*, присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І.Фодчука (1936-1992) та 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь, 28–30 верес. 2016 р., Чернівці: матеріали конф. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. С. 44.

57. **Івасишен С., Мединський І.,Пасічник Г.** Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"*, присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І.Фодчука (1936-1992) та 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь, 28–30 верес. 2016 р., Чернівці: матеріали конф. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. С. 50–51.

58. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з гладкими коефіцієнтами. *XVIII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, 7–10 жовт. 2017 р., Луцьк–Київ: матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. Київ: НТУУ "КПІ", 2017. С. 60–63.

59. **Івасишен С., Мединський І.** Фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 22–25 трав. 2018 р., Львів: зб. наук. праць у 3-х т./ за заг. ред. А.М.Самойленка та Р.М.Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. Т. 1. С. 34–35. Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

60. **Возняк О., Мединський І.** Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики"*, 22–25 трав. 2018 р.: зб. наук. праць у 3-х т./ за заг. ред. А.М.Самойленка та Р.М.Кушніра [Електронний ресурс]. Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. 2018. Т.3. С. 101–102. Режим доступу до ресурсу: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

61. **І. Мединський, С. Івасишен** Про побудову та оцінки класичного фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях.* Міжнар. наук. конф. присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича, 17–19 верес. 2018, Чернівці: матеріали конф. Чернівці, 2018. С. 84.

62. **Івасишен С. Д., Мединський І. П.** Про локальну розв'язність задачі Коші для квазілінійного виродженого ультрапараболічного рівняння ти-

пу Колмогорова. *VI Всеукр. матем. конф. імені Б. В. Василишина*, 26–28 верес. 2018, Івано-Франківськ–Микуличин. Івано-Франківськ: Голіней, 2018. С. 18–19.

63. **Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.** Properties of Green operators generated by fundamental solutions of degenerated parabolic equations.*Intern. Conf. "Infinite Dimensional Analysis and Topology"*, Dedicated to the 70-th Anniversary of Professor Oleh Lopushansky. Oktober 15–20, 2019, Ivano-Frankivsk: Book of Abstracts. Ivano-Frankivsk, 2019. P. 25–26.

64. **Мединський І., Дронь В.** Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь довільного порядку. *Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування"*, присвячена 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана, 16–19 верес. 2020 р., Чернівці: матеріали конф. [Електронний ресурс]. Чернівецький нац. ун-т, 2020. С. 165–166. Режим доступу до ресурсу: www.sde100.fmi.org.ua.

65. **Medynsky I., Voznyak O.** Fundamental solutions of ultraparabolic Kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and degeneration on the initial hyperplane. *XI Intern. Skorobohatko Math. Conf.*, October 26–30, 2020, Lviv: Abstracts. [Electronic publication ISBN 978-96602-9390-8]. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. 2020. P. 75. https://www.iapmm.lviv.ua/conf_skorob2020.

Д4. Апробація результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідались та обговорювалися на: International Conference on Functional Analysis and its Applications. Dedicated to the 110-th anniversary of Stefan Banach, (May 28-31, 2002, Lviv, Ukraine), Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування (Київ,6-9 червня 2005 р.), VI міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур (26-29 травня 2003, Львів, Україна), Міжнародна наукова конференція "Шості боголюбовські читання (26–30 серпня, 2003, Чернівці, Україна), III Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (9-12 вересня 2003 р., Івано-Франківськ), Міжнародна наукова конференція з диференціальних рівнянь, присвячена 100 річниці з дня народження Я. Б. Лопатинського, (12-17 вересня 2006 р., Львів, Україна), Міжнародна наукова конференція “Диференціальні. рівняння та їх застосування” (11-14 жовтня, 2006 р., Чернівці, Україна), Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька (24-28 вересня 2007, Дрогобич, Україна), XII Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (15-17 травня 2008 р., Київ, Україна), IV Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу"(10-12 вересня 2008 р., Івано-Франківськ), International conference "Stochastic analysis and random dynamics (June 14-20, 2009, Lviv, Ukraine), XIII Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, (13 – 15 травня, 2010 р., Київ, Україна), Third International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Appliccations dedicated to Yaroslav Lopatynsky, (3 – 6 November, 2010, Lviv, Ukraine), Міжнародна математична конференція імені В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, Україна, 19-23 вересня 2011 р.), Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування присвячена 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, (8-10 червня 2011 р., Київ, Україна), International Conference Dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, (17–21.09.2012, Lviv, Ukraine), Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжнародна наукова конференція присвяченої 70-річчю проф. В. В. Маринця, (26–29 вересня 2012 р., Ужгород, Україна), Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: V Міжнародна наукова конференція, (4–5 квітня 2012 р.,Кам’янець-Подільський), XIV Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, (19–21 квітня 2012 р., Київ, Україна), Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці: Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 50-річчю кафедри прикладної математики Чернівецького національного університету імені Ю. Федьковича, (11–23 червня 2012 р., Чернівці, Україна), Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки і математики (21-25 травня 2013 р., Львів, Україна), V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу (19-21 вересня 2013 р., Івано-Франківськ), Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: VI Міжнародна наукова конференція, (4–5 квітня 2014 р., Кам'янець-Подільський), XV Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, (15–17 травня 2014 р., Київ, Україна), IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, (30 червня–05 липня 2014 р., Чернівці, Україна), XVI Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, (14–15 травня 2015 р., Київ, Україна), Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге, (1–4 липня 2015 р., Чернівці), International V. Skorobohatko Mathematical Conference. (August 25–28, 2015, Drogobych, Ukraine), Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: VII Міжнародна наукова конференція, (21–22 квітня 2016 р., Кам'янець-Подільський), XVII Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, (19–20 травня 2016 р., Київ, Україна), International Conference On Differential Equations Dedicated to the 110-th Anniversary of Ya.B.Lopatynsky, (September 20- 24, 2016, Lviv, Ukraine), Міжнардна наукова конференція "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування присвячена 80-річчю від дня народження професора В. І. Фодчука (1936-1992), (28–30 вересня 2016 р., Чернівці, Україна), XVIII Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, (7–10 жовтня 2017 р., Луцк–Київ, Україна), Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки і математики (22-25 травня 2018 р., Львів, Україна), Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, (17–19 вересня 2018 р., Чернівці, Україна), Шоста Всеукраїнська конференція імені Б. В. Василишина, (26–28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ–Микуличин), International Conftrence "Infinite Dimensional Analysis and Topology Dedicated to the 70-th Anniversary of Professor Oleh Lopushansky, (October 15-20, 2019, Ivano-Frankivsk, Ukraine), Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування присвячена 100-річчю від дня народження професора Самуїла Давидовича Ейдельмана, (16–19 верес. 2020 р., Чернівці), XI Intern. Skorobohatko Math. Conf. (October 26–30, 2020, Lviv), наукових семінарах Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача, засіданні математичної комісії НТШ (Львів, 2019 р.), відкритих науково-технічних конференціях Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка» (2014 – 2020 рр.), наукових семінарах кафедри прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка"(керівник: д. ф.-м. н., проф. П.П. Костробій 2002–2020 роки), Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: д. ф.-м. н., проф. М.М. Бокало, д. ф.-м. н., проф. П.І. Каленюк, 2014 – 2020 рр.), науковому семінарі кафедри математичної фізики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"(керівники: д. ф.-м. н., проф. С.Д. Івасишен, д. ф.-м. н., доц. В.М. Горбачук, 17 лютого 2021 р.), Київському міському семінарі з функціонального аналізу (керівники: О. В. Антонюк, А. Н. Кочубей, В. А. Михайлець, В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко), 17 лютого 2021 р.).