Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Пстрий Катерина Миколаївна

УДК 512.536.7+515.122.4

ДИСЕРТАЦІЯ
Топологізація та розширення груп, біциклічних напівгруп та їх варіантів

01.01.04 — геометрія і топологія
111 Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії)

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
______________ К. М. Пстрий

(підпис)

Науковий керівник: **Гутік Олег Володимирович**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
старший науковий співробітник

ЛЬВІВ — 2021

Зміст

Анотація

Пстрий К. М. Топологізація та розширення груп, біциклічних напівгруп та їх варіантів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 — геометрія і топологія. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2021.

У дисертаційній роботі досліджуються топологізації напівгруп, алгебраїчні властивості яких близькі до біциклічного моноїда, а також структури замикання таких напівгруп і груп у напівтопологічних і топологічних напівгрупах. Зокрема розглядаються розширена біциклічна напівгрупа, біциклічне розширення $\mathscr{B}(A)$ непорожньої трансляційної множини A лінійно впорядкованої групи та варіанти біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи.

У дисертації доведено, що довільний варіант $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда допускає лише дискретну гаусдорфову трансляційно неперервну топологію, і якщо напівтопологічна напівгрупа S містить $\mathscr{C}_{m,n}$ як щільну власну піднапівгрупу, то $S \setminus \mathscr{C}_{m,n}$ є ідеалом у S. Це узагальнює результати Ебергарта і Селдена, отримані для біциклічного моноїда. Також доведено дихотомію: довільна гаусдорфова локально компактна трансляційно неперервна топологія на кожному варіанті біциклічного моноїда з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною. Описано приєднання компактного ідеала до довільного варіанта біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ у локально компактній напівтопологічній напівгрупі.

Доведено, що група автоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел, всі варіанти напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є попарно ізоморфними, а також, що напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і всі її варіанти не є скінченно породженими. Описано гаусдорфові трансляційно неперервні топології на варіантах напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, а також

показано, що на варіантах напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, на відміну від варіантів біциклічного моноїда, існують недискретні гаусдорфові напівгрупові топології.

Наведено конструкцію, з якої випливає, що на відміну від біциклічного моноїда, для гаусдорфової локально компактної напівтопологічної розширеної біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0 = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \sqcup \{0\}$ не виконується дихотомія: існує континуум різних гаусдорфових недискретних некомпактних локально компактних трансляційно неперервних топологій на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$. Однак кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$ є дискретною.

Доведено, що для довільної зліченної лінійно впорядкованої групи G та її непорожньої трансляційної множини A, кожна берівська трансляційно неперервна T_1-топологія на біциклічному розширенні $\mathscr{B}(A)$ дискретна, а також для довільної лінійної нещільно впорядкованої групи G кожна трансляційно неперервна гаусдорфова топологія на $\mathscr{B}(A)$ дискретна.

Доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на дискретній електорально гнучкій нескінченній групі з приєднаним нулем G^0 є або дискретною, або компактною. Наведено приклад, який показує, що на кожній віртуально циклічній групі з приєднаним нулем G^0 існують недискретні некомпактні локально компактні трансляційно неперервні топології, які індукують на групі G дискретну топологію.

Ключові слова: напівгрупа, інтерасоціативність напівгрупи, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, біциклічний моноїд, локально компактний простір, дискретний простір, біциклічне розширення, простір Бера, варіант напівгрупи, розширена біциклічна напівгрупа, група, електоральна гнучка група, електоральна стійка група, віртуально циклічна група.

Список публікацій здобувача

1. Gutik O. *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid* /

O. Gutik, K. Maksymyk // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична – 2016. – Вип. 82. – С. 98–108. (Здобувачеві належать усі результати, окрім постановки задач, твердження 1 і теореми 3)

2. Gutik O. *On variants of the extended bicyclic semigroup* / O. Gutik, K. Maksymyk // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична – 2017. – Вип. 84. – С. 22–37. (Здобувачеві належать усі результати, окрім постановки задач)

3. Gutik O. V. *On semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups* / O. V. Gutik, K. M. Maksymyk // Journal of Mathematical Sciences – 2019. – Vol. 238, №. 1. – P. 32–45. (Здобувачеві належать усі результати, окрім постановки задач)

4. Gutik O. V. *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero* / O. V. Gutik, K. M. Maksymyk // Математичні методи та фізико-механічні поля – 2019. – Т. 62, №. 4. – С. 28–38. (Здобувачеві належать усі результати, окрім постановки задач)

5. Максимик К. *Про локально компактні групи з нулем* / К. Максимик // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична – 2019. – Вип. 88. – С. 51–58.

Апробація результатів

1. Gutik O. *Semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups* / O. Gutik, K. Maksymyk // International Conference "Complex Analysis and Related Topics", May 30 - June 4, 2016, Lviv: Abstracts. – Lviv, 2016. – P.30.

2. Maksymyk K. *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid* / O. Gutik, K. Maksymyk // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, September 27 - October 1, 2016, Lviv: Abtract of Reports. – Lviv, 2016. – P. 31–32.

3. Maksymyk K. *On variants of the extended bicyclic semigroup* / O. Gutik, K. Maksymyk // The 13-th Summer School "Analysis, Topology and Applications 29 July - 11 August, 2018, Vyzhnytsya, Chernivtsi region, Ukraine: Book of Abstracts. – Chernivtsi, 2018. – P. 29–32.

4. Gutik O. *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero* / O. Gutik, K. Maksymyk // Set-theoretic methods in topology and real functions theory. The conference is dedicated to the 80th birthday of Lev Bukovsky, September 9-13, 2019, Košice: Abstracts. – Košice, 2019. – P.31–32.

5. Maksymyk K. *On locally compact groups with zero* / K. Maksymyk // International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, July 14–17, 2020, Kyiv: Book of Abstracts. – Kyiv, 2020. – P. 52.

Abstract

Kateryna Pstryi. Topologization and extension of groups, bicyclic semigroups and their variants. – Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Mathematics (PhD): Speciality 01.01.04 – Geometry and Topology. – Ivan Franko National University of Lviv, the Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2021.

In the PhD thesis we study topologizations of semigroups, whose algebraic properties are closed to the bicyclic monoid and the structure of the closure of such semigroups and groups in semitopological and topological semigroups. In particular, we consider the extended bicyclic semigroup, the bicyclic extension $\mathscr{B}(A)$ of a non-empty shift-set A of a linearly ordered group and variants of the bicyclic monoid and the extended bicyclic semigroup.

We prove that any variant $\mathscr{C}_{m,n}$ of the bicyclic monoid admits only the discrete Hausdorff shift-continuous topology, and if a semigroup S contais $\mathscr{C}_{m,n}$ as a dense proper subsemigroup, then $S \setminus \mathscr{C}_{m,n}$ is an ideal of S. This is a generalization of well-known Eberhart's and Selden's results obtained for the bicyclic monoid. Also we show the following dichotomy: every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on the bicyclic monoid with an adjoined zero is either compact or discrete. We describe the adjoining of a compact ideal to an arbitrary variant of the bicyclic monoid $\mathscr{C}_{m,n}$ in a locally compact semitopological semigroup.

It is proved that the group of automorphisms of the extended bicyclic semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ is isomorphic to the additive group of integers, all variants of $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ are pairwise isomorphic, and the semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ and all its variants are not finitely generated. We describe Hausdorff shift-continuous topologies on variants of $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, and show that there exist non-discrete Hausdorff semigroup topologies on variants of the extended bicyclic semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.

We present the construction which implies that there exists a continuum of distinct Hausdorff non-discrete non-compact locally compact shift-continuous topologies on the extended bicyclic semigroup with an adjoined zero

$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0 = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \sqcup \{0\}$. However, we show that every Hausdorff locally compact semigroup topology on $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^0$ is discrete.

It is shown that for any countable linearly ordered group G and its non-empty shift-set A every Baire shift-continuous T_1-topology on $\mathscr{B}(A)$ is discrete, and for any linearly non-dense ordered group G every shift-continuous Hausdorff topology on $\mathscr{B}(A)$ is discrete as well.

We prove that every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on a discrete electorally flexible infinite group with an adjoined zero G^0 is either compact or discrete. Also we show that on any virtually cyclic group with an adjoined zero G^0 there exist non-discrete non-compact locally compact shift-continuous topologies which induce the discrete topology on G.

Key words: semigroup, interassociate of a semigroup, semitopological semigroup, topological semigroup, bicyclic monoid, locally compact space, discrete space, bicyclic extension, Baire space, variant of a semigroup, extended bicyclic semigroup, group, electorally flexible group, electorally stable group, virtually cyclic group.

РОЗДІЛ 1

Вступ

1.1 Історична довідка, огляд літератури та мотивація досліджень

Хоча теорія напівгруп, як частина загальної алгебри, сформована лише в другій половині 20-го століття, її фундаментальні ідеї та принципи працювали вже в інших, старших за неї за віком, розділах математики, зокрема в таких як функціональний аналіз, диференціальна геометрія, математична лінгвістика та теорія формальних мов. В основі багатьох модерних розділів чистої та прикладної математики лежить теорія напівгруп перетворень, а саме теорії автоматів, теорії кодів, математичній генетиці, теоретичної інформатики та криптографії, які безпосередньо застосовуються в природничих, соціальних і технічних науках [50, 115, 128, 129].

На думку багатьох істориків математики сучасна алгебра бере свій ґрунтовний початок саме з Ерлангенської програми Фелікса Кляйна, проголошеної в Ерлангенскому університеті в жовтні 1872 року [120]. Захоплюючись тоді ще новою теорією Софуса Лі неперервних псевдогруп перетворень геометричних об'єктів, Фелікс Кляйн сформулював концепцію алгебраїзації не лише геометрії, а й всієї математики, а саме дослідження неперервних математичних структур за допомогою алгебр перетворень. Ця програма не лише спонукала до розвитку абстрактних алгебраїчних теорій груп Лі та алгебр Лі, а також дала поштовх застосуванню їх в математичній фізиці та інших розділах математики.

Яскравим підсумком використання напівгруп перетворень, а особливо однопараметричних напівгруп, у функціональному аналізі в першій половині 20-го століття є монографія Гілла [105], яка неодноразово перевидавалась і перекладалась на інші мови. Еквівалентність категорій інверсних напівгруп, часткових групоїдів та деяких атласів глядких многовидів описує класична теорема Ерешманна–Шайна–Намборіпада та її узагальнання (див. [115, 116, 117, 128]).

Хоча сам термін "напівгрупа" ("semigroup") виник завдяки Леонарду Е. Діксону в 1905 році [63], однак на думку класиків теорії топологічних напівгруп Карла Г. Гофманна [108, 109, 110, 111] і Джіммі Д. Лоусона [126, 127], первинні ідеї цієї теорії були закладені ще в 1826 році в праці Нільса Г. Абеля [23]. Ґрунтовні дослідження топологічних напівгруп починаються вже після другої світової війни в працях Катсумі Нумакури [145, 146, 147], Стефана Шварца [156, 157, 158], Александера Д. Уоллеса [164, 165, 166] та його учнів. Класичним результатом цього періоду є теорема Нумакури про те, що *кожна компактна топологічна напівгрупа зі скороченнями є топологічною групою* [145], яка була незалежно доведена багатьма іншими авторами. Підсумком першого періоду розвитку теорії топологічних напівгруп, а саме компактних топологічних напівгруп, є огляд Александера Д. Уоллеса [167], де і була поставлена знаменита проблема Уоллеса: *чи зліченно компактна топологічна напівгрупа зі скороченнями є топологічною групою?* Хоча ця проблема була розв'язана негативно лише в 1996 році (див. [152, 162]) у певних теоретико-множинних припущеннях, однак розв'язку її в **ZFC** досі немає. Зауважимо, що для багатьох класів топологічних напівгруп близьких до компактних проблема Уоллеса розв'язана позитивно [21, 82, 151, 51].

Другий період розвитку теорії топологічних напівгруп присвячений дослідженню компактних (та близьких до них) зв'язних топологічних напівгруп. Цей період підсумовується оглядом Пола Мостерта [141] та монографією [113], яка серед англомовних спеціалістів з топологічної алгебри отримала коротку назву "HofMos". Цей період ознаменований тим, що до досліджень топологічних напівгруп долучаються не лише спеціалісти з алгебри та загальної топології, але і з різних областей математики, що сприяє створенню навколо теорії топологічних напівгруп інших напрямків досліджень. Ці дослідження все більше поглиблюють переплетення методів теорії топологічних напівгруп з методами теорії міри, функціонального аналізу, загальної топології та теорії множин.

Саме в кінці 60-их років 20-го століття на базі теорії топологічних напівгруп зароджуються такі напрямки, які потім перетворилися в окремі розділи топологічної алгебри та загальної топології:

- теорія напівтопологічних напівгруп ([44, 155]);
- теорія лівотопологічних (правотопологічних) напівгруп і напівгруп ультрафільтрів ([45, 106]);
- міри на топологічних напівгрупах і теорія аменабельних напівгруп ([46, 61, 142]);
- напівгрупи неперервних перетворень топологічних просторів ([130, 131, 132]);
- частково впорядковані топологічні простори, топологічні напівґратки та неперервні ґратки ([80, 112]);
- напівгрупи Лі ([104, 114]).

Усі ці перелічені напрямки саме і поєднуються загально-топологічними задачами та методами досліджень теорії топологічних напівгруп. Так зокрема, фундаментальна теорема Елліса про те, що кожна локально компактна напівтопологічна група є топологічною групою, привела не лише до дослідження нарізно неперервних операцій у топологічній алгебрі, а й до створення теорії паратопологічних груп (див. [31]), яка зараз дуже потужно розвивається львівськими та китайськими математиками. Цей третій період, який можна назвати теоретико-множинним і загально топологічним періодом теорії топологічних напівгруп, підсумовано в двох-томній монографії Каррута, Гільдебрандта та Коха [54, 55].

Пізніші дослідження в теорії топологічних і напівтопологічних напівгруп зумовлені впливом на неї теоретико-множинної топології та інших розділів математики. Основними напрямками сучасних досліджень є такі:

- дослідження структури класів топологічних та напівтопологічних напівгруп з певними алгебраїчними та топологічними властивостями ([34, 96, 97]);

- задача занурення (алгебраїчних) напівгруп у певні класи топологічних напівгруп ([4, 35, 41]);
- дослідження замикання піднапівгруп у напівтопологічних і топологічних напівгрупах, та класифікація повнот у різних класах напівтопологічних напівгруп ([33]);
- топологізація напівгруп ([59, 73, 92, 98, 99]).

Саме останньому напрямку досліджень присвячені результати цієї дисертаційної роботи.

В математичній літературі питання про недискретну (гаусдорфову) топологізацію груп вперше було поставлено А. А. Марковим у 1945 році в праці [15]. Зауважимо, що Л. С. Понтрягін [17] сформулював умови на базу одиниці групи для її недискретної групової топологізації. У 1980 році О. Ю. Ольшанський побудував приклад нескінченної зліченної групи G такої, що кожна групова T_0-топологія на G є дискретною (див. [16]). Уперше таку нетопологізовну напівгрупу було знайдено К. Ебергартом і Дж. Селденом в 1969 році в [71], де доведено, що кожна гаусдорфова напівгрупова топологія на біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$ є дискретною. М. Бертман і Т. Уест у праці [48] поширили результат Ебергарта-Селдена на випадок напівтопологічних напівгруп. А. Д. Тайманов у праці [18] побудував приклад нескінченної комутативної напівгрупи $\mathfrak{A}$, яка допускає лише дискретну гаусдорфову напівгрупову топологію, а також у праці [19] навів достатні умови на комутативну напівгрупу, щоб на ній існувала недискретна гаусдорфова напівгрупова топологія. Зауважимо, що О. Гутік у [84] довів, що кожна трансляційно неперервна T_1-топологія на нескінченній напівгрупі Тайманова $\mathfrak{A}$ дискретна, а також напівгрупа $\mathfrak{A}$ міститься як замкнена піднапівгрупа в кожній T_1-напівтопологічній напівгрупі S, у якій відображення $S \mapsto S$, $x \mapsto x^2$ є неперервним.

К. Ебергарт і Дж. Селден у [71] також довели, що непорожній наріст біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ у топологічній напівгрупі S є ідеалом у його замиканні $\overline{\mathscr{C}(p,q)}$ в S. Аналогічні результати стосовно топологізації та замикання для напівгрупи порядкових ізоморфізмів між головними фільтрами скінченного степеня множини натуральних чисел $\mathbb{N}^n$

зі звичайним частковим порядком добутку отримано в праці [92]. Однак, хоча на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ існує лише дискретна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія, наріст напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ у топологічній напівгрупі S може і не бути ідеалом у її замиканні $\overline{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}}$ у просторі напівгрупи S [73].

Зауважимо, що для багатьох біпростих напівгруп S, а таким є біциклічний моноїд, виконується таке твердження: кожна трансляційно неперервна гаусдорфова берівська (зокрема, локально компактна) топологія на S є дискретною (див. [59, 85, 95, 98, 99]). Графова інверсна напівгрупа $G(E)$ – це напівгрупа, побудована з орієнтованого графа E, коротко кажучи, елементи якої відповідають шляхам у графі E. Такі напівгрупи введені Ешом і Холом у [32] для того, щоб довести, що кожен частковий порядок можна реалізувати як ненульовий $\mathscr{J}$ –клас інверсної напівгрупи. Графові інверсні напівгрупи також є узагальненням поліциклічного моноїда, який ввели Ніва та Перо в [144]. У статті [139] Месьян, Мітчел, Морайне та Перес довели, якщо E – скінченний орієнтований граф, то кожна локально компактна гаусдорфова напівгрупова топологія на графовій інверсній напівгрупі $G(E)$ є дискретною. Оскільки кожна з напівгруп із вище наведених класів напівгруп містить біциклічний моноїд як піднапівгрупу, то природньо виникає питання: *за яких умов* (алгебраїчних чи топологічних) *на напівгрупу S напівгрупова* (або навіть *трансляційно неперервна*) *топологія на S є дискретною?* У статті [39] доведено, що аналогічне твердження виконується для графів, які містять одну вершину та нескінченну кількість петель, тобто для нескінченно породжених поліциклічних моноїдів. Зауважимо, що графові інверсні напівгрупи, на яких існує лише дискретна локально компактна напівгрупова топологія, описані в праці С. Бардили [42].

На перший погляд, дивна дихотомія для біциклічного моноїда з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0 = \mathscr{C}(p,q) \sqcup \{0\}$ доведена в праці [83]: *кожна локально компактна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на $\mathscr{C}^0$ є або компактною, або дискретною.* Ця дихотомія доведена С. Бардилою в роботі [37] для локально-компактного λ-поліциклічного моноїда і в [38] для локально компактних напівтопологічних графових інверсних напівгруп.

Природно називати напівгрупи, які містять біциклічну напівгрупу, біциклічними розширеннями. Так, зокрема, таку назву мають конструкції біциклічних розширень $\mathscr{B}(G)$ та $\mathscr{B}^+(G)$ лінійно впорядкованих груп G у [93] та частково впорядкованих груп G у працях [74, 75, 76]. Дослідженням властивостей таких топологічних розширень присвячені праці [24, 25, 26, 27, 28, 123, 124], зокрема замиканням біциклічних розширень в топологічних напівгрупах. Оскільки при замиканні біциклічних розширень у топологічних (напівтопологічних) напівгрупах наріст може бути ідеалом, то природно виникає задача про описання приєднання ідеала або нуля до таких напівгруп за певних умов на топологічний простір напівгрупи (див. [83, 84]).

Аналогічна задача розв'язана К. Г. Гофманном в праці [107] про приєднання нуля до топологічної групи у випадку локально компактних топологічних напівгруп. У випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп ця задача залишається нерозв'язаною. Тому виникає природна задача: *описати приєднання нуля до дискретної групи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп.* Більш загально ця задача була сформульована Бергландом в статті [43], задача 7: *What is the fine structure of the closure of a group?*

Інтерасоціативністю напівгрупи $(S,\cdot)$ називається напівгрупа $(S,*)$ така, що

$$a\cdot(b*c)=(a\cdot b)*c \qquad \text{і} \qquad a*(b\cdot c)=(a*b)\cdot c$$

для всіх $a,b,c\in S$ [13]. Відомо, що кожна інтерасоціативність довільного моноїда визначається його варіантом (див. [101, 102]), тобто для довільної інтерасоціативністі $(S,*)$ моноїда $(S,\cdot)$ існує елемент $c\in S$ такий, що $a*b=a\cdot c\cdot b$. Інтерасоціативності та варіанти різних класів напівгруп активно вивчалися останнім часом, зокрема в працях [52, 56, 57, 58, 8, 79, 68, 69, 65, 66, 67, 70, 81, 118, 136, 119]. Зокрема довільна інтерасоціативність біциклічного моноїда містить біциклічний моноїд як піднапівгрупу, більше того, дві інтерасоціативності біциклічного монoїда ізоморфні тоді і лише тоді, коли породжуються одним елементом [81]. У праці [20] доведено критерій ізоморфізму двох інтерасоціативностей поліциклічного моноїда, а в [9] встановлено необхідні та достатні умови регулярності варіанта та ізоморфності двох варіантів для матричної напівгрупи Ріса з сендвіч матрицею над групою з нулем. Тому варіанти біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ природно розглядати як біциклічні розширення. Отже, постає задача про напівгрупову чи трансляційно неперервну топологізацію таких розширень і приєднання ідеала чи нуля до варіантів біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася відповідно до плану наукових досліджень кафедри алгебри, топології та основ математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми "Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці" (номер державної реєстрації 0116U001537).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертації є дослідити напівгрупові та трансляційно неперервні топологізації варіантів біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи, біциклічних розширень і приєднання ідеала чи нуля до варіантів біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп, описати приєднання нуля до дискретної групи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп.

Це передбачає розв'язання наступних задач:

- довести, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на довільному варіанті біциклічного моноїда є дискретною;

- дослідити наріст замикання варіантів біциклічного моноїда в напівтопологічних напівгрупах;

- дослідити приєднання нуля до варіантів біциклічного моноїда, розширеної біциклічної напівгрупи та дискретних груп у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп;
- описати групу автоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи та дослідити, чи вона та її варіанти є скінченно породженими, і чи існують ізоморфні її варіанти;
- дослідити трансляційно неперервні топології на варіантах розширеної біциклічної напівгрупи та локально компактні трансляційно неперервні топології на ненульовому варіанті розширеної біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем;
- дослідити трансляційно неперервні топології на біциклічному розширенні $\mathscr{B}(A)$ непорожньої трансляційної множини A зліченної лінійно впорядкованої групи G.

Об'єктом дослідження є розширена біциклічна напівгрупа, біциклічне розширення $\mathscr{B}(A)$ непорожньої трансляційної множини A лінійно впорядкованої групи та варіанти біциклічного моноїда і розширеної біциклічної напівгрупи.

Предметом дослідження є топологізація напівгруп, алгебраїчні властивості яких близькі до біциклічного моноїда, замикання напівгруп та груп у напівтопологічних напівгрупах.

Методи дослідження: використано методи топологічної алгебри, теорії топологічних напівгруп, алгебраїчної теорії напівгруп, загальної топології.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані в дисертації результати є новими. У роботі отримані наступні результати:

- Доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія τ на довільному варіанті біциклічного моноїда $\mathscr{C}_{m,n}$ є дискретною, непорожній наріст напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ у замиканні інтерасоціативності біциклічного моноїда I є двобічним ідеалом напівгрупи S, а також, що довільна гаусдорфова локально компактна трансляційно неперервна топологія τ на ненульовому варіанті $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}^0_{m,n}$ з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною.

- Доведено, що група автоморфізмів $\mathbf{Aut}(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ розширеної біциклічної напівгрупи ізоморфна адитивній групі цілих чисел, розширена біциклічна напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і кожен її варіант не є скінченно породженими, а також, що довільні два варіанти розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфні та описано трансляційно неперервні гаусдорфові топології на варіанті $\mathscr{C}^{0,0}_{\mathbb{Z}}$.

- Показано, що кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}^{\mathbf{0}}_{\mathbb{Z}}$ є дискретною, однак на $\mathscr{C}^{\mathbf{0}}_{\mathbb{Z}}$ існує континуум різних гаусдорфових локально компактних трансляційно неперервних топологій.

- Доведено, що для довільної зліченної лінійно впорядкованої групи G і непорожньої трансляційної множини $A \subseteq G$, кожна берівська трансляційно неперервна T_1-топологія τ на $\mathscr{B}(A)$ дискретна.

- Доведено, якщо G — дискретна електорально гнучка нескінченна група, то кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть знайти застосування у топологічній алгебрі.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати, наведені у роботі, отримані здобувачем самостійно. У спільних статтях співавтору належить постановка задачі, обговорення результатів та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics", Львів, Україна (30 травня–04 червня, 2016 р.), назва доповіді "Semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups";
- міжнародній конференції "International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski", Львів, Україна (27 вересня–01 жовтня, 2016 р.), назва доповіді "On semitopological interassociates of the bicyclic monoid";
- 13-ій Літній Школі "Analysis, Topology and Applications", м. Вижниця, Чернівецька область, Україна (27 липня–11 серпня, 2018 р.), назва доповіді "On variants of the extended bicyclic semigroup";
- міжнародній конференції "Set-theoretic methods in topology and real functions theory. The conference is dedicated to the 80th birthday of Lev Bukovsky", Košice, Slovakia (9–13 вересня, 2019 р.), назва доповіді "On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero";
- міжнародній конференції "International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv", Київ, Україна (14–17 липня, 2020 р.), назва доповіді "On locally compact groups with zero".

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 10 працях: 4 статті, які опубліковані у наукових фахових виданнях України ([86], [88], [89], [14]), 1 стаття, яка опублікована у науковому виданні, віднесеному до третього квартиля (Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank ([87]), 4 тези у матеріалах міжнародних конференцій ([90], [133], [91], [135]) і 1 теза у матеріалах літньої школи ([134]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота обсягом 134 сторінки складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу та п'яти основних розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 168 найменувань, і додатка.

Подяка. Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику кандидату фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику, доценту кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка Олегу Володимировичу Гутіку, доктору фізико-математичних наук, професору кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка Тарасу Онуфрійовичу Банаху за постановку задач, корисні поради, постійну увагу та допомогу в роботі над дисертацією.

1.2 Означення та допоміжні твердження

Нагадаємо деякі основні означення і твердження, які використовуватимуться в наступних розділах.

Будемо дотримуватися термінології [54, 55, 11, 22, 155, 12]. Усі простори вважатимемо гаусдорфовими, якщо не зазначено інше. Через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_0$ і $\mathbb{N}$ позначатимемо множини усіх цілих, невід'ємних цілих і натуральних чисел, відповідно.

Непорожню множину S з заданою на ній бінарною асоціативною операцією $\cdot : S \times S \to S$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, називатимемо *напівгрупою*.

Піднапівгрупою напівгрупи S називається непорожня множина $T \subset S$, яка є напівгрупою стосовно операції, індукованої з S.

Напівгрупа S називається *інверсною* якщо для довільного $x \in S$ існує єдиний $y \in S$ такий, що $x \cdot y \cdot x = x$ і $y \cdot x \cdot y = y$. Такий елемент y в S називається *інверсним* до x і позначається x^{-1}. Відображення, визначене на інверсній напівгрупі S, яке відображає кожен елемент x з S в інверсний до нього x^{-1}, називається *інверсією*.

Ідемпотентом називатимемо такий елемент e напівгрупи S, що $ee = e$. Зауважимо, що для кожного елемента x інверсної напівгрупи S, елементи вигляду xx^{-1}, $x^{-1}x$ є ідемпотентами. Множину ідемпотентів напівгрупи S надалі позначатимемо $E(S)$. Якщо S є інверсною напівгрупою, то множина $E(S)$ є замкненою відносно напівгрупової операції та будемо називати $E(S)$ *в'язкою* напівгрупи S. *Напівграткою* називається комутативна напівгрупа ідемпотентів.

Напівгрупова операція на напівгрупі S індукує *природний частковий порядок* на множині її ідемпотентів $E(S)$:

$$e \preccurlyeq f \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad e = ef = fe, \quad \text{де} \quad e, f \in E(S).$$

Загальновідомо, що кожна інверсна напівгрупа S допускає *природний частковий порядок*:

$$s \preccurlyeq t \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad s = et \quad \text{для деякого} \quad e \in E(S).$$

Цей порядок індукує природний частковий порядок на напівгратці $E(S)$.

Лема 1.2.1 ([128, лема 1.4.6]). *Нехай S — інверсна напівгрупа. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $s \preccurlyeq t$;

(2) $s = ft$ *для деякого ідемпотента* f;

(3) $s^{-1} \preccurlyeq t^{-1}$;

(4) $s = ss^{-1}t$;

(5) $s = ts^{-1}s$.

Напівгратка E називається *лінійно впорядкованою* або *ланцюгом*, якщо її природний часковий порядок є лінійним. *Максимальний ланцюг* напівгратки E — це ланцюг, який не міститься в жодному іншому ланцюзі з E.

З аксіоми вибору випливає існування максимальних ланцюгів у кожній частково впорядкованій множині.

Означення 1.2.1 ([150]). Ланцюг L називається ω-ланцюгом, якщо L ізоморфний множині $\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ зі звичайним порядком $\leqslant$.

Через $\mathscr{I}_X$ позначимо множину усіх часткових взаємно однозначних перетворень нескінченної множини X разом з такою напівгруповою операцією: $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$, якщо

$$x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\},$$

для $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_X$. Напівгрупа $\mathscr{I}_X$ називається *симетричною інверсною напівгрупою* або *симетричним інверсним моноїдом* над множиною X (див. [11]). Симетрична інверсна напівгрупа вперше побудована В. Вагнером в [2] і вона відіграє надзвичайно важливу роль в теорії напівгруп.

Підмножина I напівгрупи S називається *лівим* (*правим*) *ідеалом*, якщо $sa \in I$ ($as \in I$), для всіх $a \in I, s \in S$. *Ідеал* – це множина, що є правим і лівим ідеалом одночасно. Перетин лівих (правих, двобічних) ідеалів знову є лівим (правим, двобічним) ідеалом. Зокрема, для кожного елемента $s \in S$ існує найменший лівий (правий, двобічний) ідеал, що містить s, який називається *головним.* У випадку інверсної напівгрупи S, множина Ss – лівий головний ідеал, sS – правий головний ідеал, а SsS – двобічний головний ідеал, породжений елементом $s \in S$, див. [128].

Біциклічна напівгрупа (або *біциклічний моноїд*) $\mathscr{C}(p,q)$ — це напівгрупа з одиницею 1, породжена двома елементами p та q, що задовольняють співвідношення $pq = 1$. Кожен елемент біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}(p,q)$ єдиним чином зображається у вигляді q^ip^j, де $i,j \in \mathbb{N}_0$ [11], і більше того, напівгрупова операція на $\mathscr{C}(p,q)$ визначається за формулою

$$q^ip^j \cdot q^kp^l = q^{i+k-\min\{j,k\}}p^{j+l-\min\{j,k\}}, \qquad i,j,k,l \in \mathbb{N}_0.$$

Біциклічна напівгрупа $\mathscr{C}(p,q)$ вперше введена Є. С. Ляпіним в 1945 році, та вона відіграє важливу роль не лише в алгебраїчній теорії напівгруп, але й в теорії топологічних напівгруп [11]. Так, зокрема, добре відома теорема Олафа Андерсена стверджує, що проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком простою, тоді і тільки тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи [11]. Стійкі, компактні топологічні напівгрупи, та деякі топологічні напівгрупи, близькі до компактних, на містять ізоморфної копії біциклічного моноїда [34, 35, 97].

На декартовому добутку $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ означимо напівгрупову операцію наступним чином:

$$(a,b)\cdot(c,d) = \begin{cases} (a-b+c,d), & \text{якщо } \ b<c; \\ (a,d), & \text{якщо } \ b=c; \\ (a,d+b-c), & \text{якщо } \ b>c, \end{cases} \tag{1.1}$$

для $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Множина $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, із так визначеною операцією, називається *розширеною біциклічною напівгрупою* [168].

Зауважимо, що множина $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ з індукованою операцією з $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є піднапівгрупою в $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і, більше того, ця напівгрупа ізоморфна біциклічному моноїду.

Якщо S є напівгрупою, то через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ та $\mathscr{H}$ позначатимемо відношення Гріна на S:

$$a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 = bS^1;$$
$$a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a = S^1b;$$
$$a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1 = S^1bS^1;$$
$$\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L};$$
$$\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R},$$

де $a, b \in S$ (див. [11]). Зауважимо, що відношення Гріна є відношеннями еквівалентності на довільній напівгрупі S, причому $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{D}$, $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$ і $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$.

Для кожного $a \in S$ через $\mathbf{R}_a$, $\mathbf{L}_a$ і $\mathbf{H}_a$ позначатимемо $\mathscr{R}$-, $\mathscr{L}$- та $\mathscr{H}$-клас в S, що містить елемент a, відповідно.

Твердження 1.2.2 ([128, твердження 3.2.11])**.** *Нехай S — інверсна піднапівгрупа інверсної напівгрупи T. Тоді:*

(1) $\mathscr{L}(T) \cap (S \times S) = \mathscr{L}(S)$.

(2) $\mathscr{R}(T) \cap (S \times S) = \mathscr{R}(S)$.

(3) $\mathscr{H}(T) \cap (S \times S) = \mathscr{H}(S)$.

(4) $\mathscr{D}(S) \subseteq \mathscr{D}(T) \cap (S \times S)$.

(5) $\mathscr{J}(S) \subseteq \mathscr{J}(T) \cap (S \times S)$.

Твердження 1.2.3 ([128, твердження 3.2.5])**.** *Нехай S — інверсна напівгрупа. Тоді:*

(1) *Нехай $e, f \in E(S)$. Тоді $e\mathscr{D}f$ тоді і лише тоді, коли існує такий елемент $a \in S$, що $a^{-1}a = f$ і $aa^{-1} = e$.*

(2) *Нехай $s, t \in S$. Тоді $(s, t) \in \mathscr{D}$ тоді і лише тоді, коли існують такі елементи $a, b \in S$, що*

$$\mathbf{d}(a) = \mathbf{d}(t), \quad \mathbf{r}(a) = \mathbf{d}(s), \quad \mathbf{d}(b) = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(s).$$

(3) *Якщо* $s = a_1 \cdots a_n$, *то* $(s, a_i) \in \mathscr{D}$ *для кожного* $i = 1, \ldots, n$.

Напівгрупа S називається *простою*, якщо S не містить власного двобічного ідеалу і *біпростою*, якщо S містить лише один $\mathscr{D}$-клас.

Твердження 1.2.4 ([73, твердження 2.1])**.** *Виконуються такі твердження:*

(*i*) $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) = \{(a, a) \colon a \in \mathbb{Z}\}$ *і* $(a, a) \leqslant (b, b)$ *в* $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ *тоді і лише тоді, коли* $a \geqslant b$ *в* $\mathbb{Z}$, *отже,* $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ *ізоморфна лінійно впорядкованій напівгратці* $(\mathbb{Z}, \max)$;

(*ii*) $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *інверсна напівгрупа та елементи* (a, b) *і* (b, a) *є інверсними в* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$;

(*iii*) *для довільних ідемпотентів* $e, f \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *існує* $x \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *такий, що* $x \cdot x^{-1} = e$ *та* $x^{-1} \cdot x = f$;

(*iv*) *елементи* (a, b) *та* (c, d) *напівгрупи* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *є:*

- (*a*) $\mathscr{R}$*-еквівалентними тоді і лише тоді, коли* $a = c$;
- (*b*) $\mathscr{L}$*-еквівалентними тоді і лише тоді, коли* $b = d$;
- (*c*) $\mathscr{H}$*-еквівалентними тоді і лише тоді, коли* $a = c$ *та* $b = d$;
- (*d*) $\mathscr{D}$*-еквівалентними для всіх* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$;
- (*e*) $\mathscr{J}$*-еквівалентними для всіх* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$;

(*v*) $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *є біпростою напівгрупою, отже, і простою;*

(*vi*) *якщо* $(a, b) \cdot (c, d) = (x, y)$ *в* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, *то*

$$x - y = a - b + c - d;$$

(*vii*) *кожна максимальна підгрупа* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *є тривіальною;*

(*viii*) *для кожного цілого числа* n *піднапівгрупа*

$$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}[n] = \{(a, b) \mid a \geqslant n,\ b \geqslant n\}$$

біциклічного моноїда $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *ізоморфна біциклічній напівгрупі* $\mathscr{C}(p, q)$ *стосовно відображення* $h\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}[n] \to \mathscr{C}(p, q)$, *яке визначається за формулою*

$$((a, b))h = q^{a-n}p^{b-n};$$

(*ix*) $\mathscr{L}\mathscr{I}_{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}} = \{\mathscr{L}^a \mid a \in \mathbb{Z}\}$, *де* $\mathscr{L}^a = \{(x, y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \mid y \geqslant a\}$, *є сім'єю всіх лівих ідеалів напівгрупи* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$*;*

(*x*) $\mathscr{R}\mathscr{I}_{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}} = \{\mathscr{R}^a \mid a \in \mathbb{Z}\}$, *де* $\mathscr{R}^a = \{(x, y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \mid x \geqslant a\}$, *є сім'єю всіх правих ідеалів напівгрупи* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.

Якщо p та q — породжуючі елементи біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}(p, q)$, а m і n фіксовані невід'ємні цілі числа, то кожна інтерасоціативність біциклічного моноїда визначається за формулою

$$a *_{m,n} b = a \cdot q^m p^n \cdot b,$$

а отже, є варіантом.

Надалі для фіксованих невід'ємних цілих чисел m та n інтерасоціативність $(\mathscr{C}(p, q), *_{m,n})$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p, q)$ позначатимемо $\mathscr{C}_{m,n}$.

Лема 1.2.2 ([71, лема I.1])**.** (*i*) *Для кожного* $x \in \mathscr{C}(p, q)$ *справджується рівність*

$$\mathscr{C}(p, q)x\mathscr{C}(p, q) = \mathscr{C}(p, q).$$

(*ii*) *Для кожного* $x, y \in \mathscr{C}(p, q)$, *множини* $\{z\colon xz = y\}$ *та* $\{z\colon zx = y\}$ *є скінченними; тобто, лівий та правий зсуви на* x *є скінченними взаємно-однозначними відображеннями.*

Отже, біциклічна напівгрупа є простою (див. [11]) і легко бачити, що кожен варіант простої напівгрупи, а отже, і біциклічного моноїда, є простою напівгрупою.

Підгрупою напівгрупи S називатимемо піднапівгрупу $T \subset S$, яка є групою. Зауважимо, що одиниця групи T є ідемпотентом в S, але не обов'язково одиницею напівгрупи S.

Частково впорядкованою групою називається група $(G, \cdot)$, наділена частковим порядком $\leqslant$, який є трансляційно-інваріантним, іншими словами, бінарне відношення $\leqslant$ задовольняє таку умову:

$$\text{якщо } a \leqslant b, \text{ то } a \cdot g \leqslant b \cdot g \text{ і } g \cdot a \leqslant g \cdot b, \text{ для всіх } a, b, g \in G.$$

Надалі через e позначатимемо одиницю групи G. Множина

$$G^{+} = \{x \in G \colon e \leqslant x\}$$

в частково впорядкованій групі G називається *додатним конусом* групи G та задовільняє такі умови:

1) $G^{+} \cdot G^{+} \subseteq G^{+}$;

2) $G^{+} \cap (G^{+})^{-1} = \{e\}$;

3) $x^{-1} \cdot G^{+} \cdot x \subseteq G^{+}$,

для всіх $x \in G$.

Довільна підмножина P групи G, яка задовільняє умови 1)–3) індукує частковий порядок на G ($x \leqslant y$ тоді і лише тоді, коли $x^{-1} \cdot y \in P$), для якого P є додатним конусом. Елементи множини $G^{+} \setminus \{e\}$ називаються *додатними*.

Лінійно впорядкована група — це частково впорядкована група G така, що відношення часткового порядку "$\leqslant$" є лінійним (див. [49] та [62]).

Надалі ми припускатимемо, що G — *нетривіальна* лінійно впорядкована група.

Для кожного $g \in G$ позначимо

$$G^{+}(g) = \{x \in G \colon g \leqslant x\}.$$

Множина $G^+(g)$ називається *додатним конусом над елементом* g в G.

Для довільних елементів $g, h \in G$ визначимо часткове відображення $\alpha_h^g \colon G \rightharpoonup G$, що визначається за формулою

$$(x)\alpha_h^g = x \cdot g^{-1} \cdot h, \qquad \text{для } \ x \in G^+(g).$$

Зазначимо, що з леми XIII.1 праці [49] випливає, що для такого часткового відображення $\alpha_h^g \colon G \rightharpoonup G$ звуження $\alpha_h^g \colon G^+(g) \to G^+(h)$ є бієктивним відображенням.

Розглянемо напівгрупи

$$\mathscr{B}(G) = \{\alpha_h^g \colon G \rightharpoonup G \mid g, h \in G\}$$

та

$$\mathscr{B}^+(G) = \left\{\alpha_h^g \colon G \rightharpoonup G \mid g, h \in G^+\right\},$$

з визначеною на них операцією композиції часткових відображень. Прості обчислення показують, що

$$\alpha_h^g \cdot \alpha_l^k = \alpha_b^a, \qquad \text{де} \quad a = (h \vee k) \cdot h^{-1} \cdot g \quad \text{і} \quad b = (h \vee k) \cdot k^{-1} \cdot l, \tag{1.2}$$

для $g, h, k, l \in G$ і через $h \vee k$ позначимо супремум h та k в лінійно впорядкованій множині $(G, \leqslant)$. Тому з властивості 1) додатного конуса і умови (1.2) випливає, що $\mathscr{B}(G)$ і $\mathscr{B}^+(G)$ є піднапівгрупами симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_G$ над групою G.

За твердженням 1.2 з [93] для лінійно впорядкованої групи G виконуються такі умови:

(i) елементи α_h^g та α_g^h є інверсними в $\mathscr{B}(G)$ для всіх $g, h \in G$ (відповідно, $\mathscr{B}^+(G)$ для всіх $g, h \in G^+$);

(ii) елемент α_h^g напівгрупи $\mathscr{B}(G)$ (відповідно, $\mathscr{B}^+(G)$) є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли $g = h$;

(iii) $\mathscr{B}(G)$ і $\mathscr{B}^+(G)$ є інверсними піднапівгрупами в $\mathscr{I}_G$;

(iv) напівгрупа $\mathscr{B}(G)$ (відповідно, $\mathscr{B}^+(G)$) ізоморфна множині $S_G = G \times G$ (відповідно, $S_G^+ = G^+ \times G^+$) стосовно такої напівгрупової операції:

$$(a,b)(c,d) = \begin{cases} (c\cdot b^{-1}\cdot a, d), & \text{якщо } \ b<c; \\ (a,d), & \text{якщо } \ b=c; \\ (a, b\cdot c^{-1}\cdot d), & \text{якщо } \ b>c, \end{cases} \tag{1.3}$$

де $a,b,c,d \in G$ (відповідно, $a,b,c,d \in G^+$).

Зрозуміло, що:

(1) якщо група G ізоморфна адитивній групі цілих чисел $(\mathbb{Z},+)$ зі звичайним лінійним порядком $\leqslant$, то напівгрупа $\mathscr{B}^+(G)$ ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}(p,q)$ і напівгрупа $\mathscr{B}(G)$ ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ (див. [73]);

(2) якщо G — адитивна група дійсних чисел $(\mathbb{R},+)$ зі звичайним лінійним порядком $\leqslant$, то напівгрупа $\mathscr{B}(G)$ ізоморфна напівгрупі $B^2_{(-\infty,\infty)}$ (див. [123, 124]) і напівгрупа $\mathscr{B}^+(G)$ ізоморфна напівгрупі $B^1_{[0,\infty)}$ (див. [24, 25, 26, 27, 28]), і

(3) напівгрупа $\mathscr{B}(G)$ ізоморфна напівгрупі $S(G)$, яка означена в працях [75, 76].

Твердження 1.2.5 ([93, твердження 2.1])**.** *Нехай G — лінійно впорядкована група. Тоді виконуються такі умови:*

(i) якщо $\alpha_g^g, \alpha_h^h \in E(\mathscr{B}(G))$ (відповідно, $\alpha_g^g, \alpha_h^h \in E(\mathscr{B}^+(G))$), то $\alpha_g^g \preccurlyeq \alpha_h^h$ тоді і лише тоді, коли $g \geqslant h$ в G (відповідно, в G^+);

(ii) напівгратка $E(\mathscr{B}(G))$ (відповідно, $E(\mathscr{B}^+(G))$) ізоморфна G (відповідно, G^+), розглядаючи її як $\vee$-напівгратку над ізоморфізмом $(\alpha_g^g)\mathfrak{i} = g$;

(iii) $\alpha_h^g \mathscr{R} \alpha_l^k$ в $\mathscr{B}(G)$ (відповідно, в $\mathscr{B}^+(G)$) тоді і лише тоді, коли $g=k$ в G (відповідно, в G^+);

(iv) $\alpha_h^g \mathscr{L} \alpha_l^k$ в $\mathscr{B}(G)$ (відповідно, в $\mathscr{B}^+(G)$) тоді і лише тоді, коли $h=l$ в G (відповідно, в G^+);

(v) $\alpha_h^g \mathscr{H} \alpha_l^k$ *в* $\mathscr{B}(G)$ *(відповідно, в* $\mathscr{B}^+(G)$*) тоді і лише тоді, коли* $g = k$ *та* $h = l$ *в* G *(відповідно, в* G^+*), отже, кожен* $\mathscr{H}$*-клас в* $\mathscr{B}(G)$ *(відповідно, в* $\mathscr{B}^+(G)$*) є одноточковою множиною;*

(vi) $\alpha_h^g \mathscr{D} \alpha_l^k$ *в* $\mathscr{B}(G)$ *(відповідно, в* $\mathscr{B}^+(G)$*) для всіх* $g, h, k, l \in G$*, отже,* $\mathscr{B}(G)$ *(відповідно, в* $\mathscr{B}^+(G)$*) є біпростою напівгрупою;*

(vii) $\mathscr{B}(G)$ *(відповідно, в* $\mathscr{B}^+(G)$*) є простою напівгрупою.*

Якщо X — топологічний простір і A — підмножина в X, то через $\mathrm{cl}_X(A)$ та $\mathrm{int}_X(A)$ будемо позначати замикання та внутрішність множини A в просторі X.

Нагадаємо, що точка x топологічного простору X називається *ізольованою* в X, якщо $\{x\}$ — відкрита множина в просторі X.

Підмножина A топологічного простору X називається:

- *щільною* в X, якщо $\mathrm{cl}_X(A) = X$;
- *ко-щільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна підмножина в X;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{cl}_X(A)$ — ко-щільна множина в X;
- F_σ*-множиною* в X, якщо A є зліченним об'єднанням замкнених підмножин простору X.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається:

- T_0*-простором*, якщо X задовольняє аксіому T_0: *для довільних двох різних точок простору X існує відкритий окіл хоча б однієї з них, що не містить іншої*;
- T_1*-простором*, якщо X задовольняє аксіому T_1: *для довільних двох різних точок простору X існують відкриті околи кожної з них, що не містять іншої*;
- T_2*-простором* або *гаусдорфовим*, якщо X задовольняє аксіому T_2: *для довільних двох різних точок простору X існують їхні відкриті околи, що не перетинаються*;

- T_3-*простором* або *регулярним*, якщо X є T_1-простором і задовольняє аксіому T_3: *для довільної замкненої множини F у просторі X і точки $x \in X$, що не міститься в F, існують їхні відкриті околи $U(F)$ і $U(x)$, що не перетинаються*;

- $T_{3\frac{1}{2}}$-*простором* або *цілком регулярним*, чи *тихоновським*, якщо X є T_1-простором і задовольняє аксіому $T_{3\frac{1}{2}}$: *для довільної точки $x \in X$ і довільної замкненої множини F у просторі X, що не містить точку x, існує неперервне функція $f\colon X \to I$ така, що*

$$f(x) = 0 \qquad i \qquad f(y) = 1 \quad \textit{для всіх} \quad y \in F.$$

- *дискретним*, якщо кожна підмножина в X є відкритою;

- 0-*вимірним*, якщо існує база в X, що складається з відкрито-замкнених підмножин;

- *з дугою аксіомою зліченності*, якщо існує зліченна база в X;

- *розрідженим*, якщо кожна непорожна множина в X містить ізольовану в собі точку; item *метризовним*, якщо топологія простору X породжується деякою метрикою на X;

- *компактним*, якщо кожне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття;

- *секвенціально компактним*, якщо кожна послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ містить збіжну підпослідовність;

- *зліченно компактним*, якщо кожен замкнений дискретний підпростір в X є скінченним;

- *псевдокомпактним*, якщо X є цілком регулярним та кожна неперервна дійснозначна функція на X є обмеженою;

- *локально компактним*, якщо кожна точка x з X має відкритий окіл $U(x)$ з компактним замиканням $\mathrm{cl}_X(U(x))$;

- *повним за Чехом*, якщо X є цілком регулярним та існує компактифікація cX простору X така, що $cX \setminus c(X)$ є F_σ-множиною в cX;

- *берівським*, якщо для кожної послідовності $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ відкритих щільних підмножин простору X перетин $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ є щільною підмножиною в X.

Кожен гаусдорфовий локально компактний простір є *повним за Чехом*, і кожен *повний за Чехом* простір є *берівським* (див. [22]).

Надалі топологію τ на множині X таку, що (X, τ) є гаусдорфовим (відповідно, регулярним, тихоновським, компактним, локально компактним і т. д.) простором, будемо називати *гаусдорфовою* (відповідно, *регулярною*, *тихоновською*, *компактною*, *локально компактною* і т. д.).

Наслідок 1.2.1 ([22, наслідок 3.3.10])**.** *Підпростір M локально компактного простору X є локально компактним тоді і лише тоді, коли його можна представити у вигляді $F \cap V$, де F замкненна в X і V відкрита в X.*

Теорема 1.2.6 (**метризаційна теорема Урисона**, [22, теорема 4.2.9])**.** *Простір з другою аксіомою зліченності є метризовним тоді і лише тоді, коли він є регулярним простором.*

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ з топологічного простору X в топологічний простір Y називається:

- *факторним*, якщо повний прообраз $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в просторі X тоді і тільки тоді, коли множина U є відкритою в топологічному просторі Y (див. [140] та [22, розділ 2.4]);

- *спадково факторним* або *псевдовідкритим*, якщо для кожної підмножини $B \subset Y$ звуження $f|_B\colon f^{-1}(B) \to B$ відображення f на $f^{-1}(B)$ є факторним відображенням (див. [137, 138, 1] та [22, розділ 2.4]);

- *замкненим*, якщо $f(F)$ є замкненим в Y для кожної замкненої підмножини F в X;
- *досконалим*, якщо простір X гаусдорфовий, f є замкненим відображенням і всі повні прообрази $f^{-1}(y)$ є компактними підмножинами в X [3].

Кожне замкнене відображення та кожне спадково факторне відображення є факторним [22]. Більше того, неперервне відображення $f\colon X \to Y$ з топологічного простору X на топологічний простір Y є спадково факторним тоді і лише тоді, коли для кожного $y \in Y$ та кожної відкритої підмножини U в X, що містить $f^{-1}(y)$, виконується $y \in \mathrm{int}_Y(f(U))$ (див. [22, 2.4.F]).

Теорема 1.2.7 ([10]). *Нехай $f\colon X \to Y$ – спадково факторне відображення з компактними прообразами точок, X – локально компактний гаусдорфовий простір і Y – гаусдорфовий простір. Тоді Y – локально компактний простір.*

Наслідок 1.2.2 ([22, наслідок 4.1.13]). *Кожен метризований простір цілком нормальний.*

Означення 1.2.8 ([22]). Неперервне відображення $f\colon X \to X$ називається ретракцією простору X, якщо $ff = f$; множина всіх значень ретракції простору X називається ретрактом простору X.

Твердження 1.2.9 ([22, твердження 1.5.C]). *Довільний ретракт гаусдорфового простору замкнений.*

Лема 1.2.3 ([6, лема 3]). *Якщо A — дискретний щільний підпростір T_1-топологічного простору X, то A — відкритий підпростір в X.*

Теорема 1.2.10 (**теорема Бера про категорії**, [22, теорема 3.9.3]). *У повному за Чехом просторі X об'єднання $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ послідовності*

$A_1, A_2, \ldots$ ніде не щільних множин є ко-щільною множиною, тобто доповнення $X \setminus A$ є щільним у X.

Твердження 1.2.11 ([100, твердження 1.30])**.** *Якщо X є зліченним берівськым T_1-простором, то множина ізольованих точок X є щільною в X. Більше того, якщо простір X зліченний та нескінченний, то множина ізольованих точок простору X є також нескінченною.*

Напівтопологічна (*топологічна*) *напівгрупа* є топологічним простором з нарізно неперервною (неперервною) напівгруповою операцією.

Інверсна напівгрупа S називається *топологічною інверсною напівгрупою*, якщо на ній задана топологія, відносно якої операції множення

$$\cdot\colon S \times S \to S, \qquad (x, y) \mapsto xy,$$

та інверсія

$$(\cdot)^{-1} : S \to S, x \mapsto x^{-1},$$

є неперервними.

Топологія τ на напівгрупі S називається:

- *трансляційно неперервною*, якщо (S, τ) є напівтопологічною напівгрупою;
- *напівгруповою*, якщо (S, τ) є топологічною напівгрупою.
- *інверсною напівгруповою*, якщо (S, τ) є топологічною інверсною напівгрупою.

Топологічна напівгрупа S називається Γ-*компактною*, якщо для кожного $x \in S$ замикання множини $\{x, x^2, x^3, \ldots\}$ є компактом в S (див. [103]).

Наслідок 1.2.3 ([71, наслідок I.2])**.** *Єдиною топологією на біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p, q)$, яка перетворює її в гаусдорфову топологічну напівгрупу, є дискретна топологія. Отже, $\mathscr{C}(p, q)$ – дискретний підпростір довільної топологічної напівгрупи, яка його містить.*

Теорема 1.2.12 ([71, теорема I.3], [48, твердження 1]). *Нехай біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ — щільна піднапівгрупа в гаусдорфовій (напів)топологічній напівгрупі S. Тоді $\mathscr{C}(p,q)$ є відкритою підмножиною в просторі S і $S\setminus\mathscr{C}(p,q)$ є ідеалом в S за умови, що $S\setminus\mathscr{C}(p,q)\neq\varnothing$.*

Теорема 1.2.13 ([73, теорема 3.1]). *Кожна гаусдорфова топологія τ на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ така, що $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\tau)$ є напівтопологічною напівгрупою, дискретна, а отже, $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є дискретним підпростором довільної гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи, яка містить $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ як піднапівгрупу.*

Означимо топологію τ_{Ac} на біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0=\mathscr{C}(p,q)\sqcup\{0\}$ наступним чином:

(i) кожен елемент біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ є ізольованою точкою в просторі $\left(\mathscr{C}^0,\tau_{\mathsf{Ac}}\right)$;

(ii) сім'я
$$\mathscr{B}=\left\{U\subseteq\mathscr{C}^0\colon U\ni 0 \text{ і } \mathscr{C}^0\setminus U - \text{ скінченна }\right\}$$
визначає базу топології τ_{Ac} в нулі $0\in\mathscr{C}^0$.

Очевидно, що τ_{Ac} є гаусдорфовою компактною трансляційно неперервною топологією на біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0$.

Теорема 1.2.14 ([83, теорема 2.9]). *Якщо $\mathscr{C}^0$ – гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа, то або $\mathscr{C}^0$ є дискретною, або $\mathscr{C}^0$ топологічно ізоморфна компактні напівтопологічній напівгрупі $\left(\mathscr{C}^0,\tau_{\mathsf{Ac}}\right)$.*

Теорема 1.2.15 ([83, теорема 3.2]). *Нехай $(\mathscr{C}_I,\tau)$ – гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа, $\mathscr{C}_I=\mathscr{C}(p,q)\sqcup I$ та множина I є компактним ідеалом в $(\mathscr{C}_I,\tau)$. Тоді або $(\mathscr{C}_I,\tau)$ є компактною напівтопологічною напівгрупою, або ідеал I є відкритою множиною в топологічному просторі $(\mathscr{C}_I,\tau)$.*

Наступна лема випливає з нарізної неперервності напівгрупової операції в напівтопологічних напівгрупах.

Лема 1.2.4. *Нехай S — гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа та I — компактний ідеал у S. Тоді фактор-напівгрупа Ріса S/I з фактор-топологією є гаусдорфовою напівтопологічною напівгрупою.*

Наслідок 1.2.4 ([83, наслідок 2.10])**.** *Якщо $\mathscr{C}^{\mathbf{0}}$ — гаусдорфова локально компактна топологічна напівгрупа, то $\mathscr{C}^{\mathbf{0}}$ є дискретним простором.*

Нехай $\mathbb{Z}_+^0$ — адитивна група цілих чисел з приєднаним нулем.

Твердження 1.2.16 ([85, твердження 4.5])**.** *Нехай $\mathbb{Z}_+^0$ локально компактна напівтопологічна напівгрупа. Тоді усі ненульові точки напівгрупи $\mathbb{Z}_+^0$ є ізольованими та виконується лише одна з наступних умов:*

(*i*) *нуль 0 є ізольованим в $\mathbb{Z}_+^0$;*

(*ii*) *сім'я*

$$\mathscr{B}_{cf} = \left\{U_F = \mathbb{Z}_+^0 \setminus F \colon F - \textit{скінченна підмножина в } \mathbb{Z}\right\}$$

є базою топології в нулі 0 напівгрупи $\mathbb{Z}_+^0$;

(*iii*) *сім'я*

$$\mathscr{B}^+ = \left\{U_F^+ = \mathbb{N}_+^0 \setminus F \colon F - \textit{скінченна підмножина в } \mathbb{N}\right\}$$

є базою топології в нулі 0 напівгрупи $\mathbb{Z}_+^0$;

(*iv*) *сім'я*

$$\mathscr{B}^- = \left\{U_F^- = \mathbb{Z}_+^0 \setminus (\mathbb{N} \cup F) \colon F - \textit{скінченна підмножина в } \mathbb{Z}\right\}$$

є базою топології в нулі 0 напівгрупи $\mathbb{Z}_+^0$.

Надалі в тексті дисертаційної роботи, якщо не зазначено інше, то будемо вважати, що всі топологічні простори є гаусдорфовими.

РОЗДІЛ 2

Напівтопологічні варіанти біциклічного моноїда

2.1 Трансляційно неперервні топологізації варіантів біциклічного моноїда

Для довільних $i, j \in \mathbb{N}_0$ позначимо

$$\mathscr{C}^*_{m,n} = \left\{q^{n+k}p^{m+l} \colon k, l \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

З напівгрупової операції $*_{m,n}$, визначеною на напівгрупі $\mathscr{C}_{m,n}$ випливає, що $\mathscr{C}^*_{m,n}$ є піднапівгрупою в $\mathscr{C}_{m,n}$.

Надалі нам буде потрібна така лема.

Лема 2.1.1. *Для довільних невід'ємних цілих чисел m і n піднапівгрупа $\mathscr{C}^*_{m,n}$ напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$ стосовно відображення*

$$\iota \colon \mathscr{C}(p,q) \to \mathscr{C}^*_{m,n} \colon q^i p^j \mapsto q^{n+i}p^{m+j}, \qquad i, j \in \mathbb{N}_0.$$

Доведення. Достатньо показати, що так визначене відображення $\iota \colon \mathscr{C}(p,q) \to \mathscr{C}^*_{m,n}$ є гомоморфізмом, оскільки ι є бієктивним. Для довільних $i, j, k, l \in \mathbb{N}_0$ маємо, що

$$\iota(q^i p^j \cdot q^k p^l) = \begin{cases} \iota(q^{i-j+k}p^l), & \text{якщо } j < k; \\ \iota(q^i p^l), & \text{якщо } j = k; \\ \iota(q^i p^{j-k+l}), & \text{якщо } j > k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} q^{n+i-j+k}p^{m+l}, & \text{якщо } j < k; \\ q^{n+i}p^{m+l}, & \text{якщо } j = k; \\ q^{n+i}p^{m+j-k+l}, & \text{якщо } j > k \end{cases}$$

та

$$
\begin{aligned}
\iota(q^ip^j) *_{m,n} \iota(q^kp^l) &= q^{n+i}p^{m+j} *_{m,n} q^{n+k}p^{m+l} = \\
&= q^{n+i}p^{m+j} \cdot q^m p^n \cdot q^{n+k}p^{m+l} = \\
&= q^{n+i}p^{j} \cdot q^k p^{m+l} = \\
&= \begin{cases} q^{n+i-j+k}p^{m+l}, & \text{якщо } j < k; \\ q^{n+i}p^{m+l}, & \text{якщо } j = k; \\ q^{n+i}p^{m+j-k+l}, & \text{якщо } j > k, \end{cases}
\end{aligned}
$$

що і завершує доведення леми. □

З леми 1.2.2 і означення напівгрупової операції на $\mathscr{C}_{m,n}$ випливає

Лема 2.1.2. *Для довільних невід'ємних цілих чисел m та n і для всіх $a, b \in \mathscr{C}_{m,n}$ множини*

$$\{x \in \mathscr{C}_{m,n} \colon ax = b\} \qquad \textit{та} \qquad \{x \in \mathscr{C}_{m,n} \colon xa = b\}$$

є скінченними.

Теорема 2.1.1 узагальнює результат Ебергарта-Селдена з праці [71] (див. наслідок 1.2.3) про гаусдорфову напівгрупову топологізацію біциклічної напівгрупи та відповідне твердження Бертман-Веста з [48] (див. теорема 1.2.12) для напівтопологічних напівгруп.

Теорема 2.1.1. *Для довільних невід'ємних цілих чисел m і n кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія τ на $\mathscr{C}_{m,n}$ є дискретною. Отже, $\mathscr{C}_{m,n}$ є дискретним підпростором довільної топологічної напівгрупи, яка її містить.*

Доведення. За теоремою 1.2.12 кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія $\tau_{\mathscr{C}}$ на біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$ є дискретною. Отже, з леми 2.1.1 випливає, що для довільного елемента $x \in \mathscr{C}^*_{m,n}$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x у топологічному просторі $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$ такий, що $U(x) \cap \mathscr{C}^*_{m,n} = \{x\}$. Зафіксуємо довільний відкритий окіл $U(q^n p^m)$ точки $q^n p^m$ в просторі $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$ такий, що

$$U(q^n p^m) \cap \mathscr{C}^*_{m,n} = \{q^n p^m\}.$$

З нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$ випливає, що існує відкритий окіл $V(q^n p^m) \subseteq U(q^n p^m)$ точки $q^n p^m$ в топологічному просторі $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$ такий, що

$$V(q^n p^m) *_{m,n} q^n p^m \subseteq U(q^n p^m) \qquad \text{і} \qquad q^n p^m *_{m,n} V(q^n p^m) \subseteq U(q^n p^m).$$

Припустимо протилежне: окіл $V(q^n p^m)$ є нескінченною множиною. Тоді виконується принаймні одна з таких умов:

(i) існує невід'ємне ціле число $i_0 < n$ таке, що множина

$$A = \left\{q^{i_0} p^l \colon l \in N\right\} \cap V(q^n p^m)$$

нескінченна;

(ii) існує невід'ємне ціле число $j_0 < m$ таке, що множина

$$B = \left\{q^l p^{j_0} \colon l \in N\right\} \cap V(q^n p^m)$$

нескінченна.

У випадку (i) для довільного $q^{i_0} p^l \in A$ маємо, що

$$\begin{aligned} q^n p^m *_{m,n} q^{i_0} p^l &= q^n p^m q^m p^n q^{i_0} p^l = \\ &= q^n p^n q^{i_0} p^l = \\ &= q^n q^{n-i_0+l} \notin U(q^n p^m); \end{aligned}$$

і аналогічно у випадку (ii):

$$\begin{aligned} q^l p^{j_0} *_{m,n} q^n p^m &= q^l p^{j_0} q^m p^n q^n p^m = \\ &= q^l p^{j_0} q^m p^m = \\ &= q^{m-j_0+l} p^m \notin U(q^n p^m), \end{aligned}$$

для кожного $q^l p^{j_0} \in B$, що суперечить нарізній неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$. З отриманої суперечності випливає, що $q^n p^m$ – ізольована точка в просторі $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$.

Оскільки напівгрупа $\mathscr{C}_{m,n}$ є простою, то з леми 2.1.2 випливає, що топологія τ на $\mathscr{C}_{m,n}$ є дискретною. □

За лемою 2.1.1 напівгрупа $\mathscr{C}_{m,n}$ містить біциклічну напівгрупу як піднапівгрупу. З результатів робіт [30], [34], [35], [97], [103] випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.1.1. *Нехай m і n — довільні невід'ємні цілі числа. Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа S задовольняє одну з наступних умов:*

(i) S є компактною;

(ii) S є Γ-компактною;

(iii) квадрат $S \times S$ є зліченно компактним;

(iv) квадрат $S \times S$ є тихонівським псевдокомпактним простором,

то S не містить напівгрупу $\mathscr{C}_{m,n}$.

2.2 Замикання варіантів біциклічного моноїда

Теорема 2.2.1 узагальнює відповідні результати Ебергарта-Селдена з праці [71] та Бертман-Уеста з [48] (див. теорема 1.2.12) про замикання біциклічного моноїда в (напів)топологічній напівгрупі.

Теорема 2.2.1. *Якщо m і n — довільні невід'ємні цілі числа, інтерасоціативність $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ є щільною піднапівгрупою гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S,\cdot)$ та $I = S \setminus \mathscr{C}_{m,n} \neq \varnothing$, то I є двобічним ідеалом напівгрупи S.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $y \in I$. Якщо $x \cdot y = z \notin I$ для деякого $x \in \mathscr{C}_{m,n}$, то існує відкритий окіл $U(y)$ точки y в топологічному просторі S такий, що $\{x\} \cdot U(y) = \{z\} \subset \mathscr{C}_{m,n}$. Множина $U(y)$ містить нескінчену кількість елементів напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$, що суперечить лемі 2.1.2. З отриманої суперечності випливає, що $x \cdot y \in I$ для всіх $x \in \mathscr{C}_{m,n}$ та $y \in I$. Доведення того, що $y \cdot x \in I$ для всіх $x \in \mathscr{C}_{m,n}$ та $y \in I$ є аналогічним.

Тепер доведемо, що виконується включення $I \cdot I \subseteq I$. Припустимо протилежне: $x \cdot y = w \notin I$ для деяких $x, y \in I$. Тоді $w \in \mathscr{C}_{m,n}$ і з нарізної неперервності напівгрупової операції в S випливає, що існують відкриті околи $U(x)$ і $U(y)$ точок x і y, відповідно, в просторі S, такі що $\{x\} \cdot U(y) = \{w\}$ та $U(x) \cdot \{y\} = \{w\}$. Оскільки обидва околи $U(x)$ і $U(y)$ містять нескінчену кількість елементів напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$, то кожна з рівностей

$$\{x\} \cdot U(y) = \{w\} \qquad \text{і} \qquad U(x) \cdot \{y\} = \{w\}$$

суперечить лемі 2.1.2. З отриманого протиріччя випливає, що виконується умова $x \cdot y \in I$, а отже I є двобічним ідеалом напівгрупи S. □

Для довільних невід'ємних цілих чисел m і n через $\mathscr{C}^0_{m,n}$ позначимо напівгрупу $\mathscr{C}_{m,n}$ з приєднаним нулем 0.

Приклад 2.2.1. На напівгрупі $\mathscr{C}_{m,n}^0$ означимо топологію τ_{Ac} так:

(i) кожен елемент напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ є ізольованою точкою в просторі $\left(\mathscr{C}_{m,n}^0, \tau_{\mathsf{Ac}}\right)$;

(ii) сім'я

$$\mathscr{B}(0) = \left\{U \subseteq \mathscr{C}_{m,n}^0 \colon U \ni 0 \text{ та } \mathscr{C}_{m,n} \setminus U \text{ є скінченною}\right\}$$

визначає базу топології τ_{Ac} в нулі $0 \in \mathscr{C}_{m,n}^0$,

тобто, τ_{Ac} є топологією одноточкової компактифікації Алєксандрова дискретного простору $\mathscr{C}_{m,n}$ з одноточковим наростом. Напівгрупова операція в $\left(\mathscr{C}_{m,n}^0, \tau_{\mathsf{Ac}}\right)$ є нарізно неперервною, оскільки всі елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ є ізольованими точками в просторі $(\mathscr{C}_{m,n}^0, \tau_{\mathsf{Ac}})$, а прообрази точок стосовно лівих і правих зсувів напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ є скінченними (див. лему 2.1.2).

Зауваження 2.2.1. За теоремою 2.1.1 дискретна топологія τ_{d} – єдина гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на інтерасоціативності $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ для довільних невід'ємних цілих чисел m і n. Звідси випливає, що τ_{Ac} — єдина топологія на $\mathscr{C}_{m,n}^0$ така, що $(\mathscr{C}_{m,n}^0, \tau_{\mathsf{Ac}})$ гаусдорфова компактна напівтопологічна напівгрупа для довільних невід'ємних цілих чисел m і n.

Теорема 2.2.2 узагальнює результат Гутіка з праці [83] (див. теорему 1.2.14) про те, що кожна локально компактна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на біциклічному моноїді з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною.

Теорема 2.2.2. *Нехай m і n — довільні невід'ємні цілі числа. Тоді кожна гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа $\mathscr{C}_{m,n}^0$ є або дискретною, або $\mathscr{C}_{m,n}^0$ топологічно ізоморфна напівтопологічній напівгрупі $\left(\mathscr{C}_{m,n}^0, \tau_{\mathsf{Ac}}\right)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільну гаусдорфову трансляційно неперервну локально компактну топологію τ на $\mathscr{C}^0_{m,n}$ і нуль 0 напівгрупи $\mathscr{C}^0_{m,n}$ не є ізольованою точкою в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau\right)$. За лемою 2.1.1 піднапівгрупа $\mathscr{C}^*_{m,n}$ в $\mathscr{C}_{m,n}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$, а, отже, піднапівгрупа $\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0=\mathscr{C}^*_{m,n}\sqcup\{0\}$ напівгрупи $\mathscr{C}^0_{m,n}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0=\mathscr{C}(p,q)\sqcup\{0\}$. З теореми 2.1.1 випливає, що $\mathscr{C}_{m,n}$ є щільним дискретним підпростором в $\mathscr{C}^0_{m,n}$, а, отже, за наслідком 1.2.1 підпростір $\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0$ в $\mathscr{C}^0_{m,n}$ є локально компактним. За теоремою 1.2.14 топологічний простір $\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0$ є компактним. Тоді для кожного відкритого околу $U(0)$ нуля 0 в просторі $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau\right)$ множина $\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0\setminus U(0)$ є скінченною. З означення напівгрупової операції на $\mathscr{C}^0_{m,n}$ випливає, що множина

$$\mathscr{C}^0_{m,n}\setminus\left(p^m*_{m,n}\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0\cup\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0*_{m,n}q^n\right)$$

скінченна, а, отже, з вищенаведених аргументів випливає, що кожен відкритий окіл $U(0)$ нуля 0 має скінченне доповнення в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau\right)$. Отож, простір $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau\right)$ є компактним і за зауваженням 2.2.1 напівтопологічна напівгрупа $\mathscr{C}^0_{m,n}$ топологічно ізоморфна напівтопологічній напівгрупі $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau_{\mathsf{Ac}}\right)$. □

За наслідком 2.1.1 інтерасоціативність $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ не вкладається в жодну гаудорфову компактну топологічну напівгрупу, а отже з теореми 2.2.2 випливає такий наслідок:

Наслідок 2.2.1. *Для довільних невід'ємних цілих чисел m і n кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на $\mathscr{C}^0_{m,n}$ є дискретною.*

Наступний приклад стверджує, що аналог наслідку 2.2.1 не виконується у випадку, коли гаусдорфова топологічна напівгрупа $\mathscr{C}^0_{m,n}$ є повним за Чехом метризованим простором, для довільних невід'ємних цілих чисел m і n.

Приклад 2.2.2. Зафіксуємо довільні невід'ємні цілі числа m та n. На напівгрупі $\mathscr{C}^0_{m,n}$ означимо топологію τ_1 так:

(i) кожен елемент напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$;

(ii) сім'я $\mathscr{B}_1(0) = \{U_s \colon s \in N\}$, де

$$U_s = \{0\} \cup \left\{q^{n+i}p^{m+j} \in \mathscr{C}^0_{m,n} \colon i, j > s\right\},$$

визначає базу топології τ_1 в нулі $0 \in \mathscr{C}^0_{m,n}$.

Очевидно, що $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ є простором з першою аксіомою зліченності. Тоді означення напівгрупової операції на $\mathscr{C}^0_{m,n}$ та аргументи, наведені в [5, с. 68] стверджують, що $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ є гаусдорфовою топологічною напівгрупою.

Зауважимо, що кожен елемент сім'ї $\mathscr{B}_1(0)$ є відкрито-замкненою підмножиною в протсорі $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$, а отже, топологічний простір $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ є регулярним. Оскільки множина $\mathscr{C}^0_{m,n}$ є зліченною, то з означення топології τ_1 випливає, що $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ є простором з другою аксіомою зліченності, а отже, за метризаційною теоремою Урисона (див. теорема 1.2.6) топологічний простір $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ є метризовним. Також слід зазначити, що топологічний простір $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ є повним за Чехом як об'єднання двох повних за Чехом просторів: дискретного простору $\mathscr{C}_{m,n}$ та одноточкового простору $\{0\}$.

Наступний приклад показує, що аналог твердження теореми 2.2.2 (а отже, і наслідку 2.2.1) не виконується для довільної інтерасоціативності біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0$.

Приклад 2.2.3. Зрозуміло, що інтерасоціативність біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0$ з операцією

$$a *_0 b = a \cdot 0 \cdot b,$$

ізоморфна довільній нескінченній зліченній напівгрупі з нульовим множенням, тобто нуль-напівгрупі. Відомо, що нуль-напівгрупа з довільною на ній заданою топологією є топологічною напівгрупою (див. [54, розділ 1]), звідки випливає, що на варіанті біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0$ нульовою сендвіч-операцією кожна топологія є напівгруповою.

Теорема 2.2.3 описує приєднання компактного ідеалу до ненульового варіанта біциклічного моноїда у випадку локально компактної гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи. Також теорема 2.2.3 узагальнює відповідний результат, отриманий для біциклічної напівгрупи у праці Гутіка [83].

Теорема 2.2.3. *Нехай $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$ – гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа, $\mathscr{C}_{m,n}^I = \mathscr{C}_{m,n} \sqcup I$ й I компактний ідеал в $\mathscr{C}_{m,n}^I$. Тоді або $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$ є компактною напівтопологічною напівгрупою, або ідеал I є відкритою множиною в $\mathscr{C}_{m,n}^I$.*

Доведення. Припустимо, що ідеал I не є відкритим. За лемою 1.2.4 фактор-напівгрупа Ріса $\mathscr{C}_{m,n}^I/I$ з фактор-топологією τ_{q} є напівтопологічною напівгрупою. Нехай $\pi\colon \mathscr{C}_{m,n}^I \to \mathscr{C}_{m,n}^I/I$ — природний гомоморфізм, що є факторним відображенням. Очевидно, що фактор-напівгрупа Ріса $\mathscr{C}_{m,n}^I/I$ ізоморфна напівгрупі $\mathscr{C}_{m,n}^0$ і образ $\pi(I)$ є нулем у напівгрупі $\mathscr{C}_{m,n}^0$.

Доведемо, що природний гомоморфізм $\pi\colon \mathscr{C}_{m,n}^I \to \mathscr{C}_{m,n}^I/I$ є спадково факторним відображенням. Оскільки $\pi(\mathscr{C}_{m,n})$ є дискретним підпростором у фактор-просторі $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$, то достатньо довести, що для кожного відкритого околу $U(I)$ ідеалу I в просторі $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$ образ $\pi(U(I))$ є відкритим околом нуля 0 у фактор-просторі $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$. Справді, $\mathscr{C}_{m,n}^I \setminus U(I)$ є відкрито-замкненою підмножиною в топологічному просторі $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$, оскільки всі елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{m,n}$ є ізольованими точками простору $(\mathscr{C}^I_{m,n},\tau)$. Оскільки звуження $\pi|_{\mathscr{C}_{m,n}}\colon \mathscr{C}_{m,n}\to\pi(\mathscr{C}_{m,n})$ природного гомоморфізму $\pi\colon \mathscr{C}^I_{m,n}\to\mathscr{C}^I_{m,n}/I$ є взаємно-однозначним відображенням, то $\pi(\mathscr{C}^I_{m,n}\setminus U(I))$ є відкрито-замкненою підмножиною фактор-простору $(\mathscr{C}^I_{m,n}/I,\tau_{\mathsf{q}})$. Таким чином, образ $\pi(U(I))$ є відкритим околом нуля 0 в фактор-просторі $(\mathscr{C}^I_{m,n}/I,\tau_{\mathsf{q}})$, а, отже, природний гомоморфізм $\pi\colon \mathscr{C}^I_{m,n}\to\mathscr{C}^I_{m,n}/I$ є спадково факторним відображенням.

Оскільки I є компактним ідеалом напівтопологічної напівгрупи $(\mathscr{C}^I_{m,n},\tau)$, то повний прообраз $\pi^{-1}(y)$ є компактною підмножиною в просторі $(\mathscr{C}^I_{m,n},\tau)$ для кожного елемента $y\in\mathscr{C}^I_{m,n}/I$. За теоремою Дінь Ньйо Тонга (див. [10] або теорему 1.2.7), $(\mathscr{C}^I_{m,n}/I,\tau_{\mathsf{q}})$ є гаусдорфовим локально компактним простором. Якщо ідеал I не є відкритим, то за теоремою 2.2.2 напівтопологічна напівгрупа $(\mathscr{C}^I_{m,n}/I,\tau_{\mathsf{q}})$ топологічно ізоморфна напівгрупі $(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau_{\mathsf{Ac}})$, а отже, є компактною.

Тепер доведемо, що простір $(\mathscr{C}^I_{m,n},\tau)$ компактний. Нехай $\mathscr{U}=\{U_\alpha\colon \alpha\in\mathscr{I}\}$ – довільне відкрите покриття топологічного простору $(\mathscr{C}^I_{m,n},\tau)$. Оскільки ідеал I компактний, то існують елементи $U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n}$ покриття $\mathscr{U}$ такі, що $I\subseteq U_{\alpha_1}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n}$. Покладемо

$$U=U_{\alpha_1}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n}.$$

Тоді $\mathscr{C}^I_{m,n}\setminus U$ є відкрито-замкненою підмножиною в топологічному просторі $(\mathscr{C}^I_{m,n},\tau)$. Оскільки звуження $\pi|_{\mathscr{C}_{m,n}}\colon \mathscr{C}_{m,n}\to\pi(\mathscr{C}_{m,n})$ природного гомоморфізму $\pi\colon \mathscr{C}^I_{m,n}\to\mathscr{C}^I_{m,n}/I$ є взаємно однозначним відображенням, то образ $\pi(\mathscr{C}^I_{m,n}\setminus U(I))$ є відкрито-замкненою підмножиною у фактор-просторі $(\mathscr{C}^I_{m,n}/I,\tau_{\mathsf{q}})$, а, отже, множина $\pi(\mathscr{C}^I_{m,n}\setminus U(I))$ є скінченною, оскільки топологічний простір фактор-напівгрупи $(\mathscr{C}^I_{m,n}/I,\tau_{\mathsf{q}})$ є компактним. Звідси випливає, що множина $\mathscr{C}^I_{m,n}\setminus U$ скінченна, відтак простір $(\mathscr{C}^I_{m,n},\tau)$ також компактний. $\square$

Наслідок 2.2.2. *Якщо $(\mathscr{C}^I_{m,n},\tau)$ – гаусдорфова локально компактна* *топологічна напівгрупа,* $\mathscr{C}^I_{m,n} = \mathscr{C}_{m,n} \sqcup I$ *та* I *є компактним ідеалом в* $\mathscr{C}^I_{m,n}$*, то* I *є відкритою підмножиною в* $\mathscr{C}^I_{m,n}$.

Зауважимо, що наслідок 2.2.2 узагальнює відповідне твердження для біциклічної напівгрупи з праці [83].

2.3 Висновки до розділу 2

У цьому розділі дисертації:

1. Доведено, що для довільних невід'ємних цілих чисел m і n кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія τ на $\mathscr{C}_{m,n}$ є дискретною, а, отже, $\mathscr{C}_{m,n}$ є дискретним підпростором довільної топологічної напівгрупи, що її містить.

2. Доведено, що якщо $\mathscr{C}_{m,n}$ – довільна інтерасоціативність біциклічного моноїда така, що $\mathscr{C}_{m,n}$ є щільною піднапівгрупою гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S, \cdot)$ і $I = S \setminus \mathscr{C}_{m,n} \neq \varnothing$, то I є двобічним ідеалом напівгрупи S.

3. Доведено, що для довільних невід'ємних цілих чисел m і n довільна гаусдорфова локально компактна трансляційно неперервна топологія τ на інтерасоціативності $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}^0_{m,n}$ з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною.

РОЗДІЛ 3

Варіанти розширеної біциклічної напівгрупи

3.1 Група автоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи

У цьому розділі описана група $\mathbf{Aut}\,(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ автоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ та вивчається варіант $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n} = (\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, *_{m,n})$ розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, де $m, n \in \mathbb{Z}$, що визначається за формулою

$$(a, b) *_{m,n} (c, d) = (a, b) \cdot (m, n) \cdot (c, d). \tag{3.1}$$

Лема 3.1.1. *Для довільного цілого числа k множина*

$$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\geqslant k} = \{(i, j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \colon i, j \geqslant k\}$$

з індукованою з $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ напівгруповою операцією ізоморфна біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p, q)$ стосовно відображення:

$$h_k \colon \mathscr{C}(p, q) \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\geqslant k}, \qquad q^i p^j \mapsto (i + k, j + k).$$

Доведення. Оскільки

$$h_k\left(q^m p^n \cdot q^i p^j\right) = \begin{cases} h_k\left(q^{m-n+i} p^j\right), & \text{якщо } m < i; \\ h_k\left(q^n p^j\right), & \text{якщо } m = i; \\ h_k\left(q^n p^{m-i+j}\right), & \text{якщо } m > i; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (m - n + i + k, j + k), & \text{якщо } m < i; \\ (n + k, j + k), & \text{якщо } m = i; \\ (n + k, m - i + j + k), & \text{якщо } m > i; \end{cases}$$

та

$$h_k\left(q^m p^n\right)\cdot h_k\left(q^i p^j\right) = (m+k, n+k)\cdot(i+k, j+k) =$$
$$= \begin{cases} (m-n+i+k, j+k), & \text{якщо } m<i; \\ (n+k, j+k), & \text{якщо } m=i; \\ (n+k, m-i+j+k), & \text{якщо } m>i, \end{cases}$$

для довільних елементів $q^m p^n$ і $q^i p^j$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$, то так визначене відображення $h_k\colon \mathscr{C}(p,q)\to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\geqslant k}$ є гомоморфізмом, і очевидно, що h_k є біекцією. □

Теорема 3.1.1. *Для довільного цілого числа k відображення $h_k\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, визначене за формулою*

$$h_k\left((i,j)\right) = (i+k, j+k), \tag{3.2}$$

є автоморфізмом розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і кожен автоморфізм $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ визначається за формулою (3.2). *Більше того, група автоморфізмів $\mathbf{Aut}\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\right)$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$ і цей ізоморфізм $\mathfrak{H}\colon \mathbb{Z}(+)\to \mathbf{Aut}\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\right)$ визначається за формулою $\mathfrak{H}(k)=h_k$, $k\in\mathbb{Z}$.*

Доведення. Для довільних $(m,n),(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ маємо

$$h_k\left((m,n)\cdot(i,j)\right) = \begin{cases} h_k\left((m-n+i, j)\right), & \text{якщо } m<i; \\ h_k\left((n,j)\right), & \text{якщо } m=i; \\ h_k\left((n, m-i+j)\right), & \text{якщо } m>i \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} (m-n+i+k, j+k), & \text{якщо } m<i; \\ (n+k, j+k), & \text{якщо } m=i; \\ (n+k, m-i+j+k), & \text{якщо } m>i \end{cases}$$

та

$$h_k((m,n))\cdot h_k((i,j)) = (m+k,n+k)\cdot(i+k,j+k) =$$
$$= \begin{cases} (m-n+i+k, j+k), & \text{якщо } m>i; \\ (n+k, j+k), & \text{якщо } m=i; \\ (n+k, m-i+j+k), & \text{якщо } m<i. \end{cases}$$

Внаслідок простої перевірки отримуємо, що для кожного цілого числа k так визначене відображення h_k є бієктивним, а, отже, воно є автоморфізмом розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.

Нехай $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ – довільний автоморфізм розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Оскільки елемент $(0,0)$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то $\mathfrak{h}((0,0))$ також є ідемпотентом в напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, а, отже, за твердженням 1.2.4(i) маємо, що $\mathfrak{h}((0,0)) = (k,k)$ для деякого цілого числа k. Позаяк елемент $(1,1)$ є найбільшим у підмножині

$$\{(n,n)\in E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})\colon (n,n)\preccurlyeq(0,0)\}\setminus\{(0,0)\}$$

частково впорядкованої множини $(E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}),\preccurlyeq)$ і $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ – автоморфізм напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то

$$\mathfrak{h}((1,1)) = (k+1,k+1),$$

а це випливає з того факту, що елемент $(k+1,k+1)$ є найбільшим у підмножині

$$\{(n,n)\in E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})\colon (n,n)\preccurlyeq(k,k)=\mathfrak{h}((0,0))\}\setminus\{(k,k)\}$$

частково впорядкованої множини $(E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}),\preccurlyeq)$. Тоді за індукцією отримуємо, що

$$\mathfrak{h}((i,i)) = (i+k,i+k)$$

для кожного натурального числа i. Також, позаяк елемент $(-1,-1)$ є найменшим у підмножині

$$\{(n,n)\in E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})\colon (0,0)\preccurlyeq(n,n)\}\setminus\{(0,0)\}$$

частково впорядкованої множини $(E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}), \preccurlyeq)$ і $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ – автоморфізм напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то

$$\mathfrak{h}\left((-1,-1)\right) = (k-1, k-1),$$

а це випливає з того факту, що елемент $(k-1, k-1)$ є найменшим у підмножині

$$\{(n,n) \in E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})\colon (k,k) = \mathfrak{h}\left((0,0)\right) \preccurlyeq (n,n)\} \setminus \{(k,k)\}$$

частково впорядкованої множини $(E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}), \preccurlyeq)$. Тоді за індукцією отримуємо, що

$$\mathfrak{h}\left((-i,-i)\right) = (-i+k, -i+k)$$

для кожного натурального числа i.

Оскільки $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ автоморфізм розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ – інверсна напівгрупа та за твердженням 1.2.4(iv) кожен $\mathscr{H}$-клас в $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є одноелементним, то з рівностей

$$\mathbf{L}_{(i,j)} = \mathbf{L}_{(j,j)}, \qquad \mathbf{R}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,i)} \qquad \text{та} \qquad \mathbf{H}_{(i,j)} = \mathbf{L}_{(i,j)} \cap \mathbf{R}_{(i,j)}$$

випливають рівності

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{h}((i,j))} = \mathbf{L}_{\mathfrak{h}((j,j))}, \quad \mathbf{R}_{\mathfrak{h}((i,j))} = \mathbf{R}_{\mathfrak{h}((i,i))} \quad \text{та} \quad \mathbf{H}_{\mathfrak{h}((i,j))} = \mathbf{L}_{\mathfrak{h}((i,j))} \cap \mathbf{R}_{\mathfrak{h}((i,j))},$$

а, отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned}
\{\mathfrak{h}((i,j))\} &= \mathbf{H}_{\mathfrak{h}((i,j))} = \\
&= \mathbf{L}_{\mathfrak{h}((i,j))} \cap \mathbf{R}_{\mathfrak{h}((i,j))} = \\
&= \mathbf{L}_{(i+k,j+k)} \cap \mathbf{R}_{(i+k,j+k)} = \\
&= \left\{(i+k, j+k)\right\},
\end{aligned}$$

для всіх цілих чисел i та j. Це завершує доведення першого твердження теореми.

Для довільних цілих чисел k_1 та k_2 маємо:

$$\begin{aligned}(h_{k_1} \circ h_{k_2})(i,j) &= h_{k_1}(h_{k_2}((i,j))) = \\ &= h_{k_1}((i+k_2, j+k_2)) = \\ &= (i+k_2+k_1, j+k_2+k_1) = \\ &= (h_{k_1+k_2})(i,j),\end{aligned}$$

відображення

$$h_0 \colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \qquad (i,j) \mapsto (i,j)$$

є тотожнім автоморфізмом напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і

$$h_{-k_1} \colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \qquad (i,j) \mapsto (i-k_1, j-k_1)$$

є оберненим відображенням до відображення $h_{k_1} \colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Це завершує доведення другого твердження теореми. □

Будемо говорити, що підмножина $F \subset S$ *породжує напівгрупу* S, якщо кожен елемент напівгрупи S можна зобразити, як скінченний добуток деяких елементів множини F, і в цьому випадку ми записуватимемо це так: $\langle F \rangle = S$.

Напівгрупа S називається *скінченно породженою*, якщо S містить скінченну множину F, яка її породжує, а в протилежному випадку будемо говорити, що напівгрупа S не є *скінченно породженою.*

С. Бардила на семінарі "Теорія полігонів та спектральні простори" у Львівському університеті поставив таке запитання:

Питання 3.1.1. Чи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$, $m,n \in \mathbb{Z}$ є скінченно породженими?

Ми даємо негативну відповідь на це запитання (див. теорему 3.1.2).

Лема 3.1.2. *Для кожної скінченної підмножини*

$$F = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)\}$$

розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *існує піднапівгрупа* S *в* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *така, що* S *ізоморфна біциклічній напівгрупі та* S *містить напівгрупу* $\langle F\rangle$, *яка породжена множиною* F. *Окрім того,* $\langle F\rangle$ *є піднапівгрупою в* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\geqslant k}$, *де* $k = \min\{i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n\}$.

Доведення. За лемою 3.1.1, $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\geqslant k}$ є інверсною піднапівгрупою в $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ для довільного цілого числа k і з означення напівгрупової операції на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ (див. формулу (1.1)) випливає, що множина $\langle F\rangle$ є піднапівгрупою в $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\geqslant k}$ для $k = \min\{i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n\}$. $\square$

З леми 3.1.2 випливає

Теорема 3.1.2. *Розширена біциклічна напівгрупа* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *не є скінченно породженою як інверсна напівгрупа.*

Наслідок 3.1.1. *Розширена біциклічна напівгрупа* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *не є скінченно породженою як напівгрупа.*

3.2 Алгебраїчні властивості напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$

Позаяк напівгрупа S є простою тоді і лише тоді, коли $SsS = S$ для кожного $s \in S$, то виконується рівність $S(csc)S = S$ для всіх $s, c \in S$. А оскільки за твердженням 1.2.4(v) розширена біциклічна напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є простою, то виконується

Твердження 3.2.1. $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$ *– проста напівгрупа для довільних цілих чисел* m *і* n.

Твердження 3.2.2. *Нехай* m *і* n *– довільні цілі числа. Тоді елемент* (a, b) *є ідемпотентом у напівгрупі* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$(a, b) = (n + i, m + i)$$

для деякого невід'ємного цілого числа i.

Доведення. $(\Leftarrow)$ Припустимо, що $a = n + i$ та $b = m + i$ для деякого $i \in \mathbb{N}_0$. Тоді

$$\begin{aligned}
(a, b) *_{m,n} (a, b) &= (n + i, m + i) \cdot (m, n) \cdot (n + i, m + i) = \\
&= (n + i, m + i - m + n) \cdot (n + i, m + i) = \\
&= (n + i, i + n) \cdot (n + i, m + i) = \\
&= (n + i, m + i) = \\
&= (a, b).
\end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$ З визначення напівгрупової операції на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$ та пунктів (ix) і (x) твердження 1.2.4 випливає, що для довільного елемента (a, b) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$ маємо:

$$
\begin{aligned}
(a,b) *_{m,n} \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n} &= (a,b)\cdot(m,n)\cdot\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} = \\
&= \begin{cases} (a, b-m+n)\cdot\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, & \text{якщо } b \geqslant m; \\ (a-b+m, n)\cdot\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, & \text{якщо } b < m \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}\colon x \geqslant a\right\}, & \text{якщо } b \geqslant m; \\ \left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}\colon x \geqslant a-b+m\right\}, & \text{якщо } b < m \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

та

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n} *_{m,n} (a,b) &= \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\cdot(m,n)\cdot(a,b) = \\
&= \begin{cases} \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\cdot(a-n+m, b), & \text{якщо } a \geqslant n; \\ \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\cdot(m, n-a+b), & \text{якщо } a < n \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}\colon y \geqslant b\right\}, & \text{якщо } a \geqslant n; \\ \left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}\colon y \geqslant n-a+b\right\}, & \text{якщо } a < n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Оскільки

$$
(a,b) = (a,b) *_{m,n} (a,b) \subseteq (a,b) *_{m,n} \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n} \cap \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n} *_{m,n} (a,b),
$$

то з формул (3.3), (3.4) випливає, що $b \geqslant m$ і $a \geqslant n$. Тоді

$$
\begin{aligned}
(a,b) *_{m,n} (a,b) = (a,b)\cdot(m,n)\cdot(a,b) &= \\
&= (a, b-m+n)\cdot(a,b) = \\
&= \begin{cases} (2a-b-n+m, b), & \text{якщо } a \geqslant b-m+n; \\ (a, 2b-a-m+n), & \text{якщо } a < b-m+n \end{cases}
\end{aligned}
$$

і, отже, з рівності $(a,b) *_{m,n} (a,b) = (a,b)$ випливає, що $a-b = n-m$. Оскільки a та b — такі цілі числа, що $b \geqslant m$ і $a \geqslant n$, то з рівності $a-b = n-m$ випливає, що $(a,b) = (n+i, m+i)$ для деякого невід'ємного цілого числа i. □

Оскільки

$$
E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}) = \left\{(n+i, m+i)\colon i \in \mathbb{N}_0\right\},
$$

то позначатимемо ідемпотент $(n+i, m+i)$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$ через e_i для довільного $i \in \mathbb{N}_0$.

Лема 3.2.1. *Нехай m і n – довільні цілі числа. Тоді $e_i \preccurlyeq e_j$ в $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n})$ тоді і тільки тоді, коли $j \leqslant i$, а, отже, напівгратка $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n})$ є ω-ланцюгом.*

Доведення. Якщо $e_i \preccurlyeq e_j$ в $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n})$, то з рівностей

$$\begin{aligned} e_i *_{m,n} e_j &= (n+i, m+i) \cdot (m, n) \cdot (n+j, m+j) = \\ &= (n+i, n+i) \cdot (n+j, m+j) = \\ &= (n+i, m+i) = e_i \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} e_j *_{m,n} e_i &= (n+j, m+j) \cdot (m, n) \cdot (n+i, m+i) = \\ &= (n+j, n+j) \cdot (n+i, m+i) = \\ &= (n+i, m+i) = e_i \end{aligned}$$

випливає, що $j \leqslant i$. Обернене твердження випливає з означення напівгрупової операції на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$.

Ізоморфізм $\varphi\colon E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}) \to (\mathbb{N}_0, \max)$ визначимо за формулою $\varphi(e_i) = i$, де $i \in \mathbb{N}_0$. □

Наступне твердження описує відношення Гріна на варіанті $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$ розширеної біциклічної напівгрупи.

Твердження 3.2.3. *Нехай m і n – довільні цілі числа, (a,b) і (c,d) елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$. Тоді:*

(1) $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$(a = c) \wedge ((b = d) \vee (b, d \geqslant m));$$

(2) $(a,b)\mathscr{L}(c,d)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$(b = d) \wedge ((a = c) \vee (a, c \geqslant n));$$

(3) $(a,b)\mathscr{H}(c,d)$ *тоді і тільки тоді, коли* $(a,b)=(c,d)$*;*

(4) $(a,b)\mathscr{D}(c,d)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$(a,b)=(c,d)\vee(a,c\geqslant n)\vee(b,d\geqslant m);$$

(5) $(a,b)\mathscr{J}(c,d)$ *для всіх* $(a,b),(c,d)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$.

Доведення. З рівностей (3.3) випливає, що:

$$\{(a,b)\}\cup(a,b)*_{m,n}\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}=$$
$$=\begin{cases}\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}\colon x\geqslant a\}, & \text{якщо } b\geqslant m;\\ \{(a,b)\}\cup\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}\colon x\geqslant a-b+m\}, & \text{якщо } b<m.\end{cases}$$

З цієї формули випливає твердження (1).

Доведення твердження (2) аналогічне твердженню (1).

Твердження (3) випливає з тверджень (1) і (2).

Для доведення твердження (4), розглянемо такі три випадки.

(*i*) Якщо $a<n$ і $b<m$, то за твердженнями (1) і (2), маємо, що $(x,y)\mathscr{R}(a,b)$ тоді і лише тоді, коли $(x,y)=(a,b)$ та $(x,y)\mathscr{L}(a,b)$, а це виконується тоді і лише тоді, коли $(x,y)=(a,b)$, для $(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$. Отже, у цьому випадку отримуємо, що $(c,d)\mathscr{R}(a,b)$ тоді і лише тоді, коли $(c,d)=(a,b)$.

(*ii*) Якщо $a\geqslant n$, то за твердженнями (1) і (2), маємо, що $\mathscr{L}$-клас $\mathbf{L}_{(a,b)}$ елемента (a,b) перетинає $\mathscr{R}$-клас $\mathbf{R}_{(x,y)}$ довільного елемента (x,y) з $y\geqslant m$.

(*iii*) Якщо $b\geqslant m$, то за твердженнями (1) і (2), маємо, що $\mathscr{R}$-клас $\mathbf{R}_{(a,b)}$ елемента (a,b) перетинає $\mathscr{L}$-клас $\mathbf{L}_{(x,y)}$ довільного елемента (x,y) з $x\geqslant n$.

Отже, у випадках (ii) або (iii) отримуємо, що $(a,b)\mathscr{D}(c,d)$ тоді і лише тоді, коли $(a,c\geqslant n)\vee(b,d\geqslant m)$, а використавши випадок (i), отримуємо твердження (4).

З твердження 3.2.1 випливає твердження (5). □

Лема 3.2.2. *Для довільних ідемпотентів (i,i) та (j,j) розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ варіанти $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{i,i}$ та $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{j,j}$ ізоморфні.*

Доведення. За теоремою 3.1.1 для кожного натурального числа k відображення

$$h_k\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\quad (i,j)\mapsto(i+k,j+k)$$

є автоморфізмом розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$. Звідси випливає, що відображення h_k визначає ізоморфізм $\mathfrak{h}_k\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{k,k}$ варіантів $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ і $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{k,k}$ розширеної біциклічної напівгрупи для кожного натурального числа k. Справді, покладемо $\mathfrak{h}_k\left((a,b)\right)=h_k\left((a,b)\right)$ для кожного $(a,b)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$. Тоді

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_k\big((a,b)*_{(0,0)}(c,d)\big) &= h_k\big((a,b)*_{(0,0)}(c,d)\big)=\\
&= h_k\left((a,b)\cdot(0,0)\cdot(c,d)\right)=\\
&= h_k\left((a,b)\right)\cdot h_k\left((0,0)\right)\cdot h_k\left((c,d)\right)=\\
&= (a+k,b+k)\cdot(k,k)\cdot(c+k,d+k)=\\
&= (a+k,b+k)*_{(k,k)}(c+k,d+k)=\\
&= h_k\left((a,b)\right)*_{(k,k)}h_k\left((c,d)\right)=\\
&= \mathfrak{h}_k\left((a,b)\right)*_{(k,k)}\mathfrak{h}_k\left((c,d)\right),
\end{aligned}$$

для довільних $(a,b),(c,d)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$. Оскільки для довільного натурального числа k відображення

$$h_k\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\qquad (i,j)\mapsto(i+k,j+k),$$

як власне відображення множини $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, є бієктивним, то маємо, що

$\mathfrak{h}_k\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{k,k}$ є ізоморфізмом варіантів $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ і $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{k,k}$. Це і завершує доведення леми. □

Лема 3.2.3. *Для довільного цілого числа r та довільного натурального числа p варіанти $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r,r}$ та $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r+p,r}$ розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфні.*

Доведення. Зафіксуємо довільне ціле число r та довільне натуральне число p. Визначимо відображення $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r,r} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r+p,r}$ за формулою

$$\mathfrak{h}\left((r+i, r+j)\right) = (r+i, r+j+p).$$

Тоді для довільних елементів $(r+i, r+j)$ і $(r+k, r+l)$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r,r}$ маємо, що

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}\left((r+i, r+j) \ *_{r,r} \ (r+k, r+l)\right) = \\
&= \mathfrak{h}\left((r+i, r+j)\cdot(r,r)\cdot(r+k, r+l)\right) = \\
&= \begin{cases}
\mathfrak{h}\left((r+i-j, r)\cdot(r+k, r+l)\right), & \text{якщо } r+j<r; \\
\mathfrak{h}\left((r+i, r)\cdot(r+k, r+l)\right), & \text{якщо } r+j=r; \\
\mathfrak{h}\left((r+i, r+j)\cdot(r+k, r+l)\right), & \text{якщо } r+j>r.
\end{cases} = \\
&= \begin{cases}
\mathfrak{h}\left((r+i-j+k, r+l)\right), & \text{якщо } r+j<r \ \text{ і } \ r<r+k; \\
\mathfrak{h}\left((r+i-j, r+l)\right), & \text{якщо } r+j<r \ \text{ і } \ r=r+k; \\
\mathfrak{h}\left((r+i-j, r-k+l)\right), & \text{якщо } r+j<r \ \text{ і } \ r>r+k; \\
\mathfrak{h}\left((r+i+k, r+l)\right), & \text{якщо } r+j=r \ \text{ і } \ r<r+k; \\
\mathfrak{h}\left((r+i, r+l)\right), & \text{якщо } r+j=r \ \text{ і } \ r=r+k; \\
\mathfrak{h}\left((r+i, r-k+l)\right), & \text{якщо } r+j=r \ \text{ і } \ r>r+k; \\
\mathfrak{h}\left((r+i-j+k, r+l)\right), & \text{якщо } r+j>r \ \text{ і } \ r+j<r+k; \\
\mathfrak{h}\left((r+i, r+l)\right), & \text{якщо } r+j>r \ \text{ і } \ r+j=r+k; \\
\mathfrak{h}\left((r+i, r+j-k+l)\right), & \text{якщо } r+j>r \ \text{ і } \ r+j>r+k
\end{cases} \qquad =
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \mathfrak{h}\left((r+i-j+k, r+l)\right), & \text{якщо } j<0 \ \text{ i } \ k>0; \\ \mathfrak{h}\left((r+i-j, r+l)\right), & \text{якщо } j<0 \ \text{ i } \ k=0; \\ \mathfrak{h}\left((r+i-j, r-k+l)\right), & \text{якщо } j<0 \ \text{ i } \ k<0; \\ \mathfrak{h}\left((r+i+k, r+l)\right), & \text{якщо } j=0 \ \text{ i } \ k>0; \\ \mathfrak{h}\left((r+i, r+l)\right), & \text{якщо } j=0 \ \text{ i } \ k=0; \\ \mathfrak{h}\left((r+i, r-k+l)\right), & \text{якщо } j=0 \ \text{ i } \ k<0; \\ \mathfrak{h}\left((r+i-j+k, r+l)\right), & \text{якщо } j>0 \ \text{ i } \ k>j; \\ \mathfrak{h}\left((r+i, r+l)\right), & \text{якщо } j>0 \ \text{ i } \ k=j; \\ \mathfrak{h}\left((r+i, r+j-k+l)\right), & \text{якщо } j>0 \ \text{ i } \ k<j \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (r+i-j+k, r+l+p), & \text{якщо } j<0 \ \text{ i } \ k>0; \\ (r+i-j, r+l+p), & \text{якщо } j<0 \ \text{ i } \ k=0; \\ (r+i-j, r-k+l+p), & \text{якщо } j<0 \ \text{ i } \ k<0; \\ (r+i+k, r+l+p), & \text{якщо } j=0 \ \text{ i } \ k>0; \\ (r+i, r+l+p), & \text{якщо } j=0 \ \text{ i } \ k=0; \\ (r+i, r-k+l+p), & \text{якщо } j=0 \ \text{ i } \ k<0; \\ (r+i-j+k, r+l+p), & \text{якщо } j>0 \ \text{ i } \ k>j; \\ (r+i, r+l+p), & \text{якщо } j>0 \ \text{ i } \ k=j; \\ (r+i, r+j-k+l+p), & \text{якщо } j>0 \ \text{ i } \ k<j \end{cases}$$

та

$$\mathfrak{h}\,(r+i, r+j) *_{r+p,r} \mathfrak{h}\left((r+k, r+l)\right) =$$

$$= (r+i, r+j+p) \cdot (r+p, r) \cdot (r+k, r+l+p) =$$

$$= \begin{cases} (r+i-j, r) \cdot (r+k, r+l+p), & \text{якщо } r+j+p < r+p; \\ (r+i, r) \cdot (r+k, r+l+p), & \text{якщо } r+j+p = r+p; \\ (r+i, r+j) \cdot (r+k, r+l+p), & \text{якщо } r+j+p > r+p. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (r+i-j+k, r+l+p), & \text{якщо } r+j+p<r+p \ \text{ і } \ r<r+k; \\ (r+i-j, r+l+p), & \text{якщо } r+j+p<r+p \ \text{ і } \ r=r+k; \\ (r+i-j, r+l-k+p), & \text{якщо } r+j+p<r+p \ \text{ і } \ r>r+k; \\ (r+i+k, r+l+p), & \text{якщо } r+j+p=r+p \ \text{ і } \ r<r+k; \\ (r+i, r+l+p), & \text{якщо } r+j+p=r+p \ \text{ і } \ r=r+k; \\ (r+i, r+l-k+p), & \text{якщо } r+j+p=r+p \ \text{ і } \ r>r+k; \\ (r+i-j+k, r+l+p), & \text{якщо } r+j+p>r+p \ \text{ і } \ r+j<r+k; \\ (r+i, r+l+p), & \text{якщо } r+j+p>r+p \ \text{ і } \ r+j=r+k; \\ (r+i, r+j-k+l+p), & \text{якщо } r+j+p>r+p \ \text{ і } \ r+j>r+k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (r+i-j+k, r+l+p), & \text{якщо } j<0 \ \text{ і } \ k>0; \\ (r+i-j, r+l+p), & \text{якщо } j<0 \ \text{ і } \ k=0; \\ (r+i-j, r+l-k+p), & \text{якщо } j<0 \ \text{ і } \ k<0; \\ (r+i+k, r+l+p), & \text{якщо } j=0 \ \text{ і } \ k>0; \\ (r+i, r+l+p), & \text{якщо } j=0 \ \text{ і } \ k=0; \\ (r+i, r+l-k+p), & \text{якщо } j=0 \ \text{ і } \ k<0; \\ (r+i-j+k, r+l+p), & \text{якщо } j>0 \ \text{ і } \ j<k; \\ (r+i, r+l+p), & \text{якщо } j>0 \ \text{ і } \ j=k; \\ (r+i, r+j-k+l+p), & \text{якщо } j>0 \ \text{ і } \ j>k, \end{cases}$$

оскільки $\mathfrak{h}((r,r)) = (r, r+p)$, а, отже, $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r,r} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r+p,r}$ є гомоморфізмом. З означення відображення $\mathfrak{h}$ випливає, що воно є бієкцією, отже, $\mathfrak{h}$ є ізоморфізмом. □

Лема 3.2.4. *Для довільного цілого числа r та довільного натурального числа p варіанти $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r,r}$ та $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r,r+p}$ розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфні.*

Доведення. Означимо відображення $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r,r} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{r,r+p}$ за формулою

$$\mathfrak{h}((r+i, r+j)) = (r+i, r+j+p).$$

Доведення того, що так визначене відображення $\mathfrak{h}$ є ізоморфізмом, аналогічне до доведення леми 3.2.3. □

З лем 3.2.2, 3.2.3 та 3.2.4 випливає

Теорема 3.2.4. *Довільні два варіанти розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфні.*

Теорема 3.2.5. *Варіант $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ не є скінченно породженим.*

Доведення. З формул (3.3) та (3.4) випливає, що

$$\begin{aligned}&\{(a,b)\}\cup(a,b)*_{0,0}\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}=\\&\qquad=\begin{cases}\left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}\colon x\geqslant a\right\}, & \text{якщо } b\geqslant 0;\\ \{(a,b)\}\cup\left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}\colon x\geqslant a-b\right\}, & \text{якщо } b<0\end{cases}\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}&\{(a,b)\}\cup\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}*_{0,0}(a,b)=\\&\qquad=\begin{cases}\left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}\colon y\geqslant b\right\}, & \text{якщо } a\geqslant 0;\\ \{(a,b)\}\cup\left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}\colon y\geqslant b-a\right\}, & \text{якщо } a<0.\end{cases}\end{aligned}$$

Отже, для кожної скінченної підмножини F напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ маємо, що множина

$$\left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}\colon x,y<0\right\}\setminus\langle F\rangle$$

є нескінченною, де $\langle F\rangle$ — піднапівгрупа напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$, яка породжена множиною F, а з цього і випливає твердження теореми. □

З теорем 3.2.4 та 3.2.5 випливає

Наслідок 3.2.1. *Для довільних цілих чисел m і n варіант $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$ розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ не є скінченно породженим.*

3.3 Трансляційно неперервні топології на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$

З простих обчислень та означення напівгрупової операції на розширеній біциклічній напівгрупі випливає така лема.

Лема 3.3.1. *Якщо $(a,b)\cdot(c,d)=(i,j)$ в розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то виконується рівність*

$$a-b+c-d=i-j.$$

З леми 3.3.1 випливає

Твердження 3.3.1. *Нехай m і n – довільні цілі числа. Якщо*

$$(a,b)*_{m,n}(c,d)=(i,j)$$

в розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$, то

$$a-b+m-n+c-d=i-j.$$

Наслідок 3.3.1. *Якщо $(a,b)*_{0,0}(c,d)=(i,j)$ у варіанті $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ біциклічної розширеної напівгрупи, то*

$$a-b+c-d=i-j.$$

Надалі для кожного елемента $(a,b)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ через $\lambda_{(a,b)}$ та $\rho_{(a,b)}$ позначатимемо, відповідно, лівий та правий зсуви на елемент (a,b) у напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$, тобто

$$\lambda_{(a,b)}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \qquad (x,y)\mapsto(a,b)*_{0,0}(x,y)$$

та

$$\rho_{(a,b)}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}\to\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \qquad (x,y)\mapsto(x,y)*_{0,0}(a,b).$$

Твердження 3.3.2. *Нехай τ – гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$. Тоді:*

(i) (a,b) — *ізольована точка в прострі* $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ *для довільних натуральних чисел* a *та* b*;*

(ii) *для довільних цілих чисел* a *та* b *множина*

$$\{(a-i,b-i)\colon i\in\mathbb{N}_0\}$$

відкрита в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$*;*

(iii) (a,b) — *ізольована точка в просторі* $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ *для довільного натурального числа* a *та довільного цілого числа* b*;*

(iv) (a,b) — *ізольована точка в просторі* $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ *для довільного цілого числа* a *та довільного натурального числа* b*.*

Доведення. (i) Зафіксуємо довільну точку (a,b) в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ таку, що $a>0$ і $b>0$. Оскільки за лемою 3.1.1 множина

$$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\geqslant 0}=\{(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon i,j\geqslant 0\}$$

з індукованою напівгруповою операцією з розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$ і за теоремою 1.2.12 кожна трансляційно неперервна гаусдорфова топологія на біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$ є дискретною, то існує відкритий окіл $U_{(a,b)}$ точки (a,b) в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ такий, що

$$U_{(a,b)}\cap\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\geqslant 0}=\{(a,b)\}\,.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}(i,i)*_{0,0}(x,y)&=(i,i)(0,0)(x,y)=\\ &=(i,i)(x,y)=\begin{cases}(i,i-x+y), & \text{якщо } x<i;\\ (i,y), & \text{якщо } x=i;\\ (x,y), & \text{якщо } x>i\end{cases}\end{aligned}$$

для довільного невід'ємного цілого числа i, то отримуємо, що

$$\{(s, l+s-k) \colon s \leqslant k, s \in \mathbb{Z}\}$$

є множиною розв'язків рівняння

$$(k, l) = (k, k) *_{0,0} (x, y)$$

для довільних невід'ємних цілих чисел k і l. Тоді з нарізної неперервності напівгрупової операції в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$, гаусдорфовості простору $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$ та наведених вище аргументів, випливає, що множина

$$\{(s, b+s-a) \colon s < a, s \in \mathbb{Z}\} = \lambda^{-1}_{(a-1,a-1)}(\{(a-1, b-1)\})$$

замкнена в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$ і множина

$$\{(s, b+s-a) \colon s \leqslant a, s \in \mathbb{Z}\} = \lambda^{-1}_{(a,a)}(U_{(a,b)})$$

відкрита в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$, а звідси випливає, що (a, b) є ізольованою точкою в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$.

(ii) З доведення умови (i) випливає, що множина

$$\{(s, b+s-a) \colon s \leqslant a, s \in \mathbb{Z}\} = \lambda^{-1}_{(a,a)}(U_{(a,b)})$$

відкрита в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$ для довільних натуральних чисел a і b, оскільки існує відкритий окіл $U_{(a,b)}$ точки (a, b) у топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$ такий, що

$$U_{(a,b)} \cap \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\geqslant 0} = \{(a, b)\}\,.$$

Якщо покладемо $i = a - s$, то

$$\{(a-i, b-i) \colon i \in \mathbb{N}_0\} = \lambda^{-1}_{(a,a)}(U_{(a,b)})$$

є відкритою підмножиною в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$. Очевидно, що для довільних цілих чисел a та b існує натуральне число $k_{(a,b)}$ таке, що

$$a + k_{(a,b)} > 0 \qquad \text{і} \qquad b + k_{(a,b)} > 0.$$

З гаусдорфовості простору $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ випливає, що кожна точка в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ є замкненою підмножиною, а отже, множина

$$\begin{aligned}\{(a-i,b-i)\colon i\in\mathbb{N}_0\} &=\\ &=\lambda^{-1}_{(a,a)}(U_{(a,b)})\setminus\left\{(a+1,b+1),\ldots,(a+k_{(a,b)},b+k_{(a,b)})\right\}\end{aligned}$$

є відкритою в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$, а звідси випливає необхідне твердження.

(iii) Оскільки

$$\begin{aligned}(i,i)*_{0,0}(x,y) &= (i,i)(0,0)(x,y) =\\ &= (i,i)(x,y) =\\ &= \begin{cases}(i,i-x+y), & \text{якщо } x<i;\\ (i,y), & \text{якщо } x=i;\\ (x,y), & \text{якщо } x>i\end{cases}\end{aligned}$$

для довільного невід'ємного цілого числа i, то

$$\{(s,l+s-k)\colon s\leqslant k, s\in\mathbb{Z}\}$$

є множиною розв'язків рівняння

$$(k,l)=(k,k)*_{0,0}(x,y)$$

для довільного невід'ємного цілого числа k і кожного цілого числа l. З нарізної неперервності напівгрупової операції в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ та гаусдорфовості простору $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ випливає, що множина

$$\{(s,l+s-k)\colon s\leqslant k, s\in\mathbb{Z}\}=\lambda^{-1}_{(k,k)}(\{(k,l)\})$$

є замкненою в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ для кожного невід'ємного цілого числа k і кожного цілого числа l. Зафіксуємо довільне натуральне число a та довільне ціле число b. Тоді з наведених вище аргументів і твердження (ii) випливає, що

$$\{(a,b)\}=\{(a-i,b-i)\colon i\in\mathbb{N}_0\}\setminus\lambda^{-1}_{(a-1,a-1)}(\{(a-1,b-1)\})$$

є відкритою підмножиною в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$.

(iv) Оскільки

$$\begin{aligned}(x,y)*_{0,0}(i,i) &= (x,y)(0,0)(i,i) = \\ &= (x,y)(i,i) = \\ &= \begin{cases}(i-y+x,i), & \text{якщо } y<i;\\ (x,i), & \text{якщо } y=i;\\ (x,y), & \text{якщо } y>i\end{cases}\end{aligned}$$

для довільного невід'ємного цілого числа i, то

$$\{(l+s-k,s)\colon s\leqslant k, s\in\mathbb{Z}\}$$

є множиною розвязків рівняння

$$(l,k)=(x,y)*_{0,0}(k,k)$$

для довільного невід'ємного цілого числа k і кожного цілого числа l. Тоді з нарізної неперервності напівгрупової операції в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ та гаусдорфовості простору $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ випливає, що множина

$$\{(l+s-k,s)\colon s\leqslant k, s\in\mathbb{Z}\}=\rho_{(k,k)}^{-1}(\{(l,k)\})$$

є замкненою в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$ для кожного невід'ємного цілого числа k і кожного цілого числа l. Зафіксуємо довільне ціле число a та довільне натуральне число b. Тоді з наведених вище аргументів та твердження (ii) випливає, що

$$\{(a,b)\}=\{(a-i,b-i)\colon i\in\mathbb{N}_0\}\setminus\rho_{(b-1,b-1)}^{-1}(\{(a-1,b-1)\})$$

є відкритою підмножиною в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0},\tau\right)$. $\square$

Підсумуємо результати твердження 3.3.2 в наступній теоремі.

Теорема 3.3.3. *Нехай τ – гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$. Тоді з кожної нерівності $a > 0$ або $b > 0$ випливає, що (a, b) є ізольованою точкою в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau\right)$.*

Наступний приклад показує, що твердження теореми 3.3.3 є повним і не може бути поширене на жодну точку (a, b) з властивістю $a \leqslant 0$ і $b \leqslant 0$.

Приклад 3.3.1. Означимо топологію τ^* на варіанті $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ розширеної біциклічної напівгрупи так. Покладемо

(i) (a, b) є ізольованою точкою в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ тоді і лише тоді, коли виконується принаймні одна з умов:

$$a > 0 \qquad \text{або} \qquad b > 0;$$

(ii) якщо $ab = 0$ та $a + b \leqslant 0$, то приймемо, що

$$A_{(a,b)} = \{(a - i, b - i) : i \in \mathbb{N}_0\}$$

– довільний гаусдорфовий простір і $A_{(a,b)}$ – відкрито-замкнена підмножина в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$.

Очевидно, що $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ є гаусдорфовим простором.

Твердження 3.3.4. $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ *є топологічною напівгрупою.*

Доведення. Оскільки (a, b) є ізольованою точкою в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ у випадку, коли $a > 0$ або $b > 0$, то достатньо показати, що напівгрупова операція в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ є неперервною в таких трьох випадках:

(1) $(a, b) *_{0,0} (c, d)$, коли $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$, $c \leqslant 0$ і $d \leqslant 0$;

(2) $(a, b) *_{0,0} (c, d)$, коли $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$, і $c > 0$ або $d > 0$;

(3) $(a, b) *_{0,0} (c, d)$, коли $c \leqslant 0$ і $d \leqslant 0$, і $a > 0$ або $b > 0$.

У випадку (1) маємо, що

$$\begin{aligned}(a,b) *_{0,0} (c,d) &= (a,b)(0,0)(c,d) = \\ &= (a-b,0)(c,d) = \\ &= (a-b,0)(c,d) = \\ &= (a-b,d-c).\end{aligned}$$

Також у цьому випадку, оскільки

$$\begin{aligned}(a-i,b-i) *_{0,0} (c-j,d-j) &= (a-i,b-i)(0,0)(c-j,d-j) = \\ &= (a-i-b+i,0)(c-j,d-j) = \\ &= (a-b,0)(c-j,d-j) = \\ &= (a-b,d-j-c+j) = \\ &= (a-b,d-c)\end{aligned}$$

для довільних $i,j \in \mathbb{N}_0$, то отримуємо, що справджується рівність

$$A_{(a,b)} *_{0,0} A_{(c,d)} = \{(a-b,d-c)\},$$

а, отже, у випадку (1) напівгрупова операція в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ є неперервною.

Припустимо, що виконується випадок (2). Тоді

$$\begin{aligned}(a,b) *_{0,0} (c,d) &= (a,b)(0,0)(c,d) = \\ &= (a-b,0)(c,d) = \\ &= \begin{cases} (a-b,d-c), & \text{якщо } c<0; \\ (a-b,d), & \text{якщо } c=0; \\ (c-a+b,d), & \text{якщо } c>0. \end{cases}\end{aligned}$$

У цьому випадку, оскільки

$$\begin{aligned}(a-i, b-i) *_{0,0} (c, d) &= (a-i, b-i)(0,0)(c,d) = \\ &= (a-i-b+i, 0)(c,d) = \\ &= (a-b, 0)(c,d) = \\ &= \begin{cases} (a-b, d-c), & \text{якщо } c<0; \\ (a-b, d), & \text{якщо } c=0; \\ (c-a+b, d), & \text{якщо } c>0, \end{cases}\end{aligned}$$

для кожного $i \in \mathbb{N}_0$, то маємо, що

$$A_{(a,b)} *_{0,0} \{(c,d)\} = \begin{cases} \{(a-b, d-c)\}, & \text{якщо } c<0; \\ \{(a-b, d)\}, & \text{якщо } c=0; \\ \{(c-a+b, d)\}, & \text{якщо } c>0, \end{cases}$$

а з цього і випливає, що напівгрупова операція в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ є неперервною у випадку (2).

Припустимо, що виконується випадок (3). Тоді

$$\begin{aligned}(a, b) *_{0,0} (c, d) &= (a,b)(0,0)(c,d) = \\ &= (a,b)(0, d-c) = \\ &= \begin{cases} (a-b, d-c), & \text{якщо } b<0; \\ (a, d-c), & \text{якщо } b=0; \\ (a, b-c+d), & \text{якщо } b>0. \end{cases}\end{aligned}$$

У цьому випадку, оскільки

$$\begin{aligned}(a, b) *_{0,0} (c-j, d-j) &= (a,b)(0,0)(c-j, d-j) = \\ &= (a,b)(0, d-j-c+j) = \\ &= (a,b)(0, d-c) = \\ &= \begin{cases} (a-b, d-c), & \text{якщо } b<0; \\ (a, d-c), & \text{якщо } b=0; \\ (a, b-c+d), & \text{якщо } b>0, \end{cases}\end{aligned}$$

для кожного $j \in \mathbb{N}_0$, то отримуємо, що

$$\{(a,b)\} *_{0,0} A_{(c,d)} = \begin{cases} \{(a-b, d-c)\}, & \text{якщо } b < 0; \\ \{(a, d-c)\}, & \text{якщо } b = 0; \\ \{(a, b-c+d)\}, & \text{якщо } b > 0, \end{cases}$$

а, отже, отримуємо, що у випадку (3) напівгрупова операція на $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}, \tau^*\right)$ є неперервною. $\square$

Зауваження 3.3.1. Оскільки за лемою 2.1.1, напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ містить біциклічну напівгрупу як піднапівгрупу, то з результатів, отриманих у статтях [30], [34], [35], [103] випливає, що *якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа S задовольняє одну з наступних умов:*

(i) *S — компактна;*

(ii) *S — Γ-компактна;*

(iii) *квадрат $S \times S$ зліченно компактний;*

(iv) *квадрат $S \times S$ є тихонівським псевдокомпактним простором,*

то S не містить алгебраїчну копію напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$.

3.4 Висновки до розділу 3

У цьому розділі отримано такі результати:

1. Доведено, що група автоморфізмів $\mathbf{Aut}(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел.

2. Доведено, що розширена біциклічна напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ і кожен її варіант не є скінченно породженими.

3. Описано підмножину ідемпотентів $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n})$ і відношення Гріна на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{m,n}$.

4. Доведено, що довільні два варіанти розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ є ізоморфними.

5. Описано трансляційно неперервні гаусдорфові топології на варіанті $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ розширеної біциклічної напівгрупи.

РОЗДІЛ 4

Напівтопологічна розширена біциклічна напівгрупа з приєднаним нулем

У цьому розділі через $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ позначатимемо розширену біциклічну напівгрупу $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ з приєднаним нулем $\mathbf{0}$.

4.1 Локально компактні трансляційно неперервні топології на розширеній біциклічній напівгрупі

З твердження 1.2.4$(viii)$ випливає

Наслідок 4.1.1. *Для кожного цілого числа n множина*

$$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n] = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}[n] \bigsqcup \{\mathbf{0}\}$$

є інверсною піднапівгрупою напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$, яка ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}^{\mathbf{0}}$ з приєднаним нулем стосовно відображення

$$h\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n] \to \mathscr{C}^{\mathbf{0}}, \qquad (a,b) \mapsto q^{a-n}p^{b-n} \qquad \textit{та} \qquad \mathbf{0} \mapsto \mathbf{0}.$$

Лема 4.1.1. *Нехай τ — недискретна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$. Тоді $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]$ — недискретна піднапівгрупа в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau\right)$ для довільного цілого числа n.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що за теоремою 1.2.13 усі ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є ізольованими точками в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau\right)$.

Припустимо протилежне: існує недискретна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія τ на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ і ціле число n такі, що $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]$ є дискретною піднапівгрупою напівтопологічної напівгрупи

$\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$. Зафіксуємо довільний відкритий окіл $U(\mathbf{0})$ нуля $\mathbf{0}$ у топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$ такий, що

$$U(\mathbf{0})\cap\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]=\{\mathbf{0}\}.$$

З нарізної неперервності напівгрупової операції в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$ випливає, що існує відкритий окіл $V(\mathbf{0})\subseteq U(\mathbf{0})$ нуля $\mathbf{0}$ у топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$ такий, що

$$(n,n)\cdot V(\mathbf{0})\cdot(n,n)\subseteq U(\mathbf{0}).$$

З припущення випливає, що кожен відкритий окіл $W(\mathbf{0})\subseteq U(\mathbf{0})$ нуля $\mathbf{0}$ в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$ містить нескінчену кількість точок (x,y) з властивістю: $x\leqslant n$ або $y\leqslant n$. Тоді для довільної ненульової точки $(x,y)\in V(\mathbf{0})$ з означення напівгрупової операції на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що:

$$\begin{aligned}(n,n)\cdot(x,y)\cdot(n,n)&=(n,n-x+y)\cdot(n,n)=\\&=\begin{cases}(n+x-y,n), & \text{якщо } y<x;\\(n,n), & \text{якщо } y=x;\\(n,n-x+y), & \text{якщо } y>x,\end{cases}\end{aligned}$$

а, отже, отримуємо, що

$$((n,n)\cdot V(\mathbf{0})\cdot(n,n))\cap\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}[n]\neq\varnothing,$$

а це суперечить припущенню

$$U(\mathbf{0})\cap\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]=\{\mathbf{0}\}.$$

З отриманої суперечності випливає твердження леми. □

Для довільного ненульового елемента $(a,b)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ позначимо

$${\uparrow_{\preccurlyeq}}(a,b)=\left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon (a,b)\preccurlyeq(x,y)\right\},$$

де $\preccurlyeq$ – природний частковий порядок на інверсній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$. Очевидно, що

$${\uparrow_{\preccurlyeq}}(a,b)=\left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon a-b=x-y \text{ та } x\leqslant a \text{ в } (\mathbb{Z},\leqslant)\right\}.$$

Лема 4.1.2. *Нехай* $(a,b),(c,d),(e,f)$ *– елементи напівгрупи* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *такі, що* $(a,b)\cdot(c,d)=(e,f)$. *Тоді виконуються такі умови.*

(i) *Якщо* $b\leqslant c$, *то* $(x,y)\cdot(c,d)=(e,f)$ *для довільного* $(x,y)\in{\uparrow_{\preccurlyeq}}(a,b)$ *й існує мінімальний елемент* $(\hat{a},\hat{b})\preccurlyeq(a,b)$ *в* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *такий, що* $(\hat{a},\hat{b})\cdot(c,d)=(e,f)$. *Також не існує іншого елемента* $(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *з властивістю*

$$(x,y)\cdot(c,d)=(e,f).$$

(ii) *Якщо* $b\geqslant c$, *то* $(a,b)\cdot(x,y)=(e,f)$ *для довільного* $(x,y)\in{\uparrow_{\preccurlyeq}}(c,d)$ *й існує мінімальний елемент* $(\hat{c},\hat{d})\preccurlyeq(c,d)$ *в* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *такий, що* $(a,b)\cdot(\hat{c},\hat{d})=(e,f)$. *Також не існує іншого елемента* $(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ *з властивістю*

$$(a,b)\cdot(x,y)=(e,f).$$

Доведення. (i) Оскільки $b\leqslant c$, то з означення напівгрупової операції на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що $(b,b)\cdot(c,d)=(c,d)$. Також, якщо $(a,b)\preccurlyeq(x,y)$ в інверсній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, то з леми 1.2.1(5) випливає, що

$$(x,y)\cdot(b,b)=(x,y)\cdot(a,b)^{-1}\cdot(a,b)=(a,b),$$

і, отже, маємо, що

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot(c,d)&=(x,y)\cdot((b,b)\cdot(c,d))=\\&=((x,y)\cdot(b,b))\cdot(c,d)=\\&=(a,b)\cdot(c,d)=\\&=(e,f).\end{aligned}$$

Покладемо $(\hat{a},\hat{b})=(a-b+c,c)$. Тоді з умови $(\hat{a},\hat{b})\preccurlyeq(a,b)$ та з означення напівгрупової операції на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ випливає, що елемент $(\hat{a},\hat{b})$ і є шуканим.

Останнє твердження випливає з твердження 1.2.4 і з означення напівгрупової операції на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.

Доведення твердження (ii) аналогічне. $\square$

Лема 4.1.3. *Нехай τ – недискретна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$. Тоді природний частковий порядок $\preccurlyeq$ є замкненим відношенням на $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$ і ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(a,b)$ є відкрито-замкненою підмножиною в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$ для довільного ненульового елемента (a,b) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$.*

Доведення. За теоремою 1.2.13 всі ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є ізольованими точками в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$. Оскільки $\mathbf{0}\preccurlyeq(a,b)$ для довільного елемента $(a,b)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$, то звідси і випливає перше твердження леми.

З означення природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ і з нарізної неперервності напівгрупової операції на $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$ випливає друге твердження леми, оскільки

$$
{\uparrow_{\preccurlyeq}}(a,b)=\left\{(x,y)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}\colon (a,a)\cdot(x,y)=(a,b)\right\}.
$$

Лему доведено. $\square$

Твердження 4.1.1. *Нехай напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ допускає недискретну гаусдорфову локально компактну трансляційно неперервну топологію τ. Тоді виконуються такі умови:*

(i) *для довільного відкритого околу $U(\mathbf{0})$ нуля $\mathbf{0}$ існує компактно-відкритий окіл $V(\mathbf{0})\subseteq U(\mathbf{0})$ нуля в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$;*

(ii) *множина ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(a,b)\cap U(\mathbf{0})$ є скінченною для довільного компактно-відкритого околу $V(\mathbf{0})\subseteq U(\mathbf{0})$ нуля $\mathbf{0}$ у просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$ та довільного ненульового елемента (a,b) з $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$;*

(iii) *для довільного відкритого околу $U(\mathbf{0})$ нуля $\mathbf{0}$ у просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}},\tau\right)$ та довільного цілого числа n множина $U(\mathbf{0})\setminus\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]$ є скінченною.*

Доведення. Твердження (i) випливає з теореми 1.2.13 та локальної компактності простору $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau\right)$.

Твердження (ii) випливає з леми 4.1.3 та теореми 1.2.13.

(iii) Очевидно, що $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n] = (n,n) \cdot \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}} \cdot (n,n)$ для довільного цілого числа n. Звідси випливає, що $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]$ є замкненою підмножиною в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau\right)$, оскільки $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]$ є ретрактом простору $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau\right)$ і, отже, за наслідком 1.2.1 є локально компактною. Оскільки топологія τ недискретна, то з леми 4.1.1 і теореми 1.2.14 випливає, що $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]$ є компактним підпростором у топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau\right)$. Наостанок, застосуємо теорему 1.2.13. □

Тепер побудуємо приклад недискретної гаусдорфової локально компактної трансляційно неперервної топології на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$, яка не є ні компактною, ні дискретною.

Приклад 4.1.1. Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ та $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — дві строго зростаючі послідовності натуральних чисел з такими властивостями: $x_1 > 1$, $y_1 > 1$ та

$$x_n + 1 < x_{n+1} \qquad \text{і} \qquad 2 < y_n + 1 < y_{n+1},$$

для довільного натурального числа n.

Позначимо

$$A_0 = {\uparrow_{\preccurlyeq}}(0,0) \cup \bigcup_{i=1}^{x_1-1} {\uparrow_{\preccurlyeq}}(0,-i) \cup \bigcup_{j=1}^{y_1-1} {\uparrow_{\preccurlyeq}}(-j,0)$$

та

$$A_n^d = \bigcup_{i=x_n}^{x_{n+1}-1} {\uparrow_{\preccurlyeq}}(-x_n,-i);$$

$$A_n^l = \bigcup_{j=y_n}^{y_{n+1}-1} {\uparrow_{\preccurlyeq}}(-j,-y_n),$$

для довільного натурального числа n. Далі покладемо

$$D = A_0 \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(A_i^d \cup A_i^l\right).$$

Для скінченної кількості $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ позначимо

$$U_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)} = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}} \setminus \left(D \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}(a_1, b_1) \cup \cdots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}(a_k, b_k)\right).$$

Визначимо топологію $\tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}$ на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ з приєднаним так:

(i) усі ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є ізольованими точками в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}\right)$;

(ii) сім'я

$$\mathscr{B}^{\mathbf{0}}_{\tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}} = \left\{U_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)} \colon (a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

є базою топології $\tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}$ в нулі $\mathbf{0}$.

Твердження 4.1.2. (1) *Сім'я* ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(a, b)\setminus D$ *є скінченною для довільного елемента* $(a, b) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$.

(2) D *є компактною підмножиною простору* $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}\right)$.

(3) *Простір* $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}\right)$ *є локально компактним і гаусдорфовим.*

Доведення. Твердження (1) є тривіальним у випадку, коли $(a, b) \in D$, а отже, припускаємо, що $(a, b) \notin D$. Таким чином, ми розглядаємо такі три випадки.

(i) Якщо $a = b$, то ${\uparrow_{\preccurlyeq}}(a, b) \setminus D = \{(1, 1), \ldots, (a, a)\}$.

(ii) Припустимо, що $a < b$. Тоді або існує натуральне число i таке, що $y_i \leqslant b - a < y_{i+1}$, або $b - a < y_1$. У першому випадку отримуємо, що

$$\begin{aligned}{\uparrow_{\preccurlyeq}}(a, b) \setminus D &= \{(-i + 1 - b + a, -i + 1), \ldots, (a, b)\} = \\ &= \bigcup \{(k - b + a, k) \colon k = -i + 1, \ldots, b\}.\end{aligned}$$

У другому випадку маємо, що $b > 0$, а отже,

$$\begin{aligned}\uparrow_{\preccurlyeq}(a,b) \setminus D &= \{(1-b+a,1),\ldots,(a,b)\} = \\ &= \bigcup \{(k-b+a,k)\colon k=1,\ldots,b\}\,.\end{aligned}$$

(iii) Припустимо, що $a > b$. Тоді або існує натуральне число j таке, що $x_j \leqslant a-b < x_{j+1}$, або $a-b < x_1$. У першому випадку отримуємо, що

$$\begin{aligned}\uparrow_{\preccurlyeq}(a,b) \setminus D &= \{(-j+1,-j+1-a+b),\ldots,(a,b)\} = \\ &= \bigcup \{(k,k-a+b)\colon k=-j+1,\ldots,a\}\,.\end{aligned}$$

У другому випадку маємо, що $a > 0$, а отже,

$$\begin{aligned}\uparrow_{\preccurlyeq}(a,b) \setminus D &= \{(1,1-a+b),\ldots,(a,b)\} = \\ &= \bigcup \{(k,k-a+b)\colon k=1,\ldots,a\}\,.\end{aligned}$$

Твердження (2) випливає з твердження (1).

Оскільки всі ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є ізольованими точками в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}\right)$, то твердження (3) випливає з твердження (2). $\square$

Для довільного ненульового елемента (a,b) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ позначимо

$$S^{\underline{b}\uparrow} = \{(x,y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon y \geqslant b\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

і

$$S^{\overrightarrow{\shortmid a}} = \{(x,y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon x \geqslant a\} \cup \{\mathbf{0}\}\,.$$

Очевидно, що $(a,b)\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}} = S^{\overrightarrow{\shortmid a}}$ і $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}(a,b) = S^{\underline{b}\uparrow}$ для довільного ненульового елемента (a,b) напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$.

Теорема 4.1.3. $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}\right)$ *– напівтопологічна напівгрупа.*

Доведення. З означення топології $\tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}$ випливає, що достатньо довести, що ліві та праві зсуви на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є неперервними в нулі $\mathbf{0}$.

Зафіксуємо довільний базовий відкритий окіл $U_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)}$ нуля $\mathbf{0}$ в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}\right)$.

З означення топології $\tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}$ випливає, що існує скінченна кількість ненульових елементів $(e_1, f_1), \ldots, (e_m, f_m)$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ з $e_1, \ldots, e_m \geqslant a$ таких, що

$$U_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)} \cap S^{\overrightarrow{|a}} = S^{\overrightarrow{|a}} \setminus \left({\uparrow_{\preccurlyeq}}(e_1, f_1) \cup \cdots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}(e_m, f_m)\right).$$

Оскільки $(a, b)\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}} = S^{\overrightarrow{|a}}$, то за лемою 4.1.2$(ii)$ існують мінімальні елементи $(\hat{c}_1, \hat{d}_1), \ldots, (\hat{c}_m, \hat{d}_m)$ в напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ такі, що

$$(a, b) \cdot (\hat{c}_1, \hat{d}_1) = (e_1, f_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a, b) \cdot (\hat{c}_m, \hat{d}_m) = (e_m, f_m).$$

Тоді з цих рівностей випливає, що

$$(a, b) \cdot U_{(\hat{c}_1,\hat{d}_1),\ldots,(\hat{c}_m,\hat{d}_m)} \subseteq U_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)}.$$

Аналогічно, існує скінченна кількість ненульових елементів $(e_1, f_1), \ldots, (e_p, f_p)$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ з $f_1, \ldots, f_p \geqslant b$ таких, що

$$U_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)} \cap S^{\underline{b}\uparrow} = S^{\underline{b}\uparrow} \setminus \left({\uparrow_{\preccurlyeq}}(e_1, f_1) \cup \cdots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}(e_p, f_p)\right).$$

Оскільки $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}(a, b) = S^{\underline{b}\uparrow}$, то за лемою 4.1.2$(i)$ існують мінімальні елементи $(\hat{c}_1, \hat{d}_1), \ldots, (\hat{c}_p, \hat{d}_p)$ в напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ такі, що

$$(\hat{c}_1, \hat{d}_1) \cdot (a, b) = (e_1, f_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\hat{c}_p, \hat{d}_p) \cdot (a, b) = (e_p, f_p).$$

Тоді з цих рівностей випливає, що

$$U_{(\hat{c}_1,\hat{d}_1),\ldots,(\hat{c}_p,\hat{d}_p)} \cdot (a, b) \subseteq U_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)},$$

а це завершує доведення нарізної неперервності напівгрупової операції в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}\right)$. $\square$

Якщо в прикладі 4.1.1 покладемо $x_i = y_i$ для довільного $i \in \mathbb{N}$ і позначимо $\tau_{\{x_n\}} = \tau_{\{x_n\}}^{\{y_n\}}$, то

$$\left(U_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)}\right)^{-1} = U_{(b_1,a_1),\ldots,(b_k,a_k)}$$

для довільних $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. З цього та теореми 4.1.3 випливає такий наслідок:

Наслідок 4.1.2. $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\{x_n\}}\right)$ *– гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа з неперервною інверсією.*

З теореми 4.1.3 випливає, що на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ існує континуум різних гаусдорфових локально компактних трансляційно неперервних топологій. Однак з леми 4.1.1 випливає наступний аналог наслідку 1.2.4:

Наслідок 4.1.3. *Кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на напівгрупі* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ *є дискретною.*

4.2 Мінімальні трансляційно неперервні та інверсні напівгрупові топології на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$

Означення 4.2.1 ([94]). Гаусдорфову напівтопологічну (відповідно топологічну, топологічну інверсну) напівгрупу (S,τ) будемо називати *мінімальною*, якщо жодна гаусдорфова трансляційно неперервна (відповідно напівгрупова, напівгрупова інверсна) топологія на S строго міститься в τ. Якщо (S,τ) є мінімальною напівтопологічною (відповідно топологічною, топологічною інверсною) напівгрупою, тоді τ називається *мінімальною трансляційно неперервною* (відповідно *напівгруповою*, *напівгруповою інверсною*) топологією.

У праці [40] вивчалися мінімальні топології на біциклічному моноїді з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0$. Зокрема в [40], було побудовано мінімальну інверсну напівгрупову топологію на $\mathscr{C}^0$.

Приклад 4.2.1 ([40]). Означимо топологію τ_{min} на біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0$ наступним чином:

(i) кожен елемент біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ є ізольованою точкою в просторі $\left(\mathscr{C}^0,\tau_{\mathsf{Ac}}\right)$;

(ii) сім'я $\mathscr{B}=\{U_n\colon n\in\mathbb{N}\}$, де

$$U_n=\{0\}\bigcup\{q^ip^j\colon i,j\geq n\},$$

визначає базу топології τ_{Ac} в нулі $0\in\mathscr{C}^0$.

Твердження 4.2.2 ([40]). *τ_{min} – мінімальна інверсна напівгрупова топологія на $\mathscr{C}^0$.*

Надалі, трансляційно неперервну топологію tau на інверсні напівгрупі S, стосовно якої інверсія на (S,τ) неперервна, називатимемо *інверсною трансляційно неперервною.*

Тому виникає природне запитання: *чи на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем* $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ *існують мінімальні інверсні напівгрупові та мінімальні інверсні трансляційно неперервні топології?*

У цьому підрозділі ми побудуємо на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ мінімальні інверсні напівгрупові та мінімальні інверсні трансляційно неперервні топології.

Приклад 4.2.2. Для скінченної кількості $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ позначимо

$$U^{\uparrow}_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)} = \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}} \setminus \left(\uparrow_{\preccurlyeq}(a_1, b_1) \cup \cdots \cup \uparrow_{\preccurlyeq}(a_k, b_k)\right).$$

Означимо топологію $\tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}$ на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ наступним чином:

(i) всі ненульові елементи в $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є ізольованими точками в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}\right)$;

(ii) сім'я

$$\mathscr{B}^{\mathbf{0}}_{\tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}} = \left\{U^{\uparrow}_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)} \colon (a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}},\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

є базою топології $\tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}$ в нулі $\mathbf{0}$.

Зауважимо, що за лемою 4.1.3 простір $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}\right)$ є гаусдорфовим, 0-вимірним та розрідженим, а отже, є регулярним. Оскільки база $\mathscr{B}^{\mathbf{0}}_{\tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}}$ є зліченною, то, згідно метризаційної теореми Урисона (див. теорема 1.2.6), простір $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}\right)$ є метризовним і, отже, за наслідком 1.2.2, він цілком нормальний.

Твердження 4.2.3. $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau^{sh}_{min}\right)$ *є мінімальною напівтопологічною напівгрупою з неперервною інверсією.*

Доведення. З означення топології $\tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}$ випливає, що достатньо довести, що ліві та праві зсуви в $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є неперервними в нулі $\mathbf{0}$.

Зафіксуємо довільний ненульовий елемент $(a,b) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ та довільний базовий відкритий окіл $U^{\uparrow}_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)}$ нуля $\mathbf{0}$ в просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}\right)$.

З означення топології $\tau^{\mathsf{sh}}_{\mathsf{min}}$ випливає, що існує скінченна кількість ненульових елементів $(e_1,f_1),\ldots,(e_m,f_m)$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ з $e_1,\ldots,e_m \geqslant a$ таких, що

$$U^{\uparrow}_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)} \cap S^{\overrightarrow{\shortmid a}} = S^{\overrightarrow{\shortmid a}} \setminus \left({\uparrow_{\preccurlyeq}}(e_1,f_1) \cup \cdots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}(e_m,f_m)\right).$$

Оскільки $(a,b)\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}} = S^{\overrightarrow{\shortmid a}}$, то за лемою 4.1.2$(ii)$ існують мінімальні елементи $(\hat{c}_1,\hat{d}_1),\ldots,(\hat{c}_m,\hat{d}_m)$ в $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ такі, що

$$(a,b)\cdot(\hat{c}_1,\hat{d}_1) = (e_1,f_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a,b)\cdot(\hat{c}_m,\hat{d}_m) = (e_m,f_m).$$

Тоді з цих рівностей випливає, що

$$(a,b)\cdot U^{\uparrow}_{(\hat{c}_1,\hat{d}_1),\ldots,(\hat{c}_m,\hat{d}_m)} \subseteq U^{\uparrow}_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)}.$$

Аналогічно існує скінченна кількість ненульових елементів $(e_1,f_1),\ldots,(e_p,f_p)$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ з $f_1,\ldots,f_p \geqslant b$ таких, що

$$U^{\uparrow}_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)} \cap S^{\underline{b}\uparrow} = S^{\underline{b}\uparrow} \setminus \left({\uparrow_{\preccurlyeq}}(e_1,f_1) \cup \cdots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}(e_p,f_p)\right).$$

Оскільки $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}(a,b) = S^{\underline{b}\uparrow}$, то з леми 4.1.2$(i)$ випливає, що існують мінімальні елементи $(\hat{c}_1,\hat{d}_1),\ldots,(\hat{c}_p,\hat{d}_p)$ в $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ такі, що

$$(\hat{c}_1,\hat{d}_1)\cdot(a,b) = (e_1,f_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\hat{c}_p,\hat{d}_p)\cdot(a,b) = (e_p,f_p).$$

Тоді з цих рівностей випливає, що

$$U^{\uparrow}_{(\hat{c}_1,\hat{d}_1),\ldots,(\hat{c}_p,\hat{d}_p)}\cdot(a,b) \subseteq U^{\uparrow}_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)},$$

а це завершує доведення нарізної неперервності напівгрупової операції в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{sh}}\right)$. Також, оскільки

$$\left(U^{\uparrow}_{(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)}\right)^{-1} = U^{\uparrow}_{(b_1,a_1),\ldots,(b_k,a_k)},$$

для довільних $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$, інверсія є неперервною в $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{sh}}\right)$.

З леми 4.1.3 випливає, що $\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{sh}}$ є найгрубшою гаусдорфовою трансляційно неперервною топологією на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$, а, отже, $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{sh}}\right)$ є мінімальною напівтопологічною напівгрупою. $\square$

Зауваження 4.2.1. З означення топології $\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{sh}}$ на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ та доведення твердження 4.2.3 випливає, що кожна гаусдорфова інверсна трансляційно неперервна топологія τ на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ сильніша за топологію $\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{sh}}$.

Приклад 4.2.3. Визначимо топологію $\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}$ на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ наступним чином:

(i) усі ненульові елементи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є ізольованими точками в топологічному просторі $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}\right)$;

(ii) сім'я

$$\mathscr{B}^{\mathbf{0}}_{\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}} = \left\{ S^{\overrightarrow{\shortmid a}} \cap S^{\underline{b}\uparrow} \colon a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

є базою топології $\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}$ в нулі $\mathbf{0}$.

Очевидно, що простір $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}\right)$ є гаусдорфовим, 0-вимірним і розрідженим, а отже, є регулярним. Оскільки база $\mathscr{B}^{\mathbf{0}}_{\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}}$ зліченна, то аналогічно, як і в прикладі 4.2.2, отримуємо, що простір $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}\right)$ є метризовним.

Твердження 4.2.4. $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{min}^{i}\right)$ *– мінімальна топологічна інверсна напівгрупа.*

Доведення. Для довільних $a, b \in \mathbb{Z}$ та для довільного ненульового елемента $(x, y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ існує таке ціле число n, що

$$(x, y) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n] \qquad \text{і} \qquad S^{\overrightarrow{\shortmid a}} \cap S^{\underline{b}\uparrow} \subseteq \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n].$$

За наслідком 4.1.1 напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]$ ізоморфна біциклічному моноїду з приєднаним нулем $\mathscr{C}^{\mathbf{0}}$. Також очевидно, що топологія $\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}$, індукує топологію τ на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n]$ таку, що τ породжує згідно відображення

$$h \colon \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}[n] \to \mathscr{C}^{\mathbf{0}}, \qquad (a, b) \mapsto q^{a-n}p^{b-n} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{0} \mapsto \mathbf{0}$$

топологію τ_{min} на $\mathscr{C}^{\mathbf{0}}$ з прикладу 4.2.1. Тоді з доведення леми 2 з праці [5] випливає, що $\left(\mathscr{C}^{\mathbf{0}}, \tau_{\mathsf{min}}\right)$ є гаусдорфовою топологічною напівгрупою. З цього випливає, що $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}\right)$ є топологічною інверсною напівгрупою. Мінімальність напівгрупи $\left(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}\right)$ як топологічної інверсної напівгрупи випливає з леми 4.1.3, оскільки

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}} \setminus (S^{\overrightarrow{\shortmid a}} \cap S^{\underline{b}\uparrow}) = \big\{(x, y) \colon (x,y)\cdot(x, y)^{-1} \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}(a-1, a-1)\big\} \cup \\ \cup \big\{(x, y) \colon (x, y)^{-1}\cdot(x, y) \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}(b-1, b-1)\big\}\, . \end{aligned}$$

$\square$

Якщо τ — гаусдорфова інверсна напівгрупова топологія на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$, то

$${\uparrow_{\preccurlyeq}}(n, n) = \big\{(i, i) \in E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}) \colon i \leqslant n\big\}$$

— замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau)$. Тоді з неперервності інверсії в $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}, \tau)$ та означення топології $\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}}$ випливає, що $\tau_{\mathsf{min}}^{\mathsf{i}} \subseteq \tau$. Отже справджується таке твердження:

Твердження 4.2.5. *τ_{min}^{i} — найслабша гаусдорфова інверсна напівгрупова топологія на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$.*

4.3 Висновки до розділу 4

У цьому розділі показано, що аналог теореми Гутіка про те, що кожна локально компактна трансляційно неперервна топологія на біциклічному моноїді з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною, не виконується для розширеної біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$. А саме доведено, що кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є дискретною, однак на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ існує континуум різних гаусдорфових локально компактних трансляційно неперервних топологій.

Також на напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ побудовано єдину мінімальну інверсну трансляційно неперервну та єдину мінімальну інверсну напівгрупову топології.

РОЗДІЛ 5

Напівтопологічні біциклічні розширення лінійно впорядкованих груп

5.1 Розв'язки деяких рівнянь і природний частковий порядок на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$

Для лінійно впорядкованої групи G називатимемо підмножину $A \subseteq G$ *трансляційною*, якщо для довільних $x, y, z \in A$ таких, що $y < x$, виконується умова $x \cdot y^{-1} \cdot z \in A$. Для довільної трансляційної множини $A \subseteq G$ маємо, що

$$\mathscr{B}(A) = \{\alpha_b^a \colon G^+(a) \rightharpoonup G^+(b) \colon a, b \in A\}$$

є напівгрупою часткових біекцій, визначених за формулою

$$(x)\alpha_b^a = x \cdot a^{-1} \cdot b, \qquad \text{для} \ \ x \in G^+(a).$$

З означення напівгрупової операції на $\mathscr{B}(A)$ випливає, що $\mathscr{B}(A)$ — інверсна напівгрупа.

Очевидно, що напівгрупа $\mathscr{B}(A)$ ізоморфна напівгрупі на множині $A \times A$ з напівгруповою операцію, яка визначається за формулою:

$$(a, b)(c, d) = \begin{cases} (c \cdot b^{-1} \cdot a, d), & \text{якщо} \ \ b < c; \\ (a, d), & \text{якщо} \ \ b = c; \\ (a, b \cdot c^{-1} \cdot d), & \text{якщо} \ \ b > c, \end{cases} \tag{5.1}$$

де $a, b, c, d \in A$. Тому надалі ми будемо ототожнювати напівгрупу $\mathscr{B}(A)$ множиною $A \times A$ з напівгруповою операцією (5.1).

Твердження 5.1.1. *Нехай G – лінійно впорядкована група і A непорожня трансляційна множина в G. Тоді виконуються такі твердження:*

(*i*) *якщо $(g, g), (h, h) \in E(\mathscr{B}(A))$, то $(g, g) \preccurlyeq (h, h)$ тоді і лише тоді, коли $g \geqslant h$ в A;*

(*ii*) *напівгратка* $E(\mathscr{B}(A))$ *ізоморфна напівгратці* A *з дуальним частковим порядком до лінійного порядку групи* G*;*

(*iii*) $(g,h)\mathscr{R}(k,l)$ *в* $\mathscr{B}(A)$ *тоді і лише тоді, коли* $g=k$*;*

(*iv*) $(g,h)\mathscr{L}(k,l)$ *в* $\mathscr{B}(A)$ *тоді і лише тоді, коли* $h=l$*;*

(*v*) $(g,h)\mathscr{H}(k,l)$ *в напівгрупі* $\mathscr{B}(A)$ *тоді і лише тоді, коли* $g=k$ *і* $h=l$*, а отже, кожен* $\mathscr{H}$*-клас в* $\mathscr{B}(A)$ *є одноелементним;*

(*vi*) $\mathscr{B}(A)$ *є біпростою напівгрупою, а отже, і є простою.*

Доведення. Твердження (*i*) та (*ii*) тривіальні, твердження (*iii*)-(*v*) випливають з твердження 1.2.5 та твердження 1.2.2, а твердження (*vi*) випливає з твердження 1.2.3. □

Надалі нам необхідна буде лема 5.1.1, яка описує природний частковий порядок на інверсній напівгрупі $\mathscr{B}(A)$:

Лема 5.1.1. *Нехай* G *– лінійно впорядкована група і* A *– непорожня трансляційна множина в* G*. Тоді для довільних елементів* $(a,b),(c,d)\in\mathscr{B}(A)$ *такі умови еквівалентні:*

(*i*) $(a,b)\preccurlyeq(c,d)$ *в* $\mathscr{B}(A)$*;*

(*ii*) $a^{-1}\cdot b=c^{-1}\cdot d$ *і* $a\geqslant c$ *в* A*;*

(*iii*) $b^{-1}\cdot a=d^{-1}\cdot b$ *і* $b\geqslant d$ *в* A*.*

Доведення. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) З леми 1.2.1 випливає, що $(a,b)\preccurlyeq(c,d)$ у напівгрупі $\mathscr{B}(A)$ тоді і тільки тоді, коли

$$(a,b)=(a,b)(a,b)^{-1}(c,d).$$

Таким чином маємо, що

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,b)(a,b)^{-1}(c,d) = \\ &= (a,b)(b,a)(c,d) = \\ &= (a,a)(c,d) = \\ &= \begin{cases} (c \cdot a^{-1} \cdot a, d), & \text{якщо} \quad a < c; \\ (c,d), & \text{якщо} \quad a = c; \\ (a, a \cdot c^{-1} \cdot d), & \text{якщо} \quad a > c. \end{cases}\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$(a,b) = \begin{cases} (c,d), & \text{якщо} \quad a < c; \\ (c,d), & \text{якщо} \quad a = c; \\ (a, a \cdot c^{-1} \cdot d), & \text{якщо} \quad a > c, \end{cases}$$

і, отже, з умови $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ в інверсній напівгрупі $\mathscr{B}(A)$ випливає, що $a^{-1} \cdot b = c^{-1} \cdot d$ та $a \geqslant c$ в A.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Зафіксуємо довільні елементи (a,b) і (c,d) напівгрупи $\mathscr{B}(A)$ такі, що $a^{-1} \cdot b = c^{-1} \cdot d$ і $a \geqslant c$ в A. Тоді маємо, що

$$\begin{aligned}(a,b)(a,b)^{-1}(c,d) &= (a,b)(b,a)(c,d) = \\ &= (a,a)(c,d) = \\ &= (a, a \cdot c^{-1} \cdot d) = \\ &= (a,b),\end{aligned}$$

а, отже, $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ в напівгрупі $\mathscr{B}(A)$.

Доведення еквівалентності $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ тривіальне. □

З означення напівгрупової операції на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$ випливає, що виконується рівність

$$(a,b) = (a,c)(c,d)(d,b)$$

для довільних елементів a, b, c, d трансляційної множини A лінійно впорядкованої групи G.

Наступні два твердження описують розв'язки деяких рівнянь в інверсній напівгрупі $\mathscr{B}(A)$.

Твердження 5.1.2. *Нехай G – лінійно впорядкована група, A – непорожня трансляційна множина в G і a, b, c, d довільні елементи множини A. Тоді*

(i) $(a, b) = (a, c)(x, y)$ для $(x, y) \in \mathscr{B}(A)$ тоді і лише тоді, коли $(c, b) \preccurlyeq (x, y)$ в $\mathscr{B}(A)$;

(ii) $(a, b) = (x, y)(d, b)$ для $(x, y) \in \mathscr{B}(A)$ тоді і лише тоді, коли $(a, d) \preccurlyeq (x, y)$ в $\mathscr{B}(A)$;

(iii) $(a, b) = (a, c)(x, y)(d, b)$ для $(x, y) \in \mathscr{B}(A)$ тоді і лише тоді, коли $(c, d) \preccurlyeq (x, y)$ в $\mathscr{B}(A)$.

Доведення. (i) $(\Rightarrow)$ Припустимо, що $(a, b) = (a, c)(x, y)$ для деякого елемента (x, y) напівгрупи $\mathscr{B}(A)$. Тоді

$$(a, c)(x, y) = \begin{cases} (a, c \cdot x^{-1} \cdot y), & \text{якщо } c > x; \\ (a, y), & \text{якщо } c = x; \\ (x \cdot c^{-1} \cdot a, y), & \text{якщо } c < x, \end{cases}$$

У випадку, коли $c > x$, отримуємо $b = c \cdot x^{-1} \cdot y$, а отже, з леми 5.1.1 випливає, що $(c, b) \preccurlyeq (x, y)$ в напівгрупі $\mathscr{B}(A)$. Також у випадку, коли $c = x$, маємо, що $b = y$, а з цього випливає нерівність $(c, b) \preccurlyeq (x, y)$ в напівгрупі $\mathscr{B}(A)$. Випадок $c < x$ не виконується, оскільки з групової операції на G випливає, що справджується нерівність $x \cdot c^{-1} \cdot a < a$.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що відношення $(c, b) \preccurlyeq (x, y)$ виконується в напівгрупі $\mathscr{B}(A)$. Тоді за лемою 5.1.1 маємо, що $c^{-1} \cdot b = x^{-1} \cdot y$ і $c \geqslant x$ в A, а, отже, з означення напівгрупової операції на $\mathscr{B}(A)$ випливає, що

$$(a, c)(x, y) = (a, c \cdot x^{-1} \cdot y) = (a, c \cdot c^{-1} \cdot b) = (a, b).$$

Доведення твердження (ii) аналогічне до твердження (i).

(iii) $(\Rightarrow)$ Припустимо, що $(a,b)=(a,c)(x,y)(d,b)$ для деякого елемента (x,y) напівгрупи $\mathscr{B}(A)$. Тоді

$$(a,c)(x,y)=\begin{cases}(a,c\cdot x^{-1}\cdot y), & \text{якщо } c>x;\\ (a,y), & \text{якщо } c=x;\\ (x\cdot c^{-1}\cdot a,y), & \text{якщо } c<x.\end{cases}$$

Тому,

(a) якщо $c>x$, то

$$\begin{aligned}(a,c)(x,y)(d,b)&=(a,c\cdot x^{-1}\cdot y)(d,b)=\\&=\begin{cases}(a,c\cdot x^{-1}\cdot y\cdot d^{-1}\cdot b), & \text{якщо } c\cdot x^{-1}\cdot y>d;\\ (a,b), & \text{якщо } c\cdot x^{-1}\cdot y=d;\\ (d\cdot y^{-1}\cdot x\cdot c^{-1}\cdot a,b), & \text{якщо } c\cdot x^{-1}\cdot y<d,\end{cases}\end{aligned}$$

(b) якщо $c=x$, то

$$\begin{aligned}(a,c)(x,y)(d,b)&=(a,y)(d,b)=\\&=\begin{cases}(a,y\cdot d^{-1}\cdot b), & \text{якщо } y>d;\\ (a,b), & \text{якщо } y=d;\\ (d\cdot y^{-1}\cdot a,b), & \text{якщо } y<d,\end{cases}\end{aligned}$$

(c) якщо $c<x$, то

$$\begin{aligned}(a,c)(x,y)(d,b)&=(x\cdot c^{-1}\cdot a,y)(d,b)=\\&=\begin{cases}(x\cdot c^{-1}\cdot a,y\cdot d^{-1}\cdot b), & \text{якщо } y>d;\\ (x\cdot c^{-1}\cdot a,b), & \text{якщо } y=d;\\ (d\cdot y^{-1}\cdot x\cdot c^{-1}\cdot a,b), & \text{якщо } y<d.\end{cases}\end{aligned}$$

Тоді з рівності $(a,b)=(a,c)(x,y)(d,b)$ випливає, що

(a) якщо $c>x$, то $c\cdot x^{-1}\cdot y\cdot d^{-1}=e$ в G;

(b) якщо $c = x$, то $y = d$;

і випадок (c) не виконується. Отже, за лемою 5.1.1 отримуємо, що $(c,d) \preccurlyeq (x,y)$ у напівгрупі $\mathscr{B}(A)$.

($\Leftarrow$) Припустимо, що відношення $(c,d) \preccurlyeq (x,y)$ виконується на напівгрупі $\mathscr{B}(G)$. Тоді за лемою 5.1.1 маємо, що $c^{-1} \cdot d = x^{-1} \cdot y$ і $c \geqslant x$ в A, а, отже, з означення напівгрупової операції на $\mathscr{B}(A)$ випливає, що

$$\begin{aligned}
(a,c)(x,y)(d,b) &= (a,c)(x,y)(c \cdot x^{-1} \cdot y, b) = \\
&= (a,c)(c \cdot x^{-1} \cdot y \cdot y^{-1} \cdot x, b) = \\
&= (a,c)(c \cdot x^{-1} \cdot x, b) = \\
&= (a,c)(c,b) = \\
&= (a,b),
\end{aligned}$$

оскільки $c \cdot x^{-1} \cdot y \geqslant y$ в A. □

Твердження 5.1.3. *Нехай G — лінійно впорядкована група, A — непорожня трансляційна множина в G і a,b,c,d — довільні елементи множини A. Тоді*

(i) *якщо $a < c$ в A, то рівняння $(a,b) = (c,d)(x,y)$ не має розв'язків у напівгрупі $\mathscr{B}(A)$;*

(ii) *якщо $a > c$ в A, то рівняння $(a,b) = (c,d)(x,y)$ має єдиний розв'язок $(x,y) = (a \cdot c^{-1} \cdot d, b)$ у напівгрупі $\mathscr{B}(A)$;*

(iii) *рівняння $(a,b) = (a,d)(x,y)$ має єдиний розв'язок $(x,y) = (d,b)$ у напівгрупі $\mathscr{B}(A)$*

(iv) *якщо $b < d$ в A, то рівняння $(a,b) = (x,y)(c,d)$ не має розв'язків у напівгрупі $\mathscr{B}(A)$;*

(v) *якщо $b > d$ в A, то рівняння $(a,b) = (x,y)(c,d)$ має єдиний розв'язок $(x,y) = (a, b \cdot d^{-1} \cdot c)$ у напівгрупі $\mathscr{B}(A)$.*

(*vi*) *рівняння* $(a,b) = (x,y)(c,d)$ *має єдиний розв'язок* $(x,y) = (a,c)$ *у напівгрупі* $\mathscr{B}(A)$

Доведення. (*i*) Припустимо, що виконується нерівність $a < c$ в множині A. З означення напівгрупової операції на $\mathscr{B}(A)$ випливає, що $d < x$ в A і, отже,

$$(a,b) = (x \cdot d^{-1} \cdot c, y).$$

Звідси випливає, що $a = x \cdot d^{-1} \cdot c$ і $b = y$. Оскільки $d < x$, то з рівності $a = x \cdot d^{-1} \cdot c$ випливає, що $a > c$, а це суперечить припущенню твердження (*i*).

(*ii*) Припустимо, що $a > c$. З означення напівгрупової операції на $\mathscr{B}(A)$ випливає, що $d < x$ в A а, отже, маємо

$$(a,b) = (x \cdot d^{-1} \cdot c, y).$$

Звідси випливають такі рівності: $x = a \cdot c^{-1} \cdot d$ та $y = b$.

Доведення тверджень (*iv*), (*v*) та (*vi*) є дуальними до доведень (*i*), (*ii*) та (*iii*) відповідно. □

Надалі нам буде потрібне твердження 5.1.4, яке випливає з означення напівгрупової операції на $\mathscr{B}(A)$ та описує праві та ліві головні ідеали в інверсній напівгрупі $\mathscr{B}(A)$ для довільної непорожньої трансляційної множини A лінійно впорядкованої групи G.

Твердження 5.1.4. *Нехай* G — *лінійно впорядкована група й* A — *непорожня трансляційна множина в* G. *Тоді:*

(*i*) $(a,a)\mathscr{B}(A) = \{(x,y) \in \mathscr{B}(A) \colon x \geqslant a$ *в* $A\}$;

(*ii*) $\mathscr{B}(A)(a,a) = \{(x,y) \in \mathscr{B}(A) \colon y \geqslant a$ *в* $A\}$.

5.2 Про топологізацію напівгрупи $\mathscr{B}(A)$

Оскільки зсуви в групі є бієктивними відображеннями, а при гомеоморфізмі топологічного простору образ відкритої множини цього простору є знову відкритою множиною, то кожна лівотопологічна (правотопологічна) група G (тобто група з топологією, стосовно якої ліві (праві) зсуви є неперервними відобрвженнями) з ізольованою точкою є дискретною. Звідси випливає, що кожна зліченна T_1-берівська ліва (права) топологічна група також є дискретним простором. У цьому підрозділі ми доведемо, що аналогічне твердження виконується для берівської напівтопологічної напівгрупи $\mathscr{B}(A)$ над непорожньою трансляційною множиною A зі зліченної лінійно впорядкованої групи G.

Для довільного елемента (a, b) інверсної напівгрупи $\mathscr{B}(A)$ позначимо

$$\uparrow_{\preccurlyeq}(a, b) = \{(x, y) \in \mathscr{B}(A) \colon (a, b) \preccurlyeq (x, y)\},$$

де $\preccurlyeq$ — природний частковий порядок на $\mathscr{B}(A)$.

Лема 5.2.1. *Нехай G – лінійно впорядкована група, A – непорожня трансляційна множина в G і τ – трансляційно неперервна топологія на $\mathscr{B}(A)$ така, що $(\mathscr{B}(A), \tau)$ містить ізольовану точку. Тоді $(\mathscr{B}(A), \tau)$ є дискретним простором.*

Доведення. Припустимо, що (a, b) – ізольована точка в топологічному просторі $(\mathscr{B}(A), \tau)$. Припустимо, що для довільного елемента u в A існує елемент c у множині A такий, що $u > c$. Оскільки A – трансляційна множина, то $d = c \cdot u^{-1} \cdot b < b$ в A. За твердженням 5.1.3(v) рівняння $(a, b) = (x, y)(c, d)$ має єдиний розв'язок

$$\begin{aligned}(x, y) = \big(a, b \cdot d^{-1} \cdot c\big) &= \big(a, b \cdot (c \cdot u^{-1} \cdot b)^{-1} \cdot c\big) = \\ &= \big(a, b \cdot b^{-1} \cdot u \cdot c^{-1} \cdot c\big) = \\ &= (a, u)\end{aligned}$$

у напівгрупі $\mathscr{B}(A)$. Якщо u є найменшим елементом у множині A стосовно природнього часткового порядку на $\mathscr{B}(A)$, то за твердженням 5.1.3(vi) рівняння $(a,b) = (x,y)(u,b)$ має єдиний розв'язок $(x,y) = (a,u)$. В обох випадках з неперервності правих зсувів в $(\mathscr{B}(A),\tau)$ випливає, що для довільного елемента $u \in A$ точка (u,a) є ізольованою в топологічному просторі $(\mathscr{B}(A),\tau)$.

Зафіксуємо довільний елемент v в множині A. Припустимо, що існує елемент d в A такий, що $d < v$. Оскільки A – трансляційна множина, то $c = d \cdot v^{-1} \cdot a < a$ в A. За твердженням 5.1.3(ii) рівняння $(a,u) = (c,d)(x,y)$ має єдиний розв'язок

$$\begin{aligned}(x,y) &= \big(a \cdot c^{-1} \cdot d, u\big) = \\ &= \big(a \cdot (d \cdot v^{-1} \cdot a)^{-1} \cdot d, u\big) = \\ &= \big(a \cdot a^{-1} \cdot v \cdot d^{-1} \cdot d, u\big) = \\ &= (v,u)\end{aligned}$$

в напівгрупі $\mathscr{B}(A)$. Якщо v – найменший елемент у множині A стосовно індукованого порядку з лінійно впорядкованої групи G, то за твердженням 5.1.3(iii) рівняння $(a,u) = (a,v)(x,y)$ має єдиний розв'язок $(x,y) = (v,u)$ в напівгрупі $\mathscr{B}(A)$. Оскільки (a,u) є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\mathscr{B}(G),\tau)$, то в обох випадках з неперервності лівих зсувів в $(\mathscr{B}(G),\tau)$ випливає, що для довільного елемента u множини A точка (v,u) є ізольованою в топологічному просторі $(\mathscr{B}(G),\tau)$ для довільного $u \in G$. Це і завершує доведення леми. $\square$

Теорема 5.2.1. *Нехай A – зліченна непорожня трансляційна множина в лінійно впорядкованій групі G і τ – T_1-берівська трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$. Тоді топологічний простір $(\mathscr{B}(A),\tau)$ є дискретним.*

Доведення. За твердженням 1.2.11 кожен зліченний берівський T_1-простір містить щільний підпростір ізольованих точок, а, отже, топологічний простір $(\mathscr{B}(A),\tau)$ містить ізольовану точку. Далі застосуємо лему 5.2.1. □

З теореми 5.2.1 випливає такий наслідок:

Наслідок 5.2.1. *Нехай A – зліченна непорожня трансляційна множина в лінійно впорядкованій групі G і τ – трансляційно неперервна* повна за Чехом *(локально компактна) T_1-топологія на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$. Тоді топологічний простір $(\mathscr{B}(A), \tau)$ є дискретним.*

Зауваження 5.2.1. Нехай $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел зі звичайною топологією. Очевидно, що множина $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ з напівгруповою операцією

$$(a, b) \cdot (c, d) = \begin{cases} (a - b + c, d), & \text{якщо } \ b < c; \\ (a, d), & \text{якщо } \ b = c; \\ (a, b - c + d), & \text{якщо } \ b > c, \end{cases}$$

ізоморфна напівгрупі $\mathscr{B}((\mathbb{R}, +))$, де $(\mathbb{R}, +)$ – адитивна група дійсних чисел зі звичайним лінійним порядком. Безпосередньо перевіркою доводиться, що напівгрупа $S_{\mathbb{R}}$ з визначеною на ній топологією добутку τ_p є топологічною інверсною напівгрупою (також див. [123, 124]). Тоді підпростір

$$S_{\mathbb{Q}} = \{(x, y) \in S_{\mathbb{R}} \colon x, y \in \mathbb{Q}\}$$

в $(S_{\mathbb{R}}, \tau_p)$ з індукованою напівгруповою операцією з напівгрупи $S_{\mathbb{R}}$ є зліченною, недискретною, не берівською топологічною інверсною піднапівгрупою топологічної інверсної напівгрупи $(S_{\mathbb{R}}, \tau_p)$. Також аналогічний висновок отримуємо у випадку піднапівгрупи

$$S_{\mathbb{Q}}^{+} = \{(x, y) \in S_{\mathbb{Q}} \colon x \geqslant 0 \text{ та } y \geqslant 0\}$$

топологічної напівгрупи $(S_{\mathbb{R}}, \tau_p)$ (див. [24, 25, 26, 27, 28]). Наведені вище аргументи показують, що умова в теоремі 5.2.1 про беровість T_1-топології τ є суттєвою.

Нагадаємо, що лінійно впорядкована група G називається *щільно впорядкованою*, якщо для кожного додатного елемента g групи G існує додатний елемент $h \in G$ такий, що $h < g$.

Зауваження 5.2.2. Очевидно, що для лінійно впорядкованої групи G такі умови є еквівалентними:

(i) група G не є щільно впорядкованою;

(ii) для довільного $g \in G$ існує єдиний елемент $g^+ \in G$ такий, що

$$G^+(g) \setminus G^+(g^+) = \{g\};$$

(iii) для довільного $g \in G$ існує єдиний елемент $g^- \in G$ такий, що

$$G^-(g) \setminus G^-(g^-) = \{g\},$$

де $G^-(g)$ – *від'ємний конус* над елементом g, тобто,

$$G^-(g) = \{x \in G \colon x \leqslant g\}.$$

Надалі для лінійно впорядкованої групи G, яка не є щільно впорядкованою, і довільного елемента g з непорожньої трансляційної множини A в G, через g^+ (відповідно, g^-) позначатимемо максимальний (відповідно, мінімальний) елемент множини $G^+(g) \setminus \{g\}$ (відповідно, множини $G^-(g) \setminus \{g\}$).

Теорема 5.2.2. *Нехай G — лінійно впорядкована група, яка не є щільно впорядкованою і A — непорожня трансляційна множина в G. Тоді кожна трансляційно неперервна гаусдорфова топологія τ на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$ є дискретною, а отже, $\mathscr{B}(A)$ є дискретним підпростором довільної напівтопологічної напівгрупи, яка містить $\mathscr{B}(A)$ як піднапівгрупу.*

Доведення. Зафіксуємо довільний ідемпотент (a,a) напівгрупи $\mathscr{B}(A)$ і припустимо, що (a,a) є неізольованою точкою топологічного простору $(\mathscr{B}(A),\tau)$. Оскільки відображення

$$\lambda_{(a,a)}\colon \mathscr{B}(A)\to\mathscr{B}(A) \qquad \text{та} \qquad \rho_{(a,a)}\colon \mathscr{B}(A)\to\mathscr{B}(A),$$

які визначені за формулами

$$((x,y))\,\lambda_{(a,a)}=(a,a)(x,y) \qquad \text{і} \qquad ((x,y))\,\rho_{(a,a)}=(x,y)(a,a)$$

є неперервними ретракціями простору $(\mathscr{B}(A),\tau)$, то $(a,a)\mathscr{B}(A)$ і $\mathscr{B}(A)(a,a)$ є замкненими підмножинами в топологічному просторі $(\mathscr{B}(A),\tau)$ (див. твердження 1.2.9). Для довільного елемента b трансляційної множини A в лінійно впорядкованій групі G покладемо

$$\mathsf{DL}_{(b,b)}\,[(b,b)]=\left\{(x,y)\in\mathscr{B}(A)\colon (x,y)(b,b)=(b,b)\right\}.$$

З леми 5.1.1 і твердження 5.1.2 випливає, що виконується рівність

$$\mathsf{DL}_{(b,b)}\,[(b,b)]={\uparrow}_{\preccurlyeq}(b,b)=\left\{(x,x)\in\mathscr{B}(A)\colon x\leqslant b \ \text{ в } \ A\right\},$$

і оскільки праві зсуви є неперервними перетвореннями топологічного простору $(\mathscr{B}(A),\tau)$, то отримуємо, що $\mathsf{DL}_{(b,b)}\,[(b,b)]$ є замкненою підмножиною в просторі $(\mathscr{B}(A),\tau)$ для кожного елемента $b\in A$. Тоді існує відкритий окіл $W_{(a,a)}$ точки (a,a) в топологічному просторі $(\mathscr{B}(A),\tau)$ такий, що

$$W_{(a,a)}\subseteq\mathscr{B}(A)\setminus\big((a^+,a^+)\mathscr{B}(A)\cup\mathscr{B}(A)(a^+,a^+)\cup\mathsf{DL}(a^-,a^-)\big).$$

Оскільки $(\mathscr{B}(A),\tau)$ є напівтопологічною напівгрупою, то існує відкритий окіл $V_{(a,a)}$ ідемпотента (a,a) в топологічному просторі $(\mathscr{B}(A),\tau)$ такий, що виконуються умови:

$$V_{(a,a)}\subseteq W_{(a,a)}, \qquad (a,a)\cdot V_{(a,a)}\subseteq W_{(a,a)} \qquad \text{і} \qquad V_{(a,a)}\cdot(a,a)\subseteq W_{(a,a)}.$$

Звідси, випливає, що виконується хоча б одна з умов:

(a) окіл $V_{(a,a)}$ містить нескінченну кількість точок $(x,y)\in\mathscr{B}(A)$ таких, що $x<y\leqslant a$ в множині A; або

(b) окіл $V_{(a,a)}$ містить нескінченну кількість точок $(x,y)\in\mathscr{B}(A)$ таких, що $y<x\leqslant a$ в множині A.

У випадку (a) за твердженням 5.1.2 отримуємо, що

$$(a,a)(x,y)=\big(a,a\cdot x^{-1}\cdot y\big)\notin W_{(a,a)},$$

оскільки $x^{-1}\cdot y\geqslant e$ в лінійно впорядкованій групі G, а у випадку (b) за твердженням 5.1.2 маємо, що

$$(x,y)(a,a)=\big(a\cdot y^{-1}\cdot x,a\big)\notin W_{(a,a)},$$

оскільки $y^{-1}\cdot x\geqslant e$ в лінійно впорядкованій групі G, а це суперечить нарізній неперервності напівгрупової операції на $(\mathscr{B}(A),\tau)$. З отриманої суперечності випливає, що множина $V_{(a,a)}$ є одноточковою, а, отже, ідемпотент (a,a) є ізольованою точкою топологічного простору $(\mathscr{B}(A),\tau)$.

Тепер, застосовуємо лему 5.2.1 і отримуємо, що топологічний простір $(\mathscr{B}(A),\tau)$ дискретний. $\square$

З теореми 5.2.2 випливають такі три наслідки.

Наслідок 5.2.2. *Нехай G – лінійно впорядкована група, яка не є щільно впорядкованою і A – непорожня трансляційна множина в G. Тоді кожна напівгрупова гаусдорфова топологія τ на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$ дискретна.*

Наслідок 5.2.3 ([73])**.** *Кожна трансляційно неперервна гаусдорфова топологія τ на біциклічному розширенні напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ дискретна.*

Наслідок 5.2.4 ([48, 71])**.** *Кожна трансляційно неперервна гаусдорфова топологія τ на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(p,q)$ дискретна.*

5.3 Висновки до розділу 5

У цьому розділі дисертації:

1. Доведено, що для довільної зліченної лінійно впорядкованої групи G і непорожньої трансляційної множини $A \subseteq G$, кожна берівська трансляційно неперервна T_1-топологія τ на $\mathscr{B}(A)$ дискретна.

2. Доведено, що для довільної лінійної нещільно впорядкованої групи G і непорожньої трансляційної множини A кожна трансляційно неперервна гаусдорфова топологія τ на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$ дискретна. Це узагальнює результати, отримані в працях [48, 71, 73].

РОЗДІЛ 6

Локально компактні групи з нулем

У комутативній групі G добуток двох елементів a і b позначатимемо через $a+b$, а обернений елемент до $a \in G$ позначатимемо через $-a$.

Надалі в цьому розділі через G^0 позначається група G з приєднаним нулем. Очевидно, що кожна група з приєднаним нулем є інверсною напівгрупою.

6.1 Приєднання нуля до дискретної групи в локально компактній напівтопологічній напівгрупі

Твердження 6.1.1. *Якщо T_1-напівтопологічна напівгрупа S містить власну щільну дискретну підгрупу G, то $I = S \setminus G$ — двобічний ідеал у напівгрупі S.*

Доведення. З леми 1.2.3 випливає, що G — відкритий підпростір топологічного простору S.

Зафіксуємо довільний елемент y множини I. Якщо $xy = z \notin I$ для деякого елемента x групи G, то існує відкритий окіл $U(y)$ точки y у топологічному просторі S такий, що

$$\{x\} \cdot U(y) = \{z\} \subset G.$$

Окіл $U(y)$ містить нескінченну кількість елементів групи G, а це суперечить тому, що в групі зсуви є бієктивними відображеннями. З отриманого протиріччя випливає, що $xy \in I$ для всіх $x \in G$ й $y \in I$.

Доведення твердження, що $yx \in I$ для всіх елементів $x \in G$ й $y \in I$ є аналогічним.

З вище наведених міркувань випливає, що множина I є двобічним ідеалом у напівтопологічній напівгрупі S. $\square$

Будемо говорити, що нескінченна група G є:

- *електорально гнучкою*, якщо для довільного розбиття $G = A \sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини, існують нескінченна множина $I \subseteq A$ та елемент $x \in G$ такі, що $I \cdot x \subseteq B$;

- *електорально стійкою*, якщо G не є електорально гнучкою.

Підмножина A групи G називається *трансляційно майже стійкою*, якщо для довільного елемента $x \in G$ симетрична різниця $A\Delta(A \cdot x)$ є скінченною. Очевидно, що кожна скінченна підмножина в довільній групі, а також коскінченні підмножини в нескінченних групах, є трансляційно майже стійкими. Також, в адитивній групі цілих чисел множина натуральних чисел є трансляційно майже стійкою. Виникає природне запитання:

> *у яких нескінченних групах їх трансляційно майже стійкі підмножини вичерпуються скінченними та коскінченними підмножинами?*

Це питання також мотивоване наступною дихотомією локально компактних напівтопологічних груп з приєднаним нулем:

Лема 6.1.1. *Нехай G — дискретна група така, що кожна нескінченна трансляційно майже стійка підмножина в G є коскінченною. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Доведення. Очевидно, що дискретна топологія на напівгрупі G^0 є трансляційно неперервною та локально компактною.

Нехай τ — недискретна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на напівгрупі G^0 і U_0 — довільний нескінченний відкритий компактний окіл нуля 0 в просторі (G^0, τ). Такий окіл

U_0 нуля 0 в просторі (G^0, τ) існує, оскільки всі елементи групи G є ізольованими точками в локально компактному просторі (G^0, τ).

Очевидно, що зсуви на елементи групи одиниць (тобто на елементи максимальної підгрупи, що містить одиницю напівгрупи) довільного моноїда S є бієктивними перетвореннями напівгрупи S. Позаяк G — група одиниць в напівгрупі G^0, то кожний лівий або правий зсув у напівтопологічній напівгрупі (G^0, τ) на елемент групи G є гомеоморфізмом. Звідси випливає, що симетрична різниця $U_0 \Delta (U_0 \cdot x)$ є скінченною для довільного елемента $x \in G$. З припущення теореми випливає, що $U_0 \setminus \{0\}$ — коскінченна підмножина в групі G, оскільки всі елементи групи G є ізольованими точками в топологічному просторі G^0. Отже, τ — компактна топологія на напівгрупі G^0. $\square$

Твердження 6.1.2. *Нескінченна група G є електорально гнучкою тоді і лише тоді, коли кожна нескінченна трансляційно майже стійка підмножина в G є коскінченною.*

Доведення. Припустимо, що існує електорально гнучка нескінченна група G, що містить нескінченну трансляційно майже стійку підмножину A в групі G з нескінченним доповненням $B = G \setminus A$. Тоді існують нескінченна множина $I \subseteq A$ й елемент $x \in G$ такі, що $I \cdot x \subseteq B$, а це суперечить трансляційній майже стійкості підмножини A в групі G.

Припустимо, що в групі G кожна нескінченна трансляційно майже стійка підмножина є коскінченною, але група G не є електорально гнучкою. Тоді існує розбиття $G = A \sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини таке, що для довільних нескінченної множини $I \subseteq A$ та елемента $x \in G$ множина $I \cdot x \cap B$ скінченна. Звідси отримуємо, що множина

$$A \cdot x \cap B = A \cdot x \cap (G \setminus A)$$

скінченна, а це суперечить нашому припущенню. □

З леми 6.1.1 і твердження 6.1.2 випливає

Теорема 6.1.3. *Нехай G — дискретна електорально гнучка нескінченна група. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Наслідок 6.1.1. *Нехай G — дискретна електорально гнучка група. Тоді кожна гаусдорфова напівгрупова локально компактна топологія на G^0 є дискретною.*

Твердження 6.1.4. *Нехай G — електорально гнучка злічення група. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Доведення. Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на напівгрупі G^0. Оскільки нуль напівгрупи G^0 є замкненою підмножиною в топологічному просторі (G^0, τ), то за наслідком 1.2.1 підпростір G локально компактний. Оскільки група G — злічення, то за теоремою Бера про категорії (теорема 1.2.10), простір G містить ізольовану точку, а отже, простір G містить ізольовану точку в топологічному просторі (G^0, τ). З того, що всі зсуви в напівтопологічній напівгрупі (G^0, τ) на елементи групи G є гомеоморфізмами простору (G^0, τ) випливає, що всі точки в топологічному просторі G є ізольованими. Далі скористаємося теоремою 6.1.3. □

Наслідок 6.1.2. *Нехай G — електорально гнучка злічення група. Тоді кожна гаусдорфова напівгрупова локально компактна топологія на G^0 є дискретною.*

Означення 6.1.5 ([72, 163])**.** Будемо говорити, що група G *має більше ніж один кінець*, якщо існує нескінченна підмножина $S \subset G$ з нескінченним у G доповненням така, що симетрична різниця $S\Delta(S\cdot x)$ є скінченною для довільного елемента $x\in G$.

Будемо також говорити, що група G *має один кінець*, якщо існує така єдина нескінченна підмножина $S\subset G$ із скінченним доповненням, яка задовольняє вищезгадані умови означення 6.1.5.

Очевидно, що нескінченні електорально гнучкі групи — це в точності групи з одним кінцем.

Означення 6.1.6 ([12])**.** *Індексом підгрупи H* у групі G називається потужність множини класів суміжності в кожному (правому або лівому) із розкладів групи G за цією підгрупою H.

Означення 6.1.7 ([72, 163])**.** Група G називається *віртуально циклічною*, якщо G містить циклічну підгрупу скінченного індексу.

У класичній комбінаторній теорії груп добре відома наступна теорема, яка описує нескінченні групи з двома кінцями:

Теорема 6.1.8 ([72, 163])**.** *Для групи G наступні умови є еквівалентними:*

(i) G — група з двома кінцями;

(ii) G — нескінченна віртуально циклічна група.

Зауваження 6.1.1.

1. З теореми 6.1.8 випливає, що адитивна група цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$, а також її прямий добуток з довільною скінченною групою, має два кінці.

2. Також у праці [85] доведено, що на адитивній групі цілих чисел з приєднаним нулем $\mathbb{Z}^{\mathbf{0}}(+)=\mathbb{Z}(+)\sqcup\{\mathbf{0}\}$ існує рівно чотири гаусдорфові локально компактні трансляційно неперервні топології (див. твердження 1.2.16), причому три з них є напівгруповими.

З наступного прикладу випливає, що на нескінченній віртуально циклічній групі з приєднаним нулем G^0 існують недискретні некомпактні локально компактні трансляційно неперервні топології, які індукують на G дискретну топологію.

Приклад 6.1.1. Нехай G — нескінченна віртуально циклічна група та K_1 і K_2 — кінці в групі G. Для $i = 1, 2$ означимо на групі G з приєднаним нулем G^0 топологію τ_i так:

1) усі елементи групи G є ізольованими точками в (G^0, τ_i);
2) сім'я
$$\mathscr{B}_i(0) = \{g_1 K_i g_2 \cup \{0\} \colon g_1, g_2 \in G\}$$
є базою топології τ_i в нулі напівгрупи G^0.

Оскільки K_i — кінець в групі G, то τ_i — трансляційно неперервна гаусдорфова локально компактна топологія на напівгрупі G^0, яка не є ні дискретною, ані компактною.

Зауважимо, що топології τ_1 і τ_2, означені в прикладі 6.1.1, у випадку адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$ є напівгруповими [85].

6.2 Про електорально гнучкі та електорально стійкі напівгрупи

Наступні два твердження дають достатні умови, при виконанні яких група є електорально гнучкою.

Твердження 6.2.1. *Якщо комутативна група G містить нескінченну циклічну підгрупу $Z \subset G$ нескінченного індексу, то G є електорально гнучкою.*

Доведення. Нехай z — породжуючий елемент групи Z. Розглянемо розбиття $G = A \sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини. Розглянемо множини

$$J_+ = \{a \in A \colon a + z \in B\} \qquad \text{і} \qquad J_- = \{a \in A \colon a - z \in B\}\,.$$

Якщо одна з множин J_+ або J_- є нескінченною, то доведення твердження завершено. Тому, ми припустимо що множина $J = J_+ \cup J_-$ є скінченною.

Якщо множини $A \setminus (J+Z)$ і $B \setminus (J+Z)$ є непорожніми, то ми можемо зафіксувати точки

$$a \in A \setminus (J+Z) \qquad \text{і} \qquad b \in B \setminus (J+Z),$$

і зауважимо, що для нескінченної множини $I = a + Z \subseteq A$ і точки $x = ba^{-1}$ маємо, що

$$x + I = b - a + a + Z = b + Z \subseteq B.$$

Отже, ми можемо припускати, що одна з множин $A \setminus (J+Z)$ або $B \setminus (J+Z)$ є порожньою. Якщо множина $A \setminus (J+Z)$ є порожньою, то $A \subseteq J + Z$ і за принципом Діріхле (див. [53, підрозділ 3.1]) для деякого елемента $a \in A$ множина $I = A \cap (a+Z)$ є нескінченною. Тоді для довільного елемента $b \in G \setminus (J+Z) \subseteq B$ маємо, що виконуються включення

$$b - a + I \subseteq b + Z \subseteq B.$$

Якщо множина $B \setminus (J+Z)$ є порожньою, то справджується включення $B \subseteq J+Z$ і для деякого елемента $b \in B$ множина $B \cap (b+Z)$ є нескінченною. Тоді для довільного елемента $a \in G \setminus (J+Z) \subseteq A$ отримуємо, що множина

$$I = a - b + (B \cap (b+Z)) \subseteq a + A \subseteq A$$

є нескінченною та $b - a + I \subseteq B$. Звідки випливає, що група G є електорально гнучкою. $\square$

Твердження 6.2.2. *Кожна незліченна комутативна група G є електорально гнучкою.*

Доведення. Нехай $G = A \sqcup B$ — розбиття групи G на дві нескінченні множини. Якщо множина A є зліченною, то виберемо довільний елемент $x \in G \setminus A - A$ та стверджуємо, що $(x+A) \cap A = \varnothing$, а отже $x + A \subseteq B$. Якщо множина B є зліченною, то можемо вибрати елемент $x \in G$ такий, що

$$I = (x+B) \subseteq A,$$

а отже, $-x + I \subseteq B$.

Далі ми припускатимемо, що обидві множини A та B є незліченними. Зафіксуємо довільну нескінченну зліченну підгрупу $Z \subset G$. Якщо для деякого елемента $z \in Z$ множина $(A+z) \cap B$ є нескінченною, то доведення завершене. Отже, ми припускатимемо, що для кожного елемента $z \in Z$ множина $F_z = (A+z) \cap B$ є скінченною. Тоді множина

$$S = (A+Z) \cap (B+Z) = \bigcup_{z,z' \in Z} (A+z) \cap (B+z')$$

є непорожньою і щонайбільше зліченною. Позаяк множини A і B є незліченними, то існують елементи $a \in A \setminus S$ і $b \in B \setminus S$. Тоді для нескінченної множини $I = a + Z \subseteq A$ та елемента $x = b - a$ отримуємо, що

$$x + I = b + Z \subseteq B,$$

звідки випливає, що група G є електорально гнучкою. □

Означення 6.2.3 ([153]). Група G називається *локально скінченною*, якщо кожна її скінченна підмножина міститься в скінченній підгрупі групи G.

Твердження 6.2.4. *Кожна зліченна локально скінченна група G є електорально стійкою.*

Доведення. Зобразимо групу G як об'єднання $\bigcup_{n\in\omega} G_n$ строго зростаючої послідовності скінченних груп $\{G_n\}_{n\in\omega}$. Для довільного числа $n \in \omega$ зафіксуємо підмножину $A_n \subseteq G_{n+1} \setminus G_n$, яка має одноточковий перетин $A_n \cap (x \cdot G_n)$ з кожним суміжним класом $x \cdot G_n$ в групі G, де $x \in G_{n+1} \setminus G_n$.

Приймемо

$$A = G_0 \cup \bigcup_{n\in\omega} (A_{2n} \cdot G_{2n}) \qquad \text{i} \qquad B = \bigcup_{n\in\omega} (A_{2n+1} \cdot G_{2n+1}).$$

Тоді для довільного елемента $x \in G$ множина $(A \cdot x) \cap B$ є скінченною, а отже, група G є електорально стійкою. □

З тверджень 6.2.1, 6.2.2 і 6.2.4 випливають наслідки 6.2.1 і 6.2.2.

Нагадаємо, шо група G називається *групою без кручення*, якщо довільний її неодиничний елемент має нескінченний порядок.

Наслідок 6.2.1. *Нетривіальна комутативна група без кручення G є електорально стійкою тоді і лише тоді, коли G ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}$.*

Наслідок 6.2.2. *Комутативна група G є електорально стійкою тоді і лише тоді, коли G є або зліченною та локально скінченною, або є віртуально циклічною.*

Зауваження 6.2.1.

1. З твердження 6.2.2 випливає, що наступні групи є електорально гнучкими:

   (a) n-а пряма степінь адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}^n$ для $n \geqslant 2$;

   (b) n-а пряма степінь адитивної групи раціональних чисел $\mathbb{Q}^n$ для $n \geqslant 1$;

   (c) n-а пряма степінь адитивної групи дійсних чисел $\mathbb{R}^n$ для $n \geqslant 1$;

   (d) n-а пряма степінь мультиплікативної групи ненульових комплексних чисел $(\mathbb{C}^*)^n$ для $n \geqslant 1$ та її підгрупа n-вимірний тор $\mathbb{T}^n$, як n-а пряма степінь одиничного кола

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}.$$

2. З твердження 6.2.1 випливає, що вільна (абелева) група F_X над множиною X потужності $\geqslant 2$ є електорально гнучкою.

6.3 Висновки до розділу 6

У цьому розділі досліджуються алгебраїчні умови на групу G, при виконанні яких локально компактна трансляційно неперервна топологія на дискретній групі G з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною.

Введено електорально гнучкі та електорально стійкі групи та вивчаються їхні властивості. Зокрема, доведено, що кожна група, яка містить нескінченну циклічну підгрупу нескінченного індексу та кожна незліченна комутативна група є електорально гнучкими, а також, що кожна зліченна локально скінченна група є електорально стійкою.

Основним результатом розділу є таке твердження-дихотомія: *якщо G — дискретна електорально гнучка нескінченна група, то кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.* На довільній нескінченній віртуально циклічній групі (а отже, на електорально стійкій групі) з приєднаним нулем G^0 побудовано недискретну некомпактну локально компактну трансляційно неперервну топологію, яка індукує на G дискретну топологію.

Загальні висновки

У дисертаційній роботі отримані наступні результати:

1. Доведено, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на довільному варіанті біциклічного моноїда є дискретною та якщо $\mathscr{C}_{m,n}$ – довільна інтерасоціативність біциклічного моноїда така, що $\mathscr{C}_{m,n}$ є щільною піднапівгрупою гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S,\cdot)$ і $I = S \setminus \mathscr{C}_{m,n} \neq \varnothing$, то I є двобічним ідеалом напівгрупи S.

2. Доведено, що для довільних невід'ємних цілих чисел m і n довільна гаусдорфова локально компактна трансляційно неперервна топологія τ на ненульовому варіанті $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}^0_{m,n}$ з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною.

3. Доведено, що група автоморфізмів $\mathbf{Aut}\,(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел, розширена біциклічна напівгрупа та кожен її варіант не є скінченно породженими, довільні два варіанти розширеної біциклічної напівгрупи є ізоморфними.

4. Описано трансляційно неперервні гаусдорфові топології на варіанті $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$ розширеної біциклічної напівгрупи.

5. Доведено, що кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ є дискретною, однак на $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{0}}$ існує континуум різних гаусдорфових локально компактних трансляційно неперервних топологій.

6. Доведено, що для довільної зліченної лінійно впорядкованої групи G і непорожньої трансляційної множини $A \subseteq G$, кожна берівська трансляційно неперервна T_1-топологія τ на $\mathscr{B}(A)$ дискретна.

7. Доведено, що для довільної лінійної нещільно впорядкованої групи G і непорожньої трансляційної множини A кожна трансляційно

неперервна гаусдорфова топологія τ на напівгрупі $\mathscr{B}(A)$ дискретна. Це узагальнює результати, отримані в працях [48, 71, 73].

8. Доведено, якщо G — дискретна електорально гнучка нескінченна група, то кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною; також на довільній нескінченній віртуально циклічній групі (а отже, на електорально стійкій групі) з приєднаним нулем G^0 побудовано недискретну некомпактну локально компактну трансляційно неперервну топологію, яка індукує на G дискретну топологію.

Список використаних джерел

1. Архангельский А. *Бикомпактные множества и топология пространств* / А. Архангельский // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 9–12.

2. Вагнер В. В. *Обобщенные группы* / В. В. Вагнер // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 84. – С. 1119–1122.

3. Вайнштейн И. А. *О замкнутых отображениях метрических пространств* / И. А. Вайнштейн // Докл. АН СССР. – 1947. – Т. 57. – С. 319–321.

4. Гуран І. *Симетричні топологічні групи та півгрупи* / І. Гуран, О. Гутік, О. Равський, І. Чучман // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2011. – Вип. 74. – С. 61–73.

5. Гутік О. В. *Довільна топологічна напівгрупа топологічно ізоморфно вкладаєтьcя в просту лінійно зв'язну топологічну напівгрупу* / О. В. Гутік // Алгебра і топологія, збірник тематичних праць. Львів, ЛДУ. – 1996. – С. 65–73.

6. Гутік О. *Про напівгрупу ID_∞* / О. Гутік, А. Савчук // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2017. – Вип. 83. – С. 5–19.

7. Деменчук В. В. *Минимальные топологические полугруппы с замкнутыми главными идеалами* / В. В. Деменчук // Изв. вузов. Матем. – 1986. – №. 7. – С. 36–39.

8. Десятерик О. О. *Варіанти комутативних зв'язок з нулем* / О. О. Десятерик // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія "Фізико-математичні науки". – 2015. – № 4. – С. 15–20.

9. Десятерик О. *Варіанти напівгрупи Ріса матричного типу* / О. Десятерик // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2019. – Вип. 88. – С. 12–21.

10. Динь Ньё Тонг *Предзамкнутые отображения и теорема А. Д. Тайманова* / Динь Ньё Тонг // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 152, № 3. – С. 525–528.

11. Клиффорд А. *Алгебраическая теория полугрупп: Пер. с англ.* / А. Клиффорд, Г. Престон. – Т. 1. – Москва: Мир, 1961. – 288 с.; Т. 2. – Москва: Мир, 1972. – 424 с.

12. Курош А. Г. *Теория групп* / А. Г. Курош – Москва: Наука, 3-е изд., 1967. – 648 с.

13. Ляпин Е. С. *Полугруппы* / Е. С. Ляпин. – Москва: Физматлит, 1960. – 592 с.

14. Максимик К. *Про локально компактні групи з нулем* / К. Максимик // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2019. – Вип. 88. – С. 51–58.

15. Марков А. А. *О свободных топологических группах* / Марков А. А. // Известия Акад. Наук СССР. – 1945. – Т. 9, № 1. – С. 3–64.

16. Ольшанский А. *Замечание о счетной нетопологизируемой группе* / А. Ольшанский // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1980. – Т. 39, № 3. – С. 103.

17. Понтрягин Л. С. *Непрерывные группы* / Л. С. Понтрягин – Москва. – 1938.

18. Тайманов А. Д. *Пример полугруппы, допускающей только дискретную топологию* / А. Д. Тайманов // Алгебра и логика. – 1973. – Т. 12, № 1. – С. 114–116.

19. Тайманов А. Д. *О топологизации коммутативных полугрупп* / А. Д. Тайманов // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17, № 5. – С. 745–748.

20. Хилинський М. *Інтерасоціативності поліциклічного моноїда* / М. Хилинський // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2018. – Вип. 86. – С. 77–90.

21. Юрьева А. А. *Счетно компактная секвенциальная топологическая полугруппа с двусторонними сокращениями является топологической группой* / А. А. Юрьева // Мат. Студії. – 1993. – Т. 2. – С. 23–24.

22. Энгелькинг Р. *Общая топология: Пер. с англ.* / Р. Энгелькинг. – Москва: Мир, 1986. – 752 с.

23. Abel N. H. *Untersuchung der Funktionen zweier unabhängig veränderlicher Größen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Funktion von z, x und y ist* / N. H. Abel // J. Reine Angew. Math. – 1826. – Vol. 1. – P. 11–15.

24. Ahre K. R. *Locally compact bisimple inverse semigroups* / K. R. Ahre // Semigroup Forum. – 1981. – Vol. 22, № 4. – P. 387–389.

25. Ahre K. R. *On the closure of $B^1_{[0,\infty)}$* / K. R. Ahre // İstanbul Tek. Üniv. Bül. – 1983. – Vol. 36, № 4. – P. 553–562.

26. Ahre K. R. *On the closure of $B'_{[0,\infty)}$* / K. R. Ahre // Semigroup Forum. – 1984. – Vol. 28, № 1 – 3. – P. 377–378.

27. Ahre K. R. *On the closure of $B^1_{[0,\infty)}$* / K. R. Ahre // Semigroup Forum. – 1986. – Vol. 33, № 2. – P. 269–272.

28. Ahre K. R.*On the closure of $B^2_{[0,\infty)}$* / K. R. Ahre // İstanbul Tek. ÜniVol. Bül. – 1989. – Vol. 42, № 3. – P. 387–390.

29. Andersen O. *Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen* / O. Andersen // PhD Thesis – Hamburg, 1952.

30. Anderson L. W. *Some results on stability in semigroups* / L. W. Anderson, R. P. Hunter, and R. J. Koch // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965.– Vol. 117. – P. 521–529.

31. Arhangel'skii A. *Topological groups and related structures* / A. Arhangel'skii, M. Tkachenko // Atlantis Studies in Mathematics 1. Hackensack, NJ: World Scientific. Paris: Atlantis Press. – 2008. – Vol. XIV. – 781 p.

32. Ash C. J. *Inverse semigroups on graphs* / C. J. Ash, T. E. Hall // Semigroup Forum. – 1975. – Vol. 11. – P. 140–145.

33. Banakh T. *Complete topologized posets and semilattices* / T. Banakh, S. Bardyla // Top. Proc. – 2021. – Vol. 57. – P. 177–196.

34. Banakh T. *The Rees-Suschkiewitsch Theorem for simple topological semigroups* / T. Banakh, S. Dimitrova, O. Gutik // Mat. Stud. – 2009. – Vol. 31, № 2. – P. 211–218.

35. Banakh T. *Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups* / T. Banakh, S. Dimitrova, O. Gutik // Topology Appl. – 2010. – Vol. 157, № 18. – P. 2803–2814.

36. Banaschewski B. *Minimal topological algebras* / B. Banaschewski // Math. Ann. – 1974. – Vol. 211, № 2. – P. 107–114.

37. Bardyla S. *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids* / S. Bardyla // Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. – 2016. – Т. 13. – С. 21–28.

38. Bardyla S. *On locally compact semitopological graph inverse semigroups* / S. Bardyla // Mat. Stud. – 2018. – Vol. 49, № 1. – P. 19–28.

39. Bardyla S. *On a semitopological polycyclic monoid* / S. Bardyla, O. Gutik // Algebra Discr. Math. – 2016. – Vol. 21, № 2. – P. 163–183.

40. Bardyla S. *On the lattice of weak topologies on the bicyclic monoid with adjoined zero* / S. Bardyla, O. Gutik // Algebra Discr. Math. – 2020. – Vol. 30, № 1. – P. 26–43.

41. Bardyla S. *Closed subsets of compact-like topological spaces* / S. Bardyla, A. Ravsky // Applied General Topology. – 2020. – Vol. 21, № 2. – P. 201–214.

42. Bardyla S. *On locally compact topological graph inverse semigroups* / S. Bardyla // Topology and its Applications. – 2019. – Vol. 267. – 106873.

43. Berglund J. F. *Problems about semitopological semigroups* / J. F. Berglund // Semigroup Forum. – 1980. – Vol. 19. – P. 373–383.

44. Berglund J. F. *Compact semitopological semigroups and weakly almost periodic functions* / J. F. Berglund, K. H. Hofmann // Lecture Notes in Math. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. – 1967. – Vol. 42. – 160 p.

45. Berglund J. F. *Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity* / J. F. Berglund, H. D. Junghenn, P. Milnes // Lecture Notes in Math. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. – 1978. – Vol. 663, № X. – 243 p.

46. Berglund J. F. *Analysis on semigroups: function spaces, compactifications, representations* / J. F. Berglund, H. D. Junghenn, P. Milnes // Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. A Wiley-Interscience Publication. New York etc.: John Wiley & Sons. – 1989. – Vol. XIV. – 334 p.

47. Berri M. P. *A survey of minimal topological spaces* / M. P. Berri, J. R. Porter, R. M. Stephenson, Jr. //"General Topology and its Relations to Modern Analisys and Algebra". Proc., 1968, Kanpur Topol. Conf. Ed.: S. P. Franklin, Z. Frolik and Vol. Koutnik, Academic. Praha. – 1971. – P. 93–114.

48. Bertman M. O. *Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups* / M. O. Bertman, T. T. West //Proc. Roy. Irish Acad. – 1976. – Vol. A76, № 21–23. – P. 219–226.

49. Birkhoff G. *Lattice theory* / G. Birkhoff – Colloq. Publ.: 25. Amer. Math. Soc., 1973.

50. Bobrowski A. *An operator semigroup in mathematical genetics* / A. Bobrowski, M. Kimmel – Springer, 2015.

51. Bokalo B. *Sequentially compact Hausdorff cancellative semigroup is a topological group* / B. Bokalo, Guran I. // Mat. Stud. – 1996. – Vol. 6. – P. 39–40.

52. Boyd S. J. *Interassociativity of semigroups* / S. J. Boyd, M. Gould, A. Nelson // Misra, P. R. (ed.) et al., Proceedings of the Tennessee Topology Conference, Nashville, TN, USA, June 10–11, 1996, Singapore, World Scientific. – 1997. – P. 33–51.

53. Brualdi R. A. *Introductory combinatorics* / R. A. Brualdi – Prentice Hall: Pearson Education, Inc., 5th ed., 2009.

54. Carruth J. H. *The theory of topological semigroups* / J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, R. J. Koch. – New York : Marcel Dekker, Inc., 1983. – Vol. 1. – 244 p.

55. Carruth J. H. *The theory of topological semigroups* / J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, R. J. Koch. – New York : Marcel Dekker, Inc., 1986. – Vol. 2. – 195 p.

56. Chase K. *Sandwich semigroups of binary relations* / K. Chase // Discrete Math. – 1979. – Vol. 28, № 3. – P. 231–236.

57. Chase K. *New semigroups of binary relations* / K. Chase // Semigroup Forum. – 1979. – Vol. 18, № 1. – P. 79–82.

58. Chase K. *Maximal groups in sandwich semigroups of binary relations* / K. Chase // Pac. J. Math. – 1982. – Vol. 100, № 1. – P. 42–59.

59. Chuchman I. *Topological monoids of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of the set of positive integers* / I. Chuchman, O. Gutik // Carpathian Math. Publ. – 2010. – Vol. 2, № 1. – P. 119–132.

60. Chuchman I. *On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity* / I. Chuchman, O. Gutik // Demonstr. Math. – 2011. – Vol. 44, № 4. – P. 699–722.

61. Dales H. G. *Banach algebras on semigroups and on their compactifications* / H. G. Dales, A. T.-M. Lau, D. Strauss // Mem. Am. Math. Soc. – 2010. – Vol. 966. – P. 165.

62. Clay A. *Ordered groups and topology* / A. Clay, D. Rolfsen – Providence: Amer. Math. Soc., 2016.

63. Dickson L. E. *Definitions of a group and a field by independent postulates* / L. E. Dickson // Trans. Amer. Math. Soc. – 1905. – Vol. 6. – P. 198–204.

64. Doîtchinov D. *Produits de groupes topologiques minimaux* / D. Doîtchinov // Bull. Sci. Math. – 1972. – Vol. 97, № 2. – P. 59–64.

65. Dolinka I. *Sandwich semigroups in diagram categories* / I. Dolinka, I. Đurđev, J. East // Preprint (arXiv:1910.10286).

66. Dolinka I. *Sandwich semigroups in locally small categories I: Foundations* / I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, W. Sommanee // Algebra Universalis. – 2018. – Vol. 79, Article 75. – 35 pp.

67. Dolinka I. *Sandwich semigroups in locally small categories II: Transformations* / I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, W. W. Sommanee //Algebra Universalis. – 2018. – Vol. 79, Article 76. – 53 pp.

68. Dolinka I. *Variants of finite full transformation semigroups* / I. Dolinka, J. East // Int. J. Algebra Comput. – 2015. – Vol. 25, № 8. – P. 1187–1222.

69. Dolinka I. *Semigroups of rectangular matrices under a sandwich operation* / I. Dolinka, J. East // Semigroup Forum. – 2018. – Vol. 96, № 2. – P. 253–300.

70. East J. *Transformation representations of sandwich semigroups* / J. East // Experimental Mathematics. – 2020. – Vol. 29, № 3. – P. 291–295.

71. Eberhart C. *On the closure of the bicyclic semigroup* / C. Eberhart, J. Selden // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 115–126.

72. Epstein D. B. A. *Ends* / D. B. A. Epstein // “Topology of 3-manifolds and related topics”. Proc. Univ. of Georgia Institute, 1961, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. – 1962. – P. 110–117.

73. Fihel I. R. *On the closure of the extended bicyclic semigroup* / I. R. Fihel, O. V. Gutik // Карпатські математичні публікації. – 2011. – Т. 3, № 2. – С. 131–157.

74. Fortunatov V. A. *Congruences on simple extensions of semigroups* / V. A. Fortunatov // Semigroup Forum. – 1976. – Vol. 13. – P. 283–295.

75. Fotedar G. L. *On a semigroup associated with an ordered group* / G. L. Fotedar // Math. Nachr. – 1974. – Vol. 60. – P. 297–302.

76. Fotedar G. L. *On a class of bisimple inverse semigroups* / G. L. Fotedar // Riv. Mat. Univ. Parma. – 1973. – Vol. 4, № 4. – P. 49–53.

77. Fuchs L. *Partially Ordered Algebraic Systems* / L. Fuchs – Pergamon Press, 1963.

78. Ganyushkin O. *Classical finite transformation semigroups, an introduction* / O. Ganyushkin, V. Mazorchuk // Algebra and Appl. – London: Springer. – 2009. – Vol. 9.

79. Ganyushkin O. G. *Variants of a semilattice* / O. G. Ganyushkin, O. O. Desiateryk // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія “Фізико-математичні науки”. – 2013. – № 4. – P. 12–16.

80. Gierz G. *Continuous lattices and domains* / G. Gierz, K. Hofmann, K. Keimel, J. Lawson, M. Mislove, D. S. Scott // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge: Cambridge University Press. – 2003. – Vol. 93, № XXXVI. – 591 p.

81. Givens B. N. *Interassociates of the bicyclic semigroup* / B. N. Givens, A. Rosin, K. Linton // Semigroup Forum. – 2017. – Vol. 94, № 1. – P. 104–122.

82. Grant D. *Sequentially compact cancellative topological semigroups: some progress on the Wallace Problem* / Papers on General Topology and Applications. Seventh Summer Conference at the University of Wisconsin (ed. Andima, S. et al.). Annals of the New York Academy of Sciences. – 1993. – Vol. 704. – P. 150–154.

83. Gutik O. *On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero* / O. Gutik // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2015. – Vol. 80. – P. 33–41.

84. Gutik O. *Topological properties of Taimanov semigroups* / O. Gutik // Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. – 2016. – Т. 13. – С. 29–34.

85. Gutik O. *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse* ω*-semigroups* / O. Gutik // Topol. Algebra Appl. – 2018. – Vol. 6. – P. 77–101.

86. Gutik O. *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid* / O. Gutik, K. Maksymyk // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2016. – Вип. 82. – С. 98–108.

87. Gutik O. *On semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups* / O. Gutik, K. Maksymyk // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 238, № 1. – P. 32–45.

88. Gutik O. *On variants of the extended bicyclic semigroup* / O. Gutik, K. Maksymyk // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2017. – Вип. 84. – С. 22–37.

89. Gutik O. *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero* / O. Gutik, K. Maksymyk // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2019. – Т. 62, № 4. – С. 28–38.

90. Gutik O. *Semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups* / O. Gutik, K. Maksymyk // International Conference “Complex

Analysis and Related Topics", May 30-June 4, 2016, Lviv: Abstracts. – Lviv, 2016. – P. 30.

91. Gutik O. *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero* / O. Gutik, K. Maksymyk // Set-theoretic methods in topology and real functions theory. The conference is dedicated to the 80th birthday of Lev Bukovsky, September 9-13, 2019, Košice: Abstracts. – Košice, 2019. – P. 31–32.

92. Gutik O. *The monoid of order isomorphisms between principal filters of* $\mathbb{N}^n$ / O. Gutik, T. Mokrytskyi // Eur. J. Math. – 2020. – Vol. 6, № 1. – P. 14–36.

93. Gutik O. *Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group* / O. Gutik, D. Pagon, K. Pavlyk // Acta Comment. Univ. Tartu. Math. – 2011. – Vol. 15, № 2. – P. 61–80.

94. Gutik O. *On topological semigroups of matrix units* / O. Gutik, K. Pavlyk // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 71, № 3. – P. 389–400.

95. Gutik O. *On monoids of monotone injective partial selfmaps of* $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ *with co-finite domains and images* / O. Gutik, I. Pozdnyakova // Algebra Discr. Math. – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 256–279.

96. Gutik O. *On feebly compact inverse primitive (semi)topological semigroups* / O. Gutik, O. Ravsky // Mat. Stud. – 2015. – Vol. 44, № 1. – P. 3–26.

97. Gutik O. *On countably compact* 0*-simple topological inverse semigroups* / O. Gutik, D. Repovš // Semigroup Forum. – 2007. – Vol. 75, № 2. – P. 464–469.

98. Gutik O. *Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of* $\mathbb{N}$ *having cofinite domain and image* / O. Gutik, D. Repovš // Stud. Sci. Math. Hungar. – 2011. – Vol. 48, № 3. – P. 342–353.

99. Gutik O. *On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images* / O. Gutik, D. Repovš // Georgian Math. J. – 2012. – Vol. 19, № 3. – P. 511–532.

100. Haworth R. C. *Baire spaces* / R. C. Haworth, R. A. McCoy // Diss. Math. – 1977. – Vol. 141. – 73 pp.

101. Hickey J. B. *Semigroups under a sandwich operation* / J. B. Hickey // Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. – 1983. – Vol. 26, № 3. – P. 371–382.

102. Hickey J. B. *On variants of a semigroup* / J. B. Hickey // Bull. Austral. Math. Soc. – 1986. – Vol. 34, № 3. – P. 447–459.

103. Hildebrant J. A. *Swelling actions of* Γ*-compact semigroups* / J. A. Hildebrant, R. J. Koch // Semigroup Forum. – 1986. – Vol. 33. – P. 65–85.

104. Hilgert J. *Lie semigroups and their applications* / J. Hilgert, K.-H. Neeb // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag. – 1993. – Vol. 1552, № XII. – 315 p.

105. Hille E. *Functional analysis and semi-groups* / E. Hille // American Mathematical Society. Colloquium Publications. – 1948. – Vol. 31, № XI. – 528 p.

106. Hindman N. *Algebra in the Stone-Cech compactification: theory and applications* / N. Hindman, D. Strauss // de Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin: Walter de Gruyter. – 1998. – Vol. 27, № XIII. – 485 p.

107. Hofmann K. H. *Locally compact semigroups in which a subgroup with compact complement is dense* / K. H. Hofmann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 106. – P. 19–51.

108. Hofmann K. H. *Topological semigroups: history, theory, applications* / K. H. Hofmann // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. – 1976. – Vol. 78. – P. 9–59.

109. Hofmann K. H. *Zur geschichte des halbgruppenbegriffs* / K. H. Hofmann // Historia Mathematica. – 1992. – Vol. 19. – P. 40–59.

110. Hofmann K. H. *From a topological theory of semigroups to a geometric one* / K. H. Hofmann // Semigroup Forum. – 1995. – Vol. 50. – P. 123–134.

111. Hofmann K. H. *A history of topological and analytical semigroups: a personal view* / K. H. Hofmann // Semigroup Forum. – 2000. – Vol. 61. – P. 1–25.

112. Hofmann K. H. *The Pontryagin duality of compact* 0*-dimensional semilattices and its applications* / K. H. Hofmann, M. Mislove, A. Stralka // Lecture Notes in Math. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. – 1974. – Vol. 396, № XVI. – 122 p.

113. Hofmann K. H. *Elements of compact semigroups* / K. H. Hofmann, P. S. Mostert // Charles Merrill – Columbus, 1966.

114. Hofmann K. H. *Lie groups and subsemigroups with surjective exponential function* / K. H. Hofmann, W. A. F. Ruppert // Mem. Am. Math. Soc. – 1997. – Vol. 618. – 174 p.

115. Hollings Ch. *The early development of the algebraic theory of semigroups* / Ch. Hollings // Arch. Hist. Exact Sci. – 2009. – Vol. 63. – P. 497–536.

116. Hollings Ch. *The Ehresmann–Schein–Nambooripad theorem and its successors* / Ch. Hollings // European J. Pure Appl. Math. – 2012. – Vol. 5, № 4. – P. 414–450.

117. Hollings Ch. *Mathematics across the Iron Curtain: a history of the algebraic theory of semigroups* / Ch. Hollings // History of Mathematics. American Mathematical Society – Providence, RI. – 2014. – Vol. 41.

118. Huang W. *Matrices which belong to an idempotent in a sandwich semigroup of circulant boolean matrices* / W. Huang // Linear Algebra Appl. – 1996. – № 1–3. – P. 157–167.

119. Khan T. *Variants of regular semigroups* / T. Khan, M. Lawson // Semigroup Forum. – 2001. – Vol. 62, № 3. – P. 358–374.

120. Klein F. *Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forschungen* / F. Klein // Math. Ann. – 1893. – Vol. 43. – P. 63–100.

121. Koch R. J. *Stability in semigroups* / R. J. Koch, A. D. Wallace // Duke Math. J. – 1957. – Vol. 24. – P. 193–195.

122. Koch R. J. *Notes on inverse semigroups* / R. J. Koch, A. D. Wallace / Rev. Roum. Math. Pures Appl. – 1964. – Vol. 9, № 1. – P. 19–24.

123. Korkmaz R. *On the closure of* $B^2_{(-\infty,+\infty)}$ / R. Korkmaz // Semigroup Forum. – 1997. – Vol. 54, № 2. – P. 166–174.

124. Korkmaz R. *Dense inverse subsemigroups of a topological inverse semigroup* / R. Korkmaz // Semigroup Forum. – 2009. – Vol. 78, № 3. – P. 528–535.

125. Lawson J. D. *Historical links to a Lie theory of semigroups* / J. D. Lawson // Seminar Sophie Lie. – 1992. – Vol. 2. – P. 263–278.

126. Lawson J. D. *The earliest semigroup paper?* / J. D. Lawson // Semigroup Forum. – 1996. – Vol. 52. – P. 55–60.

127. Lawson J. D. *An interview with Karl H. Hofmann on the occasion of his seventieth birthday* / J. D. Lawson // Semigroup Forum. – 2002. – Vol. 65. – P. 317–328.

128. Lawson M. V. *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries* / M. V. Lawson // NJ–Singapore–London: World Scientific Publishing Co. Pre. Ltd, 1998. – 411 p.

129. de Luca A. *Finiteness and regularity in semigroups and formal languages* / A. de Luca, S. Varricchio // Springer, 1999.

130. Magill K. D. jun. *Recent results and open problems in semigroups of continuous self-maps* / K. D. Magill jun. // Russ. Math. Surv. – 1980. – Vol. 35, № 3. – P. 91–97.

131. Magill K. D. jun. *Some open problems and directions for further research in semigroups of continuous selfmaps* / K. D. Magill jun. // Universal algebra and applications. Semester 1978. Banach Cent. Publ. – 1982. – Vol. 9. – P. 439–454.

132. Magill K. D. jun. *Recent results and open problems on the countability index and the density index of S(X)* / K. D. Magill jun. // General topology and applications. Proc. Northeast Conf. Middletown, CT (USA). Lect. Notes Pure Appl. Math. – 1990. – Vol. 123. – P. 193–202.

133. Maksymyk K. *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid* / K. Maksymyk, O. Gutik // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, September 27-October 1, 2016, Lviv: Abtract of Reports. – Lviv, 2016. – P. 31–32.

134. Maksymyk K. *On variants of the extended bicyclic semigroup* / K. Maksymyk, O. Gutik // The 13-th Summer School "Analysis, Topology and Applications 29 July - 11 August, 2018, Vyzhnytsya, Chernivtsi region, Ukraine: Book of Abstracts. – Chernivtsi, 2018. – P. 29–32.

135. Maksymyk K. *On locally compact groups with zero* / K. Maksymyk // International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, July 14–17, 2020, Kyiv: Book of Abstracts. – Kyiv, 2020. – P. 52.

136. Mazorchuk Vol. *Isolated subsemigroups in the variants of* $\mathscr{T}_n$ / Vol. Mazorchuk, G. Tsyaputa // Acta Math. Univ. Comen. New Ser. – 2008. – Vol. 77, № 1. – P. 63–84.

137. McDougle P. *A theorem on quasi-compact mappings* / P. McDougle // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – Vol. 9, № 3. – P. 474–477.

138. McDougle P. *Mapping and space relations* / P. McDougle // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – Vol. 10, № 2. – P. 320–323.

139. Mesyan Z. *Topological graph inverse semigroups* / Z. Mesyan, J. D. Mitchell, M. Morayne, Y. H. Péresse // Topology Appl. – 2016. – Vol. 208. – P. 106–126.

140. Moore R. L. *Concerning upper semi-continuous collections of continua* / R. L. Moore // Trans. Amer. Math. Soc. – 1925. – Vol. 27. – P. 416–428.

141. Mostert P. S. *The structure of topological semigroups – revisited* / P. S. Mostert // Bull. Am. Math. Soc. – 1966. – Vol. 72. – P. 601–618.

142. Mukherjea A., Tserpes N. A. *Measures on topological semigroups: Convolution products and random walks* / A. Mukherjea, N. A. Tserpes // Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. – 1967. – Vol. 547, № IV. – 197 p.

143. Nachbin L. *On strictly minimal topological division rings* / L. Nachbin // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 55, № 12. – P. 1128–1136.

144. Nivat M. *Une généralisation du monoide bicyclique* / M. Nivat, J.-F. Perrot // C. R. Acad. Sci., Paris. – 1970. – Vol. 271: A. – P. 824–827.

145. Numakura K. *On bicompact semigroups* / K. Numakura // Math. J. Okayama Univ. – 1952. – Vol. 1. – P. 99–108.

146. Numakura K. *Theorems on compact totally disconnected semigroups and lattices* / K. Numakura // Proc. Am. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8. – P. 623–626.

147. Numakura K. *Prime ideals and idempotents in compact semigroups* / K. Numakura // Duke Math. J. – 1957. – Vol. 24. – P. 671–680.

148. Owen W. S. *The Rees theorem for locally compact semigroups* / W. S. Owen // Semigroup Forum. – 1973. – Vol. 6. – P. 133–152.

149. Paalman-de-Miranda A. *Topological semigroups* / A. B. Paalman-de-Miranda – Amsterdam: Mathematisch Centrum Amsterdam, 1964. – 169 p.

150. Petrich M. *Inverse semigroups* / M. Petrich – New York: John Wiley & Sons, 1984.

151. Reznichenko E. A. *Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups* / E. A. Reznichenko // Topology Appl. – 1994. – Vol. 59, № 3. – P. 233–244.

152. Robbie D. *An answer to A. D. Wallace's question about countably compact cancellative semigroups* / D. Robbie, S. Svetlichny // Proc. Am. Math. Soc. – 1996. – Vol. 124, № 1. – P. 325–330.

153. Robinson D. J. S. *A course in the theory of groups* / D. J. S. Robinson – Berlin, New York: Springer-Verlag, 1996.

154. Roset A. I. *Topologically* 0*-simple semigroups* / A. I. Roset // Semigroup Forum. – 1977. – Vol. 15, № 1. – P. 149–157.

155. Ruppert W. *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory* / W. Ruppert // Lect. Notes Math., Berlin: Springer. – 1984. – Vol. 1079.

156. Schwarz Š. *On Hausdorff bicompact semigroups* / Š. Schwarz // Czech. Math. J. – 1955. – Vol. 5. – P. 1–23.

157. Schwarz Š. *Characters of bicompact semigroups* / Š. Schwarz // Czech. Math. J. – 1955. – Vol. 5. – P. 24–28.

158. Schwarz Š. *Topological semigroups with one-sided units* / Š. Schwarz // Czech. Math. J. – 1955. – Vol. 5. – P. 153–163.

159. Šneperman L. B. *The Rees theorem for weakly uniform semigroups* / L. B. Šneperman // Semigroup Forum. – 1981. – Vol. 23, № 1. – P. 261–273.

160. Šneperman L. B. *Weakly uniform completely O-simple semigroups of matrix type* / L. B. Šneperman // Semigroup Forum. – 1985. – Vol. 31. – P. 25–32.

161. Stephenson R. M. Jr. *Minimal topological groups* / R. M. Stephenson Jr. // Math. Ann. – 1971. – Vol. 192, № 3. – P. 193–195.

162. Tomita, Artur H. *The Wallace problem: a counterexample from* $MA_{countable}$ *and p-compactness* / Tomita, H. Artur // Can. Math. Bull. – 1996. – Vol. 39, № 4. – P. 486–498.

163. Wall C. T. C. *Poincaré complexes I* / C. T. C. Wall // Ann. Math. – 1967. – Vol. 86, № 2. – P. 213–245.

164. Wallace A. D. *A note on mobs* / A. D. Wallace // Anais Acad. Brasil. Ci. – 1952. – Vol. 24. – P. 329–334.

165. Wallace A. D. *Inverses in Euclidean mobs* / A. D. Wallace // Math. J. Okayama Univ. – 1953. – Vol. 3. – P. 23–28.

166. Wallace A. D. *A note on mobs II* / A. D. Wallace // Anais Acad. Brasil. Ci. – 1953. – Vol. 25. – P. 335–336.

167. Wallace A. D. *The structure of topological semigroups* / A. D. Wallace // Bull. Am. Math. Soc. – 1955. – Vol. 61. – P. 95–112.

168. Warne R. J. *I-bisimple semigroups* / R. J. Warne // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 130, № 3. – P. 367–386.

Додаток

Наукові праці, у яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Gutik O. *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid* / O. Gutik, K. Maksymyk // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична – 2016. – Вип. 82. – С. 98–108.

2. Gutik O. *On variants of the extended bicyclic semigroup* / O. Gutik, K. Maksymyk // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична – 2017. – Вип. 84. – С. 22–37.

3. Gutik O. *On semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups* / O. Gutik, K. Maksymyk // Journal of Mathematical Sciences – 2019. – Vol. 238, №. 1. – P. 32–45.

4. Gutik O. *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero* / O. Gutik, K. Maksymyk // Математичні методи та фізико-механічні поля – 2019. – Т. 62, №. 4. – С. 28–38.

5. Максимик К. *Про локально компактні групи з нулем* / К. Максимик // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична – 2019. – Вип. 88. – С. 51–58.

Тези доповідей на конференціях, що засвідчують апробацію результатів дисертації:

1. Gutik O. *Semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups* / O. Gutik, K. Maksymyk // International Conference "Complex Analysis and Related Topics", May 30 - June 4, 2016, Lviv: Abstracts. – Lviv, 2016. – P.30.

2. Maksymyk K. *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid* / O. Gutik, K. Maksymyk // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, September 27 - October 1, 2016, Lviv: Abtract of Reports. – Lviv, 2016. – P. 31–32.

3. Maksymyk K. *On variants of the extended bicyclic semigroup* / O. Gutik, K. Maksymyk // The 13-th Summer School "Analysis, Topology and Applications 29 July - 11 August, 2018, Vyzhnytsya, Chernivtsi region, Ukraine: Book of Abstracts. – Chernivtsi, 2018. – P. 29–32.

4. Gutik O. *On a semitopological extended bicyclic semigroup with adjoined zero* / O. Gutik, K. Maksymyk // Set-theoretic methods in topology and real functions theory. The conference is dedicated to the 80th birthday of Lev Bukovsky, September 9-13, 2019, Košice: Abstracts. – Košice, 2019. – P.31–32.

5. Maksymyk K. *On locally compact groups with zero* / K. Maksymyk // International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, July 14–17, 2020, Kyiv: Book of Abstracts. – Kyiv, 2020. – P. 52.

Апробація результатів дисертації:

1. Міжнародна конференція “Complex Analysis and Related Topics”, Львів, 30 травня – 4 червня 2016 р.

2. Міжнародна конференція, присвячена 120-и річчю з дня народження Казіміра Куратовського, Львів, 27 вересня – 1 жовтня 2016 року.

3. XIII-тій Літня школа “Аналіз, топологія та застосування”, Вижниця, 29 липня – 11 серпня 2018 року.

4. Міжнародна конференція “Set-theoretic methods in topology and real functions theory”, присвячена 80-и річчю Лева Буковського, Кошіце, Словаччина, 9–13 вересня 2019 року.

5. Міжнародна математична конференція, присвячена 60-и річчю кафедри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 14–17 липня 2020 року.

6. Семінар “Топологія і застосування” в Львівському національному університеті імені Івана Франка, липень 2020 року.

7. Семінар "Топологічна алгебра" в Львівському національному університеті імені Івана Франка, вересень-жовтень 2016 року.

8. Науковий семінар ім. М. Комарницького "Теорія полігонів і спектральні простори" в Львівському національному університеті імені Івана Франка, травень 2016 року.