Міністерство освіти і науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Романський Михайло

УДК 515.12

ДИСЕРТАЦІЯ
Функтори і асимптотичні властивості метричних просторів

01.01.04 — геометрія і топологія

11 — математика і статистика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії). Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів та текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

______________________ Романський

підпис

Науковий керівник: д.ф.-м.н., професор
Зарічний Михайло Михайлович

Львів — 2021

АНОТАЦІЯ

Романський М.М. Функтори і асимптотичні властивості метричних просторів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико - математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 “Геометрія і топологія”. – “Львівський національний університет імені Івана Франка”, Львів, 2019.

У дисертаційній роботі досліджена груба та ліпшицева еквівалентність між деякими функторіальними конструкціями, а також деякі властивості конуса, джойна та надбудови в асимптотичних категоріях.

Дисертація присвячена сучасній області топології, яка останніми десятиліттями інтенсивно розвивається — асимптотичній топології (прийнято також термін "груба геометрія"). Вона присвячена вивченню крупно масштабних інваріантів метричних просторів та, більш загально, грубих структур (модифікаціями останніх є так звані боллеани, які запровадив і досліджував І. В. Протасов).

Ця галузь топології має свої витки також і в геометричній теорії груп. Так М. Громов означив поняття асимптотичного виміру скінченнопородженої групи, яке знайшло застосування у розв’язуванні певних відкритих проблем алгебраїчної топології. Також були означені модифікації асимптотичного виміру Громова (асимптотичний вимір Ассуада-Нагати, асимптотичний підстепеневий вимір).

Природно, що дослідження асимптотичних властивостей метричних просторів вимагає включення їх у певну категорію. Найважливішими

для застосування є асимптотичні категорії А. Дранішнікова і Дж. Роу, для яких означено і досліджено різноманітні функторіальні конструкції.

Однією з важливих задач асимптотичної топології є класифікація функторіальних конструкцій з точністю до губої еквівалентності. У цьому напрямку лежать результати дисертації.

Дранішніков в статті [23] запропонував поняття асимптотичного добутку та означив конус, надбудову і джойн в асимптотичних категоріях. В цій же статті стверджується, що для геодезійних просторів X асимптотичний конус та надбудову можна задавати формулами $CX = X \times \mathbb{R}_+$, $\sum X = X \times \mathbb{R}$. У лемі 2.1.1 ми довели протилежний результат, чим показали, що це твердження потребує уточнення. Також показали, що асимптотичний конус $C\mathbb{R}_+$ і надбудова $\sum \mathbb{R}_+$ не є ізоморфними. Дранішніков визначив джойн $X*Y$ як підпростір простору ймовірнісних мір $P_2(X \vee Y)$ та поставив питання ізоморфності конуса CX і джойна $X * \mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$. Ми довели, що ці простори не є ізоморфними, однак встановили ізоморфність джойна $X * \mathbb{R}_+$ та декартового добутку $X \times \mathbb{R}_+$, для випадків коли X є $n-$вимірним евклідовим простором або $\gamma-$слабо опуклим та $\delta-$слабо вгнутим геодезійним простором.

З результатів дисертації варто відзначити ті, що стосуються грубої еквівалентності (тобто еквівалентності в асимптотичній категорії Дж. Роу) функторіальних конструкцій. Для прикладу, розглянуто гіперпростори (простори компактних підмножин) евклідових просторів і показано, що вони не є грубо еквівалентні гіперпросторам континуумів (зв'язних компонентів) та гіперпросторам опуклих компактів. Причому доведено, що гіперпростори компактних підмножин та гіперпростори опуклих компактів над евклідовими просторами є геодезійними, на відміну від гіперпросторів континуумів над евклідовими просторами.

У дисертації доведено, що гіперпростори $\exp_3 \mathbb{R}_+$, $\exp_3 \mathbb{R}$, симетричні степені $SP^3 \mathbb{R}_+$, $SP^3 \mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^3_+$ ліпшицево еквівалентні. Отже ці всі простори є абсолютними екстензорами, оскільки у статті [[23], Теорема 3.3] доведено, що $\mathbb{R}^n_+ \in AE$ (абсолютним екстензором) в асимптотичній категорії.

Гіперпростір $\exp_2 \mathbb{R}^m$ та простір $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}\,(\mathbb{R}P^{m-1})$ є ліпшицево еквівалентними. Цей результат можна вважати грубим аналогом одного результату Шорі [66].

Важливим результатом є теорема 5.2.6, у якій доведено, що простір ймовірнісних мір $P_2(\mathbb{R})$ з метрикою Канторовича-Рубінштейна не є грубо еквівалентний евклідовому простору $\mathbb{R}^3_+$. Доведення цього результату базується на існуванні обмеженої $r-$дискретної множини нескінченної потужності в $P_2(\mathbb{R})$. Врахувавши, що такої множини немає в просторі $\mathbb{R}^n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ отримаємо неможливість ліпшицевого вкладення простору $P_2(\mathbb{R})$ в простір $\mathbb{R}^n$. Аналогічно доведено, що суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R})$ не є грубо еквівалентне евклідовому простору $\mathbb{R}^3_+$. Але виявилося, що симетричний степінь $SP^n(X)$ вкладається біліпшицево в простір ймовірнісних мір $P_n(X)$.

Поняття асимптотичного добутку породжує конструкції симетричного степеня $\widetilde{SP}^n(X)$, гіперпростору $\widetilde{\exp}_n(X)$, простору ймовірнісних мір $\widetilde{P}_n(X)$ та суперрозширення $\widetilde{\lambda}_n(X)$ в асимптотичних категоріях. У дисертації доведено, що гіперпростір $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ у категорії $\mathcal{A}$. Цей результат є асимптотичним аналогом теореми Р.Ботта [18], яка стверджує, що гіперпростір $\exp_3\ S^1$ гомеоморфний сфері S^3. Це також означає, що $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ не є абсолютним екстензором в асимптотичних категоріях. Симетричний квадрат $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+) \in AE$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ оскільки він ізоморфний $\mathbb{R}^3_+$. Ми також довели ізоморфність в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ наступних пар просторів:

- другий симетричний степінь $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ та конус над листом Мебіуса $\mathrm{Cone}(M)$;

- простір ймовірнісних мір $\widetilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ та евклідів простір $\mathbb{R}^4$;

- суперрозширення $\widetilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ та евклідів простір $\mathbb{R}^4$;

-проективний квадрат $Pr^2(\mathbb{R})$ та надбудова $\sum \mathbb{R}_+$.

Ключові слова: асимптотична категорія, асимптотичний вимір, ліпшицеве відображення, ізоморфізм, груба еквівалентність, функтор, геодезійний метричний простір, факторпростір, асимптотичний конус, джойн, надбудова, гіперпростір, симетричний степінь, проективний степінь, простір ймовірнісних мір, суперрозширення, метрика Канторовича - Рубінштейна, метрика Гаусдорфа.

Список публікацій, в яких опубліковано основні результати дисертації:

1. Зарічний М.М., Романський М.М., Савченко О.Г.: Функтори скінченного степеня у асимптотичних категоріях. Праці міжнародного геометричного центру 8(1), 84-92 (2015)

2. Zarichnyi M., Romanskyi M.: Asymptotic properties of the (convex) hyper-spaces. Proceedings of the International Geometry Center 8(3-4) 60-64 (2015).

3. Zarichnyi M., Romanskyi M.: Cone and join in the asymptotic categories. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 34-41.
4. Zarichnyi M., Romanskyi M.: On coarse equivalence of the hyperspaces of euclidean spaces. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 67-70.
5. Romanskyi M.: Coarse equivalences of functorial constructions.Proceedings of the International Geometry Center 12(3), 69–77 (2019).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. М. М. Романський. Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпшицева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій. International Scientific Conference "Algebraic and geometric methods of analysis" (Odesa, May 26-30, 2020).

Результати дисертації апробовані на:

1. семінарі "Топологія і застосування" в ЛНУ імені Івана Франка (керівник проф. Т.О. Банах).
2. міжнародній науковій онлайн конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" 26-30 травня 2020 р. Одеса.
3. семінарі "Топологічна алгебра" в ЛНУ імені Івана Франка (керівник доц. О. В. Гутік).

ABSTRACT

Romansky M.M., Functors and asymptotic properties of metric spaces. Qualification scientific work, manuscript.

Thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD) degree on the speciality 01.01.04 – Geometry and Topology. – Ivan Franko Drohobych State University – Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2021.

In the thesis, the coarse and Lipschitz equivalence between some functorial constructions, as well as some properties of cone, join and suspension in the asymptotic categories are investigated.

The thesis is devoted to the modern field of topology, which has been intensively developing in recent decades - asymptotic topology (the term "coarse geometry" is also used). It is devoted to the study of large-scale invariants of metric spaces and, more generally, coarse structures (modifications of the latter are the so-called balleans, which were introduced and studied by I.V. Protasov).

This branch of topology also has its origins in the geometric group theory. Thus M. Gromov defined the concept of the asymptotic dimension of a finitely generated group, which has found application in solving certain open problems of algebraic topology. Modifications of the asymptotic Gromov dimension (asymptotic Assouad-Nagata dimension, asymptotic power dimension) were also identified.

Naturally, the study of the asymptotic properties of metric spaces requires their inclusion in a certain category. The most important for application are the asymptotic categories of A. Dranishnikov and J. Roe, for which various functorial constructions have been identified and studied.

One of the important tasks of asymptotic topology is the classification of functorial structures up to Lipschitz equivalence. The results of the thesis lie in this direction.

Dranishnikov [23] introduced the concept of asymptotic product and defined the cone, suspension and join in asymptotic categories. In the same article it is stated that for geodesic spaces X the asymptotic cone and suspension can be given by formulas $CX = X \times \mathbb{R}_+$, $\sum X = X \times \mathbb{R}$. In Lemma 2.1.1 we show that this statement is needs correction. It was also shown that the asymptotic cone $C\mathbb{R}_+$ and the suspension $\sum \mathbb{R}_+$ are not isomorphic. Dranishnikov defined the join $X * Y$ as a subspace of the space of probability measures $P_2(X \vee Y)$ and raised the question of the isomorphism of the cone CX and the join $X * \mathbb{R}_+$ in the asymptotic category $\mathcal{A}$. We have proved that these spaces are not isomorphic, but we have established the isomorphism of the join $X * \mathbb{R}_+$ and the Cartesian product $X \times \mathbb{R}_+$, for cases where X is the $n-$ dimensional Euclidean space or a $\gamma-$ slightly convex and $\delta-$ weakly concave geodesic space.

From the results of the thesis it is worth noting those related to the coarse equivalence (i.e. equivalence in the asymptotic category of J. Roe) of functorial constructions. For example, the hyperspaces (spaces of compact subsets) of Euclidean spaces are considered and it is shown that they are not coarsely equivalent to hyperspaces of continua (connected compacta) and hyperspaces of convex compacta. In addition, it is proved that hyperspaces of compact subsets and hyperspaces of convex compacta over Euclidean spaces are geodesic, in contrast to the hyperspaces of continua over Euclidean spaces.

The hyperspace $\exp_2 \mathbb{R}^m$ and the space $\mathbb{R}^m \times$ Cone $(\mathbb{R}P^{m-1})$ are Lipschitz equivalent. This result can be considered a coarse analogue of one Schori's [66] result.

An important result is the theorem 5.2.6 in which it is proved that the space of probability measures $P_2(\mathbb{R})$ with the Kantorovich-Rubinstein metric is not coarsely equivalent to the Euclidean space $\mathbb{R}^3_+$. The proof of this result is based on the existence of an infinite bounded $r-$discrete set in $P_2(\mathbb{R})$. Given that such a set does not exist in the space $\mathbb{R}^n$ for all $n \in \mathbb{N}$ we obtain the impossibility of the Lipschitz embedding of the space $P_2(\mathbb{R})$ into the space $\mathbb{R}^n$. Similarly, it is proved that the superextension $\lambda_3(\mathbb{R})$ is not coarsely equivalent to the Euclidean space $\mathbb{R}^3_+$. However, it turned out that the symmetric power $SP^n(X)$ is embedded in the space of probability measures $P_n(X)$.

The notion of asymptotic product generates constructions of symmetric power $\widetilde{SP}^n(X)$, hyperspace $\widetilde{exp}_n(X)$, space of probability measures $\widetilde{P}_n(X)$ and superextension $\widetilde{\lambda}_n(X)$ in asymptotic categories. In the thesis it is proved that the hyperspace $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ is isomorphic $\mathbb{R}^4$ in the category $\mathcal{A}$. This result is an asymptotic analogue of R. Bott's theorem [18], which states that $\exp_3\ S^1$ is homeomorphic to S^3. This also means that $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ is not an absolute extensor in asymptotic categories. The symmetric square $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+) \in AE$ in the asymptotic category $\mathcal{A}$ because it is isomorphic to $\mathbb{R}^3_+$. We also proved the isomorphism in the asymptotic category $\mathcal{A}$ of the following pairs of spaces:

- the second symmetric power $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ and the cone over the Moebius sheet Cone(M);

- the space of probability measures $\widetilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ and the Euclidean space $\mathbb{R}^4$;

- the superextension of $\widetilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ and the Euclidean space $\mathbb{R}^4$;
- the projective square $Pr^2(\mathbb{R})$ and the suspension $\sum \mathbb{R}_+$.

Keywords: asymptotic category, asymptotic dimension, Lipschitz mapping, isomorphism, coarse equivalence, functor, geodesic metric space, factor space, asymptotic cone, join, suspension, hyperspace, symmetric power, projective power, space of probability measures, superextension, Kantorovich-Rubinstein metric, Hausdorff metric.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Асимптотична топологія, або груба геометрія — розділ математики, що досліджує властивості метричних просторів, а також більш загальних структур — так званих грубих просторів — "на нескінченності". Це відрізняє її від класичної топології, яка оперує, в основному, властивостями простору, заданими локально, в околі точок.

Асимптотичні властивості метричних просторів вперше розглянув М. Громов у статті [39], в якій, зокрема, означено поняття асимптотичного виміру метричного простору. Як показано в [39], асимптотичний вимір є квазіізометричним інваріантом і, як наслідок, асимптотичний вимір скінченнопородженої групи в метриці слів не залежить від вибору системи твірних у цій групі. Праця М. Громова лягла в основу геометричної теорії груп і дала початок подальшого розвитку цього напрямку.

Вихід за межі метричних просторів у асимптотичній топології відбувся після запровадження так званих грубих структур (див. наприклад, [59]). У якомусь сенсі грубі структури є дуальними до рівномірних структур. Поняття асимптотичного виміру перенесене на грубі структури у статті [38]. Близькими до грубих структур виявилися боллеани, які означив і досліджував І.В. Протасов [55].

Основи асимптотичної топології викладено в статті [23] Дранішнікова. Уперше в літературі тут систематично проведено паралелі між асимптотичними властивостями власних метричних просторів та топологічними властивостями корон Гіґсона цих просторів, тобто наростів компактних розширень, породжених повільно коливними функціями. Одним з найяскравіших результатів тут є рівність асимптотичного виміру метричного простору і лебегового (покриттєвого) виміру корони [25].

Дранішніков також розглядає різноманітні конструкції у асимптотичній категорії (тобто категорії власних метричних просторів і асимптотично ліпшицевих відображень), зокрема пропонує новий підхід до поняття добутку. Він також означує конус, надбудову і джойн (останній – як підмножину простору ймовірнісних мір, метризованих за допомогою метрики Канторовича-Рубінштейна).

Подальші дослідження в асимптотичній топології стосувалися нових асимптотичних вимірів, зокрема асимптотичного виміру Ассуада-Нагати та відповідної сублінійної корони метричних просторів.

Також у статті [47] означено так званий субстепеневий асимптотичний вимір метричних просторів. Він тісно пов'язаний з поняттям підстепеневої корони метричного простору, означеної в [46].

Серед геометричних властивостей, що розглядаються в [23], – властивість бути екстензором для класу асимптотично ліпшицевих відображень. Вона дає змогу сформулювати ще одне поняття асимптотичного виміру, паралельне до означення Александрова виміру топологічних просторів у термінах продовження відображень у сфери.

Повернемося до конструкцій в асимптотичній топології, означених у статті [23]. Їх можна продовжити і на відображення, одержавши тим самим функтори в асимптотичній категорії. Інші функторіальні конструкції, скажімо гіперпростори та симетричні степені розглянуто у [67, 32, 33]. У [67] розглянуто загальну конструкцію, яка кожному нормальному функторові скінченного степеня (див. нижче) ставить у відповідність деякий функтор у асимптотичній категорії. Це свідчить про багатство функторів у асимптотичних категоріях і змістовність задачі їх дослідження.

Тут зауважимо, що теорія коваріантних функторів скінченного степеня у топологічних категоріях, зокрема, категорії компактних гаусдорфових просторів та категорії метризованих просторів, знаходить різноманітні застосування в геометричній топології (див., наприклад, [70], [20]). Важливий клас таких функторів виділив Є.В. Щепін [13]. Серед різноманітних результатів у цьому напрямку можна відзначити збереження функторіальними конструкціями скінченновимірних многовидів ([20]).

У статтях [76, 77] одержано деякі результати про асимптотичні властивості функторів джойна, гіперпростору та симетричного степеня. У статті [3] розв'язано задачу ізоморфності між деякими з цих конструкцій.

Груба геометрія займається вивченням властивостей метричних просторів "в нескінченності", тобто у великій шкалі (див. [23], [62]). Таким чином, з точки зору грубої геометрії обмежені об'єкти відіграють роль порожньої множини — ними можна знехтувати.

Є різні категорії, що використовуються у грубій геометрії. Одна з них — категорія Роу, її об'єктами є власні метричні простори, а морфізмами — метрично власні грубі відображення. При цьому метричний простір (X, d) називається власним, якщо кожна замкнена куля в X компактна. Два простори X, Y є грубо еквівалентні, якщо існують морфізми $f : X \to Y$ і $g : Y \to X$ такі, що $f \circ g$ і $g \circ f$ знаходяться на скінченній відстані від одиничних відображень 1_X і 1_Y відповідно.

Однією з важливих загальних задач грубої геометрії є класифікація метричних просторів з точністю до грубої еквівалентності. Змістовною і актуальною задачею є дослідження просторів, що одержуються функторіальними конструкціями асимптотичної топології.

До функторіальних конструкцій належать також гіперпростори; ми розглядаємо гіперпростори (в тім гіперпростори опуклих множин та континуумів) евклідових просторів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі математики ННІФМЕІТ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні планів наукової роботи Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення грубої та ліпшицевої еквівалентності функторів скінченних степенів, гіперпросторів, а також дослідження властивостей асимптотичного конуса та надбудови означених Дранішніковим.

Досягнення поставленої мети пов'язане із розв'язанням наступних завдань:

— перевірка задання асимптотичного конуса та надбудови формулами $CX = X \times \mathbb{R}_+$, $\sum X = X \times \mathbb{R}$ для геодезійних просторів;

— дослідження питання ізоморфності асимптотичного конуса та джойна (підпростору простору ймовірнісних мір);

— перевірка ізоморфності асимптотичного конуса та надбудови;

— встановлення ліпшицевої еквівалентності між 3-іми симетричним та гіперсиметричним степенями над евклідовою прямою;

— дослідження грубої еквівалентності гіперпросторів над евклідовим простором;

— перенесення функторів симетричного степеня з категорії компактних метричних просторів у асимптотичну категорію та вивчення їх властивостей;

— встановлення асимптотичного аналогу теореми Ботта.

Об'єктом дослідження є функторіальні конструкції метричних просторів.

Предметом дослідження є методи побудови грубих ізоморфізмів в асимптотичних категоріях.

Методи дослідження. У процесі виконання дисертаційної роботи використані методи асимптотичної топології та теорії категорій.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, є новими. У дисертації вперше:

— доведено, що асимптотичний конус $C\mathbb{R}_+$ та надбудова $\sum \mathbb{R}_+$ не ізоморфні в асимптотичних категоріях, а також показано, що ці простори не є ліпшицево еквівалентними евклідовому простору $\mathbb{R}^2_+$. У дисертації зауважується, що асимптотичний конус та надбудова не є власними просторами, а отже, варто розглядати об'єктами асимптотичних категорій всі метричні простори;

— доведено ліпшицеву еквівалентність надбудови $\sum \mathbb{R}_+$ та проективного квадрата $Pr^2(\mathbb{R})$;

— доведено теореми про ізоморфність джойна $X * \mathbb{R}_+$ та декартового добутку $X \times \mathbb{R}_+$ для випадків, коли X є $n-$вимірним евклідовим простором або $\gamma-$слабо опуклим та $\delta-$слабо вгнутим геодезійним простором. Ці теореми дають відповідь на одне з питань Драні-шнікова;

— доведено ізоморфність 3-го асимптотичного гіперсиметричного степеня евклідової площини та 4-вимірного евклідового простору. Цей результат є аналогом теореми Р.Ботта, яка стверджує, що 3-й гіперсиметричний степінь кола гомеоморфний 3-вимірній сфері;

— доведено теорему про ліпшицеву еквівалентність гіперпростору $\exp_2 \mathbb{R}^m$ та декартового добутку $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}\,(\mathbb{R}P^{m-1})$. Цей результат можна вважати грубим аналогом теореми Шорі [[66], теорема 8];

— доведено неможливість ліпшицевого вкладення простору ймовірнісних мір $P_2(\mathbb{R})$ в евклідів простір $\mathbb{R}^n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;

— доведено теореми про ліпшицеву еквівалентність гіперпросторів $\exp_3 \mathbb{R}_+$, $\exp_3 \mathbb{R}$, симетричних степенів $SP^3\,\mathbb{R}_+$, $SP^3\,\mathbb{R}$ та евклідового простору $\mathbb{R}^3_+$;

— порівняно гіперпростори компактних, опуклих та зв'язних множин евклідових просторів з точністю до грубої еквівалентності.

— встановлена ізоморфність в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ наступних пар просторів:

  — другий симетричний степінь $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ та конус над листом Мебіуса $\mathrm{Cone}(M)$;

  — простір ймовірнісних мір $\widetilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ та евклідів простір $\mathbb{R}^4$;

  — суперрозширення $\widetilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ та евклідів простір $\mathbb{R}^4$.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати для розв'язування задач асимптотичної топології.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних статтях: [3]

Романському М.М належать усі результати, окрім постановки задач та ідей доведення теорем 3 і 4; [75] — усі результати, окрім постановки задач та ідей доведення твердження 1 і леми 1; [76] — усі результати, окрім постановки задач; [77] — усі результати, окрім постановки задач та ідеї доведення леми 2. Зі статтей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації апробовано на таких наукових конференціях та семінарах:

1. М. М. Романський. Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпшицева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій. International Scientific Conference "Algebraic and geometric methods of analysis" (Odesa, May 26-30, 2020).
2. семінарі "Топологія і застосування" в ЛНУ імені Івана Франка (керівник проф. Т.О. Банах).
3. міжнародній науковій онлайн конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" 26-30 травня 2020 р. Одеса.
4. семінарі "Топологічна алгебра" в ЛНУ імені Івана Франка (керівник доц. О. В. Гутік).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 6 наукових працях: 5 статтях (1 стаття в наукометричній базі даних Scopus [60]), 1 теза міжнародної конференції.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота обсягом 110 сторінок складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел, який налічує 77 найменувань.

Автор висловлює щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору Львівського національного університету імені Івана Франка Михайлу Михайловичу Зарічному за постановку задач, цікаві ідеї та особливу увагу до роботи.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Цей розділ присвячено оглядові літератури у напрямку результатів дисертації. Він, зокрема, охоплює такі теми:

(1) асимптотичні категорії;

(2) функтори в асимптотичних категоріях.

1.1. Асимптотичні категорії

Для потреб макроскопічної (асимптотичної) топології означені асимптотичні категорії, зокрема груба категорія Дж. Роу і асимптотична категорія А. Дранішнікова.

В статті [23] переносяться основні конструкції топології на асимптотичну категорію $\mathcal{A}$.

Метричний простір (X, d) називаємо власним, якщо кожна замкнена куля в просторі X компактна.

Відображення $f : X \to Y$ називають власним, якщо прообраз кожної компактної множини є компактним. Відображення $f : X \to Y$ називають *грубо власним*, якщо прообраз кожної обмеженої множини є обмеженим.

Відображення $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ називається асимптотично ліпшицевим, якщо існують два таких числа, λ *і* s ($\lambda > 0,\ s \geq 0$), що

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + s, \quad x, y \in X.$$

Асимптотична категорія $\mathcal{A}$ — це категорія, об'єктами якої є власні метричні простори, а морфізмами — власні асимптотично ліпшицеві відображення.

У статті [23] також означено категорію $\widetilde{\mathcal{A}}$, яка є підкатегорією асимптотичної категорії $\mathcal{A}$. Морфізмами категорії $\widetilde{\mathcal{A}}$ є власні асимптотично ліпшицеві відображення з ненульовою нормою. При цьому норма відображення $\|f\|, f : X \to Y$ означена як $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\|/\|x\|$. Норма $\|x\|$ елемента $x \in X$ означена як відстань $d(x, x_0)$ до фіксованої точки $x_0 \in X$. За означенням, для кожного морфізма $f : X \to Y$ існують константи $c > 0$ і $b = b(x_0)$ такі, що $\|f(x)\| \geq c\|x\| - b$.

Ізоморфізмами в категорії $\mathcal{A}$ є гомеоморфізми $f : X \to Y$ такі, що відображення f і f^{-1} — асимптотично ліпшицеві. Ізоморфізми в $\widetilde{\mathcal{A}}$ — це ізоморфізми в $\mathcal{A}$ з ненульовою нормою.

Велика асимптотична категорія $\overline{\mathcal{A}}$ — це категорія об'єктами якої є власні метричні простори (насправді можна розглядати всі метричні простори), а морфізмами — асимптотично ліпшицеві грубо власні відображення. Тобто множина $f^{-1}(C)$ обмежена для кожної обмеженої множини C.

Груба категорія $\mathcal{B}$ є фактор-категорією категорії $\overline{\mathcal{A}}$ за наступним відношенням еквівалентності на морфізмах: два морфізми в $\overline{\mathcal{A}}$ є грубо еквівалентними якщо відстань між ними скінченна. Тобто існує стала с така, що $d_Y(f(x), g(x)) < c$ для всіх $x \in X$. Морфізм $f : X \to Y$ в $\overline{\mathcal{A}}$ називається грубим ізоморфізмом, якщо існує морфізм $g : Y \to X$ такий, що $f \circ g$ і $g \circ f$ еквівалентні одиничним відображенням 1_X і 1_Y відповідно. Метричні простори X і Y є грубо ізоморфними якщо існує грубий ізоморфізм $f : X \to Y$.

В статті [63] Дж. Роу визначив грубу категорію дещо по іншому. Морфізмами в цій категорії є грубо рівномірні відображення, а об'єктами як і в асимптотичній категорії Дранішнікова є власні метричні простори.

Відображення $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ називається *грубо рівномірним*, якщо існує неспадна функція $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ така, що

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty \ i \ \rho(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$$

для всіх $x, y \in X$.

Відображення f називається *грубим відображенням*, якщо воно є грубо рівномірним і грубо власним. В асимптотичній топології грубі вкладення є аналогом вкладень топологічних просторів.

Для геодезійного метричного простору кожне грубо рівномірне відображення є асимптотично ліпшицевим. Тому не має різниці між морфізмами Дранішнікова і морфізмами Дж. Роу при вивченні геодезійних метричних просторів [23].

У роботі [64] визначено підкатегорію $\mathcal{A}_l$ (або $\overline{\mathcal{A}}_l$) категорії $\mathcal{A}$ (або $\overline{\mathcal{A}}$) морфізми якої є лінійно власні відображення. Відображення f є лінійно власним якщо існують $x_0 \in X$ і константи $\alpha, t > 0$ такі, що

$$\rho(f(x), f(x_0)) \geq \alpha d(x, x_0) - t, \quad x \in X.$$

1.2. Функтори в топологічних і метричних категоріях

Як зазначено в статті [77] однією з важливих загальних задач грубої геометрії є класифікація метричних просторів з точністю до грубої еквівалентності.

Будь яка метрика на множині породжує рівномірну структуру на цій множині. У статті [73] зазначено, що кожна розмита метрика на множині породжує грубу структуру на цій множині, а також показано, що для розмитого неархімедового метричного простору отриманий грубий простір є асимптотично нульвимірним в сенсі Громова.

Деякі функтори у асимптотичній категорії розглянув А. Дранішніков у статті [23]. Зокрема, він розглядав асимптотичний добуток, фактор-простори, конус, надбудову та простори ймовірнісних мір.

1.2.1. Асимптотичний добуток. Декартів добуток $(X \times Y, d_X + d_Y)$ не є категорним в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, оскільки проекції на множники не є морфізмами (вони не є метрично власними відображеннями — прообрази обмежених множин не завжди обмежені). У статті [23] А. Дранішніков означив асимптотичний добуток

$$X \widetilde{\times} Y(x_0, y_0) = \{(x, y) | d_X(x_0, x) = d_Y(y_0, y), x \in X, y \in Y\},$$

де x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. Метрика на $X \widetilde{\times} Y$ індукована вкладенням $X \widetilde{\times} Y \subset X \times Y$.

Властивостям добутків і асимптотичних добутків у асимптотичній топології присвячена обширна література. У статті [24] за допомогою методів теорії когомологій побудовано приклад метричного простору обмеженої геометрії X такого, що асимптотичний вимір (означення див. нижче) добутку $X \times \mathbb{R}$ рівний асимптотичному вимірові простору X. У статті [26] показано, що таких прикладів не існує для асимптотичного виміру Ассуада-Нагати (означення див. нижче): множення на $\mathbb{R}$ збільшує цей асимптотичний вимір на одиницю.

Поняття асимптотичного добутку використовується для означення гомотопії між двома відображеннями у асимптотичній категорії, що дає змогу розвивати у цій категорії алгебраїчну топологію. Одним з фундаментальних результатів тут є теорема про продовження гомотопії, часткові випадки якої доведено в [23]. Однак, як показав М. Савіцький [64], у повній загальності теорема про продовження гомотопії не виконується.

1.2.2. Факторпростори. Нехай $f : X \to Y$ власне сюр'єктивне відображення метричного простору (X, d_X). У статті [23] визначено факторпростір Y з метрикою d_Y. Фактор-метрика d_Y визначена наступною формулою

$$d_Y(y, y') = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_Y(y_i, y_{i+1}) | n \in \mathbb{N}; y_1, ..., y_n \in Y; y_1 = y, y_n = y' \right\}$$

де

$$s_Y(y, y') = d_X(f^{-1}(y)), f^{-1}(y') = \inf \left\{ d_X(x, x') | x \in f^{-1}(y), x' \in f^{-1}(y') \right\}.$$

Варто зауважити, що така конструкція не завжди є метрикою, але також може бути псевдометрикою на факторпросторі. Прикладом є стандартне відображення канторової множини на відрізок, що склеює кінці кожного доповняльного інтервалу. Однак, у нашому випадку такої ситуації не траплятиметься.

1.2.3. Конус і надбудова. Поняття конуса є добре відомою конструкцією в топології: конус над простором X — це факторпростір $(X \times [0, 1])/(X \times \{0\})$.

В статті [23] означено конус CX і надбудову $\sum X$ в асимптотичних категоріях для кожного метричного простору по аналогії:

$$CX = X \widetilde{\times} \mathbb{R}^2_+ / i_+(X) \text{ і}$$

$$\sum X = X \widetilde{\times} \mathbb{R}^2_+ / i_\pm(X) = CX/i_- X,$$

де $i_\pm : X \to X \widetilde{\times} \mathbb{R}^2_+$ вкладення, визначені формулами $i_\pm(x) = (x, \pm\|x\|, 0)$. В цій же статті стверджується, що для геодезійних просторів X конус можна задавати простою формулою $CX = X \times \mathbb{R}_+$, але в роботі [76] в лемі 1 доведено, що конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^2_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$. Аналогічно можна довести, що надбудова $\sum \mathbb{R}$ не ізоморфна простору $\mathbb{R}^2$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

1.2.4. Ймовірнісні міри. Нехай X – компактний метричний простір, через $C(X)$ позначимо банаховий простір неперервних функцій на X з sup-нормою. Через $P(X)$ позначаємо множину лінійних невід'ємних нормованих функціоналів на $C(X)$. За класичною теоремою Ріса кожному $\mu \in P(X)$ відповідає регулярна борелівська ймовірнісна міра на X, тому $P(X)$ називають простором ймовірнісних мір на X. Значення функціонала μ на $\varphi \in C(X)$ позначають також $\int_X \varphi d\mu$.

Множину $P(X)$ наділяють слабкою топологією. Базу цієї топології утворюють множини вигляду

$$O\langle \mu; \varphi_1, ..., \varphi_n; \varepsilon \rangle = \left\{ \mu' \in P(X) | \ | \int_X \varphi_i d\mu - \int_X \varphi_i d\mu' | < \varepsilon, i = 1, ..., n \right\},$$

де $\mu \in P(X)$, $\varphi_1, ...\varphi_n \in C(X), \varepsilon > 0$.

Нехай $f : X \to Y$ — неперервне відображення. Означимо відображення $P(f) : P(X) \to P(Y)$, формулою:

$$(P(f)(\mu))(\varphi) = \mu(\varphi \circ f).$$

Відображення $P(f)$ — неперервне. Така конструкція є функторіальною, оскільки зберігає композицію відображень і тотожнє відображення.

Ймовірнісні міри визначають функтор $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. В просторі ймовірнісних мір з компактними носіями $P(X)$ на метричному просторі (X, ρ) визначена метрика Канторовича-Рубінштейна

$$\overline{\rho}(\mu_1, \mu_2) = \sup \left\{ \left| \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 \right| |f \in S(X) \right\},$$

де $S(X)$ — це простір стискаючих функцій які приймають лише дійсні значення. В статті [23] зауважено, що простір X ізометрично вкладається в $P(X)$.

Кажемо, що метричний простір Y є абсолютним екстензором для асимптотичної категорії Дранішнікова, якщо для кожного асимптотично ліпшицевого відображення $f\colon A \to Y$, означеного на підмножині A метричного простору X, існує асимптотично ліпшицеве продовження $\bar{f}\colon X \to Y$. Це поняття означене у статті [23], де зокрема висловлено гіпотезу, що аналогічно до компактного метризовного випадку простір ймовірнісних мір є абсолютним екстензором у асимптотичній категорії. У статті [74] показано, що, вазагалі кажучи, простори ймовірнісних мір не є абсолютними екстензорами в асимптотичній категорії Дранішнікова. Аналогічний факт для гіперпросторів компактних множин ймовірнісних мір доведений у статті [57].

Для простору X і натурального n визначено підфунктор

$$P_n(x) = \{\mu \in P(X) : |\mathrm{supp}(\mu)| \leq n\}.$$

Тобто підфунктор ймовірнісних мір, носіями яких є множини потужність яких не перевищує n.

Для будь-яких двох метричних просторів X і Y з фіксованими точками можна визначити букет $X \vee Y$. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ це підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини. В статті [23] було поставлене питання про ізоморфізм конуса CX і джойна $X * \mathbb{R}_+$. В роботі [76] ми довели, що джойн $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпростору $\mathbb{R}_+^{n+1}$, а також що конус побудований на розбіжній послідовності не ізоморфний джойну цієї послідовності на $\mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

У роботі [74] показано, що існує власний метричний простір, з асимптотичним виміром нуль, простір ймовірнісних мір (з метрикою Канторовича) якого не є абсолютним екстензором в асимптотичній категорії. Цей результат дає негативну відповідь на запитання Дранішнікова [[23], проблема 12].

1.2.5. Гіперпростори. Конструкція гіперпростору є однією з класичних конструкцій топології. Вперше її розглянув Ф. Гаусдорф, він же запропонував метрику на множині замкнених множин. Ця метрика тісно пов'язана з метрикою, яку М. Фреше розглядав на множині параметризованих кривих.

Для метричного простору (X, ρ) через $\exp X$ позначають гіперпростір простору X, тобто множину непорожніх компактних підмножин в X, наділену метрикою Гаусдорфа ρ_H:

$$\rho_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 | A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Тут $O_r(C)$ означає відкритий r-окіл підмножини C.

Функтор гіперпростору у асимптотичній топології в категорії грубих просторів досліджувала В. Фрідер [34].

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через $\exp_n X$ позначимо підпростір $\exp X$, що складається з усіх множин потужності $\leq n$. Для просторів $\exp_n X$ Є.В. Щепін запропонував термін n-ий гіперсиметричний степінь.

К. Ваґнер [72] досліджував проблему: коли n-ий гіперсиметричний степінь скінченновимірного многовида (з краєм) є многовидом (з краєм)?

Результати статті [45] стосуються гіперсиметричних степенів симпліціальних комплексів, їх зв'язності та структури многовиду. Нагадаємо, що топологічний простір X називається r-зв'язним, $r = 0, 1, 2, \ldots,$

якщо група $\pi_i(X)$ тривіальна для всіх $i \leq r$. В [45] доведено, що якщо простір X є r-зв'язним, $r \geq 1$, і $n \geq 3$, то простір $\exp_n X$ є $(r+1)$-зв'язним.

В роботі [11] доведено, що функтор гіперсиметричного степеня у категорії Рое власних метричних просторів та грубих відображень зберігає грубі вкладення. Також в цій роботі доведено, що якщо $\mathrm{asdim} X = 0$ тоді $\mathrm{asdim}(\exp_n X) = 0$. У статті [11] наведено два приклади, що стосуються задачі існування грубих вкладень гіперсиметричних степенів деяких асимптотично нульвимірних просторів.

В контексті асимптотичної топології гіперсиметричні степені так званих болеанів (це поняття означив І. Протасов; у багатьох випадках воно еквівалентне поняттю грубого простору) досліджувалися у статті [55].

Конструкція гіперпростору знаходить численні застосування в асимптотичній топології. З використанням гіперпросторів у статті [35] побудовано приклад грубої напівгратки яка не є антилоусонівською грубою напівграткою, а також доведено, що кожна груба напівгратка, асимптотичний вимір (в сенсі Громова) якої дорівнює нулю, є антилоусонівською грубою напівграткою.

Якщо X — підмножина деякого локально опуклого простору, то підпростір

$$\mathrm{cc}\,(X) = \{A \in \exp X \mid A \text{ – опукла множина}\}$$

називають гіперпростором компактних опуклих підмножин.

Конструкція гіперпростору опуклих компактних множин лежить в основі конструкції локально опулого простору компактних множин (див., наприклад, [6, 58, 1]).

У статті [6] описано топологію гіперпростору компактних опуклих множин.

1.2.6. Симетричні степені. Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на степені X^n, що задається умовою $(x_1, ..., x_n) \sim (y_1, ..., y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $\{1, ..., n\}$ така, що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, ..., n$. Факторпростір простору X^n за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X і позначають $SP^n(X)$.

Клас еквівалентності відношення $\sim$, що містить точку $(x_1, ..., x_n)$, позначають $[x_1, ..., x_n]$. Носієм елемента $x = [x_1, ..., x_n] \in SP^n(X)$ називають множину

$$\operatorname{supp}(x) = \{x_1, ..., x_n\} \in \exp_n X.$$

Метрику $\hat{d}$ на $SP^n(X)$ задають формулою

$$\hat{d}([x_1, ..., x_n], [y_1, ..., y_n]) = \min_{\sigma \in S_n} \max_i d(x_i, y_{\sigma(i)})$$

(тут через S_n позначаємо групу перестановок n-елементної множини.)

Кожне неперервне відображення $f\colon X \to Y$ індукує неперервне відображення $SP^n(f)\colon SP^n(X) \to SP^n(Y)$, що діє за формулою:

$$SP^n([x_1, \dots, x_n] = [f(x_1), \dots, f(x_n)].$$

Легко бачити, що ця конструкція функторіальна в тому сенсі, що вона зберігає композицію відображень і тотожнє відображення. У статті [16] охарактеризовано функтори симетричного степеня в категорії компактів як такі, що зберігають клас відкритих відображень. При цьому відображення називається відкритим, якщо образ кожної відкритої множини є відкритим.

Конструкція симетричного степеня метричного простору вперше означена К. Борсуком та С. Уламом [17]. Вони, зокрема, досліджували симетричні степені відрізка і показали, що при $n \leq 3$ одержуємо n-вимірний куб. Зауважимо, що $SP^n(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^n$. Подальші дослідження про збереження многовидів функтором симетричного степеня проводив К. Ваґнер [72].

Мортон [50] довів, що простір $SP^n(S^1)$ є розшарованим простором над S^1, шаром якого є $(n-1)$-вимірний симплекс. Якщо n — непарне число, то розшарування орієнтовне; якщо n парне, то ні. Більше того, структура розшарованого простору на симетричній степені задається формулою

$$[z_1, z_2, \ldots, z_n] = z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n$$

(тут S^1 трактуємо як одиничне коло на комплексній площині, $\cdot$ означає операцію множення комплексних чисел).

Зокрема, $SP^2(S^1)$ є листом Мебіуса.

У статті [29] доведено, що простір $SP^2(\mathbb{R}P^2)$ гомеоморфний $\mathbb{R}P^2n$. Огляд різноманітних застосувань симетричних степенів у різних областях математики можна знайти в [16].

В.В. Федорчук навів коректне доведення того факту, що функтор симетричного степеня зберігає клас абсолютних околових ретрактів та Q-многовидів [10] (тут Q позначає гільбертів куб).

У статті [30] розглядаються простори орбіт дії скінченної групи на метричному просторі ізометріями. Як частковий випадок одержуємо простір орбіт $X^n/G : (x_1, ..., x_n) \sim (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$, тобто $SP^n_G\ X$. Фактично у цій статті показано, що функтор G-симетричного степеня SP^n_G зберігає такі властивості:

(1) скінченний asdim;

(2) асимптотичну властивість C;

(3) sFDC (straight Finite Decomposition Complexity) (див. [27]);

(4) зліченний асимптотичний вимір;

(5) властивість метричної розсіяності (metric sparsification property).

До цього списку додамо один результат статті [46]. Тут через $\mathrm{asdim}_P(X)$ позначено субстепеневий асимптотичний вимір метричного простору X.

Відображення з метричних просторів у симетричні степені розглядалися у різних публікаціях. Зокрема в [36] показано, що пара $(X, SP^n(Y))$, де X — метричний простір скінченного виміру Нагати, а Y — банаховий простір, має властивість продовження ліпшицевих відображень (зауважимо, що у цій статті та серії інших статей цього та інших авторів прийнято позначення $\mathbb{Q}_n$ для n-го симетричного степеня). Також показано, що простір $SP^n(Y)$ є абсолютним ліпшицевим ретрактом для кожного скінченновимірного банахового простору Y.

У статті [48] показано, що для часткових ліпшицевих відображень метричних просторів у симетричні степені метричних просторів неможливо продовжити відображення до ліпшицевого зі збереженням ліпшицевої константи. Цим ситуація відрізняється від однозначних відображень метричних просторів.

А. Дольд і Р. Том [21] розглядали нескінченний симетричний добуток $SP^\infty(X, x_0)$ для простору X з відміченою точкою x_0, $SP^\infty(X, x_0) = \cup_{i=1}^\infty SP^i(X)$; при цьому ототожнення $SP^i(X)$ з підпростором в $SP^{i+1}(X)$ відбувається за формулою:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_i] \mapsto [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i].$$

На просторі $SP^\infty(X, x_0)$ розглядається топологія ін'єктивної границі,

$$SP^\infty(X, x_0) = \varinjlim\{SP^1(X) \longrightarrow SP^2(X) \longrightarrow \dots\}.$$

Дольд і Том довели ізоморфізм групи гомотопій $\pi_n(SP^\infty(X))$ та групи гомологій $H_n(X)$. Це дає змогу, зокрема, будувати за допомогою нескінченних симетричних степенів простори Ейленберга-Маклейна.

1.2.7. Суперрозширення. Поняття суперрозширення $\lambda(X)$ топологічного простору X запровадив Й. де Гроот [41] у зв'язку з властивістю суперкомпактності топологічних просторів. Для зручності будемо розглядати тільки компактний гаусодорфовий випадок. За означенням, $\lambda(X)$ — це множина максимальних зчеплених систем замкнених множин у просторі X. При цьому сім'я множин у топологічному просторі називається зчепленою, якщо кожні два її елементи мають непорожній перетин; максимальність розуміємо стосовно відношення включення. Топологію на множині $\lambda(X)$ можна означити альтернативно як індуковану природним вкладенням

$$\lambda(X) \hookrightarrow \exp(\exp X) = \exp^2 X.$$

Для елементів простору $\lambda(X)$ можна означити поняття носія як мінімальної (відносно включення) замкненої множини, на якій слід максимальної зчепленої системи залишається максимальною зчепленою системою. Для кожного натурального n через $\lambda_n(X)$ множину елементів з $\lambda(X)$, для яких носій складається з не більше n точок.

В [4] доведено, що простір $\lambda_3(S^1)$ гомеоморфний S^3. Крім того, там же доведено, що простір $\lambda_n(X)$ однозв'язний для кожного метричного компактного абсолютного околового ретракта X.

1.3. Термінологія і означення

Переважно метрику метричного простору позначаємо d. Якщо A — непорожня підмножина метричного простору, то число

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

(скінченне або ∞) називають діаметром множини A.

Замикання множини A в топологічному просторі X позначаємо $\bar{A}$.

Морфізм $f : X \to Y$ в $\overline{\mathcal{A}}$ називається *грубим ізоморфізмом*, якщо існує морфізм $g : Y \to X$ такий, що $f \circ g$ і $g \circ f$ еквівалентні одиничним відображенням 1_X і 1_Y відповідно. Метричні простори X і Y є *грубо ізоморфними* (квазі-ізометричними), якщо існує грубий ізоморфізм $f : X \to Y$.

Відображення $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ називається асимптотично ліпшицевим, якщо існують два таких числа, λ *і* s ($\lambda > 0,\ s \geq 0$), що

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + s, \quad x, y \in X.$$

Відображення $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ називається біліпшицевим вкладенням, якщо існує $\lambda > 0$ таке, що

$$\frac{1}{\lambda} d(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Відображення $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ називається грубим вкладенням, якщо існують неспадні функції φ_1, $\varphi_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такі, що

$$\varphi_1(d(x, y)) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq \varphi_2(d(x, y)), \quad x, y \in X.$$

Для геодезійних метричних просторів кожне грубо рівномірне відображення є асимптотично ліпшицевим (див. [23]).

Відображення $f : X \to Y$ метричних просторів X, d та Y, ρ називається *квазіізометрією*, якщо існують сталі $C, D \geq 0, \quad \lambda > 0$ такі, що

$$\frac{1}{\lambda}d(x,y) - C \leq \rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) + C, \quad x, y \in X$$

і кожна точка простору Y знаходиться на відстані щонайбільше D від деякої точки з множини $f(X)$.

Нехай $C > 0$. Множину в метричному просторі називаємо C-*зв'язною* якщо для кожних $x, y \in M$ існують

$$x_0 = x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = y \in M$$

такі, що $d(x_i, x_{i-1}) \leq C$ для кожного $i = 1, ..., n$.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на степені $X^n_{\mathcal{A}}$ метричного простору X, що задається умовою: $(x_1, ..., x_n) \sim (y_1, ..., y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $\{1, ..., n\}$ така що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, ..., n$. Факторпростір простору $X^n_{\mathcal{A}}$ за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X в категорії $\mathcal{A}$ і позначають $\widetilde{SP}^n(X)$.

Клас еквівалентності відношення $\sim$, що містить точку $(x_1, ..., x_n)$, позначають $[x_1, ..., x_n]$. Носієм елемента $x = [x_1, ..., x_n] \in \widetilde{SP}^n(X)$ називають множину

$$\mathrm{supp}(x) = \{x_1, ..., x_n\} \in \exp_n X.$$

Метрику $\hat{d}$ на $\widetilde{SP}^n(X)$ задають формулою

$$\hat{d}([x_1, ..., x_n], [y_1, ..., y_n]) = \min_{\sigma} \max_{i} d(x_i, y_{\sigma(i)})$$

Другий симетричний степінь називається симетричним квадратом. Зрозуміло, що симетричний квадрат природно ототожнюється з гіперсиметричним квадратом. Формула метрики для симетричного квадрата має наступний вигляд

$$\hat{d}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \min\{\max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}, \max\{d(x_1, y_2), d(x_2, y_1)\}\}.$$

Для кожного метричного простору X через $\exp X$ позначимо множину всіх непорожніх компактних підмножин метричного простору X. Метрика d на X породжує метрику Гаусдорфа d_H на $\exp X$:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 | A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через $\exp_n X$ позначимо підпростір $\exp X$, що складається з усіх множин потужності $\leq n$.

Гіперпростір зв'язних підмножин простору X позначимо $\exp^c X$, інакше

$$\exp^c X = \{A \subset \exp X \mid A \text{ зв'язна множина}\}.$$

Гіперпростір компактних опуклих підмножин евклідового простору $\mathbb{R}^n$ позначається $cc\,(\mathbb{R}^n)$.

Нам також знадобиться поняття категорії і функтора. Пара $\mathcal{C} = (Ob\ \mathcal{C}, Ar\ \mathcal{C})$, що складається з двох класів ($Ob\ \mathcal{C}$ - сукупності об'єктів та $Ar\ \mathcal{C}$ – сукупності стрілок або морфізмів) називається категорією [49], якщо виконані наступні умови:

1. для кожної стрілки $f \in Ar\ \mathcal{C}$) визначена єдина впорядкована пара X, Y (початок $dom\ f = X$ та кінець $rng\ f = Y$), при цьому f називаємо стрілкою з X в Y та позначаємо це як $f : X \to Y$;
2. для будь-якої пари стрілок f і g з $rng\ f = dom\ g$ визначена єдина стрілка h з $dom\ h = dom\ f$ і $rng\ h = rng\ g$, яка називається композицією стрілок f і g та позначається $g \circ f$;
3. композиція асоціативна, тобто $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ для будь-якої трійки стрілок з $rng\ f = dom\ g$ і $rng\ g = dom\ h$;

4. для будь-якого об'єкта $X \in Ob\ \mathcal{C}$ існує єдина одинична стрілка (тотожний морфізм) $1_X : X \to X$, що $f \circ 1_X = f$ та $1_X \circ g = g$, для довільних стрілок $f : X \to Y$ та $g : Y \to X$.

Стрілка $f : X \to Y$ називається ізоморфізмом, якщо для неї існує зворотна стрілка $g : Y \to X$, тобто така, що $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$, при цьому об'єкти X та Y називаємо ізоморфними, що позначається $X \cong Y$.

Для довільних категорій $\mathcal{C}$ і $\mathcal{D}$ (коваріантним) функтором називається відображення $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, яке:

1. переводить об'єкти $X \in Ob\ \mathcal{C}$ у об'єкти $FX \in Ob\ \mathcal{D}$;
2. не відриває стрілки від їх початків та кінців, тобто, якщо $f : X \to Y$ – стрілка у категорії $\mathcal{C}$, то $Ff : FX \to FY$ – відповідна стрілка у категорії $\mathcal{D}$;
3. зберігає композиції, тобто, якщо визначена композиція $g \circ f : X \to Y$ послідовних стрілок $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ у $\mathcal{C}$, то $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$;
4. зберігає тотожний морфізм, тобто $F(1_X) = 1_{FX}$ для кожного $X \in Ob\ \mathcal{C}$

Багато конструкцій у асимптотичній топології можна здійснювати не лише на просторах, але також і на відображеннях просторів. Таким чином, мова йде про функтори у відповідних категоріях.

Декартів добуток $(X \times Y, d_X + d_Y)$ не є категорним в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, оскільки проекції на множники не є морфізмами (вони не є метрично власними відображеннями — прообрази обмежених множин не завжди обмежені). В роботі [23] А. Дранішніков означив асимптотичний добуток

$$X \widetilde{\times} Y(x_0, y_0) = \{(x, y) | d_X(x_0, x) = d_Y(y_0, y), x \in X, y \in Y\},$$

де x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. Метрика на $X\widetilde{\times}Y$ індукована вкладенням $X\widetilde{\times}Y \subset X \times Y$.

Асимптотичний конус CX і надбудова $\sum X$ в асимптотичних категоріях для кожного метричного простору визначені як наступні фактор-простори:

$$CX = X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+/i_+(X),$$

а також

$$\sum X = X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+/i_\pm(X) = CX/i_-X,$$

де $i_\pm : X \to X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+$ — вкладення, визначені формулами $i_\pm(x) = (x, \pm\|x\|, 0)$.

Нехай $C \geq 1,\ r, R > 0$. Для метричного простору X, означимо

$\Phi_{C,r}(R) = \Phi^X_{C,r}(R) = \max\{|A|\ |A \subset \overline{B}_{Cr}(x) - r - \text{дискретна}, \|x\| \leq R\}$.

Нехай $D > 0$. Нагадаємо, що підмножина A метричного простору X називається D-дискретною, якщо $d(x, y) \geq D$ для всіх точок $x, y \in X$, $x \neq y$.

Нехай $n = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Кажемо, що асимптотичний вимір метричного простору X не перевищує n (позначається $\operatorname{asdim} X \leq n$), якщо для кожного $D > 0$ існує рівномірно обмежене покриття $\mathcal{U}$ простору X таке, що $\mathcal{U} = \cup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$ таке, що кожна сім'я $\mathcal{U}_i$ є D-дискретною.

Метричний простір має обмежену геометрію, $X \in BG$, якщо для кожного L існує рівномірно обмежене покриття $\mathcal{U}$ простору X з числом Лебега $> L$, що має скінченний порядок.

Метричний простір (X, d) називається геодезійним, якщо для будь - яких двох точок $x, y \in X$, існує ізометричне вкладення відрізка $c : [0, d(x, y)] \to X$, де $c(0) = x$, а $c(d(x, y)) = y$. Відомо (див. [23]), що для геодезійного метричного простору X кожне грубо рівномірне відображення є асимптотично ліпшицевим. Ізометричне вкладення c_{xy} :

$[0, d(x,y)] \to X$, $c_{xy}(0) = x$, $c_{xy}(d(x,y)) = y$, будемо називати геодезійним відрізком, що з'єднує $x \in X$ та $y \in Y$.

Геодезійний простір (X, d) називається γ-слабо опуклим ($\gamma \geq 1$), якщо кожна пара геодезійних відрізків, c_{xy} і c_{xz}, задовільняють нерівність

$$d(c_{xy}(t \cdot d(x,y)), c_{xz}(t \cdot d(x,z))) \leq \gamma \cdot t \cdot d(y,z).$$

Геодезійний простір (X, d) називається δ-слабо вгнутим ($0 < \delta \leq 1$), якщо кожна пара геодезійних відрізків, c_{xy} і c_{xz}, задовільняють нерівність

$$d(c_{xy}(t \cdot d(x,y)), c_{xz}(t \cdot d(x,z))) \geq \delta \cdot t \cdot d(y,z).$$

Простір ймовірнісних мір на метричному просторі (X, ρ) позначається $P(X)$. В просторі ймовірнісних мір $P(X)$ з компактними носіями на метричному просторі (X, ρ) визначена метрика Канторовича-Рубінштейна

$$\overline{\rho}(\mu_1, \mu_2) = \sup\left\{ \left| \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 \right| | f \in S(X) \right\},$$

де $S(X)$ — це простір нерозтягуючих функцій, які набувають дійсні значення.

Для простору X і натурального n визначено підфунктор

$$P_n(x) = \{\mu \in P(X) : |\mathrm{supp}(\mu)| \leq n\}.$$

Іншими словами, P_n – підфунктор ймовірнісних мір P, складений з мір, носіями яких є множини, потужність яких не перевищує n. Зауважимо, що для кожної точки $x \in X$ існує єдина ймовірнісна міра δ_x, зосереджена в точці x.

Для будь-яких двох метричних просторів X і Y з фіксованими точками можна визначити букет $X \vee Y$.

За означенням, джойн $X * \mathbb{R}_+$ — це підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини. Тобто

$$X * \mathbb{R}_+ = \{\mu = \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y |\ x \in X,\ y \in \mathbb{R}_+,\ \|x\| = y\},$$

де $\delta_x,\ \delta_y$ — міри Дірака, зосереджені в точках $x,\ y$ відповідно.

На джойні $X*\mathbb{R}_+$ використовуємо метрику Канторовича-Рубінштейна. Відстань між двома довільними ймовірнісними мірами

$$\mu = \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y \text{ і}$$

$$\nu = \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}$$

$\{x, x'\} \in X,\ \{y, y'\} \in \mathbb{R}_+$, задається наступною формулою:

$$d_{KP}(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon d(y',x) + (\alpha-\varepsilon)d(x,x') + (1-\beta-\varepsilon)d(y,y') +$$

$$+(\beta-\alpha+\varepsilon)d(x',y)\ |\varepsilon \geq 0, \varepsilon \geq \alpha-\beta\} =$$

$$\inf\{\varepsilon(d(y',x) - d(x,x') - d(y,y') + d(x',y)) + \alpha d(x,x') +$$

$$+(1-\beta)d(y,y') + (\beta-\alpha)d(x',y)\ |\varepsilon \geq 0, \varepsilon \geq \alpha-\beta\}$$

Для кожного об'єкта X асимптотичної категорії $\mathcal{A}$ кожна замкнена підмножина $Z \subset X$ є об'єктом в категорії $\mathcal{A}$. На множині Z береться індукована метрика. Нагадаємо, що абсолютним екстензором (AE) в категорії $\mathcal{A}$ називається об'єкт Y, з наступною властивістю, що для кожного об'єкта X і для кожної замкненої підмножини $Z \subset X$ кожен морфізм $\varphi : Z \to Y$ можна продовжити до морфізма $\overline{\varphi} : X \to Y$. Як зауважив Дранішніков [23] одноточковий простір не є абсолютним екстензором, оскільки необмежений метричний простір не має власних відображень в точку.

У роботі [23] означені поняття асимптотично відкритих множин (відкритих в категоріях $\mathcal{A}$ та $\widetilde{\mathcal{A}},$) а також поняття абсолютного околового екстензора ($ANE_0(\mathcal{A})$).

Відкрита множина $W \subset X$ в метричному просторі (X, d) називається асимптотично відкритою в категорії $\mathcal{A}$, якщо $\sup\{d(x, X \backslash W) \mid x \in X\} = \infty$. Аналогічно, відкритою множиною в категорії $\widetilde{\mathcal{A}}$ називають відкриту підмножину $W \subset X$ об'єкта $\widetilde{\mathcal{A}}$, якщо існує підмножина $A \subset W$ така, що $d(x, X \backslash W) \geq k\|x\|$ при фіксованому k для всіх $x \in A$. В цьому випадку, W є околом множини A в категорії $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Множина W є околом (асимптотичним околом) власної множини A в категорії $\mathcal{A}$), якщо $d(x, X \setminus W)$ прямує до нескінченності як функція на A. Вважають, що околом обмеженої множини є звичайний окіл.

Об'єкт $X \in \mathcal{A}$ називається абсолютним околовим екстензором в категорії $\mathcal{A}$ ($ANE_0(\mathcal{A})$), якщо $X \times \mathbb{R}_+ \in AE$.

РОЗДІЛ 2
КОНУС І ДЖОЙН В АСИМПТОТИЧНИХ КАТЕГОРІЯХ

У цьому розділі ми розглядаємо конструкції джойна і конуса у асимптотичних категоріях. Зауважимо насамперед, що ці конструкції відіграють важливу роль у алгебраїчній топології. У асимптотичній топології джойн і конус вперше розглядав А. Дранішников у статті [23]. У підрозділі 2.2 ми розглядаємо випадок γ-слабо опуклих та δ-слабо вгнутих геодезійних просторів.

2.1. Конус і джойн у евклідових просторах

Асимптотичний конус CX і надбудова $\sum X$ в асимптотичних категоріях для кожного метричного простору визначені як наступні фактор-простори:

$CX = X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+/i_+(X)$ і $\sum X = X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+/i_\pm(X) = CX/i_-X$

де $i_\pm : X \to X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+$ вкладення, визначені формулами $i_\pm(x) = (x, \pm\|x\|, 0)$. В статті [23] стверджується, що для геодезійних просторів X конус і надбудову можна задавати формулами $CX = X \times \mathbb{R}_+$, $\sum X = X \times \mathbb{R}$. У наступній лемі доведено, що конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^2_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

2.1.1. Лема. *Конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^2_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.*

Доведення. Припустимо, що конус $C\mathbb{R}$ ізоморфний (квазі-ізометричний) півпростору $\mathbb{R}^2_+$. Тобто існує відображення $f : C\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_+$ таке, що для деяких сталих $C \geq 0$ і $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\lambda}d(x,y) - C \leq \rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) + C, \quad x, y \in C\mathbb{R}.$$

Побудуємо в просторі $C\mathbb{R}$ нескінченну послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$, таку що $d(x_i, x_j) = 2\lambda C + 1$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$. Таку послідовність не складно побудувати в $C\mathbb{R}$, візьмемо, наприклад,

$$x_k = (k(2\lambda C + 1), (2\lambda C + 1)\frac{1 - 8k^2}{8k}, (2\lambda C + 1)\frac{\sqrt{16k^2 - 1}}{8k}).$$

Образи точок $x_1, x_2, x_3, ...$ повинні міститися в околі

$$O_{f(x_1)}(2\lambda^2 C + \lambda + C) \text{ і}$$

$$d(f(x_i), f(x_j)) \geq \frac{1}{\lambda}d(x_i, x_j) - C = \frac{1}{\lambda}(2\lambda C + 1) - C = C + \frac{1}{\lambda},$$

але це неможливо. Отримана суперечність доводить лему. □

Аналогічно доводиться неізоморфність надбудови $\sum \mathbb{R}$ та евклідового простору $\mathbb{R}^2$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Варто зауважити, що асимптотичний конус і надбудова не є власними просторами. Це підтверджується існуванням нескінченних, r - дискретних, обмежених множин в цих просторах. Тому такі обмеження для об'єктів асимптотичних категорій є занадто строгими. Варто розглядати об'єктами асимптотичних категорій всі метричні простори, бо в іншому випадку означення асимптотичного конуса і надбудови не будуть коректними.

Метрика Канторовича-Рубінштейна на джойні $X * \mathbb{R}_+$

Для будь-яких двох метричних просторів X і Y з фіксованими точками можна визначити букет $X \vee Y$ як факторпростір диз'юнктного об'єднання X та Y, у якому склеєні відмічені точки. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ — це підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини. Визначемо формулу для метрики Канторовича —

Рубінштейна на джойні $X * \mathbb{R}_+$ між двома довільними ймовірнісними мірами μ і ν.

Нехай

$$\mu = \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y$$

$$\nu = \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'},$$

причому

$$\|x\| = y,\ \|x'\| = y',\ \{x, x'\} \in X,\ \{y, y'\} \in \mathbb{R}_+.$$

Тоді

$$d_{KP}(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon d(y',x) + (\alpha-\varepsilon)d(x,x') + (1-\beta-\varepsilon)d(y,y') +$$

$$+(\beta-\alpha+\varepsilon)d(x',y) | \varepsilon \geq 0, \varepsilon \geq \alpha-\beta\} =$$

$$= \inf\{\varepsilon(d(y',x) - d(x,x') - d(y,y') + d(x',y)) + \alpha d(x,x') +$$

$$+(1-\beta)d(y,y') + (\beta-\alpha)d(x',y) | \varepsilon \geq 0, \varepsilon \geq \alpha-\beta\} =$$

$$= \begin{cases} \beta > \alpha, & (\beta-\alpha)d(x',y) + \alpha d(x',x) + (1-\beta)d(y,y') \\ \beta \leq \alpha, & (\alpha-\beta)d(x,y') + \beta d(x,x') + (1-\alpha)d(y,y') \end{cases}$$

Врахувавши, що $d(x',y) = \|x'\| + y$ та $d(x,y') = \|x\| + y'$ отримаємо наступну формулу

$$d_{KP}(\mu,\nu) = \mid \alpha-\beta \mid (y+y') + \min\{\alpha,\beta\}d(x,x') + (1-\max\{\alpha,\beta\}) \mid y-y' \mid .$$

2.1.2. Лема. *Джойн $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^{n+1}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.*

Доведення. Розглянемо відображення $\varphi : \mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^{n+1}$, означене формулою

$$\varphi(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y) = (\alpha x, (1-\alpha)y)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}_+.$$

Тоді обернене відображення $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ задається формулою

$$\varphi^{-1}(l,t) = \frac{t}{\|l\|+t}\delta_{\frac{\|l\|+t}{t}l} + \frac{\|l\|}{\|l\|+t}\delta_{\frac{\|l\|+t}{\|l\|}t}.$$

Позначивши

$$x = \frac{\|l\|+t}{t}l,\ \alpha = \frac{t}{\|l\|+t},\ y = \frac{\|l\|+t}{\|l\|}t,$$

отримаємо

$$\varphi^{-1}(\alpha x, (1-\alpha)y) = (\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y).$$

Покажемо, що відображення φ^{-1} ліпшицеве. Зауважимо, що

$$d_{KP}(\varphi^{-1}(\alpha x, (1-\alpha)y); \varphi^{-1}\beta x', (1-\beta)y') =$$

$$= d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}).$$

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $y' > y$.

Доведемо спочатку ліпшицевість φ^{-1} для випадку $\beta > \alpha$. Маємо

$$d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}) =$$

$$= (\beta-\alpha)d(x',y) + \alpha d(x,x') + (1-\beta)d(y,y') \leq$$

$$\leq (\beta-\alpha)d(x',y) + d(\alpha x, \beta x') + (\beta-\alpha)\|x'\| + (1-\beta)d(y,y') =$$

$$= d(\alpha x, \beta x') + 2(\beta-\alpha)y' + (\beta-\alpha)y + (1-\beta)(y'-y)$$

Врахувавши, що

$$(1-\beta)(y'-y) \leq |(1-\alpha)y - (1-\beta)y'| + (\beta-\alpha)y$$

для $\beta > \alpha$ і $y' > y$, нерівність можна продовжити

$$\le d(\alpha x, \beta x') + 2(\beta - \alpha)y' + 2(\beta - \alpha)y + |(1-\alpha)y - (1-\beta)y'| \le$$

$$\le d(\alpha x, \beta x') + 4(\beta - \alpha)y' + |(1-\alpha)y - (1-\beta)y'| \le$$

(оскільки $(\beta - \alpha)y' \le \beta y' - \alpha y \le d(\alpha x, \beta x')$, то)

$$\le 5d(\alpha x, \beta x') + d((1-\alpha)y, (1-\beta)y') \le$$

$$\le 5d_{\mathbb{R}_+^{n+1}}((\alpha x, (1-\alpha)y); (\beta x', (1-\beta)y')).$$

Перевіримо ліпшицевість відображення φ^{-1} при $\beta \le \alpha$.

$$d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}) =$$

$$= (\alpha - \beta)d(x, y') + \beta d(x, x') + (1-\alpha)d(y, y') \le$$

$$\le (\alpha - \beta)d(x, y') + (\alpha - \beta)\|x\| + d(\alpha x, \beta x') + (1-\alpha)d(y, y') =$$

$$= d(\alpha x, \beta x') + (\alpha - \beta + 1 - \alpha)y' + (\alpha - \beta + \alpha - \beta - 1 + \alpha)y =$$

$$= d(\alpha x, \beta x') + (1-\beta)y' - (1-\alpha)y + 2(\alpha - \beta)y$$

(врахувавши, що $2(\alpha - \beta)y \le 2d((1-\beta)y', (1-\alpha)y)$, продовжуємо нерівність)

$$\le 3d(\alpha x, \beta x') + 3d((1-\alpha)y, (1-\beta)y') =$$

$$= 3d_{\mathbb{R}_+^{n+1}}((\alpha x, (1-\alpha)y); (\beta x', (1-\beta)y')).$$

Покажемо, що φ — ліпшицеве відображення з константою 1. Візьмемо $y' \ge y$. Розглянемо два випадки: 1.$\beta > \alpha$. Тоді

$$d_{\mathbb{R}_+^{n+1}}(\varphi(\alpha\delta_x, (1-\alpha)\delta_y); \varphi(\beta\delta_{x'}, (1-\beta)\delta_{y'})) =$$

$$= d_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+}((\alpha x, (1-\alpha)y); (\beta x', (1-\beta)y')) =$$

$$= d_{\mathbb{R}^n}(\alpha x, \beta x') + d_{\mathbb{R}_+}((1-\alpha)y, (1-\beta)y') \le$$

$$\le \alpha d(x, x') + (\beta - \alpha)\|x'\| + (1-\beta)(y' - y) + (\beta - \alpha)y =$$

Остання нерівність отримується із наступних двох нерівностей:

$$d(\alpha x, \beta x') \leq \alpha d(x, x') + (\beta - \alpha)\|x'\|$$

$$d((1-\alpha)y, (1-\beta)y') \leq (1-\beta)(y'-y) + (\beta-\alpha)y$$

$$= \alpha d(x, x') + (\beta - \alpha)d(x', y) + (1-\beta)d(y, y') =$$

$$= d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}).$$

2.$\beta \leq \alpha$. Тоді

$$d_{\mathbb{R}^n}(\alpha x, \beta x') + d_{\mathbb{R}_+}((1-\alpha)y, (1-\beta)y') \leq$$

Оскільки

$$d(\alpha x, \beta x') \leq \beta d(x, x') + (\alpha - \beta)\|x\|,$$

можемо продовжити нерівність:

$$\beta d(x, x') + (\alpha - \beta)\|x\| + (1-\beta)y' - (1-\alpha)y =$$

$$= \beta d(x, x') + (\alpha - \beta)\|x\| + \alpha y' - \beta y' - \alpha y' + y' - (1-\alpha)y =$$

$$= \beta d(x, x') + (\alpha - \beta)(\|x\| + y') + (1-\alpha)(y' - y) =$$

$$= d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}).$$

□

З лем 2.1.1 і 2.1.2 отримуємо наступний наслідок.

2.1.3. Наслідок. *Джойн $\mathbb{R} * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусові $C\mathbb{R}$ в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.*

2.1.4. Лема. *Нехай $X = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Тоді джойн $X * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусу CX в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.*

Доведення. Нехай $f : CX \to X*\mathbb{R}_+$ — грубе відображення. Образ кожного одиничного відрізка $[x, y]$ з CX міститься в кулі $O_{s(1)}(f(x))$.

Розглянемо в CX відрізок $[x_0, x], d(x_0, x) = n$. Побудуємо послідовність

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_n = x,$$

де $d(x_i, x_{i+1}) = 1$ для кожного $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Оскільки образ кожного відрізка $[x_i, x_{i+1}]$ міститься в кулі $O_{s(1)}(f(x_i))$, то образ $[x_0, x]$ є обмеженою множиною, так як $X * \mathbb{R}_+$ не є $S(1)$-зв'язним для будь-якого $S(1)$.

Отже не існує грубого відображення конуса CX в джойн $X * \mathbb{R}_+$, яке має необмежений образ. $\square$

Лема 2.1.4 виконується також в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

2.2. γ-слабо опуклі та δ-слабо вгнуті геодезійні простори

Метричний простір (X, d) називається геодезійним, якщо для будь-яких двох точок $x, y \in X$, існує ізометричне вкладення відрізка $c_{xy} : [0, d(x, y)] \to X$, де $c_{xy}(0) = x$, а $c_{xy}(d(x, y)) = y$.

Вкладення c_{xy} будемо називати геодезійним відрізком, що з'єднує точки $x \in X$ та $y \in X$.

Наступне поняття означене у статті [37], де воно використовується для дослідження властивостей ліпшицевих відображень у симетричні степені метричних просторів.

Геодезійний простір (X, d) називається γ-слабо опуклий ($\gamma \geq 1$), якщо кожна пара геодезійних відрізків, c_{xy} і c_{xz}, задовільняють нерівність

$$d(c_{xy}(t \cdot d(x,y)), c_{xz}(t \cdot d(x,z))) \leq \gamma \cdot t \cdot d(y,z).$$

Наступне поняття ми означуємо за аналогією до розглянутого вище, разом з яким воно дасть змогу розширити результати, доведені для геодезійних просторів, на дещо ширші класи метричних просторів.

Геодезійний простір (X, d) називається δ-слабо вгнутий ($0 < \delta \leq 1$), якщо кожна пара геодезійних відрізків, c_{xy} і c_{xz}, задовільняють нерівність

$$d(c_{xy}(t \cdot d(x,y)), c_{xz}(t \cdot d(x,z))) \geq \delta \cdot t \cdot d(y,z).$$

2.2.1. Лема. *Нехай X — γ-слабо опуклий та δ-слабо вгнутий геодезійний простір. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпростору $X \times \mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.*

Доведення. Доведемо цю лему по аналогії до леми 2. Нехай $x_0 \in X$ фіксована точка. Визначимо норму $\|x\|$ елемента $x \in X$ як відстань $d_X(x, x_0)$. Для простоти точку $c_{x_0 x}(\alpha \cdot d(x_0, x))$ надалі позначатимемо x_α.

Розглянемо відображення $\varphi : X * \mathbb{R}_+ \to X \times \mathbb{R}_+$, означене формулою

$$\varphi(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y) = (x_\alpha, (1-\alpha)y),$$

$$x \in X, y \in \mathbb{R}_+.$$

Нескладно переконатися, що обернене відображення $\varphi^{-1} \colon X \times \mathbb{R}_+ \to X * \mathbb{R}_+$ задається формулою

$$\varphi^{-1}(x_\alpha, (1-\alpha)y) = (\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y).$$

Покажемо, що φ^{-1} — ліпшицеве відображення. Маємо

$$d_{KP}(\varphi^{-1}(x_\alpha,(1-\alpha)y);\varphi^{-1}(x'_\beta,(1-\beta)y')=$$

$$=d_{KP}(\alpha\delta_x+(1-\alpha)\delta_y,\beta\delta_{x'}+(1-\beta)\delta_{y'}).$$

Не втрачаючи загальності, у подальшому будемо вважати, що

$y'>y$.

Доведемо спочатку ліпшицевість відображення φ^{-1} для випадку $\beta>\alpha$.

$$d_{KP}(\alpha\delta_x+(1-\alpha)\delta_y,\beta\delta_{x'}+(1-\beta)\delta_{y'})$$
$$=(\beta-\alpha)d(x',y)+\alpha d(x,x')+(1-\beta)d(y,y')$$
$$\leq(\beta-\alpha)d(x',y)+\frac{1}{\delta}d(x_\alpha,x'_\beta)+\frac{1}{\delta}(\beta-\alpha)\|x'\|+(1-\beta)d(y,y')$$
$$=\frac{1}{\delta}d(x_\alpha,x'_\beta)+(1+\frac{1}{\delta})(\beta-\alpha)y'+(\beta-\alpha)y+(1-\beta)(y'-y)$$

(Врахувавши, що

$$(1-\beta)(y'-y)\leq|(1-\alpha)y-(1-\beta)y'|+(\beta-\alpha)y$$

для $\beta>\alpha$ *і* $y'>y$, нерівність можна продовжити:)

$$\leq\frac{1}{\delta}d(x_\alpha,x'_\beta)+(1+\frac{1}{\delta})(\beta-\alpha)y'+2(\beta-\alpha)y+|(1-\alpha)y-(1-\beta)y'|$$
$$\leq\frac{1}{\delta}d(x_\alpha,x'_\beta)+(3+\frac{1}{\delta})(\beta-\alpha)y'+|(1-\alpha)y-(1-\beta)y'|$$

Оскільки $(\beta-\alpha)y'\leq\beta y'-\alpha y\leq d(x_\alpha,x'_\beta)$, то

$$\leq(3+\frac{2}{\delta})d(x_\alpha,x'_\beta)+d((1-\alpha)y,(1-\beta)y')$$
$$\leq(3+\frac{2}{\delta})d_{X\times\mathbb{R}_+}((x_\alpha,(1-\alpha)y);(x'_\beta,(1-\beta)y')).$$

Перевіримо ліпшицевість оберненого відображення φ^{-1} при $\beta\leq\alpha$.

Маємо

$$d_{KP}(\alpha\delta_x+(1-\alpha)\delta_y,\beta\delta_{x'}+(1-\beta)\delta_{y'})$$

$$= (\alpha - \beta)d(x, y') + \beta d(x, x') + (1 - \alpha)d(y, y')$$

$$\leq (\alpha - \beta)d(x, y') + \frac{1}{\delta}(\alpha - \beta)\|x\| + \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (1 - \alpha)d(y, y')$$

$$= \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (\alpha - \beta + 1 - \alpha)y' + (\alpha - \beta + \frac{1}{\delta}(\alpha - \beta) - 1 + \alpha)y$$

$$= \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (1 - \beta)y' - (1 - \alpha)y + (1 + \frac{1}{\delta})(\alpha - \beta)y$$

(врахувавши, що $(\alpha - \beta)y \leq d((1 - \beta)y', (1 - \alpha)y)$, продовжуємо нерівність)

$$\leq \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (2 + \frac{1}{\delta})d((1 - \alpha)y, (1 - \beta)y')$$

$$\leq (2 + \frac{1}{\delta})d_{X \times \mathbb{R}_+}((x_\alpha, (1 - \alpha)y); (x'_\beta, (1 - \beta)y')).$$

Покажемо, що відображення φ — ліпшицеве з константою γ. Можемо вважати, що $y' \geq y$. Далі доведення розбивається на два випадки:

1. $\beta > \alpha$

$$d_{X \times \mathbb{R}_+}(\varphi(\alpha\delta_x, (1 - \alpha)\delta_y); \varphi(\beta\delta_{x'}, (1 - \beta)\delta_{y'}))$$

$$= d_{X \times \mathbb{R}_+}((x_\alpha, (1 - \alpha)y); (x'_\beta, (1 - \beta)y'))$$

$$= d_X(x_\alpha, x'_\beta) + d_{\mathbb{R}_+}((1 - \alpha)y, (1 - \beta)y')$$

$$\leq \gamma\alpha d(x, x') + (\beta - \alpha)\|x'\| + (1 - \beta)(y' - y) + (\beta - \alpha)y$$

Остання нерівність отримується із наступних двох нерівностей

$$d(x_\alpha, x'_\beta) \leq \gamma\alpha d(x, x') + (\beta - \alpha)\|x'\|$$

$$d((1 - \alpha)y, (1 - \beta)y') \leq (1 - \beta)(y' - y) + (\beta - \alpha)y$$

$$= \gamma\alpha d(x, x') + (\beta - \alpha)d(x', y) + (1 - \beta)d(y, y')$$

$$\leq \gamma d_{KP}(\alpha\delta_x + (1 - \alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1 - \beta)\delta_{y'}).$$

2. $\beta \leq \alpha$.

$$d_X(x_\alpha, x'_\beta) + d_{\mathbb{R}_+}((1-\alpha)y, (1-\beta)y')$$

Оскільки

$$d_X(x_\alpha, x'_\beta) \leq \gamma\beta d(x, x') + (\alpha - \beta)\|x\|,$$

продовжимо нерівність

$$\leq \gamma\beta d(x, x') + (\alpha - \beta)\|x\| + (1-\beta)y' - (1-\alpha)y$$

$$= \gamma\beta d(x, x') + (\alpha - \beta)\|x\| + \alpha y' - \beta y' - \alpha y' + y' - (1-\alpha)y$$

$$= \gamma\beta d(x, x') + (\alpha - \beta)(\|x\| + y') + (1-\alpha)(y' - y)$$

$$\leq \gamma d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}).$$

Це завершує доведення. $\square$

Розглянемо на площині відкритий одиничний круг

$X = \{U \in R^2 : \ \|U\| < 1\}$, задамо на X метрику

$$d(U, V) = \operatorname{arccosh}\left(1 + 2\frac{\|U - V\|^2}{(1 - \|U\|^2)(1 - \|V\|^2)}\right)$$

$H = (X, d)$ — гіперболічний простір. Залишається відкритим питання: чи переноситься результат леми 2.1.2 на гіперболічний простір, тобто чи ізоморфний $H \times \mathbb{R}_+$ джойну $H * \mathbb{R}_+$?

2.3. Висновки до розділу 2

Дранішніков означив конус і джойн в асимптотичних категоріях в статті [23]. В цій же статті стверджується, що для геодезійних просторів X конус можна задавати простою формулою $CX = X \times \mathbb{R}_+$, тобто ці простори — ліпшицево еквівалентні. У лемі 2.1.1 ми довели протилежний результат, чим показали, що це твердження неправильнепотерує уточнення.

Асимптотичний конус і надбудова означені Дранішниковим не є власними просторами. Це підтверджується існуванням нескінченних, r-дискретних, обмежених множин в цих просторах. Варто розглядати об'єктами асимптотичних категорій всі метричні простори, тоді означення асимптотичного конуса і надбудови будуть коректними.

У цьому розділі дано відповідь на ще одне запитання Дранішнікова [23], чи ізоморфні конус CX і джойн $X*\mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$? Леми 2.1.1 і 2.1.2 доводять, що при $X = \mathbb{R}$ ці простори не ізоморфні. А також у лемі 2.1.4 навели приклад негеодезійного простору X для якого ці простори також не ізоморфні.

Виникають очевидні проблеми.

Проблема 1. Чи існує необмежений метричний простір X для якого конус CX і джойн $X * \mathbb{R}_+$ — ізоморфні в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Асимптотичний конус CX — невласний, а джойн $X * \mathbb{R}_+$ — власний метричні простори для всіх власних метричних просторів X. Отже питання залишається відкритим для невласних метричних просторів.

Проблема 2. Чи для всіх геодезійних просторів X, джойн $X * \mathbb{R}_+$ ізоморфний $X \times \mathbb{R}_+$.

Для випадку X — γ-слабо опуклий та δ-слабо вгнутий геодезійний простір ця проблема розв'язана в лемі 2.2.1. Оскільки всі $n-$вимірні банахові простори ізоморфні в категорії $\widetilde{\mathcal{A}}$ $n-$вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$, то проблема 2 для банахових просторів розв'язана.

РОЗДІЛ 3

ФУНКТОРИ СКІНЧЕННОГО СТЕПЕНЯ В АСИМПТОТИЧНИХ КАТЕГОРІЯХ

Нижче ми розглядаємо деякі функтори у асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, породжені деякими функторами скінченного степеня у категорії компактів. Параграф 3.1 присвячений асимптотичній модифікації функтора симетричного степеня. У параграфі 3.2 мова йде про функтор гіперсиметричного степеня. Один з результатів тут — асимптотичний аналог теореми Р. Ботта.

3.1. Симетричні степені

Декартів добуток $(X \times Y, d_X + d_Y)$ не є категорним в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, оскільки проекції на множники не є морфізмами (вони не є метрично власними відображеннями — прообрази обмежених множин не завжди обмежені). В роботі [23] А. Дранішніков означив асимптотичний добуток $X \widetilde{\times} Y$ як pull-back в топологічній категорії в діаграмі:

$$\begin{tikzcd} X \widetilde{\times} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "d_Y"] \\ X \arrow[r, "d_X"] & \mathbb{R}_+ \end{tikzcd}$$

де $d_X(x) = d_X(x_0, x)$ $d_Y(y) = d_Y(y_0, y)$, а x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. Метрика на $X \widetilde{\times} Y$ індукована вкладенням $X \widetilde{\times} Y \subset X \times Y$.

У статті [23] доведено, що для геодезійних метричних просторів X і Y простори $X\widetilde{\times}Y(x_0, y_0)$ і $X\widetilde{\times}Y(x_0', y_0')$ знаходяться на скінченній відстані Громова-Гаусдорфа (див. нижче) для будь якого вибору точок $(x_0, x_0' \in X)$ і $(y_0, y_0' \in Y)$.

Для геодезійних метричних просторів X і Y асимптотичний добуток $X\widetilde{\times}Y(x_0, y_0)$ не може бути порожньою множиною, але в загальному випадку може бути.

Півпряма $\mathbb{R}_+$ відіграє роль точки, а півплощина $\mathbb{R}_+^2$ — відрізка $I = [0, 1]$ у асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на степені $X^n_{\mathcal{A}}$, що задається умовою: $(x_1, ..., x_n) \sim (y_1, ..., y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $\{1, ..., n\}$ така що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, ..., n$. Факторпростір простору $X^n_{\mathcal{A}}$ за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X в категорії $\mathcal{A}$ і позначають $\widetilde{SP}^n(X)$.

Клас еквівалентності відношення $\sim$, що містить точку

$(x_1, ..., x_n)$, позначають $[x_1, ..., x_n]$. Якщо $x_0 \in X$ — відмічена точка, то приймемо

$$\widetilde{SP}^n(X) = \{[x_1, ..., x_n] \in SP^n(X) \mid$$

$$d(x_i, x_0) = d(x_j, x_0),\ i, j = 1, ..., n\}.$$

Метрику $\hat{d}$ на $\widetilde{SP}^n(X)$ індукована з $SP^n(X)$ і задається наступною формулою

$$\hat{d}([x_1, ..., x_n], [y_1, ..., y_n]) = \min_{\sigma \in S_n} \max_i d(x_i, y_{\sigma(i)}).$$

Другий симетричний степінь простору називається симетричним квадратом. Формула метрики для симетричного квадрата має наступний вигляд

$$\hat{d}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) =$$

$$\min\{\max\{d(x_1,y_1),d(x_2,y_2)\},\max\{d(x_1,y_2),d(x_2,y_1)\}\}$$

Нехай $h : SP^2(S^1) \to \mathbb{R}^3$ — ліпшицеве вкладення з константами λ_1, λ_2.

Нехай $M = h(SP^2(S^1))$, де

$$SP^2(S^1) = \{[Z_1,Z_2] :\mid Z_1 \mid=\mid Z_2 \mid= 1, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}\}$$

— лист Мебіуса. Тоді конус над листом Мебіуса — це простір

$$\mathrm{Cone}(M) = \{tx \mid x \in M, t \geq 0\}.$$

3.1.1. Твердження. *В асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, другий симетричний степінь $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний конусу* $\mathrm{Cone}(M)$.

Доведення. Ототожнимо евклідовий простір $\mathbb{R}^2$ комплексною площиною $\mathbb{C}$, тоді одержимо:

$$\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2) = \{[Z_1,Z_2] :\mid Z_1 \mid=\mid Z_2 \mid, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Відображення $f : \widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Cone}(M)$ означимо такою формулою:

$$f([Z_1,Z_2]) =\mid Z_1 \mid \cdot h\left(\left[\frac{Z_1}{\mid Z_1 \mid},\frac{Z_2}{\mid Z_2 \mid}\right]\right).$$

Доведемо, що f — ліпшицеве

$$d(f([Z_1,Z_2]),f([W_1,W_2])) = d\left(\mid Z_1 \mid \cdot h\left(\left[\frac{Z_1}{\mid Z_1 \mid},\frac{Z_2}{\mid Z_2 \mid}\right]\right),\right.$$

$$\left.\mid W_1 \mid \cdot h\left(\left[\frac{W_1}{\mid W_1 \mid},\frac{W_2}{\mid W_2 \mid}\right]\right)\right) \leq$$

$$\mid\mid Z_1 \mid - \mid W_1 \mid\mid + \min\{\mid Z_1 \mid, \mid W_1 \mid\}\cdot$$

$$\cdot d\left(h\left(\left[\frac{Z_1}{\mid Z_1 \mid},\frac{Z_2}{\mid Z_2 \mid}\right]\right), h\left(\left[\frac{W_1}{\mid W_1 \mid},\frac{W_2}{\mid W_2 \mid}\right]\right)\right) \leq$$

$$\hat{d}([Z_1, Z_2], [W_1, W_2]) + \min\{| Z_1 |, | W_1 |\} \cdot \lambda_1 \times$$
$$\times \hat{d}\left(\left[\frac{Z_1}{| Z_1 |}, \frac{Z_2}{| Z_2 |}\right], \left[\frac{W_1}{| W_1 |}, \frac{W_2}{| W_2 |}\right]\right)$$

(врахувавши, що

$$\min\{| Z_1 |, | W_1 |\} \cdot \hat{d}\left(\left[\frac{Z_1}{| Z_1 |}, \frac{Z_2}{| Z_2 |}\right], \left[\frac{W_1}{| W_1 |}, \frac{W_2}{| W_2 |}\right]\right) \leq$$
$$\leq \hat{d}([Z_1, Z_2], [W_1, W_2]),$$

останню нерівність можна продовжити)

$$\leq (1 + \lambda_1) \cdot \hat{d}([Z_1, Z_2], [W_1, W_2])$$

Покажемо, що відображення f^{-1} ліпшицеве

$$\hat{d}([Z_1, Z_2], [W_1, W_2]) =$$

$$\min\{\max\{d(Z_1, W_1), d(Z_2, W_2)\}, \max\{d(Z_1, W_2), d(Z_2, W_1)\}$$

Врахувавши нерівність трикутника, отримаємо

$$\leq || Z_1 | - | W_1 || +$$
$$+ \min\{| Z_1 |, | W_1 |\} \cdot \hat{d}\left(\left[\frac{Z_1}{| Z_1 |}, \frac{Z_2}{| Z_2 |}\right], \left[\frac{W_1}{| W_1 |}, \frac{W_2}{| W_2 |}\right]\right)$$

$$\leq || Z_1 | - | W_1 || + \lambda_2 \cdot \min\{| Z_1 |, | W_1 |\} \cdot$$
$$\cdot d\left(h\left(\left[\frac{Z_1}{| Z_1 |}, \frac{Z_2}{| Z_2 |}\right]\right), h\left(\left[\frac{W_1}{| W_1 |}, \frac{W_2}{| W_2 |}\right]\right)\right)$$

$$\leq (1 + \lambda_2) \cdot d(f([Z_1, Z_2]), f([W_1, W_2]))$$

$\square$

3.1.2. Твердження. *Симетричний квадрат* $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+)$ *в асимптотичній категорії* $\mathcal{A}$ *ізоморфний* $\mathbb{R}^3_+$.

Доведення. Доведемо, що простір $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+)$ ізоморфний просторові

$$X = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z < x\},$$

який, у свою чергу, ізоморфний просторові $\mathbb{R}^3_+$ (див., наприклад [8]).

Означимо відображення $f : \widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+) \to X$ формулою

$$f\left([(a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2)]\right) = (a\cos\frac{\alpha_1}{2}, a\sin\frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 a),$$

де $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

Доведемо, що відображення f^{-1} ліпшицеве. Не втрачаючи загальності, припускаємо, що $b > a$. Тоді

$$\hat{d}([(a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2)],$$

$$[(b\cos\beta_1, b\sin\beta_1), (b\cos\beta_2, b\sin\beta_2)]) =$$

$$= \max\{d((a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (b\cos\beta_1, b\sin\beta_1)),$$

$$d((a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2), (b\cos\beta_2, b\sin\beta_2))\} \leq$$

$$\leq d((a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (b\cos\beta_1, b\sin\beta_1)) + |\alpha_2 a - \beta_2 b| <$$

$$< 4\rho\left((a\cos\frac{\alpha_1}{2}, a\sin\frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 a), (b\cos\frac{\beta_1}{2}, b\sin\frac{\beta_1}{2}, \beta_2 b)\right)$$

Доведемо тепер, що відображення f ліпшицеве. Справді,

$$\rho\left((a\cos\frac{\alpha_1}{2}, a\sin\frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 a), (b\cos\frac{\beta_1}{2}, b\sin\frac{\beta_1}{2}, \beta_2 b)\right) \leq$$

$$\leq 2d((a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (b\cos\beta_1, b\sin\beta_1)) + |\alpha_2 a - \beta_2 b| \leq$$

$$\leq 3\max\{d((a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1),(b\cos\beta_1, b\sin\beta_1)),$$

$$d((a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2),(b\cos\beta_2, b\sin\beta_2))\} =$$

$$= 3\hat{d}([(a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1),(a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2)],$$

$$[(b\cos\beta_1, b\sin\beta_1),(b\cos\beta_2, b\sin\beta_2)]).$$

Це завершує доведення. □

Через $S(X)$ позначаємо надбудову топологічного просторуX. За означенням, надбудова є факторпростором

$$S(X) = X \times [0,1]/\{X \times \{0\},\ X \times \{1\}.$$

Якщо $f : X \to Y$ неперервне відображення, то $S(f) : S(X) \to S(Y)$ це відображення, що робить діаграму

$$\begin{array}{ccc} X \times [0,1] & \xrightarrow{f \times 1_{[0,1]}} & Y \times [0,1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(X) & \xrightarrow[S(f)]{} & S(Y) \end{array}$$

комутативною (вертикальні стрілки є відповідними факторвідображеннями).

Якщо $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ то через $S^n(f) : S^n(X) \to S^n(Y)$ позначається n-на ітерація відображення f.

$$S^1(f) = S(f),\ \ S^n(f) = S(S^{n-1}(f)),\ n > 1.$$

У книзі [[43] Example 4k.5] описано симетричний квадрат сфери S^n як конус відображення

$$S^n\mathbb{R}P^{n-1} \to S^n.$$

Це дає змогу описати простір $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^n)$.

Для розуміння наступного результату означимо вимір Ассуада-Нагати метричного простору (X, d). Нехай $\mathcal{A}$ деяка сім'я підмножин у просторі X. Якщо $s > 0$ і $\mathcal{A}$ — деяке покриття простору X, то кажуть, що s-кратність $\mathcal{A}$ не більша, ніж $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, якщо кожна множина діаметра $\leq s$ перетинає щонайбільше $n + 1$ елемент покриття $\mathcal{A}$. Сім'я множин $\mathcal{A}$ є D-обмеженою, де $D > 0$ — деяка стала, якщо $\mathrm{mesh}(\mathcal{A}) = \sup\{\mathrm{diam}(A) | A \in \mathcal{A}\} < D$.

Вимір Ассуада-Нагати метричного простору X — це таке мінімальне число $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, що задовольняє властивість: існує стала $C > 0$ така, що для кожного $s > 0$ існує покриття $\mathcal{A}$ простору X таке, що $\mathrm{mesh}(\mathcal{A}) \leq Cs$ і s — кратність покриття $\mathcal{A}$ не більша, ніж n. (Позначення $\dim_{AN}(X) = n$.)

Асимптотичний вимір Громова має численні модифікації. Асимптотичний вимір Ассуада-Нагати метричного простору X — це мінімальне число $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, що має властивість: існує $s_0 \geq 0$ та існує стала $C > 0$ така, що для кожного $s > s_0$ існує покриття $\mathcal{A}$ простору X таке, що $\mathrm{mesh}(\mathcal{A}) \leq Cs$ і s-кратність покриття $\mathcal{A}$ не більша, ніж n. (Позначення $\mathrm{asdim}_{AN}(X) = n$.)

Через $AN(\omega)$ позначають клас метричних просторів, вимір Ассуада-Нагати яких є скінченним. Якщо X — дискретний метричний простір, тоді $\mathrm{asdim}_{AN}(X) = \dim_{AN}(X)$. Якщо X — власний метричний простір і $X \in \mathrm{AE}(AN(\omega))$ (тобто X є абсолютним екстензором для класу метричних просторів зі скінченним виміром Ассуада-Нагати), тоді також $SP^n(X) \in \mathrm{AE}(AN(\omega))$. Ці два результати доведені у статті [12].

3.2. Гіперсиметричні степені і теорема Ботта

Нехай (X, d) — метричний простір. Через $\exp X$ позначають гіперпростір простору X, тобто множину непорожніх компактних підмножин в X, наділену метрикою Гаусдорфа ρ_H:

$$\rho_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 | A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Тут $O_r(C)$ означає відкритий r-окіл підмножини C. Існує еквівалентна формула для відстані Гаусдорфа:

$$d_{\mathrm{H}}(X, Y) = \max\left\{ \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} d(x, y), \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} d(x, y) \right\}.$$

Відстань Гаусдорфа можна означувати також і між необмеженими множинами, але тоді вона може набувати також значення $+\infty$.

Поняття метрики Гаусдорфа лежить в основі поняття метрики Ґромова - Гаусдорфа. Нехай (X_i, d_i), $i = 1, 2,$ — компактні метричні простори. Приймемо

$$d_{GH}((X_1, d_1), (X_2, d_2)) = \inf\{d_H(j_1(X_1), j_2(X_2)) \mid j_i\ X_i \to Z$$

$$– \text{ізометричне вкладення в деякий метричний простір } Z,\ i = 1, 2\}.$$

(Зауважимо, що для кожних метричних просторів (X_i, d_i), $i = 1, 2$, існує метричний простір, що містить їх ізометричну копію. Для прикладу, досить відмітити точки $x_i \in X_i$, $i = 1, 2$, і розглянути букет $X_1 \vee X_2$, наділений метрикою d, яка продовжує метрики d_i на підмножинах X_i, $i = 1, 2$, а при $y_i \in X_i$, $i = 1, 2$, задається формулою: $d(y_1, y_2) = d_1(y_1, x_1) + d_2(y_2, x_2)$.)

Аналогічно до відстані Гаусдорфа, відстань Ґромова-Гаусдорфа можна означити і для необмежених метричних просторів, але тоді вона може набувати нескінченні значення.

Гіперпростори знаходять застосування не лише в топології, а й у інших областях математики, зокрема там, де використовуються багатозначні відображення.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через $\exp_n X$ позначимо підпростір $\exp X$, що складається з усіх множин потужності $\leq n$.

n-ий гіперсиметричний степінь в асимптотичній категорії це

$$\widetilde{\exp}_n(X) = \{A \in \exp_n(X) |\ \|x\| = \|y\|,\ x, y \in A\}.$$

Метрика на $\widetilde{\exp}_n(X)$ індукована з гіперпростору $\exp_n X$.

У статті [71] встановлено низку властивостей гіперсиметричних степенів $\exp_k S^1$:

(1) простір $\exp_k S^1$ має гомотопійний тип непарновимірної сфери S^k або S^{k-1};

(2) доповнення до множини $\exp_{k-2} S^1$ в $\exp_k S^1$ (тобто простір $\exp_k S^1 \setminus \exp_{k-2} S^1$) має гомотопійний тип доповнення $(k-1, k)-$торичного вузла.

Вони узагальнюють добре відомі факти: (1) гіперсиметричний квадрат $\exp_2 S^1$ гомеоморфний листові Мебіуса; (2) гіперсиметричний куб $\exp_3 S^1$ гомеоморфний тривимірній сфері, у якій коло $\exp_1 S^1$ лежить як вузол трилисника. Зауважимо, що гомеоморфізм $\exp_3 S^1$ і S^3 встановив Р. Ботт [18]; він виправив помилку К. Борсука, який стверджував, що простір $\exp_3 S^1$ гомеоморфний $S^1 \times S^2$.

3.2.1. Теорема. *Простір $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ у категорії $\mathcal{A}$.*

Цей результат є аналогом теореми Р.Ботта [18], яка стверджує, що простір $\exp_3\ S^1$ гомеоморфний тривимірній сфері S^3. На аналізі доведення Ботта базується доведення теореми 3.2.1. Нехай $S^1 = [0, 1]/\sim$, де

$0 \sim 1$. Нехай

$$\Delta^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \le x \le y \le z \le 1\}$$

і $\sim$ – відношення еквівалентності на Δ^3, задане умовами:

$$(0, x, y) \sim (x, y, 1),\ (x, x, y) \sim (x, y, y).$$

Громіздкими, але безпосередніми обчисленнями можна показати, що гомеоморфізм $\exp_3(S^1) = \exp_3([0,1]/\sim)$ і $\Delta^3/\sim$ (остання множина наділяється фактор-метрикою, породженою евклідовою метрикою) є біліпшицевим. У доведенні Ботта гомеоморфізм між $\Delta^3/\sim$ і S^3 здійснюється за допомогою зображення сфери як об'єднання двох заповнених торів. Знову ж таки, аналіз звужень гомеоморфізмів на цих заповнених торах та їх склеювання показує біліпшицевість результуючого гомеоморфізму $f : \exp_3 S^1 \to S^3$. Тоді відображення

$$\mathrm{Cone}(f) : \mathrm{Cone}(\exp_3 S^1) = \widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Cone}(S^3) \simeq \mathbb{R}^4$$

є ізоморфізмом у категорії $\mathcal{A}$.

Розглянемо підпростір в $\mathbb{R}^3$, що називається призмою Мортона:

$$P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ |x \le y \le z \le x + 1\ i\ 0 \le x + y + z \le 1.$$

Вершинами призми P є такі точки

$$\underline{0} : (0, 0, 0),\ \underline{1} : \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \underline{2} : \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$
$$\underline{4} : (0, 0, 1),\ \underline{5} : \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \underline{6} : \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Мортон [50] показав, що $SP^3(S^1)$ одержується з призми P ототожненням нижньої грані $[0, 1, 2]$ з верхньою гранню $[4, 5, 6]$. Як наслідок $SP^3(S^1)$ є заповненим тором T. При цьому S^1 лежить в $SP^3(S^1)$ як множина

$$D = \{(x, y, z) \in P\ \ | \ x = y = z,\ \text{або}\ x = y = z - 1,\ \text{або}\ x + 1 = y = z\}$$

(з відповідними ототожненнями).

Міркуючи як і в доведенні теореми 3.2.1, одержуємо такий результат.

3.2.2. Теорема. *Простір* $\widetilde{SP}^3(\mathbb{R}^2)$ *еквівалентний конусові* $\mathrm{Cone}(T)$.

Нагадаємо, що ми ототожнюємо одновимірну сферу S^1 з множиною $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ комплексних чисел. Означимо відображення призми Мортона

$$p : P \to \exp_3 S^1$$

формулою

$$p(x, y, z) = \{e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}, e^{2\pi i z}\}.$$

Тоді в [[50] Prop.2.2] доведено, що відображення p індукує відношення еквівалентності $\sim$ на P таке, що факторпростір $P/\sim$ гомеоморфний $\exp_3(S_1)$.

В [50] також показано, що це відношення еквівалентності задається афінним ідентифікуванням відповідних трикутників призми (нижче у записі ідентифікування йде у заданому порядку вершин):

$$[0, 1, 2] \text{ і } [4, 5, 6]$$

$$[0, 1, 6] \text{ і } [4, 1, 6]$$

$$[1, 2, 4] \text{ і } [5, 2, 4]$$

$$[2, 0, 5] \text{ і } [6, 0, 5].$$

В [50] також описаний гомеоморфізм $\exp_3 S^1 = P/\sim$ в S^3 як симпліціальне відображення.

Оскільки симпліціальні гомеоморфізми — ліпшицеві, одержуємо еквівалентність $\widetilde{\exp}_3\mathbb{R}^2$ і $\mathrm{Cone}(S^3) \cong \mathbb{R}^4$.

3.3. Ймовірнісні міри.

Нагадаємо, що через $P_n(X)$ позначаємо простір ймовірністних мір, носіями яких є множини з $\exp_n(X)$.

Нехай $\mu,\ \nu\ \in P_n(X)$, причому

$$\mu = \frac{1}{n}(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_n})$$

$$\nu = \frac{1}{n}(\delta_{y_1}, \delta_{y_2}, ..., \delta_{y_n})$$

Запишимо формулу для метрики Канторовича-Рубінштейна

$$d_{KP}(\mu, \nu) = \min_{\gamma} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} d(x_i, y_j)$$

$$= \frac{1}{n} \min_{\sigma} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_{\sigma(i)}) \tag{1}$$

σ перестановка множини $\{1, 2, ..., n\}$. Остання рівність отримується з того, що у формулі для відстані одержуємо

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = \frac{1}{n}.$$

Якщо

$$x = [x_1, ..., x_n],$$

$$y = [y_1, ..., y_n],$$

то маємо

$$\hat{d}(x, y) = \min_{\sigma} \max_{i} d(x_i, y_{\sigma(i)}) \geq \min_{\sigma} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_{\sigma(i)}). \tag{2}$$

Відображення $\delta : X \to P(X)$, що ставить у відповідність точці x міру δ_x, є неперервне, а отже, гомеоморфізмом.

3.3.1. Твердження. *Відображення $g : SP^n(X) \to P_n(X)$, задане формулою $g([x_1, ..., x_n]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ — біліпшицеве вкладення.*

Доведення. З (1) і (2) отримуємо, що

$$d_{KP}(\mu,\nu) \le \hat{d}(x,y)$$

Врахувавши (1) та те, що

$$\hat{d}(x,y) = \min_{\sigma} \max_{i} d(x_i, y_{\sigma(i)}) \le \min_{\sigma} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_{\sigma(i)})$$

отримуємо наступну нерівність

$$\hat{d}(x,y) \le n d_{KP}(\mu,\nu)$$

□

Нагадаємо, що для метричного простору X і $n \in \mathbb{N}$ можна означити функтор простору ймовірнісних мір з носіями потужності $\le n$:

$$\widetilde{P}_n(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i} \in P(X) \mid d(x_i, x_0) = d(x_j, x_0),\ i,j = 1,...,n \right\}.$$

3.3.2. Теорема. *Простір $\widetilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ у категорії $\mathcal{A}$.*

Доведення цього факту базується на гомеоморфізмі просторів $P_2(S^1)$ та S^3. Нехай $\Gamma = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x \le y\}$. Розглянемо відношення еквівалентності $\sim$ на Γ, задане умовами: 1) $(x,x,t) \sim (x,x,t')$; 2) $(0,1,t) \sim (0,1,t')$; 3) $(0,x,t) \sim (x,1,1-t)$; 4) $(x,y,0) \sim (x,y',0)$. Тоді, якщо зобразити $S^1 = [0,1]/\{0,1\}$, то одержуємо, що $P_2(S^1)$ природно гомеоморфний факторпросторові $\Gamma/\sim$ при відображенні $t\delta_x + (1-t)\delta_y \mapsto [(x,y,t)]$. Гомеоморфізм $\Gamma/\sim$ і S^3 є біліпшицевим, це нескладно випливає з характеру ототожнень, а тому, проводячи міркування як в доведенні теореми 3.2.1, одержуємо потрібний факт.

3.4. Проективні степені

Поняття проективного степеня топологічного простору означив А. Шанковський [69]. Нам знадобиться допоміжне поняття: точка $y \in Y$ називається істотною координатою точки $(y_1, ..., y_n) \in Y^n$, $n \in \mathbb{N}$, якщо множина $\{j \mid \ y_j = y\}$ складається з непарного числа елементів. Тепер означуємо n-й проективний степінь простору X як факторпростір $X^n/\sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ означене умовою: $(x_1, ...x_n) \sim (y_1, ..., y_n)$ тоді і тільки тоді, коли точки $(x_1, ...x_n)$ і $(y_1, ..., y_n)$ мають однакову множину істотних координат. Позначення для n-го проєктивного простору топологічного простору X таке: $Pr^n(X)$.

Окремо опишемо випадок проективного квадрата.

Нехай $(x_1, x_2) \in X^2$. Координата x_i — істотна, якщо вона зустрічається один раз. Тоді $x = (x_1, x_2) \sim y = (y_1, y_2)$ лише тоді, коли x і y мають рівні множини істотності. За означенням, $X^2/_\sim = Pr^2(X)$ — проективний квадрат (другий проективний степінь).

Якщо X — метричний простір, то множину X^2 метризуємо sup-метрикою, а проєктивний квадрат метризуємо фактор-метрикою, індукованою sup-метрикою.

3.4.1. Твердження. *Проективний квадрат $Pr^2(\mathbb{R})$ ізоморфний надбудові $\sum \mathbb{R}_+$.*

Доведення. Для простоти $\sum \mathbb{R}_+$ ототожнимо з множиною $Y = J\left(\sum \mathbb{R}_+\right)$ означимо відображення $\varphi : Y \to Pr^2(\mathbb{R})$ формулою

$$\varphi\left((r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right) = \left[r\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right), r\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Тоді для оберненого відображення одержуємо

$$\varphi^{-1}\left([r\cos\alpha, r\sin\alpha]\right) = \left(r\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{8}\right), r\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

Неважко побачити, що відображення φ ліпшицеве з $\lambda = 2$, а відображення φ^{-1} ліпшицеве з $\lambda = 1$. $\square$

З деяких результатів асимптотичної топології випливає, що аналогом сфери S^n у асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ є евклідовий простір $\mathbb{R}^{n+1}$. Справді, однією з характеризацій асимптотичного виміру $\operatorname{asdim} X$ простору X є існування продовжень асимптотично ліпшицевих відображень у $\mathbb{R}^{n+1}$, це є асимптотичним аналогом класичної теореми Александрова про характеризацію покриттєвого виміру в термінах продовження відображень у n-вимірну сферу (див., наприклад, [31]).

Таким чином, асимптотичним аналогом проективного простору $\mathbb{R}P^n$ можна вважати факторпростір $\mathbb{R}^{n+1}/\pm$.

3.4.2. Теорема. *У категорії $\mathcal{A}$ простори $\widetilde{P}^n(\mathbb{R}^2/\pm)$ та $\mathbb{R}^{n+1}/\pm$ ізоморфні.*

Доведення цієї теореми базується на результаті Шанковського [69] про гомеоморфізм просторів $Pr^n(S^1) = Pr^n(\mathbb{R}P^1)$ та $\mathbb{R}P^n$.

3.5. Суперрозширення $\lambda_3(X)$

Нагадаємо, що для компактного простору X позначаємо через $\lambda(X)$ множину максимальних зчеплених систем замкнених множин у просторі X. При цьому сім'я множин у топологічному просторі називається зчепленою, якщо кожні два її елементи мають непорожній перетин; максимальність розуміємо стосовно відношення включення. Топологію на множині $\lambda(X)$ можна означити альтернативно як індуковану природним вкладенням

$$\lambda(X) \hookrightarrow \exp(\exp X) = \exp^2 X.$$

Для елементів простору $\lambda(X)$ можна означити поняття носія як мінімальної (відносно включення) замкненої множини, на якій слід максимальної зчепленої системи залишається максимальною зчепленою системою. Для кожного натурального n через $\lambda_n(X)$ множину елементів з $\lambda(X)$, для яких носій складається з не більше n точок.

Для подальшого розуміння нам знадобиться альтернативний опис підмножини $\lambda_3(X) \subset \lambda(X)$, що складається з максимальних зчеплених систем в X, носії яких мають потужність ≤ 3.

Нехай $x, y, z \in X$. Позначемо через $[x, y, z]$ сім'ю замкнених підмножин $A \subset X$, що мають властивість: A містить принаймні одну з трьох множин $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$. Носієм елемента називаємо множину:

1) $\{x, y, z\}$, якщо всі три точки x, y, z попарно різні;

2) $\{t\}$, якщо t зустрічається щонайменше двічі у послідовності x, y, z.

Позначення: $\mathrm{supp}([x, y, z])$.

Нехай d — метрика на множині X. Тоді на множині

$$\lambda_3(X) = \{[x, y, z] | x, y, z \in X\}$$

можна означити метрику d_V:

$d_V([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2]) = \inf\{\varepsilon > 0 | \varepsilon$ — окіл кожного елемента з $[x_1, y_1, z_1]$ містить елемент з $[x_2, y_2, z_2]\}$.

Таким чином, можемо розглядати конструкцію $\lambda_3(X)$ (і в загальному випадку $\lambda_n(X)$) для довільного натурального n) для кожного метричного простору X.

Зауважимо також, що λ_3 є функтором: для кожного неперервного відображення $f\colon X \to Y$ метричних просторів відображення

$\lambda_3(f)\colon \lambda_3(X) \to \lambda_3(Y)$ задається формулою

$$\lambda_3(f)([x,y,z]) = [f(x), f(y), f(z)],\ x,y,z \in X.$$

Аналогічно до розглянутого вище, для кожного власного метричного простору (X,d) з відміченою точкою $x_0 \in X$ означимо $\widetilde{\lambda}_3(X)$ як підмножину $\lambda_3(X)$, утворену елементами $[x,y,z]$, такими, що функція $\|\cdot\|$ стала на множині $\operatorname{supp}([x,y,z])$.

Зобразимо S^1 як факторпростір $[0,1]/\sim$ за відношенням еквівалентності $0 \sim 1$. Тоді $\lambda_3(S^1)$ можна одержати з симплекса $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x \le y \le z\}$ такими ототожненнями: 1) $(x,x,y) \sim (x,x,y')$, 2) $(x,y,y) \sim (x',y,y)$, 3) $(0,x,y) \sim (x,y,1)$, 4) $(0,x,1) \sim (0,x',1)$. У статті [4] доведено, що такий факторпростір гомеоморфний S^3. З вигляду ототожнень одержуємо, що цей гомеоморфізм біліпшицево відображає $\lambda_3(S^1)$ на S^3. Міркування як в доведенні теореми 3.2.1 приводять до такого результату.

3.5.1. Теорема. *Простір $\widetilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ в категорії $\mathcal{A}$.*

Цю теорему можна вважати асимптотичним аналогом результату М. Зарічного [4] про гомеоморфність суперрозширення $\lambda_3(S^1)$ та сфери S^3.

3.6. Висновки до розділу 3

У цьому розділі перенесено конструкції деяких функторів скінченного степеня з категорії компактних метричних просторів у асимптотичну категорію $\mathcal{A}$. Зокрема ми розглянули конструкції симетричного степеня $\widetilde{SP}^n(X)$, гіперпростору $\widetilde{exp}_n(X)$, ймовірнісних мір $\widetilde{P}_n(X)$ та суперрозширення $\widetilde{\lambda}_n(X)$ в асимптотичних категоріях.

У теоремі 3.2.1 доведено, що гіперпростір $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ у категорії $\mathcal{A}$. Цей результат є аналогом теореми Р.Ботта [18], яка стверджує, що $\exp_3$ S^1 гомеоморфний S^3. Це також означає, що $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ не є абсолютним екстензором в асимптотичних категоріях $\mathcal{A}$ і $\widetilde{\mathcal{A}}$. Цей факт отримується з того, що евклідів простір $\mathbb{R}^n$ не є абсолютним екстензором в асимптотичних категоріях $\mathcal{A}$ і $\widetilde{\mathcal{A}}$ [23]. Але гіперпростір $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ є абсолютним околовим екстензором ANE_0 в цих категоріях.

У твердженні 3.1.2 доведено ізоморфність симетричного квадрата $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+)$ та евклідового простору $\mathbb{R}^3_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$. Це також означає, що симетричний квадрат $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+) \in AE$.

У цьому розділі доведено ізоморфність в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ наступних пар просторів:

— другий симетричний степінь $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ та конус над листом Мебіуса $\mathrm{Cone}(M)$;

— простір ймовірнісних мір $\widetilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ та евклідів простір $\mathbb{R}^4$;

— суперрозширення $\widetilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ та евклідів простір $\mathbb{R}^4$;

— проективний квадрат $Pr^2(\mathbb{R})$ та надбудова $\sum \mathbb{R}_+$;

У твердженні 3.3.1 ми довели, що симетричний степінь $SP^n(X)$ біліпшицево вкладається в простір ймовірнісних мір $P_n(X)$ і знайшли таке вкладення.

РОЗДІЛ 4
АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ГІПЕРПРОСТОРІВ ЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРІВ

У цьому розділі ми порівнюємо гіперпростори, гіперпростори континуумів та гіперпростори опуклих множин евклідових просторів з точки зору грубої еквівалентності. Топологічні властивості цих гіперпросторів досліджувалися з точки зору нескінченновимірної топології і є добре відомі.

У розділі 4.1 ми розглядаємо гіперпростір компактних опуклих підмножин. Основним результатом тут є теорема 4.1.6, яка стверджує нееквівалентність згаданих гіперпросторів, причому з геодезійності цих просторів випливає, що нееквівалентність є не лише у грубій категорії, а й у асимптотичній категорії Дранішнікова.

У розділі 4.2 показуємо, зокрема, що гіперпростори і гіперпростори континуумів евклідових просторів не є грубо еквівалентні.

4.1. Гіперпростори компактних опуклих підмножин

Нагадаємо, що метричний простір (X,d) називається геодезійним, якщо для кожних точок $x,y\in X$, існує ізометричне вкладення $\alpha:[0,d(x,y)]\to X$, що задовольняє властивості $\alpha(0)=x$, $\alpha(d(x,y))=y$. Відомо (див. [7]), що для геодезійного метричного простору X кожне грубо рівномірне відображення з областю визначення X є асимптотично ліпшицевим. Тобто, при вивченні геодезійних метричних просторів немає різниці між морфізмами Дж. Роу (грубо рівномірними відображеннями) та морфізмами Дранішнікова (власними асимптотично ліпшицевими відображеннями).

Через $cc(\mathbb{R}^n)$ позначаємо гіперпростір компактних опуклих підмножин у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Замкнену криву K в просторі $\mathbb{R}^3$ називають кривою сталої ширини ω, якщо для кожної точки $x \in K$ існує точка $y \in K$, для якої $d(x,y) = \max\{d(x,z) \mid z \in K\} = \omega$. В статті [2] доведено, що гіперпростір кривих сталої ширини в $\mathbb{R}^3$ які проектуються на коло в $\mathbb{R}^2$, гомеоморфний добуткові гільбертового куба на пряму.

В статті [1] доведено, що гіперпростір опуклих тіл сталої ширини в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, є стягуваним многовидом, модельованим над гільбертовим кубом. В [2] також зазначено, що гіперпростір кривих сталої ширини в $\mathbb{R}^2$ і гіперпростір опуклих тіл сталої ширини в $\mathbb{R}^2$ є гомеоморфними.

В множині $cc(\mathbb{R}^n)$ можна означити додавання Мінковського:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\},\ A, B \in cc(\mathbb{R}^n),$$

(див., наприклад, [65]) а також множення на скаляр

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\},\ \lambda \in \mathbb{R},\ A \in cc(\mathbb{R}^n).$$

4.1.1. Лема. *Простір $cc(\mathbb{R}^n)$ є геодезійним.*

Доведення. Нехай $A, B \in cc(\mathbb{R}^n)$ — такі, що $d_H(A,B) = c > 0$. Неважко помітити, що відображення $\alpha\colon [0,c] \to cc(\mathbb{R}^n)$,

$$t \to C_t = \frac{c-t}{c}A + \frac{t}{c}B,\quad t \in [0,c]$$

є ізометричним вкладенням.

Справді, нехай $s, t \in [0,c]$, $s \leq t$. Якщо $a \in A$, $b \in B$, то $x_s = \frac{c-s}{c}A + \frac{s}{c}B \in C_s$. Приймемо $x_t = \frac{c-t}{c}A + \frac{t}{c}B \in C_t$, тоді $d(x_t, x_s) = t - s$. Таким чином, C_s лежить в замкненому $(t-s)$-околі множини C_t. Аналогічно доводимо, що множина C_t лежить в замкненому $(t-s)$-околі множини C_s. Звідси робимо висновок, що $d_H(C_s, C_t) \le t-s$.

$\square$

4.1.2. Лема. *Простір* $\exp(\mathbb{R}^n)$ *є геодезійним.*

Доведення. Нехай множини $A, B \in \exp(\mathbb{R}^n)$ — такі, що $d_H(A,B) = c$. Для кожного $t \in [0,c]$, означимо множину

$$C_t = \left\{ \frac{c-t}{c}a + \frac{t}{c}b \;| a \in A, b \in B, d(a,b) \le c \right\}.$$

Зауважимо, що множина C_t компактна як образ компактної множини $\{(a,b) \in A \times B \mid d(a,b) \le c\}$ при неперервному відображенні $(a,b) \mapsto \frac{c-t}{c}a + \frac{t}{c}b$. Тоді відображення $t \mapsto C_t$ є ізометричним вкладенням відрізка $[0,c]$ в $\exp(\mathbb{R}^n)$ таке, що $0 \mapsto A$ і $c \mapsto B$ — у цьому переконуємося, як і у опуклому випадку. $\square$

Нехай $C \ge 1,\ r, R > 0$. Для метричного простору X, означимо ємність

$\Phi_{C,r}(R) = \Phi^X_{C,r}(R) = \max\{|A| \,|A \subset \overline{B}_{Cr}(x) - r -$дискретна, $\|x\| \le R\}$.

Нагадаємо, що підмножина A метричного простору X називається D-дискретною $(D > 0)$, якщо $d(x,y) \ge D$ для всіх точок $x, y \in X$, $x \ne y$.

4.1.3. Твердження. *Припустимо, що існує асимптотично ліпшицеве вкладення метричного простору X в метричний простір Y. Тоді існують сталі $K > 0$ і $r_0 > 0$ такі, що для всіх $C \ge 1,\ r \ge r_0$ існує $R_0 > 0$ таке, що*

$$\Phi^X_{C,r} \le \Phi^Y_{KC,\frac{r}{K}}(KR)$$

для кожного $R > R_0$.

Доведення. Нехай маємо асимптотично ліпшицеве вкладення $f : X \to Y$. Тоді існують $K > 0$ і $r_0 > 0$ такі, що для будь якої K-дискретної підмножини X' множини X виконуються наступні нерівності:

$$\frac{1}{K}d(x, y) \leq \varrho(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$$

для всіх $x, y \in X'$.

Результат твердження отримується з того, що образом кожної r-дискретної множини, де $r \geq r_0$, в просторі X, є (r/K)-дискретна підмножина в просторі Y. $\square$

Основний результат

4.1.4. Лема. *Нехай $r > 0$. Потужність будь якої сім'ї r-диз'юнктних опуклих множин в $C_1 r$-околі для кожної множини $W \in cc(\mathbb{R}^n)$ з $\|W\| \leq R$ (в просторі $cc(\mathbb{R}^n)$) є $\leq C_2 2^{R^{n-1}}$, де $C_2 = C_2(r, C_1)$.*

Іншими словами, $\Phi_{C,r}^{cc(\mathbb{R}^n)}(R) \leq C_2 2^{R^{n-1}}$.

Доведення. Нехай A максимальна (щодо вкладення) $r/3$-дискретна підмножина U, де через U ми позначаємо $2C_1 r$-окіл множини ∂W.

Припустимо, що

$$A_1, A_2 \in cc(\mathbb{R}^n),\ A_1 \neq A_2,\ d_H(A_i, \overline{B}_R(0)) < C_1 r,\ i = 1, 2.$$

Тоді також $d_H(\partial A_i, S_R^n - 1) < C_1 r$. Оскільки $A_1 \neq A_2$, тоді відстань $d_H(A_1, A_2) \geq r$ і тому, не втрачаючи загальності, можна припустити, що існує точка $x \in U$ така, що $x \in A_1$ і $B_r(x) \cap A_2 = \emptyset$. Звідси випливає, що існує точка $a \in A$, для якої $a \in B_{r/2}(x) \subset O_{r/2}(A_1)$. Зрозуміло, що у цьому випадку $a \notin O_{r/2}(A_2)$.

Позначимо через $\mathcal{A}$ сім'ю r-диз'юнктних опуклих множин в C_1r-околі множини ∂W (в просторі $cc(\mathbb{R}^n)$). Із зазначеного вище робимо висновок, що існує вкладення $K \mapsto A \cap O_{r/2}(K)$ з множини $\mathcal{A}$ в множину 2^A.

Легко отримується із властивостей ємностей опуклих тіл, що максимальна ємність U отримується при $W = \overline{B}_R(0)$. У цьому випадку ємність U дорівнює C_3R^{n-1}, потужність A дорівнює C_4R^{n-1} (тут, $C_i = C_i(C_1, r),\ i = 3, 4$) і отримуємо, що потужність сім'ї $\mathcal{A}$ є $\leq 2^{C_4R^{n-1}} = C_2 2^{R^{n-1}}$. $\square$

4.1.5. Лема. *Нехай $C > 1$. Тоді $\Phi_{C,r}^{\exp(\mathbb{R}^n)}(R) \geq C_3 2^{R^n},\ R \geq R_0$, для деяких $C_3 = C_3(C, r)$ і $R_0 \geq 0$.*

Доведення. Припустимо, що $A(R) = 3r\mathbb{Z}^n \cap \overline{B}_R(0)$. Тоді легко бачити, що A є $3r$-дискретна множина. Для будь якої підмножини $\Lambda \subset A(R)$, нехай $A_\Lambda(R) = \overline{B}_R(0) \backslash O_r(\Lambda)$. Відображення $\Lambda \mapsto A_\Lambda(R)$ є ін'єктивним і образом цього відображення є r-дискретна підмножина r-околу в просторі $\exp \mathbb{R}^n$.

Оскільки кількість точок в $A(R)$ становить щонайменше $C'R^n$, для деякого $C' > 0$ і $R \geq R_0$, для деякого R_0, отримуємо результат. $\square$

Наступна теорема є одним з основних результатів цього розділу.

4.1.6. Теорема. *Простори $\exp \mathbb{R}^n$ і $cc(\mathbb{R}^n)$ не є грубо еквівалентними.*

Доведення. Припустимо протилежне, тоді існують грубо рівномірні відображення

$$f : \exp \mathbb{R}^n \to cc(\mathbb{R}^n),\ g : cc(\mathbb{R}^n) \to \exp \mathbb{R}^n$$

такі, що композиції $g \circ f$ і $f \circ g$ знаходяться на скінченних відстанях до тотожніх відображень $1_{\exp \mathbb{R}^n}$ і $1_{cc(\mathbb{R}^n)}$ відповідно. Оскільки доведено, що простори $\exp \mathbb{R}^n$ і $cc(\mathbb{R}^n)$ є геодезійними, то відображення f і g є асимптотично ліпшицевими. Більше того, відображення f є асимптотично ліпшицевим вкладенням. Використаємо Леми 4.1.4, 4.1.5 і Твердження 4.1.3 для того щоб зробити висновок, що існують константи $C_2, C_3 > 0$ і $R_0 \geq 0$ $C_2 2^{R^n} \leq C_3 2^{R^{n-1}}$, щоразу коли $R \geq R_0$. Це дає нам протиріччя. $\square$

4.1.7. Зауваження. Для $n \geq 1$ результат випливає з того факту, що простір $\exp \mathbb{R}$ є нескінченновимірним (у сенсі асимптотичного виміру; див. [23]) тоді як асимптотичний вимір простору $cc(\mathbb{R})$ дорівнює 2.

4.2. Грубі еквівалентності гіперпросторів евклідових просторів

Відображення $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ називається грубим вкладення, якщо існують неспадні функції φ_1, $\varphi_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такі, що

$$\varphi_1(d(x, y)) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq \varphi_2(d(x, y)), \quad x, y \in X.$$

4.2.1. Теорема. *Гіперпростір* $\exp^c \mathbb{R}^2$ *не є геодезійним.*

Доведення. Нехай $A, B \in \exp^c \mathbb{R}^2$,

$$A = \left\{ e^{i\varphi} | \ \frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} \right\},$$

$$B = \left\{ \frac{3}{2}\ e^{i\varphi} | \ -\frac{7\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{8} \right\},$$

тоді для відстані Гаусдорфа одержуємо вираз

$$d_H(A, B) = \sqrt{\frac{13}{4} - 3 \cos \frac{\pi}{8}} = K.$$

Для того щоб гіперпростір $\exp^c \mathbb{R}^2$ був геодезійним необхідно, щоб для кожного R такого, що $0 \leq R \leq K$ існувала множина $C \in \exp^c \mathbb{R}^2$ така, що

$$d_H(A,C) = R,\, d_H(C,B) = K - R.$$

Очевидно, що $C \subseteq \overline{O_R(A)} \bigcap \overline{O_{K-R}(B)}$.

Візьмемо $R = \frac{K}{2}$. Перетин околів $\overline{O_R(A)} \bigcap \overline{O_{K-R}(B)}$ складається з двох компонент зв'язності. Будь яка зв'язна множина

$C \subseteq \overline{O_R(A)} \bigcap \overline{O_{K-R}(B)}$ знаходиться на відстані, більшій за R від A. Тобто $d_H(A,C) > R$. □

Аналогічно можна довести, що гіперпростір $\exp^c \mathbb{R}^n$ не є геодезійним.

Для кожного $d > 0$ приймемо $X_d = \{A \subset \exp^c\ \mathbb{R}^n\ |\mathrm{diam} A \leq d\}$.

У доведенні наступної леми використовується поняття асимптотичного виміру метричного простору. Його запровадив М. Громов [40] в дослідженнях з геометричної теорії груп. Наведемо спершу деякі необхідні допоміжні означення. Сім'я $\mathcal{A}$ підмножин у метричному просторі X називається рівномірно обмеженою, якщо

$$\mathrm{mesh}\, \mathcal{A} = \sup\{\mathrm{diam}\, A \mid A \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

Нехай $D > 0$. Сім'я підмножин $\mathcal{A}$ у метричному просторі X називається D-дискретною, якщо $d(A,B) \geq D$ для кожних $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$. При цьому

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Нехай $n = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Кажемо, що асимптотичний вимір метричного простору X не перевищує n (позначається $\mathrm{asdim}\, X \leq n$), якщо для кожного $D > 0$ існує рівномірно обмежене покриття $\mathcal{U}$ простору X таке, що $\mathcal{U} = \cup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$ таке, що кожна сім'я $\mathcal{U}_i$ є D-дискретною. Іншими словами, асимптотичний вимір простору X не перевищує n ($asdimX \leq n$), якщо для кожного $L > 0$ знайдуться $L-$диз'юнктні сім'ї $\mathcal{U}_i,\ i = 0, ..., n$, рівномірно обмежених множин таких, що $\bigcup_i^n \mathcal{U}_i$ є покриттям X. Стандартним пособом даємо означення рівності $\operatorname{asdim} X \leq n$ і нерівності $\operatorname{asdim} X > n$.

Якщо $\operatorname{asdim} X > n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то пишемо $\operatorname{asdim} X = \infty$.

Відомі різні еквівалентні (у певних класах метричних просторів) означення асимптотичного виміру. Зокрема, у статті [22] асимптотичний вимір охарактеризовано в термінах асимптотично ліпшицевих відображень у симпліціальні комплекси.

Відомо, що асимптотичний вимір є інваріантом для грубих еквівалентностей метричних просторів, зокрема, він є інваріантом для квазіізометрій. Це дозволяє коректно означити асимптотичний вимір для скінченнопороджених груп з метрикою слів.

З численної літератури, присвяченої асимптотичному виміру, відзначимо оглядові статті [14, 38]. Відзначимо також, що поряд з асимптотичним виміром Громова досліджується асимптотичний вимір Ассуада-Нагати та асимптотичний субстепеневий вимір [46].

4.2.2. Лема. *Гіперпростір* $\exp_2 \mathbb{R}^n$ *не вкладаєтьcя асимптотично ліпшицево в* X_d *для всіх* $d > 0$.

Доведення. З того, що асимптотичний вимір 2-го гіперсиметричного степеня $\operatorname{asdim}(\exp_2 \mathbb{R}^n) = 2n$ більший за асимптотичний вимір $\operatorname{asdim}(X_d) = n$ отримуємо неможливість такого вкладення. $\square$

4.2.3. Лема. *Для всіх* $r > 0,\ C_1 \geq 1$, *для кожного* $W \in \exp_2 \mathbb{R}^n$.

$$\Phi_{C_1,\, r}^{\exp_2 \mathbb{R}^n}(R) \leq 2^{2^{n+1} \cdot {C_1}^n}.$$

Доведення. Оскільки $W \in \exp_2 \mathbb{R}^n$ то окіл $O_{C_1\, r}(W)$ дорівнює кулі радіуса $C_1\, r$. Потужність будь якої r-дискретної множини $A \in O_{C_1\, r}(W)$ не перевищує $2 \cdot (2 \cdot {}_1)^n = 2^{n+1} \cdot {C_1}^n$. А це означає, що

$$\Phi^{\exp_2 \mathbb{R}^n}_{C_1,\, r}(R) \leq 2^{2^{n+1} \cdot {C_1}^n}.$$

□

4.2.4. Лема. *Нехай $C \geq 1$. Тоді для кожного $R < d$ виконується наступна нерівність*

$$\Phi^{X_d}_{C,\, r}(R) \geq 2^{\frac{R}{r}}.$$

Доведення. Для кожної множини $W \in X_d$, $\|W\| < R$ побудуємо r-дискретну множину $B \subset \partial\overline{O_r(W)}$. Потужність множини $|B| > \frac{R}{r}$. Точками множини A будуть всеможливі об‘єднання $W \cup B_k$, де B_k — найкоротші відрізки, що з’єднують точки множини B з W. А отже $A \in O_{C\, r}(W)$ і є r — дискретною множиною. Потужність множини A не менша, ніж $2^{\frac{R}{r}}$. А отже

$$\Phi^{X_d}_{C,\, r}(R) \geq 2^{\frac{R}{r}},$$

що й завершує доведення. □

4.2.5. Теорема. *Простори* $\exp \mathbb{R}^n$ *і* $\exp^c \mathbb{R}^n$ *не є грубо еквівалентні.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто що гіперпростори $\exp \mathbb{R}^n$ і $\exp^c \mathbb{R}^n$ грубо еквівалентні. Це означає, що існують грубі вкладення

$$f : \exp \mathbb{R}^n \to \exp^c \mathbb{R}^n,$$

$$g : \exp^c \mathbb{R}^n \to \exp \mathbb{R}^n$$

такі, що композиції $f \circ g$ і $g \circ f$ знаходяться на скінченній відстані від тотожніх відображень $1_{\exp \mathbb{R}^n}$ і $1_{\exp^c \mathbb{R}^n}$ відповідно.

За лемою 4.2.2 для кожного $d > 0$ знайдеться

$$x = \{x_1, x_2\} \in \exp_2 \mathbb{R}^n \subset \exp \mathbb{R}^n$$

така, що

$$\mathrm{diam} f(x) > d.$$

Оскільки відображення f є грубим вкладенням, то існують неспадні функції φ_1, $\varphi_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такі, що

$$\varphi_1(d(x, y)) \le \rho(f(x), f(y)) \le \varphi_2(d(x, y)), \quad x, y \in \exp \mathbb{R}^n.$$

А отже образом r-дискретної множини з простору $\exp \mathbb{R}^n$ є $\varphi_1(r)$-дискретна множина в просторі $\exp^c \mathbb{R}^n$.

Використавши леми 4.2.3 та 4.2.4 і взявши до уваги те, що для будь яких $C_1 > 1$, $r > 0$ існує R_0 таке, що $2^{2^{n+1} \cdot {C_1}^n} < 2^{\frac{R}{r}}$ для всіх $R > R_0$, отримуємо суперечність. $\square$

Аналог результату теореми 4.2.5 справедливий і для n-вимірного гіперболічного простору $\mathbb{H}^n$. Нагадаємо, що однією з моделей простору $\mathbb{H}^n$ є гіперболоїд в $\mathbb{R}^{n+1}$, тобто множина точок $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ таких, що

$$x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1, \; x_0 > 0.$$

При цьому геодезійними в $\mathbb{H}^n$ є лінії перетину $\mathbb{H}^n$ і площин в $\mathbb{R}^{n+1}$, що проходять через початок координат. Множина в $\mathbb{H}^n$ є опуклою, якщо кожні дві точки в ній можна з'єднати геодезійною, яка лежить у цій множині.

4.3. Висновки до розділу 4.

Гіперпростори (простори компактних непорожніх підмножин) метричних просторів, наділені метрикою Гаусдорфа, знаходять застосування у різних областях математики, а також у математичній економіці, комп'ютерних науках (у задачах розпізнавання образів) і т.п. Топологічні властивості гіперпросторів евклідових просторів добре вивчені. Зокрема, показано, що гіперпростір компактних опуклих множин евклідового простору гомеоморфний доповненню до точки у гільбертовому кубові.

У цьому розділі досліджується груба еквівалентність (тобто еквівалентність в асимптотичній категорії Дж. Роу) гіперпросторів над евклідовими просторами. У теоремі 4.1.6 доведено, що гіперпростір компактів над евклідовим простором $\exp \mathbb{R}^n$ і гіперпростір опуклих компактів $cc(\mathbb{R}^n)$ не є грубо еквівалентними. Також у лемах 4.1.2 та 4.1.3 доведено що ці простори є геодезійними, а отже ці функторіальні конструкції не є (асимптотично) ліпшицево еквівалентними.

У теоремі 4.2.5 ми довели, що гіперпростори компактів і гіперпростори континуумів евклідових просторів не є грубо еквівалентні. Як допоміжний результат у теоремі 4.2.1 показано, що гіперпростір континуумів (зв'язних компонентів) над евклідовими просторами не є геодезійним.

РОЗДІЛ 5
ГРУБА ЕКВІВАЛЕННІСТЬ ФУНКТОРІАЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

У цьому розділі розглядаємо гіперпростори евклідових просторів. Також тут доводимо асимптотичний аналог результату Шорі [[66], теорема 8], та неможливість ліпшицевого вкладення простору ймовірнісних мір в евклідів простір. Ще одним результатом цього розділу є порівняння конуса та надбудови з точністю до грубої еквівалентності.

5.1. 3-ій гіперсиметричний степінь над евклідовою прямою

5.1.1. Теорема. *Гіперпростір* $\exp_3 \mathbb{R}_+$, *симетричний степінь* $SP^3 \mathbb{R}_+$ *та простір* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Доведення. Позначатимемо точки $[a, b, c] \in SP^3 \mathbb{R}_+$ так (a, b, c), причому $a \le b \le c$. Тоді зобразивши $SP^3 \mathbb{R}_+$ в декартовій системі координат, отримаємо конус $\mathrm{Cone}\,(B^2)$. В сферичній системі координат отримуємо, що

$$SP^3 \mathbb{R}_+ = \{(r, \varphi, \theta) : 0 \le r < +\infty, \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}.$$

Розглянемо відображення

$$f : SP^3 \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3_+,$$

задане формулою

$$f(r, \varphi, \theta) = (r, 2\varphi - \frac{\pi}{2}, 2\theta),$$

тоді нескладно переконатися, що f — ліпшицеве зі сталою $2\sqrt{2}$.

$$f^{-1}: \mathbb{R}^3_+ \to SP^3\ \mathbb{R}_+$$

$$f^{-1}(r, \varphi, \theta) = (r, \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2\frac{\theta}{2})$$

f^{-1} — ліпшицеве зі сталою $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на просторі $SP^3\,\mathbb{R}_+$, що задається умовою: $[a, a, b] \sim [a, b, b]$. Факторпростір простору $SP^3\,\mathbb{R}_+$ за таким відношенням еквівалентності це гіперпростір $\exp_3\,\mathbb{R}_+$.

А цей факторпростір — це конус $\mathrm{Cone}(B^2)$, який біліпшицево еквівалентний просторові $\mathbb{R}^3_+$. □

Аналогічно можна довести, що симетричний степінь $SP^k\,\mathbb{R}_+$ ліпшицево еквівалентний просторові $\mathbb{R}^k_+$.

5.1.2. Теорема. *Гіперпростір* $\exp_3\,\mathbb{R}$, *симетричний степінь* $SP^3\,\mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 1 позначатимемо точки $[a, b, c] \in SP^3\ \mathbb{R}$ так (a, b, c), причому $a \leq b \leq c$. Тоді зобразивши $SP^3\ \mathbb{R}$ в декартовій системі координат, не складно побачити, що цей простір ліпшицево еквівалентний $\mathbb{R}^3_+$.

Щоб отримати $\exp_3\mathbb{R}$, потрібно ототожнити $[a, a, b] \sim [a, b, b]$ в $SP^3\,\mathbb{R}$. Після такого ототожнення отриманий простір залишається ліпшицево еквівалентний $\mathbb{R}^3_+$. □

З теорем 5.1.1 і 5.1.2 отримуємо наступний наслідок.

5.1.3. Наслідок. *Гіперпростори* $\exp_3\,\mathbb{R}_+$, $\exp_3\,\mathbb{R}$, *симетричні степені* $SP^3\,\mathbb{R}_+$, $SP^3\,\mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

5.2. Класифікація 2-го гіперсиметричного степеня над евклідовим простором.

Конус $\mathrm{Cone}(X)$ над компактним метричним простором (X,d) — це факторпростір добутку $(X\times\mathbb{R}_+)/\sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ задається умовою $(x,0)\sim(y,0)$, $x,y\in X$. Якщо (X,d) — метричний простір і $\mathrm{diam}(X)\le 2$, то метрика $\hat{d}$ на $\mathrm{Cone}(X)$ задається формулою:

$$\hat{d}((x,t),(y,s))=\min\{t,s\}d(x,y)+|t-s|.$$

5.2.1. Лема. *Якщо компактні метричні простори* (X,d) *і* (Y,ρ) — *ліпшицево еквівалентні, тоді метричні простори* $\mathrm{Cone}(X)$ *і* $\mathrm{Cone}(Y)$ *також ліпшицево еквівалентні.*

Доведення. Якщо метричні простори (X,d) і (Y,ρ) — ліпшицево еквівалентні, тоді існує бієктивне відображення $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ таке, що

$$\frac{1}{\lambda}d(x,y)\le\rho(f(x),f(y))\le\lambda d(x,y),\quad x,y\in X$$

для деякого $\lambda\ge 1$.

Задамо бієктивне відображення

$$g:(\mathrm{Cone}(X),\hat{d})\to(\mathrm{Cone}(Y),\hat{\rho})$$

наступним чином: $g(x,t)=(f(x),t)$ і доведемо, що воно ліпшицеве

$$\hat{\rho}(g(x_1,t),g(x_2,s))=\hat{\rho}((f(x_1),t),f((x_2),s))=$$

$$=\min\{t,s\}\cdot\rho(f(x_1),f(x_2))+|t-s|\le$$

$$\le\min\{t,s\}\cdot\lambda\cdot d(x_1,x_2)+|t-s|\le$$

$$\le\lambda\cdot(\min\{t,s\}\cdot d(x_1,x_2)+|t-s|)=\lambda\cdot\hat{d}((x_1,t),(x_2,s))$$

З іншого боку, отримуємо оцінку

$$\hat{\rho}(g(x_1,t),g(x_2,s)) = \hat{\rho}((f(x_1),t),f((x_2),s)) =$$

$$= \min\{t,s\}\cdot\rho(f(x_1),f(x_2)) + |t-s| \geq$$

$$\geq \min\{t,s\}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot d(x_1,x_2) + |t-s| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\lambda}\cdot(\min\{t,s\}\cdot d(x_1,x_2) + |t-s|) = \frac{1}{\lambda}\cdot\hat{d}((x_1,t),(x_2,s)),$$

що свідчить про ліпшицевість розглядуваного відображення.

$\square$

5.2.2. Лема. *Півсфера* S^n_+ *та куб* I^n *ліпшицево еквівалентні.*

Доведення. Задамо відображення $f:\mathrm{I}^n\to\mathrm{S}^n_+$ як композицію двох ліпшицевих відображень. $f = g\circ\varphi$,

$$\varphi:\mathrm{I}^n\to\mathrm{B}^n,\quad g:\mathrm{B}^n\to\mathrm{S}^n_+;$$

$$\varphi(x_1,x_2,...,x_n) = \frac{1}{t}\cdot(x_1,x_2,...,x_n),$$

де

$$t = \|(y_1,y_2,...,y_n)\|,\ (y_1,y_2,...,y_n)\in\mathrm{Bd}(\mathrm{I}^n)$$

$$(y_1,y_2,...,y_n) = k\cdot(x_1,x_2,...,x_n).$$

Стала Ліпшиця λ_1 для φ дорівнює 2.

Зауважимо, що відображення $g:\mathrm{B}^n\to\mathrm{S}^n_+$ є стереографічною проекцією; відомо, що стала λ_2 для g дорівнює 2.

Отже, f — ліпшицеве відображення з константою $\lambda = \lambda_1\cdot\lambda_2 = 4$. $\square$

З лем 5.2.1 та 5.2.2, врахувавши, що $\mathrm{Cone}(\mathrm{S}^n_+)\simeq\mathbb{R}^{n+1}_+$, отримуємо наступний наслідок.

5.2.3. Наслідок. *Конус* $\mathrm{Cone}(\mathrm{I}^n)$ *та* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

У статті [[66], теорема 8] Шорі довів гомеоморфність просторів $I^m(2)$ та $C(P^{m-1}) \times I^m, \quad (m = 1, 2, ...)$, де P^{m-1}— проективний простір. Наступну теорему можна вважати грубим аналогом результату Шорі.

5.2.4. Теорема. *Гіперпростір* $\exp_2 \mathbb{R}^m$ *ліпшицево еквівалентний добутковi* $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}\ (\mathbb{R}P^{m-1})$.

Доведення. Задамо відображення

$$f : (\exp_2 \mathbb{R}^m, d_H) \to (\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}\ (\mathbb{R}P^{m-1}), \rho)$$

за формулою

$$f(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \left(\frac{x-y}{\|x-y\|}, \|x-y\|\right)\right); \quad x, y \in \mathbb{R}^m$$

Доведемо спочатку ліпшицевість f^{-1}.

$$d_H((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq$$

$$d_{\mathbb{R}P^{m-1}}\left(\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|}, \frac{x_2-y_2}{\|x_2-y_2\|}\right) \cdot \min\{\|x_1-y_1\|, \|x_2-y_2\|\}+$$

$$+|\|x_1-y_1\| - \|x_2-y_2\|| + d_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}\right) \leq$$

$$\leq 2 \cdot \max\{d_{\mathbb{R}P^{m-1}}\left(\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|}, \frac{x_2-y_2}{\|x_2-y_2\|}\right) \cdot$$

$$\cdot \min\{\|x_1-y_1\|, \|x_2-y_2\|\} + |\|x_1-y_1\| - \|x_2-y_2\||,$$

$$d_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}\right)\} =$$

$$= 2 \cdot \rho\left(\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \left(\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|}, \|x_1-y_1\|\right)\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{x_2+y_2}{2}, \left(\frac{x_2-y_2}{\|x_2-y_2\|}, \|x_2-y_2\|\right)\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot \rho(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)).$$

Доведемо ліпшицевість відображення f. Маємо

$$\rho\left(\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \left(\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|}, \|x_1-y_1\|\right)\right),\right.$$

$$\left(\frac{x_2+y_2}{2},\left(\frac{x_2-y_2}{\|x_2-y_2\|},\|x_2-y_2\|\right)\right)\right) =$$
$$\max\{d_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2}\right);$$
$$\hat{d}\left(\left(\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|},\|x_1-y_1\|\right),\left(\frac{x_2-y_2}{\|x_2-y_2\|},\|x_2-y_2\|\right)\right)\}$$
$$\hat{d}\left(\left(\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|},\|x_1-y_1\|\right),\left(\frac{x_2-y_2}{\|x_2-y_2\|},\|x_2-y_2\|\right)\right) =$$
$$= d_{\mathbb{R}P^{m-1}}\left(\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|},\frac{x_2-y_2}{\|x_2-y_2\|}\right)\times$$
$$\times\min\{\|x_1-y_1\|,\|x_2-y_2\|\}+|\|x_1-y_1\|-\|x_2-y_2\||$$

Врахувавши три наступні нерівності

$$d_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2}\right)\leq d_H((x_1,y_1),(x_2,y_2))$$
$$d_{\mathbb{R}P^{m-1}}\left(\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|},\frac{x_2-y_2}{\|x_2-y_2\|}\right)\cdot\min\{\|x_1-y_1\|,\|x_2-y_2\|\}\leq$$
$$\leq 2\cdot d_H((x_1,y_1),(x_2,y_2))$$
$$|\|x_1-y_1\|-\|x_2-y_2\||\leq d_H((x_1,y_1),(x_2,y_2))$$

отримаємо $\rho(f(x_1,y_1),f(x_2,y_2))\leq 3d_H((x_1,y_1),(x_2,y_2))$. □

Ймовірнісні міри з компактними носіями $P(X)$ на метричному просторі (X,ρ) визначають метричний простір з метрикою Канторовича-Рубінштейна. Запишимо формулу метрики Канторовича-Рубінштейна на $P_2(\mathbb{R})$ між двома довільними ймовірнісними мірами μ і ν.

$$\mu=\alpha\delta_x+(1-\alpha)\delta_y$$
$$\nu=\beta\delta_{x'}+(1-\beta)\delta_{y'}$$
$$\{x,x',y,y'\}\in\mathbb{R}$$

$$d_{KP}(\mu,\nu)=\inf\{\varepsilon d(y',x)+(\alpha-\varepsilon)d(x,x')+$$
$$+(1-\beta-\varepsilon)d(y,y')+(\beta-\alpha+\varepsilon)d(x',y)\ |\varepsilon\geq 0,\varepsilon\geq\alpha-\beta\}=$$

$$\inf\{\varepsilon(d(y',x)-d(x,x')-d(y,y')+d(x',y))+\alpha d(x,x')+$$

$$+(1-\beta)d(y,y')+(\beta-\alpha)d(x',y)\ |\varepsilon\geq 0,\varepsilon\geq\alpha-\beta\}$$

5.2.5. Лема. *Нехай $r>0$. Для будь яких $c>1$, $K>0$ існує r-диз'юнктна множина X, околу $O_{cr}(\delta_0)$, $(X\subset O_{cr}(\delta_0))$ потужність якої більша K, де $\delta_0\in P_2(\mathbb{R})$.*

Доведення. Візьмемо

$$X=\{\mu_i=\alpha_i\delta_{x_i}+(1-\alpha_i)\delta_0|\ x_i=2^i\cdot r,\ \alpha_i=\frac{r}{x_i}=2^{-i},\ i\in\mathbb{N}\}.$$

Доведемо спочатку, що $X\subset O_{cr}(\delta_0)$.

$$d_{KP}(\mu_i,\delta_0)=d_{KP}(\alpha_i\delta_{x_i}+(1-\alpha_i)\delta_0,\ \delta_0)=$$

$$=\alpha_i\cdot d(x_i,0)=\alpha_i\cdot x_i=r<cr.$$

Покажемо тепер, що X є r-дискретною множиною.

Візьмемо $j>i$, тобто $\alpha_i>\alpha_j$.

$$d_{KP}(\mu_i,\mu_j)=d_{KP}(\alpha_i\delta_{x_i}+(1-\alpha_i)\delta_0,\ \alpha_j\delta_{x_j}+(1-\alpha_j)\delta_0)=$$

$$=(\alpha_i-\alpha_j)\cdot d(x_i,0)+\alpha_j\cdot(x_j-x_i)=$$

$$=\alpha_i x_i-\alpha_j x_i+\alpha_j x_j-\alpha_j x_i=$$

$$=2r-2r\frac{x_i}{x_j}=2r\left(1-\frac{x_i}{x_j}\right)\geq 2r\left(1-\frac{1}{2}\right)=r$$

$|X|>K$ для всіх $K>0$. □

5.2.6. Теорема. *Простори $\mathbb{R}^3_+$ та $P_2(\mathbb{R})$ не є грубо еквівалентні.*

Доведення. Припустимо, що простори $\mathbb{R}^3_+$ та $P_2(\mathbb{R})$ є ліпшицево еквівалентні. Тоді існує ліпшицеве відображення

$f : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3_+$ з деякою сталою $\lambda > 0$. Розглянемо r-дискретну підмножину X простору $P_2(\mathbb{R})$,

$$X = \{\mu_i = \alpha_i \delta_{x_i} + (1 - \alpha_i)\delta_0 |\ x_i = 2^i \cdot r,\ \alpha_i = \frac{r}{x_i} = 2^{-i},\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Нескладно переконатися, що образом множини X є $\frac{r}{\lambda}$-дискретна множина $f(X)$, для якої

$$\mathrm{diam}(f(X)) \le \lambda \mathrm{diam}(X) = \lambda r,$$

причому $|f(X)| = |X| > K$ для всіх $K > 0$. Але потужність будь якої обмеженої $\frac{r}{\lambda}$-дискретної підмножини $\mathbb{R}^3_+$ є скінченною. Отримана суперечність доводить теорему. □

5.2.7. Зауваження. Аналогічний результат можна довести для суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R})$. Нагадаємо, що $\lambda_3(\mathbb{R})$ можна означити як фактор-простір $SP^3(X)$ за наступним відношенням еквівалентності $[x, x, y] \sim [x, x, z]$. Зауважимо, що простір $\lambda_3(S^1)$ є гомеоморфний тривимірній сфері S^3 (див. [4]).

Зауважимо також, що простори $\mathbb{R}^3_+$ та $P_2(\mathbb{R})$ не є гомеоморфні. Справді, існування нескінченної $r-$диз'юнктної множини в $cr-$околі точки δ_0 показує, що ця точка не є точкою локальної компактності простору $P_2(\mathbb{R})$. (Аналогічні міркування можна застосувати до кожної точки δ_x, де $x \in \mathbb{R}$).

З Леми 5.2.5 та Proposition 1 [75] отримуємо наступний наслідок.

5.2.8. Наслідок. *Простір $P_2(\mathbb{R})$ не вкладається ліпшицево в простір $\mathbb{R}^n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

Нехай $C > 0$. Послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n$ в метричному просторі X називається C-ланцюгом, що з'єднює x_1 та x_n якщо

$d(x_i, x_{i+1}) \le C$ для всіх $i = 1, \dots, n-1$. Підмножина A в X називається асимптотично зв'язною, якщо існує $C > 0$ таке, що кожні дві точки в X є елементами деякого C-ланцюга в A.

Нам знадобиться одне допоміжне поняття. Підмножина A в X називається асимптотичним розрізом X між двома множинами $M_1, M_2 \subset X$ якщо для кожного $C > 0$ знайдеться $r > 0$ таке, що кожен C-ланцюг, що з'єднує будь яку точку з M_1 і будь яку точку з M_2, перетинає $B_r(A)$.

5.2.9. Теорема. *Асимптотичний конус $C(\mathbb{R}_+)$ і надбудова $\sum(\mathbb{R}_+)$ не є грубо еквівалентні.*

Доведення. Нагадаємо, що вкладення

$$i_\pm \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge 0\}$$

задається формулою: $i_\pm(t) = (\pm t, 0)$.

Іншими словами,

$$C(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}^2_+ / i_+(\mathbb{R}_+), \ \sum(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}^2_+ / (i_+(\mathbb{R}_+) \cup i_-(\mathbb{R}_+)).$$

При цьому метрика на $C(\mathbb{R}_+)$ і $\sum(\mathbb{R}_+)$ — це факторметрика, індукована на півплощині $\mathbb{R}^2_+$. У подальшому ми тотожнимо всі підмножини в півплощині $\mathbb{R}^2_+$ з їх фактор-образами в просторах $C(X)$ і $\sum(X)$.

Припустимо, що існує груба еквівалентність $h \colon C(X) \to \sum(X)$.

Зауважимо, що множина $i_+(\mathbb{R}_+)$ не є асимптотичним розрізом в $C(X)$. Оскільки, властивість бути асимптотичним розрізом є грубим інваріантом, ми робимо висновок, що множина $h(i_+(\mathbb{R}_+))$ не є асимптотичним розрізом в $\sum(\mathbb{R}^+)$.

Однак,

$$\lim_{r\to\infty} d(i_\pm(\mathbb{R}_+) \setminus B_r(0), h(i_+(\mathbb{R}_+)) \setminus B_r(0)) = \infty,$$

і множина $h(i_+(\mathbb{R}_+))$ є асимптотично зв'язною і необмеженою. Існує окіл $h(i_+(\mathbb{R}_+))$ що містить ламану лінію від початку до нескінченності. Прості геометричні міркування показують, що $h(i_+(\mathbb{R}_+))$ є асимптотичним розрізом між $i_+(\mathbb{R}_+)$ та $i_-(\mathbb{R}_+)$. $\square$

5.3. Висновки до розділу 5

У цьому розділі доведено, що гіперпростори $\exp_3 \mathbb{R}_+$, $\exp_3 \mathbb{R}$, симетричні степені $SP^3 \mathbb{R}_+$, $SP^3 \mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^3_+$ ліпшицево еквівалентні. У статті [[23], Теорема 3.3] доведено, що $\mathbb{R}^n_+ \in AE$ (абсолютним екстензором) в асимптотичній категорії. Врахувавши, що ліпшицева еквівалентність метричних просторів зберігає властивість бути абсолютним екстензором, бачимо що гіперпростори $\exp_3 \mathbb{R}_+$, $\exp_3 \mathbb{R}$ та симетричні степені $SP^3 \mathbb{R}_+$, $SP^3 \mathbb{R}$ є абсолютними екстензорами в асимптотичній категорії.

Ми довели ліпшицеву еквівалентність гіперпростору $\exp_2 \mathbb{R}^m$ та простору $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}\,(\mathbb{R}P^{m-1})$. Цей результат можна вважати грубим аналогом результату Шорі [[66], теорема 8].

Важливим результатом цього розділу є теорема 5.2.6 у якій доведено, що простір ймовірнісних мір $P_2(\mathbb{R})$ з метрикою Канторовича-Рубінштейна не є грубо еквівалентний евклідовому простору $\mathbb{R}^3_+$. Доведення цього результату базується на існуванні обмеженої $r-$дискретної множини нескінченної потужності в $P_2(\mathbb{R})$. Врахувавши, що такої множини немає в просторі $\mathbb{R}^n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ отримаємо неможливість ліпшицевого вкладення простору $P_2(\mathbb{R})$ в простір $\mathbb{R}^n$.

У статті [4] доведено гомеоморфність суперрозширення $\lambda_3(S^1)$ та сфери S^3. Тому виникає природнє запитання, чи є суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R})$ грубо еквівалентне $\mathbb{R}^3_+$. Суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R})$ можна визначити як факторпростір $SP^3(X)$ за наступним відношенням еквівалентності $[x, x, y] \sim [x, x, z]$. Аналогічно до доведення теореми 5.2.6 можна побудувати обмежену $r-$дискретну множину нескінченної потужності в $\lambda_3(\mathbb{R})$ і довести, що ці простори не є грубо еквівалентні.

Гіпотеза. Суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R}_+)$ ліпшицево еквівалентне простору $\sum(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено класифікації функторіальних конструкцій з точністю до грубої еквівалентності (встановлення грубої та ліпшицевої еквівалентності між функторіальними конструкціями), а також дослідження властивостей асимптотичного конуса та надбудови означених Дранішніковим.

У розділі 2 спростовано твердження Дранішнікова [23] про можливість задавати асимптотичний конус і джойн в асимптотичних категоріях простими формулами $CX = X \times \mathbb{R}_+$, $\sum X = X \times \mathbb{R}$. Зокрема у лемі 2.1.1 ми довели, що конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний $\mathbb{R}^2_+$.

Варто зауважити, що ці результати породжують питання істинності наступної імплікації

$$CX \in AE \ \Rightarrow X \in ANE \ ,$$

а отже і коректності означення абсолютно околового екстензора в асимптотичній категорії $ANE_0(\mathcal{A})$.

Як зазначено у розділі 2, асимптотичний конус і надбудова не є власними просторами. Тому обмеження для об'єктів асимптотичних категорій (бути власним метричним простором) є занадто строгими. Варто розглядати об'єктами асимптотичних категорій всі метричні простори, бо в іншому випадку означення асимптотичного конуса і надбудови не будуть коректними.

Також ми дали відповідь на ще одне питання Дранішнікова: чи ізоморфні конус CX і джойн $X * \mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$? Леми 2.1.1 і 2.1.2 доводять, що при $X = \mathbb{R}$ ці простори не ізоморфні. У лемі 2.1.4

навели приклад негеодезійного простору X (розбіжна послідовність) для якого ці простори також не ізоморфні.

Однак залишаються очевидні проблеми:

Проблема 1. Чи існує необмежений метричний простір X для якого конус CX і джойн $X * \mathbb{R}_+$ — ізоморфні в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Проблема 2. Чи для всіх геодезійних просторів X, джойн $X * \mathbb{R}_+$ ізоморфний $X \times \mathbb{R}_+$.

Для випадку X — γ-слабо опуклий та δ-слабо вгнутий геодезійний простір ця проблема розв'язана в лемі 2.2.1.

У розділі 3 ми переносимо конструкції деяких функторів скінченного степеня з категорії компактних метричних просторів у асимптотичну категорію $\mathcal{A}$ (це зумовлено категорним поняттям добутку). Ми розглянули конструкції симетричного степеня $\widetilde{SP}^n(X)$, гіперпростору $\widetilde{exp}_n(X)$, ймовірнісних мір $\widetilde{P}_n(X)$ та суперрозширення $\widetilde{\lambda}_n(X)$ в асимптотичних категоріях.

У твердженні 3.1.2 доведено ізоморфність симетричного квадрата $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+)$ та евклідового простору $\mathbb{R}^3_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$. Це також означає, що симетричний квадрат $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+) \in AE$. Цей факт отримується з того, що евклідів простір $\mathbb{R}^n_+$ є абсолютним екстензором в асимптотичних категоріях $\mathcal{A}$ *і* $\widetilde{\mathcal{A}}$ [23].

У теоремі 3.2.1 доведено, що гіперпростір $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ у категорії $\mathcal{A}$. Цей результат є аналогом теореми Р.Ботта [18], яка стверджує, що $\exp_3\ S^1$ гомеоморфне S^3. Це означає, що $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ не є абсолютним екстензором в асимптотичних категоріях $\mathcal{A}$ *і* $\widetilde{\mathcal{A}}$. Але гіперпростір $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ є абсолютним околовим екстензором ANE_0 в цих категоріях.

У розділі 3 також доведено ізоморфність в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ наступних пар просторів:

- другий симетричний степінь $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ та конус над листом Мебіуса $\mathrm{Cone}(M)$;

- простір ймовірнісних мір $\widetilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ та евклідів простір $\mathbb{R}^4$;

- суперрозширення $\widetilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ та евклідів простір $\mathbb{R}^4$;

-проективний квадрат $Pr^2(\mathbb{R})$ та надбудова $\sum \mathbb{R}_+$.

У твердженні 3.3.1 ми навели приклад біліпшицевого вкладення симетричного степеня $SP^n(X)$ в простір ймовірнісних мір $P_n(X)$.

У розділі 4 досліджена груба еквівалентність (тобто еквівалентність в асимптотичній категорії Дж. Роу) гіперпросторів над евклідовими просторами. У теоремі 4.1.6 доведено, що гіперпростір компактів над евклідовим простором $\exp \mathbb{R}^n$ і гіперпростір опуклих компактів $cc(\mathbb{R}^n)$ не є грубо еквівалентними. Також у лемах 4.1.2 та 4.1.3 доведено що ці простори є геодезійними, а отже ці функторіальні конструкції не є ліпшицево еквівалентними.

Як допоміжний результат у теоремі 4.2.1 ми побудували дві множини в гіперпросторі континуумів (зв'язних компонентів) над евклідовими просторами і довели, що ці множини не можна з'єднати геодезійним відрізком у цьому просторі. Тим самим ми довели, що гіперпростір континуумів над евклідовим простором не є геодезійним.

У теоремі 4.2.5 доведено, що гіперпростори компактів і гіперпростори континуумів евклідових просторів не є грубо еквівалентні.

У розділі 5 у теоремі 5.1.1 доведено, що 3-ій гіперсиметричний степінь $\exp_3 \mathbb{R}_+$ та симетричний степінь $SP^3 \mathbb{R}_+$ ліпшицево еквівалентні $\mathbb{R}^3_+$.

У теоремі 5.1.2 показано ліпшицеву еквівалентність $\exp_3 \mathbb{R}$, симетричного степеня $SP^3\,\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^3_+$. Це означає, що всі ці простори є ліпшицево еквівалентні. Врахувавши, що ліпшицева еквівалентність зберігає властивість бути абсолютним екстензором, бачимо що гіперпростори $\exp_3 \mathbb{R}_+$, $\exp_3 \mathbb{R}$ та симетричні степені $SP^3\,\mathbb{R}_+$, $SP^3\,\mathbb{R}$ є абсолютними екстензорами в асимптотичній категорії.

Як допоміжний результат, у розділі 5, доведено ліпшицеву еквівалентність конуса $\mathrm{Cone}(\mathrm{I}^n)$ та евклідового простору $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

У статті [[66], Теорема 8] Шорі довів гомеоморфність просторів $I^m(2)$ та $C(P^{m-1})\times I^m$, $(m = 1, 2, ...)$, де P^{m-1}— проективний простір. У теоремі 5.2.4 доведено, що 2-й гіперсиметричний степінь $\exp_2 \mathbb{R}^m$ ліпшицево еквівалентний добутковi $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}\ (\mathbb{R}P^{m-1})$. Цю теорему можна вважати асимптотичним аналогом результату Шорі.

Важливим результатом розділу 5 є теорема 5.2.6 у якій доведено, що простір ймовірнісних мір $P_2(\mathbb{R})$ з метрикою Канторовича-Рубінштейна не є грубо еквівалентний евклідовому простору $\mathbb{R}^3_+$. Доведення цього результату базується на існуванні обмеженої $r-$дискретної множини нескінченної потужності в $P_2(\mathbb{R})$. Врахувавши, що такої множини немає в просторі $\mathbb{R}^n$, для всіх $n \in \mathbb{N}$, отримаємо неможливість ліпшицевого вкладення простору $P_2(\mathbb{R})$ в простір $\mathbb{R}^n$. Справді, простір ймовірнісних мір $P_2(\mathbb{R})$ не є власним, а отже не може бути ліпшицево вкладений у евклідів простір, який є власним.

У роботі [4] доведено гомеоморфність суперрозширення $\lambda_3(S^1)$ та сфери S^3. Тому виникає природнє запитання, чи є суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R})$ грубо еквівалентне $\mathbb{R}^3_+$. Аналогічно до доведення теореми 5.2.6

можна побудувати обмежену $r-$дискретну множину нескінченної потужності в $\lambda_3(\mathbb{R})$ і довести, що ці простори не є грубо еквівалентні.

Гіпотеза. Суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R}_+)$ ліпшицево еквівалентне декартовому добутку надбудови та евклідової прямої $\sum(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}$.

РОЗДІЛ 6

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Зарічний М.М., Романський М.М., Савченко О.Г.: Функтори скінченного степеня у асимптотичних категоріях. Праці міжнародного геометричного центру 8(1), 84-92 (2015)
2. Zarichnyi M., Romanskyi M.: Asymptotic properties of the (convex) hyper-spaces. Proceedings of the International Geometry Center 8(3-4) 60-64 (2015).
3. Zarichnyi M., Romanskyi M.: Cone and join in the asymptotic categories. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 34-41.
4. Zarichnyi M., Romanskyi M.: On coarse equivalence of the hyperspaces of euclidean spaces. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 67-70.
5. Romanskyi M.: Coarse equivalences of functorial constructions. Proceedings of the International Geometry Center 12(3), 69–77 (2019).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Базилевич Л. Е. Топология гиперпространства выпуклых тел постоянной ширины, Матем. заметки, 62:6 (1997), 813–819; Math. Notes, 62:6 (1997), 683–687
2. Базилевич Л., Зарічний М. Про гіперпростір просторових кривих сталої ширини. Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. - 2004. - Т. 1. - С. 7-12 .
3. Зарічний М.М., Романський М.М., Савченко О.Г. Функтори скінченного степеня у асимптотичних категоріях. Proc. Intern. Geom. Center 2015 8(1) 84-92
4. Заричный М.М. Фундаментальная група суперрасширения $\lambda_n(X)$. В кн.: Отображения и функторы. Под ред. П.С. Александрова. — Москва: МГУ,1984 - С. 24-31.
5. Заричный М.М., Никифорчин О.Р. “Функтор емкостей в категории компактов”, Матем. сб., 199:2 (2008), 3–26.
6. А.Г. Пинскер, Пространства выпуклых множеств локально-выпуклого пространства. Тр. Ленингр. инж.-экон. инст-та, 63 (1966), 13–17.
7. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии. Успехи математических наук. 1991г. январь-февраль, т.46, вып. 1(277)
8. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. – М. – 2006.
9. Федорчук В.В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов, УМН, 1984, том 39, выпуск 5(239), 169–208.

10. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q - многообразия.— УМН, 1981, 36:3, с. 177—195.

11. Шукель О. Гіперсиметричні степені і асимптотично нульвимірні простори. Вісник ЛНУ. Серія мех.-мат. 2006. Вип. 66. С. 214-224

12. Шукель О. Симетричні степені та абсолютні екстензори в асимптотичній категорії. Приклад. пробл. механіки і математики. — 2008. — Вип. 6. — С. 91-97.

13. Е.В. Щепин, "Функторы и несчетные степени компактов", УМН, 36:3(219) (1981), 3–62; Russian Math. Surveys, 36:3 (1981), 1–71

14. G.Bell, A.Dranishnikov, Asymptotic dimension, Topology and its Applications Volume 155, Issue 12, 2008, 1265-1296.

15. Bell G., Lawson A. Coarse direct products and property C. Topology Proceedings, Volume 53, 2019 201—207.

16. Blagojevic, Pavle; Grujic, Vladimir; Zivaljevic, Rade (2004-08-30). B. Dragovic; B. Sazdovic (eds.). Symmetric products of surfaces; a unifyiing theme for topology and physics. Proceedings of Summer School in Modern Mathematical Physics. SFIN XV (A3). 3. Institute of Physics, Belgrade.

17. Karol Borsuk and Stanislaw Ulam, On symmetric products of topological spaces, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 37, Number 12 (1931), 875–882.

18. Bott R. On The Third Symmetric Potency of S_1. Fund. Math. 39.1 (1952): 264-268.

19. Buyalo S. Schroeder V. Elements of Asymptotic Geometry.EMS Monographs in Mathematics. Volume: 3; 2007; 209 pp.

20. Clifford H. Wagner Symmetric, cyclic, and permutation products of manifolds. Rozprawy Matematyczne tom/nr w serii: 182. wydano: 1980.
21. Dold A., Thom R. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. - Annals of Mathematics. Second Series 67(1958), 239-281
22. Asymptotic dimension, property A, and Lipschitz maps M. Cencelj, J. Dydak, A. Vavpetiи Revista Matemбtica Complutense volume 26, 561-–571(2013)
23. Dranishnikov A. Asymptotic topology. Russian Math. Surveys., Vol. 55, №6 (2000), P. 71-116.
24. Dranishnikov, A. Cohomological approach to asymptotic dimension. Geom Dedicata 141, 59 (2009). https://doi.org/10.1007/s10711-008-9343-0
25. A. Dranishnikov, J. Keesling, V. Uspenskij, On the Higson corona of uniformly contractible spaces, Topology 37 (1998), no. 4, 791–803.
26. A.N. Dranishnikov, J. Smith, On asymptotic Assouad–Nagata dimension, Topology and its Applications 154 (2007) 934—952.
27. Dranishnikov A., Zarichnyi M. Remarks on straight finite decomposition complexity. Topology and its Applications Volume 227, 15 August 2017, Pages 102-110.
28. Dranishnikov A., Zarichnyi M. Universal spaces for asymptotic dimension. Topol. Appl., Vol. 140, №2-3 (2004), P. 203-225.
29. J.L. Dupont, G. Lusztig. On manifolds satisfying $w_1^2 = 0$. Topology, 10 (1971), 81–92.
30. Dydak J., Virk Z. Preserving coarse properties. Revista Matemбtica Complutense. January 2016, Volume 29, Issue 1, pp 191—206.
31. R. Engelking, Dimension Theory, - North Holland, 1978. - 314 pp.

32. Frider V. Normal functors in coarse category.//Algebra and Discrete Mathematics.-2005.-N4.-P.16-27.
33. Frider V., Zarichnyi M. Characterization of G-symmetric power functors in the coarse category, Visn. L'viv. un-tu. Ser. Mech.-Mat. (2006), Vol. 66, 230-235.
34. Frider V., Zarichnyi M. Hyperspace functor in the coarse category, Visn. L'viv. un-tu. Ser. Mech.-Mat. (2003), № 61, 78-86.
35. Frider V., Zarichnyi M. On coarse anti-Lawson semilattices. Mat. Stud, 2004 V.21, No.1
36. Goblet J.: Lipschitz extension of multiple Banach-valued functions in the sense of Almgren. Houston J. Math. 35, 223–231 (2009)
37. J. Goblet, A selection theory for multiple-valued funtions in the sense of Almgren, Ann. Acad. Scient. Fenn. Mat., Vol. 31, 2006, 297-314.
38. Bernd Grave, Asymptotic dimension of coarse spaces, New York J. Math. 12 (2006), 249—256.
39. Gromov M. Asymptotic invariants for infinite groups / M. Gromov // Geometric Group Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. - 1993. - V. 182, № 2. - P. 1-295.
40. Gromov M. Positive Curvature, Macroscopic Dimension, Spectral Gaps and Higher Signatures. In: Gindikin S., Lepowsky J., Wilson R.L. (eds) Functional Analysis on the Eve of the 21st Century Volume II. Progress in Mathematics, vol 132. Birkhдuser Boston (1996).
41. J. de Groot, Superextensions and supercompactness.,Proc. I. Intern. Symp. on Extension Theory of Topological Structures and its Applications, VEB Deutscher Verlag Wiss., Berlin, 1967, 89–90.

42. D. Handel, Some homotopy properties of spaces of finite subsets of topological spaces, Houston J. Math., 26 (2000), pp. 747–764

43. Allen Hatcher, Algebraic Topology Cambridge Univ.Press, 2002, 556 p.

44. Hormander, L.: ‘Sur la fonction d’appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe’, Arkiv Mat. 3 (1954), 181–186.

45. S. Kallel and D. Sjerve, Remarks on finite subset spaces, Homology, Homotopy Appl., 11 (2009), pp. 229–250.

46. Jacek Kucab, Mykhailo Zarichnyi, Subpower Higson corona of a metric space, Algebra Discrete Math., 2014, Volume 17, Issue 2, 280–287.

47. Kucab J., Zarichnyi M. On asymptotic power dimension.Topology and its Applications 201(2016), 124-130.

48. Philippe Logaritsch, Andrea Marchese, Kirszbraun’s extension theorem fails for Almgren’s multiple valued functions, Archiv der Mathematik, 102, 455—458(2014)

49. Mac Lane, S.: Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag, New York (1998)

50. H. R. Morton, Symmetric products of the circle, Proc. Cambridge Philos. Soc., 63 (1967), pp. 349–352.

51. J. Mostovoy, Lattices in $\mathbb{C}$ and finite subsets of a circle, Amer. Math. Monthly, 111 (2004), pp. 357–360.

52. Yuki Nakandakari, Shuichi Tsukuda, An Elementary Proof That the Third Finite Subset Space of the Circle is the 3-Sphere, The American Mathematical Monthly, Volume 127, 2020 - Issue 9, 789–805.

53. Yuki Nakandakari, Shuichi Tsukuda, The third symmetric potency of the circle and the Barnette sphere, arXiv:1709.02573

54. Mostovoy Jacob Geometry of truncated symmetric products and real roots of real polynomials. 1991 Mathematics Subject Classification 57N99, 26C10.
55. Protasov I., Zarichnyi M. General asymptology. (Math. Studies: Monograph Series. - Vol. XII) Lviv: VNTL Publ, (2007), 219 - P.
56. Radul T.M., Shukel' O. Functors of finite degree and asymptotic dimension. Matematychni Studii. V.31, No.2.
57. Dušan Repovš, Mykhailo Zarichnyi, Convex hyperspaces of probability measures and extensors in the asymptotic category, Topology and its Applications, Volume 158, Issue 13, 2011, 1571–1574.
58. Radström, H.: 'An Embedding Theorem for Spaces of Convex Sets', Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 165—169.
59. Roe, John. Lectures on coarse geometry, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003/
60. Romanskyi M. Coarse equivalences of functorial constructions.Proceedings of the International Geometry Center Vol. 12, no. 3 (2019) pp. 69–77
61. Sawicki M. Absolute extensors and absolute neighborhood extensors in asymptotic categories // Topol. Appl. – 2005. – 150, No. 1–3. – P. 59–78.
62. Roe J. Lectures in Coarse Geometry. (University Lecture Series - Vol. 31) American Mathematical Society: Providence, Rhode Island, (2003), 175 - pp.
63. Roe J. Index Theory, Coarse Geometry, and Topology of Manifolds. Washington, DC: Conf. Board Math. Si., 1996. (CBMS Regional Conf. Ser. in Math. V. 90.)

64. Sawicki M. Absolute extensors and absolute neighborhood extensors in asymptotic categories. Topol. Appl., Vol. 150, №1-3 (2005), P. 59-78.

65. R. Schneider, "Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory Cambridge Univ. Press (1993)

66. Scori R.M. Hyperspaces and symmetric products of topological spaces. Fund. Math. 63 (1968).

67. Shukel' O. Functors of finite degree and asymptotic dimension zero, Mat. Stud. 29 (2008) N1, 101-107.

68. Shukel' O. Zarichnyi M. Asymptotic dimension of symmetric powers, Math. Bulletin of NTSh. 5 (2008) 304-311.

69. Szankowski A. Projective potencies and multiplicative extension operators. - Fundamenta Mathematicae (1970) Volume: 67, Issue: 1, page 97-113.

70. Teleiko A., Zarichnyi M. Categorical topology of compact Hausdorff spaces. Mathematical Studies Monograph Series, 5. VNTL Publishers, Lviv, 1999. 256 pp.

71. Christopher Tuffley, Finite subset spaces of S^1, Algebr. Geom. Topol. Volume 2, Number 2 (2002), 1119–1145.

72. Clifford H Wagner, Symmetric, cyclic, and permutation products of manifolds (Rozprawy matematyczne), 1980.

73. Zarichnyi M. Coarse structures and fuzzy metrics, Mat. Stud. 32 (2009), 180-184.

74. Zarichnyi M. Space of probability measures and absolute extensors in the asymptotic category, in: V. Kadets, et al. (Eds.), Functional AnalysisandIts Applications, Proc. Int. Conf. Dedicated to the 110th

Anniversary of Stefan Banach, Lviv National University, Lviv, Ukraine, May 28–31, 2002, in: North-Holland Math. Stud., vol. 197, Elsevier, Amsterdam, 2004, pp. 311–316.

75. Zarichnyi M., Romanskyi M. Asymptotic properties of the (convex) hyper-spaces. Праці міжнародного геометричного центру. - 2015. - Т. 8, № 3-4. - С. 60-64.
76. Zarichnyi M., Romanskyi M. Cone and join in the asymptotic categories. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 34-41.
77. Zarichnyi M., Romanskyi M. On coarse equivalence of the hyperspaces of euclidean spaces. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 67-70.