

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Мединського Ігоря Павловича

«Фундаментальні розв'язки вироджених параболічних рівнянь»,

представлену на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертаційна робота І. П. Мединського присвячена побудові та дослідженню фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК) для різноманітних класів вироджених параболічних рівнянь і систем, в основному тих, які мають структуру, подібну до рівняння Колмогорова дифузії з інерцією, а також систем із виродженням на початковій гіперплощині. Рівняння типу дифузії з інерцією зустрічаються в багатьох задачах теорії випадкових процесів, фізики, біології, фінансової математики. З другого боку, в них виявлені змістовні математичні структури, від груп Лі до властивостей гіпоеліптичності. Тому таким рівнянням і системам присвячена значна література, яка, однак, не вичерпує змістовних задач у цій галузі.

Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел (247 назв) і чотирьох додатків.

У розділі 1 вводяться основні поняття і дано огляд літератури. На стор. 34 дисертант називає цей розділ «допоміжним», що на мій погляд, не зовсім вірно, скоріше цей розділ, де вводяться основні об'єкти дослідження – 4 класи вироджених параболічних рівнянь – є базовим. Отже, у рівняннях першого класу K_1 виділяються часова змінна і три групи просторових змінних. Диференціальний вираз першого порядку за часом і другого порядку за першою групою просторових змінних («основні змінні») вважається рівномірно параболічним; диференціальний вираз за другою групою змінних – першого порядку і спеціального виду, куди входять оператори множення на змінні першої групи (структура Колмогорова), вираз за третьою групою подібним чином пов'язаний із змінними другої групи. Змінні другої та третьої групи називаються змінними груп виродження. Рівняння класу K_1 є безпосередніми аналогами рівнянь дифузії з інерцією.

Клас K_2 визначається подібним чином, але рівномірно параболічний за Петровським вираз за основними змінними цього разу може мати довільний порядок. Наступний клас K_3 складається з вироджених параболічних рівнянь другого порядку типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. Нарешті, клас K_4 - це клас векторних (анізотропних)



параболічних рівнянь із виродженням на початковій гіперплощині. Умови, що накладаються на коефіцієнти, - типові умови для побудови ФРЗК: обмеженість, неперервність за часом і гельдеровість за просторовими змінними.

Розділ 2 «Допоміжні відомості» є справді допоміжним. В ньому доведено існування розв'язків та отримані їхні оцінки для деяких інтегральних рівнянь, вивчені властивості об'ємних потенціалів, побудовані ФРЗК для рівнянь, коефіцієнти яких можуть залежати тільки від часу.

Виклад основних результатів дисертаційної роботи починається в розділі 3, присвяченому рівнянням з класу K_1 . Слід відзначити, що хоча такі рівняння вивчалися багатьма авторами, повних результатів, які можна було б порівняти з випадком рівнянь без виродження, отримано не було. Розглядались або спеціальні підкласи (наприклад, із залежністю коефіцієнтів тільки від часової змінної, з груповою інваріантністю тощо), або неklasичні ФРЗК, в яких існування старших похідних доведено тільки для основних змінних. В дисертації вперше розвинутий загальний підхід, який дозволив побудувати класичні ФРЗК при мінімальних обмеженнях.

Суть підходу, розробленого дисертантом, полягає в поетапному застосуванні методу Леві, в якому кількість етапів збігається з кількістю груп просторових змінних. На кожному етапі за параметрикс береться ФРЗК, побудоване на попередньому етапі. Реалізація цього підходу була пов'язана з подоланням значних технічних труднощів, зокрема, в дослідженні відповідних об'ємних потенціалів.

У розділі 4 подібні задачі розв'язуються для рівнянь класу K_2 , тобто рівнянь довільного порядку. Тут варто відзначити, що для реалізації методу Леві на всіх етапах побудови ФРЗК необхідні точні оцінки, без чого належна збіжність ітераційних процесів не буде доведена. Ця обставина робить навіть класичну побудову ФРЗК для рівномірно параболічного рівняння другого порядку одним із найважчих фрагментів теорії рівнянь у частинних похідних. У дисертації цю необхідну точність оцінок вдалось витримати для рівнянь вищих порядків із виродженням типу Колмогорова (розділ 4) і навіть за наявності додаткового виродження на початковій гіперплощині (клас K_3 , розділ 5).

Розділ 6 присвячений застосуванню побудованих ФРЗК до конструювання та дослідження розв'язків задачі Коші для рівнянь з відповідних класів. У підрозділі 6.1 це робиться для класів K_1 , K_2 і K_3 . Крім класичних розв'язків розглядаються також Лі-розв'язки, які визначаються через похідну Лі векторного поля, що відповідає частині першого порядку диференціального виразу.

Підрозділ 6.2 присвячений цьому колу питань для рівнянь класу K_4 . ФРЗК для таких рівнянь побудували Л. П. Березан і С. Д. Івасишен (1998-2000). Тут варто зазначити, що матеріал стосовно останнього класу розкиданий по всій дисертації: опис рівнянь поданий на стор. 37, умови на коефіцієнти – на стор. 39, оцінки ФРЗК – на стор. 93, теореми про задачу Коші – починаючи зі стор. 279. Було б краще зібрати все це в одному окремому підрозділі. Ще одне

зауваження щодо рівнянь із виродженням на початковій гіперплощині: нещодавно (значно пізніше відповідних публікацій дисертанта) була опублікована стаття Kyeong-Hun Kim and Kijung Lee, *On the heat equations starting with degeneracy*, *J. Differ. Equat.* 262 (2017), 2722-2744. У цій статті для модельного прикладу таких рівнянь явно вписане ФРЗК і знайдено умови регулярності розв'язків (у термінах просторів Соболева). Хоча ця робота фактично не зачіпає пріоритет дисертанта та інших українських математиків, варто було б згадати її в огляді літератури.

У підрозділі 6.3 техніка, розвинута в попередніх розділах, застосовується до квазілінійних рівнянь, пов'язаних із класами K_1 і K_4 . За певних припущень встановлюється локальна і глобальна розв'язність задачі Коші.

Підрозділ 6.4 присвячений рівнянням із класу K_1 з дійснозначними коефіцієнтами. В цьому випадку відповідне ФРЗК є додатним і нормальним, а отже допускає ймовірнісну інтерпретацію як перехідну густину марківського процесу. Таким чином, з точки зору загальної теорії вироджених параболічних рівнянь виділено властивості ФРЗК для класу рівнянь, з якого починалась теорія, котрій присвячена ця дисертаційна робота.

Результати, що їх викладено в дисертації, є новими, вони строго доведені. Як уже відзначалось, це вимагало від автора розробки нового аналітичного апарату, подолання значних технічних труднощів. Результати кандидатської дисертації пошукувача у докторській дисертації не містяться.

Дисертація в цілому досить ясно та чітко написана, незважаючи на певну кількість опечаток та опечаток, неминучих в роботі такого обсягу. Наприклад, на стор. 227 і 290 є помилки комп'ютерного набору – замість посилань на певні формули надруковано (??).

Основні результати своєчасно опубліковані в фахових математичних журналах, що відповідають вимогам МОН України. Всього опубліковано 18 статей, в тому числі 6 статей у журналах, що індексуються в наукометричній базі Scopus. З цих статей три опубліковані в журналах третього квартіля Q3, а отже, кожна з них зараховується за дві. Таким чином, формальні вимоги щодо публікацій виконані. Разом із цим, на мою думку, рівень основних результатів дисертаційної роботи – вищий за середній рівень журналів, де вони опубліковані, і ці результати заслуговували б на публікацію в провідних міжнародних журналах. На базі дисертаційної роботи було б доцільним підготувати монографію.

Автореферат дисертації правильно відображає її зміст. Дещо утруднює читання той факт, що нумерація теорем у дисертації та авторефераті не збігається.

В цілому наведені вище зауваження не впливають на високу оцінку роботи.

Таким чином, дисертаційна робота Мединського Ігоря Павловича «Фундаментальні розв'язки вироджених параболічних рівнянь», є значним внеском до теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних: у ній, зокрема, створена систематична теорія вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. За рівнем наукових досліджень, їх науковою новизною, актуальністю, кількістю публікацій у фахових наукових журналах і рівнем апробації дисертація відповідає вимогам пп. 9, 10, 12, 13, 14 щодо докторських дисертацій "Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24 липня 2013 р. № 567 зі змінами, а її автор, Мединський І. П., заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент,
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
завідувач відділу нелінійного аналізу
Інституту математики НАН України

