ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Романського Михайла Миколайовича
«Функтори і асимптотичні властивості метричних просторів»
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.04 — геометрія та топологія

В представленій на розгляд дисертаційній роботі Романського Михайла Миколайовича «Функтори і асимптотичні властивості метричних просторів» вивчаються різні конструкції асимптотичної топології та проведено багато конкретних обчислень. Термін «асимптотична топологія» був введений О. Дранішніковим для вивчення «макроскопічних» властивостей метричних просторів. Зокрема, одна з надій на вивчення цих властивостей полягала в потенційних застосуваннях теорії до обчислення гомотопічних типів топологічних просторів (наприклад гіпотези С. Новікова про так звані вищі сигнатури), а отже і до дискретних інваріантів цих просторів, які можна було б «наочно спостерігати» в прикладних дослідженнях.

Загальна задача полягає в класифікації метричних просторів з точністю до «грубої» еквівалентності. Наприклад, множина цілих $\mathbb{Z}$ або раціональних чисел $\mathbb{Q}$ «здалеку» виглядають так само всі дійсні числа $\mathbb{R}$ і в цьому сенсі всі три множини "еквівалентні" в сенсі асимптотичної топології (грубо еквівалентні). Задача грубої класифікації є суттєво складнішою ніж можливо навіть класифікація всіх метризовних топологічних просторів, тому що по-перше одна й та ж топологія може породжуватись різними метриками, а по-друге відображення між просторами є асимптотично ліпшицевими, грубо власними, але не обов'язково неперервними. В результаті, звична інтуїція геометричної топології в «грубому» контексті не завжди спрацьовує.

В роботі використано багато різних технік для доведення грубої еквівалентності або не еквівалентності деяких власних метричних просторів, і це є досить серйозним здобутком дисертації – проведені обчислення можуть стати дійовими інструментами для загальних методів дослідження грубих типів власних метричних просторів.

Перейду до висвітлення задач розв'язаних в дисертації.

Аналогом точки в асимптотичній топології є простір $\mathbb{R}_+$, тобто $X \tilde{\times} \mathbb{R}_+ \cong X$. Тому природним є питання, поставлена в згаданій вище роботі Дранішнікова, чи буде джойн $X * \mathbb{R}_+$ еквівалентний до конуса $C\mathbb{R}$?

В розділі 2 будується контрприклад. А саме в наслідку 2.1.3 доведено, що джойн $X * \mathbb{R}_+$ та асимптотичний конус $C\mathbb{R}_+$ не ізоморфні в великій асимптотичній категорії.

Далі в лемі 2.2.1 розглядаються геодезійний метричні простори, які є одночасно γ-слабо опуклими та δ-слабо вгнутими, для деяких $\gamma \geq 1$, та $\delta < 1$. Стверджується, що для таких простірів джойн $X * \mathbb{R}_+$ ізоморфний $X \times \mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

В розділі 3 вивичаються функтори симетричного та гіперсиметричного степеня в асимптотичних категоріях. В твердженні 3.1.1 показано, що в категорії $\mathcal{A}$ другий симетричний степінь площини $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний конусу над стрічкою Мебіуса, а $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+)$ – ізоморфний $\mathbb{R}^3_+$.

Далі в теоремі 3.2.1 доведено, що простір $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ у категорії $\mathcal{A}$, що є аналогом теореми Ботта про те, що $\exp_3(S^1)$ ізоморфний S^3, а в теоремі 3.2.2 - що простір $\widetilde{SP}^3(\mathbb{R}^2)$ еквівалентний конусові $Cone(T)$ дан заповненим тором T.

Також в розділі 3 доведено, що в категорії $\mathcal{A}$

- другий проективний степінь $\widetilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ площини $\mathbb{R}^2$ та суперрозширення $\widetilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфні $\mathbb{R}^4$,
- проективний квадрат $Pr^2(\mathbb{R})$ прямої $\mathbb{R}$ ізоморфний надбудові $\Sigma\mathbb{R}_+$,

- простір $\widetilde{P}^n(\mathbb{R}^2/\pm)$ ізоморфний $\mathbb{R}^{n+1}/\pm$, де $\pm$ – відношення еквівалентності $x \equiv -x$.

Розділ 4 присвячено асимптотичним властивостям гіперпросторів евклідових просторів: простору компактних підмножин $\exp(\mathbb{R}^n)$ та його підпросторів простору зв'язних компактних підмножин $\exp^c(\mathbb{R}^n)$ та простору опуклих компактних підмножин $cc(\mathbb{R}^n)$.

В розділі показано, що $\exp(\mathbb{R}^n)$ та $cc(\mathbb{R}^n)$ є геодезійними як метричні простори відносно метрики Гаусдорфа (леми 4.1.1 і 4.1.2), а $\exp^c(\mathbb{R}^n)$ - ні (теорема 4.2.1). Також в теоремі 4.1.6 доведено, що $\exp(\mathbb{R}^n)$ не є грубо еквівалентним до $cc(\mathbb{R}^n)$ (теорема 4.1.6), та до $\exp^c(\mathbb{R}^n)$ (теорема 4.2.5).

В розділі 5 вивчається груба еквівалентність різних конструкцій над евклідовими просторами. Зокрем, в теоремах 5.1.1 та 5.2.1 доведено ліпшицеву еквівалентність між такими просторами: $\mathbb{R}^3_+$, $\exp_3(\mathbb{R}_+)$, $SP^3(\mathbb{R}_+)$, $\exp_3(\mathbb{R})$ та $SP^3(\mathbb{R})$, в теоремі 5.2.4 - між $\exp_2(\mathbb{R}^m)$ та $\mathbb{R}^m \times Conc(\mathbb{R}P^{m-1})$.

В теоремі 5.2.6 стверджується, що простори $\mathbb{R}^3_+$ та $P_2(\mathbb{R})$ не є грубо еквівалентними, а в наслідку 5.2.8, що $P_2(\mathbb{R})$ не вкладається ліпшицево в жоден евклідовий простір $\mathbb{R}^m$.

Далі, теорема 5.2.9. стверджує, що асимптотичний конус $C(\mathbb{R}_+)$ та надбудова $\Sigma(\mathbb{R}_+)$ не є грубо еквівалентними.

Список зауважень

1. Загальне зауваження відноситься до побудови та використання конструкцій прямого добутку, конуса, надбудови, джойна, та фактор-простору. Ці поняття в асимптотичному сенсі означені в статті Драніішнікова [23], але в дисертації деякі з них використовуються іншому сенсі, зокрема фактор-простір, а отже конус і надбудова.

1.1. Поняття фактор-простору X/A в асимптотичній категорії [23, стор. 78] відрізняється від звичайного, коли A «стискається в точку». В топологічному сенсі X/A отримується склеюванням всіх точок з A а одну, в той час як в асимптотичному, A розбивається на підмножини $A_s, (s \geq 0)$, точок, що знаходяться на однаковій відстані від базисної точки x_0, і кожна така непорожня множина «стискається» в окрему точку.

Варто було б відмітити, що в дисертації фактор-простір розуміється в звичайному топологічному сенсі. Через це поняття асимптотичних конусу та надбудови відрізняються від тих, які введені в статті Дранішнікова [23].

Тому, зокрема, в лемі 2.1.1 замість $\mathcal{A}$ повинно бути написано $\overline{\mathcal{A}}$, бо в сенсі означень дисертації $C\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^2_+$ не гомеоморфні, а тому автоматично не еквівалентні в категорії. З іншого боку, в лемі насправді доводиться дещо інший факт (формула в рядку 2, стор. 43): не існує квазі-ізометрії $f : C\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_+$ (див. означення на стор. 35.), а тому ці протосри дійсно не будуть еквівалентні в великій асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.

1.2. Ще відносно поняття джойна. Варто було б пояснити, що поняття джойна в асимптотичному сенсі таке саме як і стандартне топологічне означення.

На стор. 40 (рядок 1 зверху) дисертації написано, що джойн $X * \mathbb{R}_+$ – це підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини. Це *описове* означення не зовсім точно відображає картину. Формальне означення відрізняється від сказаного:

$$X * \mathbb{R}_+ = \{\mu = \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y \mid x \in X, y \in \mathbb{R}_+, \|x\| = y\}.$$

В ньому носії мір - це не довільні двоточкові підмножини $\{x, y\} \subset X \vee R_+$, а саме такі, щоб $x \in X$, $y \in \mathbb{R}_+$, і при цьому $\|x\| = y$. Наприклад, ми не можемо взяти обидві точки x, y з $\mathbb{R}_+$.

Більш того, тут варто було б сказати, що, (мабуть) в якості базисної точки в $\mathbb{R}^2_+$ береться початок координат, а $\|x\| = d(x, x_0)$, де x_0 – це та точка, відносно якої береться букет $(X, x_0) \vee (\mathbb{R}_+, (0,0))$.

Нарешті, згідно формули, джойн $X * \mathbb{R}_+$ містить міру $\mu = \alpha\delta_{x_0} + (1-\alpha)\delta_{(0,0)}$, яка є лінійною комбінацією мір Дірака в базисних точках. Але в букеті ці точки тотожні, тому носій такої міри складається з однієї точки, а значить, згідно опису, така міра не належить джойну.

2. Розділ 1.1. Варто було б навести взаємозв'язок між поняттями власного та грубо власного відображення і, зокрема, відмітити, що в великій асимптотичній категорії $\widetilde{\mathcal{A}}$ грубо власні відображення *не обов'язково неперервні*, тому що для неперервних відображень між власними метричними просторами поняття власного і грубо власного відображення тотожні.

3. Стор. 57. Формула для конуса над стрічкою Мебіуса:

$$Cone(M) = \{tx \mid x \in M, t \geq 0\},$$

де M – це образ ліпшицевого вкладення $h : \widetilde{SP}^n(S^1) \to \mathbb{R}^3$. Ця формула, фактично показує, що $Cone(M)$ – це об'єднання всіх відкритих променів, що з'єднують початок координат з точками M. Не ясно, чи правда, що всі ці промені перетинаються лише в початку координат. Інакше отриманий простір не буде конусом у звичному сенсі.

4. В твердженні 4.1.3 на стор. 76, в нерівності на другому рядок знизу, в лівій частині нерівності при $\Phi^X_{C,r}$ повинно ще стояти в дужках деяке число (згідно означення символу $\Phi^X_{C,r}$).

Відмічені недоліки не є суттєвими і **не впливають** на загальну високу позитивну оцінку роботи.

Дисертація носить теоретичний характер. Вона виконана на високому науковому рівні і справляє дуже гарне враження. Всі наведені в ній результати є новими і належать безпосередньо автору. Результати дисертації опубліковані в 5 статтях у виданнях, що входять до переліку фахових наукових журналів згідно чинного законодавства, причому 1 стаття індексується системою Scopus, і в 1-х тезах доповіді на міжнародній конференції. Вони також доповідались на наукових семінарах. Автореферат добре відображає зміст дисертації.

Оцінюючи рецензовану дисертацію в цілому, можна зробити висновок про те, що вона є завершеним науковим дослідженням, яке збагатило топологію, зокрема асимптотичну, актуальними результатами. Отримані результати можуть бути застосовані в подальших дослідженнях в топології, геометричній теорії груп, асимптотичній топології, теорії гомотопій.

Вважаю, що дисертаційна робота Романського Михайла Миколайовича «Функтори і асимптотичні властивості метричних просторів» відповідає всім вимогам чинного положення "Порядку присудження наукових ступенів", а її автор без сумніву заслуговує присвоєння наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент,
член-кореспондент НАН України
доктор фізико-математичних наук
завідувач лабораторії топології
відділу алгебри та топології
Інституту математики НАН України

С. І. Максименко

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

27 04 21