Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Романського Михайла Миколайовича

«Функтори і асимптотичні властивості метричних просторів»

подану на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.04 — геометрія та топологія

Асимптотичні властивості метричних просторів вперше розглянув М. Громов, зокрема, означив поняття асимптотичного виміру метричного простору.

Основи асимптотичної топології описав Дранішніков. Уперше в літературі він систематично провів паралелі між асимптотичними властивостями власних метричних просторів та топологічними властивостями корон Гігсона цих просторів. Дранішников також розглядає різноманітні конструкції у асимптотичній категорії (тобто категорії власних метричних просторів і асимптотично Ліпшицевих відображень), зокрема пропонує новий підхід до поняття добутку. Він також означує конус та надбудову. Дранішніков означив джойн $X * \mathbb{R}_+$ як підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини $\{x, y\}$, такі, що $x \in X, y \in \mathbb{R}_+$.

Конструкції в асимптотичній топології можна продовжити і на відображення, одержавши тим самим функтори в асимптотичній категорії.

Актуальним є питання дослідження властивостей функторів в асимптотичних категоріях та встановлення ліпшицевої та грубої еквівалентності між деякими функторіальними конструкціями. Саме ці питання досліджуються в дисертаційній роботі.

У розділі 2 досліджено властивості асимптотичного конуса, надбудови та джойна.

Головним результатом цього розділу є лема 2.1.2, у якій доведено ізоморфність джойна $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ та півпростору $\mathbb{R}^{n+1}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Також доведено неізоморфність конуса та джойна, побудованих над евклідовим простором, в асимптотичній категорії.

У підрозділі 2.2 встановлено ізоморфність в асимптотичних категоріях джойна $X * \mathbb{R}_+$ та декартового добутку $X \times \mathbb{R}_+$ для випадків, коли X є одночасно γ-слабо опуклим та δ-слабо вгнутим геодезійним простором, для деяких $\gamma \geq 1$ та $0 < \delta < 1$.

Асимптотичний добуток породжує функтори скінченного степеня в асимптотичних категоріях. У розділі 3 досліджуються властивості симетричного степеня, гіперпростору, простору ймовірнісних мір та суперрозширення в асимптотичній категорії.

У твердженні 3.1.1 доведено, що другий симетричний степінь $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний конусу $\mathrm{Cone}(M)$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, де M — лист Мебіуса, а у твердженні 3.1.2 симетричний квадрат $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+)$ ізоморфний $\mathbb{R}^3_+$.

Теорема 3.2.1 є грубим аналогом теореми Р.Ботта, яка стверджує, що 3-й гіперсиметричний степінь кола гомеоморфний 3-вимірній сфері. У цій теоремі доведено ізоморфність простору $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ та 4-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у категорії $\mathcal{A}$.

Також у цьому розділі наведено приклад біліпшицевого вкладення симетричного степеня $SP^n(X)$ в простір ймовірнісних мір $P_n(X)$ та встановлено ізоморфність у категорії $\mathcal{A}$ наступних пар просторів:

- простір $\tilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ та 4-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^4$;
- проективний квадрат $Pr^2(\mathbb{R})$ та надбудова $\sum \mathbb{R}_+$;
- суперрозширення $\tilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ та 4-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^4$.

У розділі 4 порівняно гіперпростори компактних, опуклих та зв'язних множин евклідових просторів з точністю до грубої еквівалентності, а також досліджено питання геодезійності цих просторів.

У Теоремі 4.1.6 доведено, що простори $\exp(\mathbb{R}^n)$ і $cc(\mathbb{R}^n)$ не є грубо еквівалентними, а у теоремі 4.2.5 простори $\exp(\mathbb{R}^n)$ і $\exp^c(\mathbb{R}^n)$ не є грубо еквівалентні.

У Розділі 5 досліджується груба та ліпшицева еквівалентність деяких функторіальних конструкцій.

У теоремах 5.1.1 та 5.1.2 доведено, що симетричні та гіперсиметричні степені над евклідовими прямою та півпрямою ($\exp_3\mathbb{R}_+$, $SP^3(\mathbb{R}_+)$, $\exp_3\mathbb{R}$, $SP^3(\mathbb{R})$) ліпшицево еквівалентні 3-вимірному евклідовому півпростору $\mathbb{R}^3_+$.

Шорі довів гомеоморфність просторів $I^m(2)$ та $C(P^{m-1}\times I^m)$, $(m = 1,2,\dots)$, де P^{m-1} — проективний простір. Теорему 5.2.4, у якій доведено ліпшицеву еквівалентність гіперпростору $\exp_2\mathbb{R}^n$ та декартового добутку $\mathbb{R}^n \times \mathrm{Cone}(\mathbb{R}P^{m-1})$ можна вважати аналогом результату Шорі для асимптотичної категорії.

У цьому розділі також доведено, що простір ймовірнісних мір $P_2(\mathbb{R})$ не вкладається ліпшицево в евклідів простір $\mathbb{R}^n$ для всіх n.

Загалом мушу сказати, що автор виявив неабияку геометричну уяву і застосував для розв'язання завдань дисертації широкий арсенал знань і засобів. Результати є цікавими і яскравими. Досить згадати спростування твердження, висловленого Дранішніковим – основоположником цього напрямку в геометрії. Сформульовані у дисертації відкриті проблеми і гіпотези дозволяють сподіватись на продовження автором досліджень і після захисту дисертації.

Список зауважень

1. Основне зауваження до дисертації полягає у тому, що її неможливо сприймати частинами, а потрібно прочитати всю. У сукупності вся необхідна інформація наявна, але послідовність її появи не завжди зручна і природна. Наприклад, у підрозділі 1.2.1 вперше наводиться означення асимптотичного добутку, залежне від вибору базових точок, однак автор вважає очевидним, що цей вибір не впливає суттєво на результат з погляду асимптотичної топології. У другому розділі вивчаються асимптотичні конус і надбудова, які є фактор-просторами асимптотичного добутку, знову ж, без уваги до базових точок. Аж у підрозділі 3.1 вказано, що Дранішніковим доведено, що зміна базових точок для геодезійних просторів призводить до іншого асимптотичного добутку, але на скінченній відстані Громова-Гаусдорфа до початкового, саме означення обіцяно як «див. нижче». І нарешті, у підрозділі 3.2 дано саме означення відстані Громова-Гаусдорфа.

2. Часом у різних місцях автор вживає неузгоджені означення – у підрозділі 1.2.4 метрика Канторовича-Рубінштейна означена через стискаючі відображення, а у 1.3 – через нерозтягуючі (що, зрештою, еквівалентно, але навіщо?)

3. Через велику кількість об'єктів ті ж позначення у різних місцях можуть мати різний зміст – каліграфічна А позначає і асимптотичну категорію, і покриття у означенні виміру Ассуада-Нагати. Зате позначення додатної півплощини спершу використовується у підрозділі 1.2.3, а вже потім пояснюється.

4. Є деякі зауваження до мови і стилю, наприклад, не варто розпочинати речення з «Тобто». Мінливості правопису призвели до того, що у підрозділі 3.4 одночасно вживаються «проективний» і «проєктивний».

5. Не вдалось знайти закономірності у тому, які рядки мають абзацний відступ, а які ні, і де з'являються переноси рядків.

Однак не йдеться про математичні помилки чи хибні твердження, і ці недоліки не здатні зіпсувати приємність від читання цікавої і оригінальної роботи.

Наведені зауваження не впливають на позитивну оцінку дисертаційної роботи та не зменшують її теоретичне значення.

Положення роботи викладені послідовно і коректно, автореферат повністю і правильно відображає зміст дисертації. Дисертація написана українською мовою у відповідності до вимог МОН України про мову та стиль написання дисертацій. Форма викладення матеріалу відповідає прийнятій у науковій літературі. Тематика дисертаційної роботи відповідає спеціальності 01.01.04 — геометрія і топологія. Враховуючи все вищесказане, вважаю, що дисертаційна робота '«Функтори і асимптотичні властивості метричних просторів» є цілісною науковою працею, що задовольняє всі вимоги діючого "Порядку присудження наукових ступенів", постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013 р. (зі змінами, внесеними постановою КМУ №607 від 15.07.2020 р.) щодо кандидатських дисертацій, і її автор Романський Михайло Миколайович заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 — геометрія і топологія.

Доктор фізико-математичних наук,
доцент, завідувач кафедри алгебри
та геометрії Прикарпатського
національного університету імені
Василя Стефаника

О.Р. Никифорчин

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
і.к. 02125266

ПІДПИС О.Р. Никифорчина ЗАВІРЯЮ

«21» 04 2021 р.