Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу Пстрий Катерини Миколаївни "Топологізація та розширення груп, біциклічних напівгруп та їх варіантів", представленої на здобуття наукового ступеня

Дисертаційну роботу Пстрий Катерини Миколаївни "Топологізація та розширення груп, біциклічних напівгруп та їх варіантів" присвячено дослідженню топологізацій напівгруп, алгебраїчні властивості яких близькі до біциклічного моноїда, а також структури замикання таких напівгруп і груп у напівтопологічних і топологічних напівгрупах. Зокрема розглядаються розширена біциклічна напівгрупа, біциклічне розширення непорожньої трансляційної множини лінійно впорядкованої групи та варіанти біциклічного моноїда і розширеної біциклічної напівгрупи.

В математичній літературі питання про недискретну (гаусдорфову) топологізацію груп вперше було поставлено А. А. Марковим у 1945 р. Зауважимо, що Л. С. Понтрягін сформулював умови на базу одиниці групи для її недискретної групової топологізації. У 1980 р. О. Ю. Ольшанський побудував приклад нескінченної зліченної групи G такої, що кожна групова T_0-топологія на G є дискретною. Уперше таку нетопологізовну напівгрупу було знайдено К. Ебергартом і Дж. Селденом в 1969 р., та доведено, що кожна гаусдорфова напівгрупова топологія на біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$ є дискретна. М. Бертман і Т. Уест поширили результат Ебергарта-Селдена на випадок напівтопологічних напівгруп. А.Д. Тайманов побудував приклад нескінченної комутативної напівгрупи $\mathfrak{A}$, яка допускає лише дискретну гаусдорфову напівгрупову топологію, а також навів достатні умови на комутативну напівгрупу, щоб на ній існувала недискретна гаусдорфова напівгрупова топологія.

Ебергарт і Селден також довели, що непорожній наріст біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$ у топологічній напівгрупі S є ідеалом у його замиканні $\overline{\mathscr{C}(p,q)}$ в S. Аналогічні результати стосовно топологізації та замикання для напівгрупи порядкових ізоморфізмів між головними фільтрами скінченного степеня множини натуральних чисел $\mathbb{N}^n$ зі звичайним частковим порядком добутку отримано Гутіком і Мокрицьким. Однак, хоча на розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ існує лише дискретна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія, наріст напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ у топологічній напівгрупі S може і не бути ідеалом у її замиканні $\overline{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}}$ в S.

Зауважимо, що для багатьох біпростих напівгруп S, а таким є біциклічний моноїд, виконується таке твердження: кожна трансляційно неперервна гаусдорфова берівська (зокрема, локально компактна) топологія на S є дискретною. Графова інверсна напівгрупа $G(E)$ – це напівгрупа, побудована з орієнтованого графа E, коротко кажучи, елементи якої відповідають шляхам у графі E. Графові інверсні напівгрупи також є узагальненням поліциклічного моноїда, який ввели Ніва та Перо. Месьян, Мітчел, Морайне та Перес довели, якщо E – скінченний орієнтований граф, то кожна локально компактна гаусдорфова напівгрупова топологія на графовій інверсній напівгрупі $G(E)$ є дискретною. Оскільки кожна з напівгруп із вище наведених класів напівгруп містить біциклічний моноїд як піднапівгрупу, то природньо виникає питання: *за яких умов* (алгебраїчних чи топологічних) *на напівгрупу S напівгрупова* (або навіть *трансляційно неперервна*) *топологія на S є дискретною?* Бардила і Гутік довели, що аналогічне твердження виконується для графів, які містять одну вершину та нескінченну кількість петель, тобто для нескінченно породжених поліциклічних моноїдів. Зауважимо, що графові інверсні напівгрупи, на яких існує лише дискретна локально компактна напівгрупова топологія, описані С. Бардилою.

На перший погляд, дивна дихотомія для біциклічного моноїда з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0 = \mathscr{C}(p,q) \sqcup \{0\}$ доведена в праці Гутіка: кожна локально компактна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на $\mathscr{C}^0$ є або компактною, або дискретною. Ця дихотомія доведена С. Бардилою для локально-компактного λ-поліциклічного моноїда і для локально компактних напівтопологічних графових інверсних напівгруп.

Природно називати напівгрупи, які містять біциклічну напівгрупу, біциклічними розширеннями. Так, зокрема, таку назву мають конструкції біциклічних розширень $\mathscr{B}(G)$ та $\mathscr{B}^+(G)$ лінійно впорядкованих груп G та частково впорядкованих груп G. Дослідженням властивостей таких топологічних розширень присвячений ряд праць, зокрема замиканням біциклічних розширень в топологічних напівгрупах. Оскільки при замиканні біциклічних розширень у топологічних (напівтопологічних) напівгрупах наріст може бути ідеалом, то природно виникає задача про описання приєднання ідеала або нуля до таких напівгруп за певних умов на топологічний простір напівгрупи.

Аналогічна задача розв'язана К. Г. Гофманном про приєднання нуля до топологічної групи у випадку локально компактних топологічних напівгруп. У випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп ця задача залишається нерозв'язаною. Тому виникає природна задача: *описати приєднання нуля до дискретної групи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп*. Більш загально ця задача була сформульована Берглундом, задача 7: *What is the fine structure of the closure of a group?*

Інтерасоціативністю напівгрупи $(S, \cdot)$ називається напівгрупа $(S, *)$ така, що $a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * c$ і $a * (b \cdot c) = (a * b) \cdot c$ для всіх $a, b, c \in S$. Відомо, що кожна інтерасоціативність довільного моноїда визначається його варіантом, тобто для довільної інтерасоціативністі $(S, *)$ моноїда $(S, \cdot)$ існує елемент $c \in S$ такий, що $a * b = a \cdot c \cdot b$. Інтерасоціативності та варіанти різних класів напівгруп активно вивчалися останнім часом. Зокрема довільна інтерасоціативність біциклічного моноїда містить біциклічний моноїд як піднапівгрупу, більше того, дві інтерасоціативності біциклічного моноїда ізоморфні тоді і лише тоді, коли породжуються одним елементом. М. Хилинським доведено критерій ізоморфізму двох інтерасоціативностей поліциклічного моноїда, а О. Десятерик встановлено необхідні та достатні умови регулярності варіанта та ізоморфності двох варіантів для матричної напівгрупи Ріса з сендвіч матрицею над групою з нулем. Тому варіанти біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ природно розглядати як біциклічні розширення. Отже, постає задача про напівгрупову чи трансляційно неперервну топологізацію таких розширень і приєднання ідеала чи нуля до варіантів біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи у випадку локально компактних напівтопологічних напівгруп. Отже, тематика дисертаційної роботи є актуальною.

Тематика дослідження пов'язана з планами наукових досліджень кафедри алгебри, топології та основ математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми "Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці" (номер державної реєстрації 0116U001537).

Огляд змісту та основних результатів роботи. Дисертаційна робота складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу та п'яти основних розділів, висновків, списку використаних джерел і додатка.

У вступі обґрунтована актуальність дисертаційного дослідження, визначені мета і задачі, об'єкт і предмет дослідження.

У першому підрозділі розділу 1 подається огляд літератури, в якому коротко висвітлено історію розвитку теорії топологізації напівгруп та сформульовано основні задачі, розв'язку яких присвячена дана дисертаційна робота. У другому підрозділі першого розділу викладено відомі результати з теорії напівгруп та груп, які використовуються у дисертації.

Другий розділ присвячений вивченню трансляційно неперервних топологізацій та замикання варіантів біциклічного моноїда. Дисертантом отримано узагальнення результату Ебергарта-Селдена про напівгрупову топологізацію біциклічної напівгрупи та відповідне твердження Бертман-Веста для напівтопологічних напівгруп, а також узагальнення результату Гутіка про те, що кожна локально компактна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на біциклічному моноїді з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною. Теорема 2.2.3 описує приєднання компактного ідеалу до ненульового варіанта біциклічного моноїда у випадку локально компактної гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи та узагальнює відповідний результат для біциклічної напівгрупи.

Третій розділ присвячений дослідженню розширеної біциклічної напівгрупи та її варіантів. Тут доведено, що група автоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи ізоморфна адитивній групі цілих чисел (теорема 3.1.1), також доведено, що розширена біциклічна напівгрупа і кожен її варіант не є скінченно породженими (теореми 3.1.2 і 3.1.5). У цьому розділі описані ідемпотенти та відношення Гріна на варіанті розширеної біциклічної напівгрупи (твердження 3.2.2 і 3.2.3). Теорема 3.3.3 описує властивості напівтопологічного варіанта $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0,0}$.

Четвертий розділ присвячений вивченню локально компактних трансляційно неперервних та напівгрупових топологій на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем. У цьому розділі показано, що аналог теореми Гутіка про те, що кожна локально компактна трансляційно неперервна топологія на біциклічному моноїді з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною, не виконується для розширеної біциклічної напівгрупи з приєднаним нулем. А саме доведено, що кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем є дискретною (наслідок 4.1.3), однак на ній існує континуум різних гаусдорфових локально компактних трансляційно неперервних топологій (теорема 4.1.3). Також на розширеній біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем побудовано єдину мінімальну інверсну трансляційно неперервну та єдину мінімальну інверсну напівгрупову топології.

У п'ятому розділі досліджується топологізація біциклічного розширення лінійно впорядкованих груп. Теореми 5.2.1 і 5.2.2 узагальнюють результати Бертман і Веста та Фігель і Гутіка, які отримані для біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи.

Шостий розділ присвячений дослідженню алгебраїчних умов на групу, при виконанні яких локально компактна трансляційно неперервна топологія на дискретній групі з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною.

Введено електорально гнучкі та електорально стійкі групи та вивчаються їхні властивості. Зокрема, доведено, що кожна група, яка містить нескінченну циклічну підгрупу нескінченного індексу та кожна незліченна комутативна група є електорально гнучкими, а також, що кожна зліченна локально скінченна група є електорально стійкою.

Основним результатом розділу є таке твердження-дихотомія (теорема 6.1.3): *якщо G — дискретна електорально гнучка нескінченна група, то кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.* На довільній нескінченній віртуально циклічній групі (а отже, на електорально стійкій групі) з приєднаним нулем побудовано недискретну некомпактну локально компактну трансляційно неперервну топологію, яка індукує на G дискретну топологію.

Достовірність результатів підтверджується тим, що вони опубліковані в фахових журналах і були оприлюднені на багатьох наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах. Для їх доведень використовуються сучасні методи топологічної алгебри, теорії топологічних напівгруп, алгебраїчної теорії напівгруп і загальної топології.

Основні результати дисертації опубліковані в 10 працях: 4 статті, які опубліковані у наукових фахових виданнях України, 1 стаття, яка опублікована у науковому виданні, віднесеному до третього квартиля (Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank, 4 тези у матеріалах міжнародних конференцій та 1 теза у матеріалах літньої школи.

Наукова новизна та практичне значення одержаних результатів. Усі отримані в дисертації результати є новими. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть знайти застосування як у топологічній алгебрі, так і в інших розділах математики.

Автореферат повністю та правильно відображає зміст дисертації.

Зауваження:

1. Хоча вступний розділ містить практично всю довідкову і оглядову інформацію, деякі позначення залишились неописаними, наприклад, S^1 (хоча це й загальновідоме) та $\mathbf{d}(a)$, $\mathbf{r}(a)$ тощо на сторінці 24.
2. На сторінці 34 означення (напів-)топологічної напівгрупи виглядає як твердження.
3. Твердження 3.3.2 (стор. 63) не має самостійної цінності, крім пункту (ii), оскільки його зміст коротко підсумовано у наступній Теоремі 3.3.3. Варто було б розбити його на послідовність лем, тим більше, що пункти (iii) і (iv) "перекривають" (i).
4. У пункті (vi) Твердження 5.1.3 (сторінка 94) (c, d) повинне бути (c, b).
5. Дисертантка вживає окремі нумерації для різних елементів змісту (теорем, тверджень, лем, означень). Коли одночасно існують Лема 3.1.1, Теорема 3.1.1, Питання 3.1.1 та Наслідок 3.1.1, пошук потрібного перетворюється у квест.
6. Є деякі стилістичні недоліки, наприклад, "З напівгрупової операції ... випливає..." (сторінка 37) та дуже незначна кількість описок.

Наведені зауваження не впливають на позитивну оцінку дисертаційної роботи та не зменшують її теоретичне значення. Опонентові не вдалось знайти жодних суттєвих математичних помилок, які ставили б під сумнів обґрунтованість результатів дисертації.

Робота викладена послідовно і коректно. Дисертація написана українською мовою у відповідності до вимог МОН України про мову та стиль написання дисертацій. Форма викладення матеріалу відповідає прийнятій у науковій літературі. Тематика дисертаційної роботи повністю відповідає паспорту спеціальності 01.01.04 — геометрія і топологія. Враховуючи все вищесказане, вважаю, що дисертаційна робота "Топологізація та розширення груп, біциклічних напівгруп та їх варіантів" є цілісною науковою працею, що задовольняє всі вимоги діючого "Порядку присудження наукових ступенів", постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013 р. (зі змінами, внесенеми постановою КМУ №607 від 15.07.2020 р.) щодо кандидатських дисертацій, і її автор Пстрий Катерина Миколаївна заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 — геометрія і топологія.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри алгебри та геометрії
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника

Никифорчин О. Р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»
і.к. 02125266

ПІДПИС О. Р. Никифорчина ЗАВІРЯЮ
Начальник відділу кадрів
Державного вищого навчального закладу «Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника»
код 02125266
21 . 04 20 21 р.