

Анотація

Скіра І. В. Задачі без початкових умов для еволюційних функціонально-диференціальних рівнянь та варіаційних нерівностей. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – «Математика» (Галузь знань 11 – «Математика та статистика»). – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2021.

У сучасній фізиці, біології, економіці досліджуються динамічні процеси, початок яких настільки віддалений від актуального моменту, що початкові дані практично не впливають на їх проходження в цей момент. Будь-який такий процес, як правило, моделюється еволюційним диференціальним рівнянням з частинними похідними, крайовими умовами та наявністю чи відсутністю обмежень на поведінку розв'язку, коли часова змінна прямує до початкового моменту, який вважається рівним $-\infty$. Такого роду задачу називають задачею без початкових умов або, іншими словами, задачею Фур'є для відповідних рівнянь. Зауважимо, що задачі Фур'є для еволюційних рівнянь тісно пов'язана із задачами на знаходження періодичних та майже періодичних розв'язків цих рівнянь.

Метою роботи є дослідження умов існування та єдиності задач Фур'є для деяких класів функціонально-диференціальних еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей.

Об'єктом дослідження є задачі без початкових умов для анізотропних еліптично-параболічних функціонально-диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності, нелінійних інтегро-диференціальних еліптично-параболічних систем, а також нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами.

Предметом дослідження є питання існування та єдиності задач без поча-

ткових умов для слабо і сильно нелінійних еліптично-параболічних рівнянь з функціоналами, слабо і сильно нелінійних еліптично-параболічних систем з функціоналами, а також слабо нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей.

У роботі використовуються методи та ідеї теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, зокрема, методи Гальоркіна, монотонності і компактності, принцип стискуючих відображень та інші.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та двох додатків. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідною темою, особистий внесок здобувача та апробацію і публікації основних результатів дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури за тематикою дисертації. У підрозділі 1.1 розглянуто результати, що стосуються задач без початкових умов для еволюційних рівнянь та систем рівнянь. Підрозділ 1.2 присвячений огляду результатів стосовно задач без початкових умов для абстрактних рівнянь та варіаційних нерівностей. У підрозділі 1.3 наведено опис результатів дисертації.

У розділі 2 розглянуто задачу Фур'є для параболічних і еліптично-параболічних слабо та сильно нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків. Області задання рівнянь є циліндричними з паралельними часовій осі твірними і необмеженими знизу за часовою та обмеженими за просторовими змінними. Показники нелінійності розглянутих у підрозділах 2.1 – 2.3 рівнянь є змінними, а у підрозділі 2.4 – сталий.

У підрозділі 2.1 доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі Фур'є для параболічних сильно нелінійних диференціальних рівнянь без будь-яких обмежень на поведінку розв'язку на нескінченності. Отримано оцінки цих розв'язків. Виділено клас анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків, для яких встановлено існування обмежених, періодичних та майже періодичних узагальнених розв'язків цих рівнянь. Параболічні сильно нелінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними показниками нелінійності розглянуто вперше.

У підрозділі 2.2 отримано умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних рівнянь з монотонними просторовими частинами при відсутності обмежень на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. При додаткових припущеннях на коефіцієнти та праві частини рівнянь доведено існування обмежених, періодичних та майже періодичних узагальнених розв'язків цих рівнянь. Задача Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних рівнянь зі змінними показниками нелінійності раніше не досліджувалася.

У підрозділі 2.3 доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, а також досліджено питання існування періодичних та майже періодичних розв'язків задачі без початкових умов для таких рівнянь. Раніше задача Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності не вивчалася.

У підрозділі 2.4 знайдено достатні умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних слабо нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь при деяких обмеженнях на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Задача Фур'є для еліптично-параболічних слабо нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь раніше не розглядалися.

У розділі 3 досліджено задачу Фур'є для еліптично-параболічних систем рівнянь при різних типах нелінійності. Області задання рівнянь є циліндричними з паралельними часовій осі твірними і необмеженими знизу за часовою та обмеженими за просторовими змінними. У підрозділі 3.1 вивчено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних систем сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. При цьому не накладаються обмеження на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. У підрозділі 3.2 доведено існування та єдиність розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних систем слабо нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь при наявності обмежень на зростання вхідних да-

них та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Задача Фур'є для еліптично-параболічних систем сильно та слабо нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку раніше не досліджувалися.

У розділі 4 вивчено задачу без початкових умов для слабо нелінійних еволюційних включень з функціоналами. Отримано достатні умови існування та єдиності розв'язків такої задачі. Задача без початкових умов для слабо нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей раніше не вивчалася.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними та застосовані при дослідженні задач газота гідродинаміки, теорії біологічних популяцій, оптимального керування, хімічної кінетики, тощо.

Ключові слова: параболічне рівняння, еволюційне рівняння, еліптично-параболічне рівняння, інтегро-диференціальне рівняння, еволюційна варіаційна нерівність, варіаційна нерівність з функціоналом, задача без початкових умов, задача Фур'є.

Список публікацій здобувача за тематикою дисертації

1. *Бокало М.М., Притула Я. Г., Скіра І. В.* Про розв'язки анізотропних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності в необмежених за часовою змінною областях. Вісник Національного Університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. 2014; 807: 7–16.

2. *Бокало М.М., Скіра І. В.* Мішана задача для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України . 2017; 14(3): 21–46.

3. *Vokalo M.M., Skira I. V.* Almost Periodic Solutions for Nonlinear Integro-Differential Elliptic-Parabolic Equations with Variable Exponents of Nonlinearity. International Journal of Evolution Equations. 2017; 10(3-4): 297–314.

4. *Бокало М.М., Скіра І. В.* Задача Фур'є для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних систем зі змінними показниками нелінійності. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2017; 83: 109–122.

5. *Bokalo M.M., Skira I. V.* Solutions for higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains. *New Trends in Mathematical Sciences*. 2018; 6(2): 29–42.

6. *Бокало М.М., Скіра І. В.* Коректність задачі Фур'є для слабо нелінійних еліптично-параболічних інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків. *Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична*. 2018; 85: 91–116.

7. *Bokalo M.M., Skira I. V.* The Fourier problem for weakly nonlinear integro-differential elliptic-parabolic systems. *Matematychni Studii*. 2019; 51(1): 59–73.

8. *Bokalo M.M., Skira I. V.* Fourier problem for weakly nonlinear evolution inclusions with functionals. *Journal of Optimization, Differential Equations, and their Applications*. 2019; 27(1): 3–22.

9. *Bokalo M.M., Skira I. V.* On solutions of higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. *Int. V. Scorobohatko mathematical conference: Abstracts of Reports, August 25-28, 2015, Drohobych, Ukraine*. P. 153.

10. *Bokalo M.M., Skira I. V.* Solutions for high order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains // *Int. Conf. on differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky. September 20-24, 2016, Lviv, Ukraine*. P. 109-110.

11. *Skira I. V.* Initial boundary value problem for higher-order anisotropic integral-differential elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity // *5th Int. Conf. of young scientists on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. 9-11 November, 2016, Kyiv, Ukraine*. P. 132-133.

12. *Skira I. V.* The Fourier problem for higher-order anisotropic integro-differential elliptic-parabolic equations // *Int. scientific conf. "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics. September 17-19, 2018, Chernivtsi, Ukraine*. P.35.

13. *Скіра І. В.* Задача Фур'є для анізотропних інтегро-диференціальних еліптично-параболічних систем зі змінними показниками нелінійності // *VI всеукраїнська математична конференція імені Б. В. Васишина "Нелінійні*

проблеми аналізу". 26-28 вересня 2018 року, Івано-Франківськ - Микуличин. С. 53-55.

14. *Skira I. V.* Fourier Problem for Weakly Nonlinear Evolution Inclusions with Functionals // 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications. June 18-20, 2019, Vinnytsia, Ukraine. P.69-71.

15. *Skira I. V.* Problem without initial condition for strongly nonlinear variational inequalities // Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування : Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана. 16-19 вересня 2020 року, Чернівці. С. 74-75.

16. *Skira I. V.* Fourier problem for nonlinear evolution subdifferential inclusions //XI International Skorobohatko mathematical conference. October 26 – 30, 2020, Lviv, Ukraine. P. 109.

Abstract

Skira I. V. Problem without initial condition for evolution functional-differential equations and variational inequalities. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 – "Mathematics" (field of studies 11 – "Mathematics and statistics"). – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2021.

In modern physics, biology, economics there are studied dynamic processes, the beginning of which is so far from the actual moment that the initial conditions do not affect on them in the actual time moment. Any such process is usually modeled by an evolutionary differential equation with partial derivatives, boundary conditions, and the presence or absence of constraints on the behavior of the solution, when the time variable converges to the initial moment, which is considered equal to $-\infty$. Such problem is called a problem without initial conditions or, in other words, a Fourier problem for the corresponding equations.

Note that the Fourier problems for evolution equations are closely related to the problems for finding periodic and almost periodic solutions of these equations.

The purpose of the work is to study the conditions of existence and uniqueness of Fourier problems for some classes of functional-differential evolutionary equations and variational inequalities.

Object of research are problems without initial conditions for anisotropic elliptic-parabolic functional-differential equations with variable exponents of nonlinearity, nonlinear integro-differential elliptic-parabolic systems, and also nonlinear evolutionary variational inequalities with functionals.

The subject of the study is the question of the existence and uniqueness of problems without initial conditions for weakly and strongly nonlinear elliptic-parabolic levels with functionals, weakly and strongly nonlinear elliptic-parabolic

systems with functionals, and weakly nonlinear evolutional variational inequalities.

In the paper there are used methods and ideas of the theory of partial differential equations, functional analysis, in particular, Galorkin's method, methods of monotonicity and compactness, the principle of contraction mapping and others.

The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusions and the references. The introduction substantiates the relevance of research topic. The purpose, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides an literature review concerning on the topic of the thesis. In Section 1.1 we considered the results related to the problems without initial conditions for the evolution equations and system of equations. In Section 1.2 publications and results concerning the problems without initial conditions for abstract equations and evolution variational inequalities are examined. Section 1.3 is an overview of the results of this work.

In Chapter 2 we consider the Fourier problem for higher-order parabolic and elliptic-parabolic weakly and strongly nonlinear differential and integro-differential equations. These equations are defined on cylindrical domains which are Cartesian products of unbounded from the bottom time axis and bounded space domains. The exponents of nonlinearity of the equations considered in subsections 2.1 - 2.3 are variable, and in subsection 2.4 are constant.

Section 2.1 proves the existence and uniqueness of weak solutions of the Fourier problem for parabolic strongly nonlinear differential equations without any restrictions on the behavior of the solution at infinity.

Estimates of these solutions are obtained. A class of anisotropic parabolic equations of higher orders is distinguished, for which the existence of bounded, periodic, and almost periodic weak solutions of these equations is established. Higher-order parabolic strongly nonlinear differential equations of with variable exponents of nonlinearity are considered for the first time.

In Section 2.2 the condition for the existence and for the uniqueness of weak solution of the Fourier problem for elliptic-parabolic strongly nonlinear differential equations monotone spatial parts without any restrictions on the growth of input

data and on the behavior of the solutions at infinity are found. With additional assumptions on the coefficients and the right-hand side of the equations the existence of bounded, periodic and almost periodic weak solutions of these equations is proved. The Fourier problem for elliptic-parabolic strongly nonlinear equations with variable exponents of nonlinearity has not been studied before.

Subsection 2.3 proves the existence and uniqueness of weak solutions of the Fourier problem for elliptic-parabolic strongly nonlinear integro-differential equations, and also investigates the existence of periodic and almost periodic solutions of the problem without initial conditions for such equations. Previously, the Fourier problem for higher-order elliptic-parabolic strongly nonlinear integral-differential equations with variable nonlinearities was not studied.

In Section 2.4 there are found sufficient conditions for the existence and uniqueness of weak solutions of the Fourier problem for elliptic-parabolic weakly nonlinear integro-differential equations with some restrictions on the growth of input data and the behavior of solutions when the time variable converges to $-\infty$. The Fourier problem for elliptic-parabolic weakly nonlinear integro-differential equations has not been considered before.

Chapter 3 is devoted the Fourier problem for elliptic-parabolic systems of equations for different types of nonlinearity. The domains of the equations are cylindrical with generators parallel to the time axis and unbounded from the bottom in time and bounded by the spatial variables.

In Section 3.1 there are studied the conditions for the existence and uniqueness of weak solutions of the Fourier problem for strongly nonlinear elliptic-parabolic systems integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity. At the same time, there are no restrictions on the growth of input data and the behavior of solutions when the time variable converges to $-\infty$. Section 3.2 proves the existence and uniqueness of solutions of the Fourier problem for weakly nonlinear elliptic-parabolic systems integro-differential equations in the presence of constraints on the growth of input data and the behavior of solutions when the time variable converges to $-\infty$. The Fourier problem for elliptic-parabolic systems of strongly and weakly nonlinear second-order integro-differential equations has not been studied before.

Chapter 4 deals the problem without initial conditions for weakly nonlinear

evolution inclusions with functionals. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of such a problem are obtained. The problem without initial conditions for weakly nonlinear evolutionary variational inequalities has not been studied before.

The practical significance of the results. The results of the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the theory of partial differential equations and applied in problems of gas- and hydrodynamics, the theory of biological populations, optimal control, chemical kinetics and more.

Keywords: parabolic equation, evolution equation, elliptic-parabolic equation, integro-differential equation, elliptic-parabolic variational inequality, evolutionary variational inequality, variational inequality with functionals, problem without initial conditions, the Fourier problem.

Publications list of the applicant.

1. *Bokalo M.M., Prytula Y. G., Skira I. V.* On solutions of anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in time unbounded domains. Journal of National University "Lvivska Polayehnika". Physical & mathematical sciences. 2014; 807: 7–16.

2. *Bokalo M.M., Skira I. V.* Initial-boundary Problem for Integro-Differential Elliptic-Parabolic Equations with Variable Exponents of Nonlinearity. Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine. 2017; 14(3): 21–46.

3. *Bokalo M.M., Skira I. V.* Almost Periodic Solutions for Nonlinear Integro-Differential Elliptic-Parabolic Equations with Variable Exponents of Nonlinearity. International Journal of Evolution Equations. 2017; 10(3-4): 297–314.

4. *Bokalo M.M., Skira I. V.* The Fourier problem for integro-differential elliptic-parabolic systems with variable exponents of nonlinearity. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017; 83: 109–122.

5. *Bokalo M.M., Skira I. V.* Solutions for higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains. New Trends in Mathematical Sciences. 2018; 6(2): 29–42.

6. *Bokalo M.M., Skira I. V.* Well-posedness of the Fourier problem for higher-order weakly nonlinear integro-differential elliptic-parabolic equations. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018; 85: 91–116.

7. *Bokalo M.M., Skira I. V.* The Fourier problem for weakly nonlinear integro-differential elliptic-parabolic systems. *Matematychni Studii*. 2019; 51(1): 59–73.
8. *Bokalo M.M., Skira I. V.* Fourier problem for weakly nonlinear evolution inclusions with functionals. *Journal of Optimization, Differential Equations, and their Applications*. 2019; 27(1): 3–22.
9. *Bokalo M.M., Skira I. V.* On solutions of higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity // Int. V. Scorobhatko mathematical conference: Abstracts of Reports, August 25-28, 2015, Drohobych, Ukraine. P. 153.
10. *Bokalo M.M., Skira I. V.* Solutions for high order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains // Int. Conf. on differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky. September 20-24, 2016, Lviv, Ukraine. P. 109-110.
11. *Skira I. V.* Initial boundary value problem for higher-order anisotropic integral-differential elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity // 5th Int. Conf. of young scientists on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. 9-11 November, 2016, Kyiv, Ukraine. P. 132-133.
12. *Skira I. V.* The Fourier problem for higher-order anisotropic integro-differential elliptic-parabolic equations // Int. scientific conf. "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics. September 17-19, 2018, Chernivtsi, Ukraine. P.35.
13. *Skira I. V.* Fourier Problem for anisotropic integro-differential elliptic-parabolic systems with variable exponents of nonlinearity // VI All-Ukrainian Mathematical Conference named after B.V. Vasylyshyn "Nonlinear Problems of Analysis". September 26-28, 2018, Ivano-Frankivsk - Mykulychyn, Ukraine. P. 53-55.
14. *Skira I. V.* Fourier Problem for Weakly Nonlinear Evolution Inclusions with Functionals // 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications. June 18-20, 2019, Vinnytsia, Ukraine, P.69-71.
15. *Skira I. V.* Problem without initial condition for strongly nonlinear vari-

ational inequalities // International scientific conference “Modern problems of Differential Equations and their application”, dedicated to the 100th anniversary of the professor S.D. Eidelman. September 16-19, 2020, Chernivtsi. P. 74-75.

16. *Skira I. V.* Fourier problem for nonlinear evolution subdifferential inclusions // XI International Skorobohatko mathematical conference. October 26 – 30, 2020, Lviv, Ukraine. P. 109.