ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СКІРА ІРИНА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 517.95

ДИСЕРТАЦІЯ

ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

111 – Математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ________________________

Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор
Бокало Микола Михайлович

Львів 2021

Анотація

Скіра І. В. Задачі без початкових умов для еволюційних функціонально-диференціальних рівнянь та варіаційних нерівностей. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – «Математика» (Галузь знань 11 – «Математика та статистика»). – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2021.

У сучасній фізиці, біології, економіці досліджують описувані диференціальними рівняннями динамічні процеси, початок яких настільки віддалений від актуального моменту, що початкові дані практично не впливають на їх проходження в цей момент. Будь-який такий процес, як правило, моделюється еволюційним диференціальним рівнянням з частинними похідними, крайовими умовами та наявністю чи відсутністю обмежень на поведінку розв'язку, коли часова змінна прямує до початкового моменту, який вважається рівним $-\infty$. Такого роду задачу називають задачею без початкових умов або, іншими словами, задачею Фур'є для відповідних рівнянь. Зауважимо, що задача Фур'є для еволюційних рівнянь тісно пов'язана із задачами на знаходження періодичних та майже періодичних розв'язків цих рівнянь.

Метою роботи є дослідження умов існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей з деяких раніше не вивчених класів.

Об'єктом дослідження є задачі без початкових умов для параболічних і еліптично-параболічних нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь і їх систем, а також нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами.

Предметом дослідження є питання існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі без початкових умов для параболічних і еліптично-парабо-

лічних нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем, а також нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами.

У роботі використовуються методи та ідеї теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, зокрема, методи Гальоркіна, монотонності і компактності, принцип стискуючих відображень та інші.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та двох додатків. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідною темою, особистий внесок здобувача та апробацію і публікації основних результатів дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури за тематикою дисертації та опис основних результатів дисертації. У підрозділі 1.1 розглянуто відомі результати, що стосуються задачі Фур'є для параболічних та еліптично-параболічних рівнянь і систем. Підрозділ 1.2 присвячений огляду результатів стосовно задачі без початкових умов для операторно-диференціальних рівнянь та варіаційних нерівностей. У підрозділі 1.3 наведено опис результатів дисертації.

Розділ 2 присвячений задачі Фур'є для параболічних і еліптично-параболічних слабко та сильно нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків. Області задання рівнянь є циліндричними з паралельними часовій осі твірними і необеженими знизу за часовою та обмеженими за просторовими змінними. Показники нелінійності розглянутих у підрозділах 2.1 – 2.3 рівнянь є змінними, а у підрозділі 2.4 – сталий.

У підрозділі 2.1 доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі Фур'є для параболічних сильно нелінійних диференціальних рівнянь без будь-яких обмежень на поведінку розв'язку на нескінченності. Отримано оцінки цих розв'язків. Виділено клас анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків, для яких встановлено існування обмежених, періодичних та майже періодичних узагальнених розв'язків цих рівнянь. Параболічні сильно нелінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними показниками нелінійності розглянуто вперше.

У підрозділі 2.2 отримано умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних рівнянь з монотонними просторовими частинами при відсутності обмежень на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. При додаткових припущеннях на коефіцієнти та праві частини рівнянь доведено існування обмежених, періодичних та майже періодичних узагальнених розв'язків цих рівнянь. Задача Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних рівнянь зі змінними показниками нелінійності раніше не досліджувалася.

У підрозділі 2.3 доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, а також досліджено питання існування періодичних та майже періодичних розв'язків задачі без початкових умов для таких рівнянь. Раніше задача Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності не вивчалася.

У підрозділі 2.4 знайдено достатні умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь при деяких обмеженнях на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Задача Фур'є для еліптично-параболічних слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь раніше не розглядалися.

У розділі 3 досліджено задачу Фур'є для еліптично-параболічних систем при різних типах нелінійності. Області задання рівнянь систем є циліндричними з паралельними часовій осі твірними і необеженими знизу за часовою та обмеженими за просторовими змінними. У підрозділі 3.1 вивчено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних систем сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. При цьому не накладаються обмеження на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. У підрозділі 3.2 доведено існування та єдиність розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних систем слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь при наявності обмежень на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Задача Фур'є для еліптично-параболічних систем сильно та слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку раніше не досліджувалися.

У розділі 4 вивчено задачу без початкових умов для слабко нелінійних еволюційних включень з функціоналами. Отримано достатні умови існування та єдиності розв'язків такої задачі. Задача без початкових умов для слабко нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами раніше не вивчалася.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними та застосовані при дослідженні задач газо- та гідродинаміки, теорії біологічних популяцій, оптимального керування, хімічної кінетики, тощо.

Ключові слова: еволюційне рівняння, параболічне рівняння, еліптично-параболічне рівняння, інтегро-диференціальне рівняння, еволюційна варіаційна нерівність, варіаційна нерівність з функціоналом, задача без початкових умов, задача Фур'є.

Список публікацій здобувача за тематикою дисертації

1. Бокало М.М., Притула Я. Г., Скіра І. В.: Про розв'язки анізотропних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності в необмежених за часовою змінною областях. Вісник Національного Університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. **807**, 7-16 (2014).

2. Бокало М.М., Скіра І. В.: Мішана задача для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України . **14**(3), 21-46 (2017).

3. Bokalo M.M., Skira I. V.: Almost Periodic Solutions for Nonlinear Integro-Differential Elliptic-Parabolic Equations with Variable Exponents of Nonlinearty. International Journal of Evolution Equations. **10**(3-4), 297-314 (2017).

4. Бокало М.М., Скіра І. В.: Задача Фур'є для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних систем зі змінними показниками нелінійності. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. **83**, 109-122 (2017).

5. Bokalo M., Skira I.: Solutions for higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains. New Trends in Mathematical Sciences. **6**(2), 29-42 (2018).

6. Бокало М., Скіра І.: Коректність задачі Фур'є для слабко нелінійних еліптично-параболіних інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. **85**, 91-106 (2018).

7. Bokalo M., Skira I.: The Fourier problem for weakly nonlinear integro-differential eliptic-parabolic systems. Matematychni Studii. **51**(1), 59-73 (2019).

8. Bokalo M., Skira I.: Fourier problem for weakly nonlinear evolution inclusions with functionals. Journal of Optimization, Differential Equations, and their Applications. **27**(1), 3-22 (2019).

9. Bokalo M.M., Skira I. V.: On solutions of higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. Int. V. Scorobohatko mathematical conference: Abstracts of Reports, Drohobych, Ukraine, 25-28 August 2015, P. 153.

10. Bokalo M.M., Skira I. V.: Solutions for high order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains. Int. Conf. on differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, Lviv, Ukraine, 20-24 September 2016, P. 109-110.

11. Skira I. V.: Initial boundary value problem for higher-order anisotropic integral-differential elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. 5th Int. Conf. of young scientists on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, Kyiv, Ukraine, 9-11 November 2016, P. 132-133.

12. Skira I. V.: The Fourier problem for higher-order anisotropic integro-differential elliptic-parabolic equations. Int. scientific conf. "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Chernivtsi, Ukraine, 17-19 September 2018, P.35.

13. Скіра І. В.: Задача Фур'є для анізотропних інтегро-диференціальних еліптично-параболічних систем зі змінними показниками нелінійності. VI всеукраїнська математична конференція імені Б. В. Василишина "Нелінійні про-

блеми аналізу Івано-Франківськ - Микуличин, 26-28 вересня 2018 року, С. 53-55.

14. Skira I. V.: Fourier Problem for Weakly Nonlinear Evolution Inclusions with Functionals. 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications. Vinnytsia, Ukraine, 18-20 June 2019, P.69-71.

15. Skira I. V.: Problem without initial condition for strongly nonlinear variational inequalities. Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування : Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана, Чернівці, 16-19 вересня 2020 року, С. 74-75.

16. Skira I. V.: Fourier problem for nonlinear evolution subdifferential inclusions. XI International Skorobohatko mathematical conference, Lviv, Ukraine, 26 – 30 October 2020, P. 109.

Abstract

Skira I. V. Problem without initial condition for evolution functional-differential equations and variational inequalities. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 – "Mathematics"(field of studies 11 – "Mathematics and statistics"). – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2021.

In modern physics, biology, economics there are studied dynamic processes, the beginning of which is so far from the actual moment that the initial conditions do not affect on them in the actual time moment. Any such process is usually modeled by an evolutionary differential equation with partial derivatives, boundary conditions, and the presence or absence of constraints on the behavior of the solution, when the time variable converges to the initial moment, which is considered equal to $-\infty$. Such problem is called a problem without initial conditions or, in other words, a Fourier problem for the corresponding equations.

Note that the Fourier problems for evolution equations are closely related to the problems for finding periodic and almost periodic solutions of these equations.

The purpose of the work is to study the conditions of existence and uniqueness of weak solutions of the problems without initial conditions for evolutional equations and variational inequalities from some classes not studied to date.

Object of research are problems without initial conditions for parabolic and elliptic-parabolic nonlinear differential and integro-differential equations and system of these equation, and also nonlinear evolutional variational inequalities with functionals.

The subject of the study is the question of the existence and uniqueness of solutions of the problems without initial conditions for parabolic and elliptic-parabolic nonlinear differential and integro-differential equations and system of

these equation, and also nonlinear evolutional variational inequalities with functionals.

In the paper there are used methods and ideas of the theory of partial differential equations, functional analysis, in particular, Galorkin's method, methods of monotonicity and compactness, the principle of contraction mapping and others.

The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusions and the references. The introduction substantiates the relevance of research topic. The purpose, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides an literature review concerning on the topic of the thesis and an overview of the main results of this work. In Section 1.1 we considered the known results related to the problems without initial conditions for parabolic and elliptic-parabolic equations and system of equations. In Section 1.2 publications and results concerning the problems without initial conditions for functional-differential equations and evolution variational inequalities are examined. Section 1.3 is an overview of the results of this work.

In Chapter 2 we consider the Fourier problem for higher-order parabolic and elliptic-parabolic weakly and strongly nonlinear differential and integro-differential equations. These equations are defined on cylindrical domains which are Cartesian products of unbounded from the bottom time axis and bounded space domains. The exponents of nonlinearity of the equations considered in subsections 2.1 - 2.3 are variable, and in subsection 2.4 are constant.

Section 2.1 proves the existence and uniqueness of weak solutions of the Fourier problem for parabolic strongly nonlinear differential equations without any restrictions on the behavior of the solution at infinity.

Estimates of these solutions are obtained. A class of anisotropic parabolic equations of higher orders is distinguished, for which the existence of bounded, periodic, and almost periodic weak solutions of these equations is established. Higher-order parabolic strongly nonlinear differential equations of with variable exponents of nonlinearity are considered for the first time.

In Section 2.2 the condition for the existence and for the uniqueness of weak solution of the Fourier problem for elliptic-parabolic strongly nonlinear differential equations monotone spatial parts without any restrictions on the growth of input data and on the behavior of the solutions at infinity are found. With additional assumptions on the coefficients and the right-hand side of the equations the existence of bounded, periodic and almost periodic weak solutions of these equations is proved. The Fourier problem for elliptic-parabolic strongly nonlinear equations with variable exponents of nonlinearity has not been studied before.

Subsection 2.3 proves the existence and uniqueness of weak solutions of the Fourier problem for elliptic-parabolic strongly nonlinear integro-differential equations, and also investigates the existence of periodic and almost periodic solutions of the problem without initial conditions for such equations. Previously, the Fourier problem for higher-order elliptic-parabolic strongly nonlinear integral-differential equations with variable nonlinearities was not studied.

In Section 2.4 there are found sufficient conditions for the existence and uniqueness of weak solutions of the Fourier problem for elliptic-parabolic weakly nonlinear integro-differential equations with some restrictions on the growth of input data and the behavior of solutions when the time variable is converges to $-\infty$. The Fourier problem for elliptic-parabolic weakly nonlinear integro-differential equations has not been considered before.

Chapter 3 is devoted the Fourier problem for elliptic-parabolic systems of equations for different types of nonlinearity. The domains of the equations are cylindrical with generators parallel to the time axis and unbounded from the bottom in time and bounded by the spatial variables.

In Section 3.1 there are studied the conditions for the existence and uniqueness of weak solutions of the Fourier problem for strongly nonlinear elliptic-parabolic systems integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity. At the same time, there are no restrictions on the growth of input data and the behavior of solutions when the time variable converges to $-\infty$. Section 3.2 proves the existence and uniqueness of solutions of the Fourier problem for weakly nonlinear elliptic-parabolic systems integro-differential equations in the presence of constraints on the growth of input data and the behavior of solutions when the time variable converges to $-\infty$. The Fourier problem for elliptic-parabolic systems of strongly and weakly nonlinear second-order integro-differential equations has not been studied before.

Chapter 4 deals the problem without initial conditions for weakly nonlinear evolution inclusions with functionals. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of such a problem are obtained. The problem without initial conditions for weakly nonlinear evolutionary variational inequalities has not been studied before.

The practical significance of the results. The results of the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the theory of partial differential equations and applied in problems of gas- and hydrodynamics, the theory of biological populations, optimal control, chemical kinetics and more.

Keywords: parabolic equation, evolution equation, elliptic-parabolic equation, integro-differential equation, elliptic-parabolic variational inequality, evolutionary variational inequality, variational inequality with functionals, problem without initial conditions, the Fourier problem.

Publications list of the applicant.

1. Bokalo M.M., Prytula Y. G., Skira I. V.: On solutions of anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in time unbounded domains. Journal of National University "Lvivska Polayechnika". Physical & mathematical sciences. **807**, 7-16 (2014).

2. Bokalo M.M., Skira I. V.: Initial-boudary Problem for Integro-Differential Elliptic-Parabolic Equations with Variable Exponents of Nonlinearty. Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine. **14**(3), 21-46 (2017).

3. Bokalo M.M., Skira I. V.: Almost Periodic Solutions for Nonlinear Integro-Differential Elliptic-Parabolic Equations with Variable Exponents of Nonlinearty. International Journal of Evolution Equations. **10**(3-4), 297-314 (2017).

4. Bokalo M.M., Skira I. V.: The Fourier problem for integro-differential elliptic-parabolic systems with variable exponents of nonlinearity. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. **83**, 109122 (2017).

5. Bokalo M., Skira I.: Solutions for higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains. New Trends in Mathematical Sciences. **6**(2), 29-42 (2018).

6. Bokalo M.M., Skira I. V.: Well-posedness of the Fourier problem for higher-order weakly nonlinear integro-differential elliptic-parabolic equations. Visnyk of

the Lviv Univ. Series Mech. Math. **85**, 91-106 (2018).

7. Bokalo M., Skira I.: The Fourier problem for weakly nonlinear integro-differential eliptic-parabolic systems. Matematychni Studii. **51**(1), 59-73 (2019).

8. Bokalo M., Skira I.: Fourier problem for weakly nonlinear evolution inclusions with functionals. Journal of Optimization, Differential Equations, and their Applications. **27**(1), 3-22 (2019).

9. Bokalo M.M., Skira I. V.: On solutions of higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. Int. V. Scorobohatko mathematical conference: Abstracts of Reports, Drohobych, Ukraine, 25-28 August 2015, P. 153.

10. Bokalo M.M., Skira I. V.: Solutions for high order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains. Int. Conf. on differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, Lviv, Ukraine, 20-24 September 2016, P. 109-110.

11. Skira I. V.: Initial boundary value problem for higher-order anisotropic integral-differential elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. 5th Int. Conf. of young scientists on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, Kyiv, Ukraine, 9-11 November 2016, P. 132-133.

12. Skira I. V.: The Fourier problem for higher-order anisotropic integro-differential elliptic-parabolic equations. Int. scientific conf. "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Chernivtsi, Ukraine, 17-19 September 2018, P.35.

13. Skira I. V.: Fourier Problem for anisotropic integro-differential elliptic-parabolic systems with variable exponents of nonlinearity. VI All-Ukrainian Mathematical Conference named after B.V. Vasylyshyn "Nonlinear Problems of Analysis Ivano-Frankivsk - Mykulychyn, Ukraine, 26-28 September 2018, P. 53-55.

14. Skira I. V.: Fourier Problem for Weakly Nonlinear Evolution Inclusions with Functionals. 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications. Vinnytsia, Ukraine, 18-20 June 2019, P.69-71.

15. Skira I. V.: Problem without initial condition for strongly nonlinear variational inequalities. International scientific conference “Modern problems of Di-

fferential Equations and their application", dedicated to the 100th anniversary of the professor S.D. Eidelman, Chernivtsi, 16-19 September 2020, P. 74-75.

16. Skira I. V.: Fourier problem for nonlinear evolution subdifferential inclusions. XI International Skorobohatko mathematical conference, Lviv, Ukraine, 26 – 30 October 2020, P. 109.

Зміст

Перелік умовних позначень

- n, m — довільні фіксовані натуральні числа;
- M — підмножина множини $\{0, 1, \ldots, \ m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$;
- N — кількість мультиіндексів розмірності n (впорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел), довжини яких ($|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$) є елементами множини M;
- $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, \ldots, x_n)$ дійсних чисел, з нормою $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$;
- $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \ldots, \xi_\alpha, \ldots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\big\{j : \alpha_j \neq \beta_j\big\}$);
- $\widehat{0}$ – мультиіндекс, складений з нулів;
- $M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ — лінійний простір, складений з матриць $\zeta = (\zeta_{kl}) = (\zeta_{kl} : k = \overline{1, N}, l = \overline{0, n})$ розмірності $N \times (n+1)$ з дійсними елементами і наділений нормою $|\zeta| = \big(\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=0}^{n} |\zeta_{ij}|^2\big)^{1/2}$.
- Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$;
- $\Gamma = \partial\Omega$ — межа Ω;
- $\mathrm{mes}_n\Omega$ – міра Лебега множини Ω;
- $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої до Γ нормалі;
- Γ_0, Γ_1 — частини поверхні Γ такі, що $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$ і $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$;
- $S := (-\infty, 0]$ або $\mathbb{R}$;
- $Q := \Omega \times S$;

- $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1, t_2)$;
- $\Sigma := \Gamma \times S$;
- $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S,\ \Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$;
- $C(F)$, де F — довільна множина в $\mathbb{R}^n$, — простір неперервних дійснозначних функцій на F;
- $C^k(\Omega)$, де $k \in \mathbb{N}$, — простір k-раз неперервно-диференційовних дійснозначних функцій на Ω;
- $C_c^\infty(\Omega)$ — лінійний простір, що складається з нескінченно диференційовних на Ω функцій, які мають компактний носій;
- $C^1(\mathbb{R})$ — простір неперервно-диференційовних функцій на $\mathbb{R}$;
- $C_c^1(a,b)$, де $-\infty \le a < b \le +\infty$, — лінійний простір неперервно диференційовних на (a,b) функцій з компактним носієм;
- $L^q_{\rm loc}(S)$, де $q \in [1,\infty]$, — простір дійснозначних функцій на S, звуження яких на будь-який відрізок $[t_1,t_2] \subset S$ належать простору $L^q\big(t_1,t_2\big)$;
- $L^q_{\rm loc}(\overline{F})$, де $q \in [1,\infty]$, F — необмежена вимірна множина в $\mathbb{R}^n$, — лінійний простір вимірних на F функцій таких, що їх звуження на довільну обмежену вимірну підмножину $F' \subset F$ належать простору $L^q(F')$;
- $L_{r(\cdot)}(G) := \{v \in L_1(G) \,\big|\, \rho_{G,r}(v) < \infty\}$, де $r \in L_\infty(\Omega)$, причому $r(x) \geqslant 1$, $\rho_{G,r}(v) := \int_\Omega |v(x)|^{r(x)}dx$, якщо $G = \Omega$, і $\rho_{G,r}(v) := \int_G |v(x,t)|^{r(x)}dxdt$, якщо $G = \Omega \times I$, де $I \subset \mathbb{R}$ — числовий проміжок, — узагальнений простір Лебега;
- $L_{r(\cdot),\rm loc}(\overline{F})$, де F — необмежена вимірна множина в $\mathbb{R}^k$, — лінійний простір вимірних на F функцій таких, що їх звуження на довільну обмежену вимірну підмножину $F' \subset F$ належать простору $L_{r(\cdot)}(F')$;
- $\nabla u := (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ — градієнт функції $u = u(x_1, \ldots, x_n)$;
- $H^m(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \,\big|\, D^\alpha v \in L^2(\Omega)\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, |\alpha| \le m\}$ – гільбертів простір Соболєва зі скалярним добутком

$$(v,w)_{H^m(\Omega)} := \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha v(x) D^\alpha w(x)\, dx;$$

- $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ — замикання простору $C_c^\infty(\Omega)$ в $H^m(\Omega)$;
- $W^m_{p(\cdot)}(\Omega) := \{v \in L_1(\Omega) \,\big|\, D^\alpha v \in L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega) \ \forall \alpha,\ |\alpha| \in M\}$, де $p(x) = (p_\alpha(x) : |\alpha| \in M)$, $x \in \Omega$, – впорядкований набір вимірних на Ω функцій $p_\alpha \geqslant 1$, $|\alpha| \in M$, — узагальнений анізотропний простір Соболєва;
- $\overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$ — замикання простору $C_c^\infty(\Omega)$ в $W^m_{p(\cdot)}(\Omega)$;
- $H_b(\Omega)$, де $b : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна обмежена функція, $0 \leqslant b \leqslant 1$, — лінійний простір функцій вигляду $w = \widetilde{b}^{-1/2} v$, де $v \in L_2(\Omega)$, $\widetilde{b}(x) = b(x)$, якщо $x \in \Omega_0 := \{x \in \Omega \,\big|\, b(x) > 0\}$, і $\widetilde{b}(x) = 1$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_0$, наділений півнормою $\|w\|_{H_b(\Omega)} := \Big(\int_\Omega b(x)|w(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}$.

Для довільного банахового (гільбертового) простору X:

- $\|\cdot\|_X$ — норма на X;
- $(\cdot,\cdot)_X$ — скалярний добуток на X;
- X' — спряжений до X простір;
- $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$, де $q \in [1,\infty]$, — лінійний простір функцій, які визначені на S і приймають значення в X, а їх звуження на будь-який інтервал $(a,b) \subset S$ належать простору $L^q(a,b;X)$;
- $C(S;X)$ — простір неперервних функцій, які визначені на S і приймають значення в X.

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей з раніше не вивчених класів.

У сучасній фізиці, біології, економіці досліджують описувані диференціальними рівняннями динамічні процеси, початок яких настільки віддалений від актуального моменту, що початкові дані практично не впливають на їх проходження в цей момент. Тоді вважають, що початковий момент співпадає з $-\infty$, і вивчають даний процес в залежності від режиму на межі області, в якій він відбувається, та зовнішніх впливів. Замість стандартної початкової умови задають умову на поведінку розв'язку при $t \to -\infty$ або нічого не задають. Такого роду задачу називають задачею без початкових умов або, іншими словами, задачею Фур'є для відповідних рівнянь. Зауважимо, що задача Фур'є для еволюційних рівнянь тісно пов'язана із задачами на знаходження періодичних та майже періодичних розв'язків цих рівнянь.

Систематичне вивчення задач без початкових умов для еволюційних рівнянь розпочав А.М. Тихонов в 1935 році, який довів, що для єдиності класичного розв'язку одновимірного рівняння теплопровідності потрібно вимагати певні обмеження на поведінку розв'язку на нескінченності, наприклад, його обмеженість. Пізніше ця тематика активно розвивалася багатьма математиками, серед яких С.Д. Ейдельман, О.А. Олійник, С.Д. Івасишен, О.А. Панков, М.Д. Мартиненко, Л.Ф. Бойко, В.П. Лавренчук, М.І. Матійчук, М.М. Бокало, С.П. Лавренюк, Н.П. Процах, П.Я. Пукач, О.М. Бугрій, Т.М. Балабушенко, Ю.Б. Дмитришин, Є.І. Моісеєв, Ж.-Л. Ліонс (J.-L. Lions), Р. Шовальтер (Showalter R.E.) та інші. У їх роботах було досліджено розв'язність задачі без початкових умов для лінійних та нелінійних параболічних рівнянь з різних класів, коли, крім крайових умов, задається певна поведінка розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$.

В 1984 році М. М. Бокало вперше встановив, що існують нелінійні параболічні рівняння, які при заданих крайових умовах мають не більше одного розв'язку без будь-яких припущень щодо їх поведінки, коли часова змінна прямує до $-\infty$. Пізніше ним же було показано, що розв'язки задачі Фур'є для таких рівнянь існують при довільному зростанні вільних членів, коли часова змінна прямує до $-\infty$, та неперервно залежать від вхідних даних. Подібні результати для параболічних нелінійних рівнянь та їх систем, а також еволюційних варіаційних нерівновностей з різних класів отримали С.П. Лавренюк, П. Я. Пукач, О.М. Бугрій, В.М. Сікорський, В.М. Дмитрів, Ю.Б. Дмитришин та інші.

Відзначимо, що задача без початкових умов для еволюційних рівнянь, заданих на всій числовій осі, може використовуватись для встановлення існування періодичних та майже періодичних розв'язків цих рівнянь, бо такі розв'язки є розв'язками задачі без початкових умов для цих рівнянь.

Зі сказаного видно, що задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей досить активно вивчалися. Проте залишилося багато важливих класів еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей, для яких задачі без початкових умов недостатньо повно або зовсім не досліджені. Зокрема, до таких належать класи параболічних та еліптично-параболічних нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності, системи таких рівнянь другого порядку, а також еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами. Відмітимо, що еволюційні інтегро-диференціальні рівняння та їх системи широко використовуються при математичному моделюванні складних явищ в сучасному природознавстві, економіці та техніці, наприклад, в теорії ядерних реакцій при вивченні процесу уповільнення нейтронів, в дифузії заряджених частинок в плазмі. В даній дисертаційній роботі вивчаються задачі без початкових умов саме для таких рівнянь і їх систем, а також варіаційних нерівностей з функціоналами. Тому тема роботи є *актуальною.*

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримано в рамках виконання науково-дослідної державної теми "Розробка методів дослідження коректності прямих та обернених задач для диференціальних операторів"(номер держреєстрації 0117U001228), яка виконувалася на кафедрі диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка.

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є дослідження умов існування та єдиності узагальнених розв'язків задач без початкових умов для еволюційних функціонально-диференціальних рівнянь та варіаційних нерівностей з раніше не вивчених класів.

Завданнями дисертаційного дослідження є:
– встановити умови існування та єдиності розв'язку задачі без початкових умов для сильно нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності;
– дослідити коректність задачі без початкових умов для еліптично-параболічних сильно та слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь;
– відшукати умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних систем слабко та сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь;
– вивчити питання існування та єдиності розв'язків задачі без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами.

Об'єкт і предмет дослідження.

Об'єктом дослідження є задачі без початкових умов для параболічних і еліптично-параболічних нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків, еліптично-параболічних систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку, а також нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами.

Предметом досліджень є умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задач без початкових умов для параболічних і еліптично-параболічних нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків, еліптично-параболічних систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку, а також нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи та ідеї теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, зокрема, методи Гальоркіна, монотонності і компактності, принцип стискуючих відображень та інші.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше:

- отримано умови існування і єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для параболічних і еліптично-параболічних нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків, причому у випадку сильно нелінійних рівнянь — без обмежень на зростання вхідних даних і поведінку розв'язків на нескінченності, а у випадку слабко нелінійних рівнянь — при наявності умов на на зростання вхідних даних і поведінку розв'язків на нескінченності;

- знайдено умови існування і єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку, причому у випадку сильно нелінійних рівнянь — без обмежень на зростання вхідних даних і поведінку розв'язків на нескінченності, а у випадку слабко нелінійних рівнянь — при наявності умов на на зростання вхідних даних і поведінку розв'язків на нескінченності;

- отримано умови існування і єдиності розв'язків задачі без початкових умов для слабко нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами при наявності умов на на зростання вхідних даних і поведінку розв'язків на нескінченності.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними, а також при дослiджені математичних моделей газо- та гідродинаміки, біологічних популяцій, оптимального керування, хімічної кінетики, тощо.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором самостійно. У працях, написаних у співавторстві з науковим керівником, М. М. Бокалу належать постановка задач, вибір методів досліджень та аналіз одержаних результатів. У праці, написаній у співавторстві з М.М. Бокалом і Я.Г. Притулою, співавторам належать постановка задачі і вибір методики доведення основних результатів.

Апробація результатів роботи. Результати досліджень доповідались та обговорювались на

- Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: проф. Бокало М.М., проф. Каленюк П.І.),
  а також на наукових конференціях:
- International V. Skorobohatko mathematical conference (Дрогобич, 2015);
- International Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Львів, 2016);
- International Scientific Conference "Differential- Functional Equations and their Application" dedicated to the 80th anniversary of Professor V.I. Fodchuk (Чернівці, 2016);
- 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya.B. Lopatynsky (Київ, 2016);
- International scientific conference "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics (Чернівці, 2018);
- VI всеукраїнська математична конференція імені Б.В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу"(Івано-Франківськ - Микуличин, 2018);
- 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications (Вінниця, 2019);
- Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування", присвячена 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана (Чернівці, 2020);
- XI International Skorobohatko mathematical conference (Львів, 2020).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 7-ми наукових працях у фахових наукових виданнях, причому 5 видань зі списку МОН України, два з яких входять до міжнародної наукометричної бази Scopus, 2 – періодичні закордонні видання. Додатково результати роботи висвітлено в 1-ній статті у збірнику наукових праць та у 8-ми тезах наукових математичних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури, що налічує 89 найменувань і розміщений на 10 сторінках, та додатків. Загальний обсяг роботи – 180 сторінок, обсяг основного тексту становить 134 сторінки.

Розділ 1

Огляд літератури та основних результатів дисертації

1.1 Задача Фур'є для параболічних та еліптично-параболічних рівнянь і систем

У сучасній фізиці, біології, економіці досліджують описувані еволюційними рівняннями динамічні процеси, початок яких настільки віддалений від актуального моменту, що початкові дані практично не впливають на їх проходження в цей момент. Тоді можна вважати, що початковий момент співпадає з $-\infty$, і вивчати даний процес в залежності від режиму на межі області, в якій він відбувається, і зовнішніх впливів. Відповідна початкова умова може бути замінена умовою на поведінку розв'язку при $t \to -\infty$ або бути відсутньою взагалі. Таку математичну модель називають задачею без початкових умов або, іншими словами, задачею Фур'є для відповідного еволюційного рівняння. Зауважимо, що задача Фур'є для еволюційних рівнянь тісно пов'язана із задачами на знаходження періодичних та майже періодичних розв'язків таких рівнянь. Саме задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь, їх систем та варіаційних нерівностей при умові, що за просторовими змінними області задання рівнянь є обмеженими, є об'єктом даного дослідження, а предметом є питання існування, єдиності та властивості узагальнених розв'язків цих задач.

Вивчення задачі задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для еволюційних рівнянь бере свій початок з роботи А. М. Тіхонова [89]. У ній розглядається задача

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \ t > -\infty, \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad t > -\infty, \tag{1.2}$$

де $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — невідома функція, а $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деяка задана функція. Там доведено, що для єдиності класичного розв'язку цієї задачі достатньо вимагати його обмеженості, тобто задати додаткову умову

$$\overline{\lim_{|x|+|t|\to+\infty}} |u(x,t)| < \infty \,. \tag{1.3}$$

Також встановлено, що задача (1.1) – (1.3) має розв'язок для довільної обмеженої неперервної функції μ з крайової умови (1.2) і він представляється у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Big)\mu(\tau)\,d\tau, \quad x > 0, \ t > -\infty.$$

З середини XX століття регулярно появляються роботи, в яких згадані вище *результати та ідеї А. М. Тіхонова поширюються на більш складні об'єкти – задачі Фур'є для загальних лінійних параболічних систем.* Першими в цьому ряду є роботи С. Д. Ейдельмана [78], в яких розглядалося питання єдиності розв'язку задачі без початкових умов для лінійних параболічних за Петровським систем, заданих в $Q = \{(x,t) \,|\, t \le 0\}$ або $Q = \{(x,t) \,|\, x_1 > 0, t \le 0\}$. При обмеженнях на зростання розв'язку на нескінченності С. Д. Ейдельман довів єдиність розв'язку досліджуваної задачі. Обмеження на зростання розв'язків є принциповими і зустрічаються у різних формах у всіх наступних публікаціях, присвячених дослідженню методом А. М. Тіхонова класичної розв'язності задач без початкових умов для загальних лінійних параболічних систем. В цьому напрямку С.Д. Івасишеним в роботі [79] було доведено коректну розв'язність задачі без початкових умов для загальних лінійних параболічних за Петровським систем з різними крайовими умовами. Ці результати були встановлені в просторах Гельдера як обмежених, так і зростаючих функцій. Також було отримано інтегральні зображення розв'язків.

О. А. Олійник та Г. А. Іосиф'ян в роботі [85] запропонували метод дослідження крайових задач для параболічних рівнянь, який базується на апріорних інтегральних оцінках невідомої функції, які аналогічні принципу Сен-Венана в теорії пружності. Цим методом, який часто називають аналогом принципу Сен-Венана, автори згаданої роботи довели єдиність узагальнених розв'язків задачі Коші, мішаних задач і задачі без початкових умов (як в обмежених, так і необмежених за просторовими змінними областях) для загальних лінійних параболічних рівнянь.

У роботах [58, 59] вперше доведено, що задача без початкових умов для деяких нелінійних параболічних рівнянь має не більше одного розв'язку в класі функцій з довільною поведінкою при $t \to -\infty$. Це, зокрема, стосується задачі

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i}\right)_{x_i} = 0, \quad (x,t) \in Q,$$

$$u|_{\Sigma} = 0,$$

де $Q := \Omega \times (-\infty, 0]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (-\infty, 0]$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\partial\Omega$ – межа Ω, $p > 2$.

Існування і єдиність та деякі якісні характеристики розв'язків задачі Фур'є для багатьох класів еволюційних рівнянь з різними крайовими умовами доведено в роботах [60, 63, 12, 13, 15, 16] та ін. Зокрема, в праці [60] встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для параболічних нелінійних диференціальних рівнянь вищих порядків, частковим випадком яких є рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\big(\widehat{a}_{\alpha}(x,t)|D^{\alpha}u|^{p-2}D^{\alpha}u\big) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} f_{\alpha}(x,t),$$

$$(x,t) \in Q,$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_{\Sigma} = 0, \quad j = \overline{0, m-1},$$

де $D^{\alpha}u := \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ $\big(\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ – довжина $\alpha\big)$ — α-ова частинна похідна функції u за просторовими змінними, $\widehat{a}_{\alpha} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $\operatorname*{ess\,inf}_{Q} \widehat{a}_{\alpha} > 0, |\alpha| \le m$, $p = \mathrm{const} > 2$ – показник нелінійності, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$. При цьому не накладаються обмеження на зростання розв'язків і вхідних даних при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Отримано також оцінки узагальненого розв'язку цієї задачі.

У роботі [66] результати роботи [60] узагальнено на випадок анізотропних просторів Соболєва.

В даній дисертаційній роботі, зокрема, результати робіт [66], [60] переносяться на нові класи рівнянь, в тому числі на еліптично-параболічні нелінійні інтегро-диференціальні рівняння та їх системи. Еліптично-параболічні нелінійні рівняння досліджувались, наприклад, в [14], [16], [52], [53]. Інтегро-диференціальні рівняння виникають при моделюванні складних явищ в сучасному природознавстві, економіці та техніці, як наприклад, при описі біржових коливань вартості опціонів, в теорії ядерних реакцій при вивченні процесу уповільнення нейтронів в дифузії заряджених частинок в плазмі та в інших різноманітних задачах (див. [24], [25], [43]).

Зауважимо, що задачі Фур'є для еволюційних рівнянь, заданих для всіх значень часової змінної, можна використовувати для дослідження існування та єдиності періодичних та майже періодичних розв'язків цих рівнянь. Більш детальну майже періодичні функції розглядались в монографіях [72, 82, 86].

1.2 Задача без початкових умов для операторно-диференціальних рівнянь та варіаційних нерівностей

Задача без початкових умов для абстрактного еволюційного рівняння

$$u'(t) + A(t, u(t)) = f(t), \quad t \in S := (-\infty, 0], \tag{1.4}$$

де $A(t,\cdot) : V \to V'$, $t \in S$, — сім'я монотонних операторів, що діють з банахового простору V у спряжений до нього V', $f : S \to V'$ — деяка функція, вивчалася в роботах [53, 60, 82, 83, 86] та ін. Так, М. М. Бокало у праці [60] довів єдиність розв'язку $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)$ задачі (1.4) такого, що $u' \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$, де $p > 2$ — деяка стала, $p' := p/(p-1)$, коли $A(t,\cdot)$, $t \in S$, — сім'я обмежених операторів, що задовольняють певну умову монотонності. Там же показано, що у випадку $p = 2$ для єдиності розв'язку задачі (1.4) додатково потрібно накладати певні обмеження на поведінку розв'язку та вхідних даних при $t \to -\infty$. У [60] також доведено існування розв'язку задачі (1.4) в припущенні, що оператори $A(t,\cdot)$, $t \in S$, є сильно монотонними, обмеженими, семінеперервними та коерцитивними. У монографії [83, с. 522-525] встановлено умови існування та єдиності обмеженого розв'язку задачі

(1.4), а у [53, с. 131-132] — розв'язку з простору $L^2(S;V)$. Питання існування та єдиності розв'язку задачі (1.4) в класі обмежених та майже періодичних функцій було досліджене в [82, с. 156-162] та [86, с. 104-113]. Відмітимо, що задачу на знаходження періодичних (майже періодичних) розв'язків можна трактувати, як один з випадків задач без початкових умов, про які говорилося вище, бо в цій задачі визначається структура розв'язку на всій числовій осі (періодичність чи майже періодичність). Праць, в яких досліджується питання існування періодичних чи майже періодичних розв'язків еволюційних рівнянь, є дуже багато, серед них монографія О. А. Панкова [46] та статті Z. Hu [35], М. М. Бокала [15, 16].

Р. Е. Шовальтер у роботі [52] довів існування єдиного розв'язку $u \in \mathrm{e}^{2\omega\cdot}W^{1,2}(-\infty,0;H)$, задачі без початкових умов

$$u'(t)+\mu u(t)+A\big(u(t)\big)\ni f(t),\quad t\in(-\infty,0],$$

де H — гільбертів простір, $\omega+\mu>0$, $f\in \mathrm{e}^{2\omega\cdot}W^{1,2}(-\infty,0;H)$, $A:H\to 2^H$ — максимальний монотонний оператор такий, що $0\in A(0)$. Крім того, якщо $A=\partial\varphi$, де $\varphi:H\to(-\infty,+\infty]$ — власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал такий, що $\varphi(0)=0=\min\{\varphi(v):v\in H\}$, то ця задача є однозначно розв'язною і для кожних $\mu>0$, $f\in L^2(-\infty,0;H)$ та $\omega=0$.

В монографії Ж.-Л. Ліонса [83, ст. 525-530] досліджується серед багатьох інших і така задача. Нехай V,H – гільбертові простори (відповідно з нормами $\|\cdot\|$ і $|\cdot|$), причому V щільно і неперервно вкладений в H. Вважається, що $V\subset H\subset V'$, де V' – спряжений до V простір (з нормою $\|\cdot\|_*$). Через $(\cdot,\cdot)$ позначається скалярний добуток H і канонічний добуток на $V'\times V$. Нехай $A\in\mathcal{L}(V,V')$ і $(A(v),v)\geq\alpha\|v\|^2$ $\forall v\in V$, де $\alpha>0$. Припускається, що K – опукла і замкнена множина в V, $0\in V$, а $f\in L_2(\mathbb{R};V')$ – задана функція. Задача полягає у відшуканні функції $u\in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};V)$, яка має похідну $u'\in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};V')$ і задовольняє умову $u(t)\in K$ для майже всіх $t\in\mathbb{R}$, нерівність

$$(u'(t),v-u(t))+(Au(t),v-u(t))\geq(f(t),v-u(t)) \tag{1.5}$$

для будь-яких $v\in V$ і майже всіх $t\in\mathbb{R}$ та аналог початкової умови

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|u(t)|<\infty. \tag{1.6}$$

За певних додаткових припущень щодо вихідних даних, зокрема, що вкладення $V \subset H$ є компактним, доведено існування єдиного розв'язку цієї задачі та отримано деяку його оцінку.

В працях С. П. Лавренюка і О. М. Бугрія [41], [75], [80], [81] розглядалися варіаційні нерівності, які асоціюються з лінійними ([80], [81], [73]) та нелінійними диференціальними рівняннями і системами, заданими в необмежених знизу за часовою змінною та обмежених і необмежених ([73]) за просторовими змінними областях. В цих роботах доведено існування та єдиність розв'язків відповідних варіаційних нерівностей, які задовольняють певні обмеження на поведінку на нескінченності.

1.3 Опис результатів дисертації

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та двох додатків. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідною темою, особистий внесок здобувача та апробацію і публікації основних результатів дисертації.

У **розділі 1** наведено огляд літератури за тематикою дисертації і опис основних результатів роботи. У **підрозділі 1.1** розглянуто результати, що стосуються задачі Фур'є для параболічних та еліптично-параболічних рівнянь та систем рівнянь. **Підрозділ 1.2** присвячений огляду результатів стосовно задачі без початкових умов для для операторно-диференціальних рівнянь та варіаційних нерівностей. У **підрозділі 1.3** наведено опис результатів дисертації.

Розділ 2 (складений з чотирьох підрозділів) присвячений дослідженню задачі Фур'є для параболічних і еліптично-параболічних слабко та сильно нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків. Області задання рівнянь є циліндричними з паралельними часовій осі твірними і, крім того, є необеженими знизу за часовою та обмеженими за просторовими змінними. Показники нелінійності розглянутих у підрозділах 2.1 – 2.3 рівнянь є змінними, а в підрозділі 2.4 – сталими.

Опишемо конкретніше результати цього розділу. Для цього спочатку введемо потрібні позначення і поняття. Нехай n – довільне фіксоване натуральне число, $\mathbb{R}^n$ – лінійний нормований простір, складений з впорядкованих наборів дійсних чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, наділених нормою $|x| := \big(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2\big)^{1/2}$. Вважаємо, що $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел, а $\mathbb{Z}_+^n$ — множина впорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел, які називають мультиіндексами (розмірності n), і $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – довжина мультиіндексу.

Нехай m – деяке фіксоване натуральне число і M – підмножина множини $\{0, 1, \ldots,\ m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$. Позначимо через N кількість мультиіндексів розмірності n, довжини яких є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \ldots, \xi_\alpha, \ldots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$). Тут і далі $\widehat{0} = (0, \ldots, 0)$ – мультиіндекс, складений з нулів. Покладемо $|\xi| := \big(\sum\limits_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^2\big)^{1/2}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$. Вважатимемо, що $\Gamma := \partial\Omega$ – межа області Ω, причому вона є кусково-гладкою поверхнею, і позначимо через $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Через $\mathrm{mes}_n\Omega$ позначатимемо міру Лебега Ω.

Нехай S — числова вісь $\mathbb{R}$ або замкнений промінь $(-\infty, 0]$, $\mathrm{int}\, S := \mathbb{R}$, якщо $S = \mathbb{R}$, та $\mathrm{int}\, S := (-\infty, 0)$, якщо $S = (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \Gamma \times S$.

У **підрозділі 2.1** доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі Фур'є для параболічних сильно нелінійних диференціальних рівнянь вищих порядків без будь-яких обмежень на зростання вхідних даних та поведінку розв'язку на нескінченності. Отримано оцінки узагальнених розв'язків. Для анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків з деякого підкласу розглядуваного класу доведено існування їх обмежених, періодичних та майже періодичних узагальнених розв'язків.

Типовим прикладом досліджуваних в цьому підрозділі задач є така: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в сенсі інтегральної тотожності) рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\widehat{a}_\alpha(x,t)|D^\alpha u|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha u) = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (1.7)$$

$(x,t) \in Q$, та (в сенсі належності до відповідного функційного простору) крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (1.8)$$

де $\widehat{a}_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $\operatorname*{ess\,inf}_Q \widehat{a}_\alpha > 0$, $f_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $D^\alpha \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| \in M$, та для кожного α, $|\alpha| \in M$, функція $p_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна і $2 \leqslant p_\alpha^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) =: p_\alpha^+ < +\infty$, якщо $|\alpha| \in M$, причому $p_{\widehat{0}}^- > 2$.

Під узагальненим розв'язком задачі (1.7), (1.8) розуміємо елемент лінійного локально опуклого простору

$$\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C(S; L_2(\Omega)),$$

що задовольняє рівняння (1.7) в сенсі відповідної інтегральної тотожності (крайові умови (1.8) "заховані"в означенні простору $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$).

Наслідком встановлених в цьому підрозділі результатів є таке твердження стосовно задачі (1.7), (1.8).

Наслідок 1.1. *Нехай виконуються вказані умови щодо вхідних даних рівняння* (1.7). *Тоді задача* (1.7), (1.8) *має і тільки один узагальнений розв'язок. Крім того, для будь-яких* R, R_0, t_0 *таких, що* $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in S$, *виконується оцінка*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx + \int_{t_0-R_0}^{t_0} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\big(R^{-2/(p_{\widehat{0}}^+-2)} + \int_{t_0-R}^{t_0} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\big), \quad (1.9)$$

де $C_1 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від параметрів вхідних даних.*

Якщо ж додатково припустити, що функції $\widehat{a}_\alpha, f_\alpha,\ |\alpha| \in M$, є періодичними чи майже періодичними за змінною t, то і узагальнений розв'язок буде, відповідно, періодичним чи майже періодичним за змінною t.

Тут вперше розглянуто параболічні сильно нелінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними показниками нелінійності.

У **підрозділі 2.2** отримано аналогічні до отриманих в підрозділі 2.1 результати стосовно задачі Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних диференціальних рівнянь, типовим прикладом яких є рівняння

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\widehat{a}_\alpha(x,t)|D^\alpha u|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha u) = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \tag{1.10}$$

$(x,t) \in Q$, де функції $\widehat{a}_\alpha, f_\alpha, p_\alpha,\ |\alpha| \in M$, такі ж як в рівнянні (1.7), а $b : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна обмежена функція така, що $0 < b(x) \leqslant 1$ для $x \in \Omega_0 \subset \Omega$ і $b(x) = 0$ для $x \in \Omega \setminus \Omega_0$, де $\Omega_0 \neq \emptyset$ – відкрита множина. Тут на відміну від підрозділу 2.1 узагальнені розв'язки досліджуваних задач беруться з простору

$$\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C(\mathbb{R}; H_b(\Omega)).$$

Задача Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності раніше не досліджувалася.

У **підрозділі 2.3** доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь без будь-яких обмежень на зростання вхідних даних та поведінку розв'язку на нескінченності. Отримано оцінки узагальнених розв'язків. Також досліджено питання періодичності та майже періодичності узагальнених розв'язків таких рівнянь. Типовим прикладом таких рівнянь є

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\widehat{a}_\alpha(x,t)|D^\alpha u|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha u) + \widetilde{a}_0(x,t)h(u) +$$

$$+ \int_\Omega \widehat{c}(x,y,t) g(u(y,t))\, dy = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q. \tag{1.11}$$

де $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$, $0 < \inf\limits_{\mathbb{R}} h' \leqslant \sup\limits_{\mathbb{R}} h' < +\infty$, наприклад, $h(\rho) = 2\rho + \cos\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$; $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$, $\sup\limits_{\mathbb{R}} |g'| < +\infty$, наприклад, $g(\rho) = \sin\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$; $\widehat{a}_\alpha, f_\alpha, p_\alpha$, $|\alpha| \in M$, і b такі ж як в рівнянні (1.10); $\widetilde{a}_0 \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{Q} \widetilde{a}_0 > 0$ та $\widehat{c} \in L_\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R})$, причому

$$\operatorname*{ess\,inf}_{Q} \widetilde{a}_0 \cdot \inf_{\mathbb{R}} h' > \mathrm{mes}_n\Omega \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega\times\Omega\times S} |\widehat{c}\,| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |g'|\,.$$

Зокрема, рівняння (1.11) може мати вигляд

$$(b(x)u)_t + (-\Delta)^m u + \widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2} + \widetilde{a}_0(x,t)u + \int\limits_{\Omega} \widehat{c}(x,y,t)u(y,t)dy = f(x,t),$$

$(x,t) \in Q$, де Δ – оператор Лапласа.

Раніше задача Фур'є для еліптично-параболічних сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності не вивчалася.

У **підрозділі 2.4** знайдено достатні умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь при деяких обмеженнях на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$.

Типовим прикладом розглянутих у підрозділі 2.4 рівнянь є

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widetilde{a}_\alpha(x,t,D^\alpha u) + \int\limits_{\Omega} \widetilde{c}(x,y,t,u(y,t))\,dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q. \tag{1.12}$$

де

- для кожного $\alpha, |\alpha| \in M$, функція $\widetilde{a}_\alpha(x,t,\zeta)$, $(x,t,\zeta) \in Q \times \mathbb{R}$, – каратеодорівська, причому для м.в. $(x,t) \in Q$ функція $\widetilde{a}_\alpha(x,t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – диференційовна, а функція $\frac{\partial}{\partial\zeta}\widetilde{a}_\alpha(x,t,\zeta)$, $(x,t,\zeta) \in Q \times \mathbb{R}$, – обмежена і $\frac{\partial}{\partial\zeta}\widetilde{a}_\alpha,(x,t,\zeta) \geqslant \gamma_\alpha(t) > 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$ та всіх $\zeta \in \mathbb{R}$, $\gamma_\alpha \in C(S)$; крім того, $\widetilde{a}_\alpha(x,t,0) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$, $|\alpha| \in M$;

- функція $\widetilde{c}(x,y,t,\zeta)$, $(x,y,t,\zeta) \in \Omega\times\Omega\times S\times\mathbb{R}$, – каратеодорівська, причому для м.в. $(x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times S$ функція $\widetilde{c}(x,y,t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – диференційовна і

$$\Big|\frac{\partial}{\partial\zeta}\widetilde{c}(x,y,t,\zeta)\Big| \leqslant L\gamma(t) \ \text{ для м.в. } (x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times S \ \text{ та всіх } \ \zeta \in \mathbb{R},$$

де $L > 0$ – стала, $\gamma(t) := \sum\limits_{|\alpha|\in M} K_\alpha \gamma_\alpha(t),\ t \in S,$ а $K_\alpha > 0$, $|\alpha| \leqslant m$, – сталі такі, що

$$\forall \alpha,\ |\alpha| \leqslant m: \quad \int\limits_\Omega |D^\alpha v|^2\, dx \geqslant K_\alpha \int\limits_\Omega |v|^2\, dx \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$$

(існування сталих K_α при $|\alpha| \neq 0$ легко випливає з нерівності Фрідріхса, а $K_{\widehat{0}} = 1$); крім того, $\widetilde{c}(x,y,t,0) = 0$ для м.в. $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times S$;

- $f_\alpha \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q}),\ |\alpha| \in M$.

Зауважимо, що задача (1.12), (1.8), як показують відповідні приклади, може мати багато (навіть безліч) узагальнених розв'язків з простору

$$\mathbb{U}^b_{2,\rm loc}(\overline{Q}) := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{2,\rm loc}(\overline{Q}) \cap C(S; H_b(\Omega)).$$

Тому потрібно накласти на її узагальнений розв'язок додаткову умову у вигляді обмеження на його поведінку при $t \to -\infty$:

$$\lim_{t\to -\infty} e^{\omega \int\limits_0^t \gamma(s)ds} \|u(\cdot,t)\|_{H_b(\Omega)} = 0, \tag{1.13}$$

де $\omega \in \mathbb{R}$.

Сформулюємо для задачі (1.12), (1.8), (1.13) твердження, яке є наслідком з отриманих у підрозділі 2.4 результатів. Для цього введемо позначення

$$b_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} b(x)$$

і лінійний простір

$$L^2_{\omega,\beta}(S; L^2(\Omega)) := \Big\{ f \in L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega)) \ \Big| \ \int\limits_S \beta(t) e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt < \infty \Big\}$$

з нормою

$$\|f\|_{L^2_{\omega,\beta}(S;L^2(\Omega))} := \Big(\int\limits_S \beta(t)\, e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\, ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \Big)^{1/2},$$

де $\omega \in \mathbb{R}$, $\quad \beta \in C(S)$, $\quad \beta(t) > 0$ для всіх $t \in S$.

Наслідок 1.2. *Нехай виконуються вказані умови стосовно вхідних даних рівняння* (1.12) *і, крім того, у випадку* $b_0 = 0$ *маємо*

$$L mes_n \Omega < 1. \tag{1.14}$$

Припустимо, що $\omega < 1 - Lmes_n\Omega$, *коли виконується умова* (1.14), *і* $\omega < (1 - Lmes_n\Omega)/b_0$ *в іншому випадку, і маємо включення*

$$f_\alpha \in L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S; L^2(\Omega)) \quad \forall \alpha, \ |\alpha| = m, \quad f_{\widehat{0}} \in L^2_{\omega,1/\gamma}(S; L^2(\Omega)). \tag{1.15}$$

Тоді існує і тільки один узагальнений розв'язок задачі (1.12), (1.8), (1.13), *причому для нього правильна оцінка*

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds}\|u(\cdot,\tau)\|_{H_b(\Omega)} + \|u\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))} + \sum_{\alpha\in M}\|D^\alpha u\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Big[\|f_{\widehat{0}}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))} + \sum_{|\alpha|=m}\|f_\alpha\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}\Big], \quad \tau \in S, \tag{1.16}$$

де $S_\tau := (-\infty, \tau]$ $\forall \tau \in (-\infty, 0]$ $(S_0 = S)$, $C_2 > 0$ *– стала, що залежать лише від* L, $mes_n\Omega$, b_0 *та* ω.

Задача Фур'є для еліптично-параболічних слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь раніше не розглядалися.

У **розділі 3** досліджено задачу Фур'є для еліптично-параболічних систем сильно та слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку. Області задання рівнянь є циліндричними з паралельними часовій осі твірними і, крім того, є необмеженими знизу за часовою та обмеженими за просторовими змінними. У **підрозділі 3.1** вивчено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних систем сильно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності без обмежень на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Результати, отримані тут, подібні до результатів підрозділу 2.3. У **підрозділі 3.2** доведено існування та єдиність розв'язків задачі Фур'є для еліптично-параболічних систем слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь при наявності обмежень на зростання вхідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Результати, отримані тут, подібні до результатів підрозділу 2.4.

Задача Фур'є для еліптично-параболічних систем сильно та слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку раніше не досліджувалися.

У **розділі 4** вивчено задачу без початкових умов для слабко нелінійних еволюційних включень з функціоналами. Отримано достатні умови існування та єдиності розв'язків такої задачі.

Опишемо конкретніше результати цього розділу. Для цього спочатку наведемо приклад задачі, що буде розглядатись.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Позначимо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \partial\Omega \times S$, $\Omega_t := \Omega \times \{t\}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Нехай $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ – простір визначених на Q вимірних функцій таких, що їх звуження на будь-яку вимірну обмежену множину $Q' \subset Q$ належить простору $L^2(Q')$; $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^2(\Omega),\, i = \overline{1,n}\}$, – стандартний простір Соболєва з з скалярним добутком $(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega [\nabla v \nabla w + vw]\, dx$, де $\nabla u := (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, $\nabla w := (w_{x_1}, \ldots, w_{x_n})$.

Нехай K – опукла замкнена множина в $H^1(\Omega)$, що містить 0. Задача: знайти функцію $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, таку, що $u_{x_i} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,n}$, $u_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, та для майже всіх $t \in S$ маємо $u(\cdot, t) \in K$ і

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big\{ u_t(v-u) + \nabla u \nabla (v-u) + u(v-u) +$$

$$+(v-u)\int\limits_{\Omega} b(x,y,t) u(y,t)\, dy \Big\}\, dx \geq \int\limits_{\Omega_t} f(v-u)\, dx \quad \forall\, v \in K, \tag{1.17}$$

$$\lim_{t \to -\infty} ||u(\cdot, t)||_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{1.18}$$

де $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $a \in L^\infty(\Omega)$, $b \in L^\infty(\Omega \times \Omega \times (-\infty, 0))$ – задані функції, $\nabla u := (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$.

Як випливає з результатів цього розділу, коли

$$f \in L^2(Q), \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (-\infty, 0]} |b(x,y,t)| \sqrt{\mathrm{mes}_n \Omega} < K,$$

де $K > 0$ – стала з нерівності

$$K \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

то задача (4.1), (4.2) має розв'язок і тільки один.

В цьому розділі наведений приклад узагальнюємо і розглядаємо таку задачу для абстрактної еволюційної варіаційної нерівності з функціоналом: знайти функцію $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$ таку, що $u' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ та для майже всіх $t \in S$

маємо $u(t) \in K$,

$$(u'(t) + A(u(t)) + B(t, u(t)), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall\, v \in K, \tag{1.19}$$

де $B(t, \cdot) : H \to H$, $t \in S$, – задана сім'я операторів, $f \in L^2_{\text{loc}}(S; H)$ – задана функція, та

$$\lim_{t \to -\infty} e^{\gamma t} |u(t)| = 0, \tag{1.20}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}$ – задане число.

Тут V і H — гільбертові простори, V' — спряжений до V простір, причому $V \subset H \subset V'$ і всі вкладення є щільними та неперервними, а перше ще є компактним.

Відмітимо, що варіаційну нерівність (1.19) можна записати у вигляді субдиференціального включення: знайти функцію $u \in L^p_{\text{loc}}(S; V)$ таку, що $u' \in L^2_{\text{loc}}(S; H)$ та для майже всіх $t \in S$ маємо $u(t) \in D(\partial\Phi)$ і

$$u'(t) + \partial\Phi(u(t)) + B(t, u(t)) \ni f(t) \quad \text{в} \quad H. \tag{1.21}$$

Задача без початкових умов для слабко нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей раніше не вивчалася.

Розділ 2

Задача Фур'є для параболічних та еліптично-параболічних нелінійних рівнянь вищих порядків

Цей розділ присвячений вивченню задачі Фур'є для параболічних та еліптично-параболічних сильно та слабко нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків.

Матеріали розділу викладено в працях [17, 18, 68, 71].

Введемо потрібні нам далі позначення і поняття. Нехай n – довільне фіксоване натуральне число, $\mathbb{R}^n$ – лінійний нормований простір, складений з впорядкованих наборів дійсних чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$, наділених нормою $|x| := \big(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2\big)^{1/2}$. Вважаємо, що $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел, а $\mathbb{Z}_+^n$ — множина впорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел, які називають мультиіндексами (розмірності n), і $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – довжина мультиіндексу.

Нехай m – деяке фіксоване натуральне число і M – підмножина множини $\{0, 1, \dots, \ m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$. Позначимо через N кількість мультиіндексів розмірності n, довжини яких є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \dots, \xi_\alpha, \dots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$). Тут і далі $\widehat{0} = (0, \dots, 0)$ – мультиіндекс, складений з нулів. Покладемо

$|\xi| := \Big(\sum\limits_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha|^2\Big)^{1/2}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$. Вважатимемо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою і позначимо через $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Через $\mathrm{mes}_n\Omega$ позначатимемо міру Лебега Ω.

Нехай $r \in L_\infty(\Omega)$, причому $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$, і нехай або $G = \Omega$, або $G = \Omega \times I$, де I – інтервал числової осі $\mathbb{R}$. Позначимо через $L_{r(\cdot)}(G)$ узагальнений простір Лебега, який складається з вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де

$$\rho_{G,r}(v) := \int_\Omega |v(x)|^{r(x)} dx, \quad \text{якщо} \;\; G = \Omega, \quad \text{і}$$

$$\rho_{G,r}(v) := \int_G |v(x,t)|^{r(x)} dxdt, \quad \text{якщо} \;\; G = \Omega \times I.$$

На цьому просторі розглянемо норму

$$\|v\|_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leqslant 1\},$$

з якою він є банаховим [12].

Якщо $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} r(x) > 1$, то спряжений простір $(L_{r(\cdot)}(G))'$ може бути ототожненим з $L_{r'(\cdot)}(G)$, де r' – функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Нехай $G = \Omega \times I$, де I є необмеженим інтервалом в $\mathbb{R}$ (зокрема, $I = \mathbb{R}$). Позначимо через $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{G})$ лінійний простір вимірних функцій $g : G \to \mathbb{R}$ таких, що звуження g на $\Omega \times (t_1, t_2)$ належить до $L_{r(\cdot)}(\Omega \times (t_1, t_2))$ для будь-яких $t_1, t_2 \in \overline{I}$. Цей простір є повним локально опуклим із системою півнорм $\big\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega\times(t_1,t_2))} \,\big|\, t_1, t_2 \in \overline{I}\big\}$. Послідовність $\{g_m\}$ є сильно збіжною (відповідно, слабко збіжною) в $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{G})$, якщо послідовність звужень $\{g_m|_{\Omega\times(t_1,t_2)}\}$ є сильно збіжною (відповідно, слабко збіжною) в $L_{r(\cdot)}(\Omega \times (t_1, t_2))$ для будь-яких $t_1, t_2 \in \overline{I}$. Аналогічно визначаємо простір $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{G})$.

Нехай $H^m(\Omega) := \{v \in L_2(\Omega) \,\big|\, D^\alpha v \in L_2(\Omega) \;\; \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, |\alpha| \leqslant m\}$ – простір Соболєва, який є гільбертовим простором зі скалярним добутком та нормою

$$(v, w)_{H^m(\Omega)} := \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha v D^\alpha w \, dx, \quad \|v\|_{H^m(\Omega)} := \Big(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha v|^2 \, dx\Big)^{1/2}.$$

Під $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ будемо розуміти замикання в $H^m(\Omega)$ простору $C_c^\infty(\Omega)$ ($C_c^\infty(\Omega)$ – лінійний простір, що складається з нескінченно диференційовних на Ω функцій, які мають компактний носій).

Введемо ще простір

$$W_q^m(\Omega) := \{v \in L_q(\Omega) \,\big|\, D^\alpha v \in L_q(\Omega) \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \, |\alpha| \leqslant m\},$$

який є банаховим з нормою $\|v\|_{W_q^m(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha v\|_{L_q(\Omega)}$, де $q \geqslant 1$ – якенебудь число.

Нехай $p(\cdot) = \big(p_\alpha(\cdot) : |\alpha| \in M\big)$ – впорядкований так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$, набір заданих і вимірних на Ω, що задовольняють умову:

$$1 < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) < \infty, \quad |\alpha| \in M.$$

Через $p'(\cdot) = (p'_\alpha(\cdot) : |\alpha| \in M)$ позначатимемо впорядкований набір функцій таких, що $1/p_\alpha(x) + 1/p'_\alpha(x) = 1$ для м.в. $x \in \Omega$, $|\alpha| \in M$.

Нехай $W_{p(\cdot)}^m(\Omega) := \{v \in L_{p_{\widehat{0}}(\cdot)}(\Omega) \,\big|\, D^\alpha v \in L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega) \ \forall \alpha, \, |\alpha| \in M\}$ – банахів простір з нормою $\|v\|_{W_{p(\cdot)}^m(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha v\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^m(\Omega)$ розуміємо замикання простору $C_c^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_{W_{p(\cdot)}^m(\Omega)}$. Для зручності викладення матеріалу позначимо

$$\mathbb{V}_p := \overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^m(\Omega).$$

Нехай $G = \Omega \times I$, де I – інтервал числової осі $\mathbb{R}$. Введемо простір $W_{p(\cdot)}^{m,0}(G)$ як підпростір простору $L_{p_{\widehat{0}}(\cdot)}(G)$, складений з тих функцій h, для яких $D^\alpha h \in L_{p_\alpha(\cdot)}(G)$, якщо $|\alpha| \in M$, із нормою

$$\|h\|_{W_{p(\cdot)}^{m,0}(G)} := \sum_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(G)}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^{m,0}(G)$ позначимо підпростір простору $W_{p(\cdot)}^{m,0}(G)$, складений з таких функцій h, що $h(\cdot, t) \in \overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^m(\Omega)$ для майже всіх $t \in (t_1, t_2)$.

Нехай $G = \Omega \times I$, де I – числовий промінь або вся числова вісь. Введемо простір $\overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}^{m,0}(\overline{G})$ як підпростір простору $L_{p_{\widehat{0}}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{G})$, складений з функцій h, звуження яких на $\Omega \times (t_1, t_2)$ належить $\overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^{m,0}(\Omega \times (t_1, t_2))$ для будь-яких $t_1, t_2 \in \overline{I}$. Цей простір є повним локально опуклим із сім'єю півнорм $\Big\{\|h\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(\Omega\times(t_1,t_2))} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega\times(t_1,t_2))} \Big| \, t_1, t_2 \in \overline{I}\Big\}$.

Послідовність $\{h_m\}$ є сильно збіжною (відповідно, слабко збіжною) в $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{G})$, якщо послідовність звужень $\{h_m|_{\Omega\times(t_1,t_2)}\}$ є сильно збіжною (відповідно, слабко збіжною) в $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(\Omega\times(t_1,t_2))$ для будь-яких $t_1, t_2 \in \overline{I}$.

Через $C(\overline{I}; B)$, де B – банахів простір з нормою $\|\cdot\|_B$, I – відкритий числовий промінь або вся числова вісь, позначимо лінійний простір функцій $v\colon \overline{I} \to B$ таких, що звуження v на довільний відрізок $[t_1, t_2] \subset \overline{I}$ належить до $C([t_1, t_2]; B)$. Простір $C(\overline{I}; B)$ є повним локально опуклим із системою півнорм $\big\{ \max_{t\in[t_1,t_2]} \|v(t)\|_B \,\big|\, t_1, t_2 \in \overline{I}\big\}$. Отож, послідовність $\{v_m\}$ є збіжною в $C(\overline{I}; B)$, якщо послідовність звужень $\{v_m|_{[t_1,t_2]}\}$ є збіжною в $C([t_1, t_2]; B)$ для будь-яких $t_1, t_2 \in \overline{I}$.

Під $C^1_c(I)$, де I – інтервал числової осі $\mathbb{R}$, розуміємо лінійний простір неперервно диференційовних на I функцій з компактним носієм, причому якщо $I = (t_1, t_2)$, то писатимемо $C^1_c(t_1, t_2)$ замість $C^1_c((t_1, t_2))$.

Приймемо $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних t_1 і t_2 (тут і далі припускаємо, що $t_1 < t_2$).

Нехай S — числова вісь $\mathbb{R}$ або замкнений промінь $(-\infty, 0]$, $\mathrm{int}S := \mathbb{R}$, якщо $S = \mathbb{R}$, та $\mathrm{int}S := (-\infty, 0)$, якщо $S = (-\infty, 0]$. Приймемо

$$Q := \Omega \times S, \quad \Sigma := \Gamma \times S.$$

2.1 Параболічні сильно нелінійні диференціальні рівняння

2.1.1 Постановка задачі і формулювання основних результатів

Розглянемо ***задачу***: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, \delta u) = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q, \qquad (2.1)$$

та крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \qquad (2.2)$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$, $|\alpha| \in M$, – задані функції, δu – впорядкований (правило впорядкування таке ж, як для компонентів векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$) набір з всеможливих похідних $D^\alpha u \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}u$ функції u порядків $|\alpha| \in M$.

Сформульовану задачу називають *задачею Фур'є для рівняння (2.1) з крайовими умовами (2.2)* і далі ми її коротко називаємо *задачею (2.1), (2.2).*

Тут вивчатимемо узагальнені розв'язки задачі (2.1), (2.2), а для цього введемо необхідні позначення і зробимо відповідні припущення щодо вхідних даних цієї задачі.

Нехай виконується умова

$(\mathcal{P})$ $p = (p_\alpha : |\alpha| \in M)$ – *вектор-функція така, що для кожного* α, $|\alpha| \in M$, *функція* $p_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ – *вимірна і*

$$2 \leqslant p_\alpha^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) =: p_\alpha^+ < +\infty, \quad \textit{якщо} \quad |\alpha| \in M,$$

причому $p_{\widehat{0}}^- > 2$.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, складену з впорядкованих наборів $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$, визначених на $Q\times\mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів простору $\mathbb{R}^N$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють такі три умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного α ($|\alpha| \in M$) функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто функція $a_\alpha(x,t,\,\cdot\,) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ є неперервною для майже всіх $(x,t) \in Q$, а для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом; крім того, $a_\alpha(x,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного α, $|\alpha| \in M$, будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ маємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta|\in M} |\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)} + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

$(\mathcal{A}_3)$ для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant K_a \sum_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^{p_\alpha(x)},$$

де $K_a > 0$ – стала, яка залежить від набору $a \equiv (a_\alpha : |\alpha| \in M)$.

Розглядатимемо також підмножину $\mathbb{A}_p^*$ множини $\mathbb{A}_p$, складену з елементів вигляду

$$(a_\alpha(x,t,\xi) \equiv \widehat{a}_\alpha(x,t)|\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)-2}\xi_\alpha : |\alpha| \in M),$$

де $\widehat{a}_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і

$$\widehat{a}_\alpha(x,t) \geqslant \widehat{K}_a = \mathrm{const} > 0 \quad \text{для м.в.} \quad (x,t) \in Q\,, \ |\alpha| \in M.$$

Те, що

$$\mathbb{A}_p^* \subset \mathbb{A}_p$$

легко перевірити, опираючись на нерівність (див. [60]):

$$(|s_1|^{q-2}s_1 - |s_2|^{q-2}s_2)(s_1 - s_2) \geqslant 2^{2-q}|s_1 - s_2|^q,$$

яка правильна для будь-яких $q \geqslant 2$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Відмітимо, що якщо $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$ належить $\mathbb{A}_p^*$, то рівняння (2.1) має вигляд

$$u_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\widehat{a}_\alpha(x,t)|D^\alpha u|^{p_\alpha(x)-2}D^\alpha u) =$$
$$= \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.3}$$

Частковим випадком рівняння (2.3), а отже, і рівняння (2.1), є

$$u_t + (-\Delta)^m u + \widehat{a}_{\widehat{0}}(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Визначимо лінійний простір

$$\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C(S; L_2(\Omega))$$

із системою півнорм $\Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} + \|h\|_{C([t_1,t_2];L_2(\Omega))} \Big| \, t_1, t_2 \in S \Big\}$ на ньому, з якою він є повним локально опуклим.

Нехай $\mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha : |\alpha| \in M)$ з N визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$, і для кожного α, $|\alpha| \in M$, функція f_α належить простору $L_{p'_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Означення 2.1. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$. *Узагальненим розв'язком задачі (2.1),(2.2) називаємо функцію* $u \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *яка задовольняє рівність*

$$\iint\limits_Q \big[-uv\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha v\varphi\big]\,dxdt = \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x,t) D^\alpha v\varphi\,dxdt \quad (2.4)$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p$, $\varphi \in C_c^1(\mathrm{int}\, S)$.

Теорема 2.1. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$. *Тоді задача (2.1), (2.2) має узагальнений розв'язок і тільки один. Крім того, для будь-яких* R, R_0, t_0 *таких, що* $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in S$, *виконується оцінка*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\,dx + \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\Big(R^{-2/(p_0^+-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\Big), \quad (2.5)$$

де $C_1 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* K_a *і* p_α^-, $|\alpha| \in M$.

Розв'язок u задачі (2.1),(2.2) називають *обмеженим*, якщо

$$\sup_{t\in S} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\,dx < \infty.$$

Наслідок 2.1. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 та* $f_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$, $|\alpha| \in M$. *Тоді узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2) є обмеженим та належить простору* $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ *і задовольняє оцінку*

$$\sup_{t\in S} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt. \quad (2.6)$$

Наслідок 2.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 та*

$$\sup_{\tau\in S}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\leqslant C_2,$$

де $C_2>0$ *– стала. Тоді розв'язок задачі (2.1),(2.2) є обмеженим і задовольняє оцінку*

$$\sup_{\tau\in S}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt\leqslant C_3,$$

де $C_3>0$ *– стала, яка залежить лише від* K_a, C_2 *і* p^-_α, $|\alpha|\in M$.

Наслідок 2.3. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 та*

$$\lim_{\tau\to-\infty(+\infty)}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt=0$$

(символ $+\infty$ *беремо у випадку* $S=\mathbb{R}$*). Тоді, якщо* u *– узагальнений розв'язок задачі (2.1), (2.2), то*

$$\lim_{t\to-\infty(+\infty)}\|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}=0,$$

$$\lim_{\tau\to-\infty(+\infty)}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt=0.$$

Теорема 2.2. *Нехай* $S=\mathbb{R}$, $(a_\alpha:|\alpha|\in M)\in\mathbb{A}_p$, $(f_\alpha:|\alpha|\in M)\in\mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$. *Крім того, припустимо, що існує число* $\sigma>0$ *таке, що функції* $a_\alpha,\ |\alpha|\in M,$ *і* $f_\alpha,\ |\alpha|\in M,$ *є періодичними за змінною* t *з періодом* σ. *Тоді задача (2.1), (2.2) має узагальнений розв'язок і тільки один, причому він є періодичним за змінною* t *з періодом* σ.

Теорема 2.3. *Нехай* $S=\mathbb{R}$ *і виконуються умови теореми 2.1. Крім того, припустимо, що для кожного* α, $|\alpha|\in M$, *функція* a_α *належать простору* $C(\mathbb{R};L_\infty(\Omega))$ *і є майже періодичною за Бором як елемент цього простору, а функція* f_α *є майже періодичною за Степановим як елемент простору* $L_{p_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *причому для довільного* $\varepsilon>0$ *множина*

$$F_\varepsilon:=\{\sigma\mid\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha(x,t+\sigma)-f_\alpha(x,t)|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\leqslant\varepsilon,$$

$$\max_{|\alpha|\in M}\sup_{t\in\mathbb{R}}\|a_\alpha(\cdot,t+\sigma)-a_\alpha(\cdot,t)\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant\varepsilon\}$$

є відносно щільною.

Тоді задача (2.1), (2.3) має узагальнений розв'язок і тільки один, причому він є майже періодичним за Бором як елемент простору $C(\mathbb{R};L_2(\Omega))$ *та майже періодичним за Степановим як елемент простору* $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

2.1.2 Допоміжні твердження

Тут наведемо потрібні нам для обґрунтування основного результату допоміжні твердження.

Лема 2.1. *Нехай для будь-яких* $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ *функція* $w\in\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ *така, що виконується тотожність*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\big[-wv\varphi'+\big(\sum_{|\alpha|\in M}g_\alpha D^\alpha v\big)\varphi\big]\,dxdt=0,\quad v\in\mathbb{V}_p,\ \varphi\in C_c^1(t_1,t_2),\tag{2.7}$$

для деяких $g_\alpha\in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ $(|\alpha|\in M)$. *Тоді* $w\in C\big([t_1,t_2];L_2(\Omega)\big)$ *і для будь-яких* $\theta\in C^1([t_1,t_2])$, $v\in\mathbb{V}_p$ *та* $\tau_1,\tau_2\in[t_1,t_2]$, $\tau_1<\tau_2$, *маємо*

$$\theta(\tau_2)\int\limits_{\Omega}w(x,\tau_2)v(x)\,dx-\theta(\tau_1)\int\limits_{\Omega}w(x,\tau_1)v(x)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\big\{\big(\sum_{|\alpha|\in M}g_\alpha D^\alpha v\big)\theta-wv\theta'\big\}\,dxdt=0,\tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\|w(\cdot,\tau_2)\|^2_{L_2(\Omega)}-\frac{1}{2}\theta(\tau_1)\|w(\cdot,\tau_1)\|^2_{L_2(\Omega)}-\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\|w(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\theta'(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\big(\sum_{|\alpha|\in M}g_\alpha D^\alpha w\big)\theta\,dxdt=0.\tag{2.9}$$

Доведення. Обґрунтування цієї леми подібне до доведення леми 1 роботи [10].∎

Лема 2.2. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$ *і для деяких дійсних чисел* t_1, t_2, $t_2 - t_1 \geqslant 1$, *та кожного* $l \in \{1,2\}$ *функції* $u_l \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2}) \cap C([t_1,t_2]; L_2(\Omega))$, $f_{\alpha,l} \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$, $|\alpha| \in M$, *такі, що виконується рівність*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \{- u_l v \varphi' + \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x,t,\delta u_l) D^\alpha v \varphi\} \, dxdt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \in M} f_{\alpha,l}(x,t) D^\alpha v \varphi \, dxdt \tag{2.10}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p$ *і* $\varphi \in C^1_c(t_1,t_2)$.

Тоді для довільних чисел R, R_0, t_0 *таких, що* $R_0 > 0, R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_1 \leqslant t_0 - R < t_0 \leqslant t_2$, *правильна нерівність*

$$\max_{t \in [t_0 - R_0, t_0]} \int\limits_{\Omega} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 \, dx + \int\limits_{t_0 - R_0}^{t_0} \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{|\alpha| \in M} |D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2|^{p_\alpha(x)} \Big) \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \Big\{ R^{-2/(p_0^+ - 2)} + \int\limits_{t_0 - R}^{t_0} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \in M} |f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t)|^{p'_\alpha(x)} \, dxdt \Big\}, \tag{2.11}$$

де $C_4 > 0$ *– стала, яка залежать тільки від* K_a, p_α^-, $|\alpha| \in M$.

Доведення. Використаємо ідею роботи [8]. Нехай R, R_0, t_0 такі, як у формулюванні леми, і $\eta(t) := t - t_0 + R$, $t \in \mathbb{R}$. Для заданих $v \in \mathbb{V}_p$ і $\varphi \in C^1_0(t_1,t_2)$ розглянемо рівність (2.10) при $l = 1$ та цю ж рівність при $l = 2$ і віднімемо ці рівності. Прийнявши для майже всіх $(x,t) \in Q$

$$u_{12}(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t),$$
$$f_{\alpha,12}(x,t) := f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t), \ |\alpha| \in M,$$
$$a_{\alpha,12}(x,t) := a_\alpha(x,t,\delta u_1(x,t)) - a_\alpha(x,t,\delta u_2(x,t)), \ |\alpha| \in M,$$

у підсумку отримаємо рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \{ (\sum_{|\alpha| \in M} a_{\alpha,12} D^\alpha v) \varphi - u_{12} v \varphi' \} \, dxdt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \in M} f_{\alpha,12} D^\alpha v \varphi \, dxdt,$$

до якої застосуємо лему 2.1 з $\tau_1 = t_0 - R$, $\tau_2 = \tau \in (t_0 - R, t_0]$, $w = u_{12}$, $g_\alpha = a_{\alpha,12} - f_{\alpha,12}$ $(|\alpha| \in M)$, $\theta = \eta^s$, $s := p_0^-/(p_0^- - 2)$. Звідси здобуваємо рівність

$$\eta^s(\tau) \int\limits_{\Omega} |u_{12}(x,\tau)|^2 dx + 2 \int\limits_{t_0 - R}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \in M} a_{\alpha,12} \, D^\alpha u_{12} \eta^s \, dxdt =$$

$$= s\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_{12}|^2\eta^{s-1}\,dxdt + 2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,12}\,D^{\alpha}u_{12}\eta^{s}\,dxdt. \tag{2.12}$$

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (2.12). Згідно з умовою $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M} a_{\alpha,12}D^{\alpha}u_{12}\eta^{s}\,dxdt \geqslant K_a\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^{\alpha}u_{12}|^{p_{\alpha}(x)}\eta^{s}\,dxdt. \tag{2.13}$$

Далі нам буде потрібна нерівність:

$$a\,b \leqslant \varepsilon|a|^q + \varepsilon^{-1/(q-1)}\,|b|^{\,q'}, a,b\in\mathbb{R},\ q>1,\ 1/q+1/q'=1,\ \varepsilon>0, \tag{2.14}$$

яка є наслідком стандартної нерівності Юнга: $a\,b \leqslant |a|^q/q + |b|^{q'}/q'$.

Вибираючи (для майже кожного $x\in\Omega$) $q = p_0(x)/2$, $q' = p_0(x)/(p_0(x)-2)$, $a = |u_{12}|^2\eta^{s/q}$, $b = \eta^{s/q'-1}$, $\varepsilon=\varepsilon_1>0$, на підставі (2.14) отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_{12}|^2\eta^{s-1}dxdt \leqslant \varepsilon_1\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_{12}|^{p_0(x)}\eta^{s}\,dxdt+$$

$$+\varepsilon_1^{-2/(p_0^- -2)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\eta^{s-p_0(x)/(p_0(x)-2)}\,dxdt, \tag{2.15}$$

де $\varepsilon_1\in(0,1)$ – довільне число.

Знову використовуючи нерівність (2.14), одержуємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,12}\,D^{\alpha}u_{12}\eta^{s}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^{\alpha}u_{12}|^{p_{\alpha}(x)}\eta^{s}\,dxdt + \int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\varepsilon_2^{-1/(p_{\alpha}^- -1)}|f_{12}|^{p'_{\alpha}(x)}\eta^{s}\,dxdt, \tag{2.16}$$

де $\varepsilon_2\in(0,1)$ – довільне число.

З (2.12) на підставі (2.13), (2.15), (2.16) за достатньо малих значень ε_1 і ε_2 отримаємо

$$\eta^{s}(\tau)\int\limits_{\Omega_R}|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx + \int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^{\alpha}u_{12}|^{p_{\alpha}(x)}\eta^{s}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_5\Big[\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\eta^{s-p_0(x)/(p_0(x)-2)}\,dxdt+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{12}|^{p'_\alpha(x)}\eta^{s}\,dxdt\Big],\qquad(2.17)$$

де $C_5>0$ – стала, яка залежить тільки від K_a і p_α^-, $|\alpha|\in M$, а $\tau\in(t_0-R,t_0]$ – довільне число.

Оскільки $0\leqslant\eta(t)\leqslant R$, коли $t\in[t_0-R,t_0]$, та $\eta(t)\geqslant R-R_0$, коли $t\in[t_0-R_0,t_0]$, то з нерівності (2.17) отримаємо нерівність

$$(R-R_0)^s\int\limits_{\Omega}|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx+(R-R_0)^s\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)}\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_5\Big[\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}R^{s-p_{\widehat{0}}(x)/(p_{\widehat{0}}(x)-2)}\,dxdt+R^s\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{12}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\Big].\qquad(2.18)$$

Поділимо отриману нерівність на $(R-R_0)^s$. Зауважимо, що оскільки $R\geqslant\max\{1;2R_0\}$, то маємо $R/(R-R_0)=1+R_0/(R-R_0)\leqslant 2$. Врахувавши це та нерівність $R^{-p_{\widehat{0}}(x)/(p_{\widehat{0}}(x)-2)}\leqslant R^{-p_{\widehat{0}}^+/(p_{\widehat{0}}^+-2)}$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}(D^\alpha u_{12})^{p_\alpha(x)}\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_6\Big[R^{-p_{\widehat{0}}^+/(p_{\widehat{0}}^+-2)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}dxdt+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{12}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\Big],\qquad(2.19)$$

де C_6 – додатна стала, яка залежить тільки від K_a і p_α^-, $|\alpha|\in M$, а $\tau\in(t_0-R,t_0]$ – довільне число.

Звідси, врахувавши, що $\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega}dxdt=R\cdot\mathrm{mes}_n\Omega$, отримаємо (2.11). ∎

2.1.3 Обґрунтування основних результатів підрозділу

Доведення теореми 2.1. Спочатку доведемо, що задача (2.1), (2.2) *має не більше одного узагальненого розв'язку*, використовуючи метод доведення від супротивного. Припустимо, що правильним є протилежне твердження. Нехай u_1, u_2 – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. Тоді на підставі леми 2.2 маємо

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int\limits_{\Omega}|u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2\,dx\leqslant C_4R^{-2/(p_{\widehat{0}}^+-2)},\qquad(2.20)$$

де R, R_0, t_0 – довільні числа такі, що $R_0>0$, $R\geqslant\max\{1,2R_0\}$, $t_0\in\mathbb{R}$.

Зафіксуємо числа $R_0>0$ і $t_0\in\mathbb{R}$ та перейдемо в (2.20) до границі при $R\to+\infty$. У результаті отримаємо, що $u_1=u_2$ майже скрізь на $Q_{t_0-R_0,t_0}$. Оскільки R_0, t_0 – довільні числа, то звідси одержуємо, що $u_1=u_2$ майже всюди на Q. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Тепер перейдемо до доведення *існування узагальненого розв'язку* задачі (2.1), (2.2).

Для кожного $m\in\mathbb{N}$ покладемо $S_m:=S\cap(-m,+\infty)$, $Q_m:=\Omega\times S_m$, $f_{\alpha,m}(x,t):=f_\alpha(x,t)$, якщо $(x,t)\in Q_m$, і $f_{\alpha,m}(x,t):=0$, якщо $(x,t)\in Q\backslash Q_m$, і розглянемо мішану задачу для рівняння (2.1) в області Q_m з однорідною початковою умовою і крайовими умовами типу (2.2), а точніше, задачу на знаходження функції $u_m\in\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}_m)\cap C(\overline{S_m};L_2(\Omega))$, яка задовольняє початкову умову:

$$u_m|_{t=-m}=0$$

та інтегральну рівність

$$\int\limits_{Q_m}\big\{-u_m v\varphi'+\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta u_m)D^\alpha v\varphi\big\}\,dxdt=\int\limits_{Q_m}\sum_{|\alpha|\in M}f_{\alpha,m}(x,t)D^\alpha v\varphi\,dxdt \tag{2.21}$$

для будь-яких $v\in\mathbb{V}_p$, $\varphi\in C_c^1(\operatorname{int}S_m)$.

Існування та єдиність функції u_m доведено в роботі [67]. Продовжимо u_m нулем на Q і за цим продовженням збережемо позначення u_m. Покажемо, що послідовність $\{u_m\}$ збігається в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ до узагальненого розв'язку задачі (2.1), (2.2). Для цього спочатку зауважимо, що для кожного $m\in\mathbb{N}$ функція u_m є узагальненим розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (2.1),(2.2) тільки тим, що замість f_α стоїть $f_{\alpha,m}$ для кожного α, $|\alpha|\in M$. Отож, на підставі леми 2.2 для будь-яких натуральних чисел m і k маємо

$$\max_{t\in[t_0,t_0-R_0]}\int\limits_\Omega|u_m(x,t)-u_k(x,t)|^2dx+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_\Omega\big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_m-D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)}\big)\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_4\big\{R^{-2/(p_0^+-2)}+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,m}(x,t)-f_{\alpha,k}(x,t)|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\big\}, \tag{2.22}$$

де R, R_0, t_0 – довільні числа такі, що $t_0 \in \mathbb{R},\ R \geqslant 1,\ 0 < R_0 < R/2$.

Покажемо, що при фіксованих t_0 і R_0 ліва частина нерівності (2.22) прямує до нуля при $m, k \to +\infty$. Справді, нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Виберемо $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$ настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_4 R^{-2/(p_0^+ - 2)} < \varepsilon. \tag{2.23}$$

Це можна зробити, оскільки $p_0^+ - 2 > 0$. Тоді для будь-яких m і k з $\mathbb{N}$ таких, що $\max\{-m, -k\} \leqslant t_0 - R$, маємо $f_{\alpha,m} = f_{\alpha,k}$ $(|\alpha| \in M)$ майже всюди на $\Omega \times (t_0 - R, t_0)$ і, отже, права частина нерівності (2.22) на підставі (2.23) є меншою за ε. Звідси випливає, що звуження членів послідовності $\{u_m\}$ на $Q_{t_0-R_0,t_0}$ утворює фундаментальну послідовність в просторі $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_0-R_0,t_0}) \cap C([t_0 - R_0, t_0]; L_2(\Omega))$. Отже, в силу довільності t_0 і R_0 існує функція $u \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ така, що $u_m \to u$ в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. Зауваживши, що в (2.21) можна замінити інтегрування по Q_m на інтегрування по Q, перейдемо в цій рівності до границі при $m \to \infty$. У результаті отримаємо (2.4) для довільних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$. Це означає, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (2.1),(2.2). Оцінка (2.5) безпосередньо випливає з леми 2 при $u_1 = u,\ u_2 = 0,\ f_{\alpha,1} = f_\alpha,\ f_{\alpha,2} = 0$, $|\alpha| \in M$. ∎

Доведення наслідків 2.1–2.3. Ці твердження неважко отримати, використовуючи оцінку (2.5). ∎

Доведення теореми 2.2. Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (2.1), (2.2). Введемо позначення: $u^{(\mu)}(x,t) := u(x, t+\mu),\ f_\alpha^{(\mu)}(x,t) := f_\alpha(x, t+\mu)$, $a_\alpha^{(\mu)}(x,t,\xi) := a_\alpha(x, t+\mu, \xi),\ (x,t) \in Q$, де $\mu \in \mathbb{R}$. Зробимо в (2.4) заміну t на $t + \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$ – поки що довільне) . У результаті здобуваємо тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha^{(\mu)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) D^\alpha v\varphi - u^{(\mu)} v\varphi' \Big\}\, dxdt =$$
$$= \iint\limits_Q \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha^{(\mu)}(x,t) D^\alpha v\varphi \, dxdt$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p, \varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$. Звідси, зробивши очевидні перетворення, отримаємо інтегральну тотожність

$$\int\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha^{(0)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) D^\alpha v\varphi - u^{(\mu)} v\varphi' \Big\}\, dxdt =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} \{a_\alpha^{(0)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) - a_\alpha^{(\mu)}(x,t,\delta u^{(\mu)})\} D^\alpha v\varphi\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha^{(\mu)}(x,t) D^\alpha v\varphi\, dxdt,\ v\in \mathbb{V}_p,\ \varphi\in C_0^1(\mathbb{R}). \qquad (2.24)$$

Підставивши $\mu=\sigma$ в (2.24) і врахувавши періодичність a_α і f_α $(|\alpha|\in M)$, приходимо до висновку, що $u^{(\sigma)}$ – узагальнений розв'язок (2.1),(2.2). В силу єдиності узагальненого розв'язку цієї задачі маємо, що $u^{(0)} = u^{(\sigma)}$ майже скрізь на Q, тобто функція u є періодичною за t з періодом σ. ∎

Доведення теореми 2.3. Приймемо

$$a_\alpha^{(\mu)}[w](x,t) := \hat{a}_\alpha(x,t+\mu)|D^\alpha w(x,t)|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha w(x,t),$$

$$(x,t)\in Q\ (|\alpha|\in M).$$

Міркуючи так як при отриманні тотожності (2.24), приходимо до тотожності

$$\int\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha^{(0)}[u^{(\mu)}]\, D^\alpha v\, \varphi - u^{(\mu)}\, v\, \varphi' \Big\}\, dxdt =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} \big\{ a_\alpha^{(0)}[u^{(\mu)}] - a_\alpha^{(\mu)}[u^{(\mu)}] \big\}\, D^\alpha v\, \varphi\, dxdt + \int\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha^{(\mu)}\, D^\alpha v\, \varphi\, dxdt \quad (2.25)$$

для будь-яких $v\in \mathbb{V}_p,\ \varphi\in C_0^1(\mathbb{R})$.

Нехай $\delta_* := \min\{1; K_a/2\}$ і $\sigma\in F_{\delta_*}$, де F_ε визначено у формулюванні теореми. Розглянемо тотожність (2.25) спочатку для $\mu=0$, а потім для $\mu=\sigma$. Тоді, використовуючи лему 2.2 з $u_1 = u^{(0)}$, $u_2 = u^{(\sigma)}$, $a_\alpha(x,t,\xi) = \hat{a}_\alpha(x,t)|\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)-2}\xi_\alpha\,(|\alpha|\in M)$, $f_{\alpha,1} = f_\alpha^{(0)}$, $f_{\alpha,2} = a_\alpha^{(\sigma)}[u^{(0)}] - a_\alpha^{(\sigma)}[u^{(\sigma)}] + f_\alpha^{(\sigma)}$ $(|\alpha|\in M)$, $t_0=\tau\in\mathbb{R}$ – довільне, $R_0=1$, $R=l\in\mathbb{N}$ $(l\geqslant 2)$, отримаємо

$$\max_{t\in[\tau-1,\tau]} \int\limits_\Omega |u^{(\sigma)}(x,t) - u^{(0)}(x,t)|^2\, dx + \int\limits_{\tau-1}^{\tau} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u^{(\sigma)} - D^\alpha u^{(0)}|^{p_\alpha(x)} \Big)\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \Big\{ l^{-2/(p_0^+-2)} + \int\limits_{\tau-l}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |a_\alpha^{(0)}[u^\sigma] - a_\alpha^{(\sigma)}[u^\sigma] + f_\alpha^{(\sigma)} - f_\alpha^{(0)}|^{{p_\alpha}'(x)}\, dxdt \Big\}. \quad (2.26)$$

На підставі нерівності

$$(a+b)^\nu \leqslant 2^{\nu-1}(a^\nu + b^\nu), \quad a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ \nu\geqslant 1,$$

маємо

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|a_\alpha^{(0)}[u^{(\sigma)}]-a_\alpha^{(\sigma)}[u^{(\sigma)}]+f_\alpha^{(\sigma)}-f_\alpha^{(0)}|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\alpha|\in M}2^{1/(p_\alpha^- -1)}\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big(|f_\alpha^{(\sigma)}-f_\alpha^{(0)}|^{p'_\alpha(x)}+|a_\alpha^{(\sigma)}[u^\sigma]-a_\alpha^{(0)}[u^\sigma]|^{p'_\alpha(x)}\big)\,dxdt. \quad (2.27)$$

Здобуваємо

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|a_\alpha^{(\sigma)}[u^\sigma]-a_\alpha^{(0)}[u^\sigma]|^{p'_\alpha(x)}dxdt=$$

$$=\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|\hat{a}_\alpha(x,t+\sigma)-\hat{a}_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\big(\sup_{t\in\mathbb{R}}||\hat{a}_\alpha(\cdot,t+\sigma)-\hat{a}_\alpha(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)}\big)^{(p_\alpha^+)'}\times\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt. \quad (2.28)$$

На підставі леми 2.2 отримаємо

$$\sum_{|\alpha|\in M}\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt\leqslant C_4\big\{(2l)^{-2/(p_0^+-2)}+\int\limits_{\tau-2l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\big\}. \quad (2.29)$$

Тоді з (2.26), враховуючи $(2.27),(2.28)$ і (2.29) здобуваємо

$$\int\limits_{\Omega}|u^{(\sigma)}(x,\tau)-u^{(0)}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u^{(\sigma)}-D^\alpha u^{(0)}|^{p_\alpha(x)}\big)\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_7\big\{l^{-2/(p_0^+-2)}+\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\tau-k}^{\tau-k+1}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\big(|f_\alpha^{(\sigma)}-f_\alpha^{(0)}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt+$$

$$+\max_{|\alpha|\in M}\big(\sup_{t\in\mathbb{R}}||a_\alpha^{(\sigma)}(\cdot,t)-a_\alpha(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)}\big)^{(p_\alpha^+)'}\times$$

$$\times\big(l^{-2/(p_0^+-2)}+\sum_{k=1}^{2l}\int\limits_{\tau-k}^{\tau-k+1}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\big)\big\}, \quad (2.30)$$

де C_7 – стала, яка від τ,σ і l не залежить.

Оскільки функції $f_\alpha\,(|\alpha|\in M)$ є майже періодичними за Степановим як елементи простору $L_{p_\alpha'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, то правильна оцінка

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int\limits_{\tau}^{\tau-1}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p_\alpha'(x)}\,dxdt\leqslant C_8,\tag{2.31}$$

де $C_8=const\geqslant 0$.

Нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале фіксоване число. Покажемо, що множина

$$U_\varepsilon:=\Big\{\sigma\in\mathbb{R}\Big|\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_{\Omega}|u(x,t+\sigma)-u(x,t)|^2\,dx\leqslant\varepsilon,$$

$$\sup_{|\tau|\in\mathbb{R}}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u(x,t+\sigma)-D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\Big]\,dxdt\leqslant\varepsilon\Big\}$$

містить множину F_δ для деякого $\delta\in(0,\delta_*]$, тобто є відносно щільною. Справді, виберемо $l\in\mathbb{N}\,(l\geqslant 2)$ настільки великим, щоби виконувалася нерівність

$$C_7 l^{-2/(p_0^+-2)}\leqslant\varepsilon/2,\tag{2.32}$$

і зафіксуємо це значення l. Тепер візьмемо $\delta\in(0,\delta_*]$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$C_7\big(l\cdot\delta+\max_{|\alpha|\in M}\delta^{(p_\alpha^+)'}\big(l^{-2/(p_0^+-2)}+2lC_8\big)\big)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\tag{2.33}$$

Отже, якщо $\sigma\in F_\delta$, то права частина нерівності (2.30) на підставі (2.31), (2.32), (2.33) менша або рівна ε. Звідси випливає, що $F_\delta\subset U_\varepsilon$, що і треба було довести. ∎

2.2 Еліптично-параболічні сильно нелінійні диференціальні рівняння

2.2.1 Постановка задачі і формулювання основних результатів

Розглянемо ***задачу***: знайти функцію $u:\overline{Q}\to\mathbb{R}$ яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t+\sum_{|\alpha|\in M}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u)=\sum_{|\alpha|\in M}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha f_\alpha(x,t),\quad (x,t)\in Q,\tag{2.34}$$

та крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_{\Sigma} = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{2.35}$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$, $|\alpha| \in M$, – задані функції, які задовольняють вказані нижче умови, δu таке ж, як в рівнянні (2.1).

Тут і далі будемо вважати, що виконується умова:

($\mathcal{B}$) $b : \Omega \to \mathbb{R}$ – *вимірна обмежена функція,* $0 < b(x) \leqslant 1$ *для* $x \in \Omega_0 \subset \Omega$ *і* $b(x) = 0$ *для* $x \in \Omega \setminus \Omega_0$, *де* Ω_0 – *відкрита множина.*

Відмітимо, що виконання нерівності $0 < b(x) \leqslant 1$ нам потрібне для доведення основних результатів. Якщо ж $\sup\limits_{x\in\Omega} b(x) > 1$, то, поділивши рівняння на $\sup\limits_{x\in\Omega} b(x)$, отримаємо дану умову.

Нехай $p(\cdot) = (p_\alpha(\cdot) : |\alpha| \in M)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову ($\mathcal{P}$) з підрозділу 2.1. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, складену з впорядкованих наборів $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$, визначених на $Q \times \mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів простору $\mathbb{R}^N$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють такі три умови:

($\mathcal{A}_1$) для кожного α, $|\alpha| \in M$, функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, є каратеодорівською і, крім того, $a_\alpha(x,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

($\mathcal{A}_2$) для кожного $\alpha\,(|\alpha| \in M)$, для майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ маємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta|\in M} |\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)} + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha \in L_{p_\alpha{}'(\,\cdot\,)}(\overline{Q})$;

($\mathcal{A}_3$) для майже всіх $(x,t) \in Q$ та всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant K_1 \sum_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^{p_\alpha(x)},$$

де $K_1 > 0$ – стала, яка залежить від набору ($a_\alpha : |\alpha| \in M$).

Розглядатимемо також підмножину $\mathbb{A}_p^*$ множини $\mathbb{A}_p$, складену з елементів вигляду

$$\big(a_\alpha(x,t,\xi) \equiv \widehat{a}_\alpha(x,t)|\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)-2}\xi_\alpha : |\alpha| \in M\big),$$

де для всіх α, $|\alpha| \in M$, $\widehat{a}_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ та

$$\widehat{a}_\alpha(x,t) \geqslant K_2 > 0 \quad \text{для майже всіх} \quad (x,t) \in Q, \tag{2.36}$$

де $K_2 > 0$ – стала, що залежить від $(\widehat{a}_\alpha : |\alpha| \in M)$.

Включення $\mathbb{A}_p^* \subset \mathbb{A}_p$ легко перевірити опираючись на нерівність

$$(|s_1|^{q-2}s_1 - |s_2|^{q-2}s_2)(s_1 - s_2) \geqslant 2^{2-q}|s_1 - s_2|^q,$$

де $q \geqslant 2$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ – довільні.

Відмітимо, що якщо $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$ належить $\mathbb{A}_p^*$, то рівняння (2.34) має вигляд

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\widehat{a}_\alpha(x,t)|D^\alpha u|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha u) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q. \tag{2.37}$$

Частковим випадком рівняння (2.37) (а отже, і рівняння (2.34)) є

$$(b(x)u)_t + (-\Delta)^m u + |u|^{p_{\widehat{0}}(x)-2} u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Нехай $\widetilde{b}(x) = b(x)$, якщо $x \in \Omega_0$, і $\widetilde{b}(x) = 1$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Позначимо через $H_b(\Omega)$ лінійний простір функцій вигляду $w = \widetilde{b}^{-1/2} v$, де $v \in L_2(\Omega)$, наділений півнормою

$$\|w\|_{H_b(\Omega)} = \Big(\int_\Omega b(x)|w(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}.$$

Легко перевірити, що простір $H_b(\Omega)$ є поповненням лінійного простору $\mathbb{V}_p$ за півнормою $\|\cdot\|_{H_b(\Omega)}$ (див. [7]).

Покладемо

$$\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C(\mathbb{R}; H_b(\Omega)).$$

Простір $\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ є повним лінійним локально опуклим з сім'єю півнорм

$$\Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} + \|h\|_{C([t_1,t_2];H_b(\Omega))} \Big|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \Big\}, \quad h \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}).$$

Послідовність $\{g_m\}$ збіжна в просторі $\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$, якщо вона збіжна в просторах $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ та $C(S; H_b(\Omega))$.

Нехай $\mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ – введений в підрозділі 2.1 функційний простір, тобто лінійний простір, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha : |\alpha| \in M)$ з N визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$, і для кожного α, $|\alpha| \in M$, функція f_α належить простору $L_{p'_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Означення 2.2. *Нехай функції b, p задовольняють умови $(\mathcal{B})$, $(\mathcal{P})$, відповідно, і $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.*

Узагальненим розв'язком задачі (2.34), (2.35) *називатимемо функцію $u \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, яка задовольняє інтегральна рівність*

$$\iint\limits_Q \Big[-buv\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u)D^\alpha v\varphi\Big]\,dxdt = \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha v\varphi\,dxdt \qquad (2.38)$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p$, $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$.

Теорема 2.4. *Нехай функції b, p задовольняють умови $(\mathcal{B})$, $(\mathcal{P})$, відповідно, і $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.*

Тоді задача (2.34), (2.35) *має узагальнений розв'язок і тільки один. Крім того, для будь-яких R, R_0, t_0 таких, що $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ виконується оцінка*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,t)|^2\,dx + \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(R^{-2/(p_0^+-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\Big), \qquad (2.39)$$

де $C > 0$ – стала, яка залежить тільки від K_1, $\mathrm{mes}_n\Omega$, p_α^-, $|\alpha| \in M$.

Наслідок 2.4. *Нехай виконуються умови теореми 2.4 та $f_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ для кожного α, $|\alpha| \in M$. Тоді узагальнений розв'язок задачі (2.34), (2.35) задовольняє оцінку*

$$\sup_{t\in S} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt. \qquad (2.40)$$

Наслідок 2.5. *Нехай виконуються умови теореми 2.4 та*

$$\sup_{\tau\in S}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\leqslant C_1$$

де C_1 *– стала, тоді узагальнений розв'язок* u *задачі (2.34), (2.35) задовольняє оцінку*

$$\sup_{t\in S}\int\limits_{\Omega}b(x)|u(x,t)|^2\,dx\leqslant C_2,\quad \sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt\leqslant C_2,$$

де $C_2>0$ *– стала, яка залежить лише від* K_1, C_1 *та* p_α^-, $|\alpha|\in M$.

Наслідок 2.6. *Нехай виконуються умови теореми 2.4 та*

$$\lim_{\tau\to-\infty(+\infty)}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt=0$$

(символ $+\infty$ *береться, якщо* $S=\mathbb{R}$*). Тоді, якщо* u *– узагальнений розв'язок задачі (2.34), (2.35), то*

$$\lim_{t\to-\infty(+\infty)}\|u(\cdot,t)\|_{H_b(\Omega)}=0,\quad \lim_{\tau\to-\infty(+\infty)}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt=0.$$

Теорема 2.5. *Нехай* $S=\mathbb{R}$ *і виконуються умови теореми 2.4. Припустимо, що функції* a_α *і* f_α, $|\alpha|\in M$, *є періодичними за змінною* t *з періодом* σ. *Тоді задача (2.34), (2.35) має узагальнений розв'язок і тільки один, причому він є періодичним за змінною* t *з періодом* σ.

Теорема 2.6. *Нехай* $S=\mathbb{R}$ *і виконуються умови теореми 2.4. Припустимо, що* $\big(a_\alpha(x,t,\xi)\equiv\widehat{a}_\alpha(x,t)|\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)-2}\xi_\alpha : |\alpha|\in M\big)\in A_p^*$ *та для кожного* α, $|\alpha|\in M$, *функція* $\widehat{a}_\alpha$ *належить простору* $C(\mathbb{R};L_\infty(\Omega))$ *і є майже періодичною за Бором як елемент цього простору, а функція* f_α *є майже періодичною за Степановим як елемент простору* $L_{p'_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *і, крім того, для довільного* $\delta>0$ *множина*

$$F_\delta:=\{\sigma\mid\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha\in M}|f_\alpha(x,t+\sigma)-f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\leqslant\delta,$$

$$\max_{|\alpha|\in M}\sup_{t\in\mathbb{R}}\|a_\alpha(\cdot,t+\sigma)-a_\alpha(\cdot,t)\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant\delta\}$$

є відносно щільною.

Тоді задача (2.37), (2.35) має узагальнений розв'язок і тільки один, причому він є майже періодичним за Бором як елемент простору $C(\mathbb{R};H_b(\Omega))$ та майже періодичним за Степановим як елемент простору $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

2.2.2 Допоміжні твердження

Лема 2.3. *Припустимо, що функції b, p задовольняють умови $(\mathcal{B})$, $(\mathcal{P})$, відповідно, а $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ – які-небудь, причому $t_2-t_1\geqslant 1$. Нехай функція $w\in\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ така, що виконується тотожність*

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\Big\{-bwv\varphi'+\Big(\sum_{|\alpha|\in M}g_\alpha D^\alpha v\Big)\varphi\Big\}\,dxdt=0,\quad v\in\mathbb{V}_p,\ \varphi\in C_c^1(t_1,t_2),\tag{2.41}$$

для деяких $g_\alpha\in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$, $|\alpha|\in M$.

Тоді $w\in C\big([t_1,t_2];H_b(\Omega)\big)$ і для будь-яких $\theta\in C^1([t_1,t_2])$, $v\in\mathbb{V}_p$, $\tau_1,\tau_2\in[t_1,t_2]$, $\tau_1<\tau_2$, маємо

$$\theta(\tau_2)\int_\Omega b(x)w(x,\tau_2)v(x)\,dx-\theta(\tau_1)\int_\Omega b(x)w(x,\tau_1)v(x)\,dx+$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega\Big[-bwv\theta'+\Big(\sum_{|\alpha|\in M}g_\alpha D^\alpha v\Big)\theta\Big]\,dxdt=0,\tag{2.42}$$

$$\frac12\theta(\tau_2)\|w(\cdot,\tau_2)\|^2_{H_b(\Omega)}-\frac12\theta(\tau_1)\|w(\cdot,\tau_1)\|^2_{H_b(\Omega)}-$$

$$-\frac12\int_{\tau_1}^{\tau_2}\|w(\cdot,t)\|^2_{H_b(\Omega)}\theta'(t)\,dt+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega\Big(\sum_{|\alpha|\in M}g_\alpha D^\alpha w\Big)\theta\,dxdt=0.\tag{2.43}$$

Доведення. Обґрунтування цієї леми подібне до доведення леми 1 роботи [14]. ∎

Лема 2.4. *Припустимо, що функції b, p задовольняють умови $(\mathcal{B})$, $(\mathcal{P})$, відповідно, $(a_\alpha:|\alpha|\in M)\in\mathbb{A}_p$ і для деяких чисел $t_1,t_2\in\mathbb{R}$, $t_2-t_1\geqslant 1$,* *та кожного* $l \in \{1,2\}$ *функції* $u_l \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2}) \cap C([t_1,t_2];H_b(\Omega))$, $f_{\alpha,l} \in L_{p_\alpha{}'(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ *(*$|\alpha| \in M$ *) такі, що виконується рівність*

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \big[-bu_l v\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_l)D^\alpha v\varphi\big]\,dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,l}D^\alpha v\varphi\,dxdt \tag{2.44}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p$ *and* $\varphi \in C^1_c(t_1,t_2)$.

Тоді для довільних чисел R, R_0, t_0 *таких, що* $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_1 \leqslant t_0 - R < t_0 \leqslant t_2$, *правильна нерівність*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int_\Omega b(x)|u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\int_{t_0-R_0}^{t_0}\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2|^{p_\alpha(x)}\,dxdt$$

$$\leqslant C\big[R^{-2/(p_0^+-2)} + \int_{t_0-R}^{t_0}\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,1}-f_{\alpha,2}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\big], \tag{2.45}$$

де $C_4 > 0$ *– така ж стала, як в теоремі 2.4.*

Доведення. Обґрунтування цієї леми подібне до доведення леми 2.2 і наведене в роботі [18]. ∎

2.2.3 Обґрунтування основних результатів підрозділу

Доведення теореми 2.4. Спочатку доведемо, що задача (2.34), (2.35) *має не більше одного узагальненого розв'язку*, використовуючи метод доведення від супротивного. Припустимо, що правильним є протилежне твердження. Нехай u_1, u_2 – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. Тоді на підставі леми 2.4 для довільних чисел R, R_0, t_0 таких, що $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, маємо

$$\int_{t_0-R_0}^{t_0}\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha(u_1-u_2)|^{p_\alpha(x)}\,dxdt \leqslant CR^{-2/(p_0^+-2)}. \tag{2.46}$$

Зафіксуємо числа $R_0 > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$ та перейдемо в (2.46) до границі при $R \to +\infty$.У результаті отримаємо, що $u_1 = u_2$ майже скрізь на $Q_{t_0-R_0,t_0}$. Оскільки R_0, t_0 – довільні числа, то звідси одержуємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Q. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Тепер перейдемо до доведення *існування узагальненого розв'язку* задачі (2.34), (2.35). Для цього для кожного $m \in \mathbb{N}$ покладемо $S_m := S \cap (-m, +\infty)$ і розглянемо мішану задачу для рівняння (2.34) в області $Q_m := \Omega \times (-m, +\infty)$ з однорідною початковою умовою і крайовими умовами типу (2.35), а точніше, задачу на знаходження функції $u_m \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q_m}) \cap C(\overline{S_m}; H_b(\Omega))$, яка задовольняє початкову умову:

$$||u_m(\cdot, -m)||_{H_b(\Omega)} = 0$$

та інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_m} \bigl[-bu_m v\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_m) D^\alpha v\varphi\bigr]\, dxdt = \iint\limits_{Q_m} \sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,m} D^\alpha v\varphi\, dxdt,$$

$$v \in \mathbb{V}_p,\ \varphi \in C^1_c(\mathrm{int} S_m), \tag{2.47}$$

де $f_{\alpha,m}(x,t) := f_\alpha(x,t)$, якщо $(x,t) \in Q_m$, і $f_{\alpha,m}(x,t) := 0$, якщо $(x,t) \in Q \setminus Q_m$.

Існування та єдиність функції u_m доведено в роботі [67] (див. також [53] та [14]). Продовжимо u_m нулем на Q і за цим продовженням збережемо позначення u_m. Покажемо, що послідовність $\{u_m\}$ збігається в $\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ до узагальненого розв'язку задачі (2.34), (2.35). Для цього спочатку зауважимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція u_m є узагальненим розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (2.34), (2.35) тільки тим, що замість f_α стоїть $f_{\alpha,m}$ для кожного $\alpha\,(|\alpha| \in M)$. Отож, на підставі леми 2.4 для будь-яких натуральних чисел m і k маємо

$$\max_{t\in[t_0,t_0-R_0]} \int\limits_\Omega b(x)|u_m(x,t) - u_k(x,t)|^2\, dx +$$

$$+ \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u_m - D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)}\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C\Big\{R^{-2/(p_0^+-2)}+\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,m}(x,t)-f_{\alpha,k}(x,t)|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\Big\},\qquad(2.48)$$

де R, R_0, t_0 – довільні числа такі, що $t_0\in\mathbb{R},\ R_0\geqslant 0,\ R\geqslant\max\{1,2R_0\}$.

Покажемо, що при фіксованих t_0 і R_0 ліва частина нерівності (2.48) прямує до нуля при $m,k\to+\infty$. Справді, нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале число. Виберемо R настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$CR^{-2/(p_0^+-2)}<\varepsilon.\qquad(2.49)$$

Це можна зробити, оскільки $p_0^+-2>0$. З (2.49) для будь-яких $m,k\in\mathbb{N}$ таких, що $\max\{-m,-k\}\leqslant t_0-R$, маємо $f_{\alpha,m}=f_{\alpha,k}$ $(|\alpha|\in M)$ майже всюди $\Omega\times(t_0-R,t_0)$ і, отже, права частина нерівності (2.48) є меншою за ε. Звідси випливає, що звуження членів послідовності $\{u_m\}$ на $Q_{t_0-R_0,t_0}$ утворює фундаментальну послідовність в просторі $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_0-R_0,t_0})\cap C([t_0-R_0,t_0];H_b(\Omega))$. Отже, в силу довільності t_0 і R_0 існує функція $u\in\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$ така, що $u_m\to u$ в $\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$. Зауваживши, що в (2.47) можна замінити інтегрування по Q_m на інтегрування по Q, перейдемо в цій рівності до границі при $m\to\infty$. У результаті отримаємо

$$\iint\limits_Q\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta u_m)D^\alpha v\varphi dxdt\to\iint\limits_Q\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta u)D^\alpha v\varphi dxdt$$

(цей факт випливає з леми 2.2 монографії [34]), звідки випливає (2.38) для довільних $v\in\mathbb{V}_p$ і $\varphi\in C^1_c(\mathrm{int}S)$. Це означає, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (2.34), (2.35). Оцінка (2.39) безпосередньо випливає з леми (2.4) при $u_1=u,\ u_2=0,\ f_{\alpha,1}=f_\alpha,\ f_{\alpha,2}=0$, $|\alpha|\in M$. ∎

Доведення наслідків 2.4–2.6. Ці твердження легко випливають з оцінки (2.39). ∎

Доведення теореми 2.5. Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (2.34), (2.35). Введемо позначення:

$$u^{(\mu)}(x,t):=u(x,t+\mu),\quad f_\alpha^{(\mu)}(x,t):=f_\alpha(x,t+\mu),$$

$$a_\alpha^{(\mu)}(x,t,\xi):=a_\alpha(x,t+\mu,\xi),\quad (x,t)\in Q,\ \ \xi\in\mathbb{R}^N,\quad \mu\in\mathbb{R}.$$

Зробимо заміну t на $t+\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$ – поки що довільне) в (2.38). У результаті здобуваємо тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha^{(\mu)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) D^\alpha v \varphi - b u^{(\mu)} v \varphi' \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha^{(\mu)} D^\alpha v \varphi \, dxdt, \quad v \in \mathbb{V}_p, \ \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

Звідси, зробивши очевидні перетворення, отримаємо інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha^{(0)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) D^\alpha v \varphi - b u^{(\mu)} v \varphi' \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} \big\{ a_\alpha^{(0)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) - a_\alpha^{(\mu)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) \big\} D^\alpha v \varphi \, dxdt +$$

$$+ \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha^{(\mu)} D^\alpha v \varphi \, dxdt, \quad v \in \mathbb{V}_p\,, \ \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}). \quad (2.50)$$

З (2.50), при $\mu = \sigma$, врахувавши періодичність функцій a_α та f_α ($|\alpha| \in M$), приходимо до висновку, що $u^{(\sigma)}$ – узагальнений розв'язок (2.34), (2.35). В силу єдиності узагальненого розв'язку цієї задачі маємо, що $u^{(0)} = u^{(\sigma)}$ майже скрізь на Q, тобто функція u є періодичною за t з періодом σ. ∎

Доведення теореми 2.6. Для всіх $\mu \in \mathbb{R}$ приймемо

$$a_\alpha^{(\mu)}[w](x,t) := \hat{a}_\alpha(x,t+\mu) |D^\alpha w(x,t)|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha w(x,t), \quad (x,t) \in Q, \ |\alpha| \in M.$$

Міркуючи так як при отриманні тотожності (2.50), приходимо до тотожності

$$\iint\limits_Q \Big\{ -b u^{(\mu)} v \varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha^{(0)}[u^{(\mu)}]\, D^\alpha v\, \varphi \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} \Big\{ a_\alpha^{(0)}[u^{(\mu)}] - a_\alpha^{(\mu)}[u^{(\mu)}] + f_\alpha^{(\mu)} \Big\}\, D^\alpha v\, \varphi \, dxdt, \quad v \in \mathbb{V}_p, \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}). \quad (2.51)$$

Нехай $\delta_* := \min\{1; K_1/2\} > 0$ і $\sigma \in F_{\delta_*}$, де F_δ визначено у формулюванні теореми. Розглянемо тотожність (2.51) спочатку для $\mu = 0$, а потім для $\mu = \sigma$. Тоді, використовуючи лему 2.4 з

$$u_1 = u^{(0)}, \quad u_2 = u^{(\sigma)}, \quad a_\alpha(x,t,\xi) = \widehat{a}_\alpha(x,t) |\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)-2} \xi_\alpha,$$

$$f_{\alpha,1} = f_\alpha^{(0)}, \quad f_{\alpha,2} = a_\alpha^{(0)}[u^{(\sigma)}] - a_\alpha^{(\sigma)}[u^{(\sigma)}] + f_\alpha^{(\sigma)},\ |\alpha| \in M),$$

$$t_0 = \tau \in \mathbb{R} \text{ – довільне}, \quad R_0 = 1,\ R = l \in \mathbb{N}, \quad l \geqslant 2,$$

отримаємо

$$\max_{t\in[\tau-1,\tau]} \int\limits_\Omega b(x)|u^{(\sigma)}(x,t) - u^{(0)}(x,t)|^2\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u^{(\sigma)} - D^\alpha u^{(0)}|^{p_\alpha(x)}\Big)\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C\Big\{l^{-2/(p_0^+-2)} + \int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} \big||a_\alpha^{(0)}[u^\sigma] - a_\alpha^{(\sigma)}[u^\sigma]| + |f_\alpha^{(\sigma)} - f_\alpha^{(0)}|\big|^{{p_\alpha}'(x)}\,dxdt\Big\}. \quad (2.52)$$

На підставі нерівності

$$(a+c)^\nu \leqslant 2^{\nu-1}(a^\nu + c^\nu), \quad a \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ \nu \geqslant 1,$$

отримаємо

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} \big||a_\alpha^{(0)}[u^{(\sigma)}] - a_\alpha^{(\sigma)}[u^{(\sigma)}]| + |f_\alpha^{(\sigma)} - f_\alpha^{(0)}|\big|^{{p_\alpha}'(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|\in M} 2^{1/(p_\alpha^- - 1)} \int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_\Omega \big(|a_\alpha^{(\sigma)}[u^\sigma] - a_\alpha^{(0)}[u^\sigma]|^{p'_\alpha(x)} + |f_\alpha^{(\sigma)} - f_\alpha^{(0)}|^{p'_\alpha(x)}\big)\,dxdt. \quad (2.53)$$

Для будь-якого α, $|\alpha| \in M$, маємо

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_\Omega |a_\alpha^{(\sigma)}[u^\sigma] - a_\alpha^{(0)}[u^\sigma]|^{p'_\alpha(x)}dxdt =$$

$$= \int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_\Omega |\widehat{a}_\alpha(x,t+\sigma) - \widehat{a}_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\hat{a}_\alpha(\cdot,t+\sigma) - \hat{a}_\alpha(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)}\Big)^{(p_\alpha^+)'} \int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_\Omega |D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt. \quad (2.54)$$

Оскільки $u^{(\sigma)}$ – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від (2.34), (2.35) тільки тим, що ми маємо $a_\alpha(x,t+\sigma,\xi)$ замість $a_\alpha(x,t,\xi)$ та $f_\alpha^{(\sigma)}$ замість

f_α, $|\alpha|\in M$, то $u^{(\sigma)}$ задовольняє оцінку (2.39) з заміною u на $u^{(\sigma)}$ та f_α на $f_\alpha^{(\sigma)}$, $|\alpha|\in M$. З цієї оцінки при $t_0=\tau,\ R_0=l,\ R=2l$ одержуємо

$$\sum_{|\alpha|\in M}\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt\leqslant C_4\big[(2l)^{-2/(p_0^+-2)}+\int\limits_{\tau-2l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\big].\tag{2.55}$$

Тоді з (2.52), враховуючи (2.53) – (2.55), здобуваємо

$$\int\limits_{\Omega}b(x)|u^{(\sigma)}(x,\tau)-u^{(0)}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u^{(\sigma)}-D^\alpha u^{(0)}|^{p_\alpha(x)}\big)\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_5\Big(l^{-2/(p_0^+-2)}+\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\tau-k}^{\tau-k+1}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\big(|f_\alpha^{(\sigma)}-f_\alpha^{(0)}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt+\tag{2.56}$$

$$+\max_{|\alpha|\in M}\big(\sup_{t\in\mathbb{R}}||a_\alpha^{(\sigma)}(\cdot,t)-a_\alpha(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)}\big)^{(p_\alpha^+)'}\big[l^{-2/(p_0^+-2)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2l}\int\limits_{\tau-k}^{\tau-k+1}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\big]\Big),$$

де $C_5>0$ – стала, яка від τ,σ і l не залежить.

Оскільки функції f_α, $|\alpha|\in M,$ є майже періодичними за Степановим як елементи простору $L_{p'_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, то правильна оцінка

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int\limits_{\tau}^{\tau-1}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\leqslant C_6,\tag{2.57}$$

де $C_6>0$ – стала, яка від τ,σ і l не залежить.

Нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале фіксоване число. Покажемо, що множина

$$U_\varepsilon:=\big\{\sigma\in\mathbb{R}\big|\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_{\Omega}b(x)|u(x,t+\sigma)-u(x,t)|^2\,dx\leqslant\varepsilon,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big[\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u(x,t+\sigma)-D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\big]\,dxdt\leqslant\varepsilon\big\}$$

містить множину F_δ для деякого $\delta \in (0, \delta_*]$, тобто є відносно щільною. Справді, виберемо $l \in \mathbb{N}\,(l \geqslant 2)$ настільки великим, щоби виконувалася нерівність

$$C_5 l^{-2/(p_0^+ - 2)} \leqslant \varepsilon/2. \tag{2.58}$$

Тепер візьмемо $\delta \in (0, \delta_*]$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$C_5\big(l\delta + \max_{|\alpha| \in M} \delta^{(p_\alpha^+)'}\big(l^{-2/(p_0^+ - 2)} + 2lC_6\big)\big) \leqslant \varepsilon/2. \tag{2.59}$$

Отже, якщо $\sigma \in F_\delta$, то права частина нерівності (2.56) менша або рівна ε. Звідси випливає, що $F_\delta \subset U_\varepsilon$ і множина U_ε відносно щільна, що і треба було довести. ∎

2.3 Еліптично-параболічні сильно нелінійні інтегро-диференціальні рівняння

2.3.1 Постановка задачі і формулювання основного результату

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u) + \int\limits_{\Omega} c(x,y,t,u(y,t))dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{2.60}$$

та крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_{\Sigma} = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{2.61}$$

де b – функція, яка задовольняє умову $(\mathcal{B})$ з підрозділу 2.2, $a_\alpha : Q\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $c : \Omega\times\Omega\times(0,T)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_\alpha : Q\to\mathbb{R}$, $|\alpha|\in M$, – задані функції, δu таке ж, як в рівнянні (2.1).

Нехай $p = (p_\alpha : |\alpha|\in M)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову $(\mathcal{P})$ з підрозділу 2.1. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, складену з впорядкованих наборів $(a_\alpha : |\alpha|\in M)$, визначених на $Q\times\mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів простору $\mathbb{R}^N$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють такі три умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного α $(|\alpha|\in M)$ функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi)\in Q\times\mathbb{R}^N$, є каратеодорівською і, крім того, $a_\alpha(x,t,0)=0$ для майже всіх $(x,t)\in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $\alpha\,(|\alpha|\in M)$, для майже всіх $(x,t)\in Q$ і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^N$ маємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t)\sum_{|\beta|\in M} |\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)} + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha\in L_{p'_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t)\in Q$ та для кожного $\xi,\eta\in\mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\xi)-a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha-\eta_\alpha) \geqslant K_1|\xi_{\widehat{0}}-\eta_{\widehat{0}}|^2 + K_2\sum_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha-\eta_\alpha|^{p_\alpha(x)},$$

де $K_1, K_2 = \mathrm{const} > 0$.

Розглядатимемо також множину $\mathbb{A}_p^*$, складену з елементів вигляду $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \equiv (a_\alpha)$ таких що

$$a_\alpha(x,t,\xi) = \widehat{a}_\alpha(x,t)|\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)-2}\xi_\alpha \quad \forall\alpha,\ |\alpha| \in M/\{0\},$$

$$a_0(x,t,\xi) = \widehat{a}_0(x,t)|\xi_0|^{p_0(x)-2}\xi_0 + \widetilde{a}_0(x,t)\xi_0$$

для майже всіх $(x,t) \in Q$ та для всіх $(\xi_\alpha) \in \mathbb{R}^n$, де $\widetilde{a}_0 \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\widehat{a}_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, та

$$\operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q} \widetilde{a}_0(x,t) > 0, \quad \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_\alpha(x,t) > 0 \quad \text{для всіх} \quad \alpha,\ |\alpha| \in M. \tag{2.62}$$

Зауваження 2.1. *Множина* $\mathbb{A}_p^*$ *є підмножиною множини* $\mathbb{A}_p$. *Справді, легко перевірити, що для кожного* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$ *виконуються умови (* $\mathcal{A}_1$ *) та (* $\mathcal{A}_2$ *). Умова (* $\mathcal{A}_3$ *) випливає з нерівності*

$$(|s_1|^{q-2}s_1 - |s_2|^{q-2}s_2)(s_1 - s_2) \geqslant 2^{2-q}|s_1 - s_2|^q, \quad q \geqslant 2,\ s_1, s_2 \in \mathbb{R},$$

(див., наприклад, [60]), та умова (2.62), з

$$K_1 = \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q} \widetilde{a}_0(x,t), \quad K_2 = \min_{|\alpha|\in M} \left[2^{2-p_\alpha^-} \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_\alpha(x,t)\right].$$

Нехай $\mathbb{C}$ – множина функцій $c : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють такі умови:

($\mathcal{C}_1$) функція $c(x,y,t,s)$, $(x,y,t,s) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, є каратеодорівською; $c(x,y,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}$;

($\mathcal{C}_2$) для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}$ та довільних $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|c(x,y,t,s_1) - c(x,y,t,s_2)| \leq L|s_1 - s_2|,$$

де $L > 0$ – стала.

Також розглянемо множину $\mathbb{C}^*$, складену з функцій $c : \Omega\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких що

$$c(x,y,t,s) = \widehat{c}(x,y,t)s, \quad (x,y,t,s) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

де $\widehat{c} \in L_\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R})$.

Зауваження 2.2. *Множина* $\mathbb{C}^*$ *є підмножиною множини* $\mathbb{C}$. *Справді, для* $c \in \mathbb{C}^*$ *умови* $(\mathcal{C}_1)$ *є очевидною, а умова* $(\mathcal{C}_2)$ *виконується при* $L = \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}} |\widehat{c}(x,y,t)|$.

Зауважимо, що якщо (a_α) належить $\mathbb{A}_p^*$ та c належить $\mathbb{C}^*$, то рівняння (2.60) має вигляд

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\widehat{a}_\alpha(x,t)|D^\alpha u|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha u) + \widetilde{a}_0(x,t)u+$$

$$+\int\limits_\Omega \widehat{c}(x,y,t)u(y,t)\,dy = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t)\in Q. \tag{2.63}$$

Частковим випадком рівняння (2.63) а отже, і рівняння (2.60) є

$$(b(x)u)_t + (-\Delta)^m u + \widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2} + \widetilde{a}_0(x,t)u+$$

$$+\int\limits_\Omega \widehat{c}(x,y,t)u(y,t)dy = f(x,t), \quad (x,t)\in Q,$$

де Δ – оператор Лапласа.

Далі будемо використовувати введений в підрозділі 2.2 функційний простір $\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, тобто

$$\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C(\mathbb{R}; H_b(\Omega)).$$

з сім'єю півнорм

$$\Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} + \|h\|_{C([t_1,t_2];H_b(\Omega))} \;\Big|\; t_1,t_2\in\mathbb{R} \Big\}, \quad h\in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}).$$

Відмітимо, що послідовність $\{g_m\}$ збіжна в просторі $\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ якщо вона збіжна в просторах $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ та $C(\mathbb{R}; H_b(\Omega))$.

Нехай $\mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ – введений в підрозділі 2.1 функційний простір, тобто лінійний простір, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha : |\alpha|\in M)$ з N визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$, і для кожного α, $|\alpha|\in M$, функція f_α належить простору $L_{p'_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Означення 2.3. *Нехай функції* b *та* p *задовольняють умови* $(\mathcal{B})$ *та* $(\mathcal{P})$, *відповідно, і* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, $c \in \mathbb{C}$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Узагальненим розв'язком задачі (2.60), (2.61) *називатимемо функцію* $u \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$, *якщо вона задовольняє інтегральну рівність*

$$\iint\limits_Q \Big[-buv\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha v\varphi + v\varphi \int\limits_\Omega c(x,y,t,u(y,t))\,dy\Big]\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha v\varphi\,dxdt \tag{2.64}$$

для будь-яких $v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(\mathrm{int}\, S)$.

Теорема 2.7. *Нехай функції* b *та* p *задовольняють умови* $(\mathcal{B})$ *та* $(\mathcal{P})$, *відповідно, і* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, $c \in \mathbb{C}$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. *Припустимо, що*

$$K_1 > L mes_n \Omega\,. \tag{2.65}$$

Тоді задача (2.60) – (2.61) *має і тільки один узагальнений розв'язок. Крім того, для будь-яких* R, R_0, t_0 *таких що* $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ *виконується оцінка*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,t)|^2\,dx + \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)} + |u(x,t)|^2\Big)\,dxdt$$

$$\leqslant C_1\Big(R^{-2/(p_0^+-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\Big), \tag{2.66}$$

де $C_1 > 0$ – *стала, яка залежить тільки від* $K_1, K_2, L, mes_n\Omega$ *і* p^-_α, $|\alpha| \in M$.

Теорема 2.8. *Нехай виконуються умови теореми 2.7 та функції* $a_\alpha(|\alpha| \in M)$ *і* $f_\alpha(|\alpha| \in M)$ *є періодичними за змінною* t *з періодом* σ. *Тоді задача (2.60), (2.61) має узагальнений розв'язок і тільки один, причому він є періодичним за змінною* t *з періодом* σ.

Теорема 2.9. *Нехай функції* b, p *задовольняють умови* $(\mathcal{B})$ *та* $(\mathcal{P})$, *відповідно, і* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $c \in \mathbb{C}^*$, $f_\alpha \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$. *Крім того, виконується нерівність*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q} \widetilde{a}_0(x,t) > \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}} |\widehat{c}(x,y,t)| \cdot \mathrm{mes}_n\Omega\,.$$

Припустимо, що функція $\widehat{a}_\alpha$ $(|\alpha| \in M)$, $\widetilde{a}_0$ *є майже періодичною за Бором як елемент простору* $C(\mathbb{R}; L_\infty(\Omega))$, *функція* c *є майже періодичною за Бором як елемент простору* $C(\mathbb{R}; L_\infty(\Omega\times\Omega))$, *а функція* f_α *є майже періодичною за Степановим як елемент простору* $L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \in M)$. *Крім того, для довільного* $\delta > 0$ *множина*

$$F_\delta := \Big\{\sigma \mid \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_{\tau-1}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha\in M} |f_\alpha(x,t+\sigma) - f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\, dxdt \leqslant \delta,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\widetilde{a}_0(\cdot,t+\sigma) - \widetilde{a}_0(\cdot,t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \delta,$$

$$\max_{|\alpha|\in M} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\widehat{a}_\alpha(\cdot,t+\sigma) - \widehat{a}_\alpha(\cdot,t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \delta,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\widehat{c}(\cdot,\cdot,t+\sigma) - \widehat{c}(\cdot,\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega\times\Omega)} \leqslant \delta\Big\}$$

є відносно щільною.

Тоді задача (2.63), (2.61) має узагальнений розв'язок і тільки один, причому він є майже періодичним за Бором як елемент простору $C(\mathbb{R}; H_b(\Omega))$ *та майже періодичним за Степановим як елемент простору* $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

2.3.2 Допоміжне твердження

Далі нам буде потрібне таке твердження.

Лема 2.5. *Припустимо, що* b *та* p *задовольняють умови* $(\mathcal{B})$ *і* $(\mathcal{P})$, *відповідно,* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, $c \in \mathbb{C}$ *та виконується умова (2.65), і для деяких чисел* $t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ t_2 - t_1 \geqslant 1$, *та кожного* $l \in \{1,2\}$ *функції*

$$u_l \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2}) \cap C([t_1,t_2]; H_b(\Omega)),$$

$$f_{\alpha,l} \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q_{t_1,t_2}), \quad |\alpha| \in M, \quad \widetilde{f}_{0,l} \in L_2(Q_{t_1,t_2})$$

такі, що виконується рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\Big[-bu_l v\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_l)D^\alpha v\varphi + v\varphi\int\limits_{\Omega} c(x,y,t,u_l(y,t))\,dy\Big]\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,l}D^\alpha v\varphi + \widetilde{f}_{0,l}v\varphi\Big]\,dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega), \forall\varphi\in C^1_c(t_1,t_2). \quad (2.67)$$

Тоді для довільних чисел R, R_0, t_0 *таких, що* $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_1 \leqslant t_0 - R < t_0 \leqslant t_2$, *правильна нерівність*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int\limits_{\Omega} b(x)|u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2\,dx$$

$$+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2|^{p_\alpha(x)} + |u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2\Big)\,dxdt \leqslant C_4\Big[R^{-2/(p_0^+-2)}+$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,1}(x,t)-f_{\alpha,2}(x,t)|^{p'_\alpha(x)} + |\widetilde{f}_{0,1}(x,t)-\widetilde{f}_{0,2}(x,t)|^2\Big)\,dxdt\Big], \quad (2.68)$$

де C_4 *– стала, яка залежить тільки від* $K_1, K_2, L, \mathrm{mes}_n\Omega$ *і* p_α^-, $|\alpha|\in M$.

Доведення. Нехай R, R_0, t_0 такі, як у формулюванні леми, і $\eta(t) := t - t_0 + R$, $t\in\mathbb{R}$. Для заданих $v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$ та $\varphi\in C^1_c(t_1,t_2)$ розглянемо рівність (2.67) при $l=1$ та цю ж рівність при $l=2$ і віднімемо ці рівності. Прийнявши для майже всіх $x\in\Omega$, $y\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{gathered}
u_{12}(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)\,,\\
a_{\alpha,12}(x,t) := a_\alpha(x,t,\delta u_1(x,t)) - a_\alpha(x,t,\delta u_2(x,t))\,,\ |\alpha|\in M,\\
c_{12}(x,y,t) := c(x,y,t,u_1(y,t)) - c(x,y,t,u_2(y,t))\,,\\
f_{\alpha,12}(x,t) := f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t)\,,\ |\alpha|\in M,\\
\widetilde{f}_{0,12}(x,t) := \widetilde{f}_{0,1}(x,t) - \widetilde{f}_{0,2}(x,t),
\end{gathered}$$

отримаємо рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\Big\{\Big(\sum_{|\alpha|\in M} a_{\alpha,12}D^\alpha v\Big)\varphi + \Big(\int\limits_{\Omega} c_{12}(x,y,t)\,dy\Big)v\varphi - b(x)u_{12}v\varphi'\Big\}\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,12}(x,t) D^\alpha v\varphi \, + \widetilde{f}_{0,12}(x,t) v\varphi \Big\} dxdt. \qquad (2.69)$$

Звідси, використовуючи лему 2.3 при $\tau_1 = t_0 - R,\ \tau_2 = \tau \in (t_0 - R, t_0],\ w = u_{12},\ g_\alpha = a_{\alpha,12} - f_{\alpha,12}\ \ \forall \alpha,\ |\alpha| \in M/\{0\},\ g_0 = a_{0,12} + \big(\int_\Omega c_{12}\, dy\big) - f_{0,12} - \widetilde{f}_{0,12}$, $\theta = \eta^s$, де $s := 2p_0^-/(p_0^- - 2)$, одержимо

$$\eta^s(\tau) \int\limits_\Omega b(x) |u_{12}(x,\tau)|^2 dx +$$

$$+2 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} a_{\alpha,12}\, D^\alpha u_{12} + \Big(\int\limits_\Omega c_{12}(x,y,t)\, dy \Big) u_{12} \Big) \eta^s \, dxdt =$$

$$= s \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega b(x) |u_{12}|^2 \eta^{s-1}\, dxdt +$$

$$+2 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,12}(x,t) D^\alpha u_{12} \, + \widetilde{f}_{0,12}(x,t) u_{12} \Big) \eta^s \, dxdt. \qquad (2.70)$$

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (2.70). Згідно з умовою $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_{\alpha,12} D^\alpha u_{12} \eta^s \, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant K_1 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega |u_{12}|^2 \eta^s \, dxdt + K_2 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)} \eta^s \, dxdt. \qquad (2.71)$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, одержимо

$$\left| \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega c_{12}(x,y,t)\, dy \Big) u_{12} \eta^s \, dxdt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega |c(x,y,t,u_1) - c(x,y,t,u_2)| \, dy \Big) |u_{12}(x,t)| \, \eta^s \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega |u_{12}(y,t)|\, dy \Big) |u_{12}(x,t)| \, \eta^s \, dxdt =$$

$$= L\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\Big(\int\limits_{\Omega}|u_{12}(x,t)|\,dx\Big)\Big(\int\limits_{\Omega}|u_{12}(y,t)|\,dy\Big)\eta^s\,dt =$$

$$= L\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\Big(\int\limits_{\Omega}|u_{12}(x,t)|\ dx\Big)^2\eta^s dt \leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_{12}|^2\,\eta^s dxdt. \qquad (2.72)$$

Далі нам буде потрібна нерівність:

$$ac \leqslant \varepsilon|a|^q + \varepsilon^{-1/(q-1)}\,|c|^{q'}, \quad a,c\in\mathbb{R},\ q>1,\ 1/q+1/q'=1,\ \varepsilon>0, \qquad (2.73)$$

яка є наслідком стандартної нерівності Юнга: $ac \leqslant |a|^q/q + |c|^{q'}/q'$.

Вибираючи (для майже кожного $x\in\Omega$) $q = p_0(x)/2$, $q' = p_0(x)/(p_0(x)-2)$, $a = b|u_{12}|^2\eta^{s/q}$, $c=\eta^{s/q'-1}$, з умови $(\mathcal{B})$, на підставі (2.73) отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega} b|u_{12}|^2\eta^{s-1}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_{12}|^{p_0(x)}\eta^s\,dxdt + \varepsilon_1^{-2/(p_0^- -2)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\eta^{s-p_0(x)/(p_0(x)-2)}\,dxdt, \qquad (2.74)$$

де $\varepsilon_1\in(0,1)$ – довільне число.

Знову використовуючи нерівність (2.73), отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,12}\,D^\alpha u_{12}\eta^s\,dxdt \leqslant \varepsilon_2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)}\eta^s\,dxdt +$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\varepsilon_2^{-1/(p_\alpha^- -1)}|f_{\alpha,12}|^{p'_\alpha(x)}\eta^s\,dxdt, \qquad (2.75)$$

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\widetilde{f}_{0,12}\,u_{12}\eta^s\,dxdt \leqslant \varepsilon_3\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_{12}|^2\eta^s\,dxdt + \varepsilon_3^{-1}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|\widetilde{f}_{0,12}|^2\eta^s\,dxdt, \qquad (2.76)$$

де $\varepsilon_2,\varepsilon_3\in(0,1)$ – довільні числа.

З (2.70) використовуючи (2.65), (2.71), (2.72), (2.74) – (2.76), за достатньо малих значень ε_1, ε_2 і ε_3 отримаємо

$$\eta^s(\tau)\int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)}+|u_{12}|^2\Big)\eta^s\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_5\Big[\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\eta^{s-p_0(x)/(p_0(x)-2)}\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,12}|^{p'_\alpha(x)}\eta^s\,dxdt+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|\widetilde{f}_{0,12}|^2\eta^s\,dxdt\Big],\quad (2.77)$$

де $C_5>0$ – стала, яка залежить тільки від $K_1,K_2,L,\mathrm{mes}_n\Omega$ і p_α^- $(|\alpha|\in M)$.

Оскільки $0\leqslant\eta(t)\leqslant R$, коли $t\in[t_0-R,t_0]$, та $\eta(t)\geqslant R-R_0$, коли $t\in[t_0-R_0,t_0]$, з (2.77) отримаємо

$$(R-R_0)^s\int\limits_{\Omega} b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx+$$

$$+(R-R_0)^s\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)}+|u_{12}|^2\Big)\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_5\Big[\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}R^{s-p_0(x)/(p_0(x)-2)}dxdt+$$

$$+R^s\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,12}|^{p'_\alpha(x)}+|\widetilde{f}_{0,12}|^2\Big)dxdt\Big].\quad (2.78)$$

Поділимо отриману нерівність на $(R-R_0)^s$. Зауважимо, що $R\geqslant\max\{1;2R_0\}$ (звідси, зокрема, $R/(R-R_0)=1+R_0/(R-R_0)\leqslant 2$). Врахувавши це та нерівність $R^{-p_0(x)/(p_0(x)-2)}\leqslant R^{-p_0^+/(p_0^+-2)}$, для всіх $\tau\in[t_0-R_0,t_0]$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)}+|u_{12}|^2\Big)\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_6\Big[R^{-p_0^+/(p_0^+-2)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\,dxdt+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,12}|^{p'_\alpha(x)}+|\widetilde{f}_{0,12}|^2\Big)\,dxdt\Big],\quad (2.79)$$

де C_6 – додатна стала, яка залежить тільки від $K_1, K_2, L, \mathrm{mes}_n\Omega$ та p_α^- $(|\alpha| \in M)$,

Звідси, врахувавши, що $\int\limits_{t_0-R}^{t_0} \int\limits_\Omega dxdt = R\,\mathrm{mes}_n\Omega$, отримаємо (2.68). ∎

2.3.3 Обґрунтування основних результатів підрозділу

Доведення теореми 2.7. *(Єдиність розв'язку)* Спочатку доведемо, що задача (2.60),(2.61) має не більше одного узагальненого розв'язку, використовуючи метод доведення від супротивного. Припустимо, що правильним є протилежне твердження. Нехай u_1, u_2 – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. Тоді на підставі леми 2.5, для довільних R, R_0, t_0 при $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0} \int\limits_\Omega |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2\,dx \leqslant C_4 R^{-2/(p_0^+-2)}. \tag{2.80}$$

Зафіксуємо числа $R_0 > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$ та перейдемо в (2.80) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що $u_1 = u_2$ майже скрізь на $Q_{t_0-R_0,t_0}$. Оскільки R_0 і t_0 – довільні числа, то звідси одержуємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Q. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

(Існування розв'язку) Тепер перейдемо до доведення існування узагальненого розв'язку задачі (2.60) – (2.61). Для цього для кожного $m \in \mathbb{N}$ покладемо $S_m := S \cap (-m, +\infty)$ і розглянемо мішану задачу для рівняння (2.60) в області $Q_m := \Omega \times S_m$ з однорідною початковою умовою і крайовими умовами типу (2.61), а точніше, задачу на знаходження функції $u_m \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q_m}) \cap C(\overline{S}_m; H_b(\Omega))$, яка задовольняє початкову умову:

$$||u_m(\cdot, -m)||_{H_b(\Omega)} = 0$$

та інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_m} \Big\{-bu_m v\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_m) D^\alpha v\varphi + v\varphi \int\limits_\Omega c(x,y,t,u_m(y,t))\,dy\Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_m} \sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,m}(x,t) D^\alpha v\varphi\,dxdt, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{p(\cdot)}(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(-m,+\infty), \tag{2.81}$$

де $f_{\alpha,m}(x,t) := f_\alpha(x,t)$, якщо $(x,t) \in Q_m$, і $f_{\alpha,m}(x,t) := 0$, якщо $(x,t) \in Q \setminus Q_m$.

Існування та єдиність функції u_m доведиться подібно до доведення в [67] (див. також [14] та [53]). Продовжимо u_m нулем на Q і за цим продовженням збережемо позначення u_m. Покажемо, що послідовність $\{u_m\}$ збігається в $\mathbb{U}^b_{p,loc}$ до узагальненого розв'язку задачі (2.60)-(2.61). Для цього спочатку зауважимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція u_m є узагальненим розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (2.60)-(2.61) тільки тим, що замість f_α стоїть $f_{\alpha,m}$ для кожного $\alpha\,(|\alpha| \in M)$. Отож, на підставі леми 2.5 для будь-яких натуральних чисел m і k маємо

$$\max_{t\in[t_0,t_0-R_0]} \int\limits_\Omega b(x)|u_m(x,t) - u_k(x,t)|^2 dx +$$

$$+ \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u_m - D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)} + |u_m(x,t) - u_k(x,t)|^2 \Big)\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \big\{ R^{-2/(p_0^+-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_{\alpha,m}(x,t) - f_{\alpha,k}(x,t)|^{p_\alpha{}'(x)}\, dxdt \big\}, \qquad (2.82)$$

де t_0, R_0, R а – довільні числа такі, що $t_0 \in \mathbb{R},\ R_0 > 0,\ R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$.

Покажемо, що при фіксованих t_0 і R_0 ліва частина нерівності (2.82) прямує до нуля при $m, k \to +\infty$. Справді, нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Виберемо R настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_4 R^{-2/(p_0^+-2)} < \varepsilon. \qquad (2.83)$$

Це можна зробити, оскільки $p_0^+ - 2 > 0$. З (2.83) для будь-яких $m, k \in \mathbb{N}$ таких що $\max\{-m, -k\} \leqslant t_0 - R$, маємо $f_{\alpha,m} = f_{\alpha,k}$ $(|\alpha| \in M)$ майже скрізь на $\Omega \times (t_0 - R, t_0)$ і права частина (2.82) є меншою за ε. Звідси випливає, що звуження членів послідовності $\big\{u_m\big|_{Q_{t_0-R_0,t_0}}\big\}$ утворює фундаментальну послідовність в просторі $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_0-R_0,t_0}) \cap C([t_0 - R_0, t_0]; H_b(\Omega))$. Отже, в силу довільності t_0 і R_0 існує функція $u \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$ така що $u_m \to u$ в $\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$. Отримуємо

$$\iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_m) D^\alpha v \varphi\, dxdt \to \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha v \varphi\, dxdt$$

(цей факт випливає з леми 2.2 в можна замінити інтегрування по Q_m на інтегрування по Q, перейдемо в цій рівності до границі при $m \to \infty$. У результаті отримаємо (2.64) для всіх $v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$ та $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$. Це означає, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (2.60), (2.61). Оцінка (2.66) безпосередньо випливає з леми 2.5 при $u_1 = u$, $u_2 = 0$, $f_{\alpha,1} = f_\alpha$, $f_{\alpha,2} = 0$ $(|\alpha| \in M)$. ∎

Доведення теореми 2.8. Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (2.60), (2.61). Введемо позначення: $u^{(\mu)}(x,t) := u(x,t+\mu)$, $c^{(\mu)}(x,y,t,s) := c(x,y,t+\mu,s)$, $f^{(\mu)}_\alpha(x,t) := f_\alpha(x,t+\mu)$, $a^{(\mu)}_\alpha(x,t,\xi) := a_\alpha(x,t+\mu,\xi)$, $x \in \Omega$, $y \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, де $\mu \in \mathbb{R}$. Зробимо заміну t на $t+\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$ – поки що довільне) в (2.64). У результаті здобуваємо тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a^{(\mu)}_\alpha(x,t,\delta u^{(\mu)}) D^\alpha v \varphi +$$

$$+\Big(\int\limits_\Omega c^{(\mu)}(x,y,t,u^{(\mu)}(y,t))\,dy \Big) v\varphi - b(x) u^{(\mu)} v \varphi' \Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f^{(\mu)}_\alpha(x,t) D^\alpha v \varphi \,dxdt \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}).$$

Звідси, зробивши очевидні перетворення, отримаємо інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a^{(0)}_\alpha(x,t,\delta u^{(\mu)}) D^\alpha v \varphi +$$

$$+\Big(\int\limits_\Omega c^{(0)}(x,y,t,u^{(\mu)}(y,t))\,dy \Big) v\varphi - b(x) u^{(\mu)} v \varphi' \Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \Big[\sum_{|\alpha|\in M} \Big[a^{(0)}_\alpha(x,t,\delta u^{(\mu)}) - a^{(\mu)}_\alpha(x,t,\delta u^{(\mu)}) \Big] D^\alpha v \varphi +$$

$$+\Big[\int\limits_\Omega \big(c^{(0)}(x,y,t,u^{(\mu)}(y,t)) - c^{(\mu)}(x,y,t,u^{(\mu)}(y,t)) \big)\,dy \Big] v\varphi +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\in M} f^{(\mu)}_\alpha(x,t) D^\alpha v \varphi \Big]\,dxdt \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}). \tag{2.84}$$

З (2.84) при $\mu = \sigma$, врахувавши періодичність функцій a_α та f_α $(|\alpha| \in M)$, приходимо до висновку, що $u^{(\sigma)}$ – узагальнений розв'язок (2.60), (2.61). В силу єдиності узагальненого розв'язку цієї задачі маємо, що $u^{(0)} = u^{(\sigma)}$ майже скрізь на Q, тобто функція u є періодичною за t з періодом σ. ∎

Доведення теореми 2.9. Існування та єдиність розв'язку випливає з теореми 2.7, враховуючи зауваження 2.1 і 2.2. Залишається довести майже періодичність узагальненого розв'язку задачі (2.60), (2.61).

Для всіх $\mu \in \mathbb{R}$ приймемо $\widetilde{a}_0^{(\mu)}(x,t) := \widetilde{a}_0(x,t+\mu)$, $\widehat{a}_\alpha^{(\mu)}(x,t) := \widehat{a}_\alpha(x,t+\mu)$, $f_\alpha^{(\mu)}(x,t) := f_\alpha(x,t+\mu)$ $\quad(|\alpha| \in M)$, $\widehat{c}^{(\mu)}(x,y,t) := \widehat{c}(x,y,t+\mu)$ for $x \in \Omega$, $y \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$. Міркуючи так як при отриманні теореми (2.8), приходимо до тотожності

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \widehat{a}_\alpha^{(0)} |D^\alpha u^{(\mu)}|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha u^{(\mu)}\, D^\alpha v\, \varphi + \widetilde{a}_0^{(0)} u^{(\mu)} v\varphi +$$

$$+ \Big(\int\limits_\Omega \widehat{c}^{(0)}(x,y,t) u^{(\mu)}(y,t) dy \Big) v\varphi - b u^{(\mu)} v \varphi' \Big\} dxdt$$

$$= \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M} (\widehat{a}_\alpha^{(0)} - \widehat{a}_\alpha^{(\mu)}) |D^\alpha u^{(\mu)}|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha u^{(\mu)}\, D^\alpha v\, \varphi + (\widetilde{a}_0^{(0)} - \widetilde{a}_0^{(\mu)}) u^{(\mu)} v\varphi$$

$$+ \Big(\int\limits_\Omega \big(\widehat{c}^{(0)}(x,y,t) - \widehat{c}^{(\mu)}(x,y,t)\big) u^{(\mu)}(y,t)\, dy \Big) v\varphi$$

$$+ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha^{(\mu)}(x,t)\, D^\alpha v\, \varphi \Big)\, dxdt \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}). \tag{2.85}$$

Нехай $\sigma \in F_\delta\, (\sigma \neq 0)$ для довільного фіксованого $\delta \in (0,1)$, де F_δ визначено в теоремі. Розглянемо тотожність (2.85) спочатку для $\mu = 0$, а потім для $\mu = \sigma$. Тоді, використовуючи зауваження 2.1 та 2.2 з леми 2.5 при $u_1 = u^{(0)}$, $u_2 = u^{(\sigma)}$, $a_\alpha(x,t,\xi) = \widehat{a}_\alpha^{(0)}(x,t)|\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)-2}\xi_\alpha \quad \forall \alpha, |\alpha| \in M/\{0\}$, $a_0(x,t,\xi) = \widehat{a}_0^{(0)}(x,t)|\xi_0|^{p_0(x)-2}\xi_0 + \widetilde{a}_0^{(0)}(x,t)\xi_0$, $c(x,y,t,s) = \widehat{c}^{(0)}(x,y,t)s$, $f_{\alpha,1} = f_\alpha^{(0)}$, $f_{\alpha,2} = (\widehat{a}_\alpha^{(0)} - \widehat{a}_\alpha^{(\sigma)})|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha u^{(\sigma)} + f_\alpha^{(\sigma)} \quad \forall \alpha,\ |\alpha| \in M$, $\widetilde{f}_{0,1} = 0$, $\widetilde{f}_{0,2} = (\widetilde{a}_0^{(0)} - \widetilde{a}_0^{(\sigma)})u^{(\sigma)} + \int\limits_\Omega (\widehat{c}^{(0)}(x,y,t) - \widehat{c}^{(\sigma)}(x,y,t))u^{(\sigma)}(y,t)dy$, $t_0 = \tau \in \mathbb{R}$ – довільне фіксоване, $R_0 = 1$, $R = l \in \mathbb{N}$ and $l \geqslant 2$, отримаємо

$$\max_{t\in[\tau-1,\tau]} \int\limits_\Omega b(x)|u^{(\sigma)}(x,t) - u^{(0)}(x,t)|^2\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\tau-1}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u^{(\sigma)} - D^\alpha u^{(0)}|^{p_\alpha(x)}\, dxdt \leqslant C_4 \Big\{ l^{-2/(p_0^+ - 2)} +$$

$$+\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\Big|(\widehat{a}_\alpha^{(0)}-\widehat{a}_\alpha^{(\sigma)})|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)-2}D^\alpha u^{(\sigma)}+f_\alpha^{(\sigma)}-f_\alpha^{(0)}\Big|^{p'_\alpha(x)}dxdt+$$

$$+\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big|\big(\widetilde{a}_0^{(0)}-\widetilde{a}_0^{(\sigma)}\big)u^{(\sigma)}+\int\limits_{\Omega}\big(\widehat{c}^{(0)}(x,y,t)-\widehat{c}^{(\sigma)}(x,y,t)\big)u^{(\sigma)}(y,t)dy\Big|^2dxdt\Big\}. \tag{2.86}$$

На підставі нерівності $(a+c)^\nu\leqslant 2^{\nu-1}(a^\nu+c^\nu),\quad a\geqslant 0,\ c\geqslant 0,\ \nu\geqslant 1,$ маємо

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\Big|(\widehat{a}_\alpha^{(0)}-\widehat{a}_\alpha^{(\sigma)})|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)-2}D^\alpha u^{(\sigma)}+f_\alpha^{(\sigma)}-f_\alpha^{(0)}\Big|^{p'_\alpha(x)}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}2^{1/(p_\alpha^- -1)}\Big[|f_\alpha^{(\sigma)}-f_\alpha^{(0)}|^{p'_\alpha(x)}+\big|\widehat{a}_\alpha^{(\sigma)}-\widehat{a}_\alpha^{(0)}\big|^{p'_\alpha(x)}\leqslant|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}\Big]dxdt, \tag{2.87}$$

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big|\big(\widetilde{a}_0^{(0)}-\widetilde{a}_0^{(\sigma)}\big)u^{(\sigma)}+\int\limits_{\Omega}\big(\widehat{c}^{(0)}(x,y,t)-\widehat{c}^{(\sigma)}(x,y,t)\big)u^{(\sigma)}(y,t)dy\Big|^2dxdt$$

$$\leqslant 2\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big[\big|\widetilde{a}_0^{(0)}-\widetilde{a}_0^{(\sigma)}\big|^2\big|u^{(\sigma)}\big|^2+\Big(\int\limits_{\Omega}\big|\widehat{c}^{(0)}(x,y,t)-\widehat{c}^{(\sigma)}(x,y,t)\big||u^{(\sigma)}(y,t)|dy\Big)^2\Big]dxdt. \tag{2.88}$$

Одержуємо

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big|\widehat{a}_\alpha^{(\sigma)}-\widehat{a}_\alpha^{(0)}\big|^{p'_\alpha(x)}|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt=$$

$$=\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|\widehat{a}_\alpha(x,t+\sigma)-\widehat{a}_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}||\widehat{a}_\alpha(\cdot,t+\sigma)-\widehat{a}_\alpha(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)}\Big)^{(p_\alpha^+)'}\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt,\quad |\alpha|\in M, \tag{2.89}$$

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|\widetilde{a}_0^{(0)}-\widetilde{a}_0^{(\sigma)}|^2|u^{(\sigma)}|^2\,dxdt=\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|\widetilde{a}_0(x,t+\sigma)-\widetilde{a}_0(x,t)|^2|u^{(\sigma)}|^2\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}||\widetilde{a}_0(\cdot,t+\sigma)-\widetilde{a}_0(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)}\Big)^2\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u^{(\sigma)}|^2\,dxdt,\quad(2.90)$$

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega}\big|\widehat{c}(x,y,t)-\widehat{c}(x,y,t+\sigma)\big||u^{(\sigma)}(y,t)|dy\Big)^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega}\big|\widehat{c}(x,y,t)-\widehat{c}(x,y,t+\sigma)\big|^2\big|u^{(\sigma)}(y,t)\big|^2dy\Big)\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant(\mathrm{mes}_n\Omega)^2\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}||\widehat{c}(\cdot,\cdot,t+\sigma)-\widehat{c}(\cdot,\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega\times\Omega)}\Big)^2\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u^{(\sigma)}|^2\,dxdt.\quad(2.91)$$

З зауважень 2.1, 2.2 та теореми 2.7 (див. (2.66)) при $u=u^{(\sigma)}$, $f_\alpha=f_\alpha^{(\sigma)}$ $(|\alpha|\in M)$, $t_0=\tau$, $R_0=l$, $R=2l$ отримуємо

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)}dxdt\leqslant C_1\Big\{(2l)^{-2/(p_0^+-2)}+\int\limits_{\tau-2l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\Big\},\quad(2.92)$$

$$\int\limits_{\tau-l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u^{(\sigma)}|^2dxdt\leqslant C_1\Big\{(2l)^{-2/(p_0^+-2)}+\int\limits_{\tau-2l}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\Big\}.\quad(2.93)$$

Тоді з (2.86), враховуючи (2.87) – (2.93), одержуємо

$$\int\limits_{\Omega}b(x)|u^{(\sigma)}(x,\tau)-u^{(0)}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u^{(\sigma)}-D^\alpha u^{(0)}|^{p_\alpha(x)}\Big)\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_7\Big\{l^{-2/(p_0^+-2)}+\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\tau-k}^{\tau-k+1}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}-f_\alpha^{(0)}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt+$$

$$+\Big[\max_{|\alpha|\in M}\big(\sup_{t\in\mathbb{R}}||\widehat{a}_\alpha(\cdot,t+\sigma)-\widehat{a}_\alpha(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)}\big)^{(p_\alpha^+)'}+$$

$$+\big(\sup_{t\in\mathbb{R}}||\widetilde{a}_0(\cdot,t+\sigma)-\widetilde{a}_0(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)}\big)^2+$$

$$+(\mathrm{mes}_n\Omega)^2\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}||\widehat{c}(\cdot,\cdot,t+\sigma)-\widehat{c}(\cdot,\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega\times\Omega)}\Big)^2\Big]\times$$

$$\times\Big(l^{-2/(p_0^+-2)}+\sum_{k=1}^{2l}\int\limits_{\tau-k}^{\tau-k+1}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\Big)\Big\},\qquad(2.94)$$

де $C_7>0$ – стала, яка від τ,σ і l не залежить.

Оскільки функції $f_\alpha\,(|\alpha|\in M)$ є майже періодичними за Степановим як елементи простору $L_{p'_\alpha(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, то правильна оцінка

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int\limits_{\tau}^{\tau-1}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha^{(\sigma)}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\leqslant C_8,\qquad(2.95)$$

де $C_8>0$ – стала, яка від τ,σ і l не залежить.

Нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале фіксоване число. Покажемо, що множина

$$U_\varepsilon:=\Big\{\sigma\in\mathbb{R}\Big|\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_{\Omega}b(x)|u(x,t+\sigma)-u(x,t)|^2\,dx\leqslant\varepsilon,$$

$$\sup\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u(x,t+\sigma)-D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\Big]\,dxdt\leqslant\varepsilon\Big\}$$

містить множину F_δ для деякого $\delta\in(0,1)$, тобто є відносно щільною. Справді, виберемо $l\in\mathbb{N}\,(l\geqslant 2)$ таким, щоби виконувалася нерівність

$$C_7 l^{-2/(p_0^+-2)}\leqslant\varepsilon/2.\qquad(2.96)$$

Тепер візьмемо $\delta\in(0,1)$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$C_7\Big(l\delta+\big[\max_{|\alpha|\in M}\delta^{(p_\alpha^+)'}+\delta^2+(\mathrm{mes}_n\Omega)^2\delta^2\big]\cdot\Big(l^{-2/(p_0^+-2)}+2C_8 l\Big)\Big)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\qquad(2.97)$$

Отже, якщо $\sigma\in F_\delta$, то з (2.96) і (2.97) випливає, що права частина нерівності (2.94) менша або рівна ε. Звідси випливає, що $F_\delta\subset U_\varepsilon$, і множина U_ε відносно щільна, що і треба було довести. ∎

2.4 Еліптично-параболічні слабко нелінійні інтегро-диференціальні рівняння

2.4.1 Постановка задачі і формулювання основного результату

Розглядаємо ***задачу***: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u) + \int\limits_\Omega c(x,y,t,u(y,t))\,dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{2.98}$$

та крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{2.99}$$

де $a_\alpha : Q\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $c : \Omega\times\Omega\times S\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_\alpha : Q\to\mathbb{R}$ ($|\alpha|\in M$) – задані функції, які задовольняють певні (наведені нижче) умови, δu таке ж, як в рівнянні (2.1).

Позначимо $b_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} b(x)$, а через K_α, $|\alpha|\leqslant m$, – додатні сталі, для яких правильні нерівності

$$\forall\alpha,\ |\alpha|\leqslant m: \quad \int\limits_\Omega |D^\alpha v|^2\,dx \geqslant K_\alpha \int\limits_\Omega |v|^2\,dx \quad \forall\, v\in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega). \tag{2.100}$$

Існування таких сталих при $|\alpha|\neq 0$ легко випливає з нерівності Фрідріхса, а $K_{\widehat{0}} = 1$.

Ми розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (2.98), (2.99), а для цього зробимо відповідні припущення на вхідні дані рівняння (2.98).

Нехай виконуються такі умови:

($\mathcal{A}_1$) для кожного α, $|\alpha|\in M$, функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi)\in Q\times\mathbb{R}^N$, – каратеодорівська і, крім того, $a_\alpha(x,t,0)=0$ для майже всіх $(x,t)\in Q$;

($\mathcal{A}_2$) для кожного $\alpha\,(|\alpha|\in M)$, майже всіх $(x,t)\in Q$ та будь-яких $\xi\in\mathbb{R}^N$ маємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t)|\xi| + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L^\infty_{\rm loc}(\overline{Q})$, $g_\alpha\in L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega))$;

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t)\in Q$ та довільних $\xi,\eta\in\mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(x,t,\xi)-a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha-\eta_\alpha)\geqslant\sum_{\alpha\in A}\gamma_\alpha(t)|\xi_\alpha-\eta_\alpha|^2,$$

де множина $A\subset\mathbb{Z}^n_+$ така, що $\{\alpha\,|\,|\alpha|=m\}\subset A\subset\{\alpha\,|\,|\alpha|\in M\}$, та функції $\gamma_\alpha\in C(S)$, $\alpha\in A$, такі, що $\gamma_\alpha(t)>0$ $\forall t\in S, \forall\,\alpha\in A$;

$(\mathcal{C}_1)$ функція $c(x,y,t,\rho),(x,y,t,\rho)\in\Omega\times\Omega\times S\times\mathbb{R}$, – каратеодорівська і, крім того, $c(x,y,t,0)=0$ для майже всіх $(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times(0,T)$;

$(\mathcal{C}_2)$ існує стала $L\geqslant 0$ така, що для майже всіх $(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times S$ та довільних $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|c(x,y,t,\rho_1)-c(x,y,t,\rho_2)|\leqslant L\gamma(t)|\rho_1-\rho_2|,$$

де

$$\gamma(t):=\sum_{\alpha\in A}K_\alpha\gamma_\alpha(t)\quad\forall t\in S; \tag{2.101}$$

$(\mathcal{F})$ $\quad f_\alpha\in L^2_{\rm loc}(S;L^2(\Omega))\quad\forall\alpha,\ |\alpha|\in\{0,m\}.$

Означення 2.4. *Узагальненим розв'язком задачі* (2.98), (2.99) *називаємо функцію* $u\in L^2_{\rm loc}(S;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))\cap C(S;H_b(\Omega))$, *яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_Q\Big[-buv\varphi'+\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta u)D^\alpha v\varphi+v\varphi\int\limits_\Omega c(x,y,t,u(y,t))\,dy\Big]\,dxdt=$$

$$=\iint\limits_Q\sum_{|\alpha|\in\{0,m\}}f_\alpha D^\alpha v\varphi\,dxdt\quad\forall v\in\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall\varphi\in C^1_c(-\infty,0). \tag{2.102}$$

Зауважимо, що задача (2.98), (2.99) може мати багато узагальнених розв'язків. Справді, розглянемо рівняння

$$u_t+(-\Delta)^m u-\int\limits_\Omega(\lambda_1+\lambda_1^m)v_1(x)v_1(y)u(y,t)\,dy=0, \tag{2.103}$$

та крайові умови (2.99), де λ_1 та $v_1:\Omega\to\mathbb{R}$, відповідно, перше власне значення та відповідна йому власна функція, норма якої в $L^2(\Omega)$ дорівнює одиниці, задачі на власні значення

$$-\Delta v(x)=\lambda v(x),\quad x\in\Omega,\qquad v\Big|_{\partial\Omega}=0.$$

Очевидно, що вихідні дані рівняння (2.103) задовольняють умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{B})$, $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{F})$ і для довільної сталої $C \in \mathbb{R}$ функція $u_C(x,t) = Ce^{\lambda_1 t}v_1(x)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, є розв'язком задачі (2.103), (2.99).

Звідси випливає, що для забезпечення єдиності узагальненого розв'язку задачі (2.98),(2.99) необхідно накладати обмеження на його поведінку при $t \to -\infty$.

Ми будемо розглядати задачу відшукання узагальненого розв'язку задачі (2.98), (2.99), який задовольняє "аналог" початкової умови

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\omega\int\limits_0^t \gamma(s)ds} \|u(\cdot,t)\|_{H_b(\Omega)} = 0, \tag{2.104}$$

де $\omega \in \mathbb{R}$, а γ – функція, яка визначена в (2.101).

Цю задачу коротко називатимемо задачею (2.98), (2.99), (2.104), а функцію u – узагальненим розв'язком задачі (2.98), (2.99), (2.104).

Введемо ще один функційний простір. Нехай

$$\omega \in \mathbb{R}, \quad \beta \in C(S), \quad \beta(t) > 0 \ \text{ для всіх } \ t \in S.$$

Розглядаємо гільбертів простір

$$L^2_{\omega,\beta}(S; L^2(\Omega)) := \Big\{ f \in L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega)) \ \Big| \ \int\limits_S \beta(t) e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt < \infty \Big\}$$

зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2_{\omega,\beta}(S;L^2(\Omega))} = \int\limits_S \beta(t)\, e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds} (f(\cdot,t), g(\cdot,t))_{L^2(\Omega)}\, dt$$

та нормою

$$\|f\|_{L^2_{\omega,\beta}(S;L^2(\Omega))} := \Big(\int\limits_S \beta(t)\, e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \Big)^{1/2},$$

де γ визначено в (2.101).

Теорема 2.10. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2), (\mathcal{A}_3), (\mathcal{B}), (\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{F})$ *і, крім того, у випадку* $b_0 = 0$ *маємо*

$$L mes_n \Omega < 1. \tag{2.105}$$

Припустимо, що $\omega < 1 - L mes_n \Omega$, *коли виконуеться умова* (2.105), *і* $\omega < (1 - L mes_n\Omega)/b_0$ *в іншому випадку, і маємо включення*

$$f_\alpha \in L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega)) \quad \forall\alpha,\ |\alpha| = m, \quad f_{\widehat{0}} \in L^2_{\omega,1/\gamma}(S;L^2(\Omega)). \tag{2.106}$$

Тоді існує і тільки один узагальнений розв'язок задачі (2.98),(2.99),(2.104), *причому для нього правильна оцінка*

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds}\|u(\cdot,\tau)\|_{H_b(\Omega)} + \|u\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))} + \sum_{\alpha\in A}\|D^\alpha u\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\Big[\|f_{\widehat{0}}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))} + \sum_{|\alpha|=m}\|f_\alpha\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}\Big], \quad \tau\in S, \tag{2.107}$$

де $S_\tau := (-\infty,\tau]$ $\forall\tau\in(-\infty,0]$ $(S_0 = S)$, $C_1 > 0$ – *стала, що залежать лише від* L, $mes_n\Omega$, b_0 *та* ω.

2.4.2 Допоміжні твердження

При доведенні теореми 2.10 важливу роль буде відігравати твердження, яке є відомим (див., наприклад, (див. [14]), але ми сформулюємо його у зручній для нас формі.

Лема 2.6. *Нехай функції* $w \in L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))$ *і* $g_\alpha \in L^2(\Omega\times(0,T))$ $(|\alpha| \in M)$, *де* $T > 0$, *такі, що правильна тотожність*

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \Big\{ - bwv\varphi' + \big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha v\big)\varphi\Big\}\,dxdt = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall\varphi\in C^1_c(0,T). \tag{2.108}$$

Тоді w *належить до* $C([0,T];H_b(\Omega))$ *і для будь-яких* $\tau_1,\tau_2\in[0,T]$ $(\tau_1<\tau_2)$ *та довільної* $\theta\in C^1([0,T])$ *маємо*

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\|w(\cdot,\tau_2)\|^2_{H_b(\Omega)} - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\|w(\cdot,\tau_1)\|^2_{H_b(\Omega)} - \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\|w(\cdot,t)\|^2_{H_b(\Omega)}\theta'(t)\,dt +$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega\big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha w\big)\theta\,dxdt = 0. \tag{2.109}$$

Також нам буде потрібне таке твердження.

Лема 2.7. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2), (\mathcal{A}_3), (\mathcal{B}), (\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2)$ *і у випадку* $b_0 = 0$ *– умова* (2.105)*. Припустимо, що* $\omega < 1 - L mes_n \Omega$*, коли виконується умова* (2.105)*, і* $\omega < (1 - L mes_n \Omega)/b_0$ *в іншому випадку (коли* $b_0 > 0$ *). Тоді, якщо* u_1 *та* u_2 *– два узагальнені розв'язки, відповідно, задач, які відрізняються від задачі* (2.98), (2.99), (2.104) *тільки тим, що в першій з них* $f_\alpha = f_{\alpha,1}$*, а в другій —* $f_\alpha = f_{\alpha,2}$ *(* $|\alpha| \in \{0, m\}$ *), де*

$$f_{\widehat{0},k} \in L^2_{\omega,1/\gamma}(S; L^2(\Omega)) \quad (k \in \{1,2\}),$$

$$f_{\alpha,k} \in L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S; L^2(\Omega)) \quad (k \in \{1,2\};\ |\alpha| = m), \tag{2.110}$$

то правильна оцінка

$$\begin{gathered} e^{\omega \int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds} \|u_1(\cdot,\tau) - u_2(\cdot,\tau)\|_{H_b(\Omega)} + \|u_1 - u_2\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S_\tau; L^2(\Omega))} + \\ + \sum_{\alpha \in A} \|D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S_\tau; L^2(\Omega))} \leqslant \\ \leqslant C_1 \Big[\|f_{\widehat{0},1} - f_{\widehat{0},2}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S_\tau; L^2(\Omega))} + \sum_{|\alpha|=m} \|f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S_\tau; L^2(\Omega))} \Big], \quad \tau \in S, \end{gathered} \tag{2.111}$$

де $C_1 > 0$ *– стала така ж, як у* (2.107)*).*

Доведення. Вводимо для кожних α ($|\alpha| \in M$), $x \in \Omega$, $y \in \Omega$, $t \in S$ позначення

$$u_{12}(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

$$a_{\alpha,12}(x,t) := a_\alpha(x,t,\delta u_1(x,t)) - a_\alpha(x,t,\delta u_2(x,t)),$$

$$c_{12}(x,y,t) := c(x,y,t,u_1(y,t)) - c(x,y,t,u_2(y,t)),$$

$$f_{\alpha,12}(x,t) := f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t).$$

З (2.102) отримаємо таку інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ -b u_{12} v \varphi' + \sum_{|\alpha| \in M} a_{\alpha,12} D^\alpha v \varphi + \Big(\int\limits_\Omega c_{12}(x,y,t)\,dy \Big) v \varphi \Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{|\alpha| \in \{0,m\}} f_{\alpha,12} D^\alpha v \varphi\,dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall \varphi \in C^1_c(-\infty,0). \tag{2.112}$$

На підставі леми 2.6 з (2.112) випливає, що

$$\frac{1}{2}\theta(t)\int\limits_{\Omega} b(x)|u_{12}(x,t)|^2\,dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} b|u_{12}|^2\theta'\,dxdt+$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M} + a_{\alpha,12}\,D^{\alpha}u_{12} + \Big(\int\limits_{\Omega} c_{12}(x,y,t)\,dy\Big)u_{12}\Big\}\theta\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} f_{\alpha,12}D^{\alpha}u_{12}\theta\,dxdt, \tag{2.113}$$

де $\theta \in C^1(S)$, $\theta(t) > 0\ \forall t \in S$, та $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$ – довільні.

Використовуючи нерівність Коші:

$$ac \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}c^2 \quad \forall a, c \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0, \tag{2.114}$$

оцінимо праву частину рівності (2.113) так

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m} f_{\alpha,12}\,D^{\alpha}u_{12}\theta\,dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_{\alpha}|D^{\alpha}u_{12}|^2\theta\,dxdt+ \tag{2.115}$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_{\alpha}}|f_{\alpha,12}|^2\theta\,dxdt,$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} f_{\widehat{0},12}\,u_{12}\theta\,dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma|u_{12}|^2\theta\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma}|f_{\widehat{0},12}|^2\theta\,dxdt, \tag{2.116}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – довільні додатні числа.

З умови $(\mathcal{A}_3)$ отримуємо

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M} a_{\alpha,12}(x,t)D^{\alpha}u_{12}\theta\,dxdt \geqslant \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}\gamma_{\alpha}|D^{\alpha}u_{12}|^2\theta\,dxdt. \tag{2.117}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$ та нерівність Коші-Буняковського здобуваємо

$$\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\Big(\int_{\Omega} c_{12}(x,y,t)\,dy\Big)u_{12}\theta\,dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\Big(\int_{\Omega}|c(x,y,t,u_1(y,t))-c(x,y,t,u_2(y,t))|\;dy\Big)\,|u_{12}(x,t)|\,\theta(t)\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma(t)\Big(\int_{\Omega}|u_{12}(y,t)|\,dy\Big)\,|u_{12}(x,t)|\,\theta(t)\,dxdt =$$

$$= L\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(t)\Big(\int_{\Omega}|u_{12}(x,t)|\,dx\Big)\Big(\int_{\Omega}|u_{12}(y,t)|\,dy\Big)\theta(t)\,dt =$$

$$= L\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(t)\Big(\int_{\Omega}|u_{12}(x,t)|\;dx\Big)^2\theta(t)\,dt \leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma\,|u_{12}|^2\,\theta\,dxdt. \quad (2.118)$$

З (2.113), на підставі (2.115) – (2.4.2), отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\int_{\Omega} b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\theta(\tau_1)\int_{\Omega} b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} b|u_{12}|^2\theta'\,dxdt$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}\gamma_\alpha|D^\alpha u_{12}|^2\theta\,dxdt - L\mathrm{mes}_n\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma\,|u_{12}|^2\,\theta dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_\alpha|D^\alpha u_{12}|^2\theta\,dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}|f_{\alpha,12}|^2\theta\,dxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon_2}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma|u_{12}|^2\theta\,dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\frac{1}{\gamma}|f_{\widehat{0},12}|^2\theta\,dxdt,$$

де $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ – довільні додатні числа.

Взявши в цій нерівності $\theta(t) := 2e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}$, $t \in S$, матимемо

$$e^{2\omega \int\limits_0^{\tau_2} \gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2 dx - e^{2\omega \int\limits_0^{\tau_1} \gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2 dx-$$

$$-2\omega \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega b\gamma e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2 dxdt+$$

$$+2(\delta + (1-\delta)) \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} \gamma_\alpha e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\, dxdt-$$

$$-2L\mathrm{mes}_n\Omega \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2 \; dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \gamma_\alpha e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\, dxdt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\gamma_\alpha} e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\, dxdt+$$

$$+\varepsilon_2 \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \frac{1}{\gamma} e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\, dxdt, \qquad (2.119)$$

де $\delta \in (0,1)$ – довільне число.

Звідси та з (2.100) випливає нерівність

$$e^{2\omega \int\limits_0^{\tau_2} \gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2\, dx - e^{2\omega \int\limits_0^{\tau_1} \gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2\, dx-$$

$$-2\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\, dxdt+$$

$$+2(1-\delta) \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \sum_{\alpha\in A} \gamma_\alpha e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\, dxdt+$$

$$+2\delta\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}K_\alpha\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt-$$

$$-2L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_1\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt+$$

$$+\varepsilon_2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt. \qquad (2.120)$$

З (2.120), використавши позначеня (2.101), отримаємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2dx-e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2dx+$$

$$+\big[2(1-\delta)-\varepsilon_1\big]\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt+$$

$$+(2(\delta-L\mathrm{mes}_n\Omega-\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\})-\varepsilon_2)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\frac{1}{\gamma}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt. \qquad (2.121)$$

Відмітимо, що

$$1-L\mathrm{mes}_n\Omega-\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}>0. \qquad (2.122)$$

Справді, нехай $1-L\mathrm{mes}_n\Omega>0$. Тоді $\omega<1-L\mathrm{mes}_n\Omega$. Розглянемо два випадки: 1) $\omega\leqslant 0$, 2) $0<\omega<1-L\mathrm{mes}_n\Omega$. В першому випадку $(\omega\leqslant 0)$ маємо $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}\leqslant 0$, а отже, нерівність (2.122) правильна. В другому випадку маємо $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}=\omega\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}b(x)\leqslant\omega<1-L\mathrm{mes}_n\Omega$, звідки випливає нерівність (2.122). Тепер нехай $1 - L\mathrm{mes}_n\Omega \leqslant 0$. Тоді $b_0 > 0$ і $\omega b_0 < 1 - L\mathrm{mes}_n\Omega$. Оскільки $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\} = \omega \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} b(x) = \omega b_0$, то і в цій ситуації нерівність (2.122) правильна.

Виберемо у (2.121) $\delta \in (0,1)$ таке, щоб виконувалась нерівність $\delta - L\mathrm{mes}_n\Omega - \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\} > 0$, і візьмемо $\varepsilon_1 = 1-\delta$, $\varepsilon_2 = \delta - L\mathrm{mes}_n\Omega - \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}$. У результаті здобудемо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2\,dx - e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2\,dx +$$
$$+C_3\Big[\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha(t)e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt\Big] \leqslant$$
$$\leqslant C_4\Big[\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_\Omega e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\frac{1}{\gamma}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt\Big], \tag{2.123}$$

де C_3, C_4 – додатні сталі, що залежать лише від L, $\mathrm{mes}_n\Omega$, b_0 та ω.

З (2.104) випливає умова

$$e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,t)|^2\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad t\to-\infty. \tag{2.124}$$

Фіксуючи довільно вибране $\tau_2 = \tau \in S$, спрямуємо τ_1 до $-\infty$ в (2.123), враховуючи (2.110) та (2.124). У результаті отримаємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx +$$
$$+C_3\int\limits_{-\infty}^{\tau}\!\!\int\limits_\Omega\Big[\sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\tau}\!\!\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\Big]\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_4\Big[\int\limits_{-\infty}^{\tau}\!\!\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m}(1/\gamma_\alpha)e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\tau}\!\!\int\limits_\Omega (1/\gamma)e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt\Big]. \tag{2.125}$$

Звідси легко отримуємо оцінку (2.111).

∎

2.4.3 Обґрунтування основного результату підрозділу

Доведення теореми 2.10. Доведемо *єдиність* узагальненого розв'язку задачі (2.98), (2.99), (2.104), використовуючи метод доведення від супротивного. Припустимо, що правильним є протилежне твердження. Нехай u_1, u_2 – два узагальнені розв'язки задачі (2.98), (2.99), (2.104). Згідно з лемою 3.4 (див. (2.111)), маємо

$$\iint\limits_{Q} \gamma(t) e^{2\omega \int\limits_0^t \gamma(s)\, ds} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 \, dxdt \leqslant 0. \qquad (2.126)$$

Звідки випливає, що $u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Доведемо *існування* узагальненого розв'язку задачі (2.98), (2.99), (2.104) та його оцінку. Почнемо з апріорної оцінки узагальненого розв'язку. Припустимо, що u – узагальнений розв'язок задачі (2.98), (2.99), (2.104). Легко бачити, використовуючи умову $(\mathcal{A}_1)$, що $u = 0$ є узагальненим розв'язком задачі (2.98), (2.99), (2.104) при $f_\alpha = 0$, $|\alpha| \in \{0, m\}$, а тому на підставі леми 2.7 (див. оцінку (2.111)) при $u_1 = u$, $f_{\alpha,1} = f_\alpha$ та $u_2 = 0, f_{\alpha,2} = 0$, $|\alpha| \in \{0, m\}$, маємо оцінку (2.107).

Тепер для кожного $m \in \mathbb{N}$ і α, $|\alpha| \in \{0, m\}$, визначимо $f_{\alpha,m}(\cdot, t) := f_\alpha(\cdot, t)$, якщо $t > -m$, і $f_{\alpha,m}(\cdot, t) := 0$, якщо $t \leqslant -m$, та розглянемо задачу на знаходження функції $u_m \in L^2(-m, 0; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap C([-m, 0]; H_b(\Omega))$, що задовольняє початкову умову

$$u_m(x, -m) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad (2.127)$$

(як елемент простору $C([-m, 0]; H_b(\Omega))$) та рівняння (2.98) в Q_m в сенсі інтегральної тотожності

$$\iint\limits_{Q_m} \big[-bu_m v\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_m) D^\alpha v\varphi +$$
$$+ v\varphi \int\limits_\Omega c(x,y,t,u_m(y,t))\,dy\big]\,dxdt =$$
$$= \iint\limits_{Q_m} \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} f_{\alpha,m} D^\alpha v\varphi\,dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega), \quad \forall\varphi\in C_c^1(-m,0). \tag{2.128}$$

Існування та єдиність розв'язку цієї задачі легко випливає з відомих результатів (див., наприклад, [34]). Для кожного $m \in \mathbb{N}$ продовжимо нулем u_m на весь циліндр $\overline{Q}$ і залишимо позначення u_m для цього продовження. Зауважимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція u_m належить до простору $L^2_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap C(S;H_b(\Omega))$ та задовольняє інтегральну тотожність (2.102) з $f_{\alpha,m}$ замість f_α, $|\alpha| \in \{0,m\}$, тобто

$$\iint\limits_Q \Big[-bu_m v\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u_m) D^\alpha v\varphi + v\varphi \int\limits_\Omega c(x,y,t,u_m(y,t))\,dy\Big]\,dxdt =$$
$$= \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} f_{\alpha,m} D^\alpha v\varphi\,dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega), \quad \forall\varphi\in C_c^1(-\infty,0). \tag{2.129}$$

Це означає, що u_m є узагальненим розв'язком задачі (2.98), (2.99), (2.104) з $f_{\alpha,m}$ замість f_α, $|\alpha| \in \{0,m\}$. Звідси та доведеного вище, зокрема, випливають (див. (2.107)) оцінки

$$e^{2\omega\int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds}\|u_m(\cdot,\tau)\|^2_{H_b(\Omega)} \leqslant C_5\Big[\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha} e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\|f_\alpha(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{1}{\gamma} e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\|f_{\widehat{0}}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\Big], \quad \tau\in S, \tag{2.130}$$

$$\sum_{|\alpha|\in M}\|D^\alpha u_m\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))} + \|u_m\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\Big[\sum_{|\alpha|=m}\|f_\alpha\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))} + \|f_{\widehat{0}}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S;L^2(\Omega))}\Big], \tag{2.131}$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка залежить тільки від $L, \mathrm{mes}_n\Omega, b_0$ і ω.

Нехай k, l – довільні натуральні числа, $l > k$. Застосуємо твердження леми 2.7 до функцій u_k і u_l. У результаті отримаємо оцінку, яка аналогічна до (2.111), а саме

$$\sup_{\tau\in S} e^{2\omega\int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds}\|u_k(\cdot,\tau)-u_l(\cdot,\tau)\|^2_{H_b(\Omega)}+$$
$$+\sum_{|\alpha|\in M}\|D^\alpha u_k - D^\alpha u_l\|^2_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))}+\|u_k-u_l\|^2_{L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))}\leqslant$$
$$\leqslant C_6\Big[\int\limits_{-l}^{-k}\sum_{|\alpha|=m}(1/\gamma_\alpha)e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\|f_{\alpha,k}(\cdot,t)-f_{\alpha,l}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt+$$
$$+\int\limits_{-l}^{-k}(1/\gamma)e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\|f_{\widehat{0},k}(\cdot,t)-f_{\widehat{0},l}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\Big], \tag{2.132}$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка залежить тільки від $L, \mathrm{mes}_n\Omega, b_0$ і ω.

З умови (2.106) випливає, що права частина нерівності (2.132) прямує до нуля, коли k та l прямують до $+\infty$. Це означає, що послідовність $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в просторах $L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))$ та $C(S;H_b(\Omega))$, а послідовність $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ $(\alpha\in A)$ – в $L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))$ $(\alpha\in A)$. Оскільки ці простори є повними, то звідси маємо існування функції

$$u\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))\cap L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))\cap C(S;H_b(\Omega))$$

такої, що $D^\alpha u\in L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))$ $(\alpha\in A)$, і

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{сильно в} \qquad C(S;H_b(\Omega)) \text{ та } L^2_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)), \tag{2.133}$$

$$D^\alpha u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha u \qquad \text{сильно в} \qquad L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega)),\ \ \alpha\in A. \tag{2.134}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{A}_2)$ та нерівності (2.100) і (2.131), для будь-яких $t_1, t_2\in S$ $(t_1<t_2)$ отримаємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |a_\alpha(x,t,\delta u_m)|^2\,dxdt\leqslant C_7\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega\Big(|h_\alpha|^2\Big|\sum_{|\widetilde{\alpha}|\in M}D^{\widetilde{\alpha}}u_m\Big|^2+|g_\alpha|^2\Big)\,dxdt\leqslant C_8, \tag{2.135}$$

де C_7, C_8 – додатні сталі, що не залежать від m.

Отже, з (2.135) отримуємо, що для кожного α, $|\alpha| \in M$, послідовність $\{a_\alpha(u_m)\}$ є обмеженою в $L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega))$. Звідси та з (2.134) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ (яку також позначатимемо через $\{u_m\}_{m=1}^\infty$) та функцій $\chi_\alpha \in L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega))$, $|\alpha| \in M$, таких, що

$$D^\alpha u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha u \quad \text{майже всюди на} \quad Q, \quad |\alpha| \in M, \tag{2.136}$$

$$a_\alpha(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_\alpha \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega)), \quad |\alpha| \in M. \tag{2.137}$$

З умови $(\mathcal{A}_1)$ та (2.136) випливає, що

$$a_\alpha(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_\alpha(u) \quad \text{майже всюди на} \quad Q, \quad |\alpha| \in M. \tag{2.138}$$

На підставі [83, лема 1.3], з (2.137) та (2.138) отримуємо, що $\chi_\alpha = a_\alpha(u)$ $(|\alpha| \in M)$, тобто

$$a_\alpha(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_\alpha(u) \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega)), \quad |\alpha| \in M. \tag{2.139}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, встановлюємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \Big| \int\limits_\Omega c(x,y,t,u_m(y,t))\,dy - \int\limits_\Omega c(x,y,t,u(y,t))\,dy \Big|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \Big| \int\limits_\Omega [c(x,y,t,u_m(y,t)) - c(x,y,t,u(y,t))]\,dy \Big|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L^2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \gamma^2(t) \Big(\int\limits_\Omega |u_m(y,t) - u(y,t)|\,dy \Big)^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L^2 (\mathrm{mes}_n \Omega)^2 \max_{t\in[t_1,t_2]} \gamma^2(t) \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega |u_m - u|^2\,dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Звідси випливає, що

$$\int\limits_\Omega c(\circ, y, \cdot, u_m(y,\cdot))\,dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_\Omega c(\circ, y, \cdot, u(y,\cdot))\,dy \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega)). \tag{2.140}$$

Покажемо, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (2.98), (2.99), (2.104). Для цього спрямуємо m до $+\infty$ в тотожності (2.129), беручи до уваги (2.133), (2.139), (2.140) та означення функцій $f_{\alpha,m}$, $|\alpha| \in \{0, m\}$. У результаті отримаємо тотожність (2.102). Тепер, врахувавши (2.133), спрямуємо m до $+\infty$ в (2.130). З отриманої нерівності та умови (2.106) здобуваємо виконання умови (2.104). Отож, ми довели, що u є узагальненим розв'язком задачі (2.98), (2.99), (2.104).

∎

Висновки до розділу 2

У розділі 2 знайдено достатні умови існування розв'язків задач без початкових умов для слабко та сильно нелінійних параболічних та еліптично-параболічних диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь.

Розділ 3

Задача Фур'є для еліптично-параболічних систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь

У цьому розділі досліджено задачі Фур'є для еліптично-параболічних систем сильно та слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності.

Матеріали розділу викладено в працях [70, 19].

Наведемо основні позначення, які використовуються в цьому розділі. Нехай n, N – натуральні числа, $\mathbb{R}^n$ (відповідно, $\mathbb{R}^N$) – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів у вигляді вектор-рядків $x = (x_1, ..., x_n)$ (відповідно, вектор-стовпчиків $y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_N)$) дійсних чисел і наділений нормою $|x| := (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{1/2}$ (відповідно, $|y| := (|y_1|^2 + ... + |y_N|^2)^{1/2}$). Позначаємо через $M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ – лінійний простір, складений з матриць $\zeta = (\zeta_{kl}) = (\zeta_{kl}; k = \overline{1, N}, l = \overline{0, n})$ розмірності $N \times (n+1)$ з дійсними елементами і наділений нормою $|\zeta| = (\sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=0}^{n} |\zeta_{ij}|^2)^{1/2}$.

Вважаємо, що Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, а $\Gamma := \partial\Omega$ (її межа) є кусково-гладкою поверхнею, причому $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з Γ), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі.

Позначаємо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$, $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$.

3.1 Сильно нелінійні системи

3.1.1 Постановка задачі і формулювання основного результату

Розглядаємо *задачу*: знайти векторну функцію $u = \mathrm{col}(u_1 \dots u_N) : \overline{Q} \to \mathbb{R}^N$, яка задовольняє (в певному сенсі) систему рівнянь

$$(b_i(x)u_i)_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_{ij}(x,t,\delta u) + a_{i0}(x,t,\delta u) + \int\limits_{\Omega} c_i(x,y,t,u(y,t))dy =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(x,t) + f_{i0}(x,t), \quad (x,t) \in Q\,, \quad i = \overline{1,N}\,, \tag{3.1}$$

та крайові умови

$$u_i\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0, \quad i = \overline{1,N}\,, \tag{3.2}$$

де $b_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $a_{ij} : Q \times M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ($i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$), $c_i : \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($i = \overline{1,N}$), $f_{ij} : Q \to \mathbb{R}$ ($i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$) – задані дійснозначні функції, причому $b_i(x) \geqslant 0$ для м. в. $x \in \Omega$ ($i = \overline{1,N}$). Тут і далі використовуємо позначення $\nabla u := (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$, $\delta u := (u, \nabla u)$, $\partial u_i(x,t)/\partial \nu_a := \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,\delta u)\,\nu_j(x)$, $(x,t) \in \Sigma_1$, – похідна по "конормалі".

Прикладом систем вигляду (3.1), які тут вивчаються, є система

$$u_{i,t} - \sum_{j=1}^{n} \Big(\widehat{a}_{ij}(x,t)|u_{i,x_j}|^{p_{ij}(x)-2} u_{i,x_j}\Big)_{x_j} + \widehat{a}_{i0}(x,t)|u_i|^{p_{i0}(x)-2}u_i +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \widehat{c}_{ik}(x,y,t)u_k(y,t)dy = f_i(x,t), \quad (x,t) \in Q,\ i = \overline{1,N}, \tag{3.3}$$

де $\widehat{a}_{ij}$ ($i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$) – вимірні, обмежені, додатні і відділені від нуля функції, $\widehat{c}_{ik}$ ($i,k = \overline{1,N}$) – вимірні і обмежені функції, f_i ($i = \overline{1,N}$) – інтегровні з деяким степенем функції, $p_{ij} > 1$ ($i = \overline{1,N},\ j = \overline{0,n}$) – вимірні та обмежені функції, які називають *показниками нелінійності*.

Нехай

$(\mathcal{P})$ $p = (p_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (p_{ij})$ – матрична функція, яка задовольняє умову $2 \leqslant p_{ij}^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_{ij}(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_{ij}(x) =: p_{ij}^+ < +\infty$,

$$p_{i0}^{-} := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_{i0}(x) > 2 \quad (i = \overline{1,N},\ j = \overline{0,n});$$

$(\mathcal{B})$ для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$ функція $b_i : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна і $0 \leqslant b_i(x) \leqslant 1$ для м. в. $x \in \Omega$.

Через $p' = (p'_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (p'_{ij})$ позначатимемо матричну функцію таку, що $1/p_{ij}(x) + 1/p'_{ij}(x) = 1$ для м. в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$.

Нехай

$$W^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N) := \{v = \mathrm{col}(v_1,\dots,v_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N \mid \partial_j v_i \in L_{p_{ij}(\cdot)}(\Omega),$$
$$i = \overline{1,N},\ j = \overline{0,n}\}$$

— лінійний простір з нормою

$$\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)} := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} \|\,\partial_j v_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(\Omega)},$$

де тут і далі

$$\partial_0 w := w, \quad \partial_j w := w_{x_j},\ j = \overline{1,n}, \quad \text{для} \quad w : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Цей простір є банаховим і його називають узагальненим простором Соболєва. Під $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ розуміємо замикання простору $C^\infty_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ в $W^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Тут і далі через $C^\infty_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ позначаємо простір фінітних нескінченно диференційовних на Ω функцій зі значеннями в $\mathbb{R}^N$. Для зручності викладення матеріалу позначимо $\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N) :=\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, введемо простір $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N) := \big\{w\colon Q_{t_1,t_2} \to \mathbb{R}^N$ – вимірна$|\partial_j w_i \in L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})\big\}$ з нормою $\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)} := \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=0}^{n} \|\partial_j w_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)}$.

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)$ позначимо підпростір простору $W^{1,0}_{p(\cdot),}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)$, складений з функцій w таких, що $w(\cdot,t) \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ для майже всіх $t \in [t_1,t_2]$.

Введемо лінійний простір $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q};\mathbb{R}^N)$, складений з визначених на Q вимірних функцій, звуження яких на Q_{t_1,t_2} належить до $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)$ для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$. Цей простір є повним локально опуклим із сім'єю півнорм $\big\{\|h\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} \|\|\partial_j h_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} \big| \, t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)\big\}$.

Нехай $\Omega_0 := \{x \in \Omega \,\big|\, b_i(x) > 0\}$ і $\widetilde{b}_i(x) := b_i(x)$, якщо $x \in \Omega_0$, та $\widetilde{b}_i(x) := 1$, якщо $x \in \Omega \backslash \Omega_0$. Позначимо $b := \mathrm{col}(b_1, \dots, b_N)$ і нехай $H_b(\Omega; \mathbb{R}^N)$ лінійний простір функцій вигляду $w = \mathrm{col}(w_1, \dots, w_N)$, де $w_i = \widetilde{b}_i^{-1/2} v_i$, $v_i \in L_2(\Omega)$ для кожного $i \in \{1, \dots, N\}$. Введемо на $H_b(\Omega; \mathbb{R}^N)$ півнорму $\|w\|_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \Big(\int_\Omega \sum\limits_{i=1}^N b_i(x) |w_i(x)|^2 dx \Big)^{1/2}$. Легко перевірити, що $H_b(\Omega; \mathbb{R}^N)$ є поповненням лінійного простору $\mathbb{V}_p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ за півнормою $\| \cdot \|_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ ([7]).

Визначимо простір

$$\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(Q; \mathbb{R}^N) := \overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}; \mathbb{R}^N) \cap C(S; H_b(\Omega; \mathbb{R}^N)),$$

який є повним лінійним локально опуклим з сім'єю півнорм
$\Big\{ \sum\limits_{i=1}^N \sum\limits_{j=0}^n \|\partial_j h_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} + \|h\|_{C([t_1,t_2];H_b(\Omega;\mathbb{R}^N))} \,\Big|\, t_1, t_2 \in S,\ t_1 < t_2 \Big\}$.

Перш за все дамо означення узагальненого розв'язку задачі (3.1) — (3.2), а для цього введемо відповідні обмеження на вихідні дані, тобто визначимо класи вихідних даних.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину матричних функцій $(a_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (a_{ij})$, які задовольняють умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожних $i \in \{1, \dots, N\}$ та $j \in \{0, \dots, n\}$ функція $a_{ij}(x,t,\xi)$, $(x,t) \in Q$, $\xi = (\xi_{kl}) \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$, є каратеодорівською; крім того, $a_{ij}(x,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожних $i \in \{1, \dots, N\}$ та $j \in \{0, \dots, n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ виконується нерівність

$$|a_{ij}(x,t,\xi)| \leqslant h_{ij}(x,t) \Big(\sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^n |\xi_{kl}|^{p_{kl}(x)/p'_{ij}(x)} \Big) + g_{ij}(x,t),$$

де $h_{ij} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $\xi^1, \xi^2 \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n (a_{ij}(x,t,\xi^1) - a_{ij}(x,t,\xi^2))(\xi^1_{ij} - \xi^2_{ij}) \geqslant$$

$$\geqslant K_1 \sum_{k=1}^N |\xi^1_{k0} - \xi^2_{k0}|^2 + K_2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^n |\xi^1_{kl} - \xi^2_{kl}|^{p_{kl}(x)},$$

де $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ – сталі.

Нехай $\mathbb{C}$ – множина векторних функцій $\mathrm{col}(c_1 \dots c_N)$ які задовольняють такі умови:

$(\mathcal{C}_1)$ для кожного $i \in \{1, \dots, N\}$ функція $c_i(x,y,t,s), (x,y,t,s) \in \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R}$, є каратеодорівською, причому $c_i(x,y,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times S$.

$(\mathcal{C}_2)$ для кожного $i \in \{1, \dots, N\}$, довільних $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ та майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times S$ виконується нерівність

$$|c_i(x,y,t,s_1) - c_i(x,y,t,s_2)| \le L|s_1 - s_2|,$$

де $L > 0$ – стала.

Через $\mathbb{F}_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}$ позначатимемо множину матричних функцій $(f_{ij}\,;\ i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (f_{ij})$ таких, що $f_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$, і для кожних $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ функція f_{ij} зануляється в околі Σ_1.

Означення 3.1. *Нехай* $b = \mathrm{col}(b_1, \dots, b_N)$ *задовольняє умову* $(\mathcal{B})$, $p = (p_{ij})$ *задовольняє умову* $(\mathcal{P})$, $(a_{ij}) \in \mathbb{A}_p$, $col(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}$, $(f_{ij}) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$. *Узагальненим розв'язком задачі (3.1), (3.2) назвемо векторну функцію* $u \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N)$, *яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \Big\{ \sum_{j=0}^n a_{ij}(x,t,\delta u)\partial_j v_i \varphi_i +$$

$$+ v_i\varphi_i \int\limits_\Omega c_i(x,y,t,u(y,t))\,dy - b_i(x) u_i v_i {\varphi_i}' \Big\}\,dxdt = \iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n f_{ij}\partial_j v_i \varphi_i\,dxdt \tag{3.4}$$

$\forall v = col(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $\forall \varphi = col(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in C^1_c((-\infty,0);\mathbb{R}^N)$.

Теорема 3.1. *Нехай* $b = col(b_1, \dots, b_N)$ *задовольняє умову* $(\mathcal{B})$, $(a_{ij}) \in \mathbb{A}_p$, $col(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}$, $(f_{ij}) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$ *і, крім того, виконується нерівність*

$$K_1 > L mes_n \Omega. \tag{3.5}$$

Тоді існує і тільки один узагальнений розв'язок задачі (3.1), (3.2), причому для будь-яких R, R_0, t_0 *таких, що* $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 < 0$, *виконується оцінка*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|u_i(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N\Big[\sum_{j=1}^n |\partial_j u_i(x,t)|^{p_{ij}(x)} + |u_i(x,t)|^2\Big]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\Big\{\sum_{i=1}^N R^{-2/(p_{i0}^+-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n |f_{ij}|^{p'_{ij}(x)}\,dxdt\Big\}, \tag{3.6}$$

де $C_1 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* $K_1, K_2, L, mes_n\Omega$ *і* p_{ij}^- $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$.

3.1.2 Допоміжні твердження

Сформулюємо і доведемо твердження, які використаємо при доведенні теореми 3.1.

Лема 3.1. *Нехай* $b = col(b_1,\dots,b_N)$ *задовольняє умову* $(\mathcal{B})$ *і* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *– довільні числа, причому* $t_1 < t_2$. *Припустимо, що функція* $w \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ *задовольняє інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big\{-b_i w_i v_i \varphi_i' + \sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n g_{ij}\partial_j v_i \varphi_i\Big\}\,dxdt = 0 \tag{3.7}$$

$$\forall v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N), \forall \varphi \in C_c^1((t_1,t_2);\mathbb{R}^N) \tag{3.8}$$

для деяких $g_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),loc}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,N},\ j = \overline{0,n})$.

Тоді $w \in C\big([t_1,t_2]; H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)\big)$ *і для будь-яких* $\theta \in C^1([t_1,t_2])$, $v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ *і* $\tau_1, \tau_2 \in [t_1,t_2]$ $(\tau_1 < \tau_2)$ *виконується рівність*

$$\theta(\tau_2)\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)w_i(x,\tau_2)v_i(x)\,dx - \theta(\tau_1)\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)w_i(x,\tau_1)v_i(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N\Big\{\Big(\sum_{j=0}^n g_{ij}v_{i,x_j}\Big)\theta - b_i w_i v_i \theta'\Big\}\,dxdt = 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2)\|w(\cdot,t_2)\|^2_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}-\frac{1}{2}\theta(t_1)\|w(\cdot,t_1)\|^2_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\|w(\cdot,t)\|^2_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}\theta'(t)\,dt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}g_{ij}\partial_j w_i\Big)\theta\,dxdt=0. \quad (3.10)$$

Доведення. Це твердження доводиться аналогічно як лема 2 роботи [14].

∎

Лема 3.2. *Нехай* $b=col(b_1,\ldots,b_N)$ *задовольняє умову* $(\mathcal{B})$, $p=(p_{ij})$ *задовольняє умову* $(\mathcal{P})$, $(a_{ij})\in\mathbb{A}_p$, $col(c_1,\ldots,c_N)\in\mathbb{C}$ *і кожного* $l\in\{1,2\}$ *функції* $u^l\in\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N)$, $(f^l_{ij})\in\mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$ *такі, що правильна тотожність*

$$\iint\limits_{Q}\sum_{i=1}^{N}\Big\{\sum_{j=0}^{n}a_{ij}(x,t,\delta u^l)\partial_j v_i\varphi_i+$$

$$+v_i\varphi_i\int\limits_{\Omega}c_i(x,y,t,u^l(y,t))\,dy-\,b_i(x)u^l_i v_i\varphi'_i\Big\}\,dxdt=$$

$$=\iint\limits_{Q}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}f^l_{ij}\partial_j v_i\varphi_i dxdt\quad\forall v\in\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N),\ \forall\varphi\in C^1_c((-\infty,0);\mathbb{R}^N). \quad (3.11)$$

Тоді для довільних чисел R, R_0, t_0 *таких, що* $R_0>0$, $R\geqslant\max\{1,2R_0\}$, $t_0\leqslant 0$, *правильна нерівність*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}b_i(x)|u^1_i(x,t)-u^2_i(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n}|\partial_j u^1_i-\partial_j u^2_i|^{p_{ij}(x)}+|u^1_i-u^2_i|^2\Big]\,dxdt\leqslant C_1\Big\{\sum_{i=1}^{N}R^{-2/(p^+_{i0}-2)}+$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|f^1_{ij}-f^2_{ij}|^{p'_{ij}(x)}dxdt\Big\}, \quad (3.12)$$

де $C_1>0$ – *стала, яка залежить тільки від* $K_1,K_2,L,mes_n\Omega$ *і* p^-_{ij} $(i=\overline{1,N},j=\overline{0,n})$.

Доведення. Нехай R,R_0,t_0 такі, як у формулюванні леми, і $\eta(t):=t-t_0+R$, $t\in\mathbb{R}$. Для заданих $v\in\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ і $\varphi\in C^1_c((-\infty,0);\mathbb{R}^N)$ розглянемо тотожність (3.11) при $l = 1$ та цю ж тотожність при $l = 2$ і віднімемо ці тотожності. Прийнявши для майже всіх $(x,t) \in Q$

$$u_i^{12}(x,t) := u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t) \ \ (i = \overline{1,N}),$$
$$a_{ij}^{12}(x,t) := a_{ij}(x,t,\delta u^1(x,t)) - a_{ij}(x,t,\delta u^2(x,t)) \ \ (i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}),$$
$$c_i^{12}(x,y,t) := c_i(x,y,t,u^1(y,t)) - c_i(x,y,t,u^2(y,t)) \ \ (i = \overline{1,N}),$$
$$f_{ij}^{12}(x,t) := f_{ij}^1(x,t) - f_{ij}^2(x,t) \ \ (i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}),$$

у результаті отримаємо рівність

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \Big\{ \sum_{j=0}^n a_{ij}^{12} \partial_j v_i \varphi_i + v_i \varphi_i \int\limits_\Omega c_i^{12}\, dy - \ b_i u_i^{12} v_i \varphi_i' \Big\} \, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n f_{ij}^{12}(x,t) \partial_j v_i \varphi_i \, dxdt, \tag{3.13}$$

до якої застосуємо лему 3.3 з $\tau_1 = t_0 - R$, $\tau_2 = \tau \in (t_0 - R, t_0]$, $w_i = u_i^{12}$, $g_{ij} = a_{ij}^{12} - f_{ij}^{12}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,N})$, $\theta = \eta^s$, $s := \max\limits_{i=\{1,\dots,N\}} p_{i0}^- / (p_{i0}^- - 2)$. У результаті здобудемо рівність

$$\eta^s(\tau) \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x) |u_i^{12}(x,\tau)|^2 dx +$$

$$+2 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \Big(\sum_{j=0}^n a_{ij}^{12} \, \partial_j u_i^{12} + u_i^{12} \int\limits_\Omega c_i^{12}\, dy \Big) \eta^s \, dxdt =$$

$$= s \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i |u_i^{12}|^2 \eta^{s-1} \, dxdt + 2 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n f_{ij}^{12} \partial_j u^{12} \, \eta^s \, dxdt. \tag{3.14}$$

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (3.14). Згідно з умовою $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \ \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n a_{ij}^{12} \partial_j u_i^{12} \eta^s \, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant K_1 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N |u_i^{12}|^2 \eta^s \, dxdt + K_2 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n |\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)} \eta^s \, dxdt. \tag{3.15}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$ і нерівність Коші-Буняковського, отримуємо оцінку

$$\Bigg|\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}u_i^{12}(x,t)\Big(\int\limits_{\Omega}c_i^{12}(x,y,t)\,dy\Big)\eta^s(t)\,dxdt\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\left|u_i^{12}(x,t)\right|\Big(\int\limits_{\Omega}\left|c_i^{12}(x,y,t)\right|\,dy\Big)\eta^s(t)\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant L\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\left|u_i^{12}(x,t)\right|\Big(\int\limits_{\Omega}\left|u_i^{12}(y,t)\right|\,dy\Big)\eta^s(t)\,dxdt=$$

$$=L\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\Big(\int\limits_{\Omega}\left|u_i^{12}(x,t)\right|dx\Big)^2\eta^s(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\left|u(x,t)^{12}\right|^2\eta(t)^s\,dxdt.$$

Звідси маємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}u_i^{12}\Big(\int\limits_{\Omega}c_i^{12}\,dy\Big)\eta^s\,dxdt>-L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u^{12}|^2\eta^s\,dxdt. \qquad (3.16)$$

Далі ми будемо використовувати нерівність

$$ad\leqslant\varepsilon|a|^{r(x)}+\varepsilon^{-1/(r(x)-1)}\,|d|^{r'(x)} \qquad (3.17)$$

для м. в. $x\in\Omega$ і будь-яких $a,d\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, де $r\in L_\infty(\Omega)$, $r(x)>1$, $1/r(x)+1/r'(x)=1$ для м. в. $x\in\Omega$, яка є наслідком стандартної нерівності Юнга: $a\,d\leqslant|a|^q/q+|d|^{q'}/q'$, $a,d\in\mathbb{R}$, $q>1$, $1/q+1/q'=1$.

Вибираючи (для майже кожного $x\in\Omega$) $r(x)=p_{i0}(x)/2$, $r'(x)=p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)$, $a=b_i(x)|u^{12}|^2\eta^{s/r(x)}$, $d=\eta^{s/r'(x)-1}$, $\varepsilon=\varepsilon_1\in(0,1)$, на підставі (3.17) отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}b_i|u_i^{12}|^2\eta^{s-1}dxdt\leqslant\varepsilon_1\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}|u_i^{12}|^{p_{i0}(x)}\eta^s\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_1^{-2/(p_{i0}^{-}-2)}\eta^{s-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}\,dxdt, \qquad (3.18)$$

де $\varepsilon_1 \in (0,1)$ – довільне число. Тут ми використали умову: $0 \leqslant b(x) \leqslant 1$ для м. в. $x \in \Omega$.

Знову скориставшись нерівністю (3.17), одержуємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} f_{ij}^{12}\,\partial_j u_i^{12}\eta^s\,dxdt \leqslant \varepsilon_2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_2^{-1/(p_{ij}^{-}-1)}|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt, \quad (3.19)$$

де $\varepsilon_2 \in (0,1)$ – довільне число.

З (3.14) на підставі (3.15), (3.16), (3.18) (3.19) при достатньо малих значеннях ε_1 і ε_2 отримаємо

$$\eta^s(\tau)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{N} b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=1}^{n}|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}+|u^{12}|^2\Big]\eta^s\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_2\Big\{\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\eta^{s-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt\Big\}, \quad (3.20)$$

де C_2 – стала, яка залежить тільки від $K_1, K_2, L, \mathrm{mes}_n\Omega$ і p_{ij}^- $(i=\overline{1,N}, j=\overline{1,n})$, а $\tau \in (t_0-R, t_0]$ – довільне число.

Оскільки $0 \leqslant \eta(t) \leqslant R$, коли $t \in [t_0-R, t_0]$, і $\eta(t) \geqslant R-R_0$, коли $t \in [t_0-R_0, t_0]$, то з нерівності (3.20) отримаємо нерівність

$$(R-R_0)^s\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2\,dx+$$
$$+(R-R_0)^s\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n}|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}+|u_i^{12}|^2\Big]\,dxdt \leqslant \quad (3.21)$$

$$\leqslant C_2\Big\{ \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} R^{s-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)} dxdt +$$

$$+ R^s \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{n} |f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\, dxdt \Big\}. \quad (3.22)$$

Поділимо отриману нерівність на $(R-R_0)^s$. Зауважимо, що оскільки $R \geqslant \max\{1; 2R_0\}$, то маємо $R/(R-R_0) = 1 + R_0/(R-R_0) \leqslant 2$. Врахувавши це та нерівність $R^{-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)} \leqslant R^{-p_{i0}^{+}/(p_{i0}^{+}-2)}$ (правильну через те, що $R \geqslant 1$ і $-p_{i0}(x)(/p_{i0}(x)-2) \leqslant -p_{i0}^{+}/(p_{i0}^{+}-2)$ для м. в. $x \in \Omega$), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{i=1}^{N} b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2\, dx + \int\limits_{t_0-R_0}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \Big[\sum_{j=0}^{n} |\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)} + |u_i^{12}|^2 \Big]\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_3\Big\{ \sum_{i=1}^{N} R^{-p_{i0}^{+}/(p_{i0}^{+}-2)} \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_{\Omega} dxdt + \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{n} |f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\, dxdt \Big\}, \quad (3.23)$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка залежить від $K_1, K_2, L, \mathrm{mes}_n\Omega$ і p_{ij}^{-} $(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$, а $\tau \in (t_0 - R, t_0]$ – довільне число.

Звідси, врахувавши, що $\int\limits_{t_0-R}^{t_0} \int\limits_{\Omega} dxdt = R \cdot \mathrm{mes}_n\Omega$, отримаємо (3.12). ∎

3.1.3 Обґрунтування основного результату підрозділу

Доведення теореми 3.1. Для цього спочатку переконаємося, що задача (3.1), (3.2) має не більше одного узагальненого розв'язку, використовуючи метод доведення від супротивного. Припустимо, що правильним є протилежне твердження. Нехай $u^1 = \mathrm{col}(u_1^1, \dots, u_N^1)$, $u^2 = \mathrm{col}(u_1^2, \dots, u_N^2)$ – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. Тоді на підставі леми 3.2 маємо

$$\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} |u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)|^2\, dxdt \leqslant C_1 \sum_{i=1}^{N} R^{-2/(p_{i0}^{+}-2)}, \quad (3.24)$$

де R, R_0, t_0 – довільні числа такі, що $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Зафіксуємо числа $R_0 > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$ та перейдемо в (3.24) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що $u^1 = u^2$ майже скрізь на $Q_{t_0-R_0,t_0}$.

Оскільки R_0, t_0 – довільні числа, то звідси одержуємо, що $u^1 = u^2$ майже всюди на Q. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Тепер перейдемо до доведення існування узагальненого розв'язку задачі (3.1), (3.2). Для цього для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо мішану задачу для системи (3.1) в області $Q_m = \Omega \times (-m, 0)$ з однорідною початковою умовою і крайовими умовами типу (2), а точніше, задачу на знаходження функції $u^m \in \overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_m; \mathbb{R}^N) \cap C([-m, 0]; H_b(\Omega; \mathbb{R}^N))$, яка задовольняє початкову умову

$$u_i^m|_{t=-m} = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

та інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q_m} \sum_{i=1}^{N} \Big\{ \sum_{j=0}^{n} a_{ij}(x, t, \delta u^m) \partial_j v_i \varphi_i + v_i \varphi_i \int\limits_{\Omega} c_i(x, y, t, u^m(y, t))\, dy - u_i^m v_i \varphi_i' \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_m} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{n} f_{ij}^m \partial_j v_i \varphi_i \, dxdt \quad \forall v \in \mathbb{V}_p(\Omega; \mathbb{R}^N),\ \forall \varphi \in C_c^1((-m, 0); \mathbb{R}^N), \quad (3.25)$$

де $f_{ij}^m(x, t) := f_{ij}(x, t)$, якщо $(x, t) \in Q_m$, і $f_{ij}^m(x, t) := 0$, якщо $(x, t) \in Q \setminus Q_m$, для кожних $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Існування та єдиність функції u^m можна довести аналогічно як це зроблено в [14] у випадку рівнянь другого порядку. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ продовжимо u^m нулем на Q і за цим продовженням збережемо позначення u^m. Покажемо, що послідовність $\{u^m\}$ збігається в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(Q; \mathbb{R}^N)$ до узагальненого розв'язку задачі (3.1), (3.2). Для цього спочатку зауважимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція u^m є узагальненим розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (3.1), (3.2) тільки тим, що замість f_{ij} стоять f_{ij}^m $(i = \overline{1, N}, j = \overline{0, n})$. Отож, на підставі леми 3.2 для будь-яких натуральних чисел m і k маємо

$$\max_{t \in [t_0 - R_0, t_0]} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} b_i(x) |u_i^m(x, t) - u_i^k(x, t)|^2 \, dx +$$

$$+ \int\limits_{t_0 - R_0}^{t_0} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \Big[\sum_{j=0}^{n} |\partial_j (u_i^m - u_i^k)|^{p_{ij}(x)} + |u_i^m - u_i^k|^2 \Big] \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\Big\{\sum_{i=1}^{N} R^{-2/(p_{i0}^{+}-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|f_{ij}^{m}(x,t)-f_{ij}^{k}(x,t)|^{p_{ij}{}'(x)}\,dxdt\Big\}, \quad (3.26)$$

де R, R_0, t_0 – довільні числа такі, що $t_0 \leqslant 0$, $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1; 2R_0\}$.

Покажемо, що при фіксованих t_0 і R_0 ліва частина нерівності (3.26) прямує до нуля при $m \to +\infty$, $k \to +\infty$. Справді, нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Виберемо $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$ настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_1\sum_{i=1}^{N} R^{-2/(p_{i0}^{+}-2)} < \varepsilon. \quad (3.27)$$

Це можна зробити, оскільки $p_{i0}^{+} - 2 > 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}$. Тоді для будь-яких $m, k \in \mathbb{N}$ таких, що $\max\{-m,-k\} \leqslant t_0 - R$, маємо $f_{ij}^{m} = f_{ij}^{k}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ майже всюди на $\Omega \times (t_0 - R, t_0)$, а отже, права частина нерівності (3.26) на підставі (3.27) є меншою за ε. Звідси випливає, що звуження членів послідовності $\{u^m\}$ на $Q_{t_0-R_0,t_0}$ утворює фундаментальну послідовність в просторі $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_0-R_0,t_0};\mathbb{R}^N) \cap C([t_0-R_0,t_0];H_b(\Omega;\mathbb{R}^N))$. Отже, в силу довільності t_0 і R_0 існує функція $u \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N)$ така, що $u^m \to u$ в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N)$. Зауважимо, що в тотожності (3.25) можна замінити інтегрування по Q_m на інтегрування по Q. Зробивши це, перейдемо в отриманій рівності до границі при $m \to \infty$. У результаті отримаємо (3.4) для довільних $v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ і $\varphi \in C_c^1((-\infty;0);\mathbb{R}^N)$. Це означає, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (3.1), (3.2). Оцінка (3.6) безпосередньо випливає з леми 3.2 при $u^1 = u$, $u^2 = 0$, $f_{ij}^1 = f_{ij}$, $f_{ij}^2 = 0\,(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$.

∎

3.2 Слабко нелінійні системи

3.2.1 Постановка задачі і формулювання основного результату

Розглядаємо ***задачу***: знайти векторну функцію $u = \mathrm{col}(u_1 \dots u_N) : \overline{Q} \to \mathbb{R}^N$, яка задовольняє (в певному сенсі) систему рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t}(b_i(x)u_i) - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_{ij}(x,t,u,\nabla u) + a_{i0}(x,t,u,\nabla u) + \int\limits_{\Omega} c_i(x,y,t,u(y,t))dy =$$

$$= f_{i0}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(x,t), \quad (x,t) \in Q\,, \quad i = \overline{1,N}\,, \tag{3.28}$$

та крайові умови

$$u_i\Big|_{\Sigma} = 0, \qquad i = \overline{1,N}\,, \tag{3.29}$$

де $a_{ij} : Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{M}_{N\times n} \to \mathbb{R}$, $\ c_i : \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f_{ij} : Q \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$, – задані дійснозначні функції, $\nabla u := (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \equiv (u_{i,x_j} : i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$.

Прикладом систем вигляду (3.28), які тут вивчаються, є система

$$(b_i(x)u_i)_t - \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}^{kl}(x,t)u_{k,x_l} \Big)_{x_j} + \sum_{k=1}^{N} d_{ik}(x,t)u_k +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \widetilde{c}_{ik}(x,y,t)u_k(y,t)\, dy = f_i(x,t), \quad (x,t) \in Q,\ i = \overline{1,N}, \tag{3.30}$$

де $\widetilde{a}_{ij}^{kl}, d_{ik}, \widetilde{c}_{ik}$, $i,k = \overline{1,N}$, $j,l = \overline{1,n}$, – вимірні і обмежені функції, f_i, $i = \overline{1,N}$, – інтегровні функції.

Для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$ позначимо $\widetilde{b}_i(x) := b_i(x)$ якщо $x \in \Omega_i^0$, і $\widetilde{b}_i(x) := 1$ якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_i^0$, та нехай $H_{b_i}(\Omega)$ лінійний простір функцій вигляду $w = \widetilde{b}_i^{-1/2} v$, де $v \in L_2(\Omega)$. Введемо півнорму $H_{b_i}(\Omega)$ by $\|w\|_{H_{b_i}(\Omega)} := \big(\int_\Omega b_i(x)|w(x)|^2 dx\big)^{1/2}$. Легко перевірити, що для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$ простір $H_{b_i}(\Omega)$ є поповненням $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ за півнормою $\|\cdot\|_{H_{b_i}}$ (див. [51, I.3.3]).

Для кожного $i \in \{1,...,N\}$ визначимо лінійний простір $C(S; H_{b_i}(\Omega))$ функцій $h : S \to H_{b_i}(\Omega)$ таких що $b_i^{1/2} h \in C(S; L_2(\Omega))$.

Позначимо

$$K := \inf_{v\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),\ v\neq 0} \Big\{ \int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx \Big/ \int\limits_\Omega |v|^2\,dx \Big\}. \tag{3.31}$$

Відомо, що K скінченне і збігається з першим власним значенням задачі на власні значення: $-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$. З (3.31) випливає нерівність Фрідріхса:

$$\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx \geqslant K \int\limits_\Omega |v|^2\,dx \quad \forall\ v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{3.32}$$

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину матричних функцій $(a_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (a_{ij})$ які задовольняють умови:

$(\mathbf{A}_1)$ для кожних $i \in \{1,\dots,N\}$ та $j \in \{0,\dots,n\}$, функція $a_{ij} : Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{M}_{N\times n} \to \mathbb{R}$ є каратеодорівською; крім того, $a_{ij}(x,t,0,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

$(\mathbf{A}_2)$ для кожних $i \in \{1,\dots,N\}$ та $j \in \{0,\dots,n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких $\rho \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathbb{M}_{N\times n}$ маємо

$$|a_{ij}(x,t,\rho,\xi)| \leqslant h_{ij}(x,t)(|\rho| + |\xi|) + \widetilde{h}_{ij}(x,t),$$

де $h_{ij} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\widetilde{h}_{ij} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

$(\mathbf{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $(\rho^1,\xi^1), (\rho_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{M}_{N\times n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n (a_{ij}(x,t,\rho^1,\xi^1) - a_{ij}(x,t,\rho^2,\xi^2))(\xi^1_{ij} - \xi^2_{ij}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^N (a_{i0}(x,t,\rho^1,\xi^1) - a_{i0}(x,t,\rho^2,\xi^2))(\rho^1_i - \rho^2_i) \geqslant$$

$$\geqslant \gamma_1(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |\xi^1_{ij} - \xi^2_{ij}|^2 + \gamma_2(t) \sum_{i=1}^N |\rho^1_i - \rho^2_i|^2,$$

де $\gamma_1, \gamma_2 \in C(S)$, $\gamma_1(t) > 0$, $\gamma_2(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in S$.

Нехай $\mathbb{C}$ – множина векторних функцій $\mathrm{col}(c_1 \dots c_N)$ які задовольняють такі умови:

$(\mathbf{C}_1)$ для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$ функція $c_i : \Omega\times\Omega\times S\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ є каратеодорівською; $c_i(x,y,t,0)=0$ для майже всіх $(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times S$.

$(\mathbf{C}_2)$ для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$, майже всіх $(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times S$ та довільних $\rho^1,\rho^2\in\mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$|c_i(x,y,t,\rho^1)-c_i(x,y,t,\rho^2)| \leqslant L_i\gamma(t)|\rho^1-\rho^2|,$$

де $L_i\geqslant 0$ – стала,

$$\gamma(t) := NK\gamma_1(t)+\gamma_2(t) \quad \forall t\in S. \tag{3.33}$$

Через $\mathbb{F}$ позначатимемо множину матричних функцій $(f_{ij};\, i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n})\equiv(f_{ij})$, для яких виконується умова

$(\mathbf{F})$ $f_{ij}\in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ для кожного $i\in\{1,\dots,N\}$, $j\in\{0,\dots,n\}$.

Означення 3.2. *Нехай* $b_1,\dots,b_N$ *задовольняє умову* $(\mathcal{B})$, $(a_{ij})\in\mathbb{A}_p$, $\mathrm{col}(c_1,\dots,c_N)\in\mathbb{C}$, $(f_{ij})\in\mathbb{F}$.

Узагальненим розв'язком задачі (3.28),(3.29) назвемо векторну функцію $u=col(u_1\dots u_N)$, $u_i\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))\cap C(S;H_{b_i}(\Omega))$, $i=\overline{1,N}$, *яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \Big[-b_i(x)u_iv_i\varphi_i{}' + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t,u,\nabla u)v_{i,x_j}\varphi_i + a_{i0}(x,t,u,\nabla u)v_i\varphi_i +$$

$$+v_i\varphi_i\int\limits_\Omega c_i(x,y,t,u(y,t))\,dy\Big]\,dxdt =$$

$$=\iint\limits_Q\sum_{i=1}^N\Big[f_{i0}v_i\varphi_i+\sum_{j=1}^n f_{ij}v_{i,x_j}\varphi_i\Big]\,dxdt,\ v_i\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),\ \varphi_i\in C^1_c(\mathrm{int}S),\ i=\overline{1,N}. \tag{3.34}$$

Зауважимо, що задача (3.28),(3.29) може мати багато узагальнених розв'язків Наприклад, нехай $\Omega:=(0,2\pi)$, $Q:=(0,2\pi)\times(-\infty,0]$,

$$b(x) := \begin{cases} 0, & \text{якщо } x\in(0,\pi], \\ 1, & \text{якщо } x\in(\pi,2\pi), \end{cases}$$

$$\widehat{c}(x,y,t) := \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sin x\sin y, & \text{if } x\in(0,\pi],\ y\in(0,2\pi),\ t\in S, \\ \frac{c_0}{\pi}\sin x\sin y, & \text{if } x\in(\pi,2\pi), y\in(0,2\pi), t\in S, \end{cases}$$

де $c_0 \in \mathbb{R}$ – довільне. Легко перевірити, що задача

$$(b(x)u)_t - u_{xx} + \int\limits_0^{2\pi} \widehat{c}(x,y,t)u(y,t)\,dy = 0,\ (x,t) \in Q, \qquad u\big|_{x=0\,\vee x=2\pi} = 0,$$

має узагальнені розв'язки $u = Ae^{-\lambda t}\sin x$, $(x,t) \in \overline{Q}$, де $\lambda := c_0 + 1$, $A \in \mathbb{R}$ – довільне.

Отже, звідси випливає, що для забезпечення єдиності розв'язку задачі (3.28),(3.29) необхідно наскласти обмеження на його поведінку при $t \to -\infty$.

Розглядаємо задачу на знаходження узагальненого розв'язку (3.28),(3.29), який задавольняє аналог початкової умови

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\omega\int\limits_0^t \gamma(s)ds} \|u_i(\cdot,t)\|_{H_{b_i}(\Omega)} = 0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{3.35}$$

Тут ω – деяке дійсне число, γ – функція з (3.33).

Для формулювання основних результатів підрозділу введемо потрібний нам функційний простір. Нехай

$$L^2_{\omega,\beta}(S;L_2(\Omega)) := \Big\{ f \in L^2_{\text{loc}}(S;L_2(\Omega)) \ \Big| \ \int\limits_S \beta(t) e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt < \infty \Big\}$$

зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2_{\omega,\beta}(S;L_2(\Omega))} = \int\limits_S \beta(t)\, e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds} (f(\cdot,t),g(\cdot,t))_{L_2(\Omega)}\,dt$$

та нормою

$$\|f\|_{L^2_{\omega,\beta}(S;L_2(\Omega))} := \Big(\int\limits_S \beta(t)\, e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \Big)^{1/2},$$

де $\omega \in \mathbb{R}$, $\beta \in C(S)$, $\beta(t) > 0$ для всіх $t \in S$, функція γ визначена в (3.33). Легко переконатись, що цей простір є гільбертовим.

Теорема 3.2. *Нехай* $b_1,\ldots,b_N$ *задовольняє умову* (**B**), $(a_{ij}) \in \mathcal{A}$, $(f_{ij}) \in \mathbb{F}$, $col(c_1,\ldots,c_N) \in \mathcal{C}$, *і, крім того, якщо* $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} b_i^0 = 0$, *де* $b_i^0 := ess\inf\limits_{x\in\Omega} b_i(x) = 0$, *маємо*

$$L mes_n \Omega < 1, \tag{3.36}$$

де $L := \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} L_i^2\Big)^{1/2}$.

Припустимо, що

$$\omega < 1 - L\mathrm{mes}_n\Omega,$$

якщо виконується умова (3.36), *і*

$$\omega < (1 - L\mathrm{mes}_n\Omega)/\min_{1\leqslant i\leqslant N} b_i^0$$

в іншому випадку, а також

$$f_{i0} \in L^2_{\omega,1/\gamma}(S; L_2(\Omega)), \quad f_{ij} \in L^2_{\omega_i,1/\gamma_1}(S; L_2(\Omega)), \quad i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n}. \quad (3.37)$$

Тоді існує і тільки один узагальнений розв'язок задачі (3.28), (3.29), (3.35), *і для нього виконується оцінка*

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds} \sum_{i=1}^{N} \|u_i(\cdot,\tau)\|_{H_{b_i}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \Big[\|u_i\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S_\tau;L_2(\Omega))} + \sum_{j=1}^{n} \|u_{i,x_j}\|_{L^2_{\omega,\gamma_1}(S_\tau;L_2(\Omega))}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{i=1}^{N} \Big[\|f_{i0}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S_\tau;L_2(\Omega))} + \sum_{j=1}^{n} \|f_{ij}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_1}(S_\tau;L_2(\Omega))}\Big], \quad \tau \in S, \quad (3.38)$$

де $S_\tau := (-\infty, \tau] \quad \forall \tau \in (-\infty, 0]$ $(S_0 = S)$, $C_1 > 0$ – *стала, яка залежить тільки від* $mes_n\Omega$, L, ω *та* b_i^0, $i = \overline{1,N}$.

3.2.2 Допоміжні твердження

Позначимо

$$\partial_0 w := w, \quad \partial_j w := w_{x_j}, \ j = \overline{1,n}.$$

Лема 3.3. *Нехай* $T > 0$ – *довільне число,* $b_1, \ldots, b_N$ *задовольняють умову* (**B**), $w_i \in L^2(0,T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$ *та* $g_{ij} \in L^2(\Omega \times (0,T))$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$. *Припустимо, що функція* $w = \mathrm{col}(w_1 \ldots w_N)$ *задовольняє інтегральну тотожність*

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{N} \Big[-b_i w_i v_i \varphi_i' + \sum_{j=0}^{n} g_{ij}\partial_j v_i \varphi_i\Big]\, dxdt = 0, \quad (3.39)$$

для будь-яких $v_i \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $\varphi_i \in C_c^1(0,T)$, $i = \overline{1,N}$.

Тоді для кожного $i \in \{1,\ldots,N\}$ *функція* w_i *належить простору* $C([0,T];H_{b_i}(\Omega))$ *і для всіх* $\theta_i \in C^1([0,T]), i=\overline{1,N},$ *та* $t_1,t_2\in[0,T]$, $t_1<t_2$, *правильна рівність*

$$\frac{1}{2}\theta_i(t_2)\sum_{i=1}^N \|w_i(\cdot,t_2)\|^2_{H_{b_i}(\Omega)} - \frac{1}{2}\theta_i(t_1)\sum_{i=1}^N \|w_i(\cdot,t_1)\|^2_{H_{b_i}(\Omega)} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^N \|w_i(\cdot,t)\|^2_{H_{b_i}(\Omega)}\theta_i'(t)\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N\Big[\sum_{j=0}^n g_{ij}\partial_j w_i\Big]\theta_i\,dxdt = 0. \quad (3.40)$$

Доведення леми 3.3. Це твердження може бути доведено аналогічно до леми 2 в [14]. ∎

Лема 3.4. *Нехай* $b_1,\ldots,b_N$ *задовольняють умови* (**B**), $(a_{ij})\in\mathcal{A}$, $\mathrm{col}(c_1,\ldots,c_N)\in\mathcal{C}$ *та, крім того, якщо* $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} b_i^0 = 0$, *виконується умова* (3.36). *Припустимо, що*

$$\omega < 1 - L\mathrm{mes}_n\Omega,$$

якщо виконується (3.36), *і*

$$\omega < (1 - L\mathrm{mes}_n\Omega)/\min_{1\leqslant i\leqslant N} b_i^0$$

в іншому випадку.

Нехай для кожного $k\in\{1,2\}$ *функція* $u^k = col(u_1^k\ldots u_N^k)$ – *узагальнений розв'язок задачі* (3.28),(3.29),(3.35) *з* $f_{ij}=f_{ij}^k$, *де*

$$f_{i0}^k \in L^2_{\omega,1/\gamma}(S;L_2(\Omega)),\quad f_{ij}^k\in L^2_{\omega,1/\gamma_1}(S;L_2(\Omega)),\ k=\overline{1,2},\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{0,n}. \quad (3.41)$$

Тоді виконується нерівність

$$e^{\omega\int_0^\tau \gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^N \|u_i^1(\cdot,\tau)-u_i^2(\cdot,\tau)\|_{H_{b_i}(\Omega)} + \sum_{i=1}^N\Big[\|u_i^1-u_i^2\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S_\tau;L_2(\Omega))} +$$

$$+\sum_{j=1}^n \|u^1_{i,x_j}-u^2_{i,x_j}\|_{L^2_{\omega,\gamma_1}(S_\tau;L_2(\Omega))}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_1\sum_{i=1}^N\Big[\|f_{i0}^1-f_{i0}^2\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S_\tau;L_2(\Omega))} + \sum_{j=1}^n\|f_{ij}^1-f_{ij}^2\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_1}(S_\tau;L_2(\Omega))}\Big],\quad \tau\in S, \quad (3.42)$$

де S_τ *і* $C_1>0$ *таке ж як в* (3.38).

Доведення леми 3.4. Покладемо

$$\widehat{u}_i(x,t) := u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t), \quad i = \overline{1,N},$$
$$\widehat{a}_{ij}(x,t) := a_{ij}(x,t,u^1(x,t),\nabla u^1(x,t)) - a_{ij}(x,t,\nabla u^2(x,t)),$$
$$i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n},$$
$$\widehat{c}_i(x,y,t) := c_i(x,y,t,u^1(y,t)) - c_i(x,y,t,u^2(y,t)), \quad i = \overline{1,N},$$
$$\widehat{f}_{ij}(x,t) := f_{ij}^1(x,t) - f_{ij}^2(x,t), \quad i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n},$$

для майже всіх $(x,t) \in Q$.

З (3.34) отримуємо

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \big[- b_i \widehat{u}_i v_i \varphi_i' + \sum_{j=0}^n \widehat{a}_{ij} \partial_j v_i \varphi_i + v_i \varphi_i \int\limits_\Omega \widehat{c}_i(x,y,t)\,dy\big]\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \big[\sum_{j=0}^n \widehat{f}_{ij} \partial_j v_i \varphi_i\big]\,dxdt. \tag{3.43}$$

Звідси, використовуючи 3.3 для(3.43) з $w_i = \widehat{u}_i$, $\theta_i = \theta$, $g_{ij} = \widehat{a}_{ij}$, $g_{i0} = \widehat{a}_{i0} + \int\limits_\Omega \widehat{c}_i\,dy$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$, здобудемо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,t)|^2\theta(t)\,dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i|\widehat{u}_i|^2\theta'\,dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \Big[\sum_{j=0}^n \widehat{a}_{ij}\partial_j\widehat{u}_i + \widehat{u}_i \int\limits_\Omega \widehat{c}_i(x,y,t)\,dy\Big]\theta\,dxdt =$$
$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \Big[\sum_{j=0}^n \widehat{f}_{ij}\partial_j\widehat{u}_i\Big]\theta\,dxdt, \tag{3.44}$$

де τ_1, $\tau_2 \in S, \tau_1 < \tau_2$, $\theta \in C^1(S)$ – довільні.

Використовуючи нерівність Коші:

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \quad a,b \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0, \tag{3.45}$$

оцінимо праву частину рівності (3.44):

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \Big[\sum_{j=1}^{n} \widehat{f}_{ij}\partial_j\widehat{u}_i\Big]\theta\,dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} \gamma_1\Big[\sum_{i=1}^{N} \ |\nabla\widehat{u}_i|^2\Big]\theta\,dxdt+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma_1}\Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}|\widehat{f}_{ij}|^2\Big]\theta\,dxdt, \tag{3.46}$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\widehat{f}_{i0}\widehat{u}_i\theta\,dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma\Big[\sum_{i=1}^{N}|\widehat{u}_i|^2\Big]\theta\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma}\Big[\sum_{i=1}^{N}|\widehat{f}_{i0}|^2\Big]\theta\,dxdt, \tag{3.47}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – довільні додатні числа.

З умови $(\mathbf{A}_3)$ отримуємо

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n}\widehat{a}_{ij}\,\partial_j\widehat{u}_i\Big]\theta\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma_1(t)\Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}|\partial_j\widehat{u}_i|^2\Big]\theta\,dxdt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma_2(t)\Big[\sum_{i=1}^{N}|\widehat{u}_i|^2\Big]\theta\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma_1(t)\Big[\sum_{i=1}^{N}|\nabla\widehat{u}_i|^2\Big]\theta\,dxdt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma_2(t)|\widehat{u}|^2\theta\,dxdt. \tag{3.48}$$

Використовуючи умови $(\mathbf{C}_1)$, $(\mathbf{C}_2)$ та нерівність Коші-Буняковського, здобуваємо

$$\left|\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\widehat{u}_i(x,t)\Big(\int\limits_{\Omega}\widehat{c}_i(x,y,t)\,dy\Big)\theta(t)\,dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}|\widehat{u}_i(x,t)|\Big(\int\limits_{\Omega}|\widehat{c}_i(x,y,t)|\;dy\Big)\theta(t)\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma(t)\Big(\sum_{i=1}^{N}L_i\,|\widehat{u}_i(x,t)|\Big)\Big(\int\limits_{\Omega}|\widehat{u}(y,t)|\;dy\Big)\theta(t)\,dxdt. \tag{3.49}$$

Оскільки для майже всіх $(x,t)\in Q$ з нерівності Коші-Буняковського маємо

$$\sum_{i=1}^{N} L_i|\widehat{u}_i(x,t)| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} L_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{N} |\widehat{u}_i(x,t)|^2\Big)^{1/2} = L|\widehat{u}(x,t)|, \tag{3.50}$$

то з (3.49) отримуємо нерівність

$$\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \widehat{u}_i(x,t)\Big(\int_{\Omega} \widehat{c}_i(x,y,t)\,dy\Big)\theta(t)\,dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma(t)\Big(\int_{\Omega} |\widehat{u}(x,t)|dx\Big)^2\theta(t)dt \leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} \gamma(t)\,|\widehat{u}(x,t)|^2\,\theta(t)\,dxdt. \tag{3.51}$$

З (3.44), використовуючи (3.46) –(3.48), (3.51), отримуємо

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_2)|^2\,dx - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_1)|^2\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} b_i|\widehat{u}_i|^2\theta'\,dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} \gamma_1\Big[\sum_{i=1}^{N}|\nabla\widehat{u}_i|^2\Big]\theta\,dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma_2|\widehat{u}|^2\theta\,dxdt-$$

$$-L\mathrm{mes}_n\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma\,|\widehat{u}|^2\,\theta\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma_1\Big[\sum_{i=1}^{N}|\nabla\widehat{u}_i|^2\Big]\theta\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\frac{1}{\gamma_1}\Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}|\widehat{f}_{ij}|^2\Big]\theta\,dxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon_2}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma|\widehat{u}|^2\theta\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\frac{1}{\gamma}\Big[\sum_{i=1}^{N}|\widehat{f}_{i0}|^2\Big]\theta\,dxdt,$$

де $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ – довільні додатні числа.

Звідси, поклавши $\theta(t) := 2e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}$, $t \in S$, отримуємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2} \gamma(s)\,ds} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_2)|^2\,dx - e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1} \gamma(s)\,ds} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_1)|^2\,dx-$$

$$-2\omega \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N b_i|\widehat{u}_i|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+2(\delta+(1-\delta))\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma_1 e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N |\nabla\widehat{u}_i|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma_2 e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\,dxdt - 2L\mathrm{mes}_n\Omega \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma_1 e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N |\nabla\widehat{u}_i|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \frac{1}{\gamma_1} e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |\widehat{f}_{ij}|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+\varepsilon_2 \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \frac{1}{\gamma} e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N |\widehat{f}_{i0}|^2\Big]\,dxdt,$$

де $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\delta \in (0,1)$ – довільні.

Звідси і з (3.32) одержуємо нерівність

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2} \gamma(s)\,ds} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_2)|^2\,dx - e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1} \gamma(s)\,ds} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_1)|^2\,dx-$$

$$-2\omega \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N b_i|\widehat{u}_i|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+2(1-\delta)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma_1 e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N |\nabla\widehat{u}_i|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+2\delta NK\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma_1 e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\,dxdt+2\delta\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma_2 e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\,dxdt-$$

$$-2L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\,dxdt\leqslant\varepsilon_1\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma_1 e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N|\nabla\widehat{u}_i|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma_1}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^n|\widehat{f}_{ij}|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+\varepsilon_2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N|\widehat{f}_{i0}|^2\Big]\,dxdt. \qquad (3.52)$$

З (3.52), врахувавши позначення (3.33), одержуємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_2)|^2\,dx-e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_1)|^2\,dx+$$

$$+\big[2(1-\delta)-\varepsilon_1\big]\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma_1 e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^N|\nabla\widehat{u}_i|^2\,dxdt+$$

$$+[2(\delta-L\mathrm{mes}_n\Omega-\max_{1\leqslant i\leqslant N}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b_i(x)\})-\varepsilon_2]\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma_1}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^n|\widehat{f}_{ij}|^2\Big]\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N|\widehat{f}_{i0}|^2\Big]\,dxdt. \qquad (3.53)$$

Зауважимо, що

$$1-L\mathrm{mes}_n\Omega-\max_{1\leqslant i\leqslant N}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b_i(x)\}>0. \qquad (3.54)$$

Справді, нехай $1-L\mathrm{mes}_n\Omega>0$. Тоді $\omega<1-L\mathrm{mes}_n\Omega$. Розглянемо два випадки: 1) $\omega\leqslant 0$; 2) $0<\omega<1-L\mathrm{mes}_n\Omega$. В першому випадку маємо $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b_i(x)\}\leqslant 0$, і звідси виконання (3.54). В другому випадку маємо $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b_i(x)\}=\omega\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}b_i(x)\leqslant\omega<1-L\mathrm{mes}_n\Omega$, звідки виконується нерівність (3.54). Тепер нехай $1-L\mathrm{mes}_n\Omega\leqslant 0$. Тоді $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}b_i^0>0$ і

$\omega \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} b_i^0 < 1 - L\mathrm{mes}_n\Omega$, зокрема, $\omega < 0$. Оскільки $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}\{\omega b_i(x)\} = \omega \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} b_i(x) = \omega \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} b_i^0$, тоді в цьому випадку нерівніть (3.54) виконується також.

Виберемо в (3.53) $\delta \in (0,1)$ таке, що $\delta - L\mathrm{mes}_n\Omega - \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}\{\omega b_i(x)\} > 0$, $\varepsilon_1 = 1-\delta$, $\varepsilon_2 = \delta - L\mathrm{mes}_n\Omega - \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}\{\omega b_i(x)\}$. В результаті отримаємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_2)|^2\,dx - e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau_1)|^2\,dx +$$
$$+C_3\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \Big[\gamma_1 e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^N|\nabla\widehat{u}_i|^2 + \gamma e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\Big]\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_4\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \Big(\frac{1}{\gamma_1}e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^n|\widehat{f}_{ij}|^2\Big] + \frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N|\widehat{f}_{i0}|^2\Big]\Big)\,dxdt, \quad (3.55)$$

де C_3, C_4 – додатні сталі, що залежать тільки від $\mathrm{mes}_n\Omega$, L, ω та b_i^0, $i = \overline{1,N}$.

З (3.35) маємо умову

$$\int\limits_\Omega e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)ds}\Big[\sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,t)|^2\Big]\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad t\to-\infty. \quad (3.56)$$

Зафіксуємо довільне $\tau_2 = \tau \in S$, і перейдемо до границі при $\tau_1 \to -\infty$ в (3.55), використовуючи (3.41) і (3.56). В результаті одержимо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|\widehat{u}_i(x,\tau)|^2\,dx +$$
$$+C_3\int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega \Big[\gamma_1 e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^N|\nabla\widehat{u}_i|^2 + \gamma e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}|\widehat{u}|^2\Big]\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_4\int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega \Big(\frac{1}{\gamma_1}e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}\Big[\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^n|\widehat{f}_{ij}|^2\Big] + \frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^N|\widehat{f}_{i0}|^2\Big)\,dxdt. \quad (3.57)$$

Звідси отримуємо оцінку (3.42). ∎

3.2.3 Обґрунтування основного результату підрозділу

Доведення теореми 3.2. Спочатку доведемо, що задача (3.28), (3.29), (3.35) *має не більше одного узагальненого розв'язку*, використавши метод доведення від супротивного. Припустимо, що правильним є протилежне твердження. Нехай $u^1 = \mathrm{col}(u^1_1, \dots, u^1_N)$, $u^2 = \mathrm{col}(u^2_1, \dots, u^2_N)$ – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. Тоді на підставі леми 3.4 (див. (3.42)) маємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^N \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds} |u^1_i(x,t) - u^2_i(x,t)|^2\Big]\,dxdt \leqslant 0. \qquad (3.58)$$

У результаті отримаємо, що $u^1(x,t) = u^2(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Тепер перейдемо до доведення *існування узагальненого розв'язку* задачі (3.28),(3.29),(3.35) та його оцінки. Почнемо з *апріорної оцінки* узагальненого розв'язку цієї задачі.

Припустимо, що u – узагальнений розв'язок задачі (3.28), (3.29), (3.35). Використовуючи умову $(\mathbf{A}_1)$, легко бачити, що $u = 0$ узагальнений розв'язок задачі (3.28),(3.29),(3.35) при $f_{ij} = 0$, $i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$, тоді з оцінки (3.42) (див. лема 3.4) при $u^1_i = u$, $f^1_{ij} = f_{ij}$ та $u^2_i = 0, f^2_{ij} = 0$, $i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$, отримуємо (3.38).

Тепер для кожного $m \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{0, \dots, n\}$ визначимо $f^m_{ij}(\cdot,t) := f_{ij}(\cdot,t)$, якщо $-m < t \leqslant 0$, і $f^m_{ij}(\cdot,t) := 0$, якщо $t \leqslant -m$, та розглянемо задачу на знаходження вектор-функції $u^m_i \in L^2(-m,0; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)) \cap C([-m,0]; H_{b_i}(\Omega))$, $i = \overline{1,N}$, яка задовольняє початкову умову

$$u^m_i|_{t=-m} = 0, \quad i = \overline{1,N}, \qquad (3.59)$$

(як елемент простору $C([-m,0]; H_{b_i}(\Omega))$) та систему (3.28) в $Q_m := \Omega \times (-m, 0]$ в сенсі інтегральної тотожності

$$\iint\limits_{Q_m} \sum_{i=1}^N \Big[-u^m_i v_i \varphi'_i + \sum_{j=0}^n a_{ij}(x,t,u^m,\nabla u^m)\partial_j v_i \varphi_i +$$

$$+v_i\varphi_i \int\limits_{\Omega} c_i(x,y,t,u^m(y,t))\,dy\Big]\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_m} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} f_{ij}^m \partial_j v_i \varphi_i \,dxdt, \quad v_i \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),\ \varphi_i \in C_c^1(-m,0),\ i=\overline{1,N}. \quad (3.60)$$

Існування та єдиність функції u^m є добре відомим фактом (див., наприклад, [25]). Для кожного $m\in\mathbb{N}$ продовжимо u^m нулем на Q і за цим продовженням збережемо позначення u^m. Покажемо, що послідовність $\{u^m\}$ збігається в певному сенсі до узагальненого розв'язку нашої задачі. Зауважимо, що для кожного $m\in\mathbb{N}$ функція $u^m=\mathrm{col}(u_1^m,\ldots,u_N^m)$ така, що для кожного $i\in\{1,\ldots,N\}$ функція u_i^m належить $L^2(S;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))\cap C(S;H_{b_i}(\Omega))$ та виконується інтегральна рівність (3.34) при f_{ij}^m замість f_{ij}, $i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n}$, Отож,

$$\iint\limits_{Q} \sum_{i=1}^{N}\Big[-u_i^m v_i\varphi_i' + \sum_{j=0}^{n} a_{ij}(x,t,u^m,\nabla u^m)\partial_j v_i\varphi_i +$$

$$+v_i\varphi_i \int\limits_{\Omega} c_i(x,y,t,u^m(y,t))\,dy\Big]\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q} \sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n} f_{ij}^m\partial_j v_i\Big]\varphi_i\,dxdt, \quad v_i \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),\ \varphi_i\in C_c^1(-\infty,0),\ i=\overline{1,N}. \tag{3.61}$$

Отож, приходимо до висновку, що $u^m = \mathrm{col}(u_1^m,\ldots,u_n^m)$ – узагальнений розв'язок задачі (3.28),(3.29),(3.35) з (f_{ij}^m) замість (f_{ij}). Звідси та сказаного вище, зокрема, одержуємо (див. (3.38)) оцінку

$$e^{2\omega\int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^{N}\|u_i^m(\cdot,\tau)\|_{H_{b_i}(\Omega)}^2 \leqslant C_5\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Big[\frac{1}{\gamma_1}e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\|f_{ij}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 +$$

$$+\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^{N}\|f_{i0}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}^2\Big]\,dt,\ \tau\in S, \tag{3.62}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\Big[\|\nabla u_i^m\|_{L^2_{\omega,\gamma_1}(S;L_2(\Omega))}+\|u_i^m\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S;L_2(\Omega))}\Big]\leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n}\|f_{ij}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_1}(S;L_2(\Omega))}+\|f_{i0}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S;L_2(\Omega))}\Big], \qquad (3.63)$$

де $C_5>0$ – стала, яка залежить тільки від $\mathrm{mes}_n\Omega, L, \omega$ та $b_i^0, i=\overline{1,N}$.

Нехай k,l довільні натуральні числа, $l>k$. Використовуючи лему 3.4 для функцій u^k і u^l, отримуємо подібну до (3.42) оцінку, а саме

$$\sup_{\tau\in S}\Big[e^{2\omega\int\limits_0^{\tau}\gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^{N}\|u_i^k(\cdot,\tau)-u_i^l(\cdot,\tau)\|^2_{H_{b_i}(\Omega)}\Big]+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\Big[\|\nabla u_i^k-\nabla u_i^l\|^2_{L^2_{\omega,\gamma_1}(S;L_2(\Omega))}+\|u_i^k-u_i^l\|^2_{L^2_{\omega,\gamma}(S;L_2(\Omega))}\Big]\leqslant$$
$$\leqslant C_6\int\limits_{-l}^{-k}\Big[\frac{1}{\gamma_1}e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\|f_{ij}^k(\cdot,t)-f_{ij}^k(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^{t}\gamma(s)\,ds}\|f_{i0}^k(\cdot,t)-f_{i0}^k(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big]\,dt, \qquad (3.64)$$

де $C_6>0$ – стала, яка залежить тільки від $\mathrm{mes}_n\Omega, L, \omega$ та $b_i^0,\ i=\overline{1,N}$.

З умови (3.37) маємо, що права частина нерівності (3.64) прямуємо до нуля при прямуванні k і l до $+\infty$. Звідси випливає фундаментальність послідовностей $\{u_i^m\}_{m=1}^{\infty},\ i=\overline{1,N}$, в $L^2_{\omega,\gamma}(S;L_2(\Omega))$ та $C(S;H_{b_i}(\Omega)),\ i=\overline{1,N}$, та $\{\partial_j u_i^m\}_{m=1}^{\infty},\ i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n}$, в $L^2_{\omega,\gamma_1}(S;L_2(\Omega))$. Це означає, що існують функції $u_i\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))\cap L^2_{\omega,\gamma}(S;L_2(\Omega))\cap C(S;H_{b_i}(\Omega))$ такі, що $\partial_j u_i\in L^2_{\omega,\gamma_1}(S;L_2(\Omega)),\ i=\overline{1,N}, j=\overline{1,n}$, і

$$u_i^m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}u_i \qquad \text{сильно в} \qquad C(S;H_{b_i}(\Omega)) \text{ і } L^2_{\omega,\gamma}(S;L_2(\Omega)),\ i=\overline{1,N}, \qquad (3.65)$$

$$\partial_j u_i^m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\partial_j u_i \qquad \text{сильно в} \qquad L^2_{\omega,\gamma_1}(S;L_2(\Omega)),\ i=\overline{1,N}, j=\overline{1,n}. \qquad (3.66)$$

Використовуючи умову $(\mathbf{A}_2)$ та оцінку (3.63), для всіх $t_1,t_2\in S\ (t_1<t_2)$ одержуємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}|a_{ij}(u^m)|^2\,dxdt\leqslant C_7\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\Big(|h_{ij}|^2\big(|u^m|^2+\sum_{k=1}^{N}\big|\nabla u_k^m\big|^2\big)+|\widetilde{h}_{ij}|^2\Big)\,dxdt\leqslant C_8, \qquad (3.67)$$

де C_7, C_8 – додатні сталі, що не залежать від m.

Отже, з (3.67) маємо, що для кожного $i \in \{1, \dots, N\}$ і $j \in \{0, \dots, n\}$ послідовність $\{a_{ij}(u^m)\}_{m=1}^{\infty}$ обмежена в $L^2_{\mathrm{loc}}(S; L_2(\Omega))$. Звідси і (3.66)випливає існування підпослідовності послідовності $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ (позначимо її $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ також) та функцій
$\chi_{ij} \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; L_2(\Omega))$, $i = \overline{1, N}, j = \overline{0, n}$, таких, що

$$\partial_j u_i^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \partial_j u_i \quad \text{майже всюди на} \quad Q, \quad i = \overline{1, N},\ j = \overline{0, n}, \tag{3.68}$$

$$a_{ij}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{ij} \quad \text{слабко в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(S; L_2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N},\ j = \overline{0, n}. \tag{3.69}$$

З умови $(\mathbf{A}_1)$ та (3.68) випливає, що

$$a_{ij}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_{ij}(u) \quad \text{майже всюди на} \quad Q, \quad i = \overline{1, N},\ j = \overline{0, n}. \tag{3.70}$$

На основі [83, Chapter I, Lemma 1.3], з (3.69) та (3.70) отримуємо $\chi_{ij} = a_{ij}(u)$ для кожного $i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{0, \dots, n\}$, тобто

$$a_{ij}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_{ij}(u) \quad \text{слабко в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(S; L_2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{0, n}. \tag{3.71}$$

Використовуючи умову $(\mathbf{C}_2)$, для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ і для всіх $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ одержуємо

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\Big|\int_{\Omega} c_i(x, y, t, u^m(y, t))\, dy - \int_{\Omega} c_i(x, y, t, u(y, t))\, dy\Big|^2 dxdt \leqslant \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\Big|\int_{\Omega} |c_i(x, y, t, u^m(y, t)) - c_i(x, y, t, u(y, t))|\, dy\Big|^2 dxdt \leqslant \\
&\leqslant L_i^2 \mathrm{mes}_n\Omega \int_{t_1}^{t_2} \gamma^2(t)\Big(\int_{\Omega} |u^m(y, t) - u(y, t)|\, dy\Big)^2 dt \leqslant \\
&\leqslant L_i^2 (\mathrm{mes}_n\Omega)^2 \max_{t\in[t_1, t_2]} \gamma^2(t) \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} |u^m - u|^2\, dxdt.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

З (3.65) маємо

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} |u^m - u|^2\, dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.73}$$

На підставі (3.72) і (3.73) для кожного $i=\overline{1,n}$ здобуваємо

$$\int\limits_{\Omega} c_i(\cdot,y,\circ,u_m(y,\circ))\,dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega} c_i(\cdot,y,\circ,u(y,\circ))\,dy \quad \text{сильно в } L_{2,\mathrm{loc}}(S;L_2(\Omega)). \tag{3.74}$$

Доведемо, що функція $u=\mathrm{col}(u_1\ldots u_N)$ є узагальненим розв'язком задачі (3.28),(3.29),(3.35). Спрямуємо m до $+\infty$ в тотожності (3.61). Використовуючи (3.65), (3.71), (3.74) та означення f_{ij}^m, $i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n}, m\in\mathbb{N}$, отримуємо тотожність (3.34). Беручи до уваги (3.65), в (3.62) перейдемо до границі при $m\to\infty$. З отриманої нерівності та умови (3.37) отримуємо виконання умови (3.35). Отже, ми довели, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (3.28), (3.29), (3.35).

∎

Висновки до розділу 3

У розділі 3 встановлено достатні умови існування та єдиності розв'язків задач без початкових умов для слабко та сильно нелінійних систем рівнянь.

Отримані тут результати є узагальненням і доповненням результатів, отриманих для рівнянь другого порядку [64].

Розділ 4

Задача без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей з функціоналами

У цьому розділі розглядаємо задачу без початкових умов для еволюційних включень з функціоналами. Основні результати розділу опубліковано в праці [20].

Спочатку наведемо приклад задачі, що буде розглядатись.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Позначимо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \partial\Omega \times S$, $\Omega_t := \Omega \times \{t\}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Нехай $L^2(F)$, F – вимірна множина в $\mathbb{R}^k$ $(k = n$ або $k = n+1)$, – стандартний простір Лебега; $L^2_{\rm loc}(\overline{Q})$ – простір визначених на Q вимірних функцій таких, що їх звуження на будь-яку вимірну обмежену множину $Q' \subset Q$ належить простору $L^2(Q')$; $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^2(\Omega), i = \overline{1, n}\}$, – стандартний простір Соболєва з з скалярним добутком $(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega [\nabla v \nabla w + vw]\, dx$, де $\nabla u := (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$, $\nabla w := (w_{x_1}, \dots, w_{x_n})$.

Нехай K – опукла замкнена множина в $H^1(\Omega)$, що містить 0. Задача: знайти функцію $u \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q})$, таку, що $u_{x_i} \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q})$, $i = \overline{1, n}$, $u_t \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q})$, та для майже всіх $t \in S$ маємо $u(\cdot, t) \in K$ і

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big\{ u_t(v-u) + \nabla u \nabla (v-u) + u(v-u) +$$

$$+ (v-u) \int\limits_{\Omega} b(x,y,t) u(y,t)\, dy \Big\}\, dx \geq \int\limits_{\Omega_t} f(v-u)\, dx \quad \forall\, v \in K, \tag{4.1}$$

$$\lim_{t \to -\infty} ||u(\cdot, t)||_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{4.2}$$

де $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $a \in L^\infty(\Omega)$, $b \in L^\infty(\Omega \times \Omega \times (-\infty, 0))$ – задані функції, $\nabla u := (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$.

Як буде показано пізніше, якщо

$$f \in L^2(Q), \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times(-\infty,0]} |b(x,y,t)|\sqrt{\mathrm{mes}_n\Omega} < K,$$

де $K > 0$ – стала з нерівності $K\|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$, то задача, називатимемо її (4.1), (4.2), має розв'язок і тільки один.

Зауважимо, що задача (4.1), (4.2) може бути записана в більш абстрактному вигляді. Справді, провівши відповідні ототожнення функцій і функціоналів, матимемо неперервні та щільні вкладення

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))',$$

де $(H^1(\Omega))'$ – спряжений до $H^1(\Omega)$ простір. Легко бачити, що в цьому випадку для будь-яких $h \in L^2(\Omega)$ і $v \in H^1(\Omega)$ маємо $\langle h, v\rangle = (h, v)$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – позначення скалярного добутку на дуальній парі $[(H^1(\Omega))',\ H^1(\Omega)]$, а $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в $L^2(\Omega)$. Тому будемо використовувати позначення $(\cdot, \cdot)$ замість $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Введемо позначення $S := (-\infty, 0]$, $V := H^1(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$ і визначимо оператори $A : V \to V'$ і $B(t, \cdot) : H \to H, t \in S,$ за правилом

$$(Av, w) = \int\limits_\Omega \left[\nabla v \nabla w + vw\right] dx, \quad v, w \in V.$$

$$B(t, v)(\cdot) = \int\limits_\Omega b(\cdot, y, t) v(y)\, dy, \quad v \in H.$$

Тоді задача (4.1), (4.2) еквівалентна задачі: знайти функцію $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V)$ таку, що $u' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$, виконується умова (4.2) та для майже всіх $t \in S$ маємо $u(t) \in K$ і

$$(u'(t) + Au(t) + B(t, u(t)), v - u(t)) \ge (f(t), v - u(t)) \quad \forall\, v \in K. \tag{4.3}$$

де $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ – задана функція.

Відмітимо, що варіаційну нерівність (4.3) можна записати у вигляді субдиференціального включення. Для цього покладемо $I_K(v) := 0$, якщо $v \in K$, і $I_K(v) := +\infty$, якщо $v \in V \setminus K$, і визначимо

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right) dx + I_K(v), \quad v \in V.$$

Легко переконатись, що функціонал $\Phi : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ є власним, опуклим і напівнеперервним знизу. Тоді з відомих результатів (див., наприклад, [53, с. 83]) випливає, що задачу на знаходження розв'язків варіаційної нерівності (4.3) можна записати у вигляді задачі для субдиференціального включення: знайти функцію $u \in L^2_{\rm loc}(S;V)$ таку, що $u' \in L^2_{\rm loc}(S;H)$, виконується умова (4.2) та для майже всіх $t \in S$ маємо $u(t) \in D(\partial\Phi)$ і

$$u'(t) + \partial\Phi(u(t)) + B(t, u(t)) \ni f(t) \quad \text{in} \quad H. \tag{4.4}$$

Саме задачам для субдиференціального включення типу (4.4) і присвячений цей розділ. Принагідно відзначимо, що у відомих монографіях [53] та багатьох статтях, присвячених згаданій тематиці, субдиференціальні включення часто називають варіаційними нерівностями. Будемо притримуватися цієї традиції.

4.1 Задача без початкових умов для еволюційних варіаційних слабко нелінійних нерівностей з функціоналами

4.1.1 Основні позначення та допоміжні факти

Покладемо $S := (-\infty, 0]$. Нехай V та H гільбертові простори зі скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)$ та нормами $\|\cdot\|$, $|\cdot|$, відповідно. Припустимо, що простір V компактно, неперервно і щільно вкладено в H, тобто V трактується як підмножина H, замикання якої в H збігається з H, існує стала $\lambda > 0$ така, що

$$\lambda |v|^2 \le \|v\|^2 \quad \text{for all } v \in V, \tag{4.5}$$

та для будь-якої послідовності $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, обмеженої в V, існує елемент $v \in V$ та підпослідовність $\{v_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $v_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ сильно в H.

Нехай V' і H' спряжені відповідно до V та H простори і вважатимемо (провівши відповідні ототожнення функціоналів), що простір H' є підпростором простору V'. Ототожнивши (на підставі теореми Рісса) простори H та H', отримаємо неперервні та щільні вкладення

$$V \subset H \subset V'. \tag{4.6}$$

Тому далі вживатимемо позначення $(\cdot,\cdot)$ замість $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Зауважимо, що в даному випадку $\langle g, v\rangle_V = (g, v)$ для будь-яких $v \in V, g \in H$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ означає скалярний добуток на дуальній парі $[V', V]$. Тому далі вживатимемо позначення $(\cdot,\cdot)$ замість $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$.

Введемо потрібні нам далі простори функцій і розподілів. Нехай X — довільний гільбертів простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ та нормою $\|\cdot\|_X$. Через $C(S;X)$ позначатимемо простір визначених і неперервних на S зі значеннями в X функцій. Скажемо, що послідовність $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до w в $C(S;X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S,\ t_1 < t_2$, маємо $\max\limits_{t\in[t_1,t_2]} \|w(t) - w_m(t)\|_X \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Позначимо через $L^2_{\mathrm{loc}}(S;X)$ лінійний простір вимірних функцій визначених на S зі значеннямми в X, звуження яких на довільний відрізок $[t_1, t_2] \subset S$ належить простору $L^2(t_1, t_2; X)$. Скажемо, що послідовність $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ обмежена (відповідно, збігається до w сильно (відповідно, слабко чи $*$-слабко)) в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S, t_1 < t_2$, послідовність звужень членів послідовності $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ обмежена (відповідно, збігається до звуження w на цей відрізок сильно (відповідно, слабко чи $*$-слабко)) в $L^2(t_1, t_2; X)$.

Нехай $\nu \in \mathbb{R}$. Визначимо

$$L^2_\nu(S;X) := \Big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;X) \ \Big|\ \int\limits_S e^{2\nu t} \|f(t)\|_X^2 \, dt < \infty \Big\}.$$

Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f, g)_{L^2_\nu(S;X)} = \int\limits_S e^{2\nu t} (f(t), g(t))_X \, dt$$

та нормою

$$\|f\|_{L^2_\nu(S;X)} := \Big(\int\limits_S e^{2\nu t} \|f(t)\|_X^2 \, dt \Big)^{1/2}.$$

Також введемо простір

$$L^\infty_\nu(S;X) := \{f \in L^\infty_{\rm loc}(S;X) \mid \operatorname*{ess\,sup}_{t\in S} \big[e^{\nu t}\|f(t)\|_X\big] < \infty\}.$$

Під $D'(-\infty,0;V')$ розумітимемо простір визначених на $D(-\infty,0)$ зі значеннями в V' розподілів, тобто простір лінійних неперервних функціоналів на $D(-\infty,0)$ зі значеннями в V'_w (тут і далі $D(-\infty,0)$ – простір нескінченно диференційовних і фінітних на $(-\infty,0)$ функцій, V'_w – лінійний простір V' з слабкою топологією). Легко переконатися (враховуючи (4.6)), що простори $L^2_{\rm loc}(S;V)$, $L^2_{\rm loc}(S;H)$, $L^2_{\rm loc}(S;V')$ можна ототожнити з відповідними підпросторами простору розподілів $D'(-\infty,0;V')$. Це, зокрема, дозволяє говорити про похідні w' функцій w з $L^2_{\rm loc}(S;V)$ чи $L^2_{\rm loc}(S;H)$ в сенсі розподілів $D'(-\infty,0;V')$ і про належність таких похідних до $L^2_{\rm loc}(S;V')$ чи $L^2_{\rm loc}(S;H)$.

Введемо простори

$$H^1_{\rm loc}(S;H) := \{w \in L^2_{\rm loc}(S;H) \,\big|\, w' \in L^2_{\rm loc}(S;H)\},$$

$$W_{2,\rm loc}(S;V) := \{w \in L^2_{\rm loc}(S;V) \,\big|\, w' \in L^2_{\rm loc}(S;V')\}.$$

З відомих результатів (див., наприклад, [34, с. 177-179]) легко випливає, що $H^1_{\rm loc}(S;H) \subset C(S;H)$ і $W^1_{2,\rm loc}(S;V) \subset C(S;H)$ та для довільної функції w з простору $H^1_{\rm loc}(S;H)$ чи $W^1_{q,\rm loc}(S;V)$ функція $t \mapsto |w(t)|^2 : S \to \mathbb{R}$ є абсолютно неперервною на будь-якому відрізку променя S та виконується рівність

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 = 2(w'(t),w(t)) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S. \tag{4.7}$$

Позначимо

$$H^1_\nu(S;H) := \{w \in L^2_\nu(S;H) \,\big|\, w' \in L^2_\nu(S;H)\}, \quad \nu \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

В цьому розділі використовуватимемо такі відомі факти.

Лема 4.1 (нерівність Гельдера [34, p. 158]). *Припустимо, що t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, та X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$. Тоді, для $v,w \in L^2(t_1,t_2;X)$, маємо $(w(\cdot),v(\cdot))_X \in L^1\big(t_1,t_2\big)$ та*

$$\int_{t_1}^{t_2} (w(t),v(t))_X\,dt \le \|w\|_{L^2(t_1,t_2;X)}\|v\|_{L^2(t_1,t_2;X)}.$$

Лема 4.2 ([55, с. 173,179]). *Нехай Y – банахів простір з нормою $\|\cdot\|_Y$, та $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ послідовність елементів простору Y ,яка слабко або $*$-слабко збіжна до v в X. Тоді $\varliminf\limits_{k\to\infty}\|v_k\|_Y \geq \|v\|_Y$.*

Лема 4.3 (Теорема Обена [5], [7, с. 393]). *Нехай $q>1, r>1$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, та $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ – банахові простори такі, що $\mathcal{W} \overset{c}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$ (тут $\overset{c}{\subset}$ означає компактне вкладення, а $\circlearrowleft$ – неперервне вкладення). Тоді*

$$\{w \in L^q(t_1, t_2; \mathcal{W}) \mid w' \in L^r(t_1, t_2; \mathcal{B})\} \overset{c}{\subset} \Big(L^q(t_1, t_2; \mathcal{L}) \cap C([t_1, t_2]; \mathcal{B})\Big). \quad (4.9)$$

Вкладення (4.9) розуміється так: якщо послідовність $\{w_m\}$ є обмеженою у просторі $L^q(t_1, t_2; \mathcal{W})$, а послідовність $\{w_m'\}$ є обмеженою у просторі $L^r(t_1, t_2; \mathcal{B})$, то існують функція $w \in C([t_1, t_2]; \mathcal{B}) \cap L^q(t_1, t_2; \mathcal{L})$ і підпослідовність $\{w_{m_j}\}$ послідовності $\{w_m\}$ такі, що $w_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ в $C([0,T]; \mathcal{B})$ і сильно в $L^q(t_1, t_2; \mathcal{L})$.

Лема 4.4. *Якщо послідовність $\{w_m\}$ є обмеженою у просторі $L^2_{\mathrm{loc}}(S; V)$, а послідовність $\{w_m'\}$ є обмеженою у просторі $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$, то існують функція $w \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V)$, $w' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ і підпослідовність $\{w_{m_j}\}$ послідовності $\{w_m\}$ такі, що $w_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ в $C(S; H)$ і слабко в $L^2_{\mathrm{loc}}(S; V)$, $w_{m_j}' \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w'$ слабко в $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$.*

Доведення леми 4.4. З леми 4.3 при $q = 2$, $r = 2$, $\mathcal{W} = V$, $\mathcal{L} = \mathcal{B} = H$ та рефлексивності гільбертових просторів випливає, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, з послідовності звужень членів послідовності $\{w_m\}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається в $C([t_1, t_2]; H)$ і слабко в $L^2(t_1, t_2; V)$, а послідовність похідних членів цієї підпослідовності слабко збігається в $L^2(t_1, t_2; H)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо підпослідовність $\{w_{m_{k,j}}\}$ даної послідовності, яка збігається в $C([-k, 0]; H)$ і слабко в $L^2(-k, 0; V)$ до деякої функції $\widehat{w}_k \in C([-k, 0]; H) \cap L^2(-k, 0; V)$, а послідовність $\{w_{m_{k,j}}'\}$ слабко збігається до її похідної $\widehat{w}_k'$ в $L^2(-k, 0; H)$. Тепер згідно з діагональним процесом вибираємо потрібну нам підпослідовність у вигляді $\{w_{m_{j,j}}\}_{j=1}^{\infty}$, а функцію w визначимо за правилом: для кожного $k \in \mathbb{N}$ приймаємо $w(t) := \widehat{w}_k(t)$ для $t \in (-k, -k+1]$. ∎

4.1.2 Постановка задачі та основні результати

Нехай $\Phi : V \to \mathbb{R}_\infty := (-\infty, +\infty]$ – власний функціонал, тобто $\mathrm{dom}(\Phi) := \{v \in V : \ \Phi(v) < +\infty\} \neq \emptyset$, який задовольняє такі умови:

$(\mathcal{A}_1)$ $\quad \Phi\big(\alpha v + (1-\alpha)w\big) \leq \alpha\Phi(v) + (1-\alpha)\Phi(w) \quad \forall\, v, w \in V, \ \forall\, \alpha \in [0,1],$

тобто, Φ є *опуклим функціоналом*,

$(\mathcal{A}_2)$ $\quad v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ в $V \quad \Longrightarrow \quad \varliminf_{k\to\infty} \Phi(v_k) \geq \Phi(v),$

тобто, Φ є *напівнеперервним знизу функціоналом.*

Нагадаємо, що *субдиференціалом* функціоналу Φ називають відображення $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$, визначене за правилом

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geq \Phi(v) + (v^*, w - v) \quad \forall\, w \in V\}, \quad v \in V,$$

а *областю визначення* субдиференціала $\partial\Phi$ – множину $D(\partial\Phi) := \{v \in V \,|\, \partial\Phi(v) \neq \emptyset\}$. Ми ототожнюватимемо субдиференціал $\partial\Phi$ з його графіком, вважаючи, що $[v, v^*] \in \partial\Phi$ тоді і лише тоді, коли $v^* \in \partial\Phi(v)$, тобто, $\partial\Phi = \{[v, v^*] \,|\, v \in D(\partial\Phi),\ v^* \in \partial\Phi(v))\}$. Р. Рокафеллар (див. [48, Theorem A]) довів, що субдиференціал $\partial\Phi$ є *максимальним монотонним оператором*, тобто

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geq 0 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi,$$

і для будь-якого елемента $[v_1, v_1^*] \in V \times V'$ правильна імплікаця

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geq 0 \quad \forall\, [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi \quad \Longrightarrow \quad [v_1, v_1^*] \in \partial\Phi.$$

Нехай для кожного $t \in S$, $B(t, \cdot) : H \to H$ – оператор, що задовольняє умову

$(\mathcal{B})$ для довільного $v \in H$ відображення $B(\cdot, v) : S \to S$ – вимірне, та існує стала $L \geq 0$ така, що виконується нерівність

$$|B(t, v_1) - B(t, v_2)| \leq L|v_1 - v_2| \tag{4.10}$$

для майже всіх $t \in S$, та для всіх $v_1, v_2 \in H$; крім того, $B(t, 0) = 0$ для майже всіх $t \in S$.

Зауваження 4.1. *З умови ($\mathcal{B}$) випливає, що для майже всіх $t \in S$ та для кожного $v \in H$ правильна нерівність*

$$|B(t,v)| \le L|v|. \tag{4.11}$$

Розглянемо еволюційну варіаційну нерівність

$$u'(t) + \partial\Phi\big(u(t)\big) + B(t,u(t)) \ni f(t), \quad t \in S, \tag{4.12}$$

де $f : S \to V'$ – задана вимірна функція і $u : S \to V$ – невідома функція.

Означення 4.1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{B})$. *Крім того, припустимо, що* $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$.

Функцію $u : S \to V$ *називатимемо* розв'язком *варіаційної нерівності* (4.12), *якщо вона задовольняє такі умови:*

1) $u \in W_{2,\mathrm{loc}}(S;V)$;

2) $u(t) \in D(\partial\Phi)$ *для майже всіх* $t \in S$;

3) *існує функція* $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ *така, що для майже всіх* $t \in S$ *маємо* $g(t) \in \partial\Phi\big(u(t)\big)$ *і*

$$u'(t) + g(t) + B(t,u(t)) = f(t) \quad \text{в} \ \ V'.$$

Для варіаційної нерівності (4.12) будемо розглядати задачу: знайти розв'язок нерівності, який задовольняє умову

$$\lim_{t \to -\infty} e^{\gamma t}|u(t)| = 0, \tag{4.13}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}$ – задане число.

Задачу на знаходження розв'язку варіаційної нерівності (4.12) при заданих Φ, B і f називатимемо задачею $\mathbf{P}(\Phi, B, f, \gamma)$, а функцію u – її розв'язком.

Припустимо також, що виконуються умови:

$(\mathcal{A}_3)$ існує стала $K_1 > 0$ така, що

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \ge K_1|v_1 - v_2|^2 \quad \forall\ [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi;$$

$(\mathcal{A}_4)$ існує стала $K_2 > 0$ така, що

$$\Phi(v) \geq K_2\|v\|^2 \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi);$$

більше того, $\Phi(0) = 0$.

Зауваження 4.2. *З умови $(\mathcal{A}_4)$ випливає, що $\Phi(v) \geq \Phi(0) + (0, v - 0)$ $\forall v \in V$, отже $[0, 0] \in \partial\Phi$. Звідси та з умови $(\mathcal{A}_3)$ маємо*

$$(v^*, v) \geq K_1|v|^2 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi. \tag{4.14}$$

Сформулюємо основні результати розділу.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{B})$ і $\gamma \in \mathbb{R}$ таке, що*

$$\gamma < K_1 - L\,. \tag{4.15}$$

Тоді задача $\boldsymbol{P}(\Phi, B, f, \gamma)$ має не більше одного розв'язку.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{B})$. Крім того, припустимо, що*

$(\mathcal{F})$ $\qquad f \in L^2_\gamma(S; H)$,

де $\gamma \in \mathbb{R}$ таке, що виконується нерівність (4.15). Тоді задача $\boldsymbol{P}(\Phi, B, f, \gamma)$ має і тільки один розв'язок, він належить простору $L^\infty_\gamma(S; V) \cap L^2_\gamma(S; V) \cap H^1_\gamma(S; H)$ та задовольняє оцінку

$$e^{2\gamma\sigma}\|u(\sigma)\|^2 + \int\limits_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}\|u(t)\|^2\, dt + \int\limits_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}|u'(t)|^2\, dt$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}\Phi(u(t))dt \leq C_1 \int_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}|f(t)|^2\, dt, \quad \sigma \in S, \tag{4.16}$$

де $C_1 > 0$ – стала, яка залежить тільки від K_1, K_2, L та γ.

Зауваження 4.3. *Задача $\boldsymbol{P}(\Phi, B, f, \gamma)$ можна бути переформульована іншим способом. Нехай K опукла та замкнена множина в V, $A : V \to V'$ – монотонний, обмежений та напівнеперервний оператор такий, що $(A(v), v) \geq \widetilde{K}_1\|v\|^2 \quad \forall v \in V$, де $\widetilde{K}_1 = const > 0$. Знайти функцію $u \in W_{2,\mathrm{loc}}(S; V)$, що задовольняє (4.13) та, для майже всіх $t \in S$, $u(t) \in K$ і*

$$(u'(t) + A(u(t)) + B(t, u(t)), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall\, v \in K.$$

4.1.3 Обґрунтування основних результатів підрозділу

Доведення теореми 4.1. Використаємо метод доведення від супротивного. Припустимо, що правильним є протилежне твердження. Нехай u_1, u_2 – два (різні) розв'язки задачі $\mathbf{P}(\Phi, B, f, \gamma)$. Тоді для кожного $i \in \{1, 2\}$ існують функції $g_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V')$ така, що для майже всіх $t \in S$, $g_i(t) \in \partial\Phi\big(u_i(t)\big)$ і

$$u_i'(t) + g_i(t) + B(t, u_i(t)) = f(t) \quad \text{в} V'. \tag{4.17}$$

Покладемо $w(t) := u_1(t) - u_2(t), \ \ t \in S$. З рівностей (4.17) для майже всіх $t \in S$ отримуємо

$$w'(t) + g_1(t) - g_2(t) + B(t, u_1(t)) - B(t, u_2(t)) = 0 \quad \text{в } V'. \tag{4.18}$$

З (4.13) випливає виконання нерівності

$$e^{2\gamma t}|w(t)|^2 \to 0 \quad \text{as} \quad t \to -\infty. \tag{4.19}$$

Нехай $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ – довільні числа такі, що $\sigma_1 < \sigma_2$. Помноживши рівність (4.18) на $w(t)e^{2\gamma t}$, та проінтегрувавши від σ_1 до σ_2 отримаємо

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(w'(t), w(t))\, dt + \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(g_1(t) - g_2(t), u_1(t) - u_2(t))dt$$
$$+ \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big(B(t, u_1(t)) - B(t, u_2(t)), w(t)\big)dt = 0. \tag{4.20}$$

На підставі умови $(\mathcal{A}_3)$ та з того, що $g_i(t) \in \partial\Phi(u_i(t))$, $i = 1, 2$, для майже всіх $t \in S$ маємо

$$(g_1(t) - g_2(t), u_1(t) - u_2(t)) \geq K_1|w(t)|^2. \tag{4.21}$$

Розглянемо останній доданок ліворуч від рівності (4.20). Використовуючи (4.10) та нерівність Коші-Буняковського, маємо

$$\Big|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big(B(t, u_1(t)) - B(t, u_2(t)), w(t)\big)dt\Big|$$
$$\leq \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big|B(t, u_1(t)) - B(t, u_2(t))\big||w(t)|\, dt \leq L\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\, |w(t)|^2\, dt. \tag{4.22}$$

З (4.7), (4.21), (4.22), врахувавши (4.20) отримуємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\frac{d|w(t)|^2}{dt}\,dt + \big(K_1 - L\big)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|w(t)|^2 dt \le 0. \tag{4.23}$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами, з (4.23) маємо

$$e^{2\gamma t}|w(t)|^2\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} + 2\big(K_1 - L - \gamma\big)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|w(t)|^2\,dt \le 0. \tag{4.24}$$

Враховуючи умову (4.15), з (4.24) одержуємо

$$e^{2\gamma\sigma_2}|w(\sigma_2)|^2 \le e^{2\gamma\sigma_1}|w(\sigma_1)|^2. \tag{4.25}$$

Зафіксуємо довільне σ_2 в (4.25), та спрямуємо $\sigma_1 \to -\infty$. З умови (4.19), права частина нерівності (4.25) прямує до 0. Таким чином, отримуємо рівність $e^{2\gamma\sigma_2}|w(\sigma_2)|^2 = 0$. З довільності $\sigma_2 \in S$ маємо $w(t) = 0$ для майже всіх $t \in S$, тобто, $u_1 = u_2$ майже всюди на S. Отримане протиріччя завершує доведення єдиності розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, B, f, \gamma)$.

∎

Доведення теореми 4.2. Проведемо доведення у 5 кроків.

Крок 1 (*допоміжні твердження*). Визначимо функціонал $\Phi_H : H \to \mathbb{R}_\infty$ за правилом: $\Phi_H(v) := \Phi(v)$, якщо $v \in V$, і $\Phi_H(v) := +\infty$ в іншому випадку. Відзначимо, що з умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, Леми IV.5.2 та Твердження IV.5.2 монографії [53] випливає, що Φ_H є власним, опуклим і напівнеперервним знизу функціоналом на просторі H, $\mathrm{dom}(\Phi_H) = \mathrm{dom}(\Phi) \subset V$ і $\partial\Phi_H = \partial\Phi \cap (V \times H)$, де $\partial\Phi_H : H \to 2^H$ субдиференціал функціонала Φ_H.

Лема 4.5 ([53, Lemma IV.4.3]). *Нехай $-\infty < a < b < +\infty$, $w \in H^1(a,b;H)$, та існує $g \in L^2(a,b;H)$ таке, що $g(t) \in \partial\Phi_H\big(w(t)\big)$ для майже всіх $t \in (a,b)$. Тоді функція $\Phi_H\big(w(\cdot)\big)$ абсолютно неперервна на інтервалі $[a,b]$ і для будь-якої функції $h : [a,b] \to H$ такої, що $h(t) \in \partial\Phi_H\big(w(t)\big)$ виконується нерівність*

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(w(t)\big) = (h(t), w'(t)) \quad \textit{для майже всіх } t \in (a,b).$$

Лема 4.6 ([26, Proposition 3.12], [53, Proposition IV.5.2])**.** *Нехай* $T>0$, $\widetilde{f}\in L^2(0,T;H)$ *і* $w_0\in\mathrm{dom}(\Phi)$. *Тоді існує єдина функція* $w\in C([0,T];H)\cap H^1(0,T;H)$ *така, що* $w(0)=w_0$ *та для майже всіх* $t\in(0,T]$, $w(t)\in D(\partial\Phi_H)$ *і*

$$w'(t)+\partial\Phi_H\big(w(t)\big)\ni\widetilde{f}(t)\quad \textit{в}\ H. \tag{4.26}$$

Лема 4.7. *Нехай* $t_0<0$, $\widetilde{f}\in L^2(t_0,0;H)$, *та* $w_0\in\mathrm{dom}(\Phi)$. *Тоді існує єдина функція* $w\in C([t_0,0];H)\cap H^1(t_0,0;H)$ *така, що* $w(t_0)=w_0$ *та для майже всіх* $t\in(t_0,0]$, $w(t)\in D(\partial\Phi_H)$ *і*

$$w'(t)+\partial\Phi_H\big(w(t)\big)+B(t,w(t))\ni\widetilde{f}(t)\quad \textit{in}\ H, \tag{4.27}$$

а саме, існує $\widetilde{g}\in L^2(t_0,0;H)$ *така, що для майже всіх* $t\in(t_0,0]$ *маємо* $\widetilde{g}(t)\in\partial\Phi_H(w(t))$ *і*

$$w'(t)+\widetilde{g}(t)+B(t,w(t))=\widetilde{f}(t)\quad \textit{в}\ H. \tag{4.28}$$

Доведення леми 4.7. Нехай $\alpha>0$ – довільне фіксоване число та множина

$$M:=\{w\in C([t_0,0];H)\mid w(t_0)=w_0\}.$$

Розглянемо M з метрикою

$$\rho(w_1,w_2)=\max_{t\in[t_0,0]}\left[e^{-\alpha(t-t_0)}|w_1(t)-w_2(t)|\right],\quad w_1,w_2\in M.$$

Очевидно, що метричний простір (M,ρ) є повний. Тепер розглянемо оператор $A:M\to M$ визначений за правилом: для заданої функції $\widetilde{w}\in M$, визначаємо функцію $\widehat{w}\in M\cap H^1(t_0,0;H)$ таку, що для майже всіх $t\in(t_0,0]$ $\widehat{w}(t)\in D(\partial\Phi_H)$ і

$$\widehat{w}'(t)+\partial\Phi_H(\widehat{w}(t))\ni\widetilde{f}(t)-B(t,\widetilde{w}(t))\quad \text{in}\quad H. \tag{4.29}$$

Очевидно, що варіаційна нерівність (4.29) збігаться з (4.26) після заміни $[0,T]$ на $[t_0,0]$, $\widetilde{f}(t)$ на $\widetilde{f}(t)-B(t,\widetilde{w}(t))$, умови $w(0)=w_0$ на умову $\widehat{w}(t_0)=w_0$. Отже, використовуючи лему 4.6, приходимо до висновку, що оператор A є коректно визначеним. Покажемо, що оператор A є стискуючим при деякому значенні $\alpha>0$. Зокрема, нехай $\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2$ – довільні функції з M і $\widehat{w}_1:=A\widetilde{w}_1$, $\widehat{w}_2:=A\widetilde{w}_2$. Опираючись на (4.29), існують функції $\widehat{g}_1$ і $\widehat{g}_2$ з $L^2(t_0,0;H)$ такі, що для кожного $k \in \{1,2\}$ та майже всіх $t \in (t_0, 0]$ маємо $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{w}_k(t))$ і

$$\widehat{w}_k'(t) + \widehat{g}_k(t) = \widetilde{f}(t) - B(t, \widetilde{w}_k(t)), \tag{4.30}$$

при $\widehat{w}_k(t_0) = w_0$.

Віднімемо тотожність (4.30) при $k = 2$ від тотожності (4.30) при $k = 1$, і для майже всіх $t \in (t_0, 0]$ помножимо отриману тотожність на $\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)$. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} &\big((\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t))', \widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)\big) + (\widehat{g}_1(t) - \widehat{g}_2(t), \widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)) \\ &= -(B(t, \widetilde{w}_1(t)) - B(t, \widetilde{w}_2(t)), \widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)) \text{ для майже всіх } t \in (t_0, 0], \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\widehat{w}_1(t_0) - \widehat{w}_2(t_0) = 0. \tag{4.32}$$

Проінтегруємо рівність (4.31) за t від t_0 до $\sigma \in (t_0, 0]$, беручи до увагу, що для майже всіх $t \in (t_0, 0]$ маємо

$$\big((\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t))', \widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)\big) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)|^2.$$

В результаті отримаємо рівність

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\widehat{w}_1(\sigma) - \widehat{w}_2(\sigma)|^2 + \int\limits_{t_0}^{\sigma} (\widehat{g}_1(t) - \widehat{g}_2(t), \widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t))\, dt \\ &= - \int\limits_{t_0}^{\sigma} \big(B(t, \widetilde{w}_1(t)) - B(t, \widetilde{w}_2(t)), \widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)\big) dt. \end{aligned} \tag{4.33}$$

З умови $(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $t \in (t_0, 0]$ маємо нерівність

$$(\widehat{g}_1(t) - \widehat{g}_2(t), \widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)) \geq K_1|\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)|^2. \tag{4.34}$$

Беручи до уваги $(\mathcal{B})$ та нерівність Коші, для майже всіх $t \in (t_0, 0]$ одержуємо

$$\begin{aligned} &\big|\big(B(t, \widetilde{w}_1(t)) - B(t, \widetilde{w}_2(t)), \widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)\big)\big| \\ &\leq \big|B(t, \widetilde{w}_1(t)) - B(t, \widetilde{w}_2(t))\big| \cdot \big|\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)\big| \\ &\leq L|\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)| \cdot |\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)| \\ &\leq \varepsilon|\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)|^2 + \frac{L^2}{4\varepsilon}|\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)|, \end{aligned} \tag{4.35}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне.

З (4.33), згідно з (4.34) та (4.35), маємо

$$|\widehat{w}_1(\sigma) - \widehat{w}_2(\sigma)|^2 + 2(K_1 - \varepsilon) \int\limits_{t_0}^{\sigma} |\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)|^2 \, dt$$

$$\leq (2\varepsilon)^{-1} L^2 \int\limits_{t_0}^{\sigma} \big|\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)\big|^2 dt. \tag{4.36}$$

Вибравши $\varepsilon = 2^{-1} K_1$, з (4.36) одержуємо

$$|\widehat{w}_1(\sigma) - \widehat{w}_2(\sigma)|^2 \leq C_2 \int_{t_0}^{\sigma} |\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)|^2 \, dt, \quad \sigma \in (t_0, 0], \tag{4.37}$$

де $C_2 > 0$ – стала.

Помноживши (4.37) на $e^{-2\alpha(\sigma - t_0)}$, одержуємо

$$\begin{aligned} & e^{-2\alpha(\sigma - t_0)} |\widehat{w}_1(\sigma) - \widehat{w}_2(\sigma)|^2 \\ & \leq C_2 e^{-2\alpha(\sigma - t_0)} \int_{t_0}^{\sigma} e^{2\alpha(t - t_0)} e^{-2\alpha(t - t_0)} |\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)|^2 \, dt \\ & \leq C_2 e^{-2\alpha(\sigma - t_0)} \max_{t \in [t_0, 0]} \big[- e^{\alpha(t - t_0)} |\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)| \big]^2 \int_{t_0}^{\sigma} e^{2\alpha(t - t_0)} \, dt \\ & = \frac{C_2}{2\alpha} \big(1 - e^{-2\alpha(\sigma - t_0)}\big) \big[\rho(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)\big]^2 \leq \frac{C_2}{2\alpha} \big[\rho(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)\big]^2, \quad \sigma \in (t_0, 0]. \end{aligned} \tag{4.38}$$

З (4.38) легко випливає, що

$$\rho(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2) \leq \sqrt{C_2/(2\alpha)} \rho(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2).$$

Звідси, вибираючи $\alpha > 0$ таке, що виконується нерівність $C_2/(2\alpha) < 1$, одержуємо, що оператор A – стискуючий. Отже, ми можемо використати теорему Банаха про нерухому точку [27, Theorem 5.7] та отримали існування єдиної фунції $w \in M$ такої, що $Aw = w$. Отож, лема 4.7 доведена.

∎

Крок 2 (*побудова апроксимацій розв'язку*). Побудуємо послідовність функцій, що в певному сенсі апроксимують розв'язок задачі $\mathbf{P}(\Phi, B, f, \gamma)$.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо $\widehat{f}_k(t) := f(t)$ при $t \in S_k := (-k, 0]$ і розглянемо задачу знаходження функції $\widehat{u}_k \in C(\overline{S_k}; H) \cap H^1(S_k; H)$, де

$H^1(S_k;H) := \big\{w \in L^2(S_k;H) \;\big|\; w' \in L^2(S_k;H)\big\}$, такої, що для майже всіх $t \in S_k$ маємо $\widehat{u}_k(t) \in D(\partial\Phi_H)$ і

$$\widehat{u}_k'(t) + \partial\Phi_H\big(\widehat{u}_k(t)\big) + B(t,\widehat{u}_k(t)) \ni \widehat{f}_k(t) \quad \text{в } H, \tag{4.39}$$

$$\widehat{u}_k(-k) = 0. \tag{4.40}$$

Включення (4.39) означає існування функції $\widehat{g}_k \in L^2(S_k;H)$ такої, що для майже всіх $t \in S_k$ маємо $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{u}_k(t))$ і

$$\widehat{u}_k'(t) + \widehat{g}_k(t) + B(t,\widehat{u}_k(t)) = \widehat{f}_k(t) \quad \text{в } \; H. \tag{4.41}$$

Оскільки $D(\partial\Phi_H) \subset \mathrm{dom}(\Phi_H) \subset V$, то $\widehat{u}_k(t) \in V$ для майже всіх $t \in S_k$. Згідно з означенням субдиференціалу функціоналу і того, що $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi(\widehat{u}_k(t))$ для майже всіх $t \in S_k$, маємо

$$\Phi(0) \ge \Phi(\widehat{u}_k(t)) + (\widehat{g}_k(t), 0 - \widehat{u}_k(t)) \quad \text{для м. в.} \quad t \in S_k.$$

Звідси та з умови $(\mathcal{A}_4)$ отримаємо

$$(\widehat{g}_k(t),\widehat{u}_k(t)) \ge \Phi(\widehat{u}_k(t)) \ge K_2\|\widehat{u}_k(t)\|^2 \quad \text{для м. в.} \quad t \in S_k. \tag{4.42}$$

Оскільки ліва частина цього ланцюжка нерівностей належить до $L^1(S_k)$, то $\widehat{u}_k$ належить до $L^2(S_k;V)$.

Продовжимо для кожного $k \in \mathbb{N}$ функції $\widehat{f}_k, \widehat{u}_k$ і $\widehat{g}_k$ нулем на весь проміжок S і позначимо ці продовження, відповідно, через f_k, u_k та g_k. Зі сказаного вище випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція u_k належить до $L^2(S;V)$, її похідна u_k' належить до $L^2(S;H)$ і для майже всіх $t \in S$ правильними є включення $g_k(t) \in \partial\Phi_H\big(u_k(t)\big)$ і рівність (див. (4.41))

$$u_k'(t) + g_k(t) + B(t,u_k(t)) = f_k(t) \quad \text{в } \; H. \tag{4.43}$$

Щоб показати збіжність функції $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ до розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi,B,f,\gamma)$ нам потрібні оцінки функцій u_k, $k \in \mathbb{N}$.

Крок 3 (*оцінки апроксимацій розв'язку*).

Нехай $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ – довільні числа такі, що $\sigma_1 < \sigma_2$, і $k \in \mathbb{N}$. Помножимо (4.43) для майже всіх $t \in S$ на $e^{2\gamma t}u_k(t)$ та проінтегруємо від σ_1 до σ_2. В результаті отримаємо

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(u_k'(t), u_k(t))\, dt + \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(g_k(t), u_k(t))\, dt$$

$$+ \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big(B(t, u_k(t)), u_k(t)\big)\, dt = \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(f_k(t), u_k(t))\, dt.$$

Звідси, беручи до уваги (4.7) та інтегруючи частинами, одержуємо

$$e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} - 2\gamma \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\, dt + 2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(g_k(t), u_k(t))\, dt$$

$$+ 2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big(B(t, u_k(t)), u_k(t)\big)\, dt = 2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(f_k(t), u_k(t))\, dt. \tag{4.44}$$

Враховуючи означення u_k та використовуючи нерівності (4.42), отримаємо

$$(g_k(t), u_k(t)) \geq \Phi\big(u_k(t)\big) \geq K_2\|u_k(t)\|^2 \quad \text{для майже всіх } t \in S. \tag{4.45}$$

Оцінимо третій доданок лівої частини нерівності (4.44). З (4.14) та (4.45) для довільного $\delta \in (0,1)$ отримуємо

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(g_k(t), u_k(t))\, dt = (\delta + (1-\delta)) \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(g_k(t), u_k(t))\, dt$$

$$\geq \delta K_1 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\, dt + 2^{-1}(1-\delta)K_2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\|u_k(t)\|^2\, dt$$

$$+2^{-1}(1-\delta)\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\Phi\big(u_k(t)\big)\, dt. \tag{4.46}$$

Використавши нерівність Коші-Буняковського, (4.11), маємо

$$\Big|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big(B(t, u_k(t)), u_k(t)\big)dt\Big| \leq \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big|B(t, u_k(t))\big||u_k(t)|\, dt$$

$$\leq L\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\, dt. \tag{4.47}$$

Використовуючи нерівність Коші оцінимо праву частину (4.44):

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(f_k(t), u_k(t))\, dt \leq \varepsilon \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\, dt + (4\varepsilon)^{-1}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|f_k(t)|^2\, dt, \tag{4.48}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число.

З (4.44), беручи до уваги (4.46), (4.47) і (4.48), одержуємо

$$e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} + 2[\delta K_1 - L - \gamma - \varepsilon]\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\,dt$$
$$+ (1-\delta)K_2\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\|u_k(t)\|^2\,dt + (1-\delta)\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\Phi\big(u_k(t)\big)\,dt$$
$$\leq (2\varepsilon)^{-1}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \quad \delta\in(0,1),\ \varepsilon\in(0,+\infty). \tag{4.49}$$

Оскільки $K_1 > 0$, γ задовольняють (4.15), спершу виберемо δ з $(0,1)$ таке, щоб $\delta K_1 - L - \gamma > 0$, а тоді візьмемо $\varepsilon = 2^{-1}[\delta K_1 - L - \gamma] > 0$. В результаті з (4.49) отримуємо оцінку

$$e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} + \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big[|u(t)|^2 + \|u_k(t)\|^2\big]\,dt + \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\Phi\big(u_k(t)\big)\,dt$$
$$\leq C_3\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \tag{4.50}$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка залежить лише від K_1, K_2, L та γ.

Візьмемо $\sigma_2 = \sigma \in S$ – довільне, та перейдемо до границі в (4.50) при $\sigma_1 \to -\infty$. Беручи до уваги $(\mathcal{F})$ та означення функцій u_k і f_k, отримаємо

$$e^{2\gamma\sigma}|u_k(\sigma)|^2 + \int_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}\big[|u(t)|^2 + \|u_k(t)\|^2\big]\,dt$$
$$+ \int_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}\Phi\big(u_k(t)\big)\,dt \leq C_3\int_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \quad \sigma\in S. \tag{4.51}$$

Оскільки $\sigma \in S$ – довільне, з (4.51) випливає, що

послідовність $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}$ обмежена в $L^\infty_\gamma(S;H)$, $L^2_\gamma(S;H)$ і $L^2_\gamma(S;V)$, (4.52)

послідовність $\big\{e^{2\gamma\cdot}\Phi\big(u_k(\cdot)\big)\big\}_{k=1}^{+\infty}$ обмежена в $L^1(S)$. (4.53)

Тепер знайдемо оцінки функцій $u'_k, k\in\mathbb{N}$. Для довільного фіксованого $k\in\mathbb{N}$ для майже кожного $t \in S$ домножимо рівність (4.43) на $e^{2\gamma t}u'_k(t)$ та проінтегруємо отриману рівність від σ_1 до σ_2, де $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ – довільні числа такі, що $\sigma_1 < \sigma_2$. Звідси одержимо

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k'(t)|^2\,dt + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(g_k(t), u_k'(t))\,dt$$
$$= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(f_k(t), u_k'(t))\,dt - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big(B(t, u_k(t)), u_k'(t)\big)\,dt. \tag{4.54}$$

Оскільки $g_k \in L^2(\sigma_1, \sigma_2; H)$, то з Леми 4.5 випливає, що функція $\Phi_H\big(u_k(\cdot)\big)$ є абсолютно неперервною на $[\sigma_1, \sigma_2]$ і

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(u_k(t)\big) = (g_k(t), u_k'(t)) \quad \text{для майже всіх } t \in (\sigma_1, \sigma_2). \tag{4.55}$$

Беручи до уваги (4.55), можемо переписати другий додаток лівої частини рівності (4.54) так:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}(g_k(t), u_k'(t))\,dt = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\frac{d}{dt}\Phi_H\big(u_k(t)\big)\,dt$$
$$= e^{2\gamma t}\Phi_H\big(u_k(t)\big)\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} - 2\gamma\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\Phi_H\big(u_k(t)\big)\,dt. \tag{4.56}$$

На підставі нерівносі Коші та (4.11), маємо

$$\Big|\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big(f_k(t), u_k'(t)\big)\,dt\Big| \le \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|f_k(t)||u_k'(t)|\,dt$$
$$\le \frac{1}{4}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k'(t)|^2\,dt + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \tag{4.57}$$

$$\Big|\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big(B(t, u_k(t)), u_k'(t)\big)\,dt\Big| \le \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\big|B(t, u_k(t))\big||u_k'(t)|\,dt$$
$$\le L\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k(t)||u_k'(t)|\,dt \le L^2\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2 dt + \frac{1}{4}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k'(t)|^2\,dt. \tag{4.58}$$

З (4.54), беручи до уваги (4.56), (4.57), (4.58), одержуємо

$$\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k'(t)|^2\,dt + e^{2\gamma t}\Phi_H\big(u_k(t)\big)\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} \le L^2\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\,dt$$
$$+ 2\gamma\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\Phi_H\big(u_k(t)\big)\,dt + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt. \tag{4.59}$$

Врахувавши означення функцій u_k і f_k, перейдемо до границі в (4.59) при $\sigma_1 \to -\infty$. З отриманої нерівності, беручи до уваги оцінку (4.51), поклавши $\sigma_2 = \sigma \in S$, маємо

$$e^{2\gamma\sigma}\Phi_H\big(u_k(\sigma)\big) + \int_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}|u_k'(t)|^2\,dt \le C_4 \int_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \tag{4.60}$$

де C_4 – додатна стала, яка залежить тільки від K_1, K_2, L та γ.

Врахувавши означення функціоналу Φ_H та функції f_k, умову $(\mathcal{A}_4)$ (нагадаємо, що $u_k(t) \in V$ для майже всіх $t \in S$, з (4.60) маємо

$$e^{2\gamma\sigma}\|u_k(\sigma)\|^2 + \int_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}|u_k'(t)|^2\,dt \le C_5 \int_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t}|f(t)|^2\,dt, \tag{4.61}$$

де $C_5 > 0$ – додатна стала, яка залежить тільки від $K_1, K_2, L,$ і γ.

З оцінки (4.61) випливає, що

$$\text{послідовність } \big\{u_k\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L_\gamma^\infty(S;V), \tag{4.62}$$

$$\text{послідовність } \big\{u_k'\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L_\gamma^2(S;H). \tag{4.63}$$

Покажемо, що

$$\text{послідовність } \{g_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L_\gamma^2(S;H). \tag{4.64}$$

Справді, використавши (4.11) і (4.51), отримаємо

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}\Big|B(t,u_k(t))\Big|^2 dt \le L^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\gamma t}|u_k(t)|^2\,dt \le C_6, \tag{4.65}$$

де $C_6 > 0$ – стала, що не залежить від $k \in \mathbb{N}, \sigma_1, \sigma_2 \in S$.

Отже, з (4.43), (4.63), (4.65), $(\mathcal{F})$ та означення f_k отримуємо (4.64).

Крок 4 (*граничний перехід*). Оскільки V та H – гільбертові простори, причому V вкладено в H компактно, з (4.52), (4.62), (4.63), (4.64) та Леми 4.4

випливає, що існують функції $u \in L_\gamma^\infty(S;V) \cap L_\gamma^2(S;V) \cap H_\gamma^1(S;H)$, та підпослідовність підпослідовності $\{u_k, g_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (за якою ми збережемо позначення $\{u_k, g_k\}_{k=1}^{+\infty}$) такі, що

$$e^{\gamma\cdot}u_k(\cdot) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{\gamma\cdot}u(\cdot) \quad *\text{-слабко в } L^\infty(S;V), \tag{4.66}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в } L_\gamma^2(S;V) \;\; \text{слабко в } H_\gamma^1(S;H), \tag{4.67}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в } C(S;H), \tag{4.68}$$

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{слабко в } L_\gamma^2(S;H). \tag{4.69}$$

Зауважимо, що з (4.67) і (4.69) випливає

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad u_k' \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u', \quad g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{4.70}$$

Використовуючи (4.10) і (4.68), для кожного $\sigma < 0$ отримуємо

$$\int_\sigma^0 \big|B(t,u_k(t)) - B(t,u(t))\big|^2 dt \le L^2 \int_\sigma^0 |u_k(t)-u(t)|^2 dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.71}$$

Таким чином, ми отримали

$$B(\cdot,u_k(\cdot)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} B(\cdot,u(\cdot)) \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{4.72}$$

Нехай $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ – довільні. Для майже кожного $t \in S$ помножимо рівність (4.43) на v і φ, а потім отриману рівність проінтегруємо за t по S. У результаті отримаємо рівність

$$\int_S (u_k'(t), v\varphi(t))\,dt + \int_S (g_k(t), v\varphi(t))\,dt + \int_S \big(B(t,u_k(t)), v\varphi(t)\big)\,dt$$
$$= \int_S (f_k(t), v\varphi(t))\,dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.73}$$

Перейдемо в (4.73) до границі при $k \to \infty$, беручи до уваги (4.70), (4.72) і збіжність послідовності $\{f_k\}$ до f в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. У результаті, врахувавши, що $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ довільні, отримаємо для майже всіх $t \in S$ рівність

$$u'(t) + g(t) + B(t,u(t)) = f(t) \quad \text{в } H.$$

Крок 5 (*завершення доведення*). Для завершення доведення теореми залишилось лише показати, що $u(t) \in D(\partial\Phi)$ і $g(t) \in \partial\Phi\big(u(t)\big)$ для майже всіх $t \in S$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$ – яке-небудь число. Оскільки $u_k(t) \in D(\partial\Phi_H)$ і $g_k(t) \in \partial\Phi_H\big(u_k(t)\big)$ для кожного $t \in S \setminus \widetilde{S}_k$, де $\widetilde{S}_k \subset S$ – множина нульової міри, то з монотонності субдиференціалу $\partial\Phi_H$ випливає, що для всіх $t \in S \setminus \widetilde{S}_k$ виконується нерівність

$$(g_k(t) - v^*, u_k(t) - v) \ge 0 \quad \forall\,[v,v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{4.74}$$

Нехай $\sigma \in S$, $h > 0$ — довільні числа. Проінтегруємо (4.74) по $(\sigma - h;\sigma)$:

$$\int_{\sigma-h}^{\sigma} (g_k(t) - v^*, u_k(t) - v)\,dt \ge 0 \quad \forall\,[v,v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{4.75}$$

Тепер, враховуючи (4.68) та (4.69), перейдемо в (4.75) до границі при $k \to \infty$. В результаті отримаємо

$$\int_{\sigma-h}^{\sigma} (g(t) - v^*, u(t) - v)\, dt \geq 0 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{4.76}$$

З монографії [55, Theorem 2, p. 192] і (4.76) випливає, що для кожного $[v, v^*] \in \partial\Phi_H$ існує множина $R_{[v,v_*]} \subset S$ нульової міри така, що для всіх $\sigma \in S \setminus R_{[v,v_*]}$ маємо

$$0 \leq \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int_{\sigma-h}^{\sigma} \big(g(t) - v^*, u(t) - v\big)\, dt = \big(g(\sigma) - v^*, u(\sigma) - v\big). \tag{4.77}$$

Покажемо, що існує множина нульової міри $R \subset S$ така, що

$$\forall \sigma \in S \setminus R: \qquad \big(g(\sigma) - v^*, u(\sigma) - v\big) \geq 0 \quad \forall [v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{4.78}$$

Оскільки V та H – сеперабельні простори, то існує зліченна множина $F \subset \partial\Phi_H \subset V \times H$, яка є щільною в $\partial\Phi_H$. Позначимо $R := \bigcup\limits_{[v,v^*] \in F} R_{[v,v_*]}$. Оскільки множина F зліченна, а зліченне об'єднання множин міри нуль є множиною міри нуль, то R має нульову міру. Отож, для будь-якого $\sigma \in S \setminus R$ нерівність $\big(g(\sigma) - v^*, u(\sigma) - v\big) \geq 0$ виконується для всіх $[v, v^*] \in F$. Нехай $[\widehat{v}, \widehat{v}^*]$ – довільний елемент з $\partial\Phi_H$. Тоді зі щільності F у $\partial\Phi_H$ маємо існування послідовності $\big\{[v_l, v_l^*]\big\}_{l=1}^{\infty}$ такої, що $v_l \to \widehat{v}$ в V, $v_l^* \to \widehat{v}^*$ в H і

$$\forall \sigma \in S \setminus R: \qquad (g(\sigma) - v_l^*, u(\sigma) - v_l) \geq 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{N}. \tag{4.79}$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $l \to \infty$, отримаємо $(g(\sigma) - \widehat{v}^*, u(\sigma) - \widehat{v}) \geq 0 \;\; \forall \sigma \in S \setminus R$. Отже, виконується нерівність (4.78). Звідси, в силу максимальної монотонності $\partial\Phi_H$, випливає, що $[u(t), g(t)] \in \partial\Phi_H$ для майже всіх $t \in S$.

Оцінка (4.16) розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, B, f, \gamma)$ безпосередньо випливає з оцінок (4.51), (4.61), (4.66), (4.67) та (4.68), леми 4.2, леми Фату та того, що Φ_H – напівнеперервний знизу в H.

З (4.51) маємо

$$e^{2\gamma\sigma} |u(\sigma)|^2 \leq C_3 \int_{-\infty}^{\sigma} e^{2\gamma t} |f(t)|^2\, dt.$$

З цієї нерівності та умови $(\mathcal{F})$ випливає, що u задовольняє умову (4.13). Отже, теорему 4.2 доведено.

∎

Висновки до розділу 4

У розділі 4 одержано необхідні та достатні умови розв'язності задач без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей.

Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей з деяких раніше не вивчених класів. Такі задачі виникають при моделюванні динамічних процесів в природі та економіці, початок яких настільки віддалений від актуального моменту, що початкові дані практично не впливають на їх проходження в цей момент.

Вивчено задачі без початкових умов для сильно нелінійних параболічних рівнянь без будь-яких обмежень на поведінку розв'язку на нескінченності. Отримано умови існування, єдиності, періодичності та майже періодичності узагальнених розв'язків цих задач.

Встановлено умови на коефіцієнти еліптично-параболічних сильно нелінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, при яких існують єдині узагальнені розв'язки задачі Фур'є для цих рівнянь без будь-яких обмежень на поведінку розв'язків та зростання вхідних даних на нескінченності, а також вивчено властивості цих розв'язків. Знайдено умови існування обмежених, періодичних та майже періодичних узагальнених розв'язків цих рівнянь.

Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі Фур'є для еліптично-параболічних слабко нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків при наявності умов на поведінку розв'язків на нескінченності. Подібні результати отримано у випадку задачі Фур'є для слабко нелінійних еліптично-параболічних систем інтегро-диференціальних рівнянь при певних обмеженнях на зростання розв'язків і вхідних даних при прямуванні часової змінної до $-\infty$.

Виділено клас анізотропних еліптично-параболічних інтегро-диференціальних систем зі змінними показниками нелінійності, для якого задача Фур'є коректна без обмежень на зростання при прямуванні часової змінної до $-\infty$.

Вивчено задачі без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей та отримано умови існування і єдиності розв'язків таких задач з деякими обмеженнями на поведінку розв'язку.

Ці результати мають теоретичний характер і їх можна використати в теорії рівнянь з частинними похідними, а також при оптимізації процесів, які моделюються задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь чи варіаційних нерівностей.

Список використаних джерел

[1] Alkhutov Y. Antontsev S., Zhikov V.: Parabolic equations with variable order of nonlinearity. Collection of works of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. **6**, 23-50 (2009).

[2] Alt H. W., Luckhaus S.: Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. Mathematische Zeitschrift. **183**, 311-341 (1983).

[3] Andreu F, Igbida N., M. Mazón J., Toledo J.: A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions. Interfaces and Free Boundaries. **8** (4), 447-479 (2004).

[4] Antontsev S., Shmarev S.: Evolution PDEs with nonstandard growth conditions. Existence, uniqueness, localization, blow-up, Atlantis Studies in Differential Equations, 4. Atlantis Press, Paris (2015).

[5] Aubin J.-P.: Un theoreme de compacite. Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. **256**, **24**, 5042-5044 (1963).

[6] Bernardi M.L., Pozzi G.A.: On a class of singular nonlinear parabolic variational inequalitie. Annali di Matematica pure ed applicate (IV). **CLIX**, 117-131 (1991).

[7] Bernis F.: Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains. Mathematische Annalen. **279**, 373-394 (1988).

[8] Bernis F.: Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity. Arch. Rational Mech. Anal. **106**(3), 217-241 (1989).

[9] Bokalo M.: Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities. Nonlinear Boundary Problem. **8**, 58-63 (1998).

[10] Bokalo M., Dmytryshyn Yu.: Problems without initial conditions for degenerate implicit evolution equations, Electronic Journal of Differential Equations. **2008**(04) , 1-16 (2008).

[11] Bokalo M., Domanska O.: On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces Math. studii. **28**(1), 77-91 (2007).

[12] Bokalo M., Lorenzi A.: Linear evolution first-order problems without initial conditions. Milan Journal of Mathematics. **77**, 437-494 (2009).

[13] Bokalo M.: Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains. Electronic Journal of Differential Equations. **2010**(178), 1-24 (2010).

[14] Bokalo M. M., Buhrii O. M., Mashiev R. A.: Unique solvability of initial boundary value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity, J. Nonlinear Evol. Edu. Appl., **2013**(6), 67-87 (2014).

[15] Bokalo M. M.: Unbounded, periodic and almost periodic solutions of anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. Математичні студії. **41**(1), 81-91 (2014).

[16] Bokalo M. M.: Almost periodic solutions of anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. Electronic Journal of Differential Equations. **2014**(169), 1-13 (2014).

[17] Bokalo M.M., Skira I. V.: Almost Periodic Solutions for Nonlinear Integro-Differential Elliptic-Parabolic Equations with Variable Exponents of Nonlinearty. International Journal of Evolution Equations. **10**(3-4), 297-314 (2017).

[18] Bokalo M., Skira I.: Solutions for higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains. New Trends in Mathematical Sciences. **6**(2), 29-42 (2018).

[19] Bokalo M., Skira I.: The Fourier problem for weakly nonlinear integro-differential eliptic-parabolic systems. Matematychni Studii. **51**(1), 59-73 (2019).

[20] Bokalo M., Skira I.: Fourier problem for weakly nonlinear evolution inclusions with functionals. Journal of Optimization, Differential Equations, and their Applications. **27**(1), 3-22 (2019).

[21] Buhrii O.: Some parabolic variational inequalities without initial conditions, Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. **49**, 113-121 (1998).

[22] Buhrii O. M.: Parabolic variational inequalities with degeneration. Математичні студії. **11**(2), 189-198 (1999).

[23] Buhrii O. M., Hlynyans'ka Kh. P.: Some parabolic variational inequalities with variable exponent of nonlinearity: unique solvability and comparison theorems. Journal of Mathematical Sciences. **174**(2), 169-189 (2011).

[24] Buhrii O., Buhrii N.: On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity. New Trends in Mathematical Sciences. **5**(3), 128-153 (2017).

[25] Buhrii O., Buhrii N.: Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity. Open Mathematics. **15**, 859–883 (2017).

[26] Brézis H.: Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, London (1973).

[27] Brezis H.: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London (2011).

[28] Coddington E. A., Levinson N.: Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill book company, New York, Toronto, London (1955).

[29] Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.: Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, 2017. Springer, Heidelberg (2011).

[30] Engler H.: On some parabolic integro-differential equations: existence and asymptotics of solutions. Lecture Notes in Math. **1017**, 161-167 (1983).

[31] Evans L. C. : Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics. Amer. Math. Soc., Providence, 19 (2010).

[32] Favini A., Yagi A.: Degenerate differential equations in Banach spaces. New York etc., Marcel Dekker, Inc. (1999).

[33] Fu Y., Pan N.: Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **362**, 313-326 (2010).

[34] Gayevskyy H. , Greger K., Zaharias K.: Nonlinear operator equations and operator differential equations. Mir, Moscow (1978).

Gajewski H., Gröger K., Zacharias K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichunge. Akademie-Verlag, Berlin (1974).

[35] Hu Z.: Boundeness and Stepanov's almost periodicity of solutions. Electronic Journal of Differential Equations Vol. **2005**(35), 1-7 (2005).

[36] Kováčik O.: Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$. Fasciculi Mathematici. **25**, 87-94 (1995).

[37] Kováčik O., Rákosníc J.: On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Mathematical Journal. **41**, 592-618 (1991).

[38] Kozhanov A.I.: Parabolic equations with nonlocal nonlinear source. Siberian Mathematical Journal. **35**(5), 945-966 (1994).

[39] Kumar K., Kumar R., Shukla R.: Nonlocal Parabolic Integro-differential Equations with Delays. International Journal of Applied Mathematical Research. **1**(4), 549-564 (2012).

[40] Kuttler K.L.: The Galerkin method and degenerate evolution equations . Journal of Mathematical Analysis and Applications. **107**, 396-413 (1985).

[41] Lavrenyuk S. P.: Parabolic variational inequalities without initial data. Нелинейные граничные задачи. **8**, 173-178 (1998).

[42] Lavrenyuk S. P., Ptashnik M. B.: Problem without initial conditions for a nonlinear pseudoparabolic system. Differential Equations. **36**(5), 739-748 (2000).

[43] Loayza M.: Asymptotic behavior of solutions to parabolic problems with nonlinear nonlocal terms. Electronic Journal of Differential Equations. **2013**(228), 1-12 (2013).

[44] Mashiyev R. A., Buhrii O. M.: Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **377**, 450-463 (2011).

[45] Mihailescu M., Radulescu V., Tersian S.: Homoclinic solutions of difference equations with variable exponents. Topological Methods in Nonlinear Analysis. **38**, 277-289 (2011).

[46] Pankov A. A., Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations, Kluwer, Dordrecht, (1990).

[47] Protsakh N. P.: A problem without initial conditions for a nonlinear ultraparabolic equation with degeneration. Journal of Mathematical Science. **168**(4), 505-522 (2010).

[48] Rockafellar R.: On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. Pacific Journal of Mathematics. **33**(1), 209-216 (1970).

[49] Růžička M.: Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Lecture Notes in Mathematics, 1748. Springer-Verlag, Berlin (2000).

[50] Showalter R. E.: Degenerate evolution equations and applications. Indiana University Mathematics Journal. **23**(8), 655-677 (1974).

[51] Showalter R. E.: Hilbert space methods for partial differential equations. Monographs and Studies in Mathematics (Monographs in differential equations). Volume **1**, Pitman, London-San Francisco, Calif.-Melbourne, 1977, xii+196 p.

[52] Showalter R. E.: Singular nonlinear evolution equations. Rocky Mountain J. Math. **10**(3), 499-507 (1980).

[53] Showalter R. E.: Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. Mathematical surveys and monographs, 49. Amer. Math. Soc., Providence (1997).

[54] Zhikov V., Pastukhova S.: Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. **270**, 104-131 (2010).

[55] Yoshida K.: Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1995).

[56] Алхутов Ю., Антонцев С., Жиков В.: Параболические уравнения с переменными показателями нелинейности. Збірник праць Інституту математики НАН України. **6**, 23-50 (2009).

[57] Антонцев С., Шмарев С.: Затухание решений параболических уравнений с переменными показателями нелинейности. Научные записки Математического института имени Стеклова. **261**, 11-21 (2008).

[58] Бокало Н. М.: О единственности решения задачи Фурье для квазилинейных уравнений типа нестационарной фильтрации. Успехи мат. наук. **39**(2), 139-140 (1984).

[59] Бокало Н. М.: О единственности решения задачи без начальных условий для нелинейных параболических уравнений. Успехи мат. наук. **41**(5), 163-164 (1986).

[60] Бокало Н. М.: О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений. Труды семинара имени И.Г. Петровского. **14**, 3-44 (1989).

Bokalo M.M.: Problem without initial conditions for classes of nonlinear parabolic equations. J. Sov. Math. **51**(3), 2291-2322 (1990).

[61] Бокало Н. М.: О задаче без начальных условий для одного класса нелинейных параболических уравнений. Нелинейные граничные задачи. **2**, 1-6 (1990).

[62] Бокало М. М.: Про коректність задачі Фур'є для системи рівнянь типу нестаціонарної фільтрації без умов на нескінченності. Математичні студії. **6**, 85-98 (1996).

[63] Бокало М. М., Сікорський В. М. : Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **51**, 85-98 (1998).

[64] Бокало М., Дмитрів В.: Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь в анізотропних просторах. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **59**, 84-101 (2001).

[65] Бокало Н. М.: Корректность первой краевой задачи и задачи Коши для некоторых квазилинейных параболических систем без условий на бесконечности. Труды семинара имени И.Г. Петровского. **25**, 35-54 (2006).

[66] Бокало М. М., Паучок І. Б.: Коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зв змінними показниками нелінійності. Математичні студії. **24**(1), 25-48 (2006).

[67] Бокало М. М.: Мішана задача для еліптично-параболічних анізотропних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **78**, 14-26 (2013).

[68] Бокало М.М., Притула Я. Г., Скіра І. В.: Про розв'язки анізотропних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності в необмежених за часовою змінною областях. Вісник Національного Університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. **807**, 7-16 (2014).

[69] Бокало М.М., Скіра І. В.: Мішана задача для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності.

Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України . **14**(3), 21-46 (2017).

[70] Бокало М.М., Скіра І. В.: Задача Фур'є для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних систем зі змінними показниками нелінійності. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. **83**, 109-122 (2017).

[71] Бокало М., Скіра І.: Коректність задачі Фур'є для слабко нелінійних еліптично-параболіних інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. **85**, 91-106 (2018).

[72] Бор Г.: Почти периодические функции. М. (1934).

[73] Бугрій О. М.: Системи параболічних варіаційних нерівностей в необмеженій області. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **53**, 77-86 (1999).

[74] Бугрій О.М., Лавренюк С.П.: Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **56**, 33-43 (2000).

[75] Бугрій О. М., Лавренюк С. П.: Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації. Укр. мат. журн. **53** (7), 867-878 (2001).

Buhrii O. M., Lavrenyuk S. P. On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration. Ukrainian Mathematical Journal. **53**(7), 1027-1042 (2001).

[76] Бугрій О. М.: Системи параболічних варіаційних нерівностей з виродженням. Нелинейные граничные задачи. **13**, 43-55 (2003).

[77] Бугрій О., Бугрій М.: Про існування в узагальнених просторах Соболєва розв'язків мішаних задач для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, пов'язаних з європейський опціоном. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 61-84 (2016).

[78] Эйдельман С. Д.: О некоторых свойствах решений параболических уравнений. Укр. мат. журн. **8**(2), 191-207 (1956).

[79] Ивасишен С. Д.: О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий. Дифференц. уравнения. **14**(2), 361-363 (1978).

[80] Лавренюк С. П.: Параболические вариационные неравенства без начальных условий. Дифференц. уравнения. **32**(10), 1396-1400 (1996).

[81] Лавренюк С. П.: Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов. Укр. мат. журн. **49**(4), 540-547 (1997).

[82] Левитан Б. М., Жиков В. В.: Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. Изд-во Моск. ун-та, Москва (1978).

[83] Лионс Ж.-Л.: Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Мир, М. (1972).

Lions J.-L.: Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Dunod Gauthier-Villars, Paris (1969).

[84] Моисеев Е. И., Вафодорова Г. О.: Задача без начальных условий для некоторых дифференциальных уравнений. Дифференц. урравнения. **38**(8), 1091-1094 (2002).

[85] Олейник О. А., Иосифьян Г. А.: Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений. Успехи мат. наук. **31**(6), 142-166 (1976).

[86] Панков А. А: Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений. Наукова думка, Київ (1985).

A. A. Pankov: Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. Kluwer, Dordrecht (1990).

[87] Пукач П. Я.: О задаче без начальных условий для одной нелинейной вырождающейся параболической системы. Укр. мат. журн. **46**(4), 454-456 (1994).

[88] Самохин В.Н.: Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации. Дифференциальные уравнения. **32**(5), 643-651 (1996).

[89] Тихонов А. Н.: Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. Мат. сб. **2**, 199-216 (1935).

Додаток A

Мішана задача для еліптично-параболічних нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків

Матеріали, які тут викладено, опубліковані в праці [69].

Нехай Ω – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$. Вважатимемо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою і позначимо через ν одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Нехай $T > 0$ – яке-небудь фіксоване число, $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma := \Gamma \times (0,T)$.

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha| \in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u) + \int_\Omega c(x,y,t,u(y,t))dy =$$

$$= \sum_{|\alpha| \in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

та початкову умову

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega_0, \tag{3}$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $c : \Omega \times \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$ $(|\alpha| \in M)$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ – задані функції, які задовольняють наведені нижче умови. Тут і далі через δu позначено впорядкований набір з похідних $D^\alpha u \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} u$

функції u порядків $|\alpha|\in M$ (правило впорядкування таке ж, як для компонентів векторів $\xi\in\mathbb{R}^N$).

Далі сформульовану вище *мішану задачу* для рівняння (1) з крайовими умовами (2) і початковою умовою (3) коротко називатимемо *задачею* (1)–(3).

Ми вивчатимемо узагальнені розв'язки задачі (1)–(3), а для цього введемо потрібні для цього позначення і зробимо відповідні припущення щодо вихідних даних цієї задачі.

Нехай виконується

$(\mathcal{P})$ $\quad p_\alpha^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) > 1, \quad p_\alpha^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) < +\infty \quad \forall\alpha,\ |\alpha|\in M.$

Нехай $\widetilde{b}(x)=b(x)$, якщо $x\in\Omega_0$, і $\widetilde{b}(x)=1$, якщо $x\in\Omega\setminus\Omega_0$. Позначимо через $H_b(\Omega)$ лінійний простір, елементами якого є функції $w:=\widetilde{b}^{-1/2}v$, де $v\in L_2(\Omega)$. Простір $H_b(\Omega)$ з півнормою $\|w\|_{H_b(\Omega)}=\big(\int_\Omega b(x)|w(x)|^2dx\big)^{1/2}$ є повним півнормованим простором. Легко переконатися, що $H_b(\Omega)$ є поповненням лінійного простору $\mathbb{V}_p$ за півнормою $\|\cdot\|_{H_b(\Omega)}$ (див. [51,[I.3.3]]).

Введемо простір $C([0,T];H_b(\Omega))$ як лінійний простір функцій $h:[0,T]\to H_b(\Omega)$ таких, що $b^{1/2}h\in C([0,T];L_2(\Omega))$, і півнорму $\|h\|_{C([0,T];H_b(\Omega))}:=\max\limits_{t\in[0,T]}\|h(\cdot,t)\|_{H_b(\Omega)}$ на ньому, з якою він є повним півнормованим простором.

Визначимо простір

$$\mathbb{U}_p^b := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)\cap L_2(Q)\cap C([0,T];H_b(\Omega))$$

і норму $\|h\|_{\mathbb{U}_p^b}:=\|h\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)}+\|h\|_{L_2(Q)}+\|h\|_{C([0,T];H_b(\Omega))}$ на ньому, з якою він є банаховим.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_\alpha:|\alpha|\in M)$ визначених на $Q\times\mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів простору $\mathbb{R}^N$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють такі чотири умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного α ($|\alpha|\in M$) функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi)\in Q\times\mathbb{R}^N$, є каратеодорівською і, крім того, $a_\alpha(x,t,0)=0$ для майже всіх $(x,t)\in Q$.

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $\alpha\,(|\alpha|\in M)$, майже всіх $(x,t)\in Q$ та будь-яких $\xi\in\mathbb{R}^N$ маємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)|\leqslant h_\alpha(x,t)\sum_{|\beta|\in M}|\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)}+g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_\infty(Q)$, $g_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha| \in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant K_1 |\xi_0 - \eta_0|^2, \tag{4}$$

де $K_1 = \mathrm{const} > 0$;

$(\mathcal{A}_4)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких ξ з $\mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x,t,\xi)\xi_\alpha \geqslant K_2 \sum_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)} - g(x,t),$$

де $K_2 = \mathrm{const} > 0$, $0 \leqslant g \in L_1(Q)$.

Нехай $\mathbb{C}$ – множина функцій $c : \Omega \times \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють такі умови:

$(\mathcal{C}_1)$ функція $c(x,y,t,s), (x,y,t,s) \in \Omega \times \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R},$ є каратеодорівською і, крім того, $c(x,y,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T)$;

$(\mathcal{C}_2)$ для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times Q$ та довільних $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|c(x,y,t,s_1) - c(x,y,t,s_2)| \leqslant L|s_1 - s_2|,$$

де $L = \mathrm{const} > 0$.

Зауваження 1. З умови $(\mathcal{C}_2)$ випливає, що

$$|c(x,t,y,s)| \leq L|s| \tag{5}$$

для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T)$ і будь-яких $s \in \mathbb{R}$.

Нехай $\mathbb{F}_{p'}$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha : |\alpha| \in M)$ з N визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$, і функції f_α належать простору $L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ для кожного α, $|\alpha| \in M$.

Під $C^1_c(0,T)$ розумітимемо лінійний простір неперервно диференційовних фінітних функцій $\varphi : (0,T) \to \mathbb{R}$.

Означення 0.1. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $c \in \mathbb{C}$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p'}$, $u_0 \in H_b(\Omega)$.

Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) *називаємо функцію* $u \in \mathbb{U}_p^b$, *яка задовольняє початкову умову*

$$\|u(\cdot, 0) - u_0(\cdot)\|_{H_b(\Omega)} = 0 \tag{6}$$

та інтегральну тотожність

$$\int\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha v\varphi + v\varphi \int\limits_\Omega c(x,y,t,u(y,t))\,dy - buv\varphi' \Big\}\,dxdt =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha D^\alpha v\varphi\,dxdt \quad \forall\, v \in \mathbb{V}_p,\ \forall\, \varphi \in C_c^1(0,T). \tag{7}$$

Основним результатом нашої роботи є таке твердження.

Теорема 0.1. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $c \in \mathbb{C}$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p'}$, $u_0 \in H_b(\Omega)$ *і, крім того, виконується нерівність*

$$K_1 > L\mathrm{mes}_n\Omega. \tag{8}$$

Тоді задача (1)–(3) *має узагальнений розв'язок і тільки один. Крім того, для нього виконується оцінка*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,t)|^2\,dx +$$

$$+ \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha| \in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)} + |u(x,t)|^2 \Big)\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big[\iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha| \in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)} + g(x,t) \Big)\,dxdt + \int\limits_\Omega b(x)|u_0(x)|^2\,dx \Big] \tag{9}$$

де $C_1 > 0$ *– стала, яка залежить від* $K_1, K_2, L, \mathrm{mes}_n\Omega$ *і* p_α^- $(|\alpha| \in M)$.

Доведення теореми 0.1. Далі для зручності і скорочення записів будемо використовувати такі позначення:

$$a_\alpha(w)(x,t) := a_\alpha(x,t,\delta w(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \quad |\alpha| \in M;$$
$$c(w)(x,y,t) := c(x,y,t,w(y,t)), \quad (x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T).$$

Доведення теореми 0.1. Проведемо доведення в три етапи. Спочатку доведемо єдиність розв'язку задачі (1)–(3) , потім існування та правильність оцінки (9).

Перший етап (єдиність розв'язку). Припустимо супротивне. Нехай u_1 і u_2 – два узагальнені розв'язки даної задачі. Розглянемо різницю між тотожністю (7) з $u = u_1$ і тотожністю (7) з $u = u_2$:

$$\iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2))\, D^\alpha v\varphi +$$

$$+ v\varphi \int_\Omega (c(u_1)(x,y,t) - c(u_2)(x,y,t)))\, dy - b(x)(u_1-u_2)v\varphi' \Big\}\, dxdt = 0.$$

Звідси на підставі леми 2.3 підрозділу 2.2 з $w = u_1 - u_2, \theta \equiv 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$ отримаємо (див. (2.43))

$$\frac{1}{2} \int_\Omega b(x)|u_1(x,T) - u_2(x,T)|^2 dx +$$

$$+ \iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(u_1) - a_\alpha(u_2))\ (D^\alpha(u_1-u_2)) \Big\} dxdt +$$

$$+ \iint_Q (u_1-u_2) \Big(\int_\Omega (c(u_1)(x,y,t) - c(u_2)(x,y,t))\, dy \Big) dxdt = 0,$$

$$\tau \in (0,T]. \qquad (10)$$

З умови $(\mathcal{A}_3)$ випливає, що

$$\iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(u_1) - a_\alpha(u_2))(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2) \Big\}\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant K_1 \iint_Q |u_1 - u_2|^2\, dxdt. \qquad (11)$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, отримаємо таку оцінку:

$$\left| \iint_Q (u_1(x,t) - u_2(x,t)) \Big(\int_\Omega (c(u_1)(x,y,t) - c(u_2)(x,y,t)) dy \Big) dxdt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \iint_Q |u_1(x,t) - u_2(x,t)|\ \Big(\int_\Omega |c(u_1)(x,y,t) - c(u_2)(x,y,t)|\, dy \Big) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L \iint\limits_{Q} |u_1(x,t)-u_2(x,t)| \Big(\int\limits_{\Omega} |u_1(y,t)-u_2(y,t)|\, dy \Big)\, dxdt =$$

$$= L \int\limits_{0}^{T} \Big(\int\limits_{\Omega} |u_1(x,t)-u_2(x,t)| \;\, dx \Big)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega \iint\limits_{Q} |u_1-u_2|^2\, dxdt. \qquad (12)$$

Тоді з (10) на підставі (11) і (12) здобуваємо

$$(K_1 - L\mathrm{mes}_n\Omega) \iint\limits_{Q} |u_1-u_2|^2\, dxdt \leqslant 0.$$

Звідси та умови (8) отримаємо рівність $u_1(x,t)-u_2(x,t)=0$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, а отже, $u_1=u_2$ майже скрізь на Q. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Другий етап (існування розв'язку). Доведемо існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(3), використовуючи комбінацію методів регуляризації та Фаедо-Гальоркіна. Нехай $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ – повна лінійно незалежна система функцій в просторі $\mathbb{V}_p$. Для довільного $k\in\mathbb{N}$ позначимо $V_k := \{d_1w_1+\ldots+ d_kw_k \,\big|\, d_1,...,d_k\in\mathbb{R}\}$. Очевидно, що множина $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k$ є щільною в просторах $\mathbb{V}_p$ та $H_b(\Omega)$.

Виберемо послідовність $\{u_{0,k}\}_{k=1}^{\infty}$ таку, що $u_{0,k}\in V_k$ і

$$\|u_0-u_{0,k}\|_{H_b(\Omega)} = \Big\|b^{1/2}u_0 - b^{1/2}u_{0,k}\Big\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (13)$$

Зауважимо, що для кожного $k\in\mathbb{N}$, майже всіх $x\in\Omega$ і довільного $\eta\in(0,1]$ правильна нерівність

$$\Big|b^{1/2}(x) - \Big(b(x)+\eta\Big)^{1/2}\Big|^2 \Big|u_{0,k}(x)\Big|^2 \;\leqslant\; 4(b(x)+1)\Big|u_{0,k}(x)\Big|^2.$$

Отож, на підставі теореми про граничний перехід під знаком інтеграла, для кожного фіксованого $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$\Big\|b^{1/2}u_{0,k} - \Big(b+\eta\Big)^{1/2}u_{0,k}\Big\|_{L^2(\Omega)} \underset{\eta\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Звідси випливає існування послідовності додатних чисел $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ такої, що $\eta_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ і

$$\left\|b^{1/2}u_{0,k} - \big(b+\eta_k\big)^{1/2}u_{0,k}\right\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{14}$$

Приймемо

$$b_k(x) := b(x) + \eta_k, \quad x \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

З (13)–(15) випливає, що

$$\left\|b^{1/2}u_0 - b_k^{1/2}u_{0,k}\right\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{16}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ шукаємо гальоркінське наближення u_k у вигляді

$$u_k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{k,i}(t)w_i(x), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{17}$$

де $c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,k}$ – абсолютно неперервні на $[0,T]$ функції такі, що виконуються рівності

$$\int_{\Omega}\Big\{b_k(x)u_{k,t}w_j + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k)\,D^\alpha w_j + w_j\int_{\Omega} c(u_k)(x,y,t)dy\Big\}dx =$$

$$= \int_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha w_j\,dx, \quad t \in [0,T], \quad j = \overline{1,k}, \tag{18}$$

$$u_k(x,0) = u_{0,k}(x), \quad x \in \Omega. \tag{19}$$

Співвідношення (18), (19) можна трактувати як задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $c_{k,1},\ldots,c_{k,k}$. Систему рівнянь (18) можна звести до нормальної форми. Тому на підставі теореми про існування, єдиність та продовження розв'язку цієї задачі (див., наприклад, [28]) існує єдиний глобальний її розв'язок $c_{1,k}, \ldots., c_{k,k}$ і він визначений на деякому проміжку $[0,T_k\rangle$, де $T_k \leqslant T$. Тут і далі дужка "$\rangle$" означає або дужку ")" або дужку "]". Отож, функція u_k визначена на множині $\overline{\Omega}\times[0,T_k\rangle$. Пізніше ми встановимо оцінки, з яких буде випливати рівність $[0,T_k\rangle = [0,T]$.

Тепер отримаємо відповідні оцінки членів послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для кожного $j \in \{1, \ldots, k\}$ домножимо рівність системи (18) з номером j на $c_{k,j}$ і підсумуємо отримані рівності. Здобуту рівність проінтегруємо за $t \in [0, \tau] \subset [0, T_k\rangle$ і використаємо (17), (19) та формулу інтегрування частинами. У результаті здобудемо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k\Big\}\,dxdt =$$

$$= \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\,dxdt -$$

$$-\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} u_k(x,t)\Big(\int\limits_{\Omega} c(u_k)(x,y,t)dy\Big)\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_k(x)|u_{0,k}(x)|^2\,dx. \qquad (20)$$

Далі нам буде потрібна така нерівність, що випливає з нерівності Юнга: для майже всіх $x \in \Omega$

$$ad \leqslant \varepsilon|a|^{r(x)} + \varepsilon^{-\frac{1}{r^- - 1}}|d|^{r'(x)}, \quad a, d \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in (0,1), \qquad (21)$$

де $r \in L^\infty(\Omega)$, $r^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1$, $r'(x) := r(x)/(r(x)-1)$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Для довільного $0 < \delta < 1$, використовуючи умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$ та $(\mathcal{A}_4)$, отримуємо таку оцінку:

$$\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k\Big\}\,dxdt =$$

$$= (\delta + (1-\delta))\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k\Big\}\,dxdt \geq$$

$$\geq \delta K_1\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_k|^2\,dxdt + (1-\delta)K_2\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)}\,dxdt -$$

$$-(1-\delta)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} g\,dxdt. \qquad (22)$$

Використавши (21), здобуваємо

$$\left|\int_0^\tau\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\,dxdt\right| \leqslant \int_0^\tau\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha||D^\alpha u_k|\Big\}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\int_0^\tau\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt+\int_0^\tau\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\varepsilon^{-1/(p_\alpha^- -1)}|f_\alpha|^{p'_\alpha(x)}\Big\}dxdt, \quad (23)$$

де $\varepsilon \in (0,1)$ – довільне число.

Використовуючи нерівність (5) та нерівність Коші–Буняковського, отримаємо

$$\Big|\int_0^\tau\int_\Omega u_k(x,t)\Big(\int_\Omega c(u_k)(x,y,t)\;dy\Big)dxdt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau\int_\Omega |u_k(x,t)|\,\Big(\int_\Omega |c(u_k)(x,y,t)|\;\,dy\Big)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L\int_0^\tau\int_\Omega |u_k(x,t)|\,\Big(\int_\Omega |u_k(y,t)|\,dy\Big)\,dxdt =$$

$$= L\int_0^\tau\Big(\int_\Omega |u_k(x,t)|\;\,dx\Big)^2 dt \leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega\int_0^\tau\int_\Omega |u_k(x,t)|^2\,dxdt \quad (24)$$

З рівності (20) на підставі (22) – (24) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_\Omega b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx +$$

$$+\,((1-\delta)K_2-\varepsilon)\int_0^\tau\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt +$$

$$+\,(\delta K_1 - L\mathrm{mes}_n\Omega)\int_0^\tau\int_\Omega |u_k|^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \varepsilon^{-1/(p_\alpha^- -1)} |f_\alpha|^{p'_\alpha(x)} \Big\} \, dxdt +$$

$$+ (1-\delta) \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega g \, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_k |u_{0,k}|^2 \, dx, \ \tau \in [0, T_k\rangle. \tag{25}$$

В (25) виберемо значення $\delta \in (0,1)$ таким, щоби виконувалась нерівність $\delta K_1 - L \mathrm{mes}_n \Omega > 0$ (це можна зробити на підставі (8)), а тоді виберемо значення $\varepsilon \in (0,1)$ таким, щоб виконувалась нерівність $(1-\delta)K_2 - \varepsilon > 0$, наприклад, $\varepsilon = (1-\delta)K_2/2$. У результаті отримаємо

$$\int\limits_\Omega b_k(x) |u_k(x,\tau)|^2 \, dx + C_2 \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)} + |u_k|^2 \Big) \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha|^{p'_\alpha(x)} + g \Big) \, dxdt + \int\limits_\Omega b_k |u_{0,k}|^2 \, dx, \ \tau \in [0, T_k\rangle, \tag{26}$$

де C_2, C_3 – додатні сталі які не залежать від r і k.

З (16) випливає, що послідовність $\big\{ \int_\Omega b_k |u_{0,k}|^2 \, dx \big\}_{k=1}^{+\infty}$ є обмеженою. Звідси та з (26) отримаємо такі оцінки

$$\int\limits_\Omega b_k(x) |u_k(x,\tau)|^2 \, dx \leqslant C_4 \quad \forall \tau \in (0, T_k), \tag{27}$$

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)} \Big\} \, dxdt \leqslant C_5 \quad \forall \tau \in (0, T_k), \tag{28}$$

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |u_k(x,t)|^2 \, dxdt \leqslant C_6 \quad \forall \tau \in (0, T_k), \tag{29}$$

де C_4, C_5, C_6 – додатні сталі, які не залежать від τ та k.

На підставі (27) маємо, зокрема, що $T_k = T$ і $[0, T_k\rangle = [0, T]$. Отже, оцінки (27), (28) правильні при заміні $(0, T_k)$ на $[0, T]$.

З умови $(\mathcal{A}_2)$, нерівності (5) та оцінок (28), (29), використовуючи нерівність Гельдера, отримаємо оцінки

$$\iint\limits_Q |a_\alpha(u_k)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt \leqslant C_7, \quad |\alpha| \in M, \tag{30}$$

$$\iint\limits_Q \Big|\int\limits_\Omega c(u_k)(x,y,t)dy\Big|^2\,dxdt \leqslant C_8, \tag{31}$$

де C_7, C_8 – сталі, які не залежить від k.

Оскільки простори $L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)$, $L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ ($|\alpha| \in M$) є рефлексивними (див. [37,[p. 600]]), то з оцінок (27) – (31) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_k\}$ (цю підпослідовність позначатимемо так само як і всю послідовність), функцій $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q)$, $\widetilde{u} \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $\chi_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ ($|\alpha| \in M$), $\zeta \in L_2(Q)$ таких, що

$$b_k^{1/2}u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad *-\text{слабко в} \quad L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \tag{32}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q), \tag{33}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q), \tag{34}$$

$$a_\alpha(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_\alpha \;\text{ слабко в }\; L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q), \quad |\alpha| \in M, \tag{35}$$

$$\int\limits_\Omega c(u_k)dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q). \tag{36}$$

Доведемо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). Для цього спочатку відмітимо, що

$$b_k^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b^{1/2} \;\text{ сильно в }\; L_2(\Omega) \;\text{ і майже всюди на }\; \Omega. \tag{37}$$

Тепер покажемо, що

$$\tilde{u} = b^{1/2}u \quad \text{майже всюди на} \quad Q. \tag{38}$$

Справді, для довільної функції $\psi \in C(\overline{Q})$ на підставі (32) маємо

$$\iint\limits_Q b_k^{1/2}u_k\psi dxdt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q \tilde{u}\psi\,dxdt. \tag{39}$$

Беручи до уваги (37), легко показати, що $b_k^{1/2}\psi \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} b^{1/2}\psi$ в $L_{p_0'(\cdot)}(Q)$. Отож, на підставі (34), маємо

$$\iint\limits_Q u_k b_k^{1/2}\psi\,dxdt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q u b^{1/2}\psi\,dxdt. \tag{40}$$

Співвідношення (39), (40) дають підставу стверджувати, що для будь-якої $\psi \in C(\overline{Q})$ правильна рівність

$$\iint\limits_Q \tilde{u}\psi\,dxdt = \iint\limits_Q b^{1/2}u\psi\,dxdt,$$

звідки випливає рівність (38). Виберемо довільним чином і зафіксуємо числа $j, k \in \mathbb{N}$ такі, що $k \geqslant j$. Домножимо рівність системи (18) з номером j на функцію $\theta \in C^1([0,T])$ таку, що $\theta(T) = 0$, і проінтегруємо отриману рівність за t від 0 до T та використаємо формулу інтегрування частинами. У результаті здобудемо рівність, з якої перейшовши до границі при $k \to \infty$ і взявши до уваги (16), (19), (32)–(38), отримаємо

$$-\theta(0)\int\limits_\Omega b(x)u_0(x)w_j(x)\,dx - \iint\limits_Q buw_j\theta'\,dxdt +$$
$$+\iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha w_j + \zeta w_j\Big)\theta\,dxdt = 0. \tag{41}$$

З цієї рівності випливає, що для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(T) = 0$, правильна рівність

$$-\theta(0)\int\limits_Q b(x)u_0(x)v(x)\,dx - \iint\limits_Q buv\theta'\,dxdt +$$
$$+\iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha v + \zeta v\Big)\theta\,dxdt = 0. \tag{42}$$

Зауважимо, що коли взяти $\theta = \varphi \in C_c^1(0,T)$ в (42), то отримаємо рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{\Big(\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha v + v\zeta\Big)\varphi - buv\varphi'\Big\}\,dxdt = 0 \tag{43}$$

для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\varphi \in C_c^1(0,T)$.

На підставі леми (2.3) і (43) маємо, що

$$u \in C\big([0,T]; H_b(\Omega)\big) \tag{44}$$

і для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(T) = 0$, правильна рівність

$$-\theta(0)\int\limits_{\Omega} b(x)u(x,0)v(x)\,dx - \iint\limits_{Q} buv\theta'\,dxdt +$$
$$+ \iint\limits_{Q} \Big(\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha v + \zeta v\Big)\theta\,dxdt = 0. \tag{45}$$

З (42) і (45) отримуємо (6), а з (33), (34) і (44) випливає, що $u \in \mathbb{U}_p^b$.

Маючи на увазі (43), для доведення тотожності (7) достатньо показати, що правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\chi_\alpha(x,t)D^\alpha v(x) + \zeta(x,t)v(x)\Big\}dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u)(x,t)D^\alpha v(x) + v(x)\int\limits_{\Omega} c(u)(x,y,t)dy\Big\}dx \tag{46}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та будь-яких $v \in \mathbb{V}_p$. Для цього використаємо метод монотонності (див. [83]). Нехай $w \in W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ – довільна функція. Позначимо

$$W_k := \iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(u_k)(x,t) - a_\alpha(w)(x,t)))\times$$
$$\times (D^\alpha u_k(x,t) - D^\alpha w(x,t)) +$$
$$+ \Big(\int\limits_{\Omega}[c(u_k)(x,y,t) - c(w)(x,y,t)]dy\Big)\times$$
$$\times \big(u_k(x,t) - w(x,t)\big)\Big\}\theta\,dxdt, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

де $\theta(t) = 1 - t/T$, $t \in \mathbb{R}$.

На підставі умови $(\mathcal{A}_3)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$W_k \geqslant \iint\limits_{Q}\Big\{K_1|u_k(x,t) - w(x,t)|^2 + (u_k(x,t) - w(x,t))\times$$
$$\times \int\limits_{\Omega}\big[c(x,t,y,u_k(y,t)) - c(x,t,y,w(y,t))\big]dy\Big\}\theta\,dxdt. \tag{47}$$

Аналогічно як ми отримали правильність (12), можемо встановити нерівність

$$\left|\iint\limits_Q (u_k(x,t)-w(x,t))\Big(\int\limits_\Omega [c(u_k)(x,y,t)-c(w)(x,y,t)]\ dy\Big)\theta dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega \iint\limits_Q |u_k-w|^2\,\theta dxdt. \tag{48}$$

З (47) і (48), врахувавши умову $\mathcal{C}_2$, отримуємо

$$W_k \geqslant (K_1 - L\mathrm{mes}_n\Omega)\iint\limits_Q |u_k(x,t)-w(x,t)|^2\theta\ dxdt \geqslant 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Маємо

$$W_k = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k + u_k\int\limits_\Omega c(u_k)dy\Big\}\theta\ dxdt-$$

$$-\iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\big[a_\alpha(u_k)D^\alpha w + a_\alpha(w)(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\big]-$$

$$-w\int\limits_\Omega c(u_k)dy - \big(u_k-w\big)\int\limits_\Omega c(w)dy\Big\}\ \theta dxdt \geqslant 0. \tag{49}$$

Для кожного $j\in\{1,\ldots,k\}$ помножимо рівність системи (18) з номером j на $c_{k,j}\theta$ і підсумуємо отримані рівності за j. Результуючу рівність інтегруємо за $t\in[0,T]$ і використовуємо формулу інтегрування частинами та (17) і (19). У результаті отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k + u_k\int\limits_\Omega c(u_k)dy\Big\}\theta\ dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\theta\ dxdt-$$

$$-\frac{1}{2T}\iint\limits_Q b_k|u_k|^2\ dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_k|u_{0,k}|^2\ dx, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{50}$$

На підставі (49) і (50) здобуваємо

$$\begin{aligned} W_k = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u_k \Big\} \theta\, dxdt - \\ - \frac{1}{2T} \iint\limits_Q b_k |u_k|^2\, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_k |u_{0,k}|^2\, dx - \\ - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \big[a_\alpha(u_k) D^\alpha w + a_\alpha(w)(D^\alpha u_k - D^\alpha w) \big] - \\ - w \int\limits_\Omega c(u_k) dy - (u_k - w) \int\limits_\Omega c(w) dy \Big\} \theta\, dxdt \geqslant 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Із співвідношень (32), (38) випливає

$$\liminf_{k\to\infty} \iint\limits_Q b_k |u_k|^2\, dxdt \geqslant \iint\limits_Q b|u|^2\, dxdt. \tag{52}$$

На підставі (16), (34) – (36) і (52), з (51) отримаємо

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \limsup_{k\to\infty} W_k \leqslant \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u \Big\} \theta\, dxdt - \\ - \frac{1}{2T} \iint\limits_Q b|u|^2\, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b|u_0|^2\, dx - \\ - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \big[\chi_\alpha D^\alpha w + a_\alpha(w)(D^\alpha u - D^\alpha w) \big] - \\ - w\zeta - \big(u - w\big) \int\limits_\Omega c(w)(x,y,t) dy \Big\} \theta\, dxdt. \end{aligned} \tag{53}$$

З (43), використовуючи лему 1 (див. (9)) і (6), матимемо

$$\begin{aligned} \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \chi_\alpha D^\alpha u + u\zeta \Big\} \theta\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u \Big\} \theta\, dxdt - \\ - \frac{1}{2T} \iint\limits_Q b|u|^2\, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b|u_0|^2\, dx. \end{aligned} \tag{54}$$

Тоді на підставі (53) і (54) здобуваємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - a_\alpha(w))(D^\alpha u - D^\alpha w) +$$

$$+(u-w)\Big(\zeta-\int\limits_{\Omega}c(w)dy\Big)\Big\}\theta\,dxdt\geqslant 0. \tag{55}$$

Підставивши $w=u-\lambda v\varphi$ в (55), де $v\in\mathbb{V}_p$, $\varphi\in C^1_c(0,T)$, $\lambda>0$ – довільні фіксовані, і поділивши отриману нерівність на λ, отримаємо

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha-a_\alpha(u-\lambda v\varphi))D^\alpha v+$$

$$+\big(\zeta-\int\limits_{\Omega}c(u-\lambda v\varphi)dy\big)v\Big\}\theta\varphi\,dxdt\geqslant 0. \tag{56}$$

Переходячи в (56) до границі при $\lambda\to 0+$ на підставі умов $(\mathcal{A}_1)$ і $(\mathcal{A}_2)$ та теореми про граничний перехід під знаком інтеграла, (див. [31,с. 648]), здобуваємо

$$\iint_{Q}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha-a_\alpha(u))D^\alpha v+\big(\zeta-\int\limits_{\Omega}c(u)dy\big)v\Big\}\theta\varphi\,dxdt=0,$$

де $v\in\mathbb{V}_p$ і $\varphi\in C^1_c(0,T)$ є довільними функціями. Отож, рівність (46) є правильною.

З (43), беручи до уваги (46), отримаємо (7). Таким чином, ми показали, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).

Третій етап (оцінка розв'язку). Використовуючи лему (2.3) з $w=u$, $\theta\equiv 1$, $t_1=0$, $t_2=\tau\in(0,T]$, отримаємо (див. (2.43))

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}b(x)|u(x,\tau)|^2dx+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u)D^\alpha u\Big\}\,dxdt=$$

$$=\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u\Big\}dxdt-\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}u(x,t)\Big(\int\limits_{\Omega}c(u)(x,y,t)\,dy\Big)dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_0(x)|^2dx. \tag{57}$$

Легко показати виконання нерівностей подібних до (22), (23) та (24) з u замість u_k, $k\in\mathbb{N}$. Отже, можна отримати нерівність аналогічну до (25), з якої легко випливає оцінка (9) узагальненого розв'язку задачі (1)–(3). ∎

Додаток Б

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів

1. Бокало М.М., Притула Я. Г., Скіра І. В.: Про розв'язки анізотропних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності в необмежених за часовою змінною областях. Вісник Національного Університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. **807**, 7–16 (2014).

2. Бокало М.М., Скіра І. В.: Мішана задача для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України . **14**(3), 21–46 (2017).

3. Bokalo M.M., Skira I. V.: Almost Periodic Solutions for Nonlinear Integro-Differential Elliptic-Parabolic Equations with Variable Exponents of Nonlinearty. International Journal of Evolution Equations. **10**(3-4), 297–314 (2017).

4. Бокало М.М., Скіра І. В.: Задача Фур'є для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних систем зі змінними показниками нелінійності. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. **83**, 109–122 (2017).

5. Bokalo M.M., Skira I. V.: Solutions for higher-order anisotropic elliptic-parabolic equations in time unbounded domains. New Trends in Mathematical Sciences. **6**(2), 29–42 (2018).

6. Бокало М.М., Скіра І. В.: Коректність задачі Фур'є для слабко нелінійних еліптично-параболіних інтегро-диференціальних рівнянь вищих порядків. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. **85**, 91–116 (2018).

7. Bokalo M.M., Skira I. V.: The Fourier problem for weakly nonlinear integro-differential eliptic-parabolic systems. Matematychni Studii. **51**(1), 59–73 (2019).

8. Bokalo M.M., Skira I. V.: Fourier problem for weakly nonlinear evolution inclusions with functionals. Journal of Optimization, Differential Equations, and their Applications. **27**(1), 3–22 (2019).

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях і семінарах:

– 10th international Scorobohatko mathematical conference (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 року;

– international conference on differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Львів, 20-24 серпня 2016 року);

– 5th international conference of young scientists on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky (Київ, 9-11 листопада 2016 року);

– international scientific conference "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies dedicated to the 50th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics (Чернівці, 17-19 вересня 2018 року);

– VI всеукраїнська математична конференція імені Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу"(Івано-Франківськ - Микуличин, 26-28 вересня 2018 року);

– 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications (Вінниця, 18-20 червня 2019 року);

– міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування присвячена 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана (Чернівці, 16-19 вересня 2020 року);

– XI international Skorobohatko mathematical conference (Львів, 26 – 30 жовтня 2020 року);

– львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь, керівники: проф. Бокало М. М., проф. Каленюк П. І. (2 жовтня 2020 року).