МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

Головатий Юрій Данилович

УДК 517.928+539.182

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ У МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів — 2021

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
Нижник Леонід Павлович,
Інститут математики НАН України,
головний науковий співробітник відділу
функціонального аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
Каленюк Петро Іванович,
Національний університет «Львівська політехніка»,
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук
Рибалко Володимир Олександрович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б.І. Вєркіна НАН України
провідний науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь і геометрії.

Захист відбудеться **10 грудня 2021 р.** о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79001, Львів, вул. Університетська, 1, аудиторія 377.

З дисертацією можна ознайомитися у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (Львів, вул. Драгоманова, 5) та на сайті університету за посиланням
https://lnu.edu.ua/research/scientific-council-on-thesis-defence/doctoral-thesis

Автореферат розіслано 8 листопада 2021 р.

В.о. вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради Венгерський П. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження. Математика і теоретична фізика – дві нероздільні сфери інтелектуальної діяльності людини. Фізика є невичерпним джерелом складних задач для математиків, а математика стала для фізиків чи не основним інструментом, передусім у дослідженнях мікросвіту. Так вивчення диференціальних операторів Шредингера дає нам інформацію про протікання квантово-механічних процесів. Метою такого аналізу є опис спектрів операторів — знаходження енергетичних рівнів квантових систем, опис даних розсіювання — обчислення ймовірності проходження елементарних частинок через енергетичні потенціали, знаходження розв'язків обернених спектральних задач та задач розсіювання — відновлення форми потенціалів за спектральними даними чи даними розсіювання. У таких задачах треба провести не лише якісне дослідження, але й отримати якомога точніший кількісний результат — обчислити енергетичні рівні чи ймовірність проходження. Тому фізика ставить перед математичними моделями дві на перший погляд конфліктуючі вимоги: модель повинна адекватно описувати реальний процес і водночас мати явні розв'язки. Такі моделі називають точними.

Зазвичай взаємодії у квантово-механічних процесах мають локальний характер і відбуваються в малих зонах. В одновимірному випадку локальні взаємодії заміняють так званими точковими взаємодіями – умовами спряження для хвильових функцій в окремих точках. Загалом потенціали, локалізовані в околі підмноговидів меншої вимірності, можна замінити умовами спряження чи крайовими умовами на цих підмноговидах, значно спростивши модель. Основна математична проблема полягає у вмотивованому виборі умов. Локалізований потенціал треба замінити такими умовами, щоб отримана точна модель найкраще апроксимувала, як якісно, так і кількісно, реальний процес.

Побудова точних моделей у квантовій механіці та їх дослідження – це окремий розділ теорії операторів Шредингера, який вивчає оператори з потенціалами-розподілами, зосередженими на множинах міри нуль, оператори із збуреннями скінченного рангу, а також збіжність сімей операторів із сингулярно збуреними потенціалами. Перший результат щодо гамільтоніанів, які містили суму δ-функцій, R. Kronig і W. Penny отримали ще в 1931 році, фактично в часи появи узагальнених функцій. Проте інтенсивний розвиток цієї теорії розпочався у 80-х роках минулого століття і триває донині. Вагомий науковий внесок тут зробили такі дослідники: S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, P. Chernoff, R. Hughes, M. Klaus, P. Exner, A. Zettl, P. Šeba, H. Neidhardt, V. Zagrebnov, P. Kurasov, J. F. Brasche, C. Cacciapuoti, J. Dereziński, D. Finco, S. Hassi, M. Gadella, L. Nieto, R. Figari, A. Posilicano, A. Teta, J. Behrndt, M. Holzmann, V. Lotoreichik, M. Znojil, Л. Д. Фаддєєв, Ф. О. Березін, А. Н. Кочубей, В. Д. Кошманенко, Л. П. Нижник, В. А. Михайлець, О. В. Золотарюк, М. М. Маламуд, О. Костенко, В. О. Деркач, С. О. Кужель, В. Л. Кулинський, В. Є. Лянце, Р. О. Гринів, Я. В. Микитюк, А. А. Шкаликов, А. М. Савчук, Р. Р. Гадильшин, Д. І. Борисов та ін. Позаяк не існує загальної теорії лінійних диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах, то залишається багато відкритих проблем. Ці проблеми насамперед пов'язані зі збіжністю операторів Шредингера із збуреними потенціалами, які зазвичай є регуляризаціями розподілів з високим порядком сингулярності.

Оператори Шредингера з потенціалами типу Кулона – потенціалами, які мають степеневі особливості – не менш цікаві з погляду фізики. Зокрема, їх дослідження пов'язані з проблемою одновимірного атома водню, яка в останні півстоліття породила гострі наукові дискусії та більше двох тисяч публікацій. Сингулярність потенціалів спричиняє негладкість розв'язків, які є визначеними лише в односторонніх околах особливої точки і їх треба поєднати додатковими умовами. Щоб побудувати гамільтоніан атома водню потрібно вказати ці умови явно. Дослідження одновимірних моделей атома водню проводили R. Loudon, M. Moshinsky, R. G. Newton, W. Fischer, H. Leschke, P. Müller, P. Kurasov, F. Gesztesy, M. Klaus, B. Bodenstorfer, A. Dijksma, H. Langer, C. R. de Oliveira, A. A. Verri, І. О. Вакарчук, В. М. Ткачук та ін.

У спектральній теорії операторів Шредингера важливим є встановлення умов, при виконанні яких існують від'ємні власні значення, та умов, коли ці власні значення поглинає нижня межа неперервного спектру при нескінченно малих сталих взаємодії. Вивчення так званої порогової поведінки власних значень має самостійну цінність для спектральної теорії, але водночас порогова поведінка має стосунок до питань стійкості розв'язків рівняння Кортевега-де-Вріза та існування "брізерів" – пульсуючих локалізованих нелінійних хвиль – для дискретних нелінійних операторів Шредингера. Такі проблеми вивчали B. Simon, M. Klaus, M. L. Goldberger, J. Rauch, S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, A. Jensen, M. Melgaard, Р. Р. Гадильшин та ін.

Поява нових технологій, пов'язаних з композитними матеріалами, сприяла активному розвитку теорії сильно неоднорідних середовищ та теорії усереднення. Шляхом процедури усереднення чи з допомогою інших асимптотичних методів крайові задачі для диференціальних операторів із швидкозмінними коефіцієнтами в областях із складною геометрією можна апроксимувати задачами для усереднених операторів в областях з простою геометрією. Вагомий внесок в теорію усереднення зробили J.-L. Lions, O. A. Олійник, В. В. Жиков, В. О. Марченко, Є. Я. Хруслов та ін. Зокрема, теорія сильно неоднорідних середовищ досліджує властивості систем із неоднорідним розподілом маси чи з приєднаними масами на множинах меншого виміру. Такі моделі вивчали у своїх роботах E. Sánchez-Palencia, О. А. Олійник, M. Lobo, E. Pérez, С. А. Назаров, Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, В. О. Рибалко та ін.

Основні результати дисертації стосуються одновимірних та двовимірних фізичних моделей. Ці моделі не є спрощенням багатовимірних, а відіграють роль первинних математичних моделей в різних галузях сучасної фізичної науки. Моделі одновимірної фізики стали актуальними саме останніми десятиліттями, бо лише тепер їх можна експериментально реалізувати. Обмежити рух атомів до одного напрямку можна, піддавши їх дії дуже сильних полів чи "утримуючи" в тонких структурах, таких як напівпровідникові квантові дроти чи вуглецеві нанотрубки. Деякі задачі одновимірної фізики є набагато складнішими з погляду математики, ніж їх аналоги у вищих розмірностях. Зокрема, це стосується задачі про атом водню. Математика одновимірних моделей також лежить в основі сучасної теорії квантових графів, яка описує процеси у квантових хвилеводах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація написана у Львівському національному університеті імені Івана Франка у процесі виконання кафедрою диференціальних рівнянь науково-дослідних державних тем "Дослідження коректності класичних та некласичних задач для рівнянь у частинних похідних" — 0108U004134, "Дослідження коректності прямих і обернених задач та задач з вільними межами для диференціальних операторів" — 0111U001085, "Розробка методів дослідження коректності прямих та обернених задач для диференціальних операторів" — 0117U001228.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи була побудова та дослідження математичних моделей, які описують явища квантової механіки. А саме, побудова так званих точних моделей, які дають не лише якісний опис реального процесу, але й які можна відносно просто розв'язати, отримавши кількісні характеристики – спектри чи дані розсіювання. Математично і фізично обґрунтовані точні моделі отримують шляхом дослідження збіжності диференціальних операторів із локальними сингулярними збуреннями коефіцієнтів та вивчення асимптотичної поведінки їхніх спектрів. *Завданням* роботи було:

- розв'язати проблему δ'-потенціалу, побудувавши теорію одновимірних операторів Шредингера з $(a\delta' + b\delta)$-подібними потенціалами; знайти точні моделі — гамільтоніани з точковими взаємодіями, які найкраще апроксимують системи з локалізованими диполями;
- трактуючи δ'-потенціал як збурення скінченного рангу, побудувати теорію одновимірних операторів Шредингера із сингулярними збуреннями рангу два та знайти клас точних моделей;
- розв'язати проблему одновимірного атома водню, знайшовши клас гамільтоніанів, що відповідають операторам Шредингера з потенціалами типу Кулона;
- вивчити вплив магнітних потенціалів на граничні точкові взаємодії для операторів Шредингера з одночасним $(a\delta' + b\delta)$-подібним збуренням магнітного і електричного потенціалів;
- побудувати точні моделі і асимптотику спектрів для двовимірних операторів Шредингера із сингулярними збуреннями потенціалів, зосередженими вздовж кривих;

- для операторів Шредингера із залежними від параметра потенціалами знайти умови існування від'ємних власних значень, які поглинаються неперервним спектром при прямуванні параметра до нуля;
- вивчити вплив δ'-подібних збурень вагових функцій на спектри операторів Штурма-Ліувілля, а також вплив збурень вагових функцій в околі замкнених кривих на спектри еліптичних крайових задач.

Об'єктом дослідження були оператори Шредингера із локальними сингулярними збуреннями потенціалів, а також оператори Штурма-Ліувілля та оператори еліптичних крайових задач із сингулярними збуреннями вагових функцій.

Предметом досліджень були умови збіжності сімей самоспряжених операторів в рівномірній та сильній резольвентних топологіях, асимптотика спектрів, умови існування від'ємних власних значень з пороговою поведінкою.

Методи дослідження. У дослідженнях основними були асимптотичні методи для диференціальних рівнянь. В поєднанні з методами теорії операторів і функціонального аналізу вони стали ефективним інструментом вивчення збіжності самоспряжених операторів, конструктивної побудови граничних операторів та асимптотичного опису спектрів.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертації вперше отримані такі наукові результати з теорії точних моделей для операторів Шредингера та спектральної теорії диференціальних операторів:

- математично коректно сформульовано і розв'язано проблему δ'-потенціалу, доведено рівномірну резольвентну збіжність операторів Шредингера зі збуреннями $(a\delta' + b\delta)$-подібними потенціалами, описано клас точкових взаємодій, які виникають у системах з локалізованими диполями, вивчено вплив на точкові взаємодії швидкостей збіжності δ- та δ'-подібних послідовностей;
- доведено, що трактування δ'-потенціалу як збурення скінченного рангу веде до цілковито нової фізичної моделі, описано всі якісно різні випадки граничної поведінки операторів Шредингера із сингулярними локальними збуреннями рангу два, побудовано новий широкий клас точних моделей;
- вперше проблему δ'-потенціалу узагальнено на двовимірний випадок, вивчено асимптотичну поведінку спектрів операторів Шредингера з дипольними збуреннями потенціалів в околі замкнених кривих, конструктивно описано вплив геометрії кривих і резонансів нульової енергії на граничні взаємодії;
- побудовано математичну теорію одновимірного атома водню, знайдено умови збіжність операторів Шредингера з потенціалами типу Кулона, які збурені $(a\delta' + b\delta)$-подібними потенціалами; побудовано клас точних моделей і доведено, що вибір точної моделі критично залежить від форми регуляризації потенціалу Кулона;

- знайдено нові умови існування від'ємних власних значень для одновимірних операторів Шредингера з потенціалами, що мають компактний носій, а також умови, коли ці власні значення поглинає неперервний спектр при деяких порогових сталих взаємодії, побудовано асимптотики таких власних значень;
- побудовано асимптотику спектрів операторів Штурма-Ліувілля з локальними збуреннями вагових функцій та операторів двовимірних еліптичних крайових задач, коли вагові функції збурені в околі замкнених кривих; в обох випадках граничні оператори є несамоспряженими і володіють жордановими ланцюгами довжини 2, що є наслідком сингулярної геометрії вагових просторів Лебега.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в дисертації математичні результати мають безпосередній стосунок до сучасних проблем квантової механіки, а тому можуть знайти застосування у нанотехнологіях, в яких домінує квантова природа процесів.

Особистий внесок здобувача. Наукові результати дисертації автор отримав самостійно. В статі [1] авторові належать розділ 3.1 та леми 6.3, 6.4, в [2] – розділи 2-5, в [3] – розділи 2-5, в [14] розділ 2, а в [15] – розділи 4-6.

Апробація результатів дисертації. За результатами досліджень, що увійшли у дисертацію, зроблені доповіді на таких наукових семінарах і конференціях.

- Workshop "Asymptotic and Numerical Analysis of Structures and Heterogeneous Media". Saint-Petersburg, Russia, December 2000.
- Research seminar on Differential Equations and Homogenization Theory by Prof. M. Lobo and Prof. M. E. Pèrez. University of Cantabria, Spain (2000, 2009).
- Research seminar on Homogenization Theory by Prof. A. Piatnitsky. Narvik University College, Narvik, Norway (2004, 2006, 2010).
- Workshop "Mathematical Techniques for Multiscale-Analysis". Heidelberg University, Heidelberg, Germany, October 2005.
- Research seminar of The Bath Institute for Complex Systems by Prof. V. Smyshlyaev. University of Bath, Bath, United Kingdom, July 2009.
- Research seminar on Partial Differential Equations by Prof. W. Jäger. Heidelberg University, Heidelberg, Germany, June 2010.
- Workshop "Mathematical Challenges of Zero Range Physics: Rigorous Results and Open Problems". Sapienza University, Rome, Italy, July 2018.

- Львівський міжвузівський семінар з функціонального аналізу імені проф. В. Е. Лянце (керівник проф. О. Г. Сторож), Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, березень 2009.
- Київський семінар з функціонального аналізу (керівники професори А. Н. Кочубей, В. А. Михайлець, В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко), Інститут математики НАН України, Київ, листопад 2012.
- Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (керівники професори М. І. Іванчов, П. І. Каленюк, Б. Й. Пташник), Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, (2000–2019).
- *Різдвяні дискусії.* Конференція кафедри теоретичної фізики, Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, грудень 2018 та 2019 рр.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 15 працях у фахових наукових виданнях, серед них 12 статей — у виданнях, які індексуються у наукометричній базі *Scopus*. В переліку — 10 публікацій у журналах, віднесених до першого і другого квартилів (Q1 і Q2) відповідно до класифікації *SCImago Journal and Country Rank*. Такі статті прирівнюються до трьох публікацій, тому загальна кількість публікацій з рейтинговими множниками — 35.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, дев'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Перелік використаних джерел містить 271 бібліографічну позицію. Повний обсяг дисертації становить 339 сторінок, з них 289 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, сформульовано мету і завдання дослідження, визначено об'єкт і предмет дослідження, описано методи дослідження, охарактеризовано наукову новизну і практичне значення одержаних результатів, вказано публікації та апробацію результатів дослідження.

Перший розділ і два наступні стосуються відомої в квантовій механіці проблеми δ'-потенціалу. Вона полягає у побудові точних моделей для локалізованого диполю – потенціалу, породженого парою близько розташованих частинок із зарядами різного знаку. Такий потенціал є поєднанням високої енергетичної стіни і глибокої енергетичної ями, локалізованих в околі однієї точки. Проблема стала предметом наукових дискусій в минулому столітті і довгий час вважали, що вона була розв'язана П. Шебою в середині 80-х років. Проте цей результат виявився помилковим. До того ж саме формулювання проблеми — знайти єдину точну модель для оператора Шредингера з δ'-потенціалом — було математично некоректним. На відміну від δ-потенціалу оператор Шредингера з δ'-потенціалом є чутливим до форми регуляризації. Якщо δ'-потенціал в операторі Шредингера замінити його регуляризацією $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$, то на вибір точної моделі матиме вплив профіль V, а саме, точкові взаємодії залежатимуть від спектральних властивостей оператора Шредингера з потенціалом V. За формальним гамільтоніаном з δ'-потенціалом ховається багатоманіття квантово-механічних процесів з різними властивостями.

В цьому розділі ми досліджували оператори Шредингера

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$$

в просторі $L_2(\mathbb{R})$, які є збуренням оператора $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$ так званою δ'-подібною послідовністю $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\,\cdot)$. Потенціал V_0 є дійсним, локально обмеженим і таким, що оператор H самоспряжений. Функція V – дійсна і обмежена, а ε — додатний параметр. Казатимемо, що оператор $-\frac{d^2}{dx^2}+V$ в $L_2(\mathbb{R})$ володіє *резонансом нульової енергії*, якщо рівняння $-u'' + Vu = 0$ має ненульовий розв'язок, який обмежений на усій прямій. Цей розв'язок називаємо *напівзв'язним станом* оператора. Він єдиний з точність до числового множника.

Нехай підпростір $\mathcal{V}_0$ в $L_2(\mathbb{R})$ складається з функцій f таких, що $f = f_-$ при $x < 0$ і $f = f_+$ при $x > 0$ для деяких f_- і f_+ з $\operatorname{dom} H$. Нехай $\mathcal{V}_-$ та $\mathcal{V}_+$ — підпростори в $L_2(\mathbb{R}_-)$ та $L_2(\mathbb{R}_+)$ відповідно, які містять звуження елементів простору $\mathcal{V}_0$ на відповідні півосі. Введемо оператори

$$S_\theta = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0, \quad \operatorname{dom} S_\theta = \{f \in \mathcal{V}_0 \colon f(+0) = \theta f(-0),\ \theta f'(+0) = f'(-0)\},$$
$$\mathcal{D}^\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0, \quad \operatorname{dom} \mathcal{D}^\pm = \{f \in \mathcal{V}_\pm \colon f(0) = 0\}$$

і сформулюємо основний результат підрозділу 1.2. Тут і надалі $R_\lambda(A) = (A-\lambda)^{-1}$ – резольвента оператора A.

Теорема 1.1. *Для кожного потенціалу V з компактним носієм оператори H_ε збігаються в сенсі рівномірної резольвентної збіжності при $\varepsilon \to 0$.*

Якщо оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ володіє резонансом нульової енергії з напівзв'язним станом u, то граничним для сім'ї H_ε є оператор S_θ з параметром $\theta = u^+/u^-$, де $u^\pm = \lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)$. Коли ж потенціал V не має резонансу нульової енергії, то оператори H_ε збігаються до прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$.

В обох випадках для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ справедливі нерівності

$$\|R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(S_\theta)\| \leqslant C\varepsilon^{1/2}, \qquad \|R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)\| \leqslant C\varepsilon^{1/2}$$

зі сталою C, незалежною від ε.

Збіжність операторів H_ε не пов'язана зі збіжністю потенціалів $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ в просторі узагальнених функцій. Збурення мають границю в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ лише для профілів V з нульовим середнім. Цей результат відрізняється від результату П. Шеби важливими з погляду фізики резонансами, які він не помітив. Потенціали з резонансом нульової енергії не є чимось рідкісним. *Резонансною множиною* $\mathcal{R}(V)$ потенціалу V назвемо множину дійсних α, для яких оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha V$ має резонанс нульової енергії.

Лема 1.4. *Нехай потенціал V має компактний і зв'язний носій. Тоді $\mathcal{R}(V)$ є зліченною множиною без скінченних граничних точок. Якщо V змінює знак, то $\mathcal{R}(V)$ завжди має дві граничні точки $\alpha = -\infty$ та $\alpha = +\infty$.*

Стаціонарна задача розсіювання на потенціалі $\alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ полягає у знаходженні *коефіцієнта відбиття* $R_\varepsilon(\alpha, k)$ та *коефіцієнта проникнення* $T_\varepsilon(\alpha, k)$. Квадрати модулів цих величин мають сенс ймовірностей відбиття та проникнення частинок через потенціал, бо $|R_\varepsilon(\alpha,k)|^2 + |T_\varepsilon(\alpha,k)|^2 = 1$. Треба знайти розв'язок y_ε рівняння $-y'' + \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)y = k^2 y$, який має вигляд $y_\varepsilon(x) = e^{ikx} + R_\varepsilon(\alpha,k)e^{-ikx}$ зліва від носія збурення та $y_\varepsilon(x) = T_\varepsilon(\alpha,k)e^{ikx}$ – справа, де $\operatorname{Im} k \geqslant 0$.

Ми отримали асимптотику коефіцієнтів $R_\varepsilon(\alpha,k)$ та $T_\varepsilon(\alpha,k)$. Зокрема, при $\varepsilon k \to 0$ маємо, що $T_\varepsilon(\alpha,k) = O(\varepsilon k)$, коли $\alpha \notin \mathcal{R}(V)$, та

$$T_\varepsilon(\alpha,k) = \frac{2\theta_\alpha}{1+\theta_\alpha^2} + O(\varepsilon^2 k^2),$$

коли $\alpha \in \mathcal{R}(V)$. Тут $\theta\colon \mathcal{R}(V) \to \mathbb{R}$ — функція на резонансній множині, де $\theta(\alpha) = \theta_\alpha = u_\alpha^+/u_\alpha^-$ і u_α – напівзв'язний стан. На рис. 1 зображено графік ймовірності проникнення $|T_\varepsilon(\alpha,k)|^2$ як функції сталої взаємодії α. Графік має шпилясту структуру, а ймовірність суттєво відмінна від нуля в околах точок резонансної множини. У випадку резонансу частинки проникають через потенціал $\alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ з ймовірністю, близькою до числа $|T(\alpha,k)|^2 = 4\theta_\alpha^2(1+\theta_\alpha^2)^{-2}$, яке не залежать від енергії частинок k^2. Рисунок 1 реабілітує δ'-потенціал, який багато років вважали абсолютно непроникним.

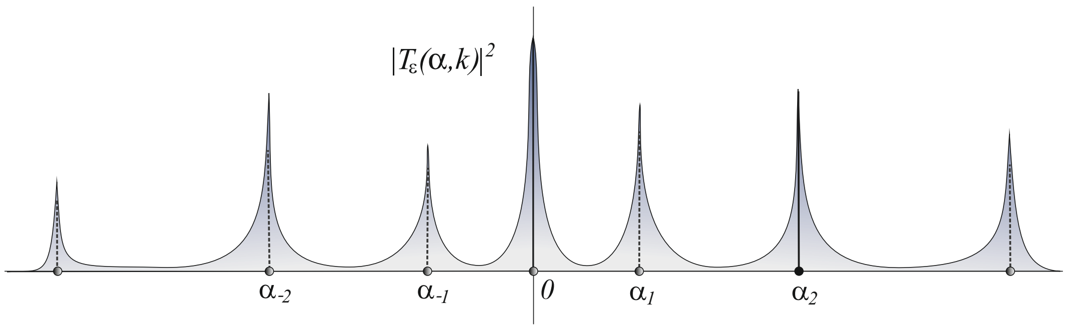

Рис. 1: Резонанси у ймовірності проникнення через потенціал $\alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$.

В підрозділі 1.3 ці результати узагальнені на потенціали V класу Фаддєєва-Марченка, які задовольняють умову $\int_{\mathbb{R}}(1+|x|)|V(x)|\,dx < \infty$. Відсутність компактного носія потенціалу V не впливає на вигляд граничних операторів, проте змінює і значно ускладнює техніку доведень, яка тепер спирається на властивості та тонкі асимптотики розв'язків Йоста. Також немає кваліфікованої оцінки для різниці резольвент в усьому класі Фаддєєва-Марченка.

Теорема 1.2. *Нехай V — дійснозначний потенціал з класу Фаддеєва-Марченка. Тоді сім'я операторів Шредингера $H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ збігається в сенсі рівномірної резольвентної збіжності при $\varepsilon \to 0$. При відсутності резонансу граничний оператор є прямою сумою $\mathcal{D}_0^- \oplus \mathcal{D}_0^+$. Якщо V має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u, то H_ε збігаються до оператор $S_{0,\theta}$ з параметром $\theta = u^+/u^-$. Тут $\mathcal{D}_0^\pm$ і $S_{0,\theta}$ – це оператори $\mathcal{D}^\pm$ і S_θ при $V_0 = 0$.*

Цей результат справедливий і для незбуреного оператора $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$ з потенціалом V_0 при умові, що він не змінює асимптотик розв'язків Йоста при $|x| \to \infty$, побудованих для потенціалу V.

Теорема 1.5. *Нехай V_0 та V — дійснозначні функції, причому V_0 є обмеженою і з компактним носієм, а V належить до класу Фаддеєва-Марченка. Тоді сім'я операторів $H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ збігається в сенсі рівномірної резольвентної збіжності при $\varepsilon \to 0$. При відсутності резонансу граничний оператор сім'ї H_ε є прямою сумою $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$. Якщо V має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u, то H_ε збігаються до S_θ з параметром $\theta = u^+/u^-$.*

Бачимо, що формальні вирази $-\frac{d^2}{dx^2} + V_0 + \alpha\delta'$ є лише символічним позначенням класу фізичних процесів з різними властивостями. Насправді вибір точної моделі – гамільтоніана в класі точкових взаємодій – є неоднозначним і залежить від спектральних властивостей профілю V. В **розділі 2** ми досліджували взаємодію δ-подібних та δ'-подібних потенціалів і довели, що на вибір точної моделі впливають не лише профілі збурень, але й швидкості їх локалізації. Розглянемо в просторі $L_2(\mathbb{R})$ сім'ю операторів Шредингера

$$H_{\varepsilon,\nu} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 + \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot) + \beta\nu^{-1}U(\nu^{-1}\cdot),$$

які можна трактувати як регуляризацію формального виразу $-\frac{d^2}{dx^2} + V_0 + \alpha\delta' + \beta\delta$. Окрім дійсних сталих взаємодії α і β регуляризовані потенціали також містять два додатні параметри ε і ν. Потенціал V_0 є локально обмеженим, дійснозначним і таким, що незбурений оператор $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$ самоспряжений. Функції V та U — обмежені, дійснозначні та з компактними носіями.

Нехай $S(a,b)$ — оператор, що діє за правилом $S(a,b)v = -v'' + V_0 v$ на функціях з класу $\mathcal{V}_0$, які в початку координат підпорядковані умовам

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix}.$$

Для спрощення формул використовуємо позначення $v_\pm = v(\pm 0)$, $v'_\pm = v'(\pm 0)$.

Якщо параметри ε та ν прямують одночасно до нуля, то для збіжності сім'ї операторів $H_{\varepsilon,\nu}$ достатньо, щоб відношення ν/ε мало скінченну чи нескінченну границю. Спершу розглянемо ситуацію, коли δ'-подібна послідовність локалізується при $\varepsilon \to 0$ швидше, ніж δ-подібна послідовність при $\nu \to 0$.

Теорема 2.1. *Нехай $\varepsilon^{-1}\nu \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$ та $\nu \to 0$. Якщо $\alpha \in \mathcal{R}(V)$, то сім'я операторів $H_{\varepsilon,\nu}$ збігається до оператора $S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha)$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де*

$$\zeta_\alpha = \theta_\alpha \int_{\mathbb{R}_+} U\,dx + \theta_\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}_-} U\,dx.$$

Крім того, виконується нерівність $\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(S)\| \leqslant C_1(\nu^{1/2} + \varepsilon\nu^{-1})$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Якщо ж $\alpha \notin \mathcal{R}(V)$, то $H_{\varepsilon,\nu} \to \mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ при $\nu \to 0$ та $\varepsilon \to 0$, причому $\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)\| \leqslant C_2\nu^{1/2}$.

Тепер розглянемо випадок, коли швидкості локалізації δ'-подібної та δ-подібної послідовностей є однакового порядку малості.

Теорема 2.2. *Нехай $\varepsilon^{-1}\nu \to \omega$ при $\varepsilon \to 0$, $\nu \to 0$ і $\omega > 0$. Якщо $\alpha \in \mathcal{R}(V)$ і u_α є напівзв'язним станом $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha V$, то сім'я операторів $H_{\varepsilon,\nu}$ збігається до оператора $S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha)$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де*

$$\zeta_\alpha = \theta_\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} U(x) u_\alpha^2(\omega x)\,dx.$$

До того ж $\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(S)\| \leqslant C_1(\varepsilon^{1/2} + |\varepsilon^{-1}\nu - \omega|)$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Якщо ж $\alpha \notin \mathcal{R}(V)$, то граничним оператором для сім'ї $H_{\varepsilon,\nu}$ є пряма сума $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$, причому $\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)\| \leqslant C_2\varepsilon^{1/2}$.

Нарешті розглянемо збурення, в якому δ'-подібна послідовність повільніше локалізується в початку координат при $\varepsilon \to 0$, ніж δ-подібна при $\nu \to 0$.

Теорема 2.3. *Нехай $\varepsilon^{-1}\nu$ прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$ та $\nu \to 0$. Якщо $\alpha \in \mathcal{R}(V)$, то $H_{\varepsilon,\nu}$ збігаються в рівномірній резольвентній топології до $S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha)$, де*

$$\zeta_\alpha = \theta_\alpha^{-1} u_\alpha^2(0) \int_{\mathbb{R}} U\,dx.$$

Крім того, $\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(S)\| \leqslant C_1(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1}\nu)$ для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. В іншому випадку $H_{\varepsilon,\nu}$ збігаються до $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$, причому $\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)\| \leqslant C_2\varepsilon^{1/2}$.

Псевдопотенціали, які є узагальненими функціями з точковими носіями, часто розуміють як збурення скінченного рангу. Наприклад, δ'-потенціал є збуренням рангу два, бо $\delta'(x)y(x) = y(0)\delta'(x) - y'(0)\delta(x)$. В **розділі 3** ми вивчали поведінку інтегро-диференціальних операторів

$$\mathcal{H}_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 + \varepsilon^{-3}K_\varepsilon + \varepsilon^{-1}q(\varepsilon^{-1}x),$$

де K_ε – сім'я операторів рангу два

$$(K_\varepsilon\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\bar{g}(\varepsilon^{-1}t)f(\varepsilon^{-1}x) + \bar{f}(\varepsilon^{-1}t)g(\varepsilon^{-1}x)\right)\phi(t)\,dt,$$

породжена парою функцій f і g з компактними носіями.

Як і у попередніх розділах, на структуру граничних точкових взаємодій мають вплив резонанси нульової енергії операторів, пов'язаних із локальними збуреннями. Нехай $T = -\frac{d^2}{dx^2} + \langle g, \cdot\rangle f + \langle f, \cdot\rangle g$ – самоспряжений оператор в $L_2(\mathbb{R})$ з областю визначення $\operatorname{dom} T = W_2^2(\mathbb{R})$. Тут $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток в $L_2(\mathbb{R})$, а $\|\cdot\|$ – відповідна норма. Оператор T володіє резонансом нульової енергії, якщо існує ненульовий розв'язок рівняння $-u'' + \langle g, u\rangle f + \langle f, u\rangle g = 0$, який обмежений на всій дійсній осі. Цей розв'язок називаємо напівзв'язним станом. Дотепер простір напівзв'язних станів був одновимірним. Для оператора T цей простір може бути і двовимірним. Введемо позначення

$$h_0 = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx, \quad h_1 = \int_{\mathbb{R}} xh(x)\,dx, \quad h^{(-k)}(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{-\infty}^{x} (x-t)^{k-1} h(t)\,dt.$$

Нехай $\pi = \|f^{(-1)}\| \cdot \|g^{(-1)}\| - |\langle f^{(-1)}, g^{(-1)}\rangle + 1|$.

Лема 3.1. *Оператор T має резонанс нульової енергії тоді і лише тоді, коли величина $\lambda = \|g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}\|^2 - 2\operatorname{Re}(f_0\bar{g}_0)$ дорівнює нулю.*

- *Якщо $\lambda = 0$ і $f_0 g_0 \neq 0$, то цей напівзв'язний стан має вигляд*

$$\sigma = |g_0|^2\left(\bar{f}_0 f^{(-2)} - \langle f, f^{(-2)}\rangle\right) - |f_0|^2\left(\bar{g}_0 g^{(-2)} - \langle g, g^{(-2)}\rangle\right). \tag{1}$$

- *Якщо $f_0 = 0$, $g_0 = 0$ і $\pi \neq 0$, то напівзв'язним станом є стала функція.*
- *Якщо $f_0 = 0$, $g_0 = 0$ і $\pi = 0$, то існують два лінійно незалежні напівзв'язні стани оператор T, а саме, стала функція і функція вигляду*

$$\omega = e^{i\arg\vartheta}\|g^{(-1)}\|\, f^{(-2)} - \|f^{(-1)}\|\, g^{(-2)},$$

де $\vartheta = \arg(\langle f^{(-1)}, g^{(-1)}\rangle + 1)$.

Число λ скінченне, бо $g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}$ має компактний носій як первісна функції з нульовим середнім. Величина π та функція ω коректно визначені лише для f і g з нульовим середнім. Нехай $\varkappa = \lim\limits_{x\to+\infty} \omega(x)$, $\sigma_\pm = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sigma(x)$, а також

$$\sigma_* = \int_{\mathbb{R}} q(t)|\sigma(t)|^2\,dt, \;\; a_0 = \int_{\mathbb{R}} q(t)\,dt, \;\; a_1 = \int_{\mathbb{R}} q(t)\omega(t)\,dt, \;\; a_2 = \int_{\mathbb{R}} q(t)|\omega(t)|^2\,dt.$$

Позначимо через $\mathcal{H}$ оператор, що діє за правилом $\mathcal{H}\,v = -v'' + V_0 v$ на функції $v \in \mathcal{V}_0$, які в нулі підпорядковані умовам спряження

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = e^{i\varphi}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix}.$$

Цей оператор є самоспряженим, коли $\varphi, c_{kl} \in \mathbb{R}$ та $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1$.

Перший результат стосується такої поведінки операторів $\mathcal{H}_\varepsilon$, коли в границі виникають зв'язані точкові взаємодії.

Теорема 3.1. *Нехай f і g — комплекснозначні функції з компактними носіями, які належать до простору $L_2(\mathbb{R})$ і лінійно незалежні. Дійснозначна функція q є обмеженою і має компактний носій.*

- *Якщо $f_0 = 0$, $g_0 = 0$, $\pi = 0$ та $a_2 \neq \overline{\varkappa} a_1$, то оператори $\mathcal{H}_\varepsilon$ збігаються в рівномірній резольвентній топології при $\varepsilon \to 0$ до оператора $\mathcal{H}$, породженого умовами спряження*

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_+' \end{pmatrix} = e^{i\arg(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)} \begin{pmatrix} \dfrac{|\varkappa|^2 a_0 - 2\mathrm{Re}(\overline{\varkappa} a_1) + a_2}{|a_2 - \overline{\varkappa} a_1|} & \dfrac{|\varkappa|^2}{|a_2 - \overline{\varkappa} a_1|} \\ \dfrac{a_0 a_2 - |a_1|^2}{|a_2 - \overline{\varkappa} a_1|} & \dfrac{a_2}{|a_2 - \overline{\varkappa} a_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v_-' \end{pmatrix}.$$

- *Нехай $\lambda = 0$, $f_0 g_0 \neq 0$ та $\sigma_- \sigma_+ \neq 0$. Тоді $\mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{H}$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де функції $v \in \operatorname{dom} \mathcal{H}$ задовольняють умови*

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_+' \end{pmatrix} = e^{-i\arg\sigma_-} \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_+}{|\sigma_-|} & 0 \\ \dfrac{\sigma_*}{\sigma_+ |\sigma_-|} & \dfrac{|\sigma_-|}{\sigma_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v_-' \end{pmatrix}.$$

  В цьому разі число σ_+ дійсне, а тому оператор $\mathcal{H}$ – самоспряжений.

- *Нехай $f_0 = 0$, $g_0 = 0$ і виконується одна із умов: або $\pi \neq 0$, або $\pi = 0$, $\varkappa = 0$, $a_1 = 0$ і $a_2 = 0$. Тоді резольвенти $\mathcal{H}_\varepsilon$ збігаються за нормою при $\varepsilon \to 0$ до резольвенти оператора $\mathcal{H}$, визначеного умовами спряження*

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v_+' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v_-' \end{pmatrix}.$$

В наступній теоремі зібрані випадки розділених умов, коли граничний оператор є прямою сумою операторів, які діють незалежно на півосях. Для дійсних μ введемо оператори $\mathcal{R}_\mu^\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$, $\operatorname{dom} \mathcal{R}_\mu^\pm = \{v \in \mathcal{V}_\pm \colon v'(0) = \mu v(0)\}$.

Теорема 3.2. *Нехай f і g — лінійно незалежні комплекснозначні функції в $L_2(\mathbb{R})$ з компактними носіями, а q – дійснозначна, обмежена і з компактним носієм.*

- *Якщо $f_0 = 0$, $g_0 = 0$, $\pi = 0$, $\varkappa \neq 0$ і $a_2 = \overline{\varkappa} a_1$, то $\mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{R}_{\mu_-}^- \oplus \mathcal{R}_{\mu_+}^+$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де $\mu_- = |\varkappa|^{-2} a_2 - a_0$ і $\mu_+ = |\varkappa|^{-2} a_2$.*

- *Якщо $\lambda = 0$, $f_0 g_0 \neq 0$, $f_1 g_0 \neq f_1 g_0$ і $\sigma_- \sigma_+ = 0$, то при $\varepsilon \to 0$*

$$\mathcal{H}_\varepsilon \to \begin{cases} \mathcal{D}^- \oplus \mathcal{R}_{\nu_+}^+, & \text{коли } \sigma_- = 0, \\ \mathcal{R}_{\nu_-}^- \oplus \mathcal{D}^+, & \text{коли } \sigma_+ = 0 \end{cases}$$

  в рівномірній резольвентній топології, де $\nu_- = -\sigma_* |\sigma_-|^{-2}$ і $\nu_+ = \sigma_* |\sigma_+|^{-2}$. В цьому разі числа σ_- і σ_+ не можуть бути нулями одночасно.

- *Оператори $\mathcal{H}_\varepsilon$ збігаються до прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ в рівномірній резольвентній топології, якщо виконується один з наборів умов: або $\lambda \neq 0$, або $\lambda = 0$, $f_0 g_0 \neq 0$, $f_0 g_1 = f_1 g_0$, $\sigma_- = 0$ і $\sigma_+ = 0$, або ж $f_0 = 0$, $g_0 = 0$, $\pi = 0$, $\varkappa = 0$, $a_2 = 0$ і $a_1 \neq 0$.*

Теореми 3.1 і 3.2 описують всеможливі випадки граничної поведінки сім'ї операторів $\mathcal{H}_\varepsilon$, причому усі ці випадки реалізуються для деяких f, g та q.

Теорема 3.3. *Нехай функції f, g і q такі, як в теоремі 3.1. Тоді сім'я операторів $\mathcal{H}_\varepsilon$ збігається в рівномірній резольвентній топології і для всіх $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ виконується оцінка $\|R_\zeta(\mathcal{H}_\varepsilon) - R_\zeta(\mathcal{H}_0)\| \leqslant C\varepsilon^{1/2}$, де граничний оператор $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(f, g, q)$ описаний в теоремах 3.1 і 3.2.*

У **розділі 4** ми вивчали оператори Шрединґера з одночасним локальним збуренням як електричного, так і магнітного потенціалів. Вплив сингулярних магнітних полів на точні моделі суттєво відрізняється від впливу неперервних полів, які можна виключити калібруванням. Розглянемо сім'ю операторів

$$\mathcal{M}_{\varepsilon,\nu} = \Big(i\,\frac{d}{dx} + b^\varepsilon\Big)^2 + V_0 + \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot) + \beta\nu^{-1}U(\nu^{-1}\cdot)$$

з магнітним потенціалом $b^\varepsilon = \varepsilon^{-2}b_1(\varepsilon^{-1}\cdot) + \varepsilon^{-1}b_0(\varepsilon^{-1}\cdot)$, де b_0 і b_1 – абсолютно неперервні функції з компактним носієм. Решта потенціалів такі ж, як в розділі 2.

Теорема 4.1. *Нехай послідовність потенціалів b^ε є збіжною в просторі узагальнених функцій, а числова додатна послідовність $\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є такою, що $\nu_\varepsilon \to 0$ і відношення $\varepsilon^{-1}\nu_\varepsilon$ має скінченну чи нескінченну границю при $\varepsilon \to 0$.*

Якщо $\alpha \in \mathcal{R}(V)$, то оператори $\mathcal{M}_{\varepsilon\nu_\varepsilon}$ збігаються при $\varepsilon \to 0$ в сильній резольвентній топології. Граничний оператор $\mathcal{M}$ діє за правилом $\mathcal{M}v = -v'' + V_0 v$ на функціях з класу $\mathcal{V}_0$, які підпорядковані в нулі умовам спряження

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = e^{i\mu} \begin{pmatrix} \theta_\alpha & 0 \\ \beta\zeta_\alpha & \theta_\alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix}.$$

Тут $\mu = \int_{\mathbb{R}} b_0\,dx$, а величини θ_α і ζ_α визначені в теоремах 2.1–2.3 залежно від границі відношення $\varepsilon^{-1}\nu_\varepsilon$. Якщо ж $\alpha \notin \mathcal{R}(V)$, то $\mathcal{M}_{\varepsilon\nu_\varepsilon} \to \mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ в сенсі сильної резольвентної збіжності.

Тепер розглянемо сім'ю самоспряжених операторів

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \Big(i\,\frac{d}{dx} + \varepsilon^{-1}b(\varepsilon^{-1}\cdot)\Big)^2 + V_0 + \varepsilon^{-3}\,K_{\alpha,\varepsilon} + \beta\varepsilon^{-1}q(\varepsilon^{-1}\cdot),$$

де b — абсолютно неперервна функція з компактним носієм, а

$$(K_{\alpha,\varepsilon}\phi)(x) = \bar\alpha\langle g(\varepsilon^{-1}\cdot), \phi\rangle\, f(\varepsilon^{-1}x) + \alpha\langle f(\varepsilon^{-1}\cdot), \phi\rangle\, g(\varepsilon^{-1}x)$$

— оператор рангу два в просторі $L_2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Функції f, g та q мають такі ж властивості, як в теоремі 3.1. Через $\mathcal{R}(f,g)$ позначимо множину усіх комплексних чисел α, для яких інтегро-диференціальний оператор

$$K_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \overline{\alpha}\,\langle g, \cdot\rangle\, f(x) + \alpha\,\langle f, \cdot\rangle\, g(x)$$

володіє резонансом нульової енергії. З огляду на лему 3.1 ця множина може містити три підмножини. Нехай $\mathcal{R}_c(f,g)$ — множина усіх сталих взаємодії, при яких оператор K_α має простий резонанс нульової енергії зі сталою функцією як напівзв'язним станом; $\mathcal{R}_\sigma(f,g)$ — множина усіх значень α, при яких оператор K_α має простий резонанс з напівзв'язним станом σ вигляду (1); $\mathcal{R}_\omega(f,g)$ — множина сталих взаємодії, для яких оператор володіє резонансом кратності 2.

Введемо позначення $n_f = \|f^{(-1)}\|$, $n_g = \|g^{(-1)}\|$ і $p = \langle f^{(-1)}, g^{(-1)}\rangle$.

Лема 4.3. *Нехай f та g — лінійно незалежні функції в $L_2(\mathbb{R})$, які мають компактні носії.*

- *Якщо $f_0 g_0 \neq 0$, то $\mathcal{R}(f,g) = \mathcal{R}_\sigma(f,g) = \{\alpha \in \mathbb{C}\colon |\alpha - \alpha_0| = |\alpha_0|\}$, де $\alpha_0 = f_0\overline{g_0}\,\|g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}\|^{-2}$, тобто резонансною множиною є коло на площині $\mathbb{C}$ з центром в точці α_0, яке проходить через початок координат.*
- *Якщо $f_0 = 0$ і $g_0 = 0$, то $\mathcal{R}(f,g) = \mathbb{C}$, причому $\mathcal{R}(f,g) = \mathcal{R}_c(f,g) \cup \mathcal{R}_\omega(f,g)$. Множина подвійних резонансів є колом $\mathcal{R}_\omega(f,g) = \{\alpha \in \mathbb{C}\colon |\alpha - \alpha_1| = \rho\}$, де $\alpha_1 = \bar{p}(n_f^2 n_g^2 - |p|^2)^{-1}$ та $\rho = n_f n_g (n_f^2 n_g^2 - |p|^2)^{-1}$.*
- *Якщо лише одна з величин f_0 чи g_0 відмінна від нуля, то $\mathcal{R}(f,g) = \{0\}$.*

Оператор $\mathcal{T}_\varepsilon$ унітарно еквівалентний оператору

$$\mathcal{H}_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \varepsilon^{-3}\big(\bar{\alpha}\langle g_b(\varepsilon^{-1}\,\cdot), \cdot\rangle\, f_b(\tfrac{x}{\varepsilon}) + \alpha\langle f_b(\varepsilon^{-1}\,\cdot), \cdot\rangle\, g_b(\tfrac{x}{\varepsilon})\big) + \beta\varepsilon^{-1} q(\tfrac{x}{\varepsilon}),$$

де $f_b = e^{-iB} f$, $g_b = e^{-iB} g$ і $B(x) = \int_{-\infty}^{x} b(t)\,dt$. Бачимо, що $\mathcal{H}_\varepsilon$ "пам'ятає" про магнітний потенціал b, оскільки оператор K_α на відміну від потенціальних доданків не є інваріантним відносно калібрування. Введемо позначення, пов'язані з перетвореним оператором рангу два:

$$\omega_{\alpha,b} = e^{i \arg(\alpha^{-1} + \langle f_b^{(-1)}, g_b^{(-1)}\rangle)} \|g_b^{(-1)}\|\, f_b^{(-2)} - \|f_b^{(-1)}\|\, g_b^{(-2)}, \quad \varkappa = \lim_{x\to+\infty} \omega_{\alpha,b}(x),$$

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} b\,dx, \quad m_{b,f} = \int_{\mathbb{R}} e^{-iB} f\,dx, \quad m_{b,g} = \int_{\mathbb{R}} e^{-iB} g\,dx, \tag{2}$$

$$a_0 = \int_{\mathbb{R}} q dx, \quad a_1 = \int_{\mathbb{R}} q\omega_{\alpha,b}\,dx, \quad a_2 = \int_{\mathbb{R}} q|\omega_{\alpha,b}|^2\,dx.$$

Теорема 4.2. *Нехай для лінійно незалежних в $L_2(\mathbb{R})$ функцій f і g виконуються умови: $\alpha \in \mathcal{R}_\omega(e^{-iB} f, e^{-iB} g)$, $m_{b,f} = 0$, $m_{b,g} = 0$, $a_2 \neq \bar{\varkappa} a_1$ та $\beta \neq 0$. Тоді оператори $\mathcal{T}_\varepsilon$ збігаються при $\varepsilon \to 0$ в сильній резольвентній топології до оператора*

$\mathcal{T}$, що діє за правилом $\mathcal{T}v = -v'' + V_0 v$ на функціях з $\mathcal{V}_0$, які підпорядковані в початку координат умовам

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = e^{i\vartheta} \begin{pmatrix} \dfrac{a_0|\varkappa|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{\varkappa} a_1) + a_2}{|a_2 - \overline{\varkappa} a_1|} & \dfrac{|\varkappa|^2}{\beta|a_2 - \overline{\varkappa} a_1|} \\ \dfrac{\beta(a_0 a_2 - |a_1|^2)}{|a_2 - \overline{\varkappa} a_1|} & \dfrac{a_2}{|a_2 - \overline{\varkappa} a_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix}.$$

Тут $\vartheta = \mu + \arg(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)$, а решта величин визначені формулами (2).

Через неінваріантність K_α відносно калібрувальних перетворень функція $\omega_{\alpha,b}$ і величини a_1, a_2, $\varkappa$ залежать від магнітного потенціалу b. Тому отримані точкові взаємодії схематично можна записати так

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = e^{i\mu(b)} \begin{pmatrix} c_{11}(b) & c_{12}(b) \\ c_{21}(b) & c_{22}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix},$$

акцентуючи на залежності від потенціала b не лише фазового множника.

Якщо $\alpha \in \mathcal{R}_\sigma(f_b, g_b)$, то напівзв'язний стан має вигляд

$$\sigma_b(x) = |m_{b,g}|^2 \Big(\overline{m}_{b,f} f_b^{(-2)}(x) - \langle f_b, f_b{}^{(-2)} \rangle\Big) - |m_{b,f}|^2 \Big(\overline{m}_{b,g} g_b^{(-2)}(x) - \langle g_b, g_b{}^{(-2)} \rangle\Big),$$

коли $\alpha \neq 0$, і $\sigma_b(x) = 1$, коли $\alpha = 0$. Нехай $\sigma_b^\pm = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sigma_b(x)$ і $\sigma_* = \int_{\mathbb{R}} q|\sigma_b|^2\,dx$.

Теорема 4.3. *Нехай для лінійно незалежних в $L_2(\mathbb{R})$ функцій f і g виконуються умови: $\alpha \in \mathcal{R}_\sigma(e^{-iB}f, e^{-iB}g)$, $m_{b,f} m_{b,g} \neq 0$, $\sigma_-\sigma_+ \neq 0$. Тоді сім'я операторів $\mathcal{T}_\varepsilon$ збігається при $\varepsilon \to 0$ в сильній резольвентній топології до оператора $\mathcal{T}$, де $\mathcal{T}v = -v'' + V_0 v$ і функції $v \in \mathcal{V}_0$ задовольняють умови*

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = e^{\mu - i\arg\sigma_-} \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_+}{|\sigma_-|} & 0 \\ \dfrac{\beta\sigma_*}{\sigma_+|\sigma_-|} & \dfrac{|\sigma_-|}{\sigma_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.4. *Нехай f і g — лінійно незалежні функції в $L_2(\mathbb{R})$, числа $m_{b,f}$ і $m_{b,g}$ дорівнюють нулеві та виконується одна із умов: або $\alpha \notin \mathcal{R}_\omega(e^{-iB}f, e^{-iB}g)$, або ж $\alpha \in \mathcal{R}_\omega(e^{-iB}f, e^{-iB}g)$, $\varkappa = 0$, $a_1 = 0$ і $a_2 = 0$. Тоді $\mathcal{T}_\varepsilon \to \mathcal{T}$ в сенсі сильної резольвентної збіжності, де $\mathcal{T}v = -v'' + V_0 v$, а функції $v \in \operatorname{dom}\mathcal{T}$ задовольняють умови*

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = e^{i\int_{\mathbb{R}} b\,dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta\int_{\mathbb{R}} q\,dt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix}.$$

В **розділі 5** встановлено умови існування від'ємних власних значень для одновимірних операторів Шредингера та умови, при яких ці власні значення поглинає неперервний спектр, коли стала взаємодії прямує до нуля. Ці результатів пов'язані з існуванням резонансів нульової енергії, а деякі з них випливають з рівномірної резольвентної збіжності операторів $H_{\varepsilon,\nu}$ з розділу 2. В підрозділі 5.1 ми вивчали спектральні властивості операторів Шредингера

$$H_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \lambda\alpha_\lambda U(\alpha_\lambda x), \qquad \operatorname{dom} H_\lambda = W_2^2(\mathbb{R}),$$

де U і V — дійсні потенціали класу $L^\infty(\mathbb{R})$ з компактним носієм, та $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda>0}$ — послідовність дійсних додатних чисел. Оператора H_λ має неперервний спектр $[0,\infty)$ і можливо ще від'ємні власні значення. Якщо для всіх $\lambda > 0$ існує від'ємне власне значення e_λ оператора H_λ таке, що $e_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, то $\lambda = 0$ називаємо *пороговим значенням* сталої взаємодії. Про власне значення e_λ кажемо, що воно має *порогову поведінку* при $\lambda \to 0$.

Надалі вважатимемо, що напівзв'язні стани u оператора $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ нормовані умовою $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 1$. Нехай $\theta = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

Теорема 5.1. *Нехай оператор H_0 має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u. Якщо при $\lambda \to 0$ виконується одна з умов*

- *$\alpha_\lambda \to 0$, $\lambda^{-1}\alpha_\lambda \to \infty$ та $\int_{\mathbb{R}_-} U\,dx + \theta^2 \int_{\mathbb{R}_+} U\,dx < 0$;*
- *$\alpha_\lambda \to \alpha$ для деякого додатного α та $\int_{\mathbb{R}} U(\alpha x)u^2(x)\,dx < 0$;*
- *$\alpha_\lambda \to +\infty$, $u(0) \neq 0$ та $\int_{\mathbb{R}} U\,dx < 0$,*

то значення $\lambda = 0$ є пороговим для $H_\lambda = H_0 + \lambda\alpha_\lambda U\big(\alpha_\lambda x\big)$. Крім того, порогове власне значення володіє асимптотикою $e_\lambda = -\lambda^2(k^2 + o(1))$ при $\lambda \to 0$, де

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{\theta^2+1}\int_{\mathbb{R}_-} U\,dx + \frac{\theta^2}{\theta^2+1}\int_{\mathbb{R}_+} U\,dx, \quad \textit{коли } \alpha_\lambda \to 0;\\
k &= \frac{\alpha}{\theta^2+1}\int_{\mathbb{R}} U(\alpha x)u^2(x)\,dx, \quad \textit{коли } \alpha_\lambda \to \alpha \textit{ і } \alpha > 0;\\
k &= \frac{u^2(0)}{\theta^2+1}\int_{\mathbb{R}} U\,dx, \quad \textit{коли } \alpha_\lambda \to +\infty.
\end{aligned}$$

Наслідок 5.1. *Нехай $V = 0$. Якщо $\int_{\mathbb{R}} U\,dx < 0$ і послідовність α_λ має границю при $\lambda \to 0$ (скінченну чи нескінченну), то оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\alpha_\lambda U(\alpha_\lambda\cdot)$ володіє від'ємним власним значенням e_λ з пороговою поведінкою*

$$e_\lambda = -\frac{\lambda^2}{4}\left(\int_{\mathbb{R}} U\,dx\right)^2 + o(\lambda^2), \quad \lambda \to 0.$$

Наслідок 5.2. *Якщо* $u(0) \neq 0$ *і* $\int_{\mathbb{R}} U\,dx < 0$, *то число* $\lambda = 0$ *є пороговим значенням для операторів*

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \frac{1}{\lambda^{\varkappa-1}}\,U\left(\frac{x}{\lambda^{\varkappa}}\right), \quad \varkappa \geqslant 1.$$

Відповідне власне значення має асимптотику

$$e_\lambda = -\lambda^2\left(\frac{u^2(0)}{\theta^2+1}\int_{\mathbb{R}} U\,dx\right)^2 + o(\lambda^2), \quad \lambda \to 0.$$

Теорема 5.1 описує поглинання власних значень неперервним спектром зі швидкістю $O(\lambda^2)$. При певних умовах така абсорбція можлива і з більшою швидкістю.

Теорема 5.2. *Нехай* $U \in W_2^1(\mathbb{R})$, $\alpha_\lambda \to \alpha$, $(\alpha_\lambda - \alpha)\lambda^{-1/3} \to \infty$ *при* $\lambda \to 0$, *де* $\alpha > 0$, *а* H_0 *має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом* u. *Якщо*

$$\int_{\mathbb{R}} U(\alpha x)\,u^2(x)\,dx = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} xU'(\alpha x)\,u^2(x)\,dx < 0,$$

то оператор $H_\lambda = H_0 + \lambda\alpha_\lambda U\big(\alpha_\lambda x\big)$ *має від'ємне власне значення* e_λ *з пороговою поведінкою*

$$e_\lambda = -\lambda^2(\alpha_\lambda - \alpha)^2\bigg(\Big(\frac{\alpha}{\theta^2+1}\int_{\mathbb{R}} xU'(\alpha x)\,u^2(x)\,dx\Big)^2 + o(1)\bigg), \quad \lambda \to 0.$$

Теорема 5.3. *Нехай* $\alpha_\lambda \to +\infty$, *але* $\alpha_\lambda = o(\lambda^{-1/3})$ *при* $\lambda \to 0$. *Якщо* H_0 *володіє резонансом нульової енергії з напівзв'язним станом* u *та*

$$\int_{\mathbb{R}} U(x)\,dx = 0, \qquad u(0)u'(0)\int_{\mathbb{R}} xU(x)\,dx < 0,$$

то $\lambda = 0$ *є пороговим значенням для* H_λ. *Власне значення з пороговою поведінкою має асимптотику*

$$e_\lambda = -\frac{\lambda^2}{\alpha_\lambda^2}\left(\left(\frac{2u(0)u'(0)}{\theta^2+1}\int_{\mathbb{R}} xU(x)\,dx\right)^2 + o(1)\right), \quad \lambda \to 0.$$

Введемо функцію Θ таку, що $\Theta(x) = 1$ при $x < 0$ і $\Theta(x) = \theta$ при $x > 0$.

Теорема 5.4. *Припустимо, що* $\alpha_\lambda \to 0$, *але* $\alpha_\lambda\lambda^{-1/4} \to +\infty$ *при* $\lambda \to 0$. *Нехай потенціал* U *є неперервним в околі нуля, а оператор* H_0 *має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом* u. *Якщо виконуються умови*

$$\int_{\mathbb{R}_-} U\,dx + \theta^2\int_{\mathbb{R}_+} U\,dx = 0, \qquad U(0)\int_{\mathbb{R}}(u^2 - \Theta^2)\,dx < 0,$$

то H_λ володіє при всіх $\lambda > 0$ від'ємним власним значенням e_λ з асимптотикою

$$e_\lambda = -\lambda^2 \alpha_\lambda^2 \left(\left(\frac{U(0)}{\theta^2+1} \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2)\, dx \right)^2 + o(1) \right), \quad \lambda \to 0.$$

В підрозділі 5.2 ми знайшли умови існування від'ємних власних значень та побудували двочленну асимптотику порогових власних значень для операторів

$$H_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U_\lambda,$$

де $U_\lambda = U + \lambda U_1 + o(\lambda)$ при $\lambda \to 0$. Нехай V, U та U_1 — функції класу $L^\infty(\mathbb{R})$ з компактним носієм, а також $\|U_\lambda - U - \lambda U_1\|_{L_2(\mathbb{R})} = o(\lambda)$ при $\lambda \to 0$. Напівзв'язний стан u оператора $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ вибрано так, що $u(-\infty) = 1$. Тоді $\theta = u(+\infty)$. Нехай u_1 – розв'язок рівняння $-y'' + Vy = 0$, який лінійно незалежний з u і такий, що $u_1(x) = x$ зліва від носія V. Тоді $u_1(x) = \theta^{-1}x + \theta_1$ справа від носія з деякою сталою θ_1. Нехай також v_* — розв'язок рівняння $-v'' + Vv = -Uu$, який дорівнює нулю зліва від носіїв V та U.

Теорема 5.5. *Нехай оператор H_0 має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u. Якщо*

$$\int_{\mathbb{R}} Uu^2\, dx < 0, \tag{3}$$

то $\lambda = 0$ є пороговим значенням для операторів $H_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U_\lambda$, тобто для всіх як завгодно малих додатних λ існує від'ємне власне значення e_λ, яке прямує до нуля при $\lambda \to 0$. Крім того, порогове власне значення має асимптотику $e_\lambda = -\lambda^2 \left(\omega_0 + \omega_1 \lambda + o(\lambda)\right)^2$ при $\lambda \to 0$, де

$$\begin{aligned} \omega_0 = \frac{1}{\theta^2+1} \int_{\mathbb{R}} Uu^2\, dx, \quad \omega_1 = \frac{1}{\theta^2+1} \bigg(\int_{\mathbb{R}} U\big(v_* + \omega_0(\theta^2-1)u_1\big)u\, dx + \\ + \omega_0^2 \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2)\, dx - \omega_0^2 \theta^3 \theta_1 + \int_{\mathbb{R}} U_1 u^2\, dx \bigg). \end{aligned} \tag{4}$$

Порогова поведінка власних значень спостерігається і у випадку, коли нерівність (3) обертається в рівність. Тоді поглинання власного значення нижнім краєм неперервного спектру відбувається зі швидкістю $O(\lambda^4)$.

Теорема 5.6. *Нехай u – напівзв'язний стан оператора H_0. Припустимо, що*

$$\int_{\mathbb{R}} Uu^2\, dx = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} (Uv_* + U_1 u)u\, dx < 0.$$

Тоді оператори H_λ мають від'ємне порогове власне значення з асимптотикою

$$e_\lambda = -\frac{\lambda^4}{(\theta^2+1)^2} \left(\int_{\mathbb{R}} Uv_* u\, dx + \int_{\mathbb{R}} U_1 u^2\, dx \right)^2 + o(\lambda^4), \quad \lambda \to 0.$$

Отримано новий результат і точнішу асимптотику порогового власного значення для операторів $-\frac{d^2}{dx^2}+V+\lambda U$, які раніше вивчав М. Клаус.

Теорема 5.7. *Нехай H_0 має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u. Якщо $\int_{\mathbb{R}} Uu^2\,dx<0$, то значення $\lambda=0$ є пороговим для $-\frac{d^2}{dx^2}+V+\lambda U$, а порогове власне значення e_λ має асимптотику $e_\lambda=-\lambda^2(\omega_0+\lambda\omega_1+o(\lambda))^2$ при $\lambda\to 0$, де ω_0 таке ж як у формулі (4), а*

$$\omega_1=\frac{1}{\theta^2+1}\left(\int_{\mathbb{R}} U\big(v_*+\omega_0(\theta^2-1)u_1\big)u\,dx+\omega_0^2\int_{\mathbb{R}}(u^2-\Theta^2)\,dx-\omega_0^2\theta^3\theta_1\right).$$

Якщо потенціал U відмінний від нуля і $\int_{\mathbb{R}} Uu^2\,dx=0$, то оператор $-\frac{d^2}{dx^2}+V+\lambda U$ має від'ємне власне значення e_λ з асимптотикою

$$e_\lambda=-\frac{\lambda^4}{(\theta^2+1)^2}\left(\iint_{\mathbb{R}^2} U(x)u(x)\mathcal{E}_V(x-y)U(y)u(y)\,dx\,dy+o(1)\right)^2,$$

де $\mathcal{E}_V$ — фундаментальний розв'язок оператора $\frac{d^2}{dx^2}-V$, який є тотожно нульовим при $x<0$.

Порівняємо теорему з результатом Б. Саймона, коли незбуреним оператором був вільний оператор Шредингера.

Наслідок 5.3. *Нехай $V=0$. Якщо $\int_{\mathbb{R}} U\,dx<0$, то оператор $H_\lambda=-\frac{d^2}{dx^2}+\lambda U_\lambda$ має від'ємне власне значення з асимптотикою $e_\lambda=-\lambda^2(\omega_0+\lambda\omega_1+o(\lambda))^2$, де*

$$\omega_0=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} U\,dx,\qquad \omega_1=\frac{1}{4}\iint_{\mathbb{R}^2} U(x)\,|x-y|\,U(y)\,dx\,dy+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} U_1\,dx.$$

При $U_\lambda=U$ ця асимптотична формула збігається з формулою Абарбанеля-Калана-Гольдбергера.

Якщо потенціал U ненульовий, $\int_{\mathbb{R}} U\,dx=0$ і $\int_{\mathbb{R}} U_1\,dx\leqslant 0$, то для всіх достатньо малих λ (додатних чи від'ємних) оператор H_λ володіє власним значенням з асимптотикою

$$e_\lambda=-\frac{\lambda^4}{16}\left(\iint_{\mathbb{R}^2} U(x)\,|x-y|\,U(y)\,dx\,dy+2\int_{\mathbb{R}} U_1\,dx+o(1)\right)^2,\quad \lambda\to 0.$$

В **розділі 6** ми досліджували оператори Шредингера з потенціалами Кулона, які спричинили багато наукових дискусій, починаючи з роботи Р. Лаудона 1959 року. Предметом цих дискусій стала модель одновимірного атома водню, де важливою є структура спектрів та питання про проникності частинок через потенціал Кулона в задачах розсіювання. Ми вивчали оператори із загальнішими збуреннями, які містили потенціали типу Кулона. Наслідком отриманих результатів став математичний розв'язок проблеми одновимірного атома водню.

Нехай Q — дійснозначна функція на прямій, яка локально обмежена поза нулем, а в нулі має степеневу особливість вигляду

$$Q(x) = \begin{cases} \frac{q_-}{x}, & \text{коли } x \in (-x_0, 0), \\ \frac{q_+}{x}, & \text{коли } x \in (0, x_0) \end{cases}$$

з дійсними q_-, q_+ та $x_0 > 0$, і до того ж оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)(1 - \chi(x))$, де χ — характеристична функція відрізка $[-1, 1]$, є самоспряженим в $L_2(\mathbb{R})$. Введемо для Q локально інтегровні регуляризації

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} Q(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} \varkappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases} \tag{5}$$

які при $\varepsilon \to 0$ збігаються до Q майже скрізь. Тут $\varkappa$ – функція з $L^\infty(\mathbb{R})$, яка дорівнює нулю поза відрізком $[-1, 1]$. Ми вивчали оператори

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_\varepsilon(x) + \varepsilon^{-2} V(\varepsilon^{-1} x) + \varepsilon^{-1} U(\varepsilon^{-1} x),$$

де V та U — дійснозначні обмежені функції з компактним носієм. Нехай

$$\mathcal{U}_\pm = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}_\pm) \colon \psi,\, \psi' \in AC_{loc}(\mathbb{R}_\pm),\ -\psi'' + Q\psi \in L^2(\mathbb{R}_\pm) \right\}$$

а простір $\mathcal{U}$ складається з таких $L^2(\mathbb{R})$-функцій ϕ, що $\phi|_{\mathbb{R}_\pm} \in \mathcal{U}_\pm$.

Теорема 6.1. *Припустимо, що оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ володіє напівзв'язним станом u. Нехай також $\theta = u(+\infty)$ при умові, що $u(-\infty) = 1$. Якщо*

$$\theta^2 q_+ - q_- = \int_{\mathbb{R}} \varkappa u^2 \, dx,$$

то оператори H_ε збігаються в рівномірній резольвентній топології до оператора $\mathcal{H}$, який діє за правилом $\mathcal{H}\phi = -\phi'' + Q\phi$ на функціях $\phi \in \mathcal{U}$ таких, що

$$\phi(+0) = \theta\phi(-0), \quad \lim_{x \to +0} \bigl(\theta\phi'(x) - \phi'(-x) - (\theta^2 q_+ - q_-)\phi(-0) \ln x\bigr) = \phi(-0) \int_{\mathbb{R}} U u^2 \, dx.$$

Крім того, $\|R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(\mathcal{H})\| \leqslant C\varepsilon^{1/4}$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Перші похідні функцій з області визначення оператора $\mathcal{H}$ можуть мати логарифмічні особливості в нулі. Зате регулярну поведінку при підході зліва і справа до нуля мають вирази $b_-(\phi) = \phi'(x) - q_-\phi(x) \ln |x|$ і $b_+(\phi) = \phi'(x) - q_+\phi(x) \ln |x|$. Ввівши також позначення $\mu = \int_{\mathbb{R}} U h^2 \, dx$, умови спряження для $\phi \in \operatorname{dom} \mathcal{H}$ можна записати так

$$\phi(+0) = \theta\phi(-0), \qquad \theta b_+(\phi) - b_-(\phi) = \mu\phi(-0). \tag{6}$$

Введемо оператори $D_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + Q$, $\operatorname{dom} D_\pm = \{\psi \in \mathcal{U}_\pm \colon \psi(0) = 0\}$.

Теорема 6.2. *Якщо оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ не має резонансу нульової енергії, то H_ε збігаються в рівномірній резольвентній топології до прямої суми $D_- \oplus D_+$. Крім того, для кожного $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ маємо оцінку $\|R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(D_- \oplus D_+)\| \leqslant C\varepsilon^{1/4}$.*

Наступна лема дає критерій збіжності регуляризацій Q_ε в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Лема 6.3. *Послідовність функцій Q_ε, заданих формулою (5), збігається в просторі узагальнених функцій тоді і лише тоді, коли $q_+ - q_- = \int_{\mathcal{I}} \varkappa\, dx$.*

Історично склалося, що основна наукова суперечка щодо потенціалів Кулона стосувалася питання, чи можуть частинки проникати через них з ненульовою ймовірністю. Потенціали $Q_\varepsilon + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\,\cdot) + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}\,\cdot)$ називатимемо *асимптотично проникними* при $\varepsilon \to 0$, якщо відповідні оператори H_ε збігаються до оператора $\mathcal{H}$, породженого умовами (6). Якщо ж ці оператори збігаються до прямої суми $D_- \oplus D_+$, то казатимемо, що потенціали є *асимптотично відбивними.*

Теорема 6.3. *Якщо регуляризації Q_ε потенціалу типу Кулона збігаються в просторі узагальнених функцій, тобто виконується умова $q_+ - q_- = \int_{\mathcal{I}} \varkappa\, dx$, то потенціали $Q_\varepsilon + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}\,\cdot)$ є асимптотично проникними при $\varepsilon \to 0$.*

В тому разі, коли припущення теореми 6.3 не виконуються, можна довести умовний результат. Введемо позначення $H_{0,\varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_\varepsilon + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}\,\cdot)$.

Теорема 6.4. *Нехай $q_+ - q_- \neq \int_{\mathcal{I}} \varkappa\, dx$. Якщо оператори $H_{0,\varepsilon}$ збігаються в сильній резольвентній топології, то граничним оператором є пряма сума $D_- \oplus D_+$.*

З огляду на теореми 6.3 та 6.4 можемо зробити такий висновок.

Теорема 6.5 (Критерій проникності). *Нехай Q_ε такі регуляризації вигляду* (5) *потенціалу Q, що відповідні оператори $H_{0,\varepsilon}$ мають границю в сильній резольвентній топології. Потенціали Q_ε асимптотично проникні при $\varepsilon \to 0$ тоді і лише тоді, коли вони збігаються в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Потенціали типу Кулона, як і δ'-потенціали, є чутливими до способу їх регуляризації і можуть мати різні самоспряжені реалізації залежно від специфіки квантово-механічної моделі. Ми довели, що для кожного потенціалу Q, зокрема і для класичних парного $1/|x|$ і непарного $1/x$ потенціалів Кулона, існують такі регуляризації Q_ε, які є асимптотично відбивними, і такі, що потенціали Q_ε є проникним для частинок в границі.

В **розділі 7** ми узагальнили на двовимірний випадок результати перших двох розділів. Тут ми вивчали спектральні властивості двовимірних операторів Шредингера з потенціалами дипольного типу, які концентруються в околі гладких замкнених кривих. Нехай γ — замкнена гладка крива без точок самоперетину, а ω_ε — її ε-окіл. При малих ε цей окіл є областю з гладкою границею. Введемо в ω_ε локальні координати (s, r), де s – натуральний параметр γ, а r – орієнтована відстань до γ. Розглянемо сім'ю потенціалів $V_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}\, V(\varepsilon^{-1}r) + \varepsilon^{-1}\, U(s, \varepsilon^{-1}r)$, де V та U

– гладкі функції з компактними носіями. Припустимо, що носії V і $U(s,\,\cdot\,)$ лежать в $[-1,1]$ для всіх s. Тоді носії V_ε містяться в області ω_ε. Ми описали асимптотичну поведінку спектрів операторів Шредингера $H_\varepsilon = -\Delta + W + V_\varepsilon$. Ці оператори можна трактувати як регуляризацію формальні виразів $-\Delta + W + a\partial_r\delta_\gamma + b\delta_\gamma$, де δ_γ – функція Дірака, зосереджена на кривій γ, a і b – функції класу $L^1(\gamma)$. Тут W – потенціал класу $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$, який зростає при $|x| \to +\infty$ і є гладким в деякому околі γ. Тому незбурений оператор $H_0 = -\Delta + W$ самоспряжений в $L^2(\mathbb{R}^2)$, а його спектр дискретний. Побудувавши асимптотику при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ^ε операторів H_ε ми водночас знайшли граничний оператор в сильній резольвентній топології, а отже, і точні моделі з математично вмотивованими взаємодіями на кривій γ.

Крива γ ділить площину на дві області Ω_{in} та Ω_{out}, причому Ω_{out} – необмежена. Кажемо, що f належить до простору $\mathcal{W}^+ \subset L^2(\Omega_{out})$, якщо в області Ω_{out} вона збігається з деякою функцією з $\operatorname{dom} H_0$. Нехай також $\mathcal{W} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2)\colon f|_{\Omega_{in}} \in W_2^2(\Omega_{in}),\ f|_{\Omega_{out}} \in \mathcal{W}^+\}$. Через $\mathcal{E}$ позначимо нескінченну підмножину в $(0,1)$, для якої нуль є граничною точкою, а через $v^\pm$ – односторонні сліди функції v на γ.

Теорема 7.1. *Припустимо, що оператор* $-\frac{d^2}{dr^2} + V$ *в* $L^2(\mathbb{R})$ *володіє резонансом нульової енергії з напівзв'язним станом* h. *Нехай* $\theta = h(+\infty)$, *коли* $h(-\infty) = 1$.

(i) Нехай $\{\lambda^\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ *— послідовність власних значень оператора* H_ε, *а* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ *— відповідна послідовність нормованих в* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *власних функцій. Якщо*

$$\lambda^\varepsilon \to \lambda, \qquad u_\varepsilon \to u \quad \text{слабко в } L^2(\mathbb{R}^2) \tag{7}$$

при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \to 0$ *і гранична функція* u *ненульова, то* λ *є власним значенням з власною функцією* u *оператора* $\mathcal{H} = -\Delta + W$ *в* $L^2(\mathbb{R}^2)$, *визначеного на області*

$$\operatorname{dom}\mathcal{H} = \big\{v \in \mathcal{W}\colon\ v^+ = \theta\, v^-,\ \ \theta\,\partial_r v^+ - \partial_r v^- = \big(\tfrac{1}{2}(\theta^2-1)\varkappa + \mu\big)\, v^- \text{ на } \gamma\big\}.$$

Тут $\varkappa = \varkappa(s)$ *– кривина кривої* γ *та* $\mu(s) = \int_{\mathbb{R}} U(s,r)h^2(r)\,dr$.

(ii) Якщо виконуються умови (7) і λ *не належить до спектру* $\sigma(\mathcal{H})$, *то послідовність власних функцій* u_ε *збігається до нуля при* $\mathcal{E} \ni \varepsilon \to 0$ *в слабкій топології простору* $L^2(\mathbb{R}^2)$.

(iii) Для кожного власного значення λ *оператора* $\mathcal{H}$ *та всіх малих* ε *існує таке власне значення* λ^ε *оператора* H_ε, *що виконується нерівність* $|\lambda^\varepsilon - \lambda| \leqslant c\varepsilon$ *зі сталою* c, *незалежною від* ε.

В умовах спряження, що визначають оператор $\mathcal{H}$ бачимо залежність між геометрією кривої та спектральними характеристиками $\partial_r\delta_\gamma$-подібного потенціалу V. Зауважимо, що $\varkappa$ — це орієнтована кривина γ, яка змінює знак зі зміною напрямку натуральної параметризації.

Лема 7.1. *Оператор* $\mathcal{H}$ *є інваріантним щодо вибору натуральної параметризації кривої* γ.

Введемо оператори

$$\mathcal{D}^- = -\Delta + W \quad \text{в } L^2(\Omega_{in}), \qquad \operatorname{dom}\mathcal{D}^- = \{v \in W_2^2(\Omega_{in})\colon\ v = 0 \ \text{на } \gamma\},$$
$$\mathcal{D}^+ = -\Delta + W \quad \text{в } L^2(\Omega_{out}), \qquad \operatorname{dom}\mathcal{D}^+ = \{v \in \mathcal{W}^+\colon\ v = 0 \ \text{на } \gamma\}.$$

Теорема 7.2. *Нехай $\{\lambda^\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ — послідовність власних значень оператора H_ε, а $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ — відповідна послідовність власних функцій, нормованих в $L^2(\mathbb{R}^2)$. Припустимо, що оператор $-\frac{d^2}{dr^2} + V$ не має резонансу нульової енергії.*

(i) Якщо $\lambda^\varepsilon \to \lambda$, $u_\varepsilon \to u$ слабко в $L^2(\mathbb{R}^2)$ при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \to 0$ і гранична функція u є ненульовою, то λ — власне значення прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$, а u — відповідна власна функція.

(ii) У випадку, коли $\lambda^\varepsilon \to \lambda$ при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \to 0$ і $\lambda \notin \sigma(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)$, то власні функції u_ε збігаються до нуля слабко в $L^2(\mathbb{R}^2)$.

(iii) Якщо $\lambda \in \sigma(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)$, то для малих ε можна знайти таке власне значення λ^ε оператора H_ε, що $|\lambda^\varepsilon - \lambda| \leqslant c\varepsilon$, де стала c не залежить від ε.

В **розділі 8** ми досліджували спектральні властивості операторів Штурма-Ліувілля із загальними крайовими умовами і сингулярно збуреною ваговою функцією. Нехай $I = (a, b)$ — скінченний інтервал, що містить початок координат. Ми побудували асимптотику власних значень λ^ε та власних функцій y_ε задачі

$$-y_\varepsilon'' + q(x)y_\varepsilon = \lambda^\varepsilon r_\varepsilon(x) y_\varepsilon, \quad x \in (a, b), \tag{8}$$
$$y_\varepsilon(a)\cos\alpha + y_\varepsilon'(a)\sin\alpha = 0, \quad y_\varepsilon(b)\cos\beta + y_\varepsilon'(b)\sin\beta = 0 \tag{9}$$

з дійсними α, β та ваговою функцією

$$r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x), & x \in (a, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, b), \\ \varepsilon^{-2} p(\varepsilon^{-1}x), & x \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases}$$

Тут q, r та p — обмежені функції, причому дві останні строго додатні. Надалі через $L_2(h, \omega)$ позначатимемо ваговий простір Лебега з додатна вагою h на множині ω, а через $\ell_a\phi = 0$ та $\ell_b\phi = 0$ – крайові умови (9). Задача (8), (9) має самоспряжену реалізацію в $L_2(r_\varepsilon, I)$. Нехай $\tau(\phi) = -\phi'' + q\phi$. Введемо оператор T_ε, що діє за правилом $T_\varepsilon\phi = r_\varepsilon^{-1}\tau(\phi)$ на множині $\operatorname{dom} T_\varepsilon = \{\phi \in W_2^2(I)\colon \ell_a\phi = 0,\ \ \ell_b\phi = 0\}$.

Дослідження операторів T_ε у залежних від параметра просторах $L_2(r_\varepsilon, I)$ пов'язане з певними труднощами. Відмовившись від самоспряженості, ми реалізували задачу як сім'ю несамоспряжених матричних операторів $\mathcal{A}_\varepsilon$, що діють в одному гільбертовому просторі, і довели їх рівномірну резольвентну збіжність. Введемо позначення $I_a = (a, 0)$, $I_b = (0, b)$ та $\mathcal{I} = (-1, 1)$. Нехай $\mathring{A}_a$ і $\mathring{A}_b$ — оператори в просторах $L_2(r, I_a)$ і $L_2(r, I_b)$ відповідно такі, що

$$\mathring{A}_a\phi = r^{-1}\tau(\phi), \quad \operatorname{dom}\mathring{A}_a = \left\{\phi \in W_2^2(I_a)\colon \ell_a\phi = 0\right\},$$
$$\mathring{A}_b\phi = r^{-1}\tau(\phi), \quad \operatorname{dom}\mathring{A}_b = \left\{\phi \in W_2^2(I_b)\colon \ell_b\phi = 0\right\}.$$

Введемо в $L_2(p,\mathcal{I})$ оператор $\mathring{B} = -p^{-1}\frac{d^2}{dt^2}$ з областю $\operatorname{dom}\mathring{B} = W_2^2(\mathcal{I})$, а також його потенціальне збурення $\mathring{B}_\varepsilon = \mathring{B} + \varepsilon^2\frac{q(\varepsilon t)}{p(t)}$. В просторі $\mathcal{L} = L_2(r,I_a)\times L_2(p,\mathcal{I})\times L_2(r,I_b)$ розглянемо матричний оператор

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathring{A}_a & 0 & 0\\ 0 & \mathring{B}_\varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \mathring{A}_b \end{pmatrix}$$

з областю визначення $\operatorname{dom}\mathcal{A}_\varepsilon = \big\{(\phi_a,\psi,\phi_b)\in \operatorname{dom}\mathring{A}_a\times\operatorname{dom}\mathring{B}_\varepsilon\times\operatorname{dom}\mathring{A}_b\colon$ $\phi_a(-\varepsilon)=\psi(-1),\ \ \phi_b(\varepsilon)=\psi(1),\ \ \varepsilon\phi_a'(-\varepsilon)=\psi'(-1),\ \ \varepsilon\phi_b'(\varepsilon)=\psi'(1)\big\}$.

Лема 8.1. *Оператори $\mathcal{A}_\varepsilon$ і T_ε мають однакові спектри, $\sigma(\mathcal{A}_\varepsilon)=\sigma(T_\varepsilon)$.*

Введемо в просторі $\mathcal{L}$ матричний оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathring{A}_a & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & \mathring{A}_b \end{pmatrix},$$

$\operatorname{dom}\mathcal{A} = \big\{(\phi_a,\psi,\phi_b)\in\operatorname{dom}\mathring{A}_a\times\operatorname{dom}B\times\operatorname{dom}\mathring{A}_b\colon \phi_a(0)=\psi(-1),\ \ \phi_b(0)=\psi(1)\big\}$, де B – звуження оператора $\mathring{B}$ на $\operatorname{dom}B = \big\{\psi\in\operatorname{dom}\mathring{B}\colon \psi'(-1)=\psi'(1)=0\big\}$. Оператор $\mathcal{A}$ пов'язаний із *граничною спектральною задачею*

$$\begin{aligned} &-u''+q(x)u=\lambda r(x)u,\quad x\in I_a,\qquad \ell_a u=0, &&(10)\\ &-w''=\lambda p(t)w,\quad t\in\mathcal{I},\qquad w'(-1)=0,\quad w'(1)=0, &&(11)\\ &-v''+q(x)v=\lambda r(x)v\quad x\in I_b,\qquad \ell_b v=0, &&(12)\\ &\ \ u(0)=w(-1),\qquad v(0)=w(1). &&(13)\end{aligned}$$

Теорема 8.1. *Оператори $\mathcal{A}_\varepsilon$ збігаються до $\mathcal{A}$ при $\varepsilon\to 0$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, причому $\|R_\lambda(\mathcal{A}_\varepsilon)-R_\lambda(\mathcal{A})\|\leqslant c\sqrt{\varepsilon}$ для усіх $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ з незалежною від ε сталою c .*

Хоча усі оператори $\mathcal{A}_\varepsilon$ є подібними до самоспряжених, граничний оператор $\mathcal{A}$ такою властивістю не володіє, бо має кратні власні значення з жордановими ланцюгами довжини 2. Нехай $X_\lambda=\operatorname{span}\big\{\ker(\mathcal{A}-\lambda)^k\colon k\in\mathbb{N}\big\}$ – кореневий підпростір оператора $\mathcal{A}$, що відповідає власному значенню λ. Через A_a і A_b позначимо звуження операторів $\mathring{A}_a$ і $\mathring{A}_b$ на $\operatorname{dom}A_a=\{\phi\in\operatorname{dom}\mathring{A}_a\colon \phi(0)=0\}$ і $\operatorname{dom}A_b=\{\phi\in\operatorname{dom}\mathring{A}_b\colon \phi(0)=0\}$ відповідно.

Теорема 8.2. *(i) Спектр оператора $\mathcal{A}$ дійсний дискретний і є об'єднанням спектрів трьох операторів, а саме, $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(A_a)\cup\sigma(A_b)\cup\sigma(B)$.*

(ii) Якщо λ належить лише до однієї з множин $\sigma(A_a)$, $\sigma(B)$ чи $\sigma(A_b)$, то λ є простим власним значенням оператора $\mathcal{A}$.

(iii) Коли $\lambda\in\sigma(A_a)\cap\sigma(A_b)$, але λ не є точкою спектру оператора B, то λ є двократним власним значенням і $X_\lambda=\ker(\mathcal{A}-\lambda E)$.

(iv) Припустимо, що λ належить до перетину $\sigma(A_a) \cap \sigma(B)$ (відповідно $\sigma(A_b) \cap \sigma(B)$), але λ не є власним значенням A_b (відповідно A_a), тоді λ є двократним власним значенням оператора $\mathcal{A}$. Коли ж $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b) \cap \sigma(B)$, то λ є власним значенням $\mathcal{A}$ кратності 3. В усіх цих випадках, окрім власних, простір X_λ містить ще кореневі вектори: $X_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda)^2$ і $X_\lambda \neq \ker(\mathcal{A} - \lambda)$.

Оператори T_ε є прикладом сім'ї самоспряжених операторів у змінних гільбертових просторах, спектри яких збігаються за Гаусдорфом до спектру несамоспряженого оператора $\mathcal{A}$, а граничне розташування власних підпросторів T_ε визначають кореневі підпростори оператора $\mathcal{A}$.

Нехай $\lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon < \cdots < \lambda_n^\varepsilon < \cdots$ — послідовність власних значень задачі (8), (9). Всі власні значення λ_n^ε є простими. Нехай також $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$ — власні значення задачі (10)–(13), пераховані із врахування їхньої кратності.

Теорема 8.3. *Для усіх $n \in \mathbb{N}$ власне значення λ_n^ε задачі* (8), (9) *збігається при $\varepsilon \to 0$ до власного значення λ_n задачі* (10)–(13). *Зокрема, якщо λ — власне значення задачі* (10)–(13) *з алгебраїчною кратністю m, то при малих ε в деякому околі λ існує рівно m власних значень задачі* (8), (9).

Теорема 8.4. *Нехай X_λ — кореневий простір оператора $\mathcal{A}$, що відповідає власному значенню λ. Нехай також X_λ^ε — простір, породжений усіма власними векторами $\mathcal{A}_\varepsilon$, для яких власні значення прямують до λ при $\varepsilon \to 0$. Тоді для достатньо малих ε простори X_λ^ε і X_λ мають однакову вимірність, а розхил між ними є нескінченно малим при $\varepsilon \to 0$ в тому сенсі, що*

$$\int_{\Gamma_\lambda} \mathrm{R}_z(\mathcal{A}_\varepsilon)\, dz \to \int_{\Gamma_\lambda} \mathrm{R}_z(\mathcal{A})\, dz$$

для кожного замкненого контуру $\Gamma_\lambda \subset \varrho(\mathcal{A})$, що охоплює лише точку λ зі спектру $\mathcal{A}$.

Теорема 8.5. *Нехай y_ε — власна функція задачі* (8), (9), *яка відповідає власному значенню λ^ε і нормована умовою $\|y_\varepsilon\|_{L_2(r,I)} = 1$.*

(i) Припустимо, що $\lambda^\varepsilon \to \lambda$ при $\varepsilon \to 0$, де λ — просте власне значення оператора $\mathcal{A}$, яке належить до множини $\sigma(A_a)$. Тоді власна функція y_ε збігається в просторі $L_2(I)$ до функції $y(x) = u(x)$ при $x \in I_a$ і $y(x) = 0$ при $x \in I_b$, де u — нормована в $L_2(r, I_a)$ власна функція оператора A_a з власним значенням λ.

Якщо λ — просте власне значення з множини $\sigma(A_b)$, то $y_\varepsilon \to y$ в $L_2(I)$, де $y(x) = 0$ при $x \in I_a$ та $y(x) = v(x)$ при $x \in I_b$, а v — нормована в $L_2(r, I_b)$ власна функція оператора A_b з власним значенням λ.

(ii) Нехай $\lambda^\varepsilon \to \lambda$, де λ — просте власне значення оператора $\mathcal{A}$ з множини $\sigma(B)$. Тоді власна функція y_ε збігається в $L_2(I)$ до розв'язку y задачі

$$-y'' + qy = \lambda r y \ \text{ в } I_a \cup I_b, \quad \ell_a y = 0, \ \ \ell_b y = 0, \ \ y(-0) = \vartheta w(-1), \ \ y(+0) = \vartheta w(1),$$

де w – відповідна власна функція оператора B, $\|w\|_{L_2(p,\mathcal{I})} = 1$, а ϑ – деякий нормівний множник.

В **розділі 9** ми узагальнили моделі з попереднього розділу на двовимірний випадок і вивчили спектральні властивості мембран з тонкими важкими включеннями. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з гладкою межею, а γ — гладка замкнена крива в Ω, а ω_ε – її ε-окіл. При малих ε цей окіл лежить в Ω, є областю з гладкою межею, в якій можна ввести локальні координати (s, r) (див. с. 21). Ми побудували асимптотику власних значень крайової задачі

$$-\Delta u_\varepsilon + a(x)u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon(x,m)u_\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \qquad \ell u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \tag{14}$$

з ваговою функцією вигляду

$$\rho_\varepsilon(x,m) = \begin{cases} \rho(x) & \text{в } \Omega\setminus\omega_\varepsilon, \\ \varepsilon^{-m}q(\frac{r}{\varepsilon}) & \text{в } \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

збуреною в околі гладкої кривої. Тут $\ell v = 0$ — один з класичних типів крайових умов на $\partial\Omega$, а саме, умови Діріхле, Неймана чи Робена, $a \in C^\infty(\overline{\Omega})$, ρ — гладка строго додатна функція в області Ω, а q — гладка і додатна на відрізку $[-1, 1]$.

В підрозділі 9.1 ми дослідили задачу у випадку $m = 2$. Шукаючи формальну асимптотику у вигляді $\lambda^\varepsilon \sim \lambda + \cdots$, $u_\varepsilon(x) \sim v(x) + \cdots$, коли $x \in \Omega\setminus\omega_\varepsilon$, та $u_\varepsilon(x) \sim w(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \cdots$, коли $x \in \omega_\varepsilon$, отримаємо граничну спектральну задачу

$$\begin{aligned} &-\Delta v + av = \lambda\rho v \quad \text{в } \Omega\setminus\gamma, \qquad \ell v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ &-\partial_n^2 w = \lambda q w \ \ \text{в } Q, \quad \partial_n w(\,\cdot\,,-1) = 0, \quad \partial_n w(\,\cdot\,,1) = 0, \\ &\ \ v^- = w(\,\cdot\,,-1), \qquad v^+ = w(\,\cdot\,,1) \quad \text{на } \gamma, \end{aligned}$$

де $n = r/\varepsilon$. Нехай S – коло довжини $|\gamma|$, а $Q = S \times (-1, 1)$ – циліндр, якому дифеоморфна область ω_ε в координатах (s, n). Введемо оператори

$$\begin{aligned} &\mathring{A} = \rho^{-1}(-\Delta + a) \quad \text{в } L_2(\rho,\Omega), \quad \operatorname{dom}\mathring{A} = \{f \in W_2^2(\Omega\setminus\gamma)\colon \ell f = 0 \ \text{ на } \partial\Omega\}, \\ &B = -q^{-1}\partial_n^2 \quad \text{в } L_2(q,Q), \quad \operatorname{dom} B = \Big\{g \in W_2^{2,0}(Q)\colon \partial_n g(\,\cdot\,,-1) = \partial_n g(\,\cdot\,,1) = 0\Big\}, \end{aligned}$$

де $W_2^{2,0}(Q) = \big\{g \in L_2(Q)\colon \partial_n^k g \in L_2(Q) \text{ для } k = 1, 2\big\}$ – анізотропний простір Соболєва. В просторі $\mathcal{L} = L_2(\rho,\Omega) \times L_2(q,Q)$ розглянемо матричний оператор

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathring{A} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \operatorname{dom}\mathcal{P} = \big\{(f,g) \in \operatorname{dom}\mathring{A}\times\operatorname{dom} B\colon f^- = g(\,\cdot\,,-1),\ f^+ = g(\,\cdot\,,1)\big\},$$

який породжений граничною задачею.

Лема 9.1. *Спектр оператора B складається з послідовності дійсних власних значень нескінченної кратності, причому $\lambda \in \sigma(B)$ тоді і лише тоді, коли λ – власне значення задачі Штурма-Ліувілля*

$$y'' + \lambda q(n)y = 0 \quad \textit{на } (-1,1), \quad y'(-1) = 0, \quad y'(1) = 0. \tag{15}$$

Теорема 9.1. *Спектр $\mathcal{P}$ дійсний, дискретний, а також $\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$.*

Наслідок 9.1. *Резольвента $\mathcal{P}$ є некомпактним оператором.*

Наслідок вказує на принципову відмінність двовимірного випадку – тут немає рівномірної резольвентної збіжності операторів, які відповідають задачі (14). Якби вона була, то граничний оператор мав би компактну резольвенту, бо такими є резольвенти дограничних операторів. З цієї причини ми вивчали асимптотику спектру і обминули питання збіжності самих операторів.

Теорема 9.2 *Нехай X_λ — кореневий простір, а X_λ^0 — власний підпростір, що відповідають $\lambda \in \sigma(\mathcal{P})$.*

(i) Якщо $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma(B)$, то X_λ скінченновимірний і збігається з X_λ^0.

(ii) Частина $\sigma(B) \setminus \sigma(A)$ спектру оператора $\mathcal{P}$ складається з власних значень λ нескінченної кратності, причому $X_\lambda = X_\lambda^0$.

(iii) Підмножина $\sigma(A) \cap \sigma(B)$ спектру $\mathcal{P}$ теж складається з власних значень λ нескінченної кратності, проте $X_\lambda \neq X_\lambda^0$. В цьому разі існує скінченна кількість кореневих векторів, які разом з власними векторами утворюють жорданові ланцюги довжини 2.

В тексті дисертації ця теорема доповнена інформацією про структуру просторів X_λ, для яких конструктивно побудовано бази з власних та приєднаних векторів. Далі в цьому підрозділі в околі кожної точки $\lambda \in \sigma(\mathcal{P})$ побудовано і обґрунтовано асимптотичні формули для власних значень задачі (14).

Крива γ розділяє Ω на дві підобласті Ω_{out} та Ω_{in}, причому $\partial\Omega_{out} = \partial\Omega \cup \gamma_-$ і $\partial\Omega_{in} = \gamma_+$, де γ_- і γ_+ — два береги розрізу γ. Розглянемо дві крайові задачі

$$\begin{aligned} &-\Delta z + az = \lambda\rho z \ \text{ в } \Omega_{out}, \quad z = \varphi \quad \text{на } \gamma, \qquad \ell z = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ &-\Delta w + aw = \lambda\rho w \ \text{ в } \Omega_{in}, \quad w = \psi \quad \text{на } \gamma \end{aligned}$$

і введемо в $L_2(\gamma)$ відображення Діріхле-Неймана $N_\lambda^- \varphi = \partial_r z|_\gamma$ та $N_\lambda^+ \psi = -\partial_r w|_\gamma$.

В **теоремі 9.3** доведено, що в околі власного значення $\lambda \in \sigma(B) \setminus \sigma(A)$ існує зліченна серія власних значень λ_k^ε, $k \in \mathbb{N}$, задачі (14), які володіють асимптотикою $\lambda_k^\varepsilon = \lambda + \varepsilon\lambda_1^{(k)} + O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Послідовність коректорів $\{\lambda_1^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ – це спектр оператора $N_\lambda = \pi_\lambda^{-1}\big(N_\lambda^- + \theta_\lambda^2 N_\lambda^+ + \frac{1}{2}(\theta_\lambda^2 - 1)\varkappa\big)$ в $L_2(\gamma)$, породженого задачею

$$\begin{gathered} -\Delta v + av = \lambda\rho v \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \qquad \ell v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ v^+ - \theta_\lambda v^- = 0, \quad \theta_\lambda \partial_r v^+ - \partial_r v^- - \big(\tfrac{1}{2}(\theta_\lambda^2 - 1)\varkappa - \lambda_1\pi_\lambda\big)v^- = 0 \quad \text{на } \gamma \end{gathered}$$

зі спектральним параметром λ_1 в умовах спряження на кривій γ. Тут $\varkappa$ — кривина кривої γ, $\pi_\lambda = \int_{-1}^1 qy^2(n,\lambda)\,dn$ і $\theta_\lambda = y(1,\lambda)$, де $y = y(n,\lambda)$ — власна функція (15), нормована умовою $y(-1,\lambda) = 1$. Оператор N_λ є самоспряженим, обмеженим знизу і з компактною резольвентою. З погляду асимптотичного аналізу точки спектру оператора B, які породжують нескінченновимірні інваріантні простори оператора $\mathcal{P}$, схожі на резонанси нульової енергії з попередніх розділів, а власні функції задачі Штурма-Ліувілля (15) в цій моделі відіграють роль “напівзв’язних станів”. Теорему доведено у припущенні простоти спектру N_λ.

В **теоремі 9.4** описано доволі складну біфуркацію власних значень задачі (14) в околі точки $\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$. Оператор A є прямою сумою двох операторів

$$\begin{aligned} A_- &= \rho^{-1}(-\Delta + a), \quad \operatorname{dom} A_- = \{f \in W_2^2(\Omega_{out}) \colon \ell f = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ f = 0 \text{ на } \gamma\},\\ A_+ &= \rho^{-1}(-\Delta + a), \quad \operatorname{dom} A_+ = \{f \in W_2^2(\Omega_{in}) \colon f = 0 \text{ на } \gamma\}. \end{aligned}$$

Тому $\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(A_-) \cup \sigma(A_+) \cup \sigma(B)$. Нехай λ – власне значення оператора A кратності K, а $V_1,\dots,V_K$ – власні функції такі, що $\int_\Omega \rho V_i V_j\,dx = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера. Через H_λ позначимо підпростір в $L_2(\gamma)$, породжений функціями $\Psi_k = \theta_\lambda \partial_r V_k^+ - \partial_r V_k^-$, $k = 1,\dots,K$. Вимірність цього простору визначає кількість ланцюгів Жордана в структурі X_λ.

Лема 9.3. *Нехай λ — власне значення оператора A, а $k_\pm$ — кратності λ в спектрах операторів $A_\pm$ відповідно. Тоді* $\dim H_\lambda \geqslant \max(k_-, k_+)$.

Теорема 9.4 стверджує, що у випадку $\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$ існує зліченна серія власних значень задачі (14) з асимптотикою $\lambda_k^\varepsilon = \lambda + \varepsilon\lambda_1^{(k)} + O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$. Коректори $\lambda_1^{(k)}$ є точками спектру оператора $M_\lambda = \pi_\lambda^{-1}\big(M_\lambda^- + \theta_\lambda^2 M_\lambda^+ + \frac{1}{2}(\theta_\lambda^2 - 1)\varkappa\big)$, де $M_\lambda^\pm = (I - P_\lambda)N_\lambda^\pm(I - P_\lambda)$, а P_λ — ортогональний проектор на підпростір H_λ. Нехай $d = \dim H_\lambda$. Також задача може ще мати не більше $K - d$ власних значень, коректорами яких є точки спектру деякої матриці. Власному значенню λ відповідає d жорданових ланцюгів довжини 2, внаслідок чого існує $2d$ власних значень задачі (14) з асимптотикою за півцілими степенями малого параметра $\mu_{\varepsilon,j}^\pm = \lambda \pm \varepsilon^{1/2}\omega_j + \varepsilon\lambda_{1,j}^\pm + O(\varepsilon^{3/2})$, $j = 1,\dots,d$. Тут ω_j^2 – ненульові власні значення матриці Ґрама G_λ функцій $\Psi_1,\dots,\Psi_K$. В теорема зроблені припущення про простоту спектрів M_λ і G_λ.

Збурення власного значення $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma(B)$ описано в **теоремі 9.5.** Нехай K – кратність цього власного значення. Доведено існування K власних значень задачі (14) з асимптотикою $\lambda_k^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(k)} + O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Коректори отримані стандартною асимптотичною процедурою для скінченнократних збурень і є точками спектру деякої квадратної матриці порядку K.

Задача (14) при $m = 2$ дає приклад сім’ї самоспряжених операторів у змінних гільбертових просторах, коли повнота системи збурених власних функцій переходить в границі у певному сенсі в повноту системи власних і кореневих векторів граничного несамоспряженого оператора. Формальна асимптотика вказує на те, що власні функції $u_{\varepsilon,j}^{(-)}$ і $u_{\varepsilon,j}^{(+)}$, які відповідають парі власних значень $\mu_{\varepsilon,j}^-$ і $\mu_{\varepsilon,j}^+$, хоча і залишаються ортогональними у просторі $L_2(\rho_\varepsilon, \Omega)$ зі сингулярною ваговою функцією, проте кут між ними в просторі $L_2(\Omega)$ стає нескінченно малим при $\varepsilon \to 0$. Границі цих власних функцій є лінійно залежними внаслідок чого втрачається повнота в $L_2(\Omega)$. До того ж несамоспряжений оператор $\mathcal{P}$ містить усю інформацію, необхідну для опису спектру збуреної задачі: *(i)* $\sigma(\mathcal{P})$ — це гранична множина при $\varepsilon \to 0$ для власних значень λ^ε; *(ii)* за кратностями власних значень

$\mathcal{P}$ можемо розбити збурений спектр на скінченні і нескінченні множини власних значень з однаковими границями; *(iii)* у випадку $\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$ вимірність простору H_λ або ж кількість ланцюгів Жордана визначають кількість власних значень з асимптотикою за півцілими степенями; *(iv)* елементи жорданових ланцюгів з'являються у квазімодах — формальній асимптотиці власних функцій.

В підрозділі 9.2 асимптотика спектру задачі (14) була побудована у випадку $m = 3$. Гранична задача

$$-\Delta v + av = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \qquad \ell v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{16}$$

$$-\partial_n^2 w = \mu q w \ \text{ в } Q, \qquad \partial_n w(\,\cdot\,, -1) = 0, \ \ \partial_n w(\,\cdot\,, 1) = 0, \tag{17}$$

$$v^- = w(\,\cdot\,, -1), \qquad v^+ = w(\,\cdot\,, 1) \ \text{ на } \gamma, \tag{18}$$

яка виникає для головних членів асимптотики $\lambda^\varepsilon = \varepsilon\mu + o(\varepsilon)$, $u_\varepsilon(x) = v(x) + o(1)$ для $x \in \Omega \backslash \omega_\varepsilon$ та $u_\varepsilon(x) = w(s, \frac{r}{\varepsilon}) + o(1)$ для $x \in \omega_\varepsilon$, містить спектральний параметр μ лише в рівнянні на циліндрі Q. Відсутність цього параметра в рівнянні для v суттєво змінює природу граничної задачі. У позначеннях попереднього підрозділу її можна трактувати як узагальнену задачу на власні значення з виродженою матрицею коло спектрального параметра

$$\begin{pmatrix} \mathring{A} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} \mathcal{P}. \tag{19}$$

Теорема 9.6. *Якщо оператор A оборотний, то множина власних значень узагальненої спектральної задачі* (19) *збігається зі спектром оператора B, причому всі власні значення задачі мають нескінченну кратність.*

Коли оператор A має нульове власне значення, то "спектр" задачі (19) – множина усіх μ, для яких існують нетривіальні розв'язки – збігається з усією комплексною площиною, бо навіть коли μ не належить спектру B, то існують ненульові розв'язки $(v, 0)$, де $v \in \ker A$. Надалі вважатимемо, що оператор A оборотний.

Нехай $\mu \in \sigma(B)$. Введемо оператор $K_\mu = \pi_\mu^{-1}\big(N_0^- + \theta_\mu^2 N_0^+ + \frac{1}{2}(\theta_\mu^2 - 1)\varkappa\big)$, де $N_0^\pm$ — оператори Діріхле-Нейман $N_\lambda^\pm$, взяті при $\lambda = 0$, $\pi_\mu = \int_{-1}^1 q y^2(n, \mu)\, dn$, $\theta_\mu = y(1, \mu)$, а $\varkappa$ — кривина кривої γ.Оператори $N_0^\pm$ коректно визначені, бо A оборотний.

Теорема 9.7. *Нехай крайова задача $-\Delta u + au = 0$ в $\Omega \backslash \gamma$, $\ell u = 0$ на $\partial\Omega$, $u = 0$ на γ має лише тривіальний розв'язок. Тоді спектр задачі* (14) *при $m = 3$ містить зліченну кількість послідовностей власних значень, які прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$, проте мають різну швидкість прямування залежно від послідовності.*

Нехай μ — власне значення оператора B, а спектр $\{\mu_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ оператора K_μ є простим. Тоді існує зліченна серія власних значень λ_k^ε, $k \in \mathbb{N}$, які володіють асимптотикою $\lambda_k^\varepsilon = \varepsilon\mu + \varepsilon^2 \mu_1^{(k)} + O(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \to 0$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є дослідженням в теорії лінійних самоспряжених операторів та спектральній теорії диференціальних операторів. Вона містить нові результати з теорії операторів Шредінґера та Штурма-Ліувілля, теорії крайових задач для еліптичних операторів, які мають безпосереднє застосування у сучасній фізичній науці, зокрема, нерелятивістській квантовій механіці та теорії сильно неоднорідних середовищ. Запропоновано новий метод дослідження рівномірної і сильної резольвентних збіжностей сімей сингулярно збурених операторів, який ґрунтується на асимптотичному аналізі розв'язків диференціальних рівнянь. Шляхом доведення рівномірної резольвентної збіжності операторів Шредінґера із локальними збуреннями потенціалів побудовано важливі у фізиці точні моделі, які є найкращими апроксимаціями цих сімей операторів в класі операторів Шредінґера з точковими взаємодіями чи взаємодіями на кривих. В разі, коли немає рівномірної резольвентної збіжності, точні моделі отримано як результат асимптотичного аналізу спектрів таких операторів. Побудована теорія операторів Шредінґера з $(a\delta' + b\delta)$-подібними збуреннями потенціалів та математична теорія одновимірного атома водню. Обидві фізичні проблеми були предметом багаторічних наукових дискусій.

Запропоновано правильне математичне формулювання та знайдено розв'язок проблеми δ'-потенціалу. Доведено рівномірну резольвентну збіжність операторів Шредінґера з $(a\delta'+b\delta)$-подібними збуреннями потенціалів і локальними сингулярними збуреннями рангу два. Описано клас породжених точковими взаємодіями самоспряжених операторів, які виникають як оператори енергії у квантових системах з локалізованими диполями. Результати узагальнено на випадок двовимірних операторів Шредінґера з потенціалами дипольного характеру, які сконцентровані в околі замкнених кривих.

Знайдено відповідь на основне питання в одновимірній моделі атома водню, а саме, чи потенціали Кулона — потенціали зі степеневою особливістю — є проникним для частинок. Для класу операторів Шредінґера з природними регуляризаціями потенціалів типу Кулона доведена рівномірна резольвентна збіжність та знайдені точні моделі. З отриманих результатів випливає, що кожен потенціал типу Кулона в залежності від способу регуляризації може бути як проникним, так і відбивним. Також встановлено критерій проникності.

Для операторів Шредінґера з нелінійною залежністю потенціалів від сталої взаємодії знайдено умови, при яких існують від'ємні власні значення з пороговою поведінкою, а саме, коли їх поглинає нижня межа неперервного спектру. Побудовані асимптотичні формули для порогових власних значень. Досліджено також вплив локальних сингулярних збурень вагових функцій на спектри операторів Штурма-Ліувілля та еліптичних диференціальних операторів в двовимірних обмежених областях.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Головатий Ю. Д., Манько С. С. Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'-подібними потенціалами. *Український математичний вісник.*–2009.–**Т.6**, N2.– С.173–212.

2. Golovaty Yu. D., Hryniv R. O. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* **43** (2010) 155204 (14pp); Corrigendum: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* **44** (2011) 049802 (1pp).

3. Golovaty Yu., Hryniv R. Norm resolvent convergence of singularly scaled Schrödinger operators and δ'-potentials. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics,* **143**(4) (2013), 791–816.

4. Golovaty Yu. Schrödinger operators with $(\alpha\delta' + \beta\delta)$-like potentials: norm resolvent convergence and solvable models. *Methods of Functional Analysis and Topology,* **18**(3) (2012), pp. 243–255.

5. Golovaty Yu. 1D Schrödinger operators with short range interactions: two-scale regularization of distributional potentials. *Integral Equations and Operator Theory,* **75**(3) (2013) pp. 341–362.

6. Golovaty Yu. Two-parametric δ'-interactions: approximation by Schrödinger operators with localized rank-two perturbations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* **51**(25) (2018) 255202.

7. Golovaty Yu. Schrödinger operators with singular rank-two perturbations and point interactions. *Integral Equations and Operator Theory,* **90**, 57 (2018).

8. Golovaty Yu. Some remarks on 1D Schrödinger operators with localized magnetic and electric potentials. *Frontiers in Physics,* **7** (2019) pp. 70-78.

9. Golovaty Yu. Eigenvalues of Schrödinger operators near thresholds: two term approximation. *Methods of Functional Analysis and Topology,* **26**(1) (2020), pp. 76–87.

10. Golovaty Yu. On coupling constant thresholds in one dimension. *Carpathian Mathematical Publications,* **13**(1), (2021) pp. 22–38.

11. Golovaty Yu. 1D Schrödinger operators with Coulomb-like potentials. *Journal of Mathematical Physics,* **60**, 082105 (2019).

12. Golovaty Yu. 2D Schrödinger operators with singular potentials concentrated near curves. *Applicable Analysis,* (2020). Published online: 15 Dec 2020, doi: 10.1080/00036811.2020.1859496.

13. Golovaty Yu. On spectrum of strings with δ'-like perturbations of mass density. *Вісник Львівського ун-ту, Серія мех.-мат.*–2020.– Вип. **89**.– С.60–79.

14. Golovaty Yu., Gomez D., Lobo M. and Perez E. Asymptotics for the eigenelements of vibrating membranes with very heavy thin inclusions. *Comptes Rendus Mécanique,* **330**(11) (2002), pp. 777–782.

15. Golovaty Yu., Gomez D., Lobo M. and Perez E. On vibrating membranes with very heavy thin inclusions. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences,* **14**(7) (2004) pp. 987–1034.

16. Golovaty Yu. On Schrödinger operators with singular rank-two perturbations. *Intern. Conf. in Functional Analysis dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach*, 18-23 September, 2017, Lviv, Ukraine. P. 40–41.

17. Golovaty Yu. On W_2^{-2}-perturbations of 1-D Schrödinger operators with Coulomb potential. *Intern. Conf. on Differential Equations dedicated to 110th anniv. of Ya. Lopatynsky*, Lviv, Ukraine, September 20-–24, 2016.— p.56.

18. Головатий Ю. Д. Оператори Шредингера зі сингулярними потенціалами. *Міжнар. наук. конф. " Диференціальні рівняння та їх застосування" до 70-річчя акад. М. О. Перестюка,* Ужгород, 19-21 травня 2016.– C.57.

19. Golovaty Yu. 1-D Schrödinger operators with singular localized potentials. *Spectral Theory and Differential Equations: Inter. Conf. in honor of V. A. Marchenko's 90th birthday,* August 20-24, 2012, Kharkiv, Ukraine. P.38-39.

20. Golovaty Yu. 1-D Schrödinger operators with singular local perturbations and point interactions// *Intern. Conf. dedicated to 120-th anniversary of Stefan Banach,* L'viv, Ukraine, September 17–21, 2012. P.38.

21. Golovaty Yu. Returning to the subject of Schrödinger operators with pseudopotentials. *Міжн. математична конф. ім. В.Я. Скоробогатька,* Дрогобич, Україна,19–23 вересня, 2011.– C.51.

22. Golovaty Yu. On Schrödinger operators with point interactions. *Intern. Conf. on Functional Analysis dedicated to the 90th Anniversary of V. E. Lyantse,* Lviv, Ukraine, 17–21 November 2010. P. 40–41.

23. Головатий Ю. Д., Манько С. С. Асимптотика спектру оператора Шредингера з δ'-подібним збуренням потенціалу. *Міжн. наук. школа-конф. "Тарановські читання",* Харків, 21-25 квітня 2008 р.– C.191.

24. Golovaty Yu., Man'ko S., On the Schrödinger operator with δ'-interaction. *The Tenth Intern. Conf. on Integral Methods in Science and Engineering 2008*, Santander, Spain, July 7–10, 2008. P.91.

25. Головатий Ю. Д., Манько С. С. Оператор Шредингера з δ'-потенціалом: неоднозначність моделі. *Міжн. конф. "Сучасні проблеми механіки та математики", присвячена 80-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С. Підстригача,* Львів, 25–29 травня 2008 р.– C.105.

26. Головатий Ю., Манько С. Асимптотика власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля з δ'-подібним потенціалом. *XIV Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", присвячена 90-річчю з дня народження проф. О. М. Костовського,* Львів, 2–4 жовтня 2007 р.– С.51.

27. Головатий Ю. Д. Коливні системи з тонкими включеннями. Спектральні властивості. *XII Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", присвячена 70-річчю з дня народження Й. В. Людкевича і 30-річчю ф–ту прикл. матем. та інформ-ки,* 4–6 жовтня 2005 р., Львів.– С.67.

28. Golovaty Yu. On vibration of membrane with soft thin inclusions. *Intern. Conf. "Differential Equations and Related Topics" dedicated to Ivan G. Petrovskii,* Moskow, May 16–22, 2004. P.73–74.

29. Golovaty Yu. Decomposition of eigenvalues of infinite multiplicity, *Intern. Conf. Nonlinear Partial Differential Equations,* Kyiv, August 22–28, 2001. P. 49.

30. Gołowaty J. O silnie zaburzunych zagadnieniach spektralnych. *Równania różniczkowe i teoria sterowania.* Krynica, 2000. P.15.

АНОТАЦІЯ

Головатий Ю. Д. *Сингулярно збурені диференціальні оператори у моделях квантової механіки.*— Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — Диференціальні рівняння (111 — Математика).— Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів — 2021.

Дисертаційна робота присвячена побудові та дослідженню математичних моделей, які описують явища квантової механіки. Метою роботи є побудова так званих точних моделей, які дають не лише якісний опис реального процесу, але й їх можна відносно просто розв'язати, отримавши кількісні характеристики. В праці побудовано математичну теорію одновимірного атома водню: знайдено умови збіжності сімей операторів Шредингера з різноманітними регуляризаціями потенціалів типу Кулона, побудовано клас точних моделей і доведено, що вибір точної моделі критично залежить від форми регуляризації. Також розв'язано проблему δ'-потенціалу для одно- та двовимірних операторів Шредингера: встановлено рівномірну резольвентну збіжність різноманітних сімей операторів Шредингера з локальними сингулярними збуреннями і конструктивно побудовано граничні оператори, які є найкращим наближенням реального квантово-механічного процесу в класі гамільтоніанів з точковими взаємодіями чи взаємодіями на одновимірних многовидах. Проведено асимптотичний аналіз спектрів операторів Шредингера з локальними збуреннями потенціалів, операторів Штурма-Ліувілля зі сингулярними збуреннями вагових функцій та операторів еліптичних крайових задач зі

збуренням вагових функцій в околі замкнених кривих. Знайдено умови існування від'ємних власних значень для одновимірних операторів Шредингера та умови їхнього поглинання неперервним спектром при малих сталих взаємодії.

Ключові слова: оператор Шредингера, сингулярний потенціал, δ'-потенціал, потенціал Кулона, одновимірний атом водню, задача розсіювання, асимптотика спектру, точна модель, точкова взаємодія, збурення скінченного рангу, магнітний потенціал, резонанс нульової енергії, напівзв'язний стан, оператор Штурма-Ліувілля, концентровані маси.

АННОТАЦИЯ

Головатый Ю. Д. *Сингулярно возмущенные дифференциальные операторы в моделях квантовой механики.*— Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — Дифференциальные уравнения (111 Математика). — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов — 2021.

Диссертационная работа посвящена построению и исследованию математических моделей, описывающих явления квантовой механики. Целью работы является построение так называемых точно решаемых моделей, которые дают не только качественное описание реального процесса, но их также можно относительно просто решить, получив количественные характеристики. В работе построена математическая теория одномерного атома водорода: найдены условия сходимости семейств операторов Шредингера с различными регуляризациями потенциалов типа Кулона, построен класс точных моделей и доказано, что выбор точной модели критически зависит от формы регуляризации. Также решена проблема δ'-потенциала для одно- и двумерных операторов Шредингера: доказана равномерная резольвентная сходимость различных семейств операторов Шредингера с локальными сингулярными возмущениями и конструктивно построены предельные операторы, которые являются наилучшим приближением реального квантово-механического процесса в классе гамильтонианов с точечными взаимодействиями или взаимодействиями на одномерных многообразиях. Проведен асимптотический анализ спектров операторов Шредингера с локальными возмущениями потенциалов, операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными возмущениями весовых функций и операторов эллиптических краевых задач с возмущением весовых функций в окрестности замкнутых кривых. Найдены условия существования отрицательных собственных значений для одномерных операторов Шредингера и условия их поглощения непрерывным спектром при малых постоянных взаимодействия.

Ключевые слова: оператор Шредингера, сингулярный потенциал, δ'-потенциал, потенциал Кулона, одномерный атом водорода, задача рассеяния, асимптотика спектра, точно решаемая модель, точечное взаимодействие, возмущение конечно-

го ранга, магнитный потенциал, резонанс нулевой энергии, полусвязанное состояние, оператор Штурма-Лиувилля, концентрированные массы.

ABSTRACT

Yuriy D. Golovaty. *Singularly perturbed differential operators in models of quantum mechanics.*— Qualification scientific paper, manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, specialty 01.01.02 — Differential Equations (111 — Mathematics).— Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2021.

The work is devoted to the study of mathematical models that arose from quantum mechanics. The main aim is to build so-called exactly solvable models, which not only provide a qualitative description of the actual process, but can also be relatively easily solved to obtain quantitative characteristics such as spectra or scattering data. The object of research is differential operators with singularly perturbed coefficients. The main tool is asymptotic methods for differential equations, which can be used to prove convergence of families of perturbed operators in the uniform or strong resolvent topologies. The domains of the limit operators can be described in terms of boundary conditions or coupling conditions on sets, where the perturbations are localized. These operators are the solvable models that best approximate an actual physical process in the class of point interactions or interactions on submanifolds.

A mathematical theory of the one-dimensional hydrogen atom is constructed. The problem has given rise to many scientific discussions and many publications in the physical and mathematical literature. We have studied Schrödinger operators with Coulomb-type potentials, i.e., potentials with power singularities. To construct a Hamiltonian of the hydrogen atom, i.e., a self-adjoint operator corresponding to the energy of system, it is necessary to explicitly indicate coupling conditions at the point of singularity. We have considered more general problem for regularizations of Coulomb-type potentials and we have proved the convergence of the corresponding operators in the norm resolvent topology. The consequence of these results is a complete mathematical description of the one-dimensional model of hydrogen atom.

The Thesis contains a complete mathematical solution to the well known problem of δ'-potential in quantum mechanics. The problem consists in constructing one-dimensional solvable models for the localized dipole. The norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials has been established for the shapes of perturbation with compact supports. The solvable models have been constructed that can be used to describe the dipole interactions. These results have been extended to the shapes of the Faddeev-Marchenko class. Also, we have described the interaction of δ and δ' potentials. We have studied the families of Schrödinger operators, which can be interpreted as a regularization of Hamiltonians with pseudopotentials $\alpha\delta' + \beta\delta$. The regularized potentials contain two parameters associated with the localization rate of the δ-like and δ'-like sequences, respectively. The convergence of such operators has

been obtained in the norm resolvent topology and it has been shown that the solvable models depend not only on the potential shapes, but also on the ratio of the localization rates of each term in the perturbations.

We have generalized the problem of δ'-potential to the two-dimensional case. The spectral properties of Schrödinger operators with the dipole type potentials concentrated in a vicinity of a closed curve have been studied. Solvable models with interactions on the curve have been obtained by construction of the asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions. The coupling conditions on the curve depend in nontrivial way on the geometry of curve and the spectral characteristics of localized potentials.

Since the product of the first derivative of Dirac's function and a smooth function is always a linear combination of two functionals δ and δ', the δ'-potential can be formally treated as a perturbation by an operator of rank two. We have established convergence in the uniform resolvent topology of Schrödinger operators with singular local perturbations of rank two. For such families of operators, several qualitatively different cases of the limit behavior were obtained and a wide class of solvable models with point interactions was constructed.

We have also established conditions for the existence of negative eigenvalues and conditions when these eigenvalues are absorbed by the lower bound of continuous spectrum as a coupling constant goes to zero. The threshold behavior of negative eigenvalues has been studied for families of Schrödinger operators with potentials that depend on a coupling constant in the nonlinear way. Two-term asymptotics of threshold eigenvalues have been constructed.

The spectral properties of Sturm-Liouville operators and boundary value problems for the elliptic operators with singular perturbation of the weight function have been studied. These asymptotic results give non-trivial examples of self-adjoint operators acting in variable Hilbert spaces for which the behavior of spectrum and eigenspaces is described by a non-self-adjoint operator with nontrivial Jordan cells.

The thesis is a mathematical research in fields of the asymptotic analysis of differential operators and the spectral theory of linear operators. The obtained results are new and have direct application in nonrelativistic quantum mechanics. Most of them concern one-dimensional physical models, which are not a simplification of 3-dimensional ones, but play the role of primary mathematical models in various branches of modern physics. The models of one-dimensional physics have become relevant in recent decades, because only now can they be implemented experimentally. From the mathematical viewpoint, some problems of one-dimensional physics are much more complicated than the corresponding problems in higher dimensions. In particular, this applies to the problem of hydrogen atom. The mathematics of one-dimensional models also underlies the modern theory of quantum graphs, which describes the processes in quantum waveguides.

Key words: Schrödinger operator, singular potential, δ'-potential, Coulomb potential, one-dimensional hydrogen atom, scattering problem, asymptotics of spectrum, solvable model, point interaction, finite rank perturbation, magnetic potential, zero-energy resonance, half-bound state, Sturm-Liouville operator, concentrated masses.

Підписано до друку 01.11.2021 р. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк.2,32. Тираж 100 прим. Зам. № 150.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.