

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Головатий Юрій Данилович

УДК 517.928+539.182

ДИСЕРТАЦІЯ

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ
У МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

01.01.02 — диференціальні рівняння

111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Ю.Д. Головатий

Львів — 2021

АНОТАЦІЯ

Головатий Ю. Д. *Сингулярно збурені диференціальні оператори у моделях квантової механіки.*— Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — Диференціальні рівняння (111 — Математика).— Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів — 2021.

Праця присвячена дослідженню математичних моделей, які виникли в атомній фізиці. Аналіз диференціальних операторів таких, як оператори Шрединґера чи Штурма-Ліувілля, є основним джерелом інформації про процеси, які вивчає нерелятивістська квантова механіка. Метою такого аналізу є опис спектрів операторів — знаходження енергетичних рівнів квантовомеханічних систем, опис даних розсіювання — обчислення ймовірності проходження елементарних частинок через енергетичні потенціали, знаходження розв'язків обернених спектральних задач та обернених задач розсіювання — відновлення форми потенціалів за спектральними даними чи даними розсіювання. У більшості задач треба провести не лише якісне дослідження, але й отримати якомога точніший кількісний результат — обчислити енергетичні рівні, ймовірність проходження чи відбиття. Тому фізика ставить до математичних моделей дві важливі вимоги: моделі повинні адекватно описувати реальний процес і водночас вони повинні мати явні розв'язки. Ці вимоги, звісно, конфліктують, бо реалістична модель фізичного процесу мусить бути доволі складною з погляду математики, а з іншого боку, диференціальних рівнянь, які можна явно розв'язати, надто мало.

Проте у квантовій механіці таки вдається будувати математичні моделі, які задовольняють обидвом вимогам. Такі моделі називають точними. Побудова точних моделей та їх дослідження — це окремий розділ теорії операторів Шрединґера та Штурма-Ліувілля. Позаяк у квантово-механічних процесах взаємодія частинок з потенціалами часто відбувається на малих просторових зонах, тобто вплив потенціалів є локальним, то такі взаємодії можна замінити т. з. точковими взаємодіями. Наприклад, замість лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами у моделі можна розглянути рівняння зі сталими коефіцієн-

тами, розв'язки якого підпорядковані деякими умовами спряження на скінченній чи нескінченній дискретній множині, де локалізується потенціал. В загальному випадку, потенціали, які локалізовані в околі підмноговидів меншої вимірності, можна замінити умовами спряження на цих підмноговидах, значно спростивши модель. Тут виникає досить складна математична проблема: якими саме умовами спряження чи крайовими умовами треба замінити локалізований потенціал, щоб отримана точна модель описувала реальний квантовий процес з найбільшою точністю, як з якісного, так і кількісного боків.

Варто зауважити, що точні моделі часто описують в термінах операторів Шрединґера з псевдопотенціалами — узагальненими функціями з носіями на множинах міри нуль. Але багато формальних диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах не мають математичного сенсу — на них не поширюються результати теорії диференціальних рівнянь з регулярними коефіцієнтами. Тому проблема вибору правильних крайових умов на підмноговидах меншої вимірності, а точніше вибору правильного самоспряженого оператора як гамільтоніана системи, залишається відкритою.

Основним об'єктом дослідження є диференціальні оператори із залежними від малого параметра коефіцієнтами, які виникають як регуляризація згаданих вище псевдопотенціалів. Основним інструментом є асимптотичні методи, за допомогою яких вдається довести збіжність сімей операторів в рівномірній чи сильній резольвентних топологіях. Граничні оператори, області визначення яких явно описані в термінах крайових умов чи умов спряження на множинах локалізації збурень, і є тими точними моделями, які найкраще апроксимують реальний процес в класі чи то точкових взаємодій, чи то взаємодій на підмноговидах. У дисертаційній роботі для одно- та двовимірних задач квантової механіки побудовано такі точні моделі, а також розв'язані суміжні проблеми, пов'язані з їхнім існуванням. Зокрема, побудовано асимптотику спектрів та власних підпросторів для операторів Шрединґера зі сингулярними збуреннями потенціалів та операторів Штурма-Ліувілля з сингулярними ваговими функціями, знайдено нові умови існування від'ємних власних значень для сімей одновимірних операторів Шрединґера, а також умови, коли ці власні значення поглинає неперервний спектр.

Перші три розділи дисертації стосуються відомої в квантовій механіці проб-

леми δ' -потенціалу. Вона полягає у побудові одновимірної точної моделі для локалізованого диполю — оператора Шрединґера з потенціалом, який породжений парою близько розташованих частинок із зарядами різного знаку і який є поєднанням високої енергетичної стіни і глибокої енергетичної ями. Проблема стала предметом гострих наукових дискусій в минулому столітті і довгий час вважали, що вона була розв'язана в середині 80-х років. Проте цей результат виявився помилковим і ми знайшли помилку у його доведенні. Крім того, саме формулювання проблеми — знайти єдину точну модель для оператора Шрединґера з δ' -потенціалом — було математично некоректним. На відміну від δ -потенціалу δ' -потенціал чутливий до способу регуляризації. Якщо δ' -потенціал замінити δ' -подібною послідовністю $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$, де V — достатньо гладка функція з компактним носієм, то точна модель залежатиме від профілю регуляризації V . Причому ця залежність є складною, бо елементи матриці точкових взаємодій в нелінійний спосіб залежать не лише від інтегральних характеристик профілю, але й від спектральних властивостей оператора Шрединґера з потенціалом V , а саме, від існування в нього резонансів нульової енергії. За формальним гамільтоніаном з δ' -потенціалом ховається багатоманіття квантово-механічних процесів з різними, взагалі кажучи, властивостями. Саму ж проблему треба розуміти як задачу найкращої апроксимації в класі точкових взаємодій операторів Шрединґера з δ' -подібними потенціалами фіксованого профілю.

Розділ 1 містить повний математичний розв'язок проблеми δ' -потенціалу. У підрозділі 1.2 доведена рівномірна резольвентна збіжність операторів Шрединґера з δ' -подібними збуреннями потенціалу для профілів, які мають компактний носій. Побудовано точні моделі, які в залежності від фізичного контексту можна застосовувати при описі дипольних взаємодій. У підрозділі 1.3 ці результати узагальнено на профілі з класу Фаддєєва-Марченка. Показано, що відсутність у профілю компактного носія не змінює вигляду точних моделей, проте значно ускладнює техніку доведення. В цьому разі дослідження спирається на результати теорії розсіювання, зокрема, асимптотику розв'язків Йоста. Клас Фаддєєва-Марченка є максимальним у цій задачі, оскільки профілі з ширших класів вже не завжди є локальними збуреннями. У цьому розділі також доведено існування явища резонансів для ймовірності проходження через потенціали дипольного

типу, яке раніше було відкрите шляхом безпосередніх обчислень для операторів з кусково-сталими потенціалами.

У розділі 2 описано взаємодію δ та δ' потенціалів. Об'єктом дослідження були сім'ї одновимірних операторів Шредингера, які можна трактувати як регуляризацию гамільтоніанів з псевдопотенціалами вигляду $\alpha\delta' + \beta\delta$. Регуляризовані потенціали містили два параметри, які відповідали за швидкість локалізації δ -подібних та δ' -подібних послідовностей відповідно. Доведена збіжність таких операторів в рівномірній резольвентній топології і показано, що точні моделі залежать не лише від профілів потенціалів, але й відношення швидкостей локалізації окремих доданків у збуреннях.

Позаяк добуток похідної функції Дірака і гладкої функції завжди є лінійною комбінацією двох функціоналів δ та δ' , то на формальному рівні δ' -потенціал можна трактувати як збурення оператором рангу два. Розділ 3 присвячений дослідженню граничної поведінки в рівномірній резольвентній топології операторів Шредингера з локальними сингулярними збуреннями рангу два, які поєднані зі збуреннями δ -подібними потенціалами. Для таких сімей операторів отримано декілька якісно різних випадків граничної поведінки і побудовано широкий клас точних моделей з точковими взаємодіями різних типів.

У розділі 4 вивчено граничну поведінку сімей одновимірних операторів Шредингера з одночасним локальним збуренням як електричного, так і магнітного потенціалів, і описано вплив сингулярних магнітних полів на точні моделі. Цей вплив суттєво відрізняється від впливу неперервних магнітних полів, яких в одновимірних операторах Шредингера можна позбутися за допомогою калібрувального перетворення. Насамперед це стосується ситуації, коли магнітні поля взаємодіють із електричними полями, збуреними операторами рангу два. Локалізоване магнітне поле є перешкодою для рівномірної резольвентної збіжності, тому збіжність операторів з магнітними полями була доведена в сильній резольвентній топології.

Результати розділу 2 можна застосувати у спектральній теорії операторів Шредингера для встановлення умов існування від'ємних власних значень та умов, коли ці значення поглинаються нижньою межею неперервного спектру при нескінченно малих сталих взаємодії. Вивчення т. з. порогової поведінки власних

значень має самостійну цінність для спектральної теорії, але водночас порогова поведінка має стосунок до питань стійкості розв'язків рівняння Кортевега-Вріза та існування “брізерів” – пульсуючих локалізованих нелінійних хвиль – для дискретних нелінійних операторів Шрединґера. У розділі 5 порогова поведінка від’ємних власних значень вивчена для сімей операторів Шрединґера з потенціалами, які нелінійно залежать від сталих взаємодії. Побудовані двочленні асимптотики порогових власних значень.

Розділ 6 присвячено проблемі одновимірного атома водню, яка в останні півстоліття породила гострі наукові дискусії та більше двох тисяч публікацій у фізичній та математичній літературі. Об’єктом дослідження є оператори Шрединґера з потенціалами типу Кулона — потенціалами, які мають степеневі особливості. Особливість потенціалу спричиняє негладкість розв’язків диференціального рівняння, а тому розв’язки, визначені в односторонніх околах точки сингулярності, треба поєднати деякими додатковими умовами. Щоб побудувати гамільтоніан атома водню — самоспряжений оператор, що відповідає енергії системи, — потрібно явно вказати умови спряження для хвильової функції в точці сингулярності потенціалу Кулона. Проте умов, які породжують самоспряжений оператор, є багато і виникає проблема правильного математично і фізично обґрунтованого їхнього вибору. Однозначної відповіді тут немає, бо проблема схожа до проблеми δ' -потенціалу: обидва типи формальних диференціальних виразів є чутливими то того, як ми їх регуляризуємо. У цьому розділі вивчена загальніша задача про регуляризації потенціалів типу Кулона і їх збіжність в рівномірній резольвентній топології. Наслідком цих результатів є повний математичний опис одновимірної моделі атома водню. Історично склалося, що основна наукова суперечка стосувалася питання, чи можуть частинки проникати з ненульовою ймовірністю через потенціали типу Кулона. Доведено, що для кожного з таких потенціалів існують як регуляризації, для яких потенціали асимптотично непроникні, так і регуляризації, коли ймовірність проходження має ненульову границю. Точні моделі з нетривіальним коефіцієнтом проходження виникають лише тоді, коли регуляризації потенціалу Кулона є збіжними в просторі узагальнених функцій.

У розділ 7 результати двох перших розділів узагальнено на двовимірний ви-

падок. Вивчено спектральні властивості операторів Шредингера із потенціалами дипольного типу, які сконцентровані в околі замкненої кривої. Точні моделі із взаємодіями на кривій отримано в ході побудови асимптотики власних значень та власних функцій збурених операторів. В умовах спряження на кривій ми дістали складну залежність між геометрією кривої та спектральними характеристиками профілів локалізованих потенціалів. Оператори Шредингера з потенціалами-розподілами, зосередженими на кривих, поверхнях чи метричних графах, моделюють квантові системи із зарядженими включеннями, рідкі квантові графи, квантові хвилеводи.

Два останні розділи стосуються моделей механіки неоднорідних середовищ. Вивчено спектральні властивості операторів Штурма-Ліувілля та крайових задач для еліптичного оператора із сингулярними збуреннями вагової функції. В розділі 8 була доведена рівномірна резольвентна збіжність і побудована асимптотика спектрів для операторів Штурма-Ліувілля із загальними крайовими умовами та δ' -подібним збуренням вагової функції. Розділ 9 містить дослідження асимптотичної поведінки спектрів для еліптичного оператора в обмеженій області з усіма класичними типами крайових умов та збуренням густини в околі замкненої кривої. У двовимірній моделі немає рівномірної резольвентної збіжності збурених операторів, бо граничний оператор, на відміну від дограничних, має некомпактну резольвенту, зокрема, володіє власними значеннями нескінченної кратності. Окрім самостійного значення ці асимптотичні результати дають нетривіальні приклади сімей самоспряжених операторів, що діють у змінних гільбертових просторах, поведінку спектру та власних підпросторів яких описує не-самоспряжений оператор із нетривіальними жордановими клітками.

Дисертаційна робота є математичним дослідженням у галузі асимптотичного аналізу диференціальних операторів та спектральній теорії. Отримані математичні результати є новими і мають безпосереднє застосування у квантовій механіці та механіці неоднорідних середовищ. Більшість з них стосується одновимірних фізичних моделей, які не є спрощенням багатовимірних, а відіграють роль первинних математичних моделей в різних галузях сучасної фізичної науки. Моделі одновимірної фізики стали актуальними саме останніми десятиліттями, бо лише тепер їх можна експериментально реалізувати: обмежити рух атомів до якогось

одного напрямку можна, піддавши їх дії дуже сильних полів чи “утримуючи” в тонких структурах, таких як напівпровідникові квантові дроти чи вуглецеві нанотрубки. З погляду математики деякі задачі одновимірної фізики є набагато складнішими від своїх аналогів у вищих розмірностях. Зокрема, це стосується задачі про атом водню. Математика одновимірних моделей також лежить в основі сучасної теорії квантових графів, яка займається описом процесів у квантових хвилеводах.

Ключові слова: оператор Шредингера, сингулярний потенціал, δ' -потенціал, потенціал Кулона, одновимірний атом водню, задача розсіювання, асимптотика спектру, точна модель, точкова взаємодія, збурення скінченного рангу, магнітний потенціал, резонанс нульової енергії, напівзв'язний стан, оператор Штурма-Ліувілля, концентровані маси.

ABSTRACT

Yuriy D. Golovaty. *Singularly perturbed differential operators in models of quantum mechanics.*— Qualification scientific paper, manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02 — Differential Equations (111 — Mathematics).— Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2021.

The work is devoted to the study of mathematical models that arose from atomic physics. Analysis of differential operators such as the Schrödinger operators and the Sturm-Liouville operators is the main source of information about the processes described by nonrelativistic quantum mechanics. The main purpose of this analysis is to describe the spectra of differential operators and hence to find the energy levels of quantum mechanical systems; to describe the scattering data and hence to calculate the transmission probability of passage of particles through energy potentials; to find solutions of the inverse spectral problems and the inverse scattering problems in order to restore the potentials. In most of the mentioned problems it is necessary not only to

carry out a qualitative study, but also to obtain the most accurate quantitative result, for instance, to calculate the energy levels, the transmission and reflection probabilities. Therefore, there are two important requirements on mathematical models in physics: the models must adequately describe the actual process and at the same time they must have solutions in the explicit form. Of course, these requirements conflict each other, because a realistic model of the physical process must be quite complicated from the mathematical viewpoint, and on the other hand, there are too few differential equations that can be solved explicitly.

However, in quantum mechanics it is possible to build mathematical models that meet both requirements. Such models are called exactly solvable models or simply solvable ones. The solvable models and their study are a part of the theory of Schrödinger and Sturm-Liouville operators. In quantum mechanics, the interactions of particles with potentials often occur in small spatial domains. Since the influence of potentials is local, the interactions can be replaced by the so-called point interactions. For instance, it is possible to replace a linear differential equation with variable coefficients by an equation with constant coefficients, the solutions of which are subject to some coupling conditions on the discrete set where the potential are localized. In the general case, the potentials that are localized in a neighbourhood of some submanifolds of smaller dimension can be replaced with coupling conditions on these submanifolds which simplifies the mathematical model. Therefore, the harder mathematical question comes: how to choose the coupling conditions for a given localized potential so that the solvable zero-range model governs the quantum dynamics of the true interaction with admissible fidelity, both qualitatively and quantitatively. The solvable models are often represented by Schrödinger operators with pseudopotentials which are the distributions supported on a discrete set or submanifold of lower dimension. But many formal differential operators with the distributions in coefficients have no mathematical meaning, because such operators are not covered by the theory of differential equations. Therefore, the problem of choosing the suitable coupling conditions, or rather the correct self-adjoint operator for the exact model, remains open.

The main object of research is differential operators with coefficients dependent on a small parameter; the coefficients are a regularization of the pseudopotentials. The main tool of the investigation is asymptotic methods for differential equations, which

can be used to prove the convergence of families of perturbed operators in the uniform or strong resolvent topologies. The domains of the limit operators can be described in terms of boundary conditions or coupling conditions on sets, where the perturbations are localized. These operators are the solvable models that best approximate an actual physical process in the class of either the point interactions or the interactions on submanifolds. In the Thesis, we have constructed a wide class of solvable models for different problems of quantum mechanics in dimensions one and two. Also, we have constructed the asymptotics of spectra and eigenspaces for Schrödinger operators with singular perturbations of potentials and for Sturm-Liouville operators with singularly perturbed weight functions. We found new conditions when families of one-dimensional Schrödinger operators possess negative eigenvalues, as well as the conditions when these eigenvalues are absorbed by the lower bound of the continuous spectrum.

The first three chapters of the work deal with the well known problem of δ' -potential in quantum mechanics. The problem consists in constructing a one-dimensional solvable model for the localized dipole. The potential of the dipole is generated by a pair of closely spaced particles with charges of different signs. The dipole is a barrier-well junction in which a small region of large repulsive potential is followed by a small region of large attractive potential. The problem has been the subject of many scientific discussions in the last century. It has long been thought that the problem was solved in the mid-1980s. However, this result turned out to be erroneous and we found an error in its proof. In addition, the formulation of the problem of finding a unique solvable model for a Schrödinger operator with δ' -potential was mathematically incorrect. In contrast to the case of δ -potential, the Schrödinger operator with δ' -potential is very sensitive to the way of regularization of this pseudopotential. If we replace the δ' -potential with a δ' -like sequence of the form $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$, where V is a sufficiently smooth function of compact support, then the solvable model depends on the shape of potential V . Moreover, this dependence is not trivial because the point interactions depend not only on the integral characteristics of V , but also on the spectral properties of the Schrödinger operator with potential V , namely the existence of zero energy resonances. Generally speaking, the variety of quantum mechanical processes with different properties is hidden behind the formal Hamiltonian with

δ' -potential. In fact, the problem of δ' -potential should be understood as the problem of the best approximation in the class of point interactions to Schrödinger operators with δ' -like potentials for a given shape V of the regularization

Chapter 1 contains a complete mathematical solution to the problem of δ' -potential. In Section 1.2, the norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ' -like potentials has been established for the shapes of perturbation with compact supports. The solvable models have been constructed that can be used to describe the dipole interactions. In Section 1.3, these results have been extended to the shapes of the Faddeev-Marchenko class. It is shown that the noncompact support of the perturbation does not change the solvable models, but significantly complicates the technique of proof. In this case, the study is based on the results of scattering theory, in particular, the asymptotics of the Jost solutions. The Faddeev-Marchenko class is maximal for the problem, because the perturbations with shapes from wider classes are not always local ones. We have proved the existence of the resonance phenomenon for the transmission probability through the dipole-type potentials, which has been previously discovered by direct calculations for operators with piecewise-constant potentials.

In Chapter 2 we have described the interaction of δ and δ' potentials. The object of the study was families of one-dimensional Schrödinger operators, which can be interpreted as a regularization of Hamiltonians with pseudopotentials $\alpha\delta' + \beta\delta$. The regularized potentials contain two parameters associated with the localization rate of the δ -like and δ' -like sequences, respectively. The convergence of such operators has been obtained in the norm resolvent topology and it has been shown that the solvable models depend not only on the potential shapes, but also on the ratio of the localization rates of each term in the perturbations.

Since the product of the first derivative of Dirac's function and a smooth function is always a linear combination of two functionals δ and δ' , the δ' -the potential can be formally treated as a perturbation by an operator of rank two. Chapter 3 is devoted to the study of asymptotic behavior in the uniform resolvent topology of Schrödinger operators with singular local perturbations of rank two, which are combined with perturbations of δ -like potentials. For such families of operators, several qualitatively different cases of the limit behavior were obtained and a wide class of solvable models with point interactions of different types was constructed.

In Chapter 4, we have studied the limit behavior of families of one-dimensional Schrödinger operators with local perturbations of both electric and magnetic potentials, and have described influence of the singular magnetic fields on solvable models. This effect differs significantly from the effect of continuous magnetic fields, which can be eliminated in the Schrödinger operator by means of a gauge transformation. First of all, this applies to the situation when the magnetic fields interact with electric fields perturbed by operators of rank two. The localized magnetic field is an obstacle to the norm resolvent convergence, so the convergence of operators with magnetic fields has been proved in the strong resolvent topology.

The results of Chapter 2 can be used in the spectral theory of Schrödinger operators to establish conditions for the existence of negative eigenvalues and conditions when these eigenvalues are absorbed by the lower bound of continuous spectrum as a coupling constant goes to zero. The study of so-called threshold behavior of eigenvalues has an independent significance for the spectral theory, but at the same time the threshold behavior is related to the stability of solutions of the Korteweg de Vries equation and the existence of “breathers” (pulsating localized nonlinear waves) for discrete nonlinear Schrödinger operators. In Chapter 5, the threshold behavior of negative eigenvalues has been studied for families of Schrödinger operators with potentials that depend on a coupling constant in the nonlinear way. Two-term asymptotics of threshold eigenvalues have been constructed.

Chapter 6 is devoted to the problem of one-dimensional hydrogen atom, which in the last half century has given rise to many scientific discussions and more than two thousand publications in the physical and mathematical literature. The object of the study is Schrödinger operators with Coulomb-type potentials, i.e., potentials that have power singularities. Singularity of the potential causes non-smoothness of solutions of the differential equation, and therefore the solutions defined in the one-sided neighborhoods of the singular point must be subject to some additional conditions. To construct the Hamiltonian of hydrogen atom, i.e., a self-adjoint operator corresponding to the energy of system, it is necessary to explicitly indicate the coupling conditions at the point of singularity of the Coulomb potential. However, there are many such conditions and there is a problem of the choice. There is no single answer here, because the problem is similar to the δ' potential problem: both types of formal di-

fferential expressions are very sensitive to how we regularize them. In this section we have studied more general problem of regularization of Coulomb-type potentials and convergence of the corresponding operators in the norm resolvent topology. The consequence of these results is a complete mathematical description of the one-dimensional model of hydrogen atom. Historically, the main scientific controversy has been over whether particles can penetrate with a nonzero probability through the Coulomb-type potentials. It has been proved that for such potentials there are both regularizations for which the potentials are asymptotically impermeable, and regularizations for which the probability of passage has a nonzero limit. Solvable models with a nontrivial transmission coefficient arise only when the regularizations of the Coulomb potential converge in the space of distributions.

In Chapter 7, the results of the first two chapters have been extended to the two-dimensional case. The spectral properties of Schrödinger operators with potentials concentrated in a vicinity of a closed curve have been studied. Solvable models with interactions on the curve have been obtained by construction of the asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions. The coupling conditions on the curve depend in nontrivial way on the geometry of curve and the spectral characteristics of localized potentials. The Schrödinger operators with distributional potentials supported by curves, surfaces, or metric graphs describe quantum systems with charged inclusions, liquid quantum graphs, and quantum waveguides.

The last two sections deal with some models of mechanics of inhomogeneous media, physics of liquid crystals, physical chemistry of polymers, and theory of cell membranes. The spectral properties of Sturm-Liouville operators and boundary value problems for the Laplace operator with singular perturbation of the weight function have been studied. In Chapter 8, the norm resolvent convergence of Sturm-Liouville operators with general boundary conditions and δ' -like perturbations of the weight function has been proved. Also, the asymptotics of their spectra have been constructed. Chapter 9 is devoted to the study of the spectra of the Laplace operator in bounded domain with all classical types of boundary conditions and density perturbations in a vicinity of a closed curve. In the two-dimensional model there is no uniform resolvent convergence of perturbed operators, because the limit operator has a noncompact resolvent, in particular, has eigenvalues of infinite multiplicity. These

asymptotic results give non-trivial examples of self-adjoint operators acting in variable Hilbert spaces for which the behavior of spectrum and eigenspaces is described by a non-self-adjoint operator with nontrivial Jordan cells.

The Thesis is a mathematical research in fields of the asymptotic analysis of differential operators and the spectral theory of linear operators. The obtained results are new and have direct application in nonrelativistic quantum mechanics. Most of them concern one-dimensional physical models, which are not a simplification of 3-dimensional ones, but play the role of primary mathematical models in various branches of modern physics. The models of one-dimensional physics have become relevant in recent decades, because only now can they be implemented experimentally. From the mathematical viewpoint, some problems of one-dimensional physics are much more complicated than the corresponding problems in higher dimensions. In particular, this applies to the problem of hydrogen atom. The mathematics of one-dimensional models also underlies the modern theory of quantum graphs, which describes the processes in quantum waveguides.

Key words: Schrödinger operator, singular potential, δ' -potential, Coulomb potential, one-dimensional hydrogen atom, scattering problem, asymptotics of spectrum, solvable model, point interaction, finite rank perturbation, magnetic potential, zero-energy resonance, half-bound state, Sturm-Liouville operator, concentrated masses.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Головатий Ю. Д., Манько С. С. Точні моделі для операторів Шредінґера з δ' -подібними потенціалами. *Український математичний вісник.*—2009.— **Т.6**, N2.— С.173–212. (стаття доступна онлайн)
2. Golovaty Yu. D., Hryniv R. O. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ' -like potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **43** (2010) 155204 (14pp). doi: [10.1088/1751-8113/43/15/155204](https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/15/155204); Corrigendum: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **44** (2011) 049802 (1pp). doi: [10.1088/1751-8113/44/4/049802](https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/4/049802)
3. Golovaty Yu., Hryniv R. Norm resolvent convergence of singularly scaled Schrödinger operators and δ' -potentials. *Proceedings of the Royal Society of Edin-*

- burgh: Section A Mathematics*, **143**(4) (2013), 791–816.
doi: [10.1017/S0308210512000194](https://doi.org/10.1017/S0308210512000194).
4. Golovaty Yu. Schrödinger operators with $(\alpha\delta' + \beta\delta)$ -like potentials: norm resolvent convergence and solvable models. *Methods of Functional Analysis and Topology*, **18**(3) (2012), pp. 243–255. (статья доступна онлайн)
 5. Golovaty Yu. 1D Schrödinger operators with short range interactions: two-scale regularization of distributional potentials. *Integral Equations and Operator Theory*, **75**(3) (2013) pp 341–362. doi: [10.1007/s00020-012-2027-z](https://doi.org/10.1007/s00020-012-2027-z)
 6. Golovaty Yu. Two-parametric δ' -interactions: approximation by Schrödinger operators with localized rank-two perturbations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **51**(25) (2018) 255202. doi: [10.1088/1751-8121/aac110](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aac110)
 7. Golovaty Yu. Schrödinger operators with singular rank-two perturbations and point interactions. *Integral Equations and Operator Theory*, **90**, 57 (2018). doi: [10.1007/s00020-018-2482-2](https://doi.org/10.1007/s00020-018-2482-2)
 8. Golovaty Yu. Some remarks on 1D Schrödinger operators with localized magnetic and electric potentials. *Frontiers in Physics*, **7** (2019) pp. 70-78. In Research Topic “Contact Interactions in Quantum Mechanics: Theory, Mathematical Aspects and Applications.” doi: [10.3389/fphy.2019.00070](https://doi.org/10.3389/fphy.2019.00070)
 9. Golovaty Yu. Eigenvalues of Schrödinger operators near thresholds: two term approximation. *Methods of Functional Analysis and Topology*, **26**(1) (2020), pp. 76–87. doi: [10.31392/MFAT-npu26_1.2020.06](https://doi.org/10.31392/MFAT-npu26_1.2020.06)
 10. Golovaty Yu. On coupling constant thresholds in one dimension. *Carpathian Mathematical Publications*, **13**(1), (2021) pp. 22–38. doi: [10.1007/s00020-018-2482-2](https://doi.org/10.1007/s00020-018-2482-2)
 11. Golovaty Yu. 1D Schrödinger operators with Coulomb-like potentials. *Journal of Mathematical Physics*, **60**, 082105 (2019). doi: [10.1063/1.5099309](https://doi.org/10.1063/1.5099309)
 12. Golovaty Yu. 2D Schrödinger operators with singular potentials concentrated near curves. *Applicable Analysis*, (2020), published online. doi: [10.1080/00036811.2020.1859496](https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1859496)

13. Golovaty Yu. On spectrum of strings with δ' -like perturbations of mass density. *Вісник Львівського ун-ту, Серія мех.-мат.*—2020.— Вип. **89**.— С.60–79. (стаття доступна онлайн)
14. Golovaty Yu., Gomez D., Lobo M. and Perez E. Asymptotics for the eigenvalues of vibrating membranes with very heavy thin inclusions. *Comptes Rendus Mécanique*, **330**(11) (2002), pp. 777–782. doi: [10.1016/S1631-0721\(02\)01531-0](https://doi.org/10.1016/S1631-0721(02)01531-0)
15. Golovaty Yu., Gomez D., Lobo M. and Perez E. On vibrating membranes with very heavy thin inclusions. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, **14**(7) (2004) pp. 987–1034. doi: [10.1142/S0218202504003520](https://doi.org/10.1142/S0218202504003520)

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

16. Golovaty Yu. On Schrödinger operators with singular rank-two perturbations. *Intern. Conf. in Functional Analysis dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach*, 18-23 September, 2017, Lviv, Ukraine. P. 40–41.
17. Golovaty Yu. On W_2^{-2} -perturbations of 1-D Schrödinger operators with Coulomb potential. *Intern. Conf. on Differential Equations dedicated to 110th anniv. of Ya. Lopatynsky*, Lviv, Ukraine, September 20–24, 2016.— p.56.
18. Головатий Ю. Д. Оператори Шрединґера зі сингулярними потенціалами. *Міжнар. наук. конф. “ Диференціальні рівняння та їх застосування” до 70-річчя акад. М. О. Перестюка*, Ужгород, 19-21 травня 2016.— С.57.
19. Golovaty Yu. 1-D Schrödinger operators with singular localized potentials. *Spectral Theory and Differential Equations: Inter. Conf. in honor of V. A. Marchenko’s 90th birthday*, August 20-24, 2012, Kharkiv, Ukraine. P.38-39.
20. Golovaty Yu. 1-D Schrödinger operators with singular local perturbations and point interactions// *Intern. Conf. dedicated to 120-th anniversary of Stefan Banach*, L’viv, Ukraine, September 17–21, 2012. P.38.
21. Golovaty Yu. Returning to the subject of Schrödinger operators with pseudo-potentials. *Міжн. математична конф. ім. В.Я. Скоробогатька*, Дрогобич, Україна, 19–23 вересня, 2011.— С.51.

22. Golovaty Yu. On Schrödinger operators with point interactions. *Intern. Conf. on Functional Analysis dedicated to the 90th Anniversary of V. E. Lyantse*, Lviv, Ukraine, 17–21 November 2010. P. 40–41.
23. Головатий Ю. Д., Манько С. С. Асимптотика спектру оператора Шредингера з δ' -подібним збуренням потенціалу. *Міжн. наук. школа-конф. “Тарнопівські читання”*, Харків, 21-25 квітня 2008 р.– С.191.
24. Golovaty Yu., Man'ko S., On the Schrödinger operator with δ' -interaction. *The Tenth Intern. Conf. on Integral Methods in Science and Engineering 2008*, Santander, Spain, July 7–10, 2008. P.91.
25. Головатий Ю. Д., Манько С. С. Оператор Шредингера з δ' -потенціалом: неоднозначність моделі. *Міжн. конф. “Сучасні проблеми механіки та математики”*, присвячена 80-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С. Підстригача, Львів, 25–29 травня 2008 р.– С.105.
26. Головатий Ю., Манько С. Асимптотика власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля з δ' -подібним потенціалом. *XIV Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”*, присвячена 90-річчю з дня народження проф. О. М. Костовського, Львів, 2–4 жовтня 2007 р.– С.51.
27. Головатий Ю. Д. Коливні системи з тонкими включеннями. Спектральні властивості. *XII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”*, присвячена 70-річчю з дня народження Й. В. Людкевича і 30-річчю ф-ту прикл. матем. та інформ-ки, 4–6 жовтня 2005 р., Львів.– С.67.
28. Golovaty Yu. On vibration of membrane with soft thin inclusions. *Intern. Conf. “Differential Equations and Related Topics” dedicated to Ivan G. Petrovskii*, Moscow, May 16–22, 2004. P.73–74.
29. Golovaty Yu. Decomposition of eigenvalues of infinite multiplicity, *Intern. Conf. Nonlinear Partial Differential Equations*, Kyiv, August 22–28, 2001. P. 49.
30. Gołowaty J. O silnie zaburzonych zagadnieniach spektralnych. *Równania różniczkowe i teoria sterowania*. Krynica, 2000. P.15.

Зміст

ВСТУП	21
РОЗДІЛ 1. ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З δ'-ПОДІБНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ	29
1.1 Означення, фізична термінологія і деякі твердження	30
1.2 δ' -подібні збурення з компактними носіями	40
1.2.1 Формулювання задачі та основних результатів	41
1.2.2 Доведення основної теореми	44
1.2.3 Точні моделі для δ' -подібних потенціалів	49
1.3 δ' -подібні збурення з класу Фаддєєва-Марченка	59
1.3.1 Формулювання задачі та основних результатів	59
1.3.2 Асимптотика розв'язків Йоста для оператора H_ε	64
1.3.3 Асимптотика розв'язки Йоста і коефіцієнти розсіювання для оператора \hat{H}_ε та доведення основного результату	73
РОЗДІЛ 2. ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З ДВОПАРАМЕТРИЧНИМИ $(\alpha\delta' + \beta\delta)$-ПОДІБНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ	81
2.1 Формулювання задачі та основні результати	81
2.2 Збіжність операторів у випадку $\varepsilon^{-1}\nu \rightarrow +\infty$	84
2.2.1 Випадок резонансу	85
2.2.2 Випадок відсутності резонансу	91
2.3 Збіжність операторів у випадку $\nu \sim \omega\varepsilon$	92
2.4 Збіжність операторів у випадку $\varepsilon^{-1}\nu \rightarrow 0$	95
2.5 Задача розсіювання на $(\alpha\delta' + \beta\delta)$ -подібних потенціалах	100

РОЗДІЛ 3. ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З ЛОКАЛЬНИМИ ЗБУРЕННЯМИ РАНГУ ДВА	105
3.1 Формулювання задачі та основні результати	107
3.2 Напівзв'язні стани інтегро-диференціальних операторів	114
3.3 Випадки зв'язаних точкових взаємодій	118
3.3.1 Побудова граничних операторів	120
3.3.2 Збіжність операторів	125
3.4 Випадки розділених точкових взаємодій	128
3.5 Зауваги до регуляризації класичної δ' -взаємодії	132
РОЗДІЛ 4. ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З ЛОКАЛЬНИМИ ЗБУРЕННЯМИ МАГНІТНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ	142
4.1 Калібрувальні перетворення магнітного поля	143
4.2 Взаємодія магнітних потенціалів з $(\alpha\delta' + \beta\delta)$ -подібними збуреннями електричних потенціалів	147
4.3 Взаємодія магнітних потенціалів з локальними збуреннями рангу два електричного потенціалу	149
РОЗДІЛ 5. ПОРОГОВА ПОВЕДІНКА ВІД'ЄМНИХ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ОПЕРАТОРІВ ШРЕДИНГЕРА	157
5.1 Порогова поведінка власних значень: теореми збіжності	158
5.1.1 Формулювання задачі та основних результатів	158
5.1.2 Порогова поведінка порядку $O(\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$	163
5.1.3 Порогова поведінка порядку $o(\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$	166
5.2 Двочленна асимптотика порогових власних значень	177
5.2.1 Формулювання основних результатів	178
5.2.2 Побудова та обґрунтування двочленних асимптотик	181
РОЗДІЛ 6. ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З ПОТЕНЦІАЛАМИ ТИПУ КУЛОНА	189
6.1 Формулювання задачі та основні результати	190
6.2 Збіжність в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ потенціалів типу Кулона	194
6.3 Оператори Шредингера з регуляризованими потенціалами Кулона	198
6.3.1 Випадок зв'язаних точкових взаємодій	199

6.3.2	Випадок розділених точкових взаємодій	208
6.4	Проблема одновимірного атома водню	210
6.4.1	Одновимірна фізика та дискусії щодо потенціалу Кулона	211
6.4.2	Про проникність через потенціали типу Кулона	214
РОЗДІЛ 7. ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА ІЗ СИНГУЛЯРНИМ ЗБУРЕННЯМ ПОТЕНЦІАЛУ В ОКОЛІ КРИВОЇ		227
7.1	Формулювання задачі та основні результати	229
7.2	Формальна асимптотика	236
7.3	Обґрунтування асимптотики спектрів	242
7.3.1	Доведення у випадку резонансу	245
7.3.2	Доведення при відсутності резонансу	250
РОЗДІЛ 8. ОПЕРАТОРИ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ІЗ СИНГУЛЯРНИМИ ВАГОВИМИ ФУНКЦІЯМИ		252
8.1	Оператори Штурма-Ліувілля з δ' -подібним збуренням вагової функції	256
8.2	Спектр граничного оператора	265
8.3	Збіжність спектрів та власних просторів	267
РОЗДІЛ 9. МЕМБРАНИ З ВАЖКИМИ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ: АСИМПТОТИКА СПЕКТРУ		271
9.1	Мембрани з $\partial_\nu \delta_\gamma$ -подібним збуренням густини	273
9.1.1	Граничний оператор та його властивості	273
9.1.2	Асимптотика спектру збуреного оператора	282
9.2	Локальні власні коливання в околі збуренням густини	299
ВИСНОВКИ		306
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		308
ДОДАТОК А		335

ВСТУП

Актуальність теми. Математика і теоретична фізика – дві нероздільні сфери інтелектуальної діяльності людини. Фізика є невичерпним джерелом складних задач для математиків, а математика стала для фізиків чи не основним інструментом, передусім у дослідженнях мікросвіту. Так вивчення диференціальних операторів Шрединґера дає нам інформацію про протікання квантово-механічних процесів. Метою такого аналізу є опис спектрів операторів — знаходження енергетичних рівнів квантових систем, опис даних розсіювання — обчислення ймовірності проходження елементарних частинок через енергетичні потенціали, знаходження розв’язків обернених спектральних задач та задач розсіювання — відновлення форми потенціалів за спектральними даними чи даними розсіювання. У таких задачах треба провести не лише якісне дослідження, але й отримати якомога точніший кількісний результат — обчислити енергетичні рівні чи ймовірність проходження. Тому фізика ставить перед математичними моделями дві на перший погляд конфліктуючі вимоги: модель повинна адекватно описувати реальний процес і водночас мати явні розв’язки. Такі моделі називають точними.

Зазвичай взаємодії у квантово-механічних процесах мають локальний характер і відбуваються в малих зонах. В одновимірному випадку локальні взаємодії замінюють так званими точковими взаємодіями – умовами спряження для хвильових функцій в окремих точках. Загалом потенціали, локалізовані в околі підмноговидів меншої вимірності, можна замінити умовами спряження чи крайовими умовами на цих підмноговидах, значно спростивши модель. Основна математична проблема полягає у вмотивованому виборі умов. Локалізований потенціал треба замінити такими умовами, щоб отримана точна модель найкраще апроксимувала, як якісно, так і кількісно, реальний процес.

Побудова точних моделей у квантовій механіці та їх дослідження – це окремий розділ теорії операторів Шрединґера, який вивчає оператори з потенціалами-розподілами, зосередженими на множинах міри нуль, оператори із збуреннями скінченного рангу, а також збіжність сімей операторів із сингулярно збуреними потенціалами. Перший результат щодо гамільтоніанів, які містили суму δ -функцій, R. Kronig і W. Penney отримали ще в 1931 році, фактично в часи появи узагальнених функцій. Проте інтенсивний розвиток цієї теорії розпочався у 80-х роках минулого століття і триває донині. Вагомий науковий внесок тут зробили такі дослідники: S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, P. Chernoff, R. Hughes, M. Klaus, P. Exner, A. Zettl, P. Šeba, H. Neidhardt, V. Zagrebnov, P. Kurasov, J. F. Brasche, C. Cacciapuoti, J. Dereziński, D. Finco, S. Hassi, M. Gadella, L. Nieto, R. Figari, A. Posilicano, A. Teta, J. Behrndt, M. Holzmann, V. Lotoreichik, M. Znojil, Л. Д. Фаддєєв, Ф. О. Березін, А. Н. Кочубей, В. Д. Кошманенко, Л. П. Нижник, В. А. Михайлець, О. В. Золотарюк, М. М. Маламуд, О. Костенко, В. О. Деркач, С. О. Кужель, В. Л. Кулинський, В. Є. Лянце, Р. О. Гринів, Я. В. Микитюк, А. А. Шкаликов, А. М. Савчук, Р. Р. Гадильшин, Д. І. Борисов та ін. Позаяк не існує загальної теорії лінійних диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах, то залишається багато відкритих проблем. Ці проблеми насамперед пов'язані зі збіжністю операторів Шрединґера із збуреними потенціалами, які зазвичай є регуляризаціями розподілів з високим порядком сингулярності.

Оператори Шрединґера з потенціалами типу Кулона – потенціалами, які мають степеневі особливості – не менш цікаві з погляду фізики. Зокрема, їх дослідження пов'язані з проблемою одновимірного атома водню, яка в останні півстоліття породила гострі наукові дискусії та більше двох тисяч публікацій. Сингулярність потенціалів спричиняє негладкість розв'язків, які є визначеними лише в односторонніх околах особливої точки і їх треба поєднати додатковими умовами. Щоб побудувати гамільтоніан атома водню потрібно вказати ці умови явно. Дослідження одновимірних моделей атома водню проводили R. Loudon, M. Moshinsky, R. G. Newton, W. Fischer, H. Leschke, P. Müller, P. Kurasov, F. Gesztesy, M. Klaus, V. Bodenstorfer, A. Dijkma, H. Langer, C. R. de Oliveira, A. A. Verri, І. О. Вакарчук, В. М. Ткачук та ін.

У спектральній теорії операторів Шредингера важливим є встановлення умов, при виконанні яких існують від'ємні власні значення, та умов, коли ці власні значення поглинає нижня межа неперервного спектру при нескінченно малих сталих взаємодії. Вивчення так званої порогової поведінки власних значень має самостійну цінність для спектральної теорії, але водночас порогова поведінка має стосунок до питань стійкості розв'язків рівняння Кортевега-де-Вріза та існування “брізерів” – пульсуючих локалізованих нелінійних хвиль – для дискретних нелінійних операторів Шредингера. Такі проблеми вивчали В. Simon, М. Klaus, М. L. Goldberger, J. Rauch, S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Nøegh-Krohn, Н. Holden, А. Jensen, М. Melgaard, Р. Р. Гадильшин та ін.

Поява нових технологій, пов'язаних з композитними матеріалами, сприяла активному розвитку теорії сильно неоднорідних середовищ та теорії усереднення. Шляхом процедури усереднення чи з допомогою інших асимптотичних методів крайові задачі для диференціальних операторів із швидкозмінними коефіцієнтами в областях із складною геометрією можна апроксимувати задачами для усереднених операторів в областях з простою геометрією. Вагомий внесок в теорію усереднення зробили J.-L. Lions, О. А. Олійник, В. В. Жиков, В. О. Марченко, Є. Я. Хруслов та ін. Зокрема, теорія сильно неоднорідних середовищ досліджує властивості систем із неоднорідним розподілом маси чи з приєднаними масами на множинах меншого виміру. Такі моделі вивчали у своїх роботах Е. Sánchez-Palencia, О. А. Олійник, М. Lobo, Е. Pérez, С. А. Назаров, Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, В. О. Рибалко та ін.

Основні результати дисертації стосуються одновимірних та двовимірних фізичних моделей. Ці моделі не є спрощенням багатовимірних, а відіграють роль первинних математичних моделей в різних галузях сучасної фізичної науки. Моделі одновимірної фізики стали актуальними саме останніми десятиліттями, бо лише тепер їх можна експериментально реалізувати. Обмежити рух атомів до одного напрямку можна, піддавши їх дії дуже сильних полів чи “утримуючи” в тонких структурах, таких як напівпровідникові квантові дроти чи вуглецеві нанотрубки. Деякі задачі одновимірної фізики є набагато складнішими з погляду математики, ніж їх аналоги у вищих розмірностях. Зокрема, це стосується задачі про атом водню. Математика одновимірних моделей також лежить в основі

сучасної теорії квантових графів, яка описує процеси у квантових хвилеводах.

Зв'язок роботи з науковими темами. Дисертація написана у Львівському національному університеті імені Івана Франка у процесі виконання кафедрою диференціальних рівнянь науково-дослідних державних тем “Дослідження коректності класичних та некласичних задач для рівнянь у частинних похідних” — 0108U004134, “Дослідження коректності прямих і обернених задач та задач з вільними межами для диференціальних операторів” — 0111U001085, “Розробка методів дослідження коректності прямих та обернених задач для диференціальних операторів” — 0117U001228.

Мета й завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи була побудова та дослідження математичних моделей, які описують явища квантової механіки. А саме, побудова так званих точних моделей, які дають не лише якісний опис реального процесу, але й які можна відносно просто розв'язати, отримавши кількісні характеристики – спектри чи дані розсіювання. Математично і фізично обґрунтовані точні моделі отримують шляхом дослідження збіжності диференціальних операторів із локальними сингулярними збуреннями коефіцієнтів та вивчення асимптотичної поведінки їхніх спектрів. *Завданням* роботи було:

- розв'язати проблему δ' -потенціалу, побудувавши теорію одновимірних операторів Шрединґера з $(a\delta'+b\delta)$ -подібними потенціалами; знайти точні моделі — гамільтоніани з точковими взаємодіями, які найкраще апроксимують системи з локалізованими диполями;
- трактуючи δ' -потенціал як збурення скінченного рангу, побудувати теорію одновимірних операторів Шрединґера із сингулярними збуреннями рангу два та знайти клас точних моделей;
- розв'язати проблему одновимірного атома водню, знайшовши клас гамільтоніанів, що відповідають операторам Шрединґера з потенціалами типу Кулона;
- вивчити вплив магнітних потенціалів на граничні точкові взаємодії для операторів Шрединґера з одночасним $(a\delta'+b\delta)$ -подібним збуренням магнітного і електричного потенціалів;

- побудувати точні моделі і асимптотику спектрів для двовимірних операторів Шрединґера із сингулярними збуреннями потенціалів, зосередженими вздовж кривих;
- для операторів Шрединґера із залежними від параметра потенціалами знайти умови існування від’ємних власних значень, які поглинаються неперервним спектром при прямуванні параметра до нуля;
- вивчити вплив δ' -подібних збурень вагових функцій на спектри операторів Штурма-Ліувілля, а також вплив збурень вагових функцій в околі замкнених кривих на спектри еліптичних крайових задач.

Об’єктом дослідження були оператори Шрединґера із локальними сингулярними збуреннями потенціалів, а також оператори Штурма-Ліувілля та оператори еліптичних крайових задач із сингулярними збуреннями вагових функцій.

Предметом досліджень були умови збіжності сімей самоспряжених операторів в рівномірній та сильній резольвентних топологіях, асимптотика спектрів, умови існування від’ємних власних значень з пороговою поведінкою.

Методи дослідження. У дослідженнях основними були асимптотичні методи для диференціальних рівнянь. В поєднанні з методами теорії операторів і функціонального аналізу вони стали ефективним інструментом вивчення збіжності самоспряжених операторів, конструктивної побудови граничних операторів та асимптотичного опису спектрів.

Наукова новизна результатів. В дисертації вперше отримані такі наукові результати з теорії точних моделей для операторів Шрединґера та спектральної теорії диференціальних операторів:

- математично коректно сформульовано і розв’язано проблему δ' -потенціалу, доведено рівномірну резольвентну збіжність операторів Шрединґера зі збуреннями $(a\delta' + b\delta)$ -подібними потенціалами, описано клас точкових взаємодій, які виникають у системах з локалізованими диполями, вивчено вплив на точкові взаємодії швидкостей збіжності δ - та δ' -подібних послідовностей;
- доведено, що трактування δ' -потенціалу як збурення скінченного рангу веде до цілковито нової фізичної моделі, описано всі якісно різні випадки

- граничної поведінки операторів Шрединґера із сингулярними локальними збуреннями рангу два, побудовано новий широкий клас точних моделей;
- вперше проблему δ' -потенціалу узагальнено на двовимірний випадок, вивчено асимптотичну поведінку спектрів операторів Шрединґера з дипольними збуреннями потенціалів в околі замкнених кривих, конструктивно описано вплив геометрії кривих і резонансів нульової енергії на граничні взаємодії;
 - побудовано математичну теорію одновимірного атома водню, знайдено умови збіжності операторів Шрединґера з потенціалами типу Кулона, які збурені $(a\delta' + b\delta)$ -подібними потенціалами; побудовано клас точних моделей і доведено, що вибір точної моделі критично залежить від форми регуляризації потенціалу Кулона;
 - знайдено нові умови існування від'ємних власних значень для одновимірних операторів Шрединґера з потенціалами, що мають компактний носій, а також умови, коли ці власні значення поглинає неперервний спектр при деяких порогових сталих взаємодії, побудовано асимптотики таких власних значень;
 - побудовано асимптотику спектрів операторів Штурма-Ліувілля з локальними збуреннями вагових функцій та операторів двовимірних еліптичних крайових задач, коли вагові функції збурені в околі замкнених кривих; в обох випадках граничні оператори є несамоспряженими і володіють жордановими ланцюгами довжини 2, що є наслідком сингулярної геометрії вагових просторів Лебега.

Практичне значення результатів. Отримані в дисертації математичні результати мають безпосередній стосунок до сучасних проблем квантової механіки, а тому можуть знайти застосування у нанотехнологіях, в яких домінує квантова природа процесів.

Особистий внесок здобувача Наукові результати дисертації автор отримав самостійно. В статі [220] авторові належить розділ 2, в [221] — розділи 4–6, в [8]

— розділи 2–5, в [9] — розділи 2–5, а в [7] — розділ 3.1 та методика обґрунтування асимптотик в лемах 6.3, 6.4.

Апробація результатів дисертації. За результатами досліджень, що увійшли у дисертацію, зроблені доповіді на таких наукових семінарах і конференціях.

- Research seminar on *Differential Equations and Homogenization Theory* by Prof. M. Lobo and Prof. M. E. Pèrez. University of Cantabria, Santander, Spain (2000, 2009).
- Workshop *Asymptotic and Numerical Analysis of Structures and Heterogeneous Media*. Saint-Petersburg, Russia, December 2000.
- Research seminar on *Homogenization Theory* by Prof. A. Piatnitsky. Narvik University College, Narvik, Norway, December (2004, 2006, 2010).
- Workshop *Mathematical Techniques for Multiscale-Analysis*. Heidelberg University, Heidelberg, Germany, October 2005.
- Research seminar of The Bath Institute for Complex Systems by Prof. V. Smyshlyaev. University of Bath, Bath, United Kingdom, July 2009.
- Research seminar on *Partial Differential Equations* by Prof. W. Jäger. Heidelberg University, Heidelberg, Germany, June 2010.
- Workshop *Mathematical Challenges of Zero Range Physics: rigorous results and open problems*. Sapienza University, Rome, Italy, July 2018.
- Львівський міжвузівський семінар з функціонального аналізу імені проф. В. Е. Лянце (керівник проф. О. Г. Сторож), Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, березень 2009.
- Київський семінар з функціонального аналізу (керівники професори А. Н. Кочубей, В. А. Михайлець, В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко), Інститут математики НАН України, Київ, листопад 2012.

- Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (керівники професори М. І. Іванчов, П. І. Каленюк, Б. Й. Пташник), Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, (2000–2019).
- *Різдвяні дискусії 2018*. Конференція кафедри теоретичної фізики, Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, грудень 2018.
- *Різдвяні дискусії 2019*. Конференція кафедри теоретичної фізики, Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, грудень 2019.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 15 працях у фахових наукових виданнях, серед них 12 статей — у виданнях, які індексуються у наукометричній базі *Scopus*. Перелік містить 10 публікацій, які з’явилися у журналах, віднесених до першого і другого кuartилів (Q1 і Q2) відповідно до класифікації *SCImago Journal and Country Rank*. Такі статті прирівнюються до трьох публікацій, тому загальна кількість публікацій з рейтинговими множниками — 35.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, дев’яти розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Перелік використаних джерел містить 271 бібліографічних позицій. Повний обсяг дисертацій становить 339 сторінок, з них 286 сторінок основного тексту.

Я вдячний своєму вчителю Ользі Арсенівні Олейнік за те, що ввела у світ науки. Також я вдячний Сергію Олександровичу Назарову, який навчив мене мистецтву асимптотик.

Розділ 1

ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З

δ' -ПОДІБНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ

Перший розділ і два наступні стосуються відомої в квантовій механіці проблеми δ' -потенціалу. Вона полягає у побудові одновимірної точної моделі для локалізованого диполю, коли енергетичний потенціал породжений парою близько розташованих частинок із зарядами різного знаку. Такий потенціал є поєднанням високої енергетичної стіни і глибокої енергетичної ями, локалізованих в околі однієї точки. Проблема стала предметом наукових дискусій в минулому столітті і довгий час вважали, що вона була розв'язана П. Шебою в середині 80-х років. Проте цей результат виявився помилковим і ми знайшли помилку у його доведенні. До того ж саме формулювання проблеми — знайти єдину точну модель для оператора Шредингера з δ' -потенціалом — було математично некоректним. На відміну від оператора Шредингера з δ -потенціалом оператор з δ' -потенціалом чутливий до способу регуляризації такого псевдопотенціалу. Якщо його замінити δ' -подібною послідовністю вигляду $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$, де V — достатньо гладка функція з компактним носієм, то на вибір точної моделі матиме вплив профіль V , а саме, точкові взаємодії залежатимуть від спектральних властивостей оператора Шредингера з потенціалом V . Насправді, за формальним гамільтоніаном з δ' -потенціалом ховається багатоманіття квантово-механічних процесів з різними властивостями.

Розділ містить математичний розв'язок проблеми δ' -потенціалу, яку трактуємо як задачу найкращої апроксимації в класі точкових взаємодій операторів Шредингера з δ' -подібними потенціалами вибраного профілю. Описано клас са-

моспряжених операторів, які виникають в квантово-механічних систем з локальними взаємодіями дипольного типу. Результати розділу опубліковані в [7–9].

1.1 Означення, фізична термінологія і деякі твердження

В цьому підрозділі зібрані деякі означення та твердження теорії лінійних операторів та теорії узагальнених функцій, які використовуватимуться далі. Також тут описана фізична термінологія, яка стане у пригоді при інтерпретації отриманих математичних результатів.

δ - та δ' -подібні послідовності

Функцією Дірака, чи просто δ -функцією, називають лінійний неперервний функціонал з простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, який визначений правилом $\langle \delta(x), \phi(x) \rangle = \phi(0)$ для усіх $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Перша похідна δ -функції визначена так $\langle \delta'(x), \phi(x) \rangle = -\phi'(0)$.

Лема 1.1. *Нехай V — інтегровна функція на прямій.*

(i) *Якщо $\int_{\mathbb{R}} V(t) dt = 1$, то послідовність функцій $\varepsilon^{-1}V(\frac{x}{\varepsilon})$ збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ в просторі узагальнених функцій до $\delta(x)$.*

(ii) *Якщо $\int_{\mathbb{R}} V(t) dt = 0$ та $\int_{\mathbb{R}} tV(t) dt = -1$, то $\varepsilon^{-2}V(\frac{x}{\varepsilon}) \rightarrow \delta'(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Доведення. Факт з пункту (i) є добре відомим, тому доведемо (ii). Для кожної пробної функції $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} V(\frac{x}{\varepsilon}) \phi(x) dx &= \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} V(t) \phi(\varepsilon t) dt = \varepsilon^{-1} \int_{\text{supp } \phi} V(t) (\phi(0) + \varepsilon \phi'(0)t + O(\varepsilon)) dt = \\ &= \varepsilon^{-1} \phi(0) \int_{\mathbb{R}} V(t) dt + \phi'(0) \int_{\mathbb{R}} tV(t) dt + O(\varepsilon) = -\phi'(0) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. □

На відміну від послідовності з пункту (i), яка є збіжною в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ для усіх V , послідовність $\varepsilon^{-2}V(\frac{x}{\varepsilon})$ є збіжною лише для V з нульовим середнім. Надалі, кожну послідовність вигляду $\varepsilon^{-1}V(\varepsilon^{-1} \cdot)$ називатимемо *δ -подібною*, а послідовність вигляду $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1} \cdot)$ — *δ' -подібною*, навіть для V з ненульовим середнім. Функцію V називатимемо *профілем* цих послідовностей.

Збіжність в просторі необмежених операторів

Нехай $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — послідовність необмежених операторів в гільбертовому просторі L зі щільними областями визначення $\text{dom } A_\varepsilon$. Для таких сімей операторів виникає проблема, як визначити їх збіжність, бо може трапитися, що множини $\text{dom } A_\varepsilon$ не містять жодного спільного ненульового вектора.

Означення 1.1. *Нехай A — замкнений оператор в гільбертовому просторі L . Кажемо, що комплексне число λ належить до резольвентної множини $\rho(A)$ оператора A , якщо оператор $A - \lambda I$ є бієкцією з $\text{dom } A$ на весь простір L , причому обернений оператор є обмеженим. Оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ називають резольвентою оператора A в точці $\lambda \in \rho(A)$. Множина $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — це спектр оператора A .*

Означення 1.2. *Нехай $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — послідовність самоспряжених операторів. Кажемо, що A_ε збігаються в сенсі рівномірної резольвентної збіжності до деякого самоспряженого оператора A , якщо $\|R_\lambda(A_\varepsilon) - R_\lambda(A)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всіх λ з відмінною від нуля уявною частиною $\text{Im } \lambda$. Аналогічно, A_ε збігаються в сенсі сильної резольвентної збіжності, якщо $\|R_\lambda(A_\varepsilon)f - R_\lambda(A)f\|_L \rightarrow 0$ для всіх $f \in L$ і таких λ , що $\text{Im } \lambda \neq 0$.*

Щоб довести рівномірну резольвентну збіжність, достатньо показати, що резольвенти збігаються за нормою хоча б в одній точці поза дійсною віссю.

Лема 1.2. *Нехай A_ε та A — самоспряжені оператори і $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Якщо $\|R_{\lambda_0}(A_\varepsilon) - R_{\lambda_0}(A)\| \rightarrow 0$, то $A_\varepsilon \rightarrow A$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності. Якщо ж $\|R_{\lambda_0}(A_\varepsilon)f - R_{\lambda_0}(A)f\|_L \rightarrow 0$ для всіх $f \in L$, то $A_\varepsilon \rightarrow A$ в сенсі сильної резольвентної збіжності. [1, с.284]*

Якщо оператори близькі у рівномірній резольвентній метриці, то вони мають подібні спектри і їх спектральні проектори теж близькі.

Лема 1.3. *Нехай A_ε та A — самоспряжені оператори і $A_\varepsilon \rightarrow A$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності. Якщо $\mu \in \rho(A)$, то $\mu \in \rho(A_\varepsilon)$ для достатньо малих ε і $\|R_\mu(A_\varepsilon) - R_\mu(A)\| \rightarrow 0$. Нехай a і b — дійсні числа такі, що $a \in \rho(A)$, $b \in \rho(A)$ та $a < b$. Тоді $\|P_{(a,b)}(A_\varepsilon) - P_{(a,b)}(A)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, де $P_{(a,b)}$ — спектральний проектор. [1, с.289]*

Резонанси нульової енергії та напівзв'язні стани

Нехай $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ — оператор Шредингера в $L_2(\mathbb{R})$ з потенціалом V .

Означення 1.3. Кажемо, що оператор H володіє резонансом нульової енергії, якщо рівняння $-\phi'' + V\phi = 0$ має нетривіальний розв'язок, обмежений на усій прямій. Цей розв'язок називаємо напівзв'язним станом оператора H (на відміну від зв'язного стану, який має належати простору $L_2(\mathbb{R})$).

Надалі ми просто казатимемо, що потенціал V має резонанс. Такі потенціали з резонансом нульової енергії не є рідкісними. Насправді, кожен потенціал з компактним носієм можна помножити на деяку сталу і оператор матиме такий резонанс. Розглянемо сім'ю операторів $H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha V$ з дійсним параметром α , який надалі називатимемо *сталюю взаємодією*.

Означення 1.4. Резонансною множиною $\mathcal{R}(V)$ потенціалу V називаємо підмножину дійсних чисел α , для яких оператор H_α володіє резонансом нульової енергії.

Лема 1.4. Нехай потенціал V має компактний і зв'язний носій. Тоді $\mathcal{R}(V)$ є зліченною множиною без скінченних граничних точок. Якщо V змінює знак, то множина $\mathcal{R}(V)$ завжди має дві граничні точки $\alpha = -\infty$ та $\alpha = +\infty$.

Для доведення цього твердження нам знадобляться деякі факти з теорії просторів Крейна — просторів Лебега із знакозмінною ваговою функцією. Теорія таких просторів описана в [2].

Припустимо, що функція V така, як в лемі 1.4, а також $\text{supp } V = [-1, 1]$. Нехай \mathcal{K} — простір квадратично інтегрованих з вагою $|V|$ функцій на $(-1, 1)$ зі скалярним добутком $(f, g) = \int_{-1}^1 |V| f \bar{g} d\xi$. Введемо в \mathcal{K} індефінітну метрику $[f, g] = \int_{-1}^1 V f \bar{g} d\xi$, перетворивши його в простір Крейна. В \mathcal{K} існує канонічна симетрія $Jf = \text{sgn } V \cdot f$, така що $(Jf, g) = [f, g]$ для всіх $f, g \in \mathcal{K}$.

Розглянемо в \mathcal{K} оператор A із щільною областю визначення $\text{dom } A$. Оператор називаємо *J-невід'ємним*, якщо $[Ax, x] \geq 0$ для всіх $x \in \text{dom } A$. Оператор A^c , визначений на лінеалі $\text{dom } A^c = \{y \in \mathcal{K} : \exists z \in \mathcal{K}, \forall x \in \text{dom } A \quad [Ax, y] = [x, z]\}$ формулою $A^c y = z$, називаємо *J-спряженим* до A . Якщо $A = A^c$, то кажуть, що A є *J-самоспряженим*.

Лема 1.5. *Нехай оператор A є J -самоспряженим та J -невід'ємним з непорожньою резольвентною множиною. Тоді спектр цього оператора є дійсним і дискретним. Для ненульових власних значень їх алгебраїчні та геометричні кратності збігаються. Нульовому власному значенню можуть відповідати ланцюги з власного та одного приєднаного вектора. [2, с. 138]*

Доведення лема 1.4. У припущенні, що $\text{supp } V = [-1, 1]$, будь-який обмежений розв'язок рівняння $-\phi'' + \alpha V\phi = 0$ на прямій є сталим поза відрізком $[-1, 1]$. Тому звуження напівзв'язного стану оператор H_α на цей відрізок є нетривіальним розв'язком крайової задачі

$$-u'' + \alpha Vu = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad u'(-1) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (1.1)$$

Якщо функція V є знакосталою, то маємо задачу Штурма-Ліувілля стосовно спектрального параметра α , і теза лема 1.4 є очевидною. В іншому випадку, (1.1) є задачею на власні значення із знаковмінною ваговою функцією. Теорія таких задач розвинута в [3, 4].

Введемо в просторі Крейна \mathcal{K} оператор $T = -\frac{1}{V} \frac{d^2}{dx^2}$ з областю визначення

$$\text{dom } T = \{f \in W_2^2(-1, 1) : V^{-1}f'' \in \mathcal{K}, f'(-1) = 0, f'(1) = 0\}.$$

Цей оператор є J -невід'ємним, бо

$$[Tf, f] = - \int_{-1}^1 f'' \bar{f} dx = \int_{-1}^1 |f'|^2 dx \geq 0.$$

Далі, для кожної функції $f \in \text{dom } T$ маємо

$$[Tf, g] = - \int_{-1}^1 f'' \bar{g} dx = f(1) \overline{g'(1)} - f(-1) \overline{g'(-1)} - \int_{-1}^1 f \bar{g}'' dx.$$

Тому рівність $[Tf, g] = [f, T^c g]$ виконується, лише коли $g'(-1) = g'(1) = 0$ і $T^c g = -V^{-1}g''$. Отже, оператор T є J -самоспряженим. Крім того, резольвентна множина T непорожня, зокрема, $i \in \rho(T)$.

З іншого боку, (1.1) можна записати як спектральне рівняння $Tu = -\alpha u$, а оператор H_α має резонанс нульової енергії тоді і лише тоді, коли $-\alpha \in \sigma(T)$. Отже, $\mathcal{R}(V) = -\sigma(T)$. Щоб завершити доведення, достатньо зіслатися на лему 1.5. □

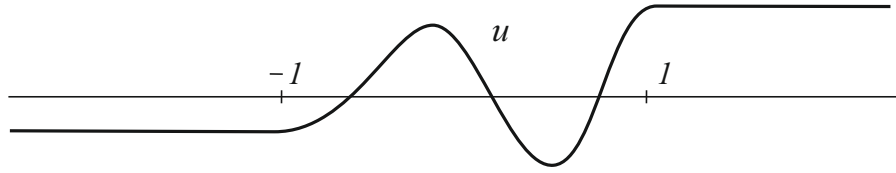


Рис. 1.1: Напівзв'язний стан

Умова леми 1.4 про зв'язний носій потенціалу V не є суттєвою і доведення легко узагальнити на незв'язні носії.

Наслідок 1.1. *Напівзв'язний стан оператора $H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha V$ визначений з точністю до сталого множника. Сталі значення, які він набуває поза носієм потенціалу V є відмінними від нуля.*

Доведення. Всі ненульові власні значення оператора T прості, а нульове, яке завжди існує, — напівпроста. Напівзв'язний стан є продовження з відрізка $[-1, 1]$ на усю пряму власної функції сталими значення з врахуванням неперервності (див. рис. 1.1). Ця власна функція визначена з точністю до множника. До того ж нетривіальний розв'язок рівняння $-\phi'' + \alpha V\phi = 0$ не може бути нулем на множині ненульової міри. \square

Точкові взаємодії та точні моделі

Нехай V — функція класу $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, яка обмежена знизу. Розглянемо оператор

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V, \quad \text{dom } H_0 = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : f(0) = f'(0) = 0\},$$

який є симетричним в $L_2(\mathbb{R})$. Спряжений оператор в $L_2(\mathbb{R})$ має вигляд

$$H_0^* = -\frac{d^2}{dx^2} + V, \quad \text{dom } H_0^* = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : f, f' \in AC_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\}), -f'' + Vf \in L_2(\mathbb{R})\}.$$

Тут AC_{loc} — клас абсолютно неперервних на кожному компактi функцій.

Лема 1.6. *Кожне самоспряжене розширення симетричного оператора H_0 є звуженням H_0^* на клас функцій, які в початку координат задовольняють один з двох типів крайових умов:*

$$a_- f'(-0) = b_- f(-0), \quad a_+ f'(+0) = b_+ f(+0), \quad (1.2)$$

де $a_-^2 + b_-^2 \neq 0$ і $a_+^2 + b_+^2 \neq 0$, або ж

$$\begin{pmatrix} f(+0) \\ f'(+0) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(-0) \\ f'(-0) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

де $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $c_{kl} \in \mathbb{R}$ та $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1$. [5, 6]

Лема описує всі крайові умови та умови спряження у початку координат для диференціального виразу $-\frac{d^2}{dx^2} + V$, з якими він породжує самоспряжені оператори в $L_2(\mathbb{R})$. Звісно, точку $x = 0$ в цьому твердженні можна замінити будь-якою іншою.

Самоспряжені розширення, що відповідають крайовим умовам (1.2), часто називають *незв'язаними* або *розділеними*. Вони є прямою сумою двох самоспряжених операторів, що діють на півосях. З погляду фізики, одновимірна квантово-механічна система розпадається на дві незв'язані підсистеми. Умови спряження (1.3) визначають *зв'язані* самоспряжені розширення, які відповідають квантово-механічним системам, які є одним цілим. Зв'язані розширення є цікавішими з погляду фізики і тому, що дають нетривіальні розв'язки задачі розсіювання.

В найпростішому формулюванні одновимірна задача розсіювання полягає в обчисленні ймовірності, з якої частинки проникають через потенціальний бар'єр V (див. рис. 1.2). Дослідники часто замінюють потенціал V , зосереджений в околі якоїсь точки, так звану *точковою взаємодією* — умовами вигляду (1.2) чи (1.3) в цій точці, вибираючи їх з певних математичних чи фізичних міркувань. Така заміна має на меті побудову *точної моделі* — математичної моделі, яку можна розв'язати явно і отримати точний розв'язок. Коли гамільтоніан системи є зв'язаним розширенням, то задачу розсіювання можна розв'язати явно, отри-

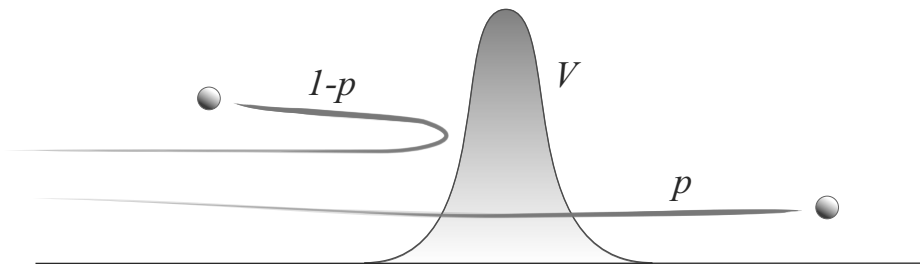


Рис. 1.2: Розсіювання на потенціалі V : частинки з ймовірністю p проникають через потенціальний бар'єр, а з ймовірністю $1 - p$ відбиваються від нього.

мавши функційну залежність ймовірності проникнення через бар'єр від енергії частинки. В разі гамільтоніана, який є незв'язаним розширенням, така ймовірність є завжди нульовою, тобто бар'єр V є непроникним для частинок.

Класичним прикладом точної моделі є оператор Шредингера з δ -потенціалом. Нехай потенціал V є таким, як зображено на рис. 1.2. Його ще називають *потенціальною стіною*. Тоді стаціонарна задача розсіювання полягає у знаходженні розв'язків спеціального вигляду диференціального рівняння $-y'' + V(x)y = k^2y$ на прямій. Це є лінійне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, яке, взагалі кажучи, явно розв'язати не вдається. Припустивши, що носій V є доволі малим і розташованим в околі нуля, потенціал можна замінити функцією Дірака і розглянути інше рівняння $-y'' + \alpha\delta(x)y = k^2y$, де $\alpha = \int_{\mathbb{R}} V dx$. Нарешті, доданок $\alpha\delta(x)y$ можна забрати з рівняння, замінивши його точковою взаємодією

$$y'' = k^2y, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y(+0) = y(-0), \quad y'(+0) = y'(-0) + \alpha y(0). \quad (1.4)$$

Тепер задача розсіювання звелася до розв'язування рівняння зі сталими коефіцієнтами на півосях та узгодження розв'язків згідно умов спряження в нулі.

Попри усі переваги точних моделей, їх побудова пов'язана зі складними питаннями математичного характеру. Однією з принципових проблем є відсутність множення в просторі узагальнених функцій, внаслідок чого немає загальної теорії диференціальних операторів з узагальненими функціями в коефіцієнтах. Більшість операторів Шредингера з потенціалами, які є узагальненими функціями на кшталт функцій Дірака чи їхніх похідних — це лише формальні диференціальні вирази і їх не вдається реалізувати як самоспряжені оператори в гільбертовому просторі. Надалі, такі формальні оператори називатимемо *псевдогамільтоніанами*, або ж операторами Шредингера з *псевдопотенціалами*. Розглянемо задачу розсіювання на потенціалі, зображеному на рис. 1.3. Такий профіль потенціальної енергії відповідає диполю — двом близько розташованим частинками із зарядами різних знаків, що часто трапляється в кристалічних структурах. Зазвичай ці заряди є однаковими за абсолютною величиною, а тому V має нульове середнє. Зрозуміло, що точна модель (1.4), в якій тепер α дорівнює нулю, стає тривіальною і неадекватною фізичному явищу. Як обчислити, хоча б наближено, ймовірність проходження частинок через дипольний потенціал?

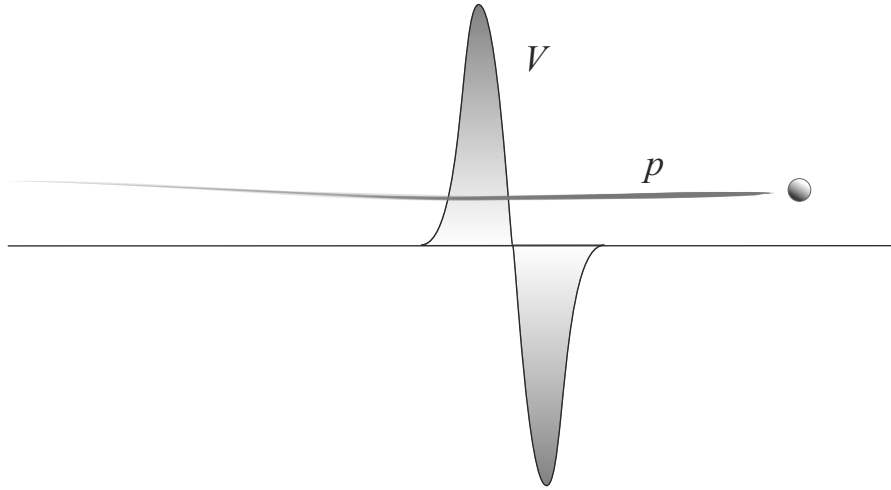


Рис. 1.3: Розсіювання на потенціалі, який породжений диполем.

Потенціал на рис. 1.3 схожий на похідну потенціалу-шапочки на рис. 1.2. Розглянемо таку модель $-y'' + \alpha\delta'(x)y = k^2y$. Проте це рівняння не має жодного математичного сенсу, бо для нього не існує ненульових розв'язків в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Справді, добуток $\delta'(x)y = y(0)\delta'(x) - y'(0)\delta(x)$ коректно визначений для функцій, які є неперервно диференційовними в нулі. Якби такий розв'язок існував, то його друга похідна була б досить сингулярним розподілом $y(0)\delta'(x) - y'(0)\delta(x) + k^2y$ в нулі, що суперечить його неперервній диференційовності. Зауважимо, що рівняння $-y'' + \alpha\delta(x)y = k^2y$ має в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ двовимірний простір неперервних в нулі розв'язків, а тому добуток $\delta(x)y = y(0)\delta(x)$ коректно визначений.

Деякі допоміжні твердження

Далі нам знадобляться кілька технічних тверджень. Позначимо через $[g]_a$ стрибок $g(a+0) - g(a-0)$ функції g в точці $x = a$, а через \mathbb{R}_ε — дійсну пряму з двома викинутими точками $x = -\varepsilon$ і $x = \varepsilon$, тобто $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus \{-\varepsilon, \varepsilon\}$.

Твердження 1.1. Для кожної функції g класу $W_{2,loc}^2(\mathbb{R}_\varepsilon)$ існує така функція $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}_\varepsilon)$, що сума $g + \rho$ належить до простору $W_{2,loc}^2(\mathbb{R})$. Крім того, ρ можна вибрати так, щоб її носій був компактним і не містив інтервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$, а також виконувалася нерівність

$$\|\rho\|_{C^2(|x| \geq \varepsilon)} \leq c(|[g]_{-\varepsilon}| + |[g]_\varepsilon| + |[g']_{-\varepsilon}| + |[g']_\varepsilon|) \quad (1.5)$$

зі сталою c , яка не залежить від g і ε .

Доведення. Введемо допоміжні функції-зрізки η_0 і η_1 , графіки яких зображено на рис. 1.4. Вони обидві є гладкими поза нулем, мають носії на замиканні додатної півосі. Крім того, $\eta_0(+0) = 1$, $\eta_0'(+0) = 0$, $\eta_1(+0) = 0$ і $\eta_1'(+0) = 1$.



Рис. 1.4: Графіки функцій η_0 і η_1 .

Тоді функція вигляду

$$\rho(x) = [g]_{-\varepsilon} \eta_0(-x - \varepsilon) - [g']_{-\varepsilon} \eta_1(-x - \varepsilon) - [g]_{\varepsilon} \eta_0(x - \varepsilon) - [g']_{\varepsilon} \eta_1(x - \varepsilon). \quad (1.6)$$

за побудовою має носій у множині $|x| \geq \varepsilon$ і безпосередньо переконуємося, що

$$[\rho]_{-\varepsilon} = -[g]_{-\varepsilon}, \quad [\rho]_{\varepsilon} = -[g]_{\varepsilon}, \quad [\rho']_{-\varepsilon} = -[g']_{-\varepsilon}, \quad [\rho']_{\varepsilon} = -[g']_{\varepsilon}.$$

Наприклад, перша формула впливає з рівностей

$$\begin{aligned} \rho(-\varepsilon - 0) &= [g]_{-\varepsilon} \eta_0(+0) - [g']_{-\varepsilon} \eta_1(+0) - [g]_{\varepsilon} \eta_0(-2\varepsilon) - [g']_{\varepsilon} \eta_1(-2\varepsilon) = [g']_{\varepsilon}, \\ \rho(-\varepsilon + 0) &= [g]_{-\varepsilon} \eta_0(-0) - [g']_{-\varepsilon} \eta_1(-0) - [g]_{\varepsilon} \eta_0(-2\varepsilon) - [g']_{\varepsilon} \eta_1(-2\varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Отже, $g + \rho$ є неперервною на \mathbb{R} разом з першою похідною, а тому належить до простору $W_{2,loc}^2(\mathbb{R})$. Нерівність (1.5) впливає безпосередньо із зображення ρ , а стала c залежить лише від функцій η_0 та η_1 . \square

Твердження 1.2. *Нехай I — скінченний інтервал дійсної осі, $t_0 \in I$, $q \in L_{\infty}(I)$ і $g \in L_2(I)$. Тоді розв'язок задачі Коші $-w'' + qw = g$, $w(t_0) = a$, $w'(t_0) = b$ на інтервалі I задовольняє нерівність*

$$\|w\|_{C^1(I)} \leq c(|a| + |b| + \|g\|_{L_2(I)})$$

зі сталою c , яка не залежить від a , b та функції g . Якщо $g \in L_{\infty}(I)$, то

$$\|w\|_{C^1(I)} \leq c(|a| + |b| + \|g\|_{L_{\infty}(I)}).$$

Доведення. Нехай w_1 і w_2 — розв'язки рівняння $w'' + qw = 0$, для яких виконуються умови $w_1(t_0) = 1$, $w_1'(t_0) = 0$, $w_2(t_0) = 0$ і $w_2'(t_0) = 1$. Потенціал q обмежений

на I , тому ці розв'язки належать до простору $W_2^2(I)$, а з огляду на теорему вкладення також класу $C^1(I)$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$w(t) = aw_1(t) + bw_2(t) + \int_{t_0}^t k(t, s)g(s) ds, \quad (1.7)$$

де $k(t, s) = w_1(t)w_2(s) - w_1(s)w_2(t)$. Записавши похідну розв'язку

$$w'(t) = aw_1'(t) + bw_2'(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, s)g(s) ds,$$

маємо $|w(t)| + |w'(t)| \leq |a||w_1|_{C^1(I)} + |b||w_2|_{C^1(I)} + |I|^{1/2} \|k\|_{C^1(I \times I)} \|g\|_{L_2(I)}$ для всіх $t \in I$. Звідси випливають потрібні нерівності. \square

Твердження 1.3. *Нехай функція $w \in W_2^2(I)$, тоді для будь-яких точок x_1 та x_2 з інтервалу I виконуються нерівності*

$$|w(x_2) - w(x_1)| \leq c_1|x_2 - x_1| \|w\|_{W_2^2(I)}, \quad |w'(x_2) - w'(x_1)| \leq c_2|x_2 - x_1|^{1/2} \|w\|_{W_2^2(I)}.$$

Доведення. З неперервного вкладення $W_2^2(I) \subset C^1(I)$ маємо

$$|w(x_2) - w(x_1)| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |w'(x)| dx \right| \leq |x_2 - x_1| \|w\|_{C^1(I)} \leq c_1|x_2 - x_1| \|w\|_{W_2^2(I)}.$$

А з нерівності Коші випливає, що

$$|w'(x_2) - w'(x_1)| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |w''(x)| dx \right| \leq c_2|x_2 - x_1|^{1/2} \|w\|_{W_2^2(I)}. \quad \square$$

Нехай V_0 — локально обмежена функція така, що оператор $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$ є самоспряженим в $L_2(\mathbb{R})$. Введемо підпростір \mathcal{V}_0 в $L_2(\mathbb{R})$. Функція h належить до \mathcal{V}_0 , якщо існують такі дві функції h_- і h_+ з області визначення оператора H , що $h = h_-$ на від'ємній осі та $h = h_+$ на додатній. Нехай S — збурення оператора H точковою взаємодією в початку координат, тобто $Sf = -f'' + V_0f$ і область визначення $\text{dom } S$ складається з функцій $f \in \mathcal{V}_0$, які задовольняють в точці $x = 0$ або незв'язані умови (1.2), або зв'язані (1.3).

Тут і надалі через $\|\cdot\|$ позначаємо стандартну норму в $L_2(\mathbb{R})$.

Твердження 1.4. Нехай $f \in L_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Покладемо $y = (S - z)^{-1}f$. Тоді для $x > 0$ виконуються нерівності

$$|y(\pm 0)| \leq C_1 \|f\|, \quad |y'(\pm 0)| \leq C_2 \|f\| \quad (1.8)$$

$$|y(\pm x) - y(\pm 0)| \leq C_3 x \|f\|, \quad |y'(\pm x) - y'(\pm 0)| \leq C_4 x^{1/2} \|f\| \quad (1.9)$$

зі сталими C_k , які не залежать від f .

Доведення. Резольвента $R_z(S) = (S - z)^{-1}$ є обмеженим оператором з $L_2(\mathbb{R})$ в область визначення $\text{dom } S$ з введеною на ній нормою графіка. Потенціал V_0 є локально обмеженим, тому цей простір є підпростором $W_{2,loc}^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap \mathcal{V}_0$. Для кожної обмеженої множини K на прямій, для якої нуль не є внутрішньою точкою, існує незалежна від f стала $c_K > 0$, що

$$\|y\|_{W_2^2(K)} \leq c_K \|f\|. \quad (1.10)$$

Тоді оцінки (1.8) виконуються з огляду на теорему вкладення $W_2^2(K) \subset C^1(K)$, якщо по чергово взяти $K = [-1, 0]$ та $K = [0, 1]$. Нерівності (1.9) випливають з (1.10) та твердження 1.3. \square

1.2 δ' -подібні збурення з компактними носіями

Побудуємо точні моделі для операторів Шредингера з δ' -подібними збуреннями потенціалу, профілів яких мають компактний носій. Ми доведемо рівномірну резольвентну збіжність таких операторів, опишемо клас самоспряжених операторів, які залежно від фізичного контексту можна застосовувати при описі дипольних взаємодій. В одновимірному випадку метод самоспряжених розширень симетричних операторів є не таким ефективним, як у вищих вимірностях. Звуження формального оператора Шредингера з псевдопотенціалом, зосередженим в нулі, збігається зі симетричним оператором H_0 з леми 1.6, який має чотирипараметричну сім'ю самоспряжених розширень. Немає жодної процедури на кшталт процедури ренормалізації Березіна і Фадєєва [10], щоб ідентифікувати самоспряжене розширення, що відповідає вихідному псевдогамільтоніану. Більше того, для таких псевдопотенціалів як, наприклад, δ' -потенціал не існує єдиного

самоспряженого розширення, бо точна модель залежить від вигляду регуляризації. З отриманих нами результатів випливає, що формальний вираз $-\frac{d^2}{dx^2} + \delta'(x)$ є лише символічним позначенням класу фізичних процесів з різними властивостями і він не містить достатньої інформації для ідентифікації самоспряженого розширення.

1.2.1 Формулювання задачі та основних результатів

Розглядатимемо сім'ю операторів Шредингера

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) \quad (1.11)$$

в просторі $L_2(\mathbb{R})$, де V_0 — локально обмежений дійснозначний потенціал такий, що незбурений оператор $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$ є самоспряженим. Функція V є обмеженою, дійснозначною і з компактним носієм, а ε — малий додатний параметр. Зрозуміло, що $\text{dom } H_\varepsilon = \text{dom } H$. Коли потенціал V такий як в пункті (ii) лемми 1.1, то збурення $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$ збігається до $\delta'(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Проте надалі ми не накладаємо таких умов на профіль V . До речі, оператори H_ε можна також трактувати як регуляризацію іншого (математично безсенсовного) псевдогамільтоніана $-\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \delta^2(x)$, бо на збурення можна дивитися як на добуток двох δ -подібних послідовностей $(\varepsilon^{-1}U_1(\varepsilon^{-1}x)) \cdot (\varepsilon^{-1}U_2(\varepsilon^{-1}x))$, де $V = U_1U_2$. Вивчатимемо збіжність операторів H_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, а знайдені в границі самоспряжені оператори трактуватимемо як точні моделі для фізичної системи з потенціальною енергією $V_0 + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1} \cdot)$.

Детальний огляд досліджень операторів Шредингера з псевдопотенціалами міститься в книгах [12, 13]. Тут ми лише згадаємо деякі роботи, які безпосередньо стосуються теми цього розділу. В точних моделях квантової механіки похідна функції Дірака з'являється відразу в двох іпостаях. Розрізняють два фізичні феномени — δ' -взаємодія та δ' -потенціал. Явище δ' -взаємодії сили β моделюють точковою взаємодією $f'(-0) = f'(0)$, $f(+0) - f(-0) = \beta f'(0)$ [12]. Шеба [16] показав, що таку точкову взаємодію можна отримати в границі, регуляризавши евристичний оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + \beta \langle \delta'(x), \cdot \rangle \delta'(x)$. Складну апроксимацію δ' -взаємодії з потенціалом, що містив три δ -подібні послідовності, побудували

П. Екснер, Х. Нейдгарт і В. Загребнов [14]. Нещодавно Г. Кардоне і А. Храбутовський [15] отримали ще одну інтерпретацію δ' -взаємодії — вона виникла при дослідженні тонких хвилеводів з трансверсальними вікнами. В роботах [17, 18] такі точкові взаємодії з'являються у дослідженні операторів Шредингера із сингулярними збуреннями рангу 2 (детальніше про це в Розділі 3). П. Шеба [16] вивчав також поведінку сім'ї самоспряжених операторів, в яких δ' -потенціал був замінений лінійною комбінацією $\frac{1}{2\varepsilon}(\delta(x + \varepsilon) - \delta(x - \varepsilon))$ двох близько розташованих δ -функцій. Шукаючи точні моделі для псевдогамільтоніана $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta'(x)$, він довів, що такі оператори збігаються при $\varepsilon \rightarrow 0$ до прямої суми двох незбурених операторів Шредингера на півосях з умовами Діріхле в нулі. Тобто точкова взаємодія є типу (1.2) і має вигляд $f(-0) = 0$, $f(+0) = 0$. Далі, у теоремі 4, Шеба доводить, що оператори H_ε , задані формулою (1.11) при $V_0 = 0$, теж збігаються до цієї прямої суми в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, якщо потенціал V має нульове середнє.

Проте виявилось, що доведення теореми 4 в [16] є помилковим. До того ж помилковим є сам результат. З погляду теорії розсіювання результат Шеби означав, що δ' -бар'єр завжди мав би бути абсолютно непроникним для частинок. Але безпосередні обчислення ймовірності проникнення при розсіюванні на кусково-сталому δ' -подібному потенціалі заперечують це. В [19] вперше, як нам відомо, О. Золотарюк зі співавторами описали *ефект резонансу для ймовірності проникнення* через кусково-сталий потенціал. Вони отримали дискретну множину резонансних значень сталої зв'язку α як множину коренів деякого трансцендентного рівняння, для яких $\alpha\delta'$ -подібний бар'єр є частково проникним. Такий ж ефект для інших профілів δ' -подібних потенціалів був отриманий в [20, 21]. На сьогодні є вже серія праць О. Золотарюка, в яких вивчено ефект резонансу для різних кусково-сталих потенціалів [22–29].

Строге математичне означення δ' -потенціалу шукали багато авторів [30–34]. Цікавою є коротка замітка П. Курасова і Н. Еландера [30], в якій $\alpha\delta'$ -потенціал трактували як точкову взаємодію вигляду $f(+0) - f(-0) = \frac{\alpha}{2}(f(+0) + f(-0))$, $f'(+0) - f'(-0) = -\frac{\alpha}{2}(f'(+0) + f'(-0))$. Це означення виникало з побудованої Курасовим в [35] теорії узагальнених функцій над класом розривних тестових функцій. В цій теорії для поширення операції диференціювання на функціона-

ли було зроблене припущення фізичного характеру про парність функції Дірака. А саме, постулювалося, що $\langle \delta, \phi \rangle = \frac{1}{2}(\phi(-0) + \phi(+0))$. Таке ж означення δ' -потенціалу запропонував Л. Нижник в [36], який вивчав оператор Шрединґера в просторі Соболева $W_2^3(\mathbb{R} \setminus 0)$. У монографії [13, с. 339] читаємо, що при всіх спробах описати взаємодію з δ' -потенціалом використовували додаткові припущення, наприклад, певну симетрію взаємодії. Без таких припущень феномен δ' -потенціалу не можна коректно визначити. Ми ж досліджуємо задачу без жодних припущень фізичного характеру і доводимо, що точкова взаємодія суттєво залежить від способу апроксимації похідної функції Дірака. Це означає, що найкраще наближення реальної квантово-механічної системи в класі гамільтоніанів з точковими взаємодіями можна отримати, лише маючи додаткову інформацію про характер δ' -подібного потенціалу, а саме профіль V .

Нехай \mathcal{V}_- та \mathcal{V}_+ — підпростори в $L_2(\mathbb{R}_-)$ та $L_2(\mathbb{R}_+)$ відповідно, які отримані звуженням елементів простору \mathcal{V}_0 на півосі. Введемо такі оператори

$$\begin{aligned} S_\theta &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_0, \quad \text{dom } S_\theta = \{f \in \mathcal{V}_0: f(+0) = \theta f(-0), \theta f'(+0) = f'(-0)\}, \\ \mathcal{D}^\pm &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_0, \quad \text{dom } \mathcal{D}^\pm = \{f \in \mathcal{V}_\pm: f(0) = 0\}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Сформулюємо основний результат цього підрозділу.

Теорема 1.1. *Для кожного дійснозначного обмеженого потенціалу V з компактним носієм сім'я операторів Шрединґера $H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ збігається в сенсі рівномірної резольвентної збіжності при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Якщо оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ володіє резонансом нульової енергії з напівзв'язним станом u , то граничним для сім'ї H_ε є оператор S_θ з параметром $\theta = \frac{u(+\infty)}{u(-\infty)}$, де $u(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x)$. Коли ж потенціал V не має резонансу нульової енергії, то оператори H_ε збігаються до прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$. В обох випадках для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ справедливі нерівності

$$\|R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(S_\theta)\| \leq C\varepsilon^{1/2}, \quad \|R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)\| \leq C\varepsilon^{1/2}$$

зі сталою C , незалежною від ε .

Згідно з наслідком 1.1, параметр θ визначений коректно і однозначно. Деяко неочікуваним є той факт, що збіжність операторів H_ε можна отримати і для

збурень $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$, які не збігаються в просторі узагальнених функцій. Наш результат відрізняється від результату П. Шеби важливим з погляду фізики випадком резонансу. Такі резонанси виникають і для потенціалів з нульовим середнім, які він вивчав. Зауважимо, що в праці [37], де Шеба вивчав поведінку схожих операторів на півосі, випадок резонансу був розглянутий.

Питанням збіжності операторів H_ε у випадку $V_0 = 0$ виникло в роботах [38–40], де апроксимували розв’язки операторів Шрединґера у зігнутих тонких квантових хвилеводах операторами Шрединґера на метричних графах. В цих моделях профіль V залежав від геометрії згину хвилевода, зокрема його кривини. У припущенні, що потенціал V експоненціально спадає на нескінченності і мав ненульове середнє, був отриманий результат аналогічний як в теоремі 1.1. Проте важливий для нас випадок δ' -подібного збурення не було вивчено, оскільки метод побудови асимптотики суттєво використовував умову $\int_{\mathbb{R}} V dx \neq 0$. Результати теореми 1.1 були перенесені на квантові графи моїм учнем С. Маньком [42, 43] і розвинуті в його спільних працях з П. Екснером [44, 45].

1.2.2 Доведення основної теореми

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що носій V міститься у відрізку $[-1, 1]$. Тоді збурення $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$ зосереджене на малій множині $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Введемо допоміжну змінну $t = \varepsilon^{-1}x$.

Випадок резонансу

Спершу припустимо, що потенціал V має резонанс нульової енергії, а u — напівзв’язний стан. Для функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ і числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ введемо позначення $y = R_\lambda(S_\theta)f$ та $y_\varepsilon = R_\lambda(H_\varepsilon)f$. Ідея доведення полягає у побудові асимптотичного наближення для елемента y_ε в області визначення H_ε , причому y має бути головним його членом. З близькості наближення в нормі $L_2(\mathbb{R})$ одночасно до y та y_ε впливатиме близькість цих двох елементів. Всі оцінки відстані будуть рівномірними відносно f на кожній обмеженій множині в $L_2(\mathbb{R})$.

Як ми показали в доведенні леми 1.4, звуження напівзв’язного стан u на

$[-1, 1]$ є нетривіальним розв'язком задачі

$$-u'' + V(t)u = 0, \quad t \in (-1, 1), \quad u'(-1) = 0, \quad u'(1) = 0, \quad (1.13)$$

причому $u(\pm\infty) = u(\pm 1)$, бо поза носієм V функція u є сталою (див. рис. 1.1). Отже, $\theta = \frac{u(1)}{u(-1)}$. Напівзв'язний стан нормуємо умовою $u(-1) = 1$. Тоді $u(1) = \theta$. Нехай також v — розв'язок задачі Коші

$$-v'' + V(t)v = 0, \quad t \in (-1, 1), \quad v(-1) = 0, \quad v'(-1) = 1. \quad (1.14)$$

Розглянемо функцію

$$\hat{z}_\varepsilon(x) = \begin{cases} y(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ y(-0)u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon y'(-0)v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

де w_ε — розв'язок задачі Коші

$$-w_\varepsilon'' + V(t)w_\varepsilon = f(\varepsilon t), \quad w_\varepsilon(-1) = 0, \quad w_\varepsilon'(-1) = 0. \quad (1.15)$$

Функція \hat{z}_ε не належить до області визначення оператор H_ε . За побудовою вона є лише елементом простору $W_2^2(\mathbb{R}_\varepsilon)$, де $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus \{-\varepsilon, \varepsilon\}$, і взагалі кажучи, має розриви в точках $\pm\varepsilon$. Нехай функція ρ_ε задана як в (1.6) із заміною g на \hat{z}_ε . Згідно з твердженням 1.1 функція $z_\varepsilon = \hat{z}_\varepsilon + \rho_\varepsilon$ належить до $W_{2,loc}^2(\mathbb{R})$. Крім того, z_ε збігається з y поза деякою компактною множиною, а y належить до простору \mathcal{V}_0 . Тому $z_\varepsilon \in \text{dom } H_\varepsilon$. Оцінимо величину розривів \hat{z}_ε в точках $x = -\varepsilon$ і $x = \varepsilon$, щоб показати малість ρ_ε . Скористаємося умовами в точці $t = -1$ для u , v і w_ε :

$$\hat{z}_\varepsilon(-\varepsilon-0) = y(-\varepsilon), \quad \hat{z}_\varepsilon(-\varepsilon+0) = y(-0), \quad \hat{z}'_\varepsilon(-\varepsilon-0) = y'(-\varepsilon), \quad \hat{z}'_\varepsilon(-\varepsilon+0) = y'(-0).$$

З оцінок (1.9) випливає

$$|[\hat{z}_\varepsilon]_{-\varepsilon}| = |y(-0) - y(-\varepsilon)| \leq c_1 \varepsilon \|f\|, \quad |[\hat{z}'_\varepsilon]_{-\varepsilon}| = |y'(-0) - y'(-\varepsilon)| \leq c_2 \varepsilon^{1/2} \|f\|.$$

Тепер застосуємо твердження 1.2 до розв'язку задачі Коші (1.15). Тоді

$$\|w_\varepsilon\|_{C^1[-1,1]} \leq c_3 \|f(\varepsilon \cdot)\|_{L_2(-1,1)} \leq c_3 \varepsilon^{-1/2} \|f\|, \quad (1.16)$$

оскільки

$$\|f(\varepsilon \cdot)\|_{L_2(-1,1)}^2 = \int_{-1}^1 |f(\varepsilon t)|^2 dt = \varepsilon^{-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^{-1} \|f\|^2. \quad (1.17)$$

Функції u і v є розв'язками лінійного однорідного рівняння і їх визначник Вронського є сталим, тому $(v'u - vu')|_{-1}^1 = 0$. Врахувавши крайові умови для u та умови Коші для v , отримаємо $v'(1) = \theta^{-1}$. Крім того, функція y задовольняє умови $y(+0) = \theta y(-0)$, $y'(+0) = \theta^{-1}y'(-0)$. Тому з твердження 1.4 та оцінки для w_ε дістаємо

$$\begin{aligned} |[\hat{z}_\varepsilon]_\varepsilon| &= |y(\varepsilon) - \theta y(-0) - \varepsilon y'(-0)v(1) - \varepsilon^2 w_\varepsilon(1)| \leq \\ &\leq |y(\varepsilon) - y(+0)| + \varepsilon |y'(-0)| |v(1)| + \varepsilon^2 |w_\varepsilon(1)| \leq c_4 \varepsilon \|f\| \\ |[\hat{z}'_\varepsilon]_\varepsilon| &= |y'(\varepsilon) - \theta^{-1} y'(-0) - \varepsilon w'_\varepsilon(1)| \leq |y'(\varepsilon) - y'(+0)| + \varepsilon |w'_\varepsilon(1)| \leq c_5 \varepsilon^{1/2} \|f\|. \end{aligned}$$

Малість стрибків функції \hat{z}_ε та твердження 1.1 забезпечують малість коректора ρ_ε . А саме, $\|\rho_\varepsilon\|_{C^2(|x| \geq \varepsilon)} \leq c_6 \varepsilon^{1/2} \|f\|$.

Тепер варто перекоонатися, що функція $z_\varepsilon \in \text{dom } H_\varepsilon$ достатньо добре апроксимує розв'язок рівняння $(H_\varepsilon - \lambda)y_\varepsilon = f$. Нехай $r_\varepsilon = (H_\varepsilon - \lambda)z_\varepsilon - f$. Тоді

$$r_\varepsilon = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + (V_0 - \lambda) \right) (y + \rho_\varepsilon) - f = -\rho''_\varepsilon + (V_0 - \lambda)\rho_\varepsilon$$

на множині $|x| \geq \varepsilon$, бо $y = R_\lambda(S_\theta)f$ є розв'язком рівняння $-y'' + (V_0 - \lambda)y = f$ на кожній з півосей. Отже,

$$\|r_\varepsilon\|_{C(|x| \geq \varepsilon)} \leq c_7 \|\rho_\varepsilon\|_{C^2(|x| \geq \varepsilon)} \leq c_8 \varepsilon^{1/2} \|f\|. \quad (1.18)$$

Коли ж $|x| < \varepsilon$, то $\rho_\varepsilon = 0$ і ми за побудовою функцій u , v і w_ε маємо

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(x) &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \varepsilon^{-2} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \lambda \right) \left(y(-0)u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon y'(-0)v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) - f = \\ &= \varepsilon^{-2} y(-0) \left(-u''\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) + \varepsilon^{-1} y'(-0) \left(-v''\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) - \\ &\quad - w''_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - f(x) + (V_0(x) - \lambda)z_\varepsilon(x) = (V_0(x) - \lambda)z_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Потенціал V_0 локально обмежений, тому з (1.8) та (1.16) отримуємо

$$\begin{aligned} \|r_\varepsilon\|_{C(|x| \leq \varepsilon)} &\leq c_9 \|z_\varepsilon\|_{C(|x| \leq \varepsilon)} \leq c_9 |y(-0)| \|u\|_{C([-1,1])} + \\ &\quad + c_9 \varepsilon |y'(-0)| \|v\|_{C([-1,1])} + c_9 \varepsilon^2 \|w_\varepsilon\|_{C([-1,1])} \leq c_{10} \|f\|. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Функція r_ε має компактний носій, бо таку ж властивість має ρ_ε . Припустимо, що $r_\varepsilon = 0$ для $|x| > a$. Тоді з (1.18) та (1.19) випливає оцінка

$$\|r_\varepsilon\|^2 = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} |r_\varepsilon(x)|^2 dx + \int_{|x| \leq \varepsilon} |r_\varepsilon(x)|^2 dx \leq 2a \|r_\varepsilon\|_{C(|x| \geq \varepsilon)}^2 + 2\varepsilon \|r_\varepsilon\|_{C(|x| \leq \varepsilon)}^2 \leq c_{11} \varepsilon \|f\|^2.$$

Остаточню, отримуємо $\|r_\varepsilon\| \leq c\varepsilon^{1/2}\|f\|$. З рівності $r_\varepsilon = (H_\varepsilon - \lambda)z_\varepsilon - f$ ми також маємо $z_\varepsilon = R_\lambda(H_\varepsilon)f + R_\lambda(H_\varepsilon)r_\varepsilon$. Крім того, для резольвент самоспряжених операторів H_ε є рівномірна відносно ε оцінка $\|R_\lambda(H_\varepsilon)\| \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$. Тому

$$\|R_\lambda(H_\varepsilon)f - z_\varepsilon\| \leq \|R_\lambda(H_\varepsilon)\| \|r_\varepsilon\| \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} \|r_\varepsilon\| \leq c_{12}\varepsilon^{1/2} |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} \|f\|. \quad (1.20)$$

Головним членом наближення z_ε є функція y , тому різниця

$$z_\varepsilon(x) - y(x) = \begin{cases} \rho_\varepsilon(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ y(-0)u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - y(x) + \varepsilon y'(-0)v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

природно повинна бути малою. Справді, застосувавши до неї такі ж міркування, як при оцінці залишку r_ε , отримуємо нерівність

$$\|z_\varepsilon - R_\lambda(S_\theta)f\| = \|z_\varepsilon - y\| \leq c_{13}\varepsilon^{1/2}\|f\|. \quad (1.21)$$

Поєднання (1.20) та (1.21) дає потрібну нам рівномірну оцінку різниці резольвент

$$\|(R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(S_\theta))f\| \leq \|R_\lambda(H_\varepsilon)f - z_\varepsilon\| + \|z_\varepsilon - R_\lambda(S_\theta)f\| \leq C\varepsilon^{1/2}\|f\| \quad (1.22)$$

зі сталою C , незалежною від f та ε . Отже, $\|R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(S_\theta)\| \leq C\varepsilon^{1/2}$, що і завершує доведення теореми у випадку резонансу.

Зрозуміло, що стала C в нерівності (1.22) залежить від числа λ . З доведення бачимо, що для різниці резольвент також справедлива оцінка

$$\|R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(S_\theta)\| \leq c_0\varepsilon^{1/2}(1 + |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}),$$

де стала c_0 вже не залежить від ε та λ .

Випадок відсутності резонансу

Припустимо, що потенціал V не має резонансу нульової енергії. Доведення є схожим до випадку резонансу з незначними змінами у структурі наближення z_ε . Тепер граничним оператором буде пряма сума операторів Шредингера на півосях з умовами Діріхле, тому покладемо $y = R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)f$ та $y_\varepsilon = R_\lambda(H_\varepsilon)f$ для деяких $f \in L_2(\mathbb{R})$ і $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Нехай

$$\hat{z}_\varepsilon(x) = \begin{cases} y(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

де w_ε — розв'язок задачі Коші (1.15), а w — розв'язок крайової задачі

$$-w'' + V(t)w = 0, \quad t \in (-1, 1), \quad w'(-1) = y'(-0), \quad w'(1) = y'(0). \quad (1.23)$$

При відсутності резонансу задача (1.23) має єдиний розв'язок і згідно з твердженням 1.2 допускає оцінку $\|w\|_{W_2^2} \leq c_1(|y'(-0)| + |y'(0)|)$. Тоді з огляду на (1.8) дістаємо $\|w\|_{W_2^2} \leq c_2\|f\|$. Крім того, функція w_ε задовольняє нерівність (1.16). Ці оцінки дозволяють довести, що стрибки \hat{z}_ε та \hat{z}'_ε в точках $x = \pm\varepsilon$ є малими при $\varepsilon \rightarrow 0$ рівномірно відносно L_2 -норми елемента f . Врахувавши умови $y(-0) = y(0) = 0$ та $w_\varepsilon(-1) = w'(-1) = 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} |[\hat{z}_\varepsilon]_{-\varepsilon}| &= |\varepsilon w(-1) - y(-\varepsilon)| \leq \varepsilon|w(-1)| + |y(-\varepsilon)| \leq c_3\varepsilon\|f\|, \\ |[\hat{z}'_\varepsilon]_{-\varepsilon}| &= |y'(-\varepsilon) - w'(-1)| = |y'(-\varepsilon) - y'(-0)| \leq c_4\varepsilon^{1/2}\|f\|, \end{aligned}$$

з огляду на твердження 1.4. Аналогічно,

$$\begin{aligned} |[\hat{z}_\varepsilon]_\varepsilon| &= |y(\varepsilon) - \varepsilon w(1) - \varepsilon^2 w_\varepsilon(1)| \leq |y(\varepsilon)| + \varepsilon|w(1)| + \varepsilon^2|w_\varepsilon(1)| \leq c_5\varepsilon\|f\|, \\ |[\hat{z}'_\varepsilon]_\varepsilon| &= |y'(\varepsilon) - w'(1) - \varepsilon w'_\varepsilon(1)| \leq |y'(\varepsilon) - y'(0)| + \varepsilon|w'_\varepsilon(1)| \leq c_6\varepsilon^{1/2}\|f\|. \end{aligned}$$

Нехай $z_\varepsilon = \hat{z}_\varepsilon + \rho_\varepsilon$, де коректор ρ_ε забезпечує неперервну диференційовність функції z_ε в точках $\pm\varepsilon$. Крім того, $\|\rho_\varepsilon\|_{C^2(|x| \geq \varepsilon)} \leq c\varepsilon^{1/2}\|f\|$, бо такий порядок малості мають стрибки. Позаяк домінуючим членом в асимптотиці z_ε є функція $y = R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)f$, то, як і в (1.21), отримаємо

$$\|z_\varepsilon - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)f\| \leq c\varepsilon^{1/2}\|f\|.$$

Наближення z_ε належить до $\text{dom } H_\varepsilon$, а похибка $r_\varepsilon = (H_\varepsilon - \lambda)z_\varepsilon - f$ має такий ж вигляд, як і у випадку резонансу. Тому $\|r_\varepsilon\| \leq c\varepsilon^{1/2}\|f\|$. Переписавши рівність для похибки r_ε у вигляді $z_\varepsilon = R_\lambda(H_\varepsilon)f + R_\lambda(H_\varepsilon)r_\varepsilon$, отримаємо

$$\|R_\lambda(H_\varepsilon)f - z_\varepsilon\| \leq c\varepsilon^{1/2}\|f\|.$$

З двох останніх нерівностей випливає рівномірна оцінка різниці резольвент

$$\|(R_\lambda(H_\varepsilon) - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+))f\| \leq c\varepsilon^{1/2}\|f\|$$

з незалежною від f та ε сталою c , що завершує доведення теореми.

1.2.3 Точні моделі для δ' -подібних потенціалів

Дамо фізичну інтерпретацію отриманого вище результату і наведемо кілька прикладів. Для конкретного потенціалу ми обчислимо його резонансну множину, побудуємо точну модель, знайдемо ймовірності проникнення і відбиття в задачі розсіювання, побудуємо апроксимацію власних значень для оператора Штурма-Ліувілля, а також проаналізуємо вплив δ' -подібного потенціалу на поведінку розв'язків задачі Коші. Нехай

$$V(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } x \in (-1, 0), \\ -1, & \text{коли } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (1.24)$$

– кусково-сталий потенціал, зображений на рис. 1.5. Цей профіль задовольняє умови $\int_{\mathbb{R}} V(x) dx = 0$ і $\int_{\mathbb{R}} xV(x) dx = -1$. Тому $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \delta'(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Введемо оператори Шредингера

$$H_{\varepsilon, \alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x),$$

що залежать від параметра ε і дійсної сталої взаємодії α . Такі оператори з нульовим потенціалом V_0 були основним об'єктом досліджень в [19].

Резонансна множина та функція взаємодії

Потенціал V непарний, тому резонансна множина $\mathcal{R}(V)$ є симетричною відносно початку координат. Справді, якщо α — резонансна стала взаємодії з напівзв'язним станом $u(x)$, то $-\alpha$ теж належить до $\mathcal{R}(V)$ і має напівзв'язний стан

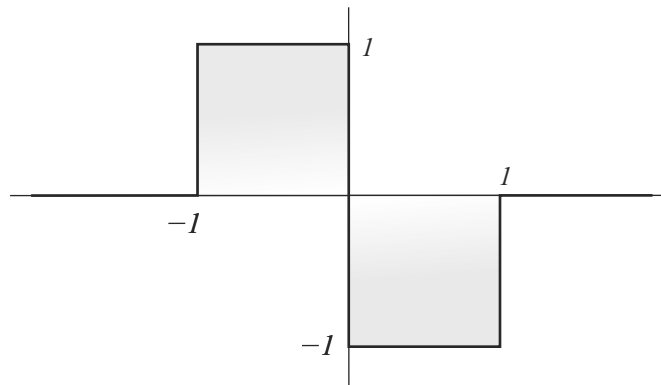


Рис. 1.5: Кусково-сталий потенціал V .

$u(-x)$. Зауважимо, що $\alpha = 0$ завжди є точкою $\mathcal{R}(V)$ з $u = 1$. Тому достатньо обчислити перетин $\mathcal{R}(V) \cap \mathbb{R}_+$. Згідно з доведенням леми 1.4 пошук точок множини $\mathcal{R}(V)$ можна звести до знаходження спектру задачі Неймана

$$-u'' + \alpha V u = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad u'(-1) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (1.25)$$

зі знакозмінною ваговою функцією. Покладемо $\alpha = \varkappa^2$, де $\varkappa > 0$. Тоді рівняння володіє фундаментальною системою розв'язків $\{S(\varkappa x), C(\varkappa x)\}$, де

$$S(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{при } x \in (-1, 0), \\ \sin x & \text{при } x \in (0, 1), \end{cases} \quad C(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{при } x \in (-1, 0), \\ \cos x & \text{при } x \in (0, 1). \end{cases} \quad (1.26)$$

Підставивши $u = a_1 S(\varkappa x) + a_2 C(\varkappa x)$ в умови Неймана, переконуємося, що задача (1.25) матиме нетривіальні розв'язки лише тоді, коли \varkappa є коренем рівняння

$$r(\varkappa) = \operatorname{sh} \varkappa \cos \varkappa - \operatorname{ch} \varkappa \sin \varkappa = 0. \quad (1.27)$$

Рівняння можна записати в еквівалентному вигляді $\operatorname{th} \varkappa = \operatorname{tg} \varkappa$. Очевидно, що воно має зліченну кількість коренів $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots$ на додатній півосі. Отже, резонансна множина має вигляд $\mathcal{R}(V) = \{0, \pm \varkappa_1^2, \pm \varkappa_2^2, \dots\}$. Кожній резонансній сталій взаємодії $\alpha = \varkappa^2$ відповідає напівзв'язний стан

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (-\infty, -1), \\ \operatorname{sh} \varkappa \operatorname{sh} \varkappa x + \operatorname{ch} \varkappa \operatorname{ch} \varkappa x & \text{при } x \in (-1, 0), \\ \operatorname{sh} \varkappa \sin \varkappa x + \operatorname{ch} \varkappa \cos \varkappa x & \text{при } x \in (0, 1), \\ \frac{\operatorname{ch} \varkappa}{\cos \varkappa} & \text{при } x \in (1, +\infty), \end{cases}$$

отриманий продовженням власної функції $\hat{u}_\alpha = \operatorname{sh} \varkappa S(\varkappa x) + \operatorname{ch} \varkappa C(\varkappa x)$ на усю вісь сталими значеннями зі збереженням неперервності. Зауважимо, що

$$\operatorname{sh} \varkappa \sin \varkappa + \operatorname{ch} \varkappa \cos \varkappa = \frac{\operatorname{ch} \varkappa}{\cos \varkappa}$$

при умові, що $\operatorname{th} \varkappa = \operatorname{tg} \varkappa$. Сталій $\alpha = -\varkappa^2$ відповідає стан

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} \varkappa}{\cos \varkappa} & \text{при } x \in (-\infty, -1), \\ \operatorname{sh} \varkappa \sin \varkappa x + \operatorname{ch} \varkappa \cos \varkappa x & \text{при } x \in (-1, 0), \\ \operatorname{sh} \varkappa \operatorname{sh} \varkappa x + \operatorname{ch} \varkappa \operatorname{ch} \varkappa x & \text{при } x \in (0, 1), \\ 1 & \text{при } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Введемо відображення $\theta: \mathcal{R}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ за правилом $\theta(\alpha) = \frac{u_\alpha(+\infty)}{u_\alpha(-\infty)}$. Це відображення називатимемо *функцією взаємодії*. У нашому прикладі

$$\theta(\alpha) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\alpha}}{\operatorname{cos} \sqrt{\alpha}} \quad \text{при } \alpha \geq 0, \quad \theta(\alpha) = \frac{\operatorname{cos} \sqrt{-\alpha}}{\operatorname{ch} \sqrt{-\alpha}} \quad \text{при } \alpha < 0. \quad (1.28)$$

Ми довели, що в разі резонансу найкращою апроксимацією операторів $H_{\varepsilon, \alpha}$ в класі гамільтоніанів з точковими взаємодіями є оператор $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x)$, визначений на функціях $y \in \mathcal{V}_0$, які підпорядковані умовам

$$\begin{pmatrix} y(+0) \\ y'(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(\alpha) & 0 \\ 0 & \theta(\alpha)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(-0) \\ y'(-0) \end{pmatrix}.$$

Якщо $\alpha \notin \mathcal{R}(V)$, то умови незв'язані, а саме, $y(-0) = 0$, $y(+0) = 0$.

Величина $\theta(\alpha)$ має таку фізичну інтерпретацію. Нехай h — нормована в $L_2(\mathbb{R})$ власна функція оператора H_0 , т. з. зв'язний стан. Коли квантово-механічна система знаходиться в стані h , то ймовірність локалізувати частинку на інтервалі (a, b) обчислюють за формулою $P_h(a, b) = \int_a^b |h(x)|^2 dx$. Власна функція неперервна на замиканні обох півосей, тому

$$\int_{-t}^0 |h(x)|^2 dx = |h(-0)|^2 t + o(t), \quad \int_0^t |h(x)|^2 dx = |h(+0)|^2 t + o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Позаяк $h(+0) = \theta(\alpha)h(-0)$, то

$$\theta^2(\alpha) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{P_h(0, t)}{P_h(-t, 0)},$$

тобто $\theta^2(\alpha)$ є границею відношення ймовірностей, з якими частинку можна локалізувати в інтервалах $(0, t)$ та $(-t, 0)$ відповідно. Для потенціалу $\alpha \varepsilon^{-2} V(\varepsilon^{-1} \cdot)$, профіль якого зображений на рис. 1.5, є очевидним, що при $\alpha > 0$ ймовірність локалізувати частинку в інтервалі $(0, \varepsilon)$ над потенціальною ямою є значно більшою, аніж знайти її в $(-\varepsilon, 0)$ над високим бар'єром. Отже, величина $|\theta(\alpha)|$ повинна бути більшою за одиницю. При $\alpha < 0$ потенціальні яма та бар'єр міняються місцями, тому $|\theta(\alpha)| < 1$, що узгоджується з формулами (1.28).

Розсіювання на δ' -подібному потенціалі

Нехай і далі профіль V заданий формулою (1.24). Стаціонарна задача розсіювання частинок на потенціалі $\alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ полягає у знаходженні розв'язку рівняння

$$-y'' + \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)y = k^2y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{Im } k \geq 0, \quad (1.29)$$

який поза носієм збурення має вигляд

$$y_\varepsilon(x) = e^{ikx} + R_\varepsilon(\alpha, k)e^{-ikx} \quad \text{при } x < -\varepsilon, \quad (1.30)$$

$$y_\varepsilon(x) = T_\varepsilon(\alpha, k)e^{ikx} \quad \text{при } x > \varepsilon. \quad (1.31)$$

Яка фізика захована у структурі y_ε ? Розв'язок e^{ikx} рівняння $-y'' = k^2y$ трактують як вільну частину (потік частинок), яка рухається зліва направо з енергією k^2 , а e^{-ikx} — як вільну частинку, яка рухається в протилежному напрямку. Формула (1.30) означає, що потік частинок з одиничною інтенсивністю — доданок e^{ikx} — налітає на потенціальний бар'єр і якась їх частина відбивається — доданок $R_\varepsilon(\alpha, k)e^{-ikx}$. Проте частина потоку з інтенсивністю $T_\varepsilon(\alpha, k)$ проникає через бар'єр — зображення (1.31). Найважливіше в цій структурі — відсутність експоненти e^{-ikx} справа від потенціалу, бо частинок, які прилітають з додатної нескінченності у цій ситуації немає. Величини $R_\varepsilon(\alpha, k)$, $T_\varepsilon(\alpha, k)$ називають *коефіцієнтом відбиття* та *коефіцієнтом проникнення*. Квадрати абсолютних величин цих коефіцієнтів є ймовірностями відбиття та проникнення, зокрема $|R_\varepsilon(\alpha, k)|^2 + |T_\varepsilon(\alpha, k)|^2 = 1$.

Якщо αV не має резонансу, то точна модель для (1.29) є такою

$$-y'' = k^2y, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y(0) = 0, \quad (1.32)$$

з очевидним розв'язком $y(x) = e^{ikx} - e^{-ikx}$ при $x < 0$ і $y(x) = 0$ при $x > 0$. Отже, $R(k) = -1$, $T(k) = 0$, тобто ймовірність проходження бар'єру є нульовою, а потенціал $\alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ є асимптотично непроникним. Тепер розглянемо випадок, коли $\alpha \in \mathcal{R}(V)$, а точна модель має вигляд

$$-y'' = k^2y, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y(+0) = \theta(\alpha)y(-0), \quad \theta(\alpha)y'(+0) = y'(-0), \quad (1.33)$$

де $\theta(\alpha)$ — функція взаємодії (1.28). Розв'язок

$$y(x) = \begin{cases} e^{ikx} + R(\alpha, k)e^{-ikx} & \text{при } x < 0, \\ T(\alpha, k)e^{ikx} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

має задовольняти умови $T = \theta(1 + R)$, $ik\theta T = ik(1 - R)$. Звідки маємо

$$R(\alpha, k) = \frac{1 - \theta^2(\alpha)}{1 + \theta^2(\alpha)}, \quad T(\alpha, k) = \frac{2\theta(\alpha)}{1 + \theta^2(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathcal{R}(V). \quad (1.34)$$

Ми отримали явні формули для даних розсіювання через функцію взаємодію. Цікаво, що ці дані не залежать від енергії k^2 .

Отже, у випадку резонансу наша точна модель каже, що частинки проходять потенціал $\alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ з ненульовою ймовірністю, близькою до числа

$$|T(\alpha, k)|^2 = \frac{4\theta^2(\alpha)}{(1 + \theta^2(\alpha))^2}.$$

Переконаємося, що ймовірність проникнення у задачі (1.29) справді близька при малих значеннях ε до числа $|T(\alpha, k)|^2$. Нехай $w_1 = w_1(t, \alpha, \mu)$ і $w_2 = w_2(t, \alpha, \mu)$ — розв'язки допоміжного рівняння

$$-w'' + \alpha V(t)w = \mu^2 w, \quad t \in (-1, 1), \quad (1.35)$$

підпорядковані початковим умовам

$$w_1(-1, \alpha, \mu) = 1, \quad w_1'(-1, \alpha, \mu) = 0, \quad w_2(-1, \alpha, \mu) = 0, \quad w_2'(-1, \alpha, \mu) = 1. \quad (1.36)$$

Шукатимемо розв'язок задачі розсіювання (1.29) у вигляді

$$y_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{ikx} + R e^{-ikx} & \text{при } x < -\varepsilon, \\ A w_1(\varepsilon^{-1}x, \alpha, \varepsilon k) + B w_2(\varepsilon^{-1}x, \alpha, \varepsilon k) & \text{при } |x| < \varepsilon, \\ T e^{ikx} & \text{при } x > \varepsilon \end{cases}$$

зі сталими R , T , A і B , які залежать від ε , α та k . Умови неперервної диференційовності розв'язку в точках $-\varepsilon$ та ε дають

$$\begin{pmatrix} -e^{i\varepsilon k} & 1 & 0 & 0 \\ i\varepsilon k e^{i\varepsilon k} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & w_1(1, \alpha, \varepsilon k) & w_2(1, \alpha, \varepsilon k) & -e^{i\varepsilon k} \\ 0 & w_1'(1, \alpha, \varepsilon k) & w_2'(1, \alpha, \varepsilon k) & -i\varepsilon k e^{i\varepsilon k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ A \\ B \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varepsilon k} \\ i\varepsilon k e^{-i\varepsilon k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Знайдемо коефіцієнт T за правилом Крамера

$$T_\varepsilon(\alpha, k) = \frac{\Delta_T(\alpha, \varepsilon k)}{\Delta(\alpha, \varepsilon k)}.$$

Визначник Вронського розв'язків w_1 та w_2 дорівнює одиниці, тому

$$\Delta_T(\alpha, \varepsilon k) = \begin{vmatrix} -e^{i\varepsilon k} & e^{-i\varepsilon k} & 1 & 0 \\ i\varepsilon k e^{i\varepsilon k} & i\varepsilon k e^{-i\varepsilon k} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & w_1(1, \alpha, \varepsilon k) & w_2(1, \alpha, \varepsilon k) \\ 0 & 0 & w_1'(1, \alpha, \varepsilon k) & w_2'(1, \alpha, \varepsilon k) \end{vmatrix} = -2i\varepsilon k.$$

Головний визначник цієї системи має вигляд

$$\Delta(\alpha, \varepsilon k) = e^{2i\varepsilon k} (w_1'(1, \alpha, \varepsilon k) - i\varepsilon k (w_1(1, \alpha, \varepsilon k) + w_2'(1, \alpha, \varepsilon k)) - \varepsilon^2 k^2 w_2(1, \alpha, \varepsilon k))$$

Введемо функції $u(t, \alpha) = w_1(t, \alpha, 0)$, $v(t, \alpha) = w_2(t, \alpha, 0)$, які є розв'язками задач

$$\begin{aligned} -u'' + \alpha V u &= 0, \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1, \alpha) = 1, \quad u'(-1, \alpha) = 0; \\ -v'' + \alpha V v &= 0, \quad x \in (-1, 1), \quad v(-1, \alpha) = 0, \quad v'(-1, \alpha) = 1. \end{aligned}$$

Позаяк $e^{2i\varepsilon k} = 1 + 2i\varepsilon k + O(\varepsilon^2 k^2)$ та $\|w_1(\cdot, \alpha, \varepsilon k) - u(\cdot, \alpha)\|_{C^1(-1,1)} = O(\varepsilon^2 k^2)$ при $\varepsilon k \rightarrow 0$, то визначник має таку асимптотику

$$\Delta(\alpha, \varepsilon k) = u'(1, \alpha) + i\varepsilon k g(\alpha) + O(\varepsilon^2 k^2). \quad (1.37)$$

де $g(\alpha) = 2u'(1, \alpha) - u(1, \alpha) - v'(1, \alpha)$. Отже,

$$T_\varepsilon(\alpha, k) = \frac{-2i\varepsilon k}{u'(1, \alpha) + i\varepsilon k g(\alpha)} + O(\varepsilon^2 k^2), \quad \text{коли } \varepsilon k \rightarrow 0.$$

В разі відсутності резонансу значення $u'(1, \alpha)$ відмінне від нуля, бо інакше б задача Неймана (1.25) мала нетривіальний розв'язок. Тому $T_\varepsilon(\alpha, k) = O(\varepsilon k)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а ймовірність проходження бар'єру є нескінченно малою порядку $O(\varepsilon^2 k^2)$. Якщо $\alpha \in \mathcal{R}(V)$, то $u'(1, \alpha) = 0$, бо u тоді є напівзв'язним станом. Крім того, $u(1, \alpha) = \theta(\alpha)$, а також $v'(1, \alpha) = \theta(\alpha)^{-1}$ згідно з міркуваннями на стор. 45. Тому маємо $g(\alpha) = -(\theta(\alpha) + \theta(\alpha)^{-1})$. Отже,

$$T_\varepsilon(\alpha, k) = \frac{2}{\theta(\alpha) + \theta(\alpha)^{-1}} + O(\varepsilon^2 k^2) = \frac{2\theta(\alpha)}{1 + \theta^2(\alpha)} + O(\varepsilon^2 k^2)$$

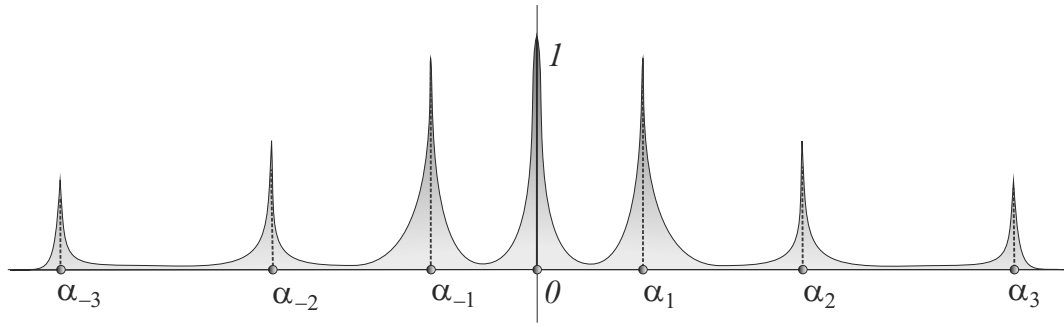


Рис. 1.6: Резонанси у ймовірності проникнення через потенціал $\alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$.

при $\varepsilon k \rightarrow 0$. А це узгоджується з результатом (1.34), отриманим з точної моделі. Зауважимо, що асимптотику $T_\varepsilon(\alpha, k)$ через функцію взаємодії $\theta(\alpha)$ ми отримали, не використовуючи вигляд профілю V . Ці міркування справедливі для усіх профілів з теореми 1.1. На рис. 1.6 зображено графік ймовірності $|T_\varepsilon(\alpha, k)|^2$ як функції параметру α . Бачимо, що ця ймовірність має шпильясту структуру і ”суттєво” відмінна від нуля не лише в точках резонансної множини, але й в їх околах.

Точна модель (1.32), (1.33) є ефективною не лише для кусково-сталих профілів. Для складнішого профілю

$$V(x) = \begin{cases} -6x(x+1) & \text{коли } x \in (-1, 0), \\ 6x(x-1) & \text{коли } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

резонансну множину можна обчислити, знайшовши корені рівняння $u'(1, \alpha) = 0$, наприклад, за допомогою *Maple*. В таблиці 1.1 наведено п'ять перших невід'ємних резонансних значень параметра α , відповідні значення $\theta(\alpha)$ і ймовірності проник-

α	$\theta(\alpha)$	$ T(\alpha) ^2$
0	1	1
18.1747	-54.9385	0.00132
57.1490	1352.8032	$0.219 \cdot 10^{-5}$
117.4863	-32156.4597	$0.387 \cdot 10^{-8}$
199.1756	755821.4703	$0.704 \cdot 10^{-11}$

Табл. 1.1: Резонансні сталі зв'язку, значення функції взаємодії і ймовірність проходження бар'єру.

нення $|T(\alpha)|^2$. Зауважимо, що при зростанні α ймовірність дуже швидко зменшується. Є гіпотеза, що це властиво усім δ' -подібним профілям з леми 1.1 (ii). Якщо, наприклад, V парна функція, яка ніколи не є δ' -подібним профілем, то всі напівзв'язні стани є парними або непарними, тому $|\theta(\alpha)| = 1$ та $|T(\alpha)|^2 = 1$ для усіх точок резонансної множини.

Оператори Штурма-Ліувілля з δ' -подібним потенціалом

Точні моделі, побудовані в теоремі 1.1 для операторів Шредингера, можна застосувати і до операторів Штурма-Ліувілля з δ' -подібним збуренням. Нехай інтервал (a, b) містить початок координат. Проаналізуємо поведінку спектру та власних функцій при $\varepsilon \rightarrow 0$ сім'ї операторів Штурма-Ліувілля

$$L_{\varepsilon, \alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \varepsilon^{-2} V(\varepsilon^{-1}x), \quad \text{dom } L_{\varepsilon, \alpha} = \{f \in W_2^2(a, b) : f(a) = 0, f(b) = 0\},$$

де кусково-сталий профіль V такий, як у попереднього прикладі. Наведемо результати обчислень лише для додатних α . Нехай $\alpha = \varkappa^2$. Покажемо як саме резонанс нульової енергії для V змінює асимптотичну поведінку власних частот та структуру власних функцій задачі

$$-y_\varepsilon'' + \varkappa^2 \varepsilon^{-2} V(\varepsilon^{-1}x) y_\varepsilon = \omega_\varepsilon^2 y_\varepsilon, \quad x \in (a, b), \quad y_\varepsilon(a) = 0, \quad y_\varepsilon(b) = 0 \quad (1.38)$$

Шукатимемо власні функції у вигляді

$$y_\varepsilon(x) = \begin{cases} A_1 \sin \omega(x - a), & \text{коли } x \in (a, -\varepsilon), \\ B_1 w_1(\varepsilon^{-1}x, \varkappa^2, \varepsilon\omega) + B_2 w_2(\varepsilon^{-1}x, \varkappa^2, \varepsilon\omega), & \text{коли } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ A_2 \sin \omega(x - b), & \text{коли } x \in (\varepsilon, b), \end{cases}$$

де w_k визначені в (1.35), (1.36). Функція y_ε вже задовольняє крайові умови в точках a і b . З умов її неперервної диференційовності в точках $-\varepsilon$ та ε отримуємо характеристичний визначник $\Delta(\varepsilon, \varkappa, \omega)$, коренями якого є власні частоти ω_ε . Введемо позначення

$$r_0(\varkappa) = \varkappa(\text{th } \varkappa - \text{tg } \varkappa), \quad r_1(\varkappa) = \text{th } \varkappa \text{tg } \varkappa - 1, \quad r_2(\varkappa) = \frac{1 + \text{th } \varkappa \text{tg } \varkappa}{1 - \text{th } \varkappa \text{tg } \varkappa}.$$

Визначник має таку асимптотику при $\varepsilon\omega \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \Delta(\varepsilon, \varkappa, \omega) = r_0(\varkappa) \left(\operatorname{tg} a\omega \operatorname{tg} b\omega + \varepsilon\omega (\operatorname{tg} b\omega - \operatorname{tg} a\omega) \right) + \\ + \varepsilon\omega r_1(\varkappa) (\operatorname{tg} b\omega - r_2(\varkappa) \operatorname{tg} a\omega) + O(\varepsilon^2\omega^2). \end{aligned} \quad (1.39)$$

З огляду на (1.27) функція r_0 обертається в нуль на резонансній множині $\mathcal{R}(V)$ і лише на ній. Якщо резонанс відсутній, то значення $r_0(\varkappa)$ відмінне від нуля і частоти ω_ε збігаються до коренів рівняння $\operatorname{tg} a\omega \operatorname{tg} b\omega = 0$, а нормовані власні функції y_ε збігаються в $L_2(a, b)$, а також в C^1 -нормі на кожному з відрізків $[a, 0]$ та $[0, b]$, до функцій вигляду

$$u_k(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi k}{a}(x - a), & x \in (a, 0), \\ 0, & x \in (0, b), \end{cases} \quad v_k(x) = \begin{cases} 0 & x \in (a, 0), \\ \sin \frac{\pi k}{b}(x - b), & x \in (0, b), \end{cases}$$

де $k \in \mathbb{N}$. Граничні частоти $\{\frac{\pi k}{a}\}_{k=1}^\infty$, $\{\frac{\pi k}{b}\}_{k=1}^\infty$ і дві серії власних функцій $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ відповідають прямій сумі операторів другого диференціювання на інтервалах $(a, 0)$ та $(0, b)$ з умовами Діріхле.

Якщо ж α належить до резонансної множини $\mathcal{R}(V)$, то $r_0(\varkappa)$ дорівнює нулю, $r_1(\varkappa) = \operatorname{th}^2 \varkappa - 1$ не дорівнює нулю, а також

$$r_2(\varkappa) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varkappa}{1 - \operatorname{th}^2 \varkappa} = \frac{\operatorname{ch}^2 \varkappa}{\cos^2 \varkappa} = \theta^2(\alpha).$$

У цьому випадку граничні частоти ω_k є коренями рівняння $\operatorname{tg} b\omega = \theta^2(\alpha) \operatorname{tg} a\omega$. Власні функції y_ε збігаються в $L_2(a, b)$, а також в C^1 -нормі на кожному з відрізків $[a, 0]$ та $[0, b]$, до власних функцій задачі

$$\begin{cases} -y'' = \omega^2 y, & x \in (a, 0) \cup (0, b), & y(a) = y(b) = 0, \\ y(+0) = \theta(\alpha)y(-0), & \theta(\alpha)y'(+0) = y'(-0), \end{cases} \quad (1.40)$$

з такими ж умова спряження, як і в задачі розсіювання.

Взагалі кажучи, сім'я операторів $L_{\varepsilon, \alpha}$ не є обмеженою знизу рівномірно за параметром ε . Задача (1.38) може мати від'ємне власне значення, яке прямує до $-\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Проте це не є перешкодою для рівномірної резольвентної збіжності операторів $L_{\varepsilon, \alpha}$ до прямої суми при відсутності резонансу чи до оператора задачі (1.40) при резонансі, які є обмеженими знизу (див. приклад Релліха [46, с. 292]).

Задача Коші з δ' -подібним збуренням

Вивчимо поведінку розв'язків задачі Коші

$$-y_\varepsilon'' + \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)y_\varepsilon = 0, \quad x \in (-1, +\infty), \quad y_\varepsilon(-1) = a, \quad y_\varepsilon'(-1) = b$$

при $\alpha = \varkappa^2$ і малих значеннях ε . Тут a і b — задані числа, потенціал V такий, як в (1.24). Поза носієм збурення розв'язок задачі є лінійною функцією, тому

$$y_\varepsilon(x) = \begin{cases} b(x+1) + a, & \text{коли } x \in (-1, -\varepsilon), \\ a_1 S(\frac{\varkappa x}{\varepsilon}) + a_2 C(\frac{\varkappa x}{\varepsilon}), & \text{коли } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ a_3 x + a_4, & \text{коли } x \in (\varepsilon, +\infty), \end{cases}$$

де функції S і C визначені в (1.26). Узгодивши зображення розв'язку в точка $-\varepsilon$ і ε , отримаємо лінійну систему для знаходження сталих a_k :

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{sh} \varkappa & \operatorname{ch} \varkappa & 0 & 0 \\ \varkappa \operatorname{ch} \varkappa & -\varkappa \operatorname{sh} \varkappa & 0 & 0 \\ \sin \varkappa & \cos \varkappa & -\varepsilon & -1 \\ \varkappa \cos \varkappa & -\varkappa \sin \varkappa & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b(1 - \varepsilon) \\ \varepsilon b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нас цікавить поведінка y_ε справа від потенціалу. Безпосередні обчислення дають

$$\begin{aligned} a_3(\varepsilon, \varkappa) &= \varepsilon^{-1}(a + b(1 - \varepsilon))\varkappa r(\varkappa) + b r_-(\varkappa), \\ a_4(\varepsilon, \varkappa) &= (a + b)r_+(\varkappa) - \varkappa r(\varkappa) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

де $r(\varkappa) = \operatorname{sh} \varkappa \cos \varkappa - \operatorname{ch} \varkappa \sin \varkappa$ — функція, яка визначає резонансну множину потенціалу V , а $r_\pm(\varkappa) = \operatorname{ch} \varkappa \cos \varkappa \pm \operatorname{sh} \varkappa \sin \varkappa$.

Якщо V не має резонансу нульової енергії, то $r(\varkappa) \neq 0$ і кутовий коефіцієнт $a_3(\varepsilon, \varkappa)$ лінійної функції справа від потенціалу нескінченно зростає при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отже, при відсутності резонансу послідовність розв'язків задачі Коші розбігається на кожній множині $[-1, c]$, де $c > 0$. У випадку ж резонансу виконуються рівності $r(\varkappa) = 0$, $r_+(\varkappa) = \theta(\alpha)$ та $r_-(\varkappa) = \theta(\alpha)^{-1}$. Тому послідовність y_ε має границю

$$y(x) = \begin{cases} b(x+1) + a, & \text{коли } x \in (-1, 0), \\ b\theta(\alpha)^{-1}x + (a+b)\theta(\alpha), & \text{коли } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Гранична функція є розв'язком задачі Коші з точковою взаємодією в нулі:

$$\begin{aligned} y'' &= 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0 + \infty), \quad y_\varepsilon(-1) = a, \quad y'_\varepsilon(-1) = b, \\ y(+0) &= \theta(\alpha)y(-0), \quad \theta(\alpha)y'(+0) = y'(-0). \end{aligned}$$

Цей приклад показує, що точкові взаємодії залежать не лише від профілю збурення, але й типу задачі. Наприклад, в задачі Коші при відсутності резонансу нульової енергії в границі ніколи не виникає умова Діріхле в початку координат.

1.3 δ' -подібні збурення з класу Фаддєєва-Марченка

В цьому підрозділі поширимо результати на δ' -подібні збурення, які не мають компактних носіїв. Покажемо, що в класі профілів, для яких такі збурення ще можна трактувати як локальні, відсутність компактного носія не впливає на вигляд граничних точкових взаємодій, проте змінює і значно ускладнює техніку доведень. Таке дослідження спирається найперше на результати теорії розсіювання і, зокрема, властивості та асимптотику розв'язків Йоста. Активний розвиток цієї теорії припав на 80-ті роки минулого століття [49–58].

1.3.1 Формулювання задачі та основних результатів

Нехай V — дійснозначний потенціал класу Фаддєєва-Марченка, тобто функція, яка задовольняє умову

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)|V(x)| dx < \infty.$$

Спершу вивчимо збіжність при $\varepsilon \rightarrow 0$ сім'ї операторів

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) \quad (1.41)$$

на прямій, яка є збуренням вільного оператор Шредингера. Далі ми узагальнимо цей результат на випадок збурення оператора $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$, де V_0 — обмежена функція з компактным носієм. Потенціали класу Фаддєєва-Марченка теж мають резонанси нульової енергії. Відповідні напівзв'язні стани u , звісно, вже не є сталими поза компактом, проте, як зображено рис. 1.7, вони мають скінченні границі $u_\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x)$ [47]. Напівзв'язний стан визначений з точністю до сталого

множник, а числа u_- і u_+ відмінні від нуля. Тому для резонансного потенціалу V можна коректно визначити величину $\theta = u_+/u_-$.

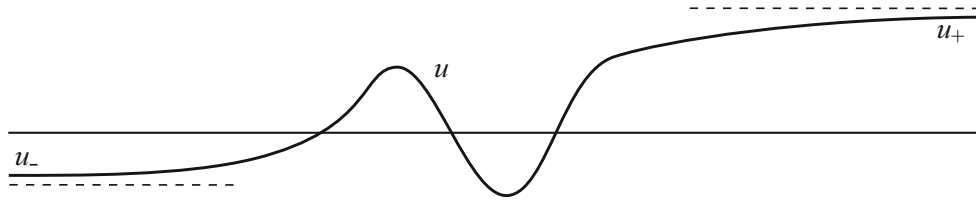


Рис. 1.7: Напівзв'язний стан.

Введемо оператори $\mathcal{D}_0^\pm = -\frac{d^2}{dx^2}$, $\text{dom } \mathcal{D}_0^\pm = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm) : f(0) = 0\}$, а також

$$S_{0,\theta} = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom } S_{0,\theta} = \{f \in W_2^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : f(+0) = \theta f(-0), \theta f'(+0) = f'(-0)\}.$$

Теорема 1.2. *Нехай V – дійснозначний потенціал з класу Фаддєєва-Марченка. Тоді сім'я операторів Шрединґера $H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ збігається в сенсі рівномірної резольвентної збіжності при $\varepsilon \rightarrow 0$. При відсутності резонансу граничний оператор є прямою сумою $\mathcal{D}_0^- \oplus \mathcal{D}_0^+$ операторів на півосях. Якщо V має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u , то H_ε збігаються до оператор $S_{0,\theta}$ з параметром $\theta = u_+/u_-$.*

Найімовірніше цей результат не можна поширити поза клас потенціалів Фаддєєва-Марченка. Розглянемо функцію $V(x) = (1+x^2)^{-1}$ з простору $L_1(\mathbb{R})$, яка не належить до класу Фаддєєва-Марченка. Тоді $H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + (\varepsilon^2 + x^2)^{-1}$, а квадратична форма \mathfrak{h}_ε цього оператора є замкненою в просторі $W_2^1(\mathbb{R})$. Для елемента $v \in W_2^1(\mathbb{R})$ існує скінченна границя

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathfrak{h}_\varepsilon(v, v) &= \int_{\mathbb{R}} |v'(x)|^2 dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{|v(x)|^2}{\varepsilon^2 + x^2} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |v'(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{|v(x)|^2}{x^2} dx = \mathfrak{h}_0(v, v) \end{aligned}$$

тоді і лише тоді, коли $v(0) = 0$. Достатність цього твердження очевидна, а необхідність випливає з неперервності оператора Харді $g \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$ в просторі $L_2(0, 1)$ [48, Ch. 9.9]. Крім того, сім'я потенціалів $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) = (\varepsilon^2 + x^2)^{-1}$ зростає при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто $\mathfrak{h}_{\varepsilon_2} \geq \mathfrak{h}_{\varepsilon_1}$ при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Згідно з теоремою S.14 в монографії [1, с.373], гранична квадратична форма \mathfrak{h}_0 є замкненою в області

$\{y \in W_2^1(\mathbb{R}) : y(0) = 0\}$, а оператори Шредингера H_ε збігаються в сенсі сильної резольвентної збіжності при $\varepsilon \rightarrow 0$ до оператора H_0 , що відповідає формі \mathfrak{h}_0 . За першою теоремою про представлення оператора [46, теорема VI.2.1] маємо $\text{dom } H_0 \subset \text{dom } \mathfrak{h}_0$. Тому H_0 є прямою сумою двох операторів на півосях з потенціалом Бесселя $1/x^2$. На відміну від теореми 1.2, в цьому прикладі граничний оператор отримав в спадок від збурення не лише умови Діріхле в нулі, але й новий потенціал, тобто збурення вже не є локальним.

Основним технічним моментом доведення теореми 1.2 стане тонка “хірургія” потенціалів $V_\varepsilon = \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1} \cdot)$. Для кожного профілю V побудуємо свій інтервал $(-x_\varepsilon, x_\varepsilon)$, який стягується в точку при $\varepsilon \rightarrow 0$. Розглянемо звуження \hat{V}_ε потенціалів V_ε на цей інтервал, які продовжені нулем поза нього. До операторів \hat{H}_ε з потенціалами \hat{V}_ε ми застосуємо методи дослідження з підрозділу 1.2. А з іншого боку, правильний вибір x_ε гарантуватиме, що усічені “хвости” потенціалів V_ε поза $(-x_\varepsilon, x_\varepsilon)$ є нескінченно малими збуреннями в рівномірній резольвентній топології. В обох випадках — резонансу та його відсутності — доведення спираються на акуратний асимптотичний аналіз розв’язків Йоста для операторів H_ε та \hat{H}_ε на нескінченності та в околі точок обтинання $\pm x_\varepsilon$. Введемо позначення

$$\begin{aligned} \sigma_-(t) &= \int_{-\infty}^t |V(s)| ds, & \tau_-(t) &= \int_{-\infty}^t (1 + |s|)|V(s)| ds, \\ \sigma_+(t) &= \int_t^{\infty} |V(s)| ds, & \tau_+(t) &= \int_t^{\infty} (1 + |s|)|V(s)| ds \end{aligned}$$

Вибір точки $x_\varepsilon = x_\varepsilon(V)$ для конкретного профілю V базуватиметься на спеціальних властивостях потенціалів класу Фаддєєва-Марченка. Доведемо технічне, але важливе для доведення основного результату, твердження.

Лема 1.7. *Нехай V — потенціал класу Фаддєєва-Марченка. Тоді існує неперервна, додатна і парна функція $\rho_V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що має такі властивості:*

- (i) ρ_V строго зростає на множині $(0, +\infty)$;
- (ii) $|t|^{-1}\rho_V(t) \rightarrow +\infty$ при $|t| \rightarrow +\infty$;
- (iii) інтеграл $\int_{\mathbb{R}} \rho_V(t)|V(t)| dt$ є скінченним.

Доведення. Для потенціалів V з компактним носієм такою функцією ϵ , наприклад, $\rho_V(t) = 1 + t^2$. В інших випадках введемо функцію

$$\tau(t) = \tau_+(|t|) + \tau_-(-|t|) = \int_{|s|>|t|} (1 + |s|) |V(s)| ds,$$

яка коректно визначена для V з класу Фаддєєва-Марченка, ϵ строго додатною і парною. Крім того, вона не зростає при $t > 0$ і прямує до нуля на нескінченності. Для $a \in (0, 1)$ покладемо $\rho_V(t) = \frac{1+|t|}{\tau^a(t)}$. Очевидно, ρ_V володіє властивостями (i) та (ii). Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \tau'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{-t} (1 + |s|) |V(s)| ds + \int_t^{+\infty} (1 + |s|) |V(s)| ds \right) = \\ &= -(1 + t)(|V(-t)| + |V(t)|) \end{aligned}$$

для $t > 0$. Тому

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho_V(t) |V(t)| dt &= \int_0^{+\infty} \rho_V(t) (|V(-t)| + |V(t)|) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(1 + t)(|V(-t)| + |V(t)|)}{\tau^a(t)} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\tau'(t)}{\tau^a(t)} dt = \frac{\tau^{1-a}(0)}{1 - a} < \infty, \end{aligned}$$

що завершує доведення. □

Зафіксуємо потенціал V і виберемо функцію ρ_V , яка задовольняє умовам леми 1.7. Через t_ϵ позначимо додатний корінь рівняння $\rho_V(t) = 1/\epsilon$. За властивістю (i) такий корінь існує і єдиний для усіх достатньо малих ϵ . Крім того, $t_\epsilon \rightarrow +\infty$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Покладемо $x_\epsilon = \epsilon t_\epsilon$. Тоді згідно з властивістю (ii) маємо $t_\epsilon^{-1} \rho_V(t_\epsilon) = (\epsilon t_\epsilon)^{-1} \rightarrow \infty$. Отже, $x_\epsilon \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Вибравши так x_ϵ , надалі через χ_ϵ позначатимемо характеристичну функцію відрізка $[-x_\epsilon, x_\epsilon]$. Побудуємо сім'ю усічених потенціалів $\hat{V}_\epsilon(x) = \epsilon^{-2} V(\epsilon^{-1} x) \chi_\epsilon(x)$, зображених на рис. 1.8, і визначимо в $L_2(\mathbb{R})$ оператори Шрединґера

$$\hat{H}_\epsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}_\epsilon(x).$$

Спираючись на результати підрозділу 1.2, очікуємо, що оператори \hat{H}_ϵ мають рівномірну резольвентну границю при $\epsilon \rightarrow 0$, хоча сім'я потенціалів \hat{V}_ϵ відрізняється від потенціалів, одержаних стиском вибраного профілю. Надалі через

H_0 позначатимемо граничний оператор для сім'ї H_ε , який буде прямою сумою $\mathcal{D}_0^- \oplus \mathcal{D}_0^+$ при відсутності резонансу або ж оператором $S_{0,\theta}$, якщо потенціал V має резонанс нульової енергії. Параметр θ обчислюємо через напівзв'язний стан так, як в теоремі 1.2.

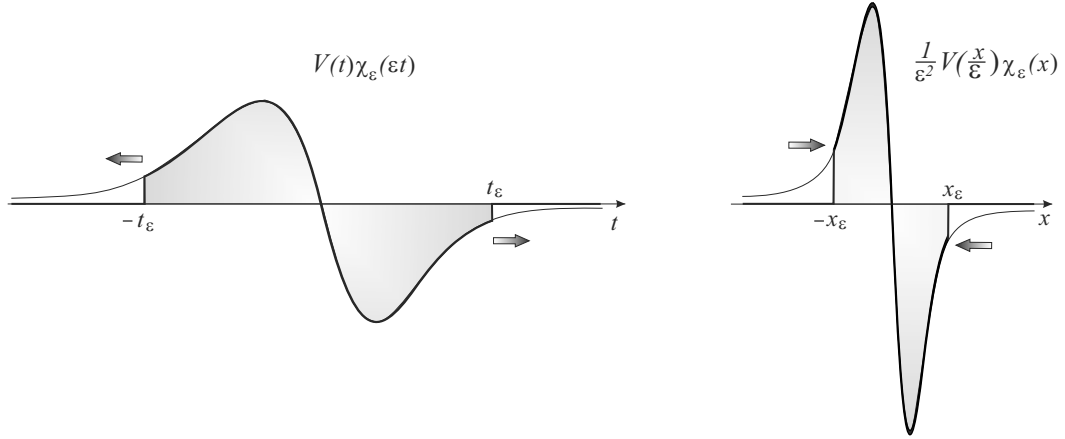


Рис. 1.8: Усічені потенціали в координатах t та x .

Теорема 1.3. *Нехай виконуються умови теореми 1.2. Тоді*

$$\|(\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1} - (H_0 - k^2)^{-1}\| \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для кожного $k^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Також треба встановити близькість операторів Шредингера H_ε та \hat{H}_ε , довівши, що усічення потенціалів поза множиною $[-x_\varepsilon, x_\varepsilon]$ не надто сильно змінює вихідні оператори H_ε в рівномірній резольвентній метриці.

Теорема 1.4. *При виконанні умов теореми 1.2*

$$\|(H_\varepsilon - k^2)^{-1} - (\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1}\| \rightarrow 0 \quad (1.42)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всіх $k^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Теорема 1.2 випливатиме з доведення двох останніх теорем. Цей результат залишається справедливим і тоді, коли оператори H_ε мають вигляд

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x),$$

де потенціал V_0 обмежений і з компактним носієм. Основний результат цього підрозділу схожий до теореми 1.1, але у цьому випадку не існує кваліфікованої оцінки різниці резольвент в усьому класі Фаддєєва-Марченка.

Теорема 1.5. *Нехай V_0 та V — дійснозначні функції, причому V_0 є обмеженою і з компактним носієм, а V належить до класу Фаддеева-Марченка. Тоді сім'я операторів Шредингера $H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$ збігається в сенсі рівномірної резольвентної збіжності при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Нехай \mathcal{D}^- , \mathcal{D}^+ та S_θ — оператори, визначені в (1.12). При відсутності резонансу граничний оператор сім'ї H_ε є прямою сумою $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$. Якщо V має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u , то H_ε збігаються до оператор S_θ з параметром $\theta = u_+/u_-$.

1.3.2 Асимптотика розв'язків Йоста для оператора H_ε

Для комплексних чисел k з невід'ємною уявною частиною $\text{Im } k$ розглянемо два розв'язки $f_-(\cdot, k)$ та $f_+(\cdot, k)$ рівняння Шредингера

$$-y'' + Vy = k^2y \quad (1.43)$$

з асимптотикою на нескінченностях

$$f_-(x, k) = e^{-ikx}(1 + o(1)) \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad f_+(x, k) = e^{ikx}(1 + o(1)) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Називатимемо їх *лівим та правим розв'язками Йоста*. Для потенціалів V з класу Фаддеева-Марченка та ненульових k такі розв'язки існують [55, Ch. I.1.3].

Твердження 1.5. *Припустимо, що потенціал V належить до класу Фаддеева-Марченка. Тоді для кожного k із замкненої верхньої комплексної півплощини $\overline{\mathbb{C}_+}$ для правого розв'язку Йоста виконуються нерівності*

$$|f_+(x, k) - e^{ikx}| \leq c_1 |e^{ikx}| \tau_+(x), \quad |f'_+(x, k) - ikf_+(x, k)| \leq c_2 |e^{ikx}| \sigma_+(x) \quad (1.44)$$

при $x \geq 0$, а також

$$|f_+(x, k) - e^{ikx}| \leq c_2 |e^{ikx}| (1 + |x|), \quad |f'_+(x, k) - ikf_+(x, k)| \leq c_4 |e^{ikx}| \quad (1.45)$$

при $x < 0$. Схожі оцінки є і для лівого розв'язку Йоста [56], [57, лема 3.1.3].

Через $W\{f, g\} = fg' - f'g$ позначатимемо визначник Вронського функцій f і g , а через $D(k) = W\{f_+(\cdot, k), f_-(\cdot, k)\}$ — вронскіан розв'язків Йоста.

Лема 1.8. Нехай $k \in \overline{\mathbb{C}_+}$, а t_ε – додатний корінь рівняння $\varepsilon\rho_V(t) = 1$. Тоді розв’язки Йоста в точках $(\pm t_\varepsilon, \varepsilon k)$ мають таку асимптотику

$$f_\pm(\pm t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow 1, \quad \varepsilon f_\mp(\pm t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow 0, \quad (1.46)$$

$$\varepsilon^{-1} f'_\pm(\pm t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow \pm ik, \quad f'_\mp(\pm t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow \pm D(0). \quad (1.47)$$

Доведення. Асимптотична формула $f_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow 1$ випливає з першої нерівності в (1.44). Далі з першої оцінки в (1.45) маємо $|f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k)| \leq c(1 + t_\varepsilon)$. Згадавши, що $\varepsilon t_\varepsilon \rightarrow 0$, отримуємо $\varepsilon f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow 0$. Згідно з другою нерівністю в (1.44)

$$|\varepsilon^{-1} f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) - ik| \leq c_2 \varepsilon^{-1} \sigma_+(t_\varepsilon) + |k| |f_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) - 1|. \quad (1.48)$$

Скористаємося тепер властивостями функції ρ_V :

$$\varepsilon^{-1} \sigma_+(t_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_{t_\varepsilon}^{\infty} |V(t)| dt \leq \int_{t_\varepsilon}^{\infty} \frac{\rho_V(t) |V(t)|}{\varepsilon \rho_V(t_\varepsilon)} dt = \int_{t_\varepsilon}^{\infty} \rho_V(t) |V(t)| dt.$$

З огляду на лему 1.7 (iii) останній інтеграл прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тому з (1.48) випливає, що $\varepsilon^{-1} f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow ik$. Аналогічно доводимо властивості

$$f_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow 1, \quad \varepsilon f_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow 0, \quad \varepsilon^{-1} f'_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow -ik.$$

Нарешті, записавши визначник Вронського в двох різних точках у вигляді

$$D(\varepsilon k) = \begin{vmatrix} \varepsilon f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) & f_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \\ f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) & \varepsilon^{-1} f'_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) & \varepsilon f_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) \\ \varepsilon^{-1} f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) & f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) \end{vmatrix}$$

і перейшовши до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ з врахуванням вже доведеного, отримаємо

$$f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow -D(0), \quad f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow D(0). \quad \square$$

Тепер доречно пояснити походження терміну *резонанс нульової енергії*. Для ненульових k розв’язки Йоста f_+ та f_- є завжди лінійно незалежними. Проте при $k = 0$, коли енергія частинок є нульовою, вони можуть ставати лінійно залежними. Якщо для деякого потенціалу V це трапиться, то потенціал має резонанс нульової енергії згідно з означенням 1.3. Більше того, тоді між розв’язками Йоста і напівзв’язними станами є зв’язок, оскільки розв’язки Йоста стають обмеженими на прямій. Справді, припустимо, що

$$f_-(x, 0) = \theta f_+(x, 0) \quad (1.49)$$

для деякої сталої θ . Якщо u — напівзв'язний стан, то $u(x) = c_- f_-(x, 0)$ або $u(x) = c_+ f_+(x, 0)$ з деякими сталими c_{\pm} , бо рівняння (1.43) може мати лише один (з точністю до множника) розв'язок, обмежений на усій прямій. Тоді $c_+ = \theta c_-$, а також $c_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x)$, бо $f_+(x, 0) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$ і $f_-(x, 0) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow -\infty$. Тому θ у рівності (1.49) збігається з параметром θ в теоремі 1.2.

В разі резонансу можна дістати більше інформації про асимптотичну поведінку розв'язків Йоста. Зокрема, можна довести, що розв'язки $f_{\pm}(\cdot, \varepsilon k)$ залишаються рівномірно обмеженими на $(-t_{\varepsilon}, t_{\varepsilon})$, а також уточнити асимптотики з леми 1.8. Спершу отримаємо оцінки для іншої пари розв'язків рівняння (1.43).

Твердження 1.6. *Нехай $g_+(\cdot, k)$ та $g_-(\cdot, k)$ — два розв'язки рівняння (1.43) такі, що $W\{f_+, g_+\} = 1$ та $W\{f_-, g_-\} = -1$. Тоді*

$$|g_+(x, k)| \leq c |e^{-ikx}| x \text{ при } x \geq x_+, \quad |g_-(x, k)| \leq c |e^{ikx}| |x| \text{ при } x \leq x_- \quad (1.50)$$

для деяких від'ємного x_- , додатного $x_+ > 0$ і усіх $k \in \overline{\mathbb{C}_+}$.

Доведення. Згідно з (1.44) існує таке $x_+ > 0$, що $f_+(x, k) \neq 0$ для всіх $k \in \overline{\mathbb{C}_+}$ та $x \geq x_+$. Тоді функція

$$g_+(x, k) = f_+(x, k) \int_{x_+}^x \frac{dt}{f_+^2(t, k)},$$

знайдена як частковий розв'язок рівняння $f_+ g' - f_+' g = 1$, коректно визначена для $x \geq x_+$, є розв'язком рівняння (1.43), а також задовольняє умову $W\{f_+, g_+\} = 1$. Зрозуміло, що її можна продовжити на всю вісь як розв'язок рівняння (1.43).

Тепер звернемося до нерівності $|f_+(x, k) - e^{ikx}| \leq c_1 |e^{ikx}| \tau_+(x)$ з твердження 1.5. Нехай число x_+ настільки велике, що при $x \geq x_+$ множник $c_1 \tau_+(x)$ є меншим за $1/2$. Тоді матимемо $\frac{1}{2} |e^{ikx}| \leq |f_+(x, k)| \leq \frac{3}{2} |e^{ikx}|$. Отже,

$$\frac{|e^{ikx} g_+(x, k)|}{x} \leq \frac{6 |e^{2ikx}|}{x - x_+} \int_{x_+}^x \frac{dt}{|e^{2ikt}|} \leq 6,$$

звідки випливає нерівність для g_+ . Такі ж міркування застосовуємо до функції

$$g_-(x, k) = f_-(x, k) \int_x^{x_-} \frac{dt}{f_-^2(t, k)},$$

яка задовольняє умову $W\{f_-, g_-\} = -1$. □

Лема 1.9. Нехай потенціал V володіє резонансом нульової енергії. Тоді існує незалежна від ε стала c , що

$$\max_{|x| \leq t_\varepsilon} |f_\pm(x, \varepsilon k)| \leq c. \quad (1.51)$$

Крім того, справедливі асимптотичні формули при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow \theta^{-1}, \quad f_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow \theta, \quad (1.52)$$

$$\varepsilon^{-1} f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow ik\theta, \quad \varepsilon^{-1} f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow -ik\theta^{-1}. \quad (1.53)$$

Доведення. Фундаментальна система розв'язків рівняння (1.43) вибрана так, що

$$f_+(x, \varepsilon k) = \alpha_\varepsilon f_-(x, \varepsilon k) + D(\varepsilon k) g_-(x, \varepsilon k)$$

з деякою сталою α_ε . У випадку резонансу $D(0) = 0$, до того ж цей визначник диференційовний в нулі і $\dot{D}(0) = -i(\theta + \theta^{-1})$ [58]. Тоді

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D(\varepsilon k)}{\varepsilon} = -ik(\theta + \theta^{-1}). \quad (1.54)$$

Отже, $D(\varepsilon k) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ і, з врахуванням оцінки (1.50) для g_- , маємо

$$\max_{x \in [-t_\varepsilon, x_-]} |f_+(x, \varepsilon k) - \alpha_\varepsilon f_-(x, \varepsilon k)| \leq c_1 |D(\varepsilon k)| |e^{i\varepsilon t_\varepsilon k}| t_\varepsilon \leq c_2 \varepsilon t_\varepsilon = c_2 x_\varepsilon. \quad (1.55)$$

Для кожного x розв'язки Йоста $f_\pm(x, k)$ є неперервними за змінною k в $\overline{\mathbb{C}_+}$.

Позаяк $x_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то з (1.49) випливає, що $\alpha_\varepsilon \rightarrow \theta^{-1}$. Тому

$$\max_{x \in [-t_\varepsilon, x_-]} |f_+(x, \varepsilon k)| \leq 2\theta^{-1} \max_{x \in [-t_\varepsilon, x_-]} |f_-(x, \varepsilon k)| + 1 \leq c$$

для достатньо малих ε . Рівномірну ж обмеженість $f_+(x, \varepsilon k)$ на множині $[x_-, t_\varepsilon]$ отримуємо з (1.44), що доводить оцінку (1.51) для цієї функції.

Тепер, поклавши $x = -t_\varepsilon$ у нерівності (1.55), матимемо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) = \theta^{-1},$$

оскільки $\alpha_\varepsilon \rightarrow \theta^{-1}$ та $f_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow 1$. Перейдемо до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ у формулі

$$\frac{D(\varepsilon k)}{\varepsilon} = f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \frac{f'_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k)}{\varepsilon} - \frac{f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k)}{\varepsilon} f_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k).$$

З огляду на лему 1.8 та асимптотичні формули (1.52), (1.54) отримуємо

$$-ik(\theta + \theta^{-1}) = -ik\theta^{-1} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k),$$

звідки $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) = ik\theta$. Схоже аналізуємо поведінку розв'язку f_- на правій півосі. \square

Доведення теореми 1.3

Доведемо, що сім'я операторів Шредингера $\hat{H}_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}_\varepsilon$ з потенціалами

$$\hat{V}_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)\chi_\varepsilon(x)$$

збігається до оператора H_0 в рівномірній резольвентній топології. Ідею доведення запозичимо з підрозділу 1.2. Зафіксуємо $k^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, функцію $f \in L_2(\mathbb{R})$ і введемо позначення $y = (H_0 - k^2)^{-1}f$ та $y_\varepsilon = (\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1}f$. Беручи за основу y , побудуємо наближення z_ε до елемента y_ε , яке лежатиме в області визначення оператора \hat{H}_ε . Наближення буде як завгодно близьким в $L_2(\mathbb{R})$ -нормі до y та y_ε одночасно. Оцінки близькості будуть рівномірними за f на обмежених множинах в $L_2(\mathbb{R})$.

Функція y_ε при $|x| > x_\varepsilon$ є розв'язком рівняння $-y_\varepsilon'' = k^2 y_\varepsilon + f$ і рівняння

$$-y_\varepsilon'' + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)y_\varepsilon = k^2 y_\varepsilon + f \quad (1.56)$$

при $|x| < x_\varepsilon$. Тому за перше наближення y_ε візьмемо

$$\hat{z}_\varepsilon(x) = y(x)(1 - \chi_\varepsilon(x)) + w_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x)\chi_\varepsilon(x),$$

де χ_ε — характеристична функція відрізка $[-x_\varepsilon, x_\varepsilon]$, а w_ε — розв'язок рівняння

$$-w''(t) + V(t)w(t) = \varepsilon^2 k^2 w(t) + \varepsilon^2 f(\varepsilon t), \quad t \in (-t_\varepsilon, t_\varepsilon).$$

Цей розв'язок має вигляд $w_\varepsilon = u_\varepsilon + v_\varepsilon$, де

$$u_\varepsilon(t) = \alpha_\varepsilon^- f_-(t, \varepsilon k) + \alpha_\varepsilon^+ f_+(t, \varepsilon k) \quad (1.57)$$

— загальний розв'язок однорідного рівняння, а

$$v_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon^2 f_+(t, \varepsilon k)}{D(\varepsilon k)} \int_{-t_\varepsilon}^t f_-(s, \varepsilon k) f(\varepsilon s) ds + \frac{\varepsilon^2 f_-(t, \varepsilon k)}{D(\varepsilon k)} \int_t^{t_\varepsilon} f_+(s, \varepsilon k) f(\varepsilon s) ds$$

— частковий неоднорідного. Сталі α_ε^\pm виберемо так, щоб стрибки

$$\begin{aligned} |[\hat{z}_\varepsilon]_{\pm x_\varepsilon}| &= |y(\pm x_\varepsilon) - u_\varepsilon(\pm t_\varepsilon) - v_\varepsilon(\pm t_\varepsilon)|, \\ |[\hat{z}'_\varepsilon]_{\pm x_\varepsilon}| &= |y'(\pm x_\varepsilon) - \varepsilon^{-1}u'_\varepsilon(\pm t_\varepsilon) - \varepsilon^{-1}v'_\varepsilon(\pm t_\varepsilon)|. \end{aligned} \quad (1.58)$$

були малими при $\varepsilon \rightarrow 0$. Цей вибір залежатиме лише від функції y , бо доданки з v_ε вже є малими.

Лема 1.10. Для розв'язку v_ε справедливі оцінки

$$|v_\varepsilon(\pm t_\varepsilon)| \leq C_1 x_\varepsilon^{1/2} \|f\|, \quad \varepsilon^{-1} |v'_\varepsilon(\pm t_\varepsilon)| \leq C_2 x_\varepsilon^{1/2} \|f\|. \quad (1.59)$$

Крім того, $\|v_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot) \chi_\varepsilon\| \leq C_3 x_\varepsilon \|f\|$.

Доведення. Введемо позначення $\omega_\varepsilon = [-t_\varepsilon, t_\varepsilon]$, $\omega_\varepsilon^- = [-t_\varepsilon, 0]$ і $\omega_\varepsilon^+ = [0, t_\varepsilon]$. Безпосередньо із зображення для v_ε маємо

$$\begin{aligned} \max_{\omega_\varepsilon^+} |v_\varepsilon| &\leq \frac{2\varepsilon^2}{|D(\varepsilon k)|} \max_{\omega_\varepsilon^+} |f_+(\cdot, \varepsilon k)| \max_{\omega_\varepsilon} |f_-(\cdot, \varepsilon k)| \int_{-t_\varepsilon}^{t_\varepsilon} |f(\varepsilon s)| ds, \\ \max_{\omega_\varepsilon^-} |v_\varepsilon| &\leq \frac{2\varepsilon^2}{|D(\varepsilon k)|} \max_{\omega_\varepsilon} |f_+(\cdot, \varepsilon k)| \max_{\omega_\varepsilon^-} |f_-(\cdot, \varepsilon k)| \int_{-t_\varepsilon}^{t_\varepsilon} |f(\varepsilon s)| ds. \end{aligned}$$

Крім того, з нерівності Коші-Буняковського отримуємо

$$\int_{-t_\varepsilon}^{t_\varepsilon} |f(\varepsilon s)| ds \leq \sqrt{2} \varepsilon^{-1/2} t_\varepsilon^{1/2} \|f\|. \quad (1.60)$$

Нагадаємо, що $\|\cdot\|$ — це норма в $L_2(\mathbb{R})$. При відсутності резонансу $D(0) \neq 0$, тому оцінка $\max_{\omega_\varepsilon} |v_\varepsilon| \leq c_1 \varepsilon^{3/2} (1 + t_\varepsilon) t_\varepsilon^{1/2} \|f\| \leq c_2 x_\varepsilon^{3/2} \|f\|$ випливає з твердження 1.5.

Коли ж потенціал V має резонанс нульової енергії, то скористаємося формулою (1.54), а також тим, що з огляду на лему 1.9 розв'язки Йоста залишаються рівномірно обмежені за ε на множині ω_ε . Тому маємо $\max_{\omega_\varepsilon} |v_\varepsilon| \leq c_3 x_\varepsilon^{1/2} \|f\|$. Звідси в обох випадках — резонансу та його відсутності — випливає перша нерівність в (1.59), а також оцінка L_2 -норми функції $v_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot) \chi_\varepsilon$, бо

$$\int_{-x_\varepsilon}^{x_\varepsilon} |v_\varepsilon(\varepsilon^{-1} x)|^2 dx = \varepsilon \int_{-t_\varepsilon}^{t_\varepsilon} |v_\varepsilon(t)|^2 dt \leq c_4 \varepsilon x_\varepsilon t_\varepsilon \|f\|^2 = c_4 x_\varepsilon^2 \|f\|^2.$$

Далі обчислимо похідну

$$v'_\varepsilon(t_\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k)}{D(\varepsilon k)} \int_{-t_\varepsilon}^{t_\varepsilon} f_-(s, \varepsilon k) f(\varepsilon s) ds.$$

З (1.53) та (1.60) дістанемо оцінку

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} |v'_\varepsilon(t_\varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{|D(\varepsilon k)|} |f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k)| \max_{\omega_\varepsilon} |f_-(t, \varepsilon k)| \int_{-t_\varepsilon}^{t_\varepsilon} |f(\varepsilon s)| ds \leq \\ &\leq \frac{c_5 |k| \varepsilon x_\varepsilon^{1/2}}{|D(\varepsilon k)|} \max_{\omega_\varepsilon} |f_-(t, \varepsilon k)| \|f\|. \end{aligned}$$

Застосувавши твердження 1.5 при відсутності резонансу або ж (1.51) та (1.54) при резонансі, матимемо $\varepsilon^{-1} |v'_\varepsilon(t_\varepsilon)| \leq c_6 x_\varepsilon \|f\|$. Схоже оцінюємо $\varepsilon^{-1} |v'_\varepsilon(-t_\varepsilon)|$. \square

Числа α_ε^\pm вибиратимемо по-різному для випадку резонансу та його відсутності, бо функція y має різну поведінку в околі нуля.

Наближення z_ε у нерезонансному випадку

Позаяк граничним оператором H_0 є пряма сума $\mathcal{D}_0^- \oplus \mathcal{D}_0^+$, то $y(\pm 0) = 0$. Зрозуміло, що тоді $y(\pm x_\varepsilon) \rightarrow 0$ та $y'(\pm x_\varepsilon) \rightarrow y'(\pm 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Покладемо

$$\alpha_\varepsilon^- = \frac{\varepsilon y'(x_\varepsilon)}{f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k)}, \quad \alpha_\varepsilon^+ = \frac{\varepsilon y'(-x_\varepsilon)}{f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k)}.$$

Згідно з (1.47) в цьому разі знаменники мають ненульові границі при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Вибравши так коефіцієнти α_ε^\pm , скористаємося нерівностями та асимптотичними формулами для розв'язків Йоста з твердження 1.5 та леми 1.8 і отримаємо

$$|u_\varepsilon(\pm t_\varepsilon)| = \left| \frac{\varepsilon f_-(\pm t_\varepsilon, \varepsilon k)}{f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k)} y'(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon f_+(\pm t_\varepsilon, \varepsilon k)}{f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k)} y'(-x_\varepsilon) \right| \leq \\ \leq c_5 x_\varepsilon (|y'(x_\varepsilon)| + |y'(-x_\varepsilon)|),$$

$$|\varepsilon^{-1} u'_\varepsilon(\pm t_\varepsilon) - y'(\pm x_\varepsilon)| = \\ = \left| \frac{f'_-(\pm t_\varepsilon, \varepsilon k)}{f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k)} y'(x_\varepsilon) + \frac{f'_+(\pm t_\varepsilon, \varepsilon k)}{f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k)} y'(-x_\varepsilon) - y'(\pm x_\varepsilon) \right| \leq c_6 \varepsilon |y'(\mp x_\varepsilon)|.$$

Повернемося до стрибків, заданих формулою (1.58). Зі щойно одержаних оцінок, твердження 1.4 та леми 1.10 матимемо

$$|[\hat{z}_\varepsilon]_{\pm x_\varepsilon}| \leq |y(\pm x_\varepsilon)| + |u_\varepsilon(\pm t_\varepsilon)| + |v_\varepsilon(\pm t_\varepsilon)| \leq c_7 x_\varepsilon^{1/2} \|f\|, \\ |[\hat{z}'_\varepsilon]_{\pm x_\varepsilon}| \leq |y'(\pm x_\varepsilon) - \varepsilon^{-1} u'_\varepsilon(\pm t_\varepsilon)| + \varepsilon^{-1} |v'_\varepsilon(\pm t_\varepsilon)| \leq c_8 x_\varepsilon^{1/2} \|f\|.$$

Тепер згідно з твердженням 1.1 існує така функція-коректор ζ_ε , що $z_\varepsilon = \hat{z}_\varepsilon + \zeta_\varepsilon$ належить до області визначення оператора H_0 та

$$\max_{|x| > x_\varepsilon} |\zeta_\varepsilon^{(k)}(x)| \leq c_9 (|[\hat{z}_\varepsilon]_{\pm x_\varepsilon}| + |[\hat{z}'_\varepsilon]_{\pm x_\varepsilon}|) \leq c_{10} x_\varepsilon^{1/2} \|f\| \quad (1.61)$$

для $k = 0, 1, 2$. Отже, ми побудували наближення z_ε для $y_\varepsilon = (\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1} f$, за допомогою якого доведемо теорему 1.3 у випадку відсутності резонансу.

На завершення отримаємо ще оцінку L_2 -норми для $u_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot) \chi_\varepsilon$, яка знадобиться далі. Коефіцієнти α_ε^\pm є порядку $O(\varepsilon) \|f\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а також

$$\int_{-x_\varepsilon}^{x_\varepsilon} |f_\pm(\varepsilon^{-1} x, \varepsilon k)|^2 dx = \varepsilon \int_{-t_\varepsilon}^{t_\varepsilon} |f_\pm(\xi, \varepsilon k)|^2 d\xi \leq c_{11} \varepsilon (1 + t_\varepsilon)^3,$$

тому із зображення (1.57) для u_ε отримуємо

$$\|u_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot) \chi_\varepsilon\| \leq c_{12} x_\varepsilon^{3/2} \|f\|. \quad (1.62)$$

Наближення z_ε у випадку резонансу

В цьому разі граничним буде оператор $S_{0,\theta}$ з параметром $\theta = u_+/u_-$, де u — напівзв'язний стан. Основна відмінність полягає в тому, що розв'язки Йоста стають лінійно залежними $f_- = \theta f_+$ і мають іншу асимптотику на нескінченності. Коефіцієнти α_ε^\pm треба вибрати так, щоб найточніше задовольнити рівності

$$u_\varepsilon(-t_\varepsilon) = y(-x_\varepsilon), \quad \varepsilon^{-1} u'_\varepsilon(-t_\varepsilon) = y'(-x_\varepsilon).$$

Нам зручно взяти в (1.57) граничні значення цих коефіцієнтів. Нехай

$$\alpha_\varepsilon^- = \frac{ik\theta y(-0) - \theta^{-1} y'(-0)}{ik(\theta + \theta^{-1})}, \quad \alpha_\varepsilon^+ = \frac{iky(-0) + y'(-0)}{ik(\theta + \theta^{-1})}.$$

Зауважимо, що для y виконуються оцінки

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_\pm} (|y(x)| + |y'(x)|) \leq c_1 \|f\|, \quad |y^{(k)}(\pm x_\varepsilon) - y^{(k)}(\pm 0)| \leq c_2 x_\varepsilon^{1/2} \|f\|, \quad (1.63)$$

де $k = 0, 1$. Оцінимо різницю $u_\varepsilon(-t_\varepsilon) - y(-x_\varepsilon)$ для малих значень ε . З твердження 1.5, переформульованого для лівого розв'язку Йоста, та леми 1.9 маємо

$$f_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) = 1 + o(1), \quad f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) = \theta^{-1} + o(1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тому, з врахуванням (1.63), отримуємо

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(-t_\varepsilon) - y(-x_\varepsilon) &= y(-0) \frac{\theta f_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) + f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k)}{\theta + \theta^{-1}} + \\ &+ y'(-0) \frac{f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) - \theta^{-1} f_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k)}{ik(\theta + \theta^{-1})} - y(-x_\varepsilon). = \\ &= y(-0)(1 + o(1)) + o(1)y'(-0) - y(-x_\varepsilon) = o(1)\|f\|. \end{aligned}$$

Далі, $\varepsilon^{-1} f'_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) = -ik + o(1)$ та $\varepsilon^{-1} f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) = ik\theta + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, тому

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} u'_\varepsilon(-t_\varepsilon) - y'(-x_\varepsilon) &= y(-0) \frac{\theta f'_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) + f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k)}{\varepsilon(\theta + \theta^{-1})} + \\ &+ y'(-0) \frac{-\theta^{-1} f'_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) + f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k)}{i\varepsilon k(\theta + \theta^{-1})} - y'(-x_\varepsilon) = \\ &= y(-0) \cdot o(1) + y'(-0)(1 + o(1)) - y'(-x_\varepsilon) = o(1)\|f\|. \end{aligned}$$

Зв'язки $y(-0) = \theta^{-1}y(+0)$, $y'(-0) = \theta y'(+0)$ між односторонніми границями y та y' гарантують, що рівності $u_\varepsilon(t_\varepsilon) = y(x_\varepsilon)$, $\varepsilon^{-1}u'_\varepsilon(t_\varepsilon) = y'(x_\varepsilon)$ теж будуть виконуватися з точністю до нескінченно малих. Справді, $f_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) = 1 + o(1)$ та $f_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) = \theta + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а тому

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t_\varepsilon) - y(x_\varepsilon) &= y(+0) \frac{f_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) + \theta^{-1}f_+(t_\varepsilon, \varepsilon k)}{\theta + \theta^{-1}} + \\ &+ y'(+0) \frac{-f_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) + \theta f_+(t_\varepsilon, \varepsilon k)}{ik(\theta + \theta^{-1})} - y(x_\varepsilon) = \\ &= y(+0)(1 + o(1)) + y'(+0)o(1) - y(x_\varepsilon) = o(1)\|f\|. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}u'_\varepsilon(t_\varepsilon) - y'(x_\varepsilon) &= y(+0) \frac{f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) + \theta^{-1}f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k)}{\varepsilon(\theta + \theta^{-1})} + \\ &+ y'(+0) \frac{-f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) + \theta f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k)}{i\varepsilon k(\theta + \theta^{-1})} - y'(x_\varepsilon) = \\ &= y(+0)o(1) + y'(+0)(1 + o(1)) - y'(x_\varepsilon) = o(1)\|f\|, \end{aligned}$$

бо $\varepsilon^{-1}f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) = ik + o(1)$ та $\varepsilon^{-1}f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) = -ik\theta^{-1} + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. З цих асимптотичних формул та леми 1.10 випливає, що стрибки функції \hat{z}_ε і її похідної в точка $\pm x_\varepsilon \in$ нескінченно малими рівномірно відносно f , а саме $[\hat{z}_\varepsilon]_{\pm x_\varepsilon} = o(\|f\|)$, $[\hat{z}'_\varepsilon]_{\pm x_\varepsilon} = o(\|f\|)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отже, як і в попередньому випадку, \hat{z}_ε можна підправити малою функцією ζ_ε так, що $z_\varepsilon = \hat{z}_\varepsilon + \zeta_\varepsilon \in \text{dom } S_{0,\theta}$ і

$$\max_{|x| > x_\varepsilon} |\zeta_\varepsilon^{(k)}(x)| = o(\|f\|), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.64)$$

Наближення z_ε використаємо у доведенні теореми 1.3 для випадку резонансу.

Зауважимо також, що виконується нерівність

$$\|u_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot) \chi_\varepsilon\| \leq c x_\varepsilon \|f\|. \quad (1.65)$$

Справді $\alpha_\varepsilon^\pm = O(1)\|f\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а згідно з лемою 1.9 розв'язки Йоста є рівномірно обмеженими на $(-t_\varepsilon, t_\varepsilon)$, тому для малих ε маємо

$$\int_{-x_\varepsilon}^{x_\varepsilon} |f_\pm(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon k)|^2 dx = \varepsilon \int_{-t_\varepsilon}^{t_\varepsilon} |f_\pm(t, \varepsilon k)|^2 dt \leq c \varepsilon t_\varepsilon = c x_\varepsilon.$$

Збіжність операторів \hat{H}_ε

Доведення теореми 1.3 проведемо одночасно для обох випадків. Притримуючись схеми доведення теореми 1.1, спершу обчислимо $r_\varepsilon = (\hat{H}_\varepsilon - \lambda)z_\varepsilon - f$ і переконаємося, що функція z_ε достатньо добре апроксимує y_ε . За побудовою при $|x| < x_\varepsilon$ коректор ζ_ε дорівнює нулю, а тоді $z_\varepsilon = w_\varepsilon$ є точним розв'язком рівняння (1.56) на цій множині. Тому $r_\varepsilon = 0$ на $[-x_\varepsilon, x_\varepsilon]$. Якщо ж $|x| > x_\varepsilon$, то $z_\varepsilon = y + \zeta_\varepsilon$ і тоді

$$r_\varepsilon(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} - k^2\right)(y + \zeta_\varepsilon)(x) - f(x) = -\zeta_\varepsilon''(x) - k^2\zeta_\varepsilon(x).$$

З огляду на (1.61), (1.64) маємо $\|r_\varepsilon\| = o(\|f\|)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отже,

$$\|z_\varepsilon - (\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1}f\| = \|(\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1}r_\varepsilon\| = o(\|f\|), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.66)$$

бо $\|(\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1}\| \leq |\operatorname{Im} k^2|^{-1}$. Віднімемо від наближення z_ε його домінуючий член

$$z_\varepsilon(x) - y(x) = (u_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + v_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) - y(x))\chi_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(x).$$

Тоді з леми 1.10 та оцінок (1.62), (1.65) випливає, що

$$\|z_\varepsilon - (H_0 - k^2)^{-1}f\| = o(\|f\|), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.67)$$

З нерівностей (1.66) та (1.67) відразу отримуємо

$$\|(\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1} - (H_0 - k^2)^{-1}\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

що завершує доведення теореми 1.3.

1.3.3 Асимптотика розв'язки Йоста і коефіцієнти розсіювання для оператора \hat{H}_ε та доведення основного результату

Нам треба довести близькість резольвент операторів \hat{H}_ε та H_ε . Для цього потрібно більше інформації про резольвенту \hat{H}_ε , яка є інтегральним оператором. Його ядро знаходимо за допомогою розв'язків Йоста $\hat{f}_\pm(\cdot, \varepsilon, k)$ оператора \hat{H}_ε . Побудуємо $\hat{f}_\pm(\cdot, \varepsilon, k)$ і вивчимо їх асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$. Позаяк аналіз правого та лівого розв'язків Йоста є схожим, проведемо дослідження лише розв'язку \hat{f}_+ .

Зафіксуємо $k \in \mathbb{C}$ таке, що $\text{Im } k > 0$. Потенціали \hat{V}_ε дорівнюють нулеві поза множиною $|x| < x_\varepsilon$, тому шукатимемо правий розв'язок Йоста у вигляді

$$\hat{f}_+(x, \varepsilon, k) = \begin{cases} a_\varepsilon^+ e^{ikx} + b_\varepsilon^+ e^{-ikx}, & \text{коли } x < -x_\varepsilon, \\ c_\varepsilon^+ f_+(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon k) + c_\varepsilon^- f_-(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon k), & \text{коли } |x| < x_\varepsilon, \\ e^{ikx}, & \text{коли } x > x_\varepsilon, \end{cases}$$

де f_\pm — розв'язки Йоста рівняння (1.43). З умов неперервної диференційовності \hat{f}_+ в точці $x = x_\varepsilon$ отримуємо систему

$$\begin{cases} c_\varepsilon^+ f_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) + c_\varepsilon^- f_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) = e^{ikx_\varepsilon}, \\ c_\varepsilon^+ f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) + c_\varepsilon^- f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) = i\varepsilon k e^{ikx_\varepsilon}, \end{cases}$$

визначником якої є вронскіан $D(\varepsilon k) = f_+(t_\varepsilon, \varepsilon k)f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) - f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k)f_-(t_\varepsilon, \varepsilon k)$. Для додатних ε цей визначник відмінний від нуля, бо розв'язки Йоста є лінійно незалежними при $\varepsilon^2 k^2 \in \mathbb{C}_+$. Тому

$$c_\varepsilon^+ = \frac{e^{ikx_\varepsilon}}{D(\varepsilon k)} (f'_-(t_\varepsilon, \varepsilon k) - i\varepsilon k f_-(t_\varepsilon, \varepsilon k)), \quad c_\varepsilon^- = \frac{e^{ikx_\varepsilon}}{D(\varepsilon k)} (i\varepsilon k f_+(t_\varepsilon, \varepsilon k) - f'_+(t_\varepsilon, \varepsilon k)).$$

Коли резонанс відсутній, то $D(0) \neq 0$, а з огляду на неперервність D маємо $|D(\varepsilon k)| \geq |D(0)|/2$ для всіх достатньо малих ε . Тоді з (1.44) одержуємо, що $c_\varepsilon^- \rightarrow 0$, а з леми 1.8 випливає, що $c_\varepsilon^+ \rightarrow 1$. Таку ж збіжність $c_\varepsilon^- \rightarrow 0$, $c_\varepsilon^+ \rightarrow 1$ маємо з цієї леми та формули (1.54) і у випадку резонансу. Далі з неперервної диференційовності \hat{f}_+ в точці $-x_\varepsilon$ знаходимо

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^+ &= \frac{e^{ikx_\varepsilon}}{2ik} (ik \hat{f}_+(-x_\varepsilon + 0, \varepsilon, k) + \hat{f}'_+(-x_\varepsilon + 0, \varepsilon, k)), \\ b_\varepsilon^+ &= \frac{e^{-ikx_\varepsilon}}{2ik} (ik \hat{f}_+(-x_\varepsilon + 0, \varepsilon, k) - \hat{f}'_+(-x_\varepsilon + 0, \varepsilon, k)). \end{aligned}$$

Спершу проаналізуємо поведінку коефіцієнтів a_ε^+ та b_ε^+ у випадку відсутності резонансу. При нашому виборі c_ε^\pm з леми 1.8 випливає

$$\begin{aligned} \hat{f}_+(-x_\varepsilon + 0, \varepsilon, k) &= c_\varepsilon^+ f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) + c_\varepsilon^- f_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) = O(t_\varepsilon), \\ \varepsilon \hat{f}'_+(-x_\varepsilon + 0, \varepsilon, k) &= c_\varepsilon^+ f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) + c_\varepsilon^- f'_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow -D(0) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. А це означає, що $\varepsilon a_\varepsilon^+ \rightarrow -D(0)$ та $\varepsilon b_\varepsilon^+ \rightarrow D(0)$. Якщо ж потенціал V володіє резонансом нульової енергії, то

$$\begin{aligned}\hat{f}_+(-x_\varepsilon + 0, \varepsilon, k) &= c_\varepsilon^+ f_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) + c_\varepsilon^- f_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow \theta^{-1}, \\ \hat{f}'_+(-x_\varepsilon + 0, \varepsilon, k) &= c_\varepsilon^+ \varepsilon^{-1} f'_+(-t_\varepsilon, \varepsilon k) + c_\varepsilon^- \varepsilon^{-1} f'_-(-t_\varepsilon, \varepsilon k) \rightarrow ik\theta,\end{aligned}$$

з огляду на (1.46), (1.52) та (1.47), (1.53) відповідно. Але тоді $a_\varepsilon^+ \rightarrow \frac{1}{2}[\theta^{-1} + \theta]$ та $b_\varepsilon^+ \rightarrow \frac{1}{2}[\theta^{-1} - \theta]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Така поведінка коефіцієнтів a_ε^+ та b_ε^+ справедлива і при дійсних k , тому ми дістали такий результат.

Лема 1.11. *Нехай потенціал V є нерезонансний. Тоді для ненульового k такого, що $\text{Im } k \geq 0$, коефіцієнт відбиття $\hat{R}_\varepsilon(k) = b_\varepsilon^+ / a_\varepsilon^+$ та коефіцієнт проходження $\hat{T}_\varepsilon(k) = 1 / a_\varepsilon^+$ для оператор Шрединґера \hat{H}_ε мають асимптотику $\hat{R}_\varepsilon(k) \rightarrow -1$ та $\hat{T}_\varepsilon(k) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Якщо V має резонанс нульової енергії і параметр θ визначений як в теоремі 1.2 (чи як у формулі (1.49), що рівносильно), то коефіцієнти відбиття і проходження ведуть себе при $\varepsilon \rightarrow 0$ так

$$\hat{R}_\varepsilon(k) \rightarrow \frac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2}, \quad \hat{T}_\varepsilon(k) \rightarrow \frac{2\theta}{1 + \theta^2}.$$

Граничні значення для $\hat{R}_\varepsilon(k)$ і $\hat{T}_\varepsilon(k)$ є коефіцієнтами відбиття і проходження для оператора $S_{0,\theta}$, а також збігаються зі значенням таких коефіцієнтів при $k = 0$ для оператор Шрединґера з потенціалом V , тобто для оператора H_ε при $\varepsilon = 1$ [58].

Резольвента $\hat{R}_\varepsilon(k) = (\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1}$ — це інтегральний оператор з ядром

$$\hat{G}_\varepsilon(x, y, k) = \frac{1}{\hat{D}_\varepsilon(k)} \begin{cases} \hat{f}_+(x, \varepsilon, k) \hat{f}_-(y, \varepsilon, k), & x > y, \\ \hat{f}_-(x, \varepsilon, k) \hat{f}_+(y, \varepsilon, k), & x < y, \end{cases}$$

де $\hat{D}_\varepsilon(k)$ — вронскіан розв'язків Йоста $\hat{f}_+(\cdot, \varepsilon, k)$ та $\hat{f}_-(\cdot, \varepsilon, k)$.

Лема 1.12. *Існують сталі K_1 та K_2 , що для малих ε виконуються оцінки*

$$\begin{aligned}|\hat{D}_\varepsilon^{-1}(k) \hat{f}_\pm(x, \varepsilon, k)| &\leq K_1 |e^{\pm ikx}|, \quad |x| > x_\varepsilon; \\ \int_x^\infty \frac{|\hat{f}_+(t, \varepsilon, k)|^2}{|\hat{D}_\varepsilon(k)|^2} dt &\leq K_2 |e^{2ikx}|, \quad \int_{-\infty}^x \frac{|\hat{f}_-(t, \varepsilon, k)|^2}{|\hat{D}_\varepsilon(k)|^2} dt \leq K_2 |e^{-2ikx}|, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{1.68}$$

Доведення. Нерівності доведемо лише для правого розв'язку Йоста, для лівого міркування аналогічні. Перша оцінка випливає з того, що $\hat{f}_+(x, \varepsilon, k) = e^{ikx}$ при $x > x_\varepsilon$, а також для $x < -x_\varepsilon$ маємо

$$\frac{\hat{f}_+(x, \varepsilon, k)}{\hat{D}_\varepsilon(k)} = -\frac{1}{2ik} e^{ikx} - \frac{\hat{R}_\varepsilon(k)}{2ik} e^{-ikx},$$

бо $\hat{D}_\varepsilon(k) = -2ika_\varepsilon^+$ для усіх x лівіше $-x_\varepsilon$. Залишилося зауважити, що коефіцієнт відбиття $\hat{R}_\varepsilon(k)$ має скінченну границю згідно з лемою 1.11.

Нехай X_ε — оператор множення на функцію χ_ε , який є ортогональним проєктором і $\|X_\varepsilon h\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всіх $h \in L_2(\mathbb{R})$. Згідно з теоремою 1.3 мамо

$$X_\varepsilon(\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1}h = X_\varepsilon \left((\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1} - (H_0 - k^2)^{-1} \right) h + X_\varepsilon(H_0 - k^2)^{-1}h \rightarrow 0 \quad (1.69)$$

в просторі $L_2(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тепер нехай h — характеристична функція відрізка $[-3, -1]$. Тоді для всіх ε таких, що $x_\varepsilon < 1$, легко обчислити

$$X_\varepsilon(\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1}h(x) = \frac{\chi_\varepsilon(x)\hat{f}_+(x, \varepsilon, k)}{\hat{D}_\varepsilon(k)} \int_{-3}^{-1} e^{-ikt} dt = \frac{2e^{ik} \sin k}{k} \frac{\chi_\varepsilon(x)\hat{f}_+(x, \varepsilon, k)}{\hat{D}_\varepsilon(k)}.$$

Звідси випливає, що

$$\|X_\varepsilon(\hat{H}_\varepsilon - k^2)^{-1}h\|^2 = \frac{4|e^{ik} \sin k|^2}{|k|^2} \int_{-x_\varepsilon}^{x_\varepsilon} \frac{|f_+(x, \varepsilon, k)|^2}{|\hat{D}_\varepsilon(k)|^2} dx \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тепер виберемо ε_0 настільки малим, щоб $|e^{2ikx}| > \frac{1}{2}$ для всіх $x \leq x_{\varepsilon_0}$. Якщо $x > x_{\varepsilon_0}$, то шукана оцінка випливає з уже доведеної нерівності (1.68), причому $K_2 = K_1^2/(2|\operatorname{Im} k|)$. Для інших значень x , крім нерівності (1.68), ще треба скористатися границею (1.68). Тоді

$$\int_x^\infty \frac{|\hat{f}_+(t, \varepsilon, k)|^2}{|\hat{D}_\varepsilon^2(k)|} dt \leq K_1^2 \int_x^\infty |e^{2ikt}| dt + \int_{-x_\varepsilon}^{x_\varepsilon} \frac{|f_+(t, \varepsilon, k)|^2}{|\hat{D}_\varepsilon(k)|^2} dt \leq K_2 |e^{2ikx}|$$

зі сталою $K_2 = 1 + K_1^2/(2|\operatorname{Im} k|)$. □

Доведення теореми 1.4

Доведемо близькість операторів \hat{H}_ε та H_ε в рівномірній резольвентній метриці. Для потенціалу V побудуємо дві функції

$$p_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}|V(\varepsilon^{-1}x)|^{1/2} (1 - \chi_\varepsilon(x)), \quad q_\varepsilon(x) = \operatorname{sign}(V(\varepsilon^{-1}x)) p_\varepsilon(x)$$

і позначимо через P_ε та Q_ε оператори множення на p_ε та q_ε відповідно. Ці оператори, взагалі кажучи, є необмеженими в $L_2(\mathbb{R})$, проте L_2 -норми функцій p_ε і q_ε нескінченно малі при $\varepsilon \rightarrow 0$. Справді з огляду на лему 1.7 маємо

$$\begin{aligned} \|p_\varepsilon\|^2 = \|q_\varepsilon\|^2 &= \varepsilon^{-2} \int_{|t|>x_\varepsilon} |V(\varepsilon^{-1}t)| dt = \varepsilon^{-1} \int_{|s|>t_\varepsilon} |V(s)| ds \leq \\ &\leq \int_{|s|>t_\varepsilon} \frac{\rho_V(s)}{\varepsilon\rho_V(t_\varepsilon)} |V(s)| ds = \int_{|s|>t_\varepsilon} \rho_V(s)|V(s)| ds = o(1) \end{aligned} \quad (1.70)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, бо $\rho_V(s) > \rho_V(t_\varepsilon)$ для $|s| > t_\varepsilon$ і точки t_ε вибрані з умови $\varepsilon\rho_V(t_\varepsilon) = 1$.

Нагадаємо, що $\hat{V}_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)\chi_\varepsilon(x)$. Безпосередньо переконуємося, що $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) = \hat{V}_\varepsilon(x) + p_\varepsilon(x)q_\varepsilon(x)$. Тоді з рівності $H_\varepsilon = \hat{H}_\varepsilon + P_\varepsilon Q_\varepsilon$ випливає відоме формальне співвідношення для резольвент $\hat{R}_\varepsilon(k)$ та $R_\varepsilon(k)$ операторів \hat{H}_ε та H_ε :

$$R_\varepsilon(k) - \hat{R}_\varepsilon(k) = -\hat{R}_\varepsilon(k)Q_\varepsilon(I + P_\varepsilon\hat{R}_\varepsilon(k)Q_\varepsilon)^{-1}P_\varepsilon\hat{R}_\varepsilon(k). \quad (1.71)$$

Якщо ми доведемо, що норми операторів $\hat{R}_\varepsilon(k)Q_\varepsilon$, $P_\varepsilon\hat{R}_\varepsilon(k)Q_\varepsilon$ та $P_\varepsilon\hat{R}_\varepsilon(k)$ прямують до нуля, то одночасно узаконимо рівність (1.71) і доведемо теорему 1.4. Усі ці оператори є інтегральними і діють на функцію $y \in L_2(\mathbb{R})$ за правилом

$$\frac{\varphi_+(x)}{\hat{D}_\varepsilon(k)} \int_{-\infty}^x \varphi_-(t)y(t) dt + \frac{\varphi_-(x)}{\hat{D}_\varepsilon(k)} \int_x^\infty \varphi_+(t)y(t) dt,$$

де φ_\pm по чергово дорівнюють $\hat{f}_\pm(\cdot, \varepsilon, k)$, $\hat{f}_\pm(\cdot, \varepsilon, k)q_\varepsilon$ чи $\hat{f}_\pm(\cdot, \varepsilon, k)p_\varepsilon$. Щоб оцінити норми операторів, скористаємося таким результатом.

Твердження 1.7. Для пари функцій ψ_- і ψ_+ з класу $L_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ оператори

$$T_-y(x) = \psi_+(x) \int_{-\infty}^x \psi_-(t)y(t) dt, \quad T_+y(x) = \psi_-(x) \int_x^\infty \psi_+(t)y(t) dt$$

обмежені в $L_2(\mathbb{R})$ тоді і лише тоді, коли величина

$$K = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^x |\psi_-(t)|^2 dt \cdot \int_x^\infty |\psi_+(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

скінченна. До того ж $\|T_\pm\| \leq 2K$ [59].

Розпочнемо з оператора $P_\varepsilon\hat{R}_\varepsilon(k)Q_\varepsilon$, який має вигляд

$$\begin{aligned} P_\varepsilon\hat{R}_\varepsilon(k)Q_\varepsilon y(x) &= \frac{p_\varepsilon(x)\hat{f}_+(x, \varepsilon, k)}{\hat{D}_\varepsilon(k)} \int_{-\infty}^x y(t)q_\varepsilon(t)\hat{f}_-(t, \varepsilon, k) dt + \\ &+ \frac{p_\varepsilon(x)\hat{f}_-(x, \varepsilon, k)}{\hat{D}_\varepsilon(k)} \int_x^\infty y(t)q_\varepsilon(x)\hat{f}_+(t, \varepsilon, k) dt. \end{aligned}$$

Позаяк $|p_\varepsilon| = |q_\varepsilon|$, то згідно з твердженням 1.7 норма оператора $P_\varepsilon \hat{R}_\varepsilon(k) Q_\varepsilon$ прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, якщо прямує до нуля величина $\sup_{x \in \mathbb{R}} K_\varepsilon(x)$, де

$$K_\varepsilon(x) = \frac{1}{|\hat{D}_\varepsilon(k)|^2} \int_{-\infty}^x |p_\varepsilon(t) \hat{f}_-(t, \varepsilon, k)|^2 dt \cdot \int_x^\infty |p_\varepsilon(t) \hat{f}_+(t, \varepsilon, k)|^2 dt.$$

Коли $x \geq x_\varepsilon$, то справедлива оцінка

$$\int_x^\infty |p_\varepsilon(t) \hat{f}_+(t, \varepsilon, k)|^2 dt = \int_x^\infty |p_\varepsilon(t) e^{ikt}|^2 dt \leq |e^{2ikx}| \|p_\varepsilon\|^2.$$

Скориставшись (1.68), дістанемо таку нерівність

$$\frac{1}{|\hat{D}_\varepsilon(k)|^2} \int_{-\infty}^x |p_\varepsilon(t) \hat{f}_-(t, \varepsilon, k)|^2 dt \leq K_1^2 |e^{-2ikx}| \|p_\varepsilon\|^2. \quad (1.72)$$

Отже, $\sup_{x \geq x_\varepsilon} K_\varepsilon(x) \leq K_1^2 \|p_\varepsilon\|^4$. Якщо $x \leq -x_\varepsilon$, то $\hat{f}_-(x, \varepsilon, k) = e^{-ikx}$ і знову з (1.68) робимо висновок, що $\sup_{x \leq -x_\varepsilon} K_\varepsilon(x) \leq K_1^2 \|p_\varepsilon\|^4$. Нарешті,

$$\sup_{|x| < x_\varepsilon} K_\varepsilon(x) \leq \frac{|e^{4ikx_\varepsilon}| \|p_\varepsilon\|^4}{|\hat{D}_\varepsilon(k)|^2}.$$

Залишилося зауважити, що згідно з (1.70) норма p_ε прямує до нуля. Звідки маємо, що $\|P_\varepsilon \hat{R}_\varepsilon(k) Q_\varepsilon\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тепер звернемося до операторів $\hat{R}_\varepsilon(k) Q_\varepsilon$ та $P_\varepsilon \hat{R}_\varepsilon(k)$. Малість їх норм випливатиме з малості при $\varepsilon \rightarrow 0$ величин $\sup_{x \in \mathbb{R}} K_\varepsilon^{(1)}(x)$ та $\sup_{x \in \mathbb{R}} K_\varepsilon^{(2)}(x)$, де

$$K_\varepsilon^{(1)}(x) = \frac{1}{\hat{D}_\varepsilon^2(k)} \int_{-\infty}^x |p_\varepsilon(t) \hat{f}_-(t, \varepsilon, k)|^2 dt \cdot \int_x^\infty |\hat{f}_+(t, \varepsilon, k)|^2 dt,$$

$$K_\varepsilon^{(2)}(x) = \frac{1}{\hat{D}_\varepsilon^2(k)} \int_{-\infty}^x |\hat{f}_-(t, \varepsilon, k)|^2 dt \cdot \int_x^\infty |p_\varepsilon(t) \hat{f}_+(t, \varepsilon, k)|^2 dt.$$

Структура функцій однакова, тому оцінимо лише $K_\varepsilon^{(1)}$. Якщо $x \geq x_\varepsilon$, то

$$\int_x^\infty |\hat{f}_+(t, \varepsilon, k)|^2 dt = \frac{1}{2|\operatorname{Im} k|} |e^{2ikx}|.$$

Далі, врахувавши (1.72), дістанемо

$$\sup_{x \geq x_\varepsilon} K_\varepsilon^{(1)}(x) \leq \frac{K_1^2}{2|\operatorname{Im} k|} \|p_\varepsilon\|^2.$$

Коли ж $x < x_\varepsilon$, то застосуємо лему 1.12 та нерівність

$$\int_{-\infty}^x |p_\varepsilon(t) \hat{f}_-(t, \varepsilon, k)|^2 dt \leq |e^{-2ikx}| \|p_\varepsilon\|^2,$$

щоб дістати $\sup_{x < x_\varepsilon} K_\varepsilon^{(1)}(x) \leq K_2 \|p_\varepsilon\|^2$. З двох останніх нерівностей і (1.70) випливає, що величина $\sup_{x \in \mathbb{R}} K_\varepsilon^{(1)}(x)$ нескінченно мала при $\varepsilon \rightarrow 0$ і тому

$$\|P_\varepsilon \hat{R}_\varepsilon(k)\| + \|\hat{R}_\varepsilon(k)Q_\varepsilon(k)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отже, з огляду на рівність (1.71) маємо, що $\|R_\varepsilon(k) - \hat{R}_\varepsilon(k)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а це доводить теорему 1.4 і основний результат підрозділу — теорему 1.2.

Доведення теореми 1.5

Теорема 1.2 залишається правильною і у випадку, коли δ' -подібним збуренням з профілями класу Фадєєва-Марченка піддаємо оператор $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$ з обмеженим потенціалом V_0 , який має компактний носій. Введемо оператори: $H_0 = S_{0,\theta}$, коли V має резонанс, та $H_0 = \mathcal{D}_0^- \oplus \mathcal{D}_0^+$, коли резонанс відсутній; $H_1 = S_\theta$ при резонансі та $H_1 = \mathcal{D}_0^- \oplus \mathcal{D}_0^+$ в іншому випадку. Резольвенти H_0 і H_1 в точці k^2 позначимо $R_0(k)$ та $R_1(k)$ відповідно. Нехай також

$$H_{\varepsilon,0} = -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot), \quad H_{\varepsilon,1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$$

з резольвентами $R_{\varepsilon,0}(k)$ та $R_{\varepsilon,1}(k)$ відповідно. Введемо також оператори P та Q , які є операторами множення на функції

$$p(x) = |V_0(x)|^{1/2}, \quad q(x) = \operatorname{sgn} V_0(x) \cdot |V_0(x)|^{1/2}.$$

Якщо трактуватимемо H_1 як збурення оператора H_0 потенціалом V_0 , то цей оператор можна записати так $H_1 = H_0 + PQ$, а тому формально маємо

$$R_1(k) = R_0(k) - R_0(k)Q(I + PR_0(k)Q)^{-1}PR_0(k). \quad (1.73)$$

Аналогічно для пари $H_{\varepsilon,0}$ і $H_{\varepsilon,1}$ одержимо

$$R_{\varepsilon,1}(k) = R_{\varepsilon,0}(k) - R_{\varepsilon,0}(k)Q(I + PR_{\varepsilon,0}(k)Q)^{-1}PR_{\varepsilon,0}(k). \quad (1.74)$$

Запишемо різницю рівностей (1.74) та (1.73)

$$\begin{aligned} R_{\varepsilon,1}(k) - R_1(k) &= R_{\varepsilon,0}(k) - R_0(k) - \\ &- R_{\varepsilon,0}(k)Q(I + PR_{\varepsilon,0}(k)Q)^{-1}PR_{\varepsilon,0}(k) + R_0(k)Q(I + PR_0(k)Q)^{-1}PR_0(k). \end{aligned}$$

Зауважимо, що P та Q — неперервні оператори в $L_2(\mathbb{R})$, бо потенціал V_0 обмежений і має компактний носій. З огляду на теорему 1.2 також маємо рівномірну збіжність резольвент $R_{\varepsilon,0}(k) \rightarrow R_0(k)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Якщо оператор $I + PR_0(k)Q$ буде оборотним, то таким буде і оператор $I + PR_{\varepsilon,0}(k)Q$ при достатньо малих ε , причому тоді права частина останньої рівності буде коректно визначена і прямуватиме до нуля в рівномірній операторній нормі. Позаяк

$$\|PR_0(k)Q\| \leq c\|R_0(k)\| \leq c|\operatorname{Im} k|^{-1},$$

то існує таке значення k_0 , що норма $PR_0(k_0)Q$ буде меншою від одиниці. Отже, для k_0 існує обмежений оператор $(I + PR_0(k_0)Q)^{-1}$, також $R_{\varepsilon,1}(k_0) \rightarrow R_1(k_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. З огляду на лему 1.2 оператори $H_{\varepsilon,1}$ збігаються в рівномірній резольвентній топології до оператора H_1 , що завершує доведення теореми 1.5.

Розділ 2

ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З

ДВОПАРАМЕТРИЧНИМИ

$(\alpha\delta' + \beta\delta)$ -ПОДІБНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ

В цьому розділі опишемо взаємодію δ -подібних та δ' -подібних потенціалів. Вивчимо сім'ю операторів Шредингера, які в частковому випадку можна трактувати як регуляризацію псевдогамільтоніана $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta' + \beta\delta$. Окрім сталих взаємодії α і β , регуляризовані потенціали також міститимуть два параметри, від яких залежатимуть швидкості локалізації δ - та δ' -подібних доданків. Ми покажемо, що граничні оператори залежать не лише від профілів потенціалів, але й від швидкостей локалізації збурень. Результати розділу опубліковані в працях [60, 61]

2.1 Формулювання задачі та основні результати

Вивчатимемо поведінку сім'ї операторів Шредингера

$$H_{\varepsilon, \nu} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) + \beta\nu^{-1}U(\nu^{-1}x) \quad (2.1)$$

в просторі $L_2(\mathbb{R})$, коли два додатні параметри ε та ν прямують одночасно до нуля. Потенціал V_0 є локально обмеженим, дійсним і таким, що незбурений оператор $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$ самоспряжений. Функції V та U — обмежені, дійснозначні та з компактними носіями, а α та β — дійсні сталі взаємодії. Позаяк оператор H_0 збурюється потенціалом з компактним носієм, то $\text{dom } H_{\varepsilon, \nu} = \text{dom } H_0$.

Сформулюємо основний результат цього розділу, який далі розділимо на три окремі теореми. Нехай \mathcal{V}_0 — простір, описаний на стор. 39 в означенні операторів з точковими взаємодіями.

Якщо параметри ε та ν прямують одночасно до нуля, причому їх відношення ν/ε має скінченну чи нескінченну границю, то сім'я операторів $H_{\varepsilon,\nu}$ збігається в рівномірній резольвентній топології, тобто резольвенти $(H_{\varepsilon,\nu} - z)^{-1}$ збігаються у рівномірній операторній нормі.

Випадок відсутності резонансу. Нехай потенціал αV не має резонансу нульової енергії, тоді оператори $H_{\varepsilon,\nu}$ збігаються до прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ двох операторів Шрединґера на півосях з умовами Діріхле в початку координат.

Випадок резонансу. Якщо потенціал αV володіє резонансом нульової енергії з напівзв'язним станом u_α , то граничним оператором є оператор Шрединґера $-\frac{d^2}{dx^2} + V_0$, визначений на функціях ϕ з простору \mathcal{V}_0 , які в початку координат підпорядковані умовам

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi'(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_\alpha(V) & 0 \\ \beta \zeta_\alpha(V, U) & \theta_\alpha(V)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ \phi'(-0) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Величина $\theta_\alpha(V)$ визначається напівзв'язним станом потенціалу αV , а саме,

$$\theta_\alpha(V) = \frac{u_\alpha^+}{u_\alpha^-}, \quad (2.3)$$

де $u_\alpha^\pm = u_\alpha(\pm\infty)$. Величина $\zeta_\alpha(V, U)$ залежить від потенціалів V та U , а також границі відношення ν/ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 0$ і описує різні випадки резонансної взаємодії між потенціалами V і U . Розрізняємо такі випадки при $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$:

(i) коли $\nu/\varepsilon \rightarrow \infty$, то

$$\zeta_\alpha(V, U) = \frac{u_\alpha^+}{u_\alpha^-} \int_{\mathbb{R}_+} U(s) ds + \frac{u_\alpha^-}{u_\alpha^+} \int_{\mathbb{R}_-} U(s) ds; \quad (2.4)$$

(ii) коли відношення ν/ε збігається до скінченного числа ω , то

$$\zeta_\alpha(V, U) = \frac{1}{u_\alpha^- u_\alpha^+} \int_{\mathbb{R}} U(s) u_\alpha^2(\omega s) ds; \quad (2.5)$$

(iii) коли ж ν/ε прямує до нуля, то

$$\zeta_\alpha(V, U) = \frac{u_\alpha^2(0)}{u_\alpha^- u_\alpha^+} \int_{\mathbb{R}} U(s) ds. \quad (2.6)$$

У випадку резонансу сім'ю потенціалів $\alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot) + \beta\nu^{-1}U(\nu^{-1}\cdot)$, що локалізуються в початку координат, можна замінити точковою взаємодією (2.2). Складна нелінійна залежність величин θ_α та ζ_α від потенціала V , а також резонансна взаємодія V та U конструктивно описані формулами (2.3)–(2.6). Це дає змогу провести кількісний аналіз моделі, обчисливши, наприклад, наближення для спектрів операторів $H_{\varepsilon,\nu}$ чи даних розсіювання на потенціалах, заданих профілями V та U . У серії робіт [22–29] О. Золотарюк провів такі обчислення для моделей з кусково-сталими коефіцієнтами, в яких розв'язки рівняння Шрединґера можна записати в явному вигляді через елементарні функції, а саме дослідження задачі звести до прискіпливого асимптотичного аналізу складних визначників. Дослідження О. Золотарюка підтверджують достовірність теоретичних результатів, отриманих в цьому розділі.

Варто зауважити, що в працях [35, 62] псевдопотенціал $\alpha\delta' + \beta\delta$ інтерпретували як точкову взаємодію з матрицею

$$C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{2+\alpha}{2-\alpha} & 0 \\ \frac{4\beta}{(2-\alpha)^2} & \frac{2-\alpha}{2+\alpha} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

а для $\alpha = \pm 2$ псевдопотенціалу ставили у відповідність деякі розділені крайові умови. В матриці C теж прослідковується нелінійна залежність від α та лінійна від β . Таку модель одержано при певних фізичних припущеннях щодо симетрії δ -потенціалу. Зокрема, постулювались формули для добутків функцій Дірака та розривних пробних функцій

$$v(x)\delta(x) = \{v\}_0 \delta(x), \quad v(x)\delta'(x) = \{v\}_0 \delta'(x) - \{v'\}_0 \delta(x).$$

Тут $\{f\}_0 = \frac{1}{2}(f(-0) + f(+0))$ — середнє значення розривної функції f в точці $x = 0$. Якщо покласти $\{f\}_0 = \gamma f(-0) + (1-\gamma)f(+0)$, де $\gamma \in [0, 1]$, то звісно отримаємо інший результат. Загалом ця модель є лише однією з багатьох точних моделей, які описані нами вище. В [29] вказано, при яких кусково-сталих профілях V і U її вдається одержати в границі. Аналіз спектру та даних розсіювання для цієї моделі проводився в [63–65].

Без обмеження загальності припустимо, що носії обох потенціалів V та U містяться у відрізку $\mathcal{I} = [-1, 1]$. Тоді кожний напівзв'язний стан u_α є сталим

поза \mathcal{I} , а резонансна множина $\mathcal{R}(V)$ збігається зі спектром крайової задачі

$$-u'' + \alpha V u = 0, \quad t \in \mathcal{I}, \quad u'(-1) = 0, \quad u'(1) = 0 \quad (2.8)$$

стосовно спектрального параметра α . Нагадаємо, що $\theta: \mathcal{R}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ — функція взаємодії, яка визначена так

$$\theta_\alpha = \frac{u_\alpha^+}{u_\alpha^-} = \frac{u_\alpha(1)}{u_\alpha(-1)}.$$

Напівзв'язний стан нормуємо умовою $u_\alpha(x) = 1$ при $x \leq -1$ і тоді $u_\alpha(x) = \theta_\alpha$ при $x \geq 1$. Нехай $S(\pi_1, \pi_2)$ — оператор, що діє за правилом $S(\pi_1, \pi_2)\phi = -\phi'' + V_0\phi$ на функціях ϕ з класу \mathcal{V}_0 , які підпорядковані умовам

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi'(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & 0 \\ \pi_2 & \pi_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ \phi'(-0) \end{pmatrix}$$

в початку координат. Далі будемо також використовувати оператори \mathcal{D}^\pm , які визначені в (1.12).

2.2 Збіжність операторів у випадку $\varepsilon^{-1}\nu \rightarrow +\infty$

Спершу розглянемо ситуацію, коли δ' -подібна послідовність $V_\varepsilon = \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ локалізується при $\varepsilon \rightarrow 0$ швидше, ніж δ -подібна послідовність $U_\nu = \nu^{-1}U(\nu^{-1}\cdot)$ при $\nu \rightarrow 0$ (рис. 2.1). Точніше, параметри ε і ν так прямують до нуля, що відношення ν/ε стає нескінченно великим. Зручно ввести ще один параметр $\tau = \nu/\varepsilon$. Ми досліджуватимемо поведінку операторів $H_{\varepsilon,\nu}$ у припущенні, що $\nu \rightarrow 0$ та $\tau \rightarrow \infty$. Зрозуміло, що тоді параметр ε мусить прямувати до нуля.

Теорема 2.1. *Нехай $\varepsilon^{-1}\nu \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ та $\nu \rightarrow 0$. Якщо $\alpha \in \mathcal{R}(V)$, то сім'я операторів $H_{\varepsilon,\nu}$ збігається до оператора $S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha)$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де*

$$\zeta_\alpha = \theta_\alpha \int_{\mathbb{R}_+} U(s) ds + \theta_\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}_-} U(s) ds.$$

Крім того, для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(S)\| \leq C_1(\nu^{1/2} + \varepsilon\nu^{-1}). \quad (2.9)$$

Якщо ж $\alpha \notin \mathcal{R}(V)$, то $H_{\varepsilon,\nu} \rightarrow \mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ при $\nu \rightarrow 0$ та $\varepsilon \rightarrow 0$ в рівномірній резольвентній топології, причому

$$\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)\| \leq C_2\nu^{1/2}.$$

Доведення проведемо окремо для випадку резонансу і його відсутності.

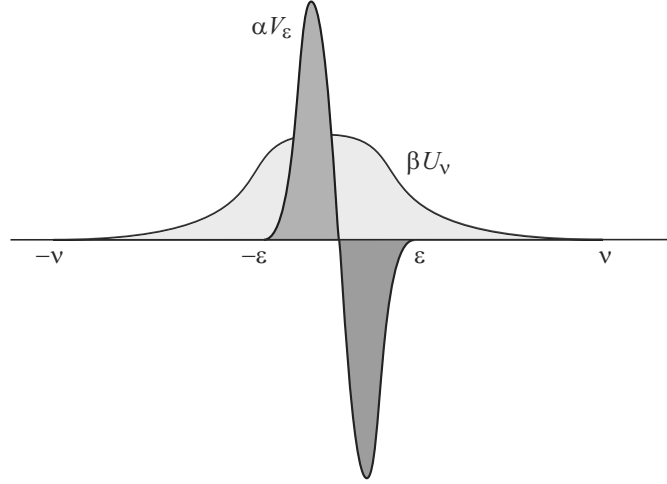


Рис. 2.1: Потенціали V_ε та U_ν у випадку $\varepsilon^{-1}\nu \rightarrow +\infty$

2.2.1 Випадок резонансу

Нехай α належить до $\mathcal{R}(V)$. Виберемо функцію f з простору $L_2(\mathbb{R})$. Вектори $(H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)^{-1}f$ та $(S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha) - \lambda)^{-1}f$ треба одночасно апроксимувати в $L_2(\mathbb{R})$ тим самим елементом $y_{\varepsilon,\nu}$ з області визначення оператора $H_{\varepsilon,\nu}$. Апроксимація повинна бути рівномірною відносно f на обмежених множинах в $L_2(\mathbb{R})$. Першим наближення буде функція

$$w_{\varepsilon,\nu}(x) = \begin{cases} y(x), & \text{коли } |x| > \nu, \\ y(-0)\left(u_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \beta\nu h_\tau\left(\frac{x}{\nu}\right)\right) + \varepsilon g_\tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 v_{\varepsilon,\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| \leq \nu, \end{cases}$$

яке ми згодом удосконалимо. Тут $y = (S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha) - \lambda)^{-1}f$, u_α — напівзв'язний стан, $\tau = \nu/\varepsilon$, а функції h_τ , g_τ та $v_{\varepsilon,\tau}$ — розв'язки задач Коші

$$h'' = U(t)u_\alpha(\tau t), \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 0; \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} g'' - \alpha V(t)g &= \alpha\beta y(-0)\tau V(t)h_\tau(\tau^{-1}t), \\ g(-1) &= 0, \quad g'(-1) = y'(-0) + \beta y(-0) \int_{\mathbb{R}_-} U(s) ds; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$-v'' + \alpha V(t)v = f(\varepsilon t)\chi_\tau(t), \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \quad (2.12)$$

відповідно. Усі розв'язки визначені для $t \in \mathbb{R}$. Через χ_a позначатимемо характеристичну функцію відрізка $(-a, a)$. Функція y є достатньо хорошим наближенням для $(H_{\varepsilon, \nu} - \lambda)^{-1}f$, коли $|x| > \nu$. Проте на носіїві потенціалу U , коли $|x| < \nu$, таке наближення набагато складніше. Доведення розділимо на кілька лем.

Лема 2.1. *Функція h_τ володіє властивостями:*

(i) існують сталі C_1 і C_2 такі, що

$$\|h_\tau\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq C_1, \quad |h_\tau(t)| \leq C_2 t^2 \quad (2.13)$$

для усіх $t \in \mathbb{R}$ і $\tau > 0$;

(ii) при $\tau \rightarrow \infty$ маємо

$$h'_\tau(-1) = - \int_{\mathbb{R}_-} U(s) ds + O(\tau^{-1}), \quad h'_\tau(1) = \theta_\alpha \int_{\mathbb{R}_+} U(s) ds + O(\tau^{-1}). \quad (2.14)$$

Доведення. Нерівності (2.13) випливають із зображення

$$h_\tau(t) = \int_0^t (t-s)U(s)u_\alpha(\tau s) ds,$$

бо U і u_α — обмежені функції. Далі, врахувавши нормування напівзв'язного стану умовою $u_\alpha^- = 1$, отримаємо при $\tau \rightarrow \infty$ збіжність

$$u_\alpha(\tau t) \rightarrow u_\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < 0, \\ \theta_\alpha & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

в просторі $L_{1,loc}(\mathbb{R})$. До того ж різниця $u_\alpha(\tau t) - u_\alpha^*(t)$ є нульовою поза відрізком $[-\tau^{-1}, \tau^{-1}]$ і обмежена на ньому. Тому із зображення для похідної

$$h'_\tau(t) = \int_0^t U(s)u_\alpha(\tau s) ds$$

випливають асимптотичні формули (2.14). Наприклад, для $h'_\tau(1)$ матимемо

$$\begin{aligned} h'_\tau(1) &= \int_0^1 U(s)u_\alpha(\tau s) ds = \int_0^1 U(s)u_\alpha^*(s) ds + \int_0^1 U(s)(u_\alpha(\tau s) - u_\alpha^*(s)) ds = \\ &= \theta_\alpha \int_0^{+\infty} U(s) ds + \int_0^{\tau^{-1}} U(s)(u_\alpha(\tau s) - u_\alpha^*(s)) ds = \theta_\alpha \int_0^{+\infty} U(s) ds + O(\tau^{-1}) \end{aligned}$$

при $\tau \rightarrow \infty$. Нагадаємо, що $U(x) = 0$, коли $x \geq 1$. □

Лема 2.2. Існують незалежні від функції f сталі C_1 і C_2 такі, що

$$|g_\tau(t)| \leq C_1(1 + |t|)\|f\|, \quad |g'_\tau(t)| \leq C_2\|f\| \quad (2.15)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$ та $\tau \geq \tau_0 > 0$. Крім того, значення $g'_\tau(1)$ володіє асимптотикою

$$g'_\tau(1) = \theta_\alpha^{-1} \left(y'(-0) + \beta y(-0) \int_{\mathbb{R}_-} U(s) ds \right) + O(\tau^{-1})\|f\|, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Доведення. Функція g_τ як розв'язок задачі Коші (2.11) має оцінку

$$\|g_\tau\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq c_1(|y(-0)| + |y'(-0)|) + c_2\tau|y(-0)| \|h_\tau(\tau^{-1} \cdot)\|_{C(\mathcal{I})}$$

згідно з твердженням 1.2. Далі з (2.13) випливає, що

$$\|h_\tau(\tau^{-1} \cdot)\|_{C(\mathcal{I})} = \max_{|t| \leq \tau^{-1}} |h_\tau(t)| \leq c_3\tau^{-2}. \quad (2.17)$$

Поєднуючи цю нерівність з (1.8), дістаємо

$$\|g_\tau\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq c_4(|y(-0)| + |y'(-0)|) \leq c_5\|f\|, \quad (2.18)$$

бо $\tau^{-1} \leq \tau_0^{-1}$. Позаяк $\text{supp } V \subset \mathcal{I}$, то функція g_τ є лінійною поза \mathcal{I} :

$$g_\tau(t) = g'_\tau(-1)(t + 1) \quad \text{при } t \leq -1, \quad g_\tau(t) = g_\tau(1) + g'_\tau(1)(t - 1) \quad \text{при } t \geq 1.$$

Тому звідси та (2.18) випливають оцінки (2.15).

Тепер помножимо рівняння (2.11) на u_α і проінтегруємо частинами на \mathcal{I} :

$$\theta_\alpha g'_\tau(1) - g'_\tau(-1) = \alpha\beta\tau y(-0) \int_{-1}^1 V(s) h_\tau(\tau^{-1}s) u_\alpha(s) ds. \quad (2.19)$$

Праву частину для $\tau \geq \tau_0$ можемо оцінити через $c_6\tau^{-1}\|f\|$ згідно з (2.17) і твердження 1.4. Врахувавши умови Коші (2.11), дістанемо (2.16). \square

Лема 2.3. При $\varepsilon \rightarrow 0$ і $\tau \rightarrow \infty$ виконуються оцінки

$$|v_{\varepsilon,\tau}(t)| \leq C_1\varepsilon^{-1/2}\tau^{3/2}\|f\|, \quad |v'_{\varepsilon,\tau}(t)| \leq C_2\varepsilon^{-1/2}\tau^{1/2}\|f\| \quad (2.20)$$

для $t \in [-\tau, \tau]$ і сталих C_1, C_2 , що не залежать від f .

Доведення. Скористаємося зображення (1.7) для задачі Коші (2.12). Тоді

$$v_{\varepsilon,\tau}(t) = \int_0^t k(t,s)f(\varepsilon s)\chi_\tau(s) ds,$$

де $k(t,s) = v_1(s)v_2(t) - v_1(t)v_2(s)$, а v_1, v_2 — розв'язки рівняння $-v'' + \alpha Vv = 0$, підпорядковані початковим умовам $v_1(0) = 1, v_1'(0) = 0$ та $v_2(0) = 0, v_2'(0) = 1$. Ядро k можемо оцінити так

$$|k(t,s)| \leq c_1(|t| + |s|) + c_2, \quad \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t,s) \right| \leq c_3, \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.21)$$

Справді, обидва розв'язки v_1 і v_2 є лінійними функціями поза \mathcal{I} , бо $\text{supp } V \subset \mathcal{I}$. Нехай $v_j(t) = a_j^\pm t + b_j^\pm$, коли $\pm t > 1$. Спершу припустимо, що $t > 1$ і $s > 1$. Тоді

$$k(t,s) = (b_1^+ a_2^+ - b_2^+ a_1^+)(t - s), \quad \frac{\partial k}{\partial t}(t,s) = b_1^+ a_2^+ - b_2^+ a_1^+,$$

звідки отримуємо (2.21) для таких значень t і s . Далі, якщо $t > 1$ та $|s| < 1$, то

$$k(t,s) = v_1(s)(a_2^+ t + b_2^+) - v_2(s)(a_1^+ t + b_1^+), \quad \frac{\partial k}{\partial t}(t,s) = a_2^+ v_1(s) - a_1^+ v_2(s),$$

а (2.21) випливає з оцінок $\|v_j\|_{C(-1,1)} \leq c_4, j = 1, 2$. Інші випадки такі, як $|t| < 1$ і $s > 1$ чи $t < -1$ і $s < -1$, аналізуються схоже. Отже, для великих τ маємо

$$\begin{aligned} \max_{t \in [-\tau, \tau]} |v_{\varepsilon,\tau}(t)| &\leq \int_{-\tau}^{\tau} \max_{t \in [-\tau, \tau]} |k(t,s)| |f(\varepsilon s)| ds \leq \\ &\leq \int_{-\tau}^{\tau} (c_5(\tau + |s|) + c_6) |f(\varepsilon s)| ds \leq c_7 \tau \int_{-\tau}^{\tau} |f(\varepsilon s)| ds = \\ &= c_7 \varepsilon^{-1} \tau \int_{-\nu}^{\nu} |f(s)| ds \leq c_8 \varepsilon^{-1} \tau \nu^{1/2} \|f\| = c_8 \varepsilon^{-1/2} \tau^{3/2} \|f\|, \\ \max_{t \in [-\tau, \tau]} |v'_{\varepsilon,\tau}(t)| &\leq \int_{-\tau}^{\tau} \max_{t \in [-\tau, \tau]} \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t,s) \right| |f(\varepsilon s)| ds \leq c_9 \int_{-\tau}^{\tau} |f(\varepsilon s)| ds \leq \\ &\leq c_{10} \varepsilon^{-1} \int_{-\nu}^{\nu} |f(s)| ds \leq c_{11} \varepsilon^{-1} \nu^{1/2} \|f\| = c_{11} \varepsilon^{-1/2} \tau^{1/2} \|f\|, \end{aligned}$$

що завершує доведення леми. □

Наслідок 2.1. *Якщо при $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$ відношення ε/ν залишається обмеженим, то існує така стала C , що $\max_{|x| \leq \nu} |w_{\varepsilon,\nu}(x)| \leq C \|f\|$.*

Доведення. Наслідок випливає з лем 2.1–2.3. Ми лише зауважимо, що

$$\begin{aligned} \max_{|x| \leq \nu} |\varepsilon g_\tau(x/\varepsilon) + \varepsilon^2 v_{\varepsilon, \tau}(x/\varepsilon)| &\leq (c_1 \varepsilon (1 + \nu/\varepsilon) + c_2 \varepsilon^{3/2} \tau^{3/2}) \|f\| \leq \\ &\leq (c_1(\varepsilon + \nu) + c_2 \nu^{3/2}) \|f\| \leq c_3(\varepsilon + \nu) \|f\| \leq c_4 \nu \|f\| \end{aligned} \quad (2.22)$$

з огляду на (2.15), (2.20) та у припущенні, що $\varepsilon \leq c\nu$. \square

За побудовою $w_{\varepsilon, \nu}$ належить до простору $W_{2,loc}^2(\mathbb{R} \setminus \{-\nu, \nu\})$ і, взагалі кажучи, має розриви першого роду при $x = \pm\nu$. Тому $w_{\varepsilon, \nu}$ не є елементом $\text{dom } H_{\varepsilon, \nu}$. Побудуємо коректор $\rho_{\varepsilon, \nu}$ такий, як в твердженні 1.1. Тоді сума $w_{\varepsilon, \nu} + \rho_{\varepsilon, \nu}$ вже належатиме до області визначення оператора $H_{\varepsilon, \nu}$, а коректор буде малим, якщо малими будуть стрибки $w_{\varepsilon, \nu}$ та її похідної в точках $x = \pm\nu$.

Лема 2.4. *При $\varepsilon \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 0$ та $\tau \rightarrow \infty$ справедлива оцінка*

$$\max_{|x| \geq \nu} |\rho_{\varepsilon, \nu}^{(k)}(x)| \leq C(\nu^{1/2} + \tau^{-1}) \|f\|, \quad k = 0, 1, 2.$$

Доведення. Нехай ε і ν достатньо малі, але при цьому $\tau \geq \tau_0 > 0$. Нагадаємо, що $u_\alpha(-\tau) = 1$, $u_\alpha(\tau) = \theta_\alpha$ та $u'_\alpha(\pm\tau) = 0$. Крім того, $g'_\tau(\pm\tau) = g'_\tau(\pm 1)$, а також з (2.22) випливає оцінка

$$\varepsilon |g_\tau(\pm\tau)| \leq c_1 \nu \|f\|. \quad (2.23)$$

Щоб довести лему, покажемо, що стрибки $w_{\varepsilon, \nu}$ та $w'_{\varepsilon, \nu}$ в точках $x = \pm\nu$ є величинами порядку $O(\nu^{1/2} + \tau^{-1})$. Розпочнемо зі стрибків в точці $x = -\nu$:

$$\begin{aligned} [w_{\varepsilon, \nu}]_{-\nu} &= y(-0) + \beta \nu y(-0) h_\tau(-1) + \varepsilon g_\tau(-\tau) + \varepsilon^2 v_{\varepsilon, \tau}(-\tau) - y(-\nu), \\ [w'_{\varepsilon, \nu}]_{-\nu} &= \beta y(-0) h'_\tau(-1) + g'_\tau(-1) + \varepsilon v'_{\varepsilon, \tau}(-\tau) - y'(-\nu). \end{aligned}$$

Перший з них згідно з твердженням 1.4, лемою 2.3 та (2.13), (2.23) можна оцінити

$$\begin{aligned} |[w_{\varepsilon, \nu}]_{-\nu}| &\leq |y(-0) - y(-\nu)| + \nu |\beta| |y(-0)| |h_\tau(-1)| \\ &\quad + \varepsilon |g_\tau(-\tau)| + \varepsilon^2 |v_{\varepsilon, \tau}(-\tau)| \leq c_2 \nu \|f\|. \end{aligned}$$

Далі, беручи до уваги (2.14) та початкові умови для g_τ , дістаємо

$$\begin{aligned} [w'_{\varepsilon, \nu}]_{-\nu} &= \beta y(-0) \left(- \int_{\mathbb{R}_-} U ds + O(\tau^{-1}) \right) + y'(-0) + \beta y(-0) \int_{\mathbb{R}_-} U ds - y'(-\nu) \\ &\quad + \varepsilon v'_{\varepsilon, \tau}(-\tau) = y'(-0) - y'(-\nu) + O(\tau^{-1}) y(-0) + O(\nu^{1/2}) \|f\| \end{aligned}$$

при $\tau \rightarrow \infty$ і $\nu \rightarrow 0$. Знову застосуємо твердження 1.4 і одержимо

$$|[w'_{\varepsilon,\nu}]_{-\nu}| \leq c_3(\nu^{1/2} + \tau^{-1})\|f\|.$$

Тепер звернемося до стрибків в точці $x = \nu$. Маємо

$$\begin{aligned} [w_{\varepsilon,\nu}]_{\nu} &= y(\nu) - \theta_{\alpha}y(-0) - \beta\nu y(-0)h_{\tau}(1) - \varepsilon g_{\tau}(\tau) - \varepsilon^2 v_{\varepsilon,\tau}(\tau), \\ [w'_{\varepsilon,\nu}]_{\nu} &= y'(\nu) - \beta y(-0)h'_{\tau}(1) - g'_{\tau}(1) - \varepsilon v'_{\varepsilon,\tau}(\tau). \end{aligned}$$

Згадаємо, що $y(+0) = \theta_{\alpha}y(-0)$, бо $y \in \text{dom } S$. Це нам дає

$$|[w_{\varepsilon,\nu}]_{\nu}| \leq |y(\nu) - y(+0)| + c_4\nu|y(-0)| + \varepsilon|g_{\tau}(\tau)| + \varepsilon^2|v_{\varepsilon,\tau}(\tau)| \leq c_5\nu\|f\|$$

з огляду на (1.9), (2.20) і (2.23). Далі, поєднуючи асимптотичні формули (2.14), (2.16) і рівність $y'(+0) = \theta_{\alpha}^{-1}y'(-0) + \beta\zeta_{\alpha}y(-0)$, виводимо, що

$$\begin{aligned} [w'_{\varepsilon,\nu}]_{\nu} &= y'(\nu) - \beta y(-0) \left(\theta_{\alpha} \int_{\mathbb{R}_+} U ds + O(\tau^{-1}) \right) \\ &\quad - \left(\theta_{\alpha}^{-1}y'(-0) + \theta_{\alpha}^{-1}\beta y(-0) \int_{\mathbb{R}_-} U ds + O(\tau^{-1})\|f\| \right) - \varepsilon v'_{\varepsilon,\tau}(\tau) \\ &= y'(\nu) - \theta_{\alpha}^{-1}y'(-0) - \beta\zeta_{\alpha}y(-0) + O(\tau^{-1})\|f\| + O(\nu^{1/2})\|f\| \\ &= y'(\nu) - y'(+0) + O(\nu^{1/2} + \tau^{-1})\|f\|. \end{aligned}$$

Отже, $|[w'_{\varepsilon,\nu}]_{\nu}| \leq c_6(\nu^{1/2} + \tau^{-1})\|f\|$, що завершує доведення. \square

Перейдемо до доведення теореми 2.1. Введемо два позначення $y_{\varepsilon,\nu} = w_{\varepsilon,\nu} + \rho_{\varepsilon,\nu}$, $r_{\varepsilon,\nu} = (H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)y_{\varepsilon,\nu} - f$. Оцінимо $L_2(\mathbb{R})$ -норму функції $r_{\varepsilon,\nu}$. Якщо $|x| > \nu$, то

$$r_{\varepsilon,\nu}(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) - \lambda \right) y_{\varepsilon,\nu}(x) - f(x) = -\rho''_{\varepsilon,\nu}(x) + (V_0(x) - \lambda)\rho_{\varepsilon,\nu}(x).$$

Нагадаємо, що за побудовою $\rho_{\varepsilon,\nu} = 0$ на $(-\nu, \nu)$. Тому для $|x| < \nu$ ми маємо

$$\begin{aligned} r_{\varepsilon,\nu}(x) &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \alpha\varepsilon^{-2}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \beta\nu^{-1}U\left(\frac{x}{\nu}\right) - \lambda \right) y_{\varepsilon,\nu}(x) - f(x) = \\ &= \varepsilon^{-2}y(-0)\left\{ -u''_{\alpha}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \alpha V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_{\alpha}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} + \nu^{-1}\beta y(-0)\left\{ -h''_{\varepsilon,\nu}\left(\frac{x}{\nu}\right) + U\left(\frac{x}{\nu}\right)u_{\alpha}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} + \\ &\quad + \varepsilon^{-1}\left\{ -g''_{\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \alpha V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)g_{\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tau\alpha\beta y(-0)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)h_{\tau}\left(\frac{x}{\nu}\right) \right\} + \\ &\quad + \left\{ -v''_{\varepsilon,\nu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \alpha V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{\varepsilon,\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - f(x) \right\} + \beta U\left(\frac{x}{\nu}\right)\left\{ \beta y(-0)h_{\tau}\left(\frac{x}{\nu}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \tau^{-1}g_{\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\tau^{-1}v_{\varepsilon,\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} + (V_0(x) - \lambda)w_{\varepsilon,\nu}(x) = \\ &= \beta U\left(\frac{x}{\nu}\right)\left\{ \beta y(-0)h_{\tau}\left(\frac{x}{\nu}\right) + \tau^{-1}g_{\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\tau^{-1}v_{\varepsilon,\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} + (V_0(x) - \lambda)w_{\varepsilon,\nu}(x), \end{aligned}$$

оскільки h_τ , g_τ і $v_{\varepsilon,\tau}$ – розв’язки рівнянь (2.10)–(2.12) відповідно. Отже,

$$r_{\varepsilon,\nu} = -\rho''_{\varepsilon,\nu} + (V_0 - \lambda)(\rho_{\varepsilon,\nu} + y_{\varepsilon,\nu}\chi_\nu) + \beta U(\nu^{-1} \cdot)(\beta y(-0)h_\tau(\nu^{-1} \cdot) + \tau^{-1}g_\tau(\varepsilon^{-1} \cdot) + \varepsilon\tau^{-1}v_{\varepsilon,\tau}(\varepsilon^{-1} \cdot)), \quad (2.24)$$

де χ_ν – характеристична функція відрізка $[-\nu, \nu]$. З огляду на леми 2.1–2.3

$$\begin{aligned} |y(-0)| \left| U\left(\frac{x}{\nu}\right) h_\tau\left(\frac{x}{\nu}\right) \right| &\leq c_1 \|h_\tau\|_{C(\mathcal{I})} \|f\| \chi_\nu(x) \leq c_2 \|f\| \chi_\nu(x), \\ \tau^{-1} \left| U\left(\frac{x}{\nu}\right) g_\tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| &\leq c_3 \tau^{-1} \chi_\nu(x) \max_{x \in [-\nu, \nu]} \left| g_\tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \\ &\leq c_4 \tau^{-1} (1 + \tau) \|f\| \chi_\nu(x) \leq c_5 \|f\| \chi_\nu(x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon\tau^{-1} \left| U\left(\frac{x}{\nu}\right) v_{\varepsilon,\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq c_6 \varepsilon\tau^{-1} \chi_\nu(x) \max_{x \in [-\nu, \nu]} \left| v_{\varepsilon,\tau}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq c_7 \nu^{1/2} \|f\| \chi_\nu(x). \quad (2.26)$$

Нарешті з наслідку 2.1, леми 2.4 та того факту, що $\|\chi_\nu\| = (2\nu)^{1/2}$, ми отримуємо оцінку $\|r_{\varepsilon,\nu}\| \leq c(\nu^{1/2} + \tau^{-1})\|f\|$. Отже,

$$\begin{aligned} \|(H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)^{-1}f - y_{\varepsilon,\nu}\| &= \|(H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)^{-1}r_{\varepsilon,\nu}\| \leq \\ &\leq \|(H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)^{-1}\| \|r_{\varepsilon,\nu}\| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1} \|r_{\varepsilon,\nu}\| \leq C(\nu^{1/2} + \tau^{-1})\|f\|. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Далі, $y_{\varepsilon,\nu} - y = \rho_{\varepsilon,\nu}$ для $|x| > \nu$ та $y_{\varepsilon,\nu} - y = w_{\varepsilon,\nu}$ для $|x| \leq \nu$. Тому ще раз застосувавши наслідок 2.1 і лему 2.4, матимемо

$$\|y_{\varepsilon,\nu} - y\| = \|y_{\varepsilon,\nu} - (S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha) - \lambda)^{-1}f\| \leq c(\nu^{1/2} + \tau^{-1})\|f\|. \quad (2.28)$$

З двох останніх нерівностей робимо висновок, що

$$\|(H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)^{-1}f - (S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha) - \lambda)^{-1}f\| \leq C(\nu^{1/2} + \tau^{-1})\|f\|$$

для всіх $f \in L_2(\mathbb{R})$. Доведення в резонансному випадку завершується зауваженням, що величина $\nu^{1/2} + \tau^{-1}$ прямує до нуля при $\nu \rightarrow 0$ та $\tau \rightarrow \infty$.

2.2.2 Випадок відсутності резонансу

Коли α не належить до резонансної множини $\mathcal{R}(V)$, то $u_\alpha = 0$, а тому $h_\tau = 0$. До того ж функція $y = (\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+ - \lambda)^{-1}f$ задовольняє умови $y(\pm 0) = 0$. Усе це значно спрощує вигляд наближення для $(H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)^{-1}f$. Покладемо

$$y_{\varepsilon,\nu}(x) = \begin{cases} y(x) + \rho_{\varepsilon,\nu}(x), & \text{коли } |x| > \nu, \\ \varepsilon g(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 v_{\varepsilon,\tau}(\varepsilon^{-1}x), & \text{коли } |x| \leq \nu, \end{cases}$$

де тепер g можна вибрати як розв'язок крайової задачі

$$-g'' + \alpha V(t)g = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad g'(-1) = y'(-0), \quad g'(1) = y'(0).$$

Такий розв'язок існує, бо α не є власним значенням. Крім того, g є лінійною функцією поза \mathcal{I} , а тому залишаються справедливими нерівності вигляду (2.15) та (2.25). Для функції $\rho_{\varepsilon, \nu}$ виконується нерівність

$$\max_{x \in \mathbb{R} \setminus \{-\nu, \nu\}} |\rho_{\varepsilon, \nu}^{(k)}(x)| \leq C\nu^{1/2} \|f\|, \quad k = 0, 1, 2. \quad (2.29)$$

яка впливає з малості стрибків

$$\begin{aligned} |y(\pm\nu) - \varepsilon g(\pm\tau) - \varepsilon^2 v_{\varepsilon, \tau}(\pm\tau)| &\leq |y(\pm\nu)| + \varepsilon |g(\pm\tau)| + \varepsilon^2 |v_{\varepsilon, \tau}(\pm\tau)| \leq c_1 \nu \|f\|, \\ |y'(\pm\nu) - g'(\pm\tau) - \varepsilon v'_{\varepsilon, \tau}(\pm\tau)| &\leq |y'(\pm\nu) - y'(\pm 0)| + \varepsilon |v'_{\varepsilon, \tau}(\pm\tau)| \leq c_2 \nu^{1/2} \|f\|. \end{aligned}$$

Останні оцінки виводимо з твердження 1.4, леми 2.3 та (2.23). Формула (2.24) тепер спрощується до вигляду

$$r_{\varepsilon, \nu} = -\rho''_{\varepsilon, \nu} + (V_0 - \lambda)(\rho_{\varepsilon, \nu} + y_{\varepsilon, \nu} \chi_\nu) + \beta U(\nu^{-1} \cdot) (\tau^{-1} g_\tau(\varepsilon^{-1} \cdot) + \varepsilon \tau^{-1} v_{\varepsilon, \tau}(\varepsilon^{-1} \cdot)).$$

Звідси $\|r_{\varepsilon, \nu}\| \leq c_3 \nu^{1/2} \|f\|$, якщо взяти до уваги (2.25), (2.26) та (2.29). Отже, $\|(H_{\varepsilon, \nu} - \lambda)^{-1} f - y_{\varepsilon, \nu}\| \leq c_4 \nu^{1/2} \|f\|$. Схоже оцінюємо різницю $y_{\varepsilon, \nu} - y$ і одержуємо $\|y_{\varepsilon, \nu} - (\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+ - \lambda)^{-1} f\| \leq c_5 \nu^{1/2} \|f\|$. Остаточо маємо

$$\|(H_{\varepsilon, \nu} - \lambda)^{-1} f - (\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+ - \lambda)^{-1} f\| \leq C\nu^{1/2} \|f\|$$

для всіх $f \in L_2(\mathbb{R})$. Доведення теореми 2.1 завершено.

2.3 Збіжність операторів у випадку $\nu \sim \omega \varepsilon$

Нехай швидкості локалізації δ' -подібної послідовність $V_\varepsilon = \varepsilon^{-2} V(\varepsilon^{-1} \cdot)$ та δ -подібної послідовність $U_\nu = \nu^{-1} U(\nu^{-1} \cdot)$ є однакового порядку малості, а саме, параметри ε і ν прямують до нуля так, що відношення ν/ε має скінченну додатну границю.

Теорема 2.2. *Нехай $\varepsilon^{-1} \nu \rightarrow \omega$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ та $\nu \rightarrow 0$, де ω — додатне число. Якщо потенціал αV володіє резонансом нульової енергії з напівв'язним станом u_α ,*

то сім'я операторів $H_{\varepsilon, \nu}$ збігається до оператора $S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha)$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де

$$\zeta_\alpha = \theta_\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} U(s) u_\alpha^2(\omega s) ds.$$

Крім того, для різниці резольвент виконується оцінка

$$\|R_\lambda(H_{\varepsilon, \nu}) - R_\lambda(S)\| \leq C_1(\varepsilon^{1/2} + |\varepsilon^{-1}\nu - \omega|) \quad (2.30)$$

для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Якщо ж α не є резонансною сталою взаємодії для потенціалу V , то граничним оператором для сім'ї $H_{\varepsilon, \nu}$ є пряма сума $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$, причому

$$\|R_\lambda(H_{\varepsilon, \nu}) - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)\| \leq C_2 \varepsilon^{1/2}.$$

Доведення розпочнемо з випадку резонансу. Тепер малі параметри пов'язані асимптотичною формулою $\nu = \omega\varepsilon + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Виберемо число ω_0 таким, щоб виконувалася нерівність $\omega_0 > \max\{1, \omega\}$. Тоді при всіх достатньо малих ε носії потенціалів V_ε та U_ν лежатимуть в інтервалі $(-\omega_0\varepsilon, \omega_0\varepsilon)$. Наближення для елемента $(H_{\varepsilon, \nu} - \lambda)^{-1}f$ будуватимемо у вигляді

$$w_{\varepsilon, \nu}(x) = \begin{cases} y(x), & \text{коли } |x| > \omega_0\varepsilon, \\ y(-0)u_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon g_{\varepsilon, \nu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 v_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| \leq \omega_0\varepsilon, \end{cases}$$

де $y = (S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha) - \lambda)^{-1}f$, а функції $g_{\varepsilon, \nu}$ та v_ε — розв'язки задач Коші

$$-g'' + \alpha V(t)g = -\beta y(-0)\nu^{-1}\varepsilon U(\nu^{-1}\varepsilon t)u_\alpha(t), \quad (2.31)$$

$$g(-\omega_0) = 0, \quad g'(-\omega_0) = y'(-0);$$

$$-v'' + \alpha V(t)v = f(\varepsilon t), \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \quad (2.32)$$

відповідно, визначені на відріжку $[-\omega_0, \omega_0]$.

Лема 2.5. *Існує незалежна від функції f стала C така, що*

$$\max_{|t| \leq \omega_0} (|g_{\varepsilon, \nu}(t)| + |g'_{\varepsilon, \nu}(t)|) \leq C \|f\|. \quad (2.33)$$

Крім того, при $\varepsilon \rightarrow 0$ та $\nu \rightarrow 0$ справедлива асимптотична формула

$$g'_{\varepsilon, \nu}(\omega_0) = y'(+0) + O(\varepsilon^{-1}\nu - \omega) \|f\|. \quad (2.34)$$

Доведення. Оцінка (2.33) впливає безпосередньо з тверджень 1.2 і 1.4. Помножимо рівняння в (2.31) на u_α і проінтегруємо частинами на $(-\omega_0, \omega_0)$:

$$\theta_\alpha g'_{\varepsilon, \nu}(\omega_0) - g'_{\varepsilon, \nu}(-\omega_0) = \beta y(-0) \nu^{-1} \varepsilon \int_{-\omega_0}^{\omega_0} U(\nu^{-1} \varepsilon s) u_\alpha^2(s) ds.$$

Скориставшись умовами Коші (2.31) та зробивши заміну в інтегралі, дістанемо

$$g'_{\varepsilon, \nu}(\omega_0) = \theta_\alpha^{-1} \left(y'(-0) + \beta y(-0) \int_{\mathbb{R}} U(s) u_\alpha^2(\varepsilon^{-1} \nu s) ds \right).$$

Напівзв'язний стан $u_\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, тому на носіїві потенціалу U маємо

$$u_\alpha^2(\varepsilon^{-1} \nu s) = u_\alpha^2(\omega s) + O(\varepsilon^{-1} \nu - \omega), \quad \varepsilon, \nu \rightarrow 0.$$

Крім того, функція y задовольняє умову

$$y'(+0) = \theta_\alpha^{-1} \left(y'(-0) + \beta y(-0) \int_{\mathbb{R}} U(s) u_\alpha^2(\omega s) ds \right),$$

звідки і випливає формула (2.34). □

Скориставшись знову твердженням 1.2, одержимо оцінку

$$\|v_\varepsilon\|_{C^1[-\omega_0, \omega_0]} \leq c_1 \|f(\varepsilon \cdot)\|_{L_2(-\omega_0, \omega_0)} \leq c_2 \varepsilon^{-1/2} \|f\|. \quad (2.35)$$

Переконаємося, що розриви функції $w_{\varepsilon, \nu}$ в точках $x = \pm \omega_0 \varepsilon$ є малими при $\varepsilon \rightarrow 0$. Це дасть змогу підправити її малим коректором до елемента з $\text{dom } H_{\varepsilon, \nu}$. Число ω_0 більше за одиницю, тому $\text{supp } V \subset (-\omega_0, \omega_0)$, а напівзв'язний стан є сталим поза цим інтервалом. Тому $u_\alpha(-\omega_0) = 1$ та $u'_\alpha(-\omega_0) = 0$ і звідси при $\varepsilon \rightarrow 0$ маємо

$$\begin{aligned} [w_{\varepsilon, \nu}]_{-\omega_0 \varepsilon} &= y(-0) u_\alpha(-\omega_0) + \varepsilon g_{\varepsilon, \nu}(-\omega_0) + \varepsilon^2 v_\varepsilon(-\omega_0) - y(-\omega_0 \varepsilon) = \\ &= y(-0) - y(-\omega_0 \varepsilon) + \varepsilon^2 v_\varepsilon(-\omega_0) = O(\varepsilon) \|f\|, \\ [w'_{\varepsilon, \nu}]_{-\omega_0 \varepsilon} &= y(-0) u'_\alpha(-\omega_0) + g'_{\varepsilon, \nu}(-\omega_0) + \varepsilon v'_\varepsilon(-\omega_0) - y'(-\omega_0 \varepsilon) = \\ &= y'(-0) - y'(-\omega_0 \varepsilon) + \varepsilon v'_\varepsilon(-\omega_0) = O(\varepsilon^{1/2}) \|f\| \end{aligned}$$

з врахуванням умов Коші (2.31) та (2.35). З формули (2.34) та умов $u_\alpha(\omega_0) = \theta_\alpha$,

$u'_\alpha(\omega_0) = 0$, $y(+0) = \theta_\alpha y(-0)$, $y'(+0) = \theta_\alpha^{-1} y'(-0) + \beta \zeta_\alpha y(-0)$ отримуємо

$$\begin{aligned} [w_{\varepsilon,\nu}]_{\omega_0\varepsilon} &= y(\omega_0\varepsilon) - y(-0)u_\alpha(\omega_0) - \varepsilon g_{\varepsilon,\nu}(\omega_0) - \varepsilon^2 v_\varepsilon(\omega_0) = \\ &= y(\omega_0\varepsilon) - \theta_\alpha y(-0) - \varepsilon g_{\varepsilon,\nu}(\omega_0) - \varepsilon^2 v_\varepsilon(\omega_0) = O(\varepsilon)\|f\|, \\ [w'_{\varepsilon,\nu}]_{\omega_0\varepsilon} &= y'(\omega_0\varepsilon) - y(-0)u'_\alpha(\omega_0) - g'_{\varepsilon,\nu}(\omega_0) - \varepsilon v'_\varepsilon(\omega_0) = \\ &= y'(\omega_0\varepsilon) - \theta_\alpha^{-1} y'(-0) - \beta \zeta_\alpha y(-0) - \varepsilon v'_\varepsilon(\omega_0) + O(\varepsilon^{-1}\nu - \omega)\|f\| = \\ &= O(\varepsilon^{1/2} + |\varepsilon^{-1}\nu - \omega|)\|f\|. \end{aligned}$$

Отже, існує функція $\rho_{\varepsilon,\nu}$ така, що $y_{\varepsilon,\nu} = w_{\varepsilon,\nu} + \rho_{\varepsilon,\nu}$ належить до $\text{dom } H_{\varepsilon,\nu}$ і

$$\max_{|x| \geq \omega_0} |\rho_{\varepsilon,\nu}^{(k)}(x)| \leq C(\varepsilon^{1/2} + |\varepsilon^{-1}\nu - \omega|)\|f\|$$

для $k = 0, 1, 2$. Як в доведенні теореми 2.1 дістаємо нерівність

$$\|y_{\varepsilon,\nu} - R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu})f\| + \|y_{\varepsilon,\nu} - R_\lambda(S)f\| \leq C(\varepsilon^{1/2} + |\varepsilon^{-1}\nu - \omega|)\|f\|,$$

звідки випливає оцінка (2.30).

Щоб довести теорему при відсутності резонансу нульової енергії, треба взяти наближення вигляду

$$y_{\varepsilon,\nu}(x) = \begin{cases} y(x) + \rho_{\varepsilon,\nu}(x), & \text{коли } |x| > \omega_0\varepsilon, \\ \varepsilon g(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 v_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x), & \text{коли } |x| \leq \omega_0\varepsilon, \end{cases}$$

де $y = (\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+ - \lambda)^{-1}f$, функція g — розв'язок крайової задачі

$$-g'' + \alpha V(t)g = 0, \quad t \in (-\omega_0, \omega_0), \quad g'(-\omega_0) = y'(-0), \quad g'(\omega_0) = y'(+0),$$

а v_ε залишаємо без змін. Далі треба повторити міркування з попередніх доведень.

2.4 Збіжність операторів у випадку $\varepsilon^{-1}\nu \rightarrow 0$

Нарешті розглянемо збурення, в якому δ' -подібна послідовність $V_\varepsilon = \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot)$ повільніше локалізується в початку координат при $\varepsilon \rightarrow 0$, ніж δ -подібна послідовність $U_\nu = \nu^{-1}U(\nu^{-1}\cdot)$ при $\nu \rightarrow 0$ (рис. 2.1). Тоді параметри ε і ν прямують до нуля так, що відношення $\tau = \nu/\varepsilon$ теж стає нескінченно малим.

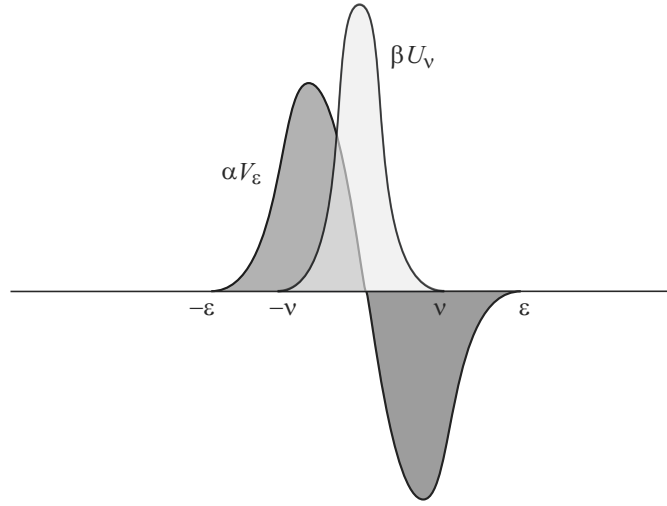


Рис. 2.2: Потенціали V_ε та U_ν у випадку $\varepsilon^{-1}\nu \rightarrow 0$

Теорема 2.3. Нехай $\varepsilon^{-1}\nu$ прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ та $\nu \rightarrow 0$. Якщо потенціал αV володіє резонансом, то оператори $H_{\varepsilon,\nu}$ збігаються в рівномірній резольвентній топології до оператора $S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha)$, де

$$\zeta_\alpha = \theta_\alpha^{-1} u_\alpha^2(0) \int_{\mathbb{R}} U(s) ds.$$

Крім того, при $\varepsilon \rightarrow 0$ та $\tau \rightarrow 0$ для різниці резольвент виконується оцінка

$$\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(S)\| \leq C_1(\varepsilon^{1/2} + \tau), \quad (2.36)$$

де $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. В іншому випадку $H_{\varepsilon,\nu}$ збігаються до $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$, причому

$$\|R_\lambda(H_{\varepsilon,\nu}) - R_\lambda(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)\| \leq C_2 \varepsilon^{1/2}.$$

Доведення відрізнятиметься від попередніх лише асимптотикою для послідовності функцій $(H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)^{-1}f$ на носіїв потенціалу $V_{\varepsilon,\nu}$, який тепер значно повільніше стягується в точку. У випадку резонансу покладемо

$$y_{\varepsilon,\nu}(x) = \begin{cases} y(x) + \rho_{\varepsilon,\nu}(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ y(-0)u_\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon g_\tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \beta\nu\varepsilon h_\tau\left(\frac{x}{\nu}\right) + \varepsilon^2 v_{\varepsilon,\tau}\left(\frac{x}{\nu}\right), & \text{коли } |x| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

де g_τ , h_τ та $v_{\varepsilon,\tau}$ — розв'язки таких задач Коші

$$\begin{aligned} -g'' + \alpha V(t)g &= -\beta y(-0) \tau^{-1} U(\tau^{-1}t) u_\alpha(t), \\ g(-1) &= 0, \quad g'(-1) = y'(-0); \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$h'' = U(t)g_\tau(\tau t), \quad h(-1) = 0, \quad h'(-1) = 0; \quad (2.38)$$

$$-v'' + \alpha V(t)v + \beta\varepsilon\tau^{-1} U(\tau^{-1}t)v = f(\varepsilon t), \quad v(-1) = 0, \quad v'(-1) = 0 \quad (2.39)$$

на прямій. Як завжди, u_α — напівзв'язний стан для αV , а $\rho_{\varepsilon,\nu}$ — функція, яка забезпечує неперервну диференційовність $y_{\varepsilon,\nu}$ на усій прямій. Доведемо деякі властивості функцій g_τ , h_τ та $v_{\varepsilon,\tau}$, з яких виведемо малість стрибків функції $w_{\varepsilon,\nu} = y_{\varepsilon,\nu} - \rho_{\varepsilon,\nu}$ в точках $\pm\varepsilon$. Звідси матимемо малість коректора $\rho_{\varepsilon,\nu}$. Далі отримаємо оцінку залишку $r_{\varepsilon,\nu} = (H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)y_{\varepsilon,\nu} - f$, звідки впливатиме нерівність (2.36).

Лема 2.6. *Нехай $\tau \leq \tau_0$. Тоді існує така стала C , що*

$$\|g_\tau\|_{C(\mathcal{I})} \leq C\|f\| \quad (2.40)$$

для всіх $f \in L_2(\mathbb{R})$. Крім того, $g'_\tau(1) = y'(+0) + O(\tau)\|f\|$ при $\tau \rightarrow 0$.

Доведення. Права частина рівняння (2.37) містить δ -подібну послідовність, яка збігається в просторі $W_2^{-1}(\mathcal{I})$ при $\tau \rightarrow 0$. А саме,

$$\tau^{-1}U(\tau^{-1}t) \rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} U(s) ds \right) \delta(t). \quad (2.41)$$

Нехай g_0 — розв'язок задачі Коші $-g'' + \alpha Vg = 0$, $g(-1) = 0$, $g'(-1) = 1$ для однорідного рівняння. Тоді $g_\tau = y'(-0)g_0 - \beta y(-0)\hat{g}_\tau$, де $\hat{g}_{\varepsilon,\nu}$ — розв'язок рівняння $-g'' + \alpha Vg = \tau^{-1}U(\tau^{-1}\cdot)u_\alpha$ з нульовими умовами Коші в точці $t = -1$. Із зображення (1.7) випливає, що \hat{g}_τ збігається в $W_2^1(\mathcal{I})$ до розв'язку \hat{g} задачі

$$-g'' + \alpha V(t)g = u_\alpha(0) \left(\int_{\mathbb{R}} U dt \right) \delta(x), \quad g(-1) = 0, \quad g'(-1) = 0.$$

До того ж \hat{g}_τ збігається до \hat{g} також і в просторі $C(\mathcal{I})$. Звідси для $\tau \leq \tau_0$ маємо

$$\|g_\tau\|_{C(\mathcal{I})} \leq |y'(-0)| \|g_0\|_{C(\mathcal{I})} + |\beta| |y(-0)| \|\hat{g}_\tau\|_{C(\mathcal{I})} \leq C\|f\|.$$

Помножимо рівняння (2.37) на u_α і проінтегруємо на \mathcal{I} частинами

$$\theta_\alpha g'_\tau(1) - y'(-0) = \beta y(-0) \tau^{-1} \int_{-1}^1 U(\tau^{-1}s) u_\alpha^2(s) ds.$$

Позаяк $u_\alpha(t) = u_\alpha(0) + O(t)$ при $t \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} g'_\tau(1) &= \theta_\alpha^{-1} \left(y'(-0) + \beta y(-0) u_\alpha^2(0) \int_{\mathbb{R}} U ds \right) + O(\tau)\|f\| \\ &= \theta_\alpha^{-1} y'(-0) + \beta \zeta_\alpha y(-0) + O(\tau)\|f\|, \quad \tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

згідно з (2.41). Тому асимптотика для $g'_\tau(1)$ випливає з рівності

$$y'(+0) = \theta_\alpha^{-1}y'(-0) + \beta\zeta_\alpha y(-0),$$

яку задовольняє y як елемент $\text{dom } S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha)$. \square

Лема 2.7. Для малих τ існують сталі C_1 і C_2 , незалежні від f , що

$$|h_\tau(t)| \leq C_1(1 + |t|)\|f\|, \quad |h'_\tau(t)| \leq C_2\|f\| \quad (2.42)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Доведення. Як в лемі 2.2, з (2.38) дістаємо зображення

$$h_\tau(t) = t \int_{-1}^1 U(s)g_\tau(\tau s) ds - \int_{-1}^1 sU(s)g_\tau(\tau s) ds$$

при $t \geq 1$. Крім того, $h_\tau(t) = 0$, коли $t \leq -1$. Тому при $|\tau| \leq 1$ потрібні нам оцінки випливають з (2.40). \square

Лема 2.8. Для малих ε і τ існує незалежна від f стала C така, що

$$\|v_{\varepsilon,\tau}\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq C\varepsilon^{-1/2}\|f\|. \quad (2.43)$$

Доведення. Нехай v_ε — розв'язок допоміжної задачі Коші

$$-v_\varepsilon'' + \alpha V(t)v_\varepsilon = f(\varepsilon t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad v_\varepsilon(-1) = 0, \quad v_\varepsilon'(-1) = 0,$$

який згідно з твердженням 1.2 має зображення

$$v_\varepsilon(t) = \int_{-1}^t k(t,s)f(\varepsilon s) ds.$$

Тут $k = k(t,s)$ — неперервно диференційовна функція на \mathbb{R}^2 . Тому

$$\|v_\varepsilon\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq c_1\|k\|_{C^1(\mathcal{I} \times \mathcal{I})} \int_{-1}^1 |f(\varepsilon s)| ds \leq c_2\varepsilon^{-1} \int_{-1}^\varepsilon |f(s)| ds \leq c_3\varepsilon^{-1/2}\|f\|. \quad (2.44)$$

Тоді функція $\vartheta_{\varepsilon,\nu} = v_{\varepsilon,\tau} - v_\varepsilon$ є розв'язком задачі

$$-\vartheta_\varepsilon'' + \alpha V(t)\vartheta_\varepsilon = -\beta\varepsilon\tau^{-1}U(\tau^{-1}t)v_{\varepsilon,\tau}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vartheta_\varepsilon(-1) = 0, \quad \vartheta_\varepsilon'(-1) = 0.$$

Звідси ми матимемо

$$\begin{aligned} \|\vartheta_{\varepsilon,\nu}\|_{C^1(\mathcal{I})} &\leq c_4\varepsilon\tau^{-1}\|k\|_{C^1(\mathcal{I}\times\mathcal{I})}\int_{-1}^1|U(\tau^{-1}s)||v_{\varepsilon,\tau}(s)|ds\leq \\ &\leq c_5\varepsilon\|v_{\varepsilon,\tau}\|_{C^1(\mathcal{I})}\tau^{-1}\int_{-1}^1|U(\tau^{-1}s)|ds\leq c_5\varepsilon\|v_{\varepsilon,\tau}\|_{C^1(\mathcal{I})}\int_{\mathbb{R}}|U(s)|ds\leq c_6\varepsilon\|v_{\varepsilon,\tau}\|_{C^1(\mathcal{I})}. \end{aligned}$$

Отже, $\|v_{\varepsilon,\tau} - v_\varepsilon\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq c_6\varepsilon\|v_{\varepsilon,\tau}\|_{C^1(\mathcal{I})}$ або ж $(1 - c_6\varepsilon)\|v_{\varepsilon,\tau}\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq \|v_\varepsilon\|_{C^1(\mathcal{I})}$. Тоді нерівність $\|v_{\varepsilon,\tau}\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq C\varepsilon^{-1/2}\|f\|$ випливає з (2.44) при достатньо малих ε . \square

Зі щойно доведених лем 2.6–2.8 маємо такий наслідок.

Наслідок 2.2. *Послідовність функцій $y_{\varepsilon,\nu}$ є обмеженою на $[-\varepsilon, \varepsilon]$ рівномірно відносно ε та ν , коли $\nu/\varepsilon \leq 1$, а також $\max_{|x|\leq\varepsilon}|y_{\varepsilon,\nu}(x)| \leq C\|f\|$ з деякою незалежною від f сталою C .*

Далі, для функції $w_{\varepsilon,\nu} = y_{\varepsilon,\nu} - \rho_{\varepsilon,\nu}$ маємо

$$\begin{aligned} [w_{\varepsilon,\nu}]_{-\varepsilon} &= y(-0) - y(-\varepsilon), & [w'_{\varepsilon,\nu}]_{-\varepsilon} &= y'(-0) - y'(-\varepsilon), \\ [w_{\varepsilon,\nu}]_{\varepsilon} &= y(\varepsilon) - \theta_\alpha y(-0) - \varepsilon g_\tau(1) - \beta\nu\varepsilon h_\tau(\tau^{-1}) - \varepsilon^2 v_{\varepsilon,\tau}(1), \\ [w'_{\varepsilon,\nu}]_{\varepsilon} &= y'(\varepsilon) - g'_\tau(1) - \varepsilon(\beta h'_\tau(\tau^{-1}) + v'_{\varepsilon,\tau}(1)). \end{aligned}$$

З огляду на (1.9), (2.40), (2.42), (2.43) та рівність $y(+0) = \theta_\alpha y(-0)$ робимо висновок, що перші три стрибки можна оцінити величиною $c_1\varepsilon^{1/2}\|f\|$. Що стосується останнього, то $g'_\tau(1) = y'(+0) + O(\tau)\|f\|$ при $\tau \rightarrow 0$ згідно з лемою 2.6. Тому, беручи до уваги оцінки (2.42), (2.43), матимемо

$$|[w'_{\varepsilon,\nu}]_{\varepsilon}| \leq |y'(\varepsilon) - y'(+0)| + c_2\tau\|f\| + c_3\varepsilon(|h'_\tau(\tau)| + |v'_{\varepsilon,\tau}(1)|) \leq c_2(\varepsilon^{1/2} + \tau)\|f\|.$$

Знову скористаємося твердженням 1.6 і для $k = 0, 1, 2$ одержимо

$$\max_{x \in \mathbb{R} \setminus \{-\varepsilon, \varepsilon\}} |\rho_{\varepsilon,\nu}^{(k)}(x)| \leq C(\varepsilon^{1/2} + \tau)\|f\|. \quad (2.45)$$

Тепер залишок $r_{\varepsilon,\nu} = (H_{\varepsilon,\nu} - \lambda)y_{\varepsilon,\nu} - f$ має вигляд

$$r_{\varepsilon,\nu}(x) = \begin{cases} -\rho''_{\varepsilon,\nu}(x) + (V_0(x) - \lambda)\rho_{\varepsilon,\nu}(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ \beta(\alpha\tau V(\frac{x}{\varepsilon}) + \beta\varepsilon U(\frac{x}{\nu}))h_\tau(\frac{x}{\nu}) + (V_0(x) - \lambda)y_{\varepsilon,\nu}(x), & \text{коли } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

Застосуємо лему 2.7, щоб отримати оцінки

$$\begin{aligned} \tau \left| V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) h_\tau\left(\frac{x}{\nu}\right) \right| &\leq c_1 \tau \chi_\varepsilon(x) \max_{|x| \leq \varepsilon} \left| h_\tau\left(\frac{x}{\nu}\right) \right| \\ &\leq c_2 \tau (1 + \tau^{-1}) \|f\| \chi_\varepsilon(x) \leq c_3 \|f\| \chi_\varepsilon(x), \\ \varepsilon \left| U\left(\frac{x}{\nu}\right) h_\tau\left(\frac{x}{\nu}\right) \right| &\leq c_4 \varepsilon \chi_\nu(x) \max_{|x| \leq \nu} \left| h_\tau\left(\frac{x}{\nu}\right) \right| \leq c_5 \varepsilon \|f\| \chi_\nu(x), \end{aligned}$$

В поєднанні з наслідком 2.2 та нерівністю (2.45) це нам дає

$$\|r_{\varepsilon, \nu}\| \leq c(\varepsilon^{1/2} + \tau) \|f\|.$$

З нерівності відразу випливає, що

$$\|(H_{\varepsilon, \nu} - \lambda)^{-1} f - y_{\varepsilon, \nu}\| \leq \|(H_{\varepsilon, \nu} - \lambda)^{-1}\| \|r_{\varepsilon, \nu}\| \leq c_6(\varepsilon^{1/2} + \tau) \|f\|.$$

А оскільки $y = (S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha) - \lambda)^{-1} f$ є головним членом асимптотики $y_{\varepsilon, \nu}$, то стандартними міркуваннями дістаємо оцінку

$$\|y_{\varepsilon, \nu} - (S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha) - \lambda)^{-1} f\| \leq C(\varepsilon^{1/2} + \tau) \|f\|,$$

що завершує доведення теореми у випадку резонансу.

Припустимо, що α не належить до резонансної множини $\mathcal{R}(V)$ і покладемо $y = (\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+ - \lambda)^{-1} f$. Асимптотика трохи спрощується, бо $y(0) = 0$. Нехай

$$y_{\varepsilon, \nu}(x) = \begin{cases} y(x) + \rho_{\varepsilon, \nu}(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ \varepsilon g(x/\varepsilon) + \beta\nu\varepsilon h_\tau(x/\nu) + \varepsilon^2 v_{\varepsilon, \tau}(x/\varepsilon), & \text{коли } |x| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

де g та h_τ — розв'язки задач

$$\begin{aligned} g'' - \alpha V(t)g &= 0, \quad t \in \mathcal{I}, & g'(-1) &= y'(-0), \quad g'(1) = y'(0); \\ h'' &= U(t)g(\tau t), \quad t \in \mathbb{R}, & h(-1) &= 0, \quad h'(-1) = 0 \end{aligned}$$

відповідно. Функції $v_{\varepsilon, \tau}$ та $\rho_{\varepsilon, \nu}$ залишаються без змін. Доведення в цьому випадку таке ж як в теоремі 2.1.

2.5 Задача розсіювання на $(\alpha\delta' + \beta\delta)$ -подібних потенціалах

Ми побудували точні моделі для гамільтоніанів $H_{\varepsilon, \nu}$, отримавши конструктивні залежності (2.3)–(2.6) коефіцієнтів у точкових взаємодіях (2.2) від потенціалів-профілів V, U та швидкостей локалізації ε і ν . Проаналізуємо ці моделі з погляду

теорії розсіювання і опишемо алгоритм наближеного обчислення даних розсіювання. Припустимо, що з фізичних експериментів можна отримати профілі V та U , а також відношення швидкостей локалізації δ' - та δ -подібних збурень, наприклад, як відношення ширини зон, де вони мають суттєвий вплив на процес. Граничні випадки з теорем 2.1 і 2.3 можна обирати, коли одна із зон значно більша іншої. Не стверджуємо, що таку інформацію насправді можна отримати з експерименту. Але ми пропонуємо дослідникам широкий набір точних моделей з багатьма параметрами, які вони можуть підбирати так, щоб найкраще узгодити результати обчислень з експериментальними даними. Алгоритм застосування цих точних моделей, наприклад для обчислення ймовірності проходження, є таким:

- знаходимо резонансну множину $\mathcal{R}(V)$ для потенціалу V , напівзв'язні стани і значення θ_α в точках $\mathcal{R}(V)$;
- обчислюємо значення ζ_α за однією з трьох формул (2.4)–(2.6) залежно від того, яке значення границі $\lim_{\varepsilon, \nu \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \nu$ ми обрали — нуль, скінчене чи нескінченне;
- знаходимо дані розсіювання для вільного оператора Шредингера, збуреного в початку координат точковою взаємодією (2.2), обчисливши зокрема ймовірність проходження $|T(\alpha, \beta, k)|^2$ в точках резонансної множини;
- позначаємо на дійсній осі точки α множини $\mathcal{R}(V)$, малюємо над кожною з них вертикальний відрізок висоти $|T(\alpha, \beta, k)|^2$ для вибраного значення енергії k^2 і дістаємо перше наближення, зображене на рис. 2.3, реальної ймовірності проникнення $|T_{\varepsilon, \nu}(k)|^2$ через потенціал $V_{\varepsilon, \nu}$.

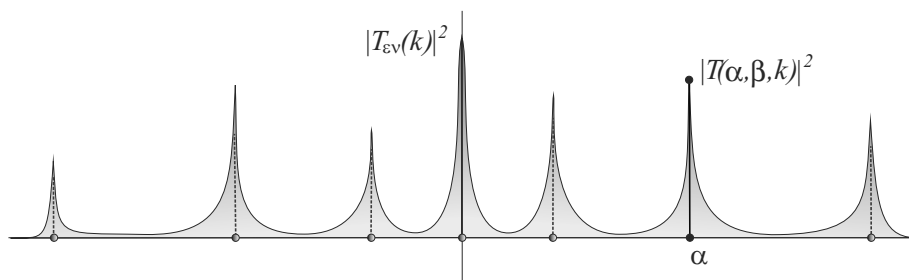


Рис. 2.3: Шпильста структура ймовірності проходження потенціалу $V_{\varepsilon, \nu}$.

Задачу розсіювання для оператора $S(\theta_\alpha, \beta\zeta_\alpha)$ з нульовим потенціалом V_0

$$-\psi'' = k^2\psi, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \psi(+0) = \theta_\alpha\psi(-0), \quad \psi'(+0) = \theta_\alpha^{-1}\psi'(-0) + \beta\zeta_\alpha\psi(-0)$$

можна розв'язати явно. Шукаючи розв'язок у вигляді $\psi(x, k) = e^{ikx} + R e^{-ikx}$, коли $x < 0$ та $\psi(x, k) = T e^{ikx}$, коли $x > 0$, приходимо до лінійної системи

$$\begin{pmatrix} T \\ ikT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_\alpha & 0 \\ \beta\zeta_\alpha & \theta_\alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + R \\ ik(1 - R) \end{pmatrix}.$$

Звідси легко знайти коефіцієнти розсіювання

$$R(\alpha, \beta, k) = \frac{ik(\theta_\alpha^{-1} - \theta_\alpha) + \beta\zeta_\alpha}{ik(\theta_\alpha^{-1} + \theta_\alpha) - \beta\zeta_\alpha}, \quad T(\alpha, \beta, k) = \frac{2ik}{ik(\theta_\alpha^{-1} + \theta_\alpha) - \beta\zeta_\alpha} \quad (2.46)$$

для $\alpha \in \mathcal{R}(V)$. В нерезонансному випадку маємо $R(k) = -1$ і $T(k) = 0$ (див. задачу (1.32)). Можна довести, що це справді граничні значення при $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$ коефіцієнтів розсіювання для потенціалів $V_{\varepsilon, \nu}$ у всіх трьох випадках, досліджених вище. Ми доведемо це в тому разі, коли $\varepsilon = \nu$, тобто для однопараметричної сім'ї потенціалів $V_{\varepsilon, \varepsilon} = \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot) + \beta\varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}\cdot)$.

Шукатимемо розв'язок рівняння $-\psi'' + V_{\varepsilon, \varepsilon}\psi = k^2\psi$ вигляду

$$\psi_\varepsilon(x, k) = \begin{cases} e^{ikx} + R_\varepsilon e^{-ikx}, & \text{коли } x < -\varepsilon, \\ A_\varepsilon u_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + B_\varepsilon v_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x), & \text{коли } |x| < \varepsilon, \\ T_\varepsilon e^{ikx}, & \text{коли } x > \varepsilon. \end{cases}$$

Тут u_ε та v_ε — розв'язки рівняння

$$-w'' + \alpha V(t)w + \beta\varepsilon U(t)w = \varepsilon^2 k^2 w, \quad t \in (-1, 1), \quad (2.47)$$

які задовольняють початковим умовам

$$u_\varepsilon(-1) = 1, \quad u'_\varepsilon(-1) = 0 \quad \text{та} \quad v_\varepsilon(-1) = 0, \quad v'_\varepsilon(-1) = 1. \quad (2.48)$$

З умов неперервної диференційовності ψ_ε в точках $x = \pm\varepsilon$ дістаємо лінійну систему для коефіцієнтів $R_\varepsilon, A_\varepsilon, B_\varepsilon$ і T_ε

$$\begin{pmatrix} -e^{i\varepsilon k} & 1 & 0 & 0 \\ i\varepsilon k e^{i\varepsilon k} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u_\varepsilon(1) & v_\varepsilon(1) & -e^{i\varepsilon k} \\ 0 & u'_\varepsilon(1) & v'_\varepsilon(1) & -i\varepsilon k e^{i\varepsilon k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\varepsilon \\ A_\varepsilon \\ B_\varepsilon \\ T_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varepsilon k} \\ i\varepsilon k e^{-i\varepsilon k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Один з мінорів матриці є визначником Вронського $W\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}$ в точці $x = 1$ і він дорівнює одиниці згідно з (2.48). Врахувавши це, отримаємо

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(k) &= -e^{-2i\varepsilon k} \frac{u'_\varepsilon(1) - i\varepsilon k(u_\varepsilon(1) - v'_\varepsilon(1)) + \varepsilon^2 k^2 v_\varepsilon(1)}{u'_\varepsilon(1) - i\varepsilon k(u_\varepsilon(1) + v'_\varepsilon(1)) - \varepsilon^2 k^2 v_\varepsilon(1)}, \\ T_\varepsilon(k) &= -e^{-2i\varepsilon k} \frac{2i\varepsilon k}{u'_\varepsilon(1) - i\varepsilon k(u_\varepsilon(1) + v'_\varepsilon(1)) - \varepsilon^2 k^2 v_\varepsilon(1)}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Теорема 2.4. *Нехай потенціал αV не має резонансу нульової енергії, тоді для усіх $k > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ маємо $R_\varepsilon(k) \rightarrow -1$ і $T_\varepsilon(k) \rightarrow 0$. Якщо $\alpha \in \mathcal{R}(V)$, то*

$$R_\varepsilon(k) \rightarrow \frac{ik(\theta_\alpha^{-1} - \theta_\alpha) + \beta\zeta_\alpha}{ik(\theta_\alpha^{-1} + \theta_\alpha) - \beta\zeta_\alpha}, \quad T_\varepsilon(k) \rightarrow \frac{2ik}{ik(\theta_\alpha^{-1} + \theta_\alpha) - \beta\zeta_\alpha}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, де

$$\zeta_\alpha = \theta_\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} U(s) u_\alpha^2(s) ds. \quad (2.50)$$

Доведення. Очевидно, що u_ε і v_ε збігаються в просторі $C^1(-1, 1)$ до розв'язків u і v рівняння $-w'' + \alpha V w = 0$ з початковими умовами $u(-1) = 1$, $u'(-1) = 0$ та $v(-1) = 0$, $v'(-1) = 1$ відповідно. Якщо $\alpha \notin \mathcal{R}(V)$, то α не є власним значенням задачі (2.8) і тому число $u'(1)$ є відмінним від нуля. Тоді з (2.49) відразу випливає, що $R_\varepsilon(k) = -1 + O(\varepsilon)$ та $T_\varepsilon(k) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Коли ж α є резонансною сталою взаємодії, то u — власна функція задачі (2.8). Отже, $u'(1) = 0$ та $u(1) = \theta_\alpha$. Враховуючи неперервно диференційовну залежність розв'язку u_ε від ε , дістаємо $u_\varepsilon(1) = \theta_\alpha + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тепер підставимо по чергово u_ε і v_ε до рівняння (2.47). Одержані тотожності помножимо на u і проінтегруємо частинами з врахуванням умов (2.48):

$$\begin{aligned} \theta_\alpha u'_\varepsilon(1) &= \varepsilon\beta \int_{-1}^1 U u_\varepsilon u d\xi + \varepsilon^2 k^2 \int_{-1}^1 u_\varepsilon u d\xi, \\ \theta_\alpha v'_\varepsilon(1) &= 1 + \varepsilon\beta \int_{-1}^1 U v_\varepsilon u d\xi + \varepsilon^2 k^2 \int_{-1}^1 v_\varepsilon u d\xi. \end{aligned}$$

Звідси матимемо $u'_\varepsilon(1) = \varepsilon\beta\zeta_\alpha + O(\varepsilon^2)$, $v'_\varepsilon(1) = \theta_\alpha^{-1} + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Підставимо отримані асимптотики до рівностей (2.49) і дістанемо

$$R_\varepsilon(k) = \frac{ik(\theta_\alpha^{-1} - \theta_\alpha) + \beta\zeta_\alpha}{ik(\theta_\alpha^{-1} + \theta_\alpha) - \beta\zeta_\alpha} + O(\varepsilon), \quad T_\varepsilon(k) = \frac{2ik}{ik(\theta_\alpha^{-1} + \theta_\alpha) - \beta\zeta_\alpha} + O(\varepsilon) \quad (2.51)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, що завершує доведення. □

Отже, граничну ймовірність проходження бар'єру $V_{\varepsilon,\nu}$ обчислюємо так

$$|T(\alpha, \beta, k)|^2 = \begin{cases} \frac{4k^2}{k^2(\theta_\alpha^{-1} + \theta_\alpha)^2 + \beta^2\zeta_\alpha^2}, & \text{коли } \alpha \in \mathcal{R}(V), \\ 0, & \text{коли } \alpha \notin \mathcal{R}(V). \end{cases} \quad (2.52)$$

Проаналізуємо цю формулу в кількох часткових випадках. Припустимо спершу, що α дорівнює нулю, тобто потенціал $V_{\varepsilon,\varepsilon}$ містить лише δ -подібний доданок $\beta\varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}\cdot)$. Для будь-якого потенціалу V нуль завжди є точкою його резонансної множини з напівзв'язним станом $u_0 = 1$, тому $\theta_0 = 1$ та $\zeta_0 = \beta \int_{\mathbb{R}} U ds$ з огляду на (2.50). Якщо додатково припустимо, що $\int_{\mathbb{R}} U ds = 1$, тобто $\varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \delta(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, то (2.52) обертається у загальновідому формулу $|T(0, \beta, k)|^2 = \frac{4k^2}{4k^2 + \beta^2}$, яка описує ймовірність проходження через $\beta\delta(x)$ -потенціал.

Якщо ж β дорівнює нулю, то (2.52) набуває вигляду

$$|T(\alpha, 0, k)|^2 = \begin{cases} \frac{4}{(\theta_\alpha^{-1} + \theta_\alpha)^2}, & \text{коли } \alpha \in \mathcal{R}(V), \\ 0, & \text{коли } \alpha \notin \mathcal{R}(V), \end{cases} \quad (2.53)$$

що узгоджується з раніше отриманими формулами у підрозділі 1.2.3. В цьому разі зникає залежність ймовірності від енергії k^2 частинок.

Нехай V — парна функція, а U — непарна. Тоді усім потенціалам вигляду

$$V_{\varepsilon,\varepsilon}(x) = \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) + \beta\varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}x),$$

у випадку резонансу відповідає та сама точкова взаємодія

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi'(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ \phi'(-0) \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

а гранична ймовірність проходження має вигляд

$$|T(\alpha, \beta, k)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{коли } \alpha \in \mathcal{R}(V) \\ 0 & \text{коли } \alpha \notin \mathcal{R}(V). \end{cases}$$

Отже, потенціали $V_{\varepsilon,\varepsilon}$ асимптотично прозорі (невідбивні) в разі резонансу або асимптотично непроникні для частинок в разі його відсутності. Справді, для парних потенціалів αV всі напівзв'язні стани u_α є або парними, або непарними, тому $|u_\alpha(1)| = |u_\alpha(-1)|$. Отже, $|\theta(\alpha)| = 1$. До того ж квадрат напівзв'язного стану є завжди парним, а потенціал U — непарний. Тому $\zeta_\alpha = \theta_\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} U u_\alpha^2 ds = 0$.

Розділ 3

ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З ЛОКАЛЬНИМИ ЗБУРЕННЯМИ РАНГУ ДВА

В цьому розділі вивчатимемо поведінку сімей інтегро-диференціальних операторів, які є збуреннями операторів Шредингера сингулярними інтегральними операторами рангу два. Ці оператори в часткових випадках можна трактувати як регуляризацію псевдогамільтоніанів

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha(\langle \delta'(x), \cdot \rangle \delta(x) + \langle \delta(x), \cdot \rangle \delta'(x)) + \beta \delta(x). \quad (3.1)$$

Такі формальні вирази, як і вирази вигляду $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \delta'(x) + \beta \delta(x)$, не мають жодного математичного сенсу, проте їх часто застосовують у фізичних моделях. Річ у тім, що кожен псевдопотенціал, який є узагальненою функцією з одноточковим носієм, можна розуміти як збурення скінченного рангу. Позаяк $\delta(x)y(x) = y(0)\delta(x)$, то, наприклад, рівняння $-y'' + \delta(x)y = k^2y$ з δ -потенціалом можна записати в еквівалентній формі $-y'' + \langle \delta(x), y \rangle \delta(x) = k^2y$, у лівій частині якого тепер з'явилося збурення другої похідної оператором рангу один. Схожа ситуація з δ' -потенціалом, бо для кожної неперервно диференційовної в нулі функції ϕ коректно визначений добуток $\delta'(x)\phi(x) = \phi(0)\delta'(x) - \phi'(0)\delta(x)$. Тому рівняння $-y'' + \delta'(x)y = k^2y$ можна формально записати і так $-y'' + \langle \delta(x), y \rangle \delta'(x) + \langle \delta'(x), y \rangle \delta(x) = k^2y$, де потенціал $\delta'(x)$ вже замінений збуренням рангу два. Ми покажемо, що регуляризації псевдогамільтоніанів (3.1) мають цілком іншу асимптотичну поведінку, ніж регуляризації $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \delta'(x) + \beta \delta(x)$. Вони дають інший і значно ширший клас точних моделей з точковими взаємодіями як зв'язаного, так і розділеного типів. Результати розділу опубліковані в працях [17, 18].

В науковій літературі активно досліджують два різні типи точкових взаємодій, пов'язаних з першою похідною функції Дірака — δ' -потенціал та δ' -взаємодію. Проблему δ' -потенціалу ми вивчили у попередніх розділах. Загальноприйнято [12, Ch.1.4], що δ' -взаємодії відповідають умови спряження

$$\begin{pmatrix} y(+0) \\ y'(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(-0) \\ y'(-0) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Записавши їх у формі $y'(+0) = y'(-0)$, $y(+0) = y(-0) + \beta y'(-0)$, легко помітити аналогію з умовами $y(+0) = y(-0)$, $y'(+0) = y'(-0) + \beta y'(-0)$, що відповідають δ -потенціалу. Найімовірніше, δ' -взаємодія саме так і з'явилася в літературі. В останні сорок років вона разом з δ -взаємодією є найбільш популярними точковими взаємодіями у дослідників одновимірних точних моделей. Притримуючись цієї аналогії, поряд зі збуренням рангу один

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \beta \langle \delta(x), \cdot \rangle \delta(x) \quad (3.3)$$

почали шукати математичний сенс і для формального виразу

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \langle \delta'(x), \cdot \rangle \delta'(x). \quad (3.4)$$

Формальні оператори (3.1)-(3.4) є збуренням скінченного рангу вільного оператора Шрединґера в просторах Соболева W_2^p з від'ємним показником p . Так, наприклад, узагальнена функція $\delta'(x)$ належить до простору W_2^{-2} і не є елементом жодного простору W_2^p з $p > -2$. Поява таких псевдогамільтоніанів у фізичних моделях дала поштовх до розвитку теорії збурень скінченного рангу, як абстрактної теорії в інтерполяційних просторах \mathcal{H}_{-n} , так і в просторах Соболева W_2^{-n} в контексті операторів Шрединґера. Ці дослідження мають довгу історію і чималий список публікацій. На нашу думку, найвагоміші праці тут належать С. Альбергеріо, В. Кошманенку, П. Курасову, Л. Нижнику та С. Кужелю [66–75, 250]. Спеціальні регуляризації формального оператора (3.4) гладкими збуреннями будували в [14, 16, 77, 78], а негладкі апроксимації трьома δ -функціями – в [79, 80]. Феномен δ' -взаємодії та питання її регуляризації на квантових графах досліджував П. Екснер зі співавторами [45, 81].

3.1 Формулювання задачі та основні результати

Розглянемо оператор Шрединґера $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$ з дійсним локально обмеженим потенціалом V_0 , який є самоспряженим в $L_2(\mathbb{R})$. Нехай f і g — комплекснозначні лінійно незалежні функції в $L_2(\mathbb{R})$, що мають компактний носій. Позначимо через K_ε сім'ю операторів рангу два

$$\begin{aligned} (K_\varepsilon \phi)(x) &= \langle g(\varepsilon^{-1} \cdot), \phi \rangle f(\varepsilon^{-1}x) + \langle f(\varepsilon^{-1} \cdot), \phi \rangle g(\varepsilon^{-1}x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\bar{g}(\varepsilon^{-1}t)f(\varepsilon^{-1}x) + \bar{f}(\varepsilon^{-1}t)g(\varepsilon^{-1}x)) \phi(t) dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

в просторі $L_2(\mathbb{R})$. З цього місця дужки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означатимуть скалярний добуток в $L_2(\mathbb{R})$, $\| \cdot \|$ буде відповідною нормою, а риска над символом — комплексне спряження. Розглянемо оператори

$$H_\varepsilon = H + \varepsilon^{-3}K_\varepsilon + \varepsilon^{-1}q(\varepsilon^{-1}x), \quad (3.6)$$

де q — дійснозначна обмежена функція з компактним носієм. Зрозуміло, що $\text{dom } H_\varepsilon = \text{dom } H$. Звісно, δ -подібну послідовність $\varepsilon^{-1}q(\varepsilon^{-1}x)$ можна теж замінити одноранговим збуренням $\varepsilon^{-1}\langle q(\varepsilon^{-1} \cdot), \cdot \rangle q(\varepsilon^{-1}x)$, проте різні форми цього регулярного доданка у збуренні H_ε не мають принципового значення. Асимптотичний аналіз операторів H_ε дає кілька випадків різної граничної поведінки в рівномірній резольвентній топології. Ця поведінка в основному залежить від функцій f та g , а також їхньої взаємодії з потенціалом q .

Введемо позначення для моментів функцій f та g :

$$f_0 = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt, \quad g_0 = \int_{\mathbb{R}} g(t) dt, \quad f_1 = \int_{\mathbb{R}} t f(t) dt, \quad g_1 = \int_{\mathbb{R}} t g(t) dt.$$

Для функції h з компактним носієм коректно визначені перша та друга первісні

$$h^{(-1)}(x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt, \quad h^{(-2)}(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)h(t) dt.$$

Коли h є функцією з нульовим середнім, то первісна $h^{(-1)}$ також має компактний носій. До того ж друга первісна $h^{(-2)}(x)$ тоді є сталою при великих x .

Введемо також позначення для деяких громіздких виразів з функцій f і g ,

походження яких стане зрозуміле нижче:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \|g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}\|^2 - 2 \operatorname{Re} (f_0 \bar{g}_0), \\
\pi &= \|f^{(-1)}\| \cdot \|g^{(-1)}\| - |\langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle + 1|, \\
\sigma &= |g_0|^2 (\bar{f}_0 f^{(-2)} - \langle f, f^{(-2)} \rangle) - |f_0|^2 (\bar{g}_0 g^{(-2)} - \langle g, g^{(-2)} \rangle), \\
\omega &= e^{i \arg \vartheta} \|g^{(-1)}\| f^{(-2)} - \|f^{(-1)}\| g^{(-2)},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

де $\vartheta = \arg(\langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle + 1)$. Число λ є скінченним, бо функція $g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}$ має компактний носій. Справді, вона є первісною для функції $g_0 f - f_0 g$ з компактним носієм, яка має нульове середнє. Величина π та функція ω коректно визначені лише для f і g з нульовим середнім, тобто коли $f_0 = 0$ та $g_0 = 0$. Саме в таких випадках ми їх будемо використовувати. Тоді ω є сталою поза деяким інтервалом, що містить носії f і g . Зрозуміло, що $\lim_{x \rightarrow -\infty} \omega(x) = 0$. Нехай

$$\varkappa = \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x),$$

а також

$$a_0 = \int_{\mathbb{R}} q(t) dt, \quad a_1 = \int_{\mathbb{R}} q(t) \omega(t) dt, \quad a_2 = \int_{\mathbb{R}} q(t) |\omega(t)|^2 dt. \tag{3.8}$$

Функція σ визначена для усіх f та g . Хоча $f^{(-2)}$ і $g^{(-2)}$ не належать до $L_2(\mathbb{R})$, ми використовуємо скалярні добутки $\langle f, f^{(-2)} \rangle$ і $\langle g, g^{(-2)} \rangle$ для позначення збіжних інтегралів

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) f^{(-2)}(t) dt, \quad \int_{\mathbb{R}} g(t) g^{(-2)}(t) dt.$$

Введемо позначення для границь

$$\sigma_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma(x), \quad \sigma_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x).$$

Нарешті, нехай

$$\sigma_* = \int_{\mathbb{R}} q(t) |\sigma(t)|^2 dt. \tag{3.9}$$

Позначимо через \mathcal{H} оператор Шрединґера, що діє за правилом $\mathcal{H}v = -v'' + V_0 v$ на функції $v \in \mathcal{V}_0$, які підпорядковані умовам спряження

$$\begin{pmatrix} v(+0) \\ v'(+0) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(-0) \\ v'(-0) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Умови самоспряженості такого оператора сформульовані в лемі 1.6.

Залежно від значень величин $f_0, g_0, f_1, g_1, \lambda, \pi, \varkappa, \sigma_-, \sigma_+, a_0, a_1$ та a_2 сім'я операторів H_ε має 11 різних випадків граничної поведінки при $\varepsilon \rightarrow 0$. Усіх їх можна розділити на дві групи A і B за типом граничних точкових взаємодій (розділених чи зв'язаних), а в межах груп зібрати взаємодії, які маю подібну структуру. Так ми отримуємо шість випадків $A1, A2, A3$ та $B1, B2, B3$. Уся ця складна картина біфуркації випадків зображена як граф на рис. 3.1.

Перша теорема стосується такої поведінки операторів H_ε , коли в границі виникають зв'язані точкові взаємодії. Для спрощення записів далі часто використовуватимемо скорочення $v_\pm = v(\pm 0), v'_\pm = v'(\pm 0)$.

Теорема 3.1. *Нехай f і g — комплекснозначні функції з компактними носіями, які належать до простору $L_2(\mathbb{R})$ і лінійно незалежні. Дійснозначна функція q є обмеженою і має компактний носій.*

A1. Якщо $f_0 = 0, g_0 = 0, \pi = 0$ та $a_2 \neq \bar{\varkappa}a_1$, то оператори H_ε збігаються в рівномірній резольвентній топології при $\varepsilon \rightarrow 0$ до оператора \mathcal{H} , породженого умовами спряження

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = e^{i \arg(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)} \begin{pmatrix} \frac{|\varkappa|^2 a_0 - 2\operatorname{Re}(\bar{\varkappa} a_1) + a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|^2} & \frac{|\varkappa|^2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \\ \frac{a_0 a_2 - |a_1|^2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} & \frac{a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

A2. Нехай $\lambda = 0, f_0 g_0 \neq 0$ та $\sigma_- \sigma_+ \neq 0$. Тоді $H_\varepsilon \rightarrow \mathcal{H}$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де функції $v \in \operatorname{dom} \mathcal{H}$ задовольняють умови

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = e^{-i \arg \sigma_-} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_+}{|\sigma_-|} & 0 \\ \frac{\sigma_*}{\sigma_+ |\sigma_-|} & \frac{|\sigma_-|}{\sigma_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

В цьому разі число σ_+ є дійсним, а тому оператор \mathcal{H} — самоспряжений.

A3. Нехай $f_0 = 0, g_0 = 0$ і виконується одна із умов: або $\pi \neq 0$, або $\pi = 0, \varkappa = 0, a_1 = 0$ і $a_2 = 0$. Тоді резольвенти H_ε збігаються за нормою при $\varepsilon \rightarrow 0$ до резольвенти оператора \mathcal{H} , визначеного умовами спряження

$$\begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_- \\ v'_- \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Незважаючи на те, що δ -подібна послідовність $\varepsilon^{-1}q(\varepsilon^{-1} \cdot)$ є підпорядкованою при $\varepsilon \rightarrow 0$ сингулярному збуренню $\varepsilon^{-3}K_\varepsilon$, вона має суттєвий вплив на граничну поведінку H_ε . Зауважимо, що найцікавіший випадок $A1$ можливий лише для ненульового потенціала q з огляду на умову $a_2 \neq \bar{\varkappa}a_1$. Граничний оператор \mathcal{H} для випадку $A1$ є самоспряженим, бо усі коефіцієнти матриці в (3.11) є дійсними, а її визначник дорівнює одиниці. Справді,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{|\varkappa|^2 a_0 - 2\operatorname{Re}(\bar{\varkappa}a_1) + a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa}a_1|} & \frac{|\varkappa|^2}{|a_2 - \bar{\varkappa}a_1|} \\ \frac{a_0 a_2 - |a_1|^2}{|a_2 - \bar{\varkappa}a_1|} & \frac{a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa}a_1|} \end{pmatrix} &= \\ &= |a_2 - \bar{\varkappa}a_1|^{-2} (a_0 a_2 |\varkappa|^2 - 2a_2 \operatorname{Re}(\bar{\varkappa}a_1) + a_2^2 - a_0 a_2 |\varkappa|^2 + |\varkappa|^2 |a_1|^2) \\ &= |a_2 - \bar{\varkappa}a_1|^{-2} (a_2^2 - 2a_2 \operatorname{Re}(\bar{\varkappa}a_1) + |\varkappa|^2 |a_1|^2) = |a_2 - \bar{\varkappa}a_1|^{-2} |a_2 - \bar{\varkappa}a_1|^2 = 1. \end{aligned}$$

В наступній теоремі зібрано випадки, коли в граничному операторі виникають розділені умови в початку координат, тобто він є прямою сумою двох операторів. Нехай \mathcal{D}^\pm — оператори з умовами Діріхле, визначені в (1.12) на стор. 43. Для дійсного μ введемо також оператори

$$\mathcal{R}_\mu^\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0, \quad \operatorname{dom} \mathcal{R}_\mu^\pm = \{v \in \mathcal{V}_\pm : v'(0) = \mu v(0)\}.$$

Теорема 3.2. *Нехай f і g — комплекснозначні функції з компактними носіями, які належать до простору $L_2(\mathbb{R})$ і лінійно незалежні. Дійснозначна функція q є обмеженою і має компактний носій.*

B1. Якщо $f_0 = 0$, $g_0 = 0$, $\pi = 0$, $\varkappa \neq 0$ і $a_2 = \bar{\varkappa}a_1$, то

$$H_\varepsilon \rightarrow \mathcal{R}_{\mu_-}^- \oplus \mathcal{R}_{\mu_+}^+, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де

$$\mu_- = |\varkappa|^{-2} a_2 - a_0, \quad \mu_+ = |\varkappa|^{-2} a_2.$$

B2. Якщо $\lambda = 0$, $f_0 g_0 \neq 0$, $f_1 g_0 \neq f_1 g_0$ і $\sigma_- \sigma_+ = 0$, то

$$H_\varepsilon \rightarrow \begin{cases} \mathcal{D}^- \oplus \mathcal{R}_{\nu_+}^+, & \text{коли } \sigma_- = 0, \\ \mathcal{R}_{\nu_-}^- \oplus \mathcal{D}^+, & \text{коли } \sigma_+ = 0 \end{cases}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де

$$\nu_- = -\sigma_* |\sigma_-|^{-2}, \quad \nu_+ = \sigma_* |\sigma_+|^{-2}.$$

В цьому випадку числа σ_- і σ_+ не є нулями одночасно.

В3. Оператори H_ε збігаються до прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ в рівномірній резольвентній топології, якщо виконується один з наборів умов: або $\lambda \neq 0$, або $\lambda = 0$, $f_0 g_0 \neq 0$, $f_0 g_1 = f_1 g_0$, $\sigma_- = 0$ і $\sigma_+ = 0$, або ж $f_0 = 0$, $g_0 = 0$, $\pi = 0$, $\varkappa = 0$, $a_2 = 0$ і $a_1 \neq 0$.

Теореми 3.1 і 3.2 описують всі випадки граничної поведінки операторів H_ε для довільних наборів f , g та q , про що свідчить граф на рис. 3.1. З кожної вершини графа виходять два ребра: одне відповідає виконанню якоїсь умови, а інше — її запереченню. Всі шляхи графа, які розпочинаються у вершині з написом H_ε , закінчуються у вершинах, що відповідають одному із шести випадків. Шлях, що закінчується у вершині X, відповідає випадкові, коли $\lambda = 0$, $f_0 g_0 = 0$ і одне чисел f_0 , $g_0 = 0$ є відмінним від нуля. Така комбінація умов приводить до лінійної залежності f та g , що суперечить нашим припущенням. Наприклад, якщо $f_0 = 0$ і $g_0 \neq 0$, то з умови $\lambda = 0$ маємо $\|g_0 f^{(-1)}\|^2 = 0$, тобто $f = 0$.

Теорема 3.3. Нехай $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ і $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — інтегровні функції з компактними носіями. Якщо f і g є лінійно незалежними і визначають послідовності функцій $f^\varepsilon = f(\varepsilon^{-1} \cdot)$, $g^\varepsilon = g(\varepsilon^{-1} \cdot)$ і $q^\varepsilon = q(\varepsilon^{-1} \cdot)$, то сім'я операторів $H_\varepsilon = H + \varepsilon^{-3} \langle g^\varepsilon, \cdot \rangle f^\varepsilon + \varepsilon^{-3} \langle f^\varepsilon, \cdot \rangle g^\varepsilon + \varepsilon^{-1} q^\varepsilon$ збігається в рівномірній резольвентній топології при $\varepsilon \rightarrow 0$ і для всіх $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$\|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1} - (H_0 - \zeta)^{-1}\| \leq C \varepsilon^{1/2}, \quad (3.14)$$

де граничний оператор $H_0 = H_0(f, g, q)$ описаний в теоремах 3.1 і 3.2, а стала C не залежить від ε .

Всі випадки A1–A3 та B1–B3 можна реалізувати, вибравши правильно функцій f , g і q . Проаналізуємо, наприклад, випадок A1. Нехай F і G — дві функції з компактними носіями з простору Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ такі, що $\|F\| = \|G\| = 1$ та $\langle F, G \rangle = 0$. Тоді $f = F'$ і $g = G'$ мають нульові середні, а також $\pi = 0$. Далі,

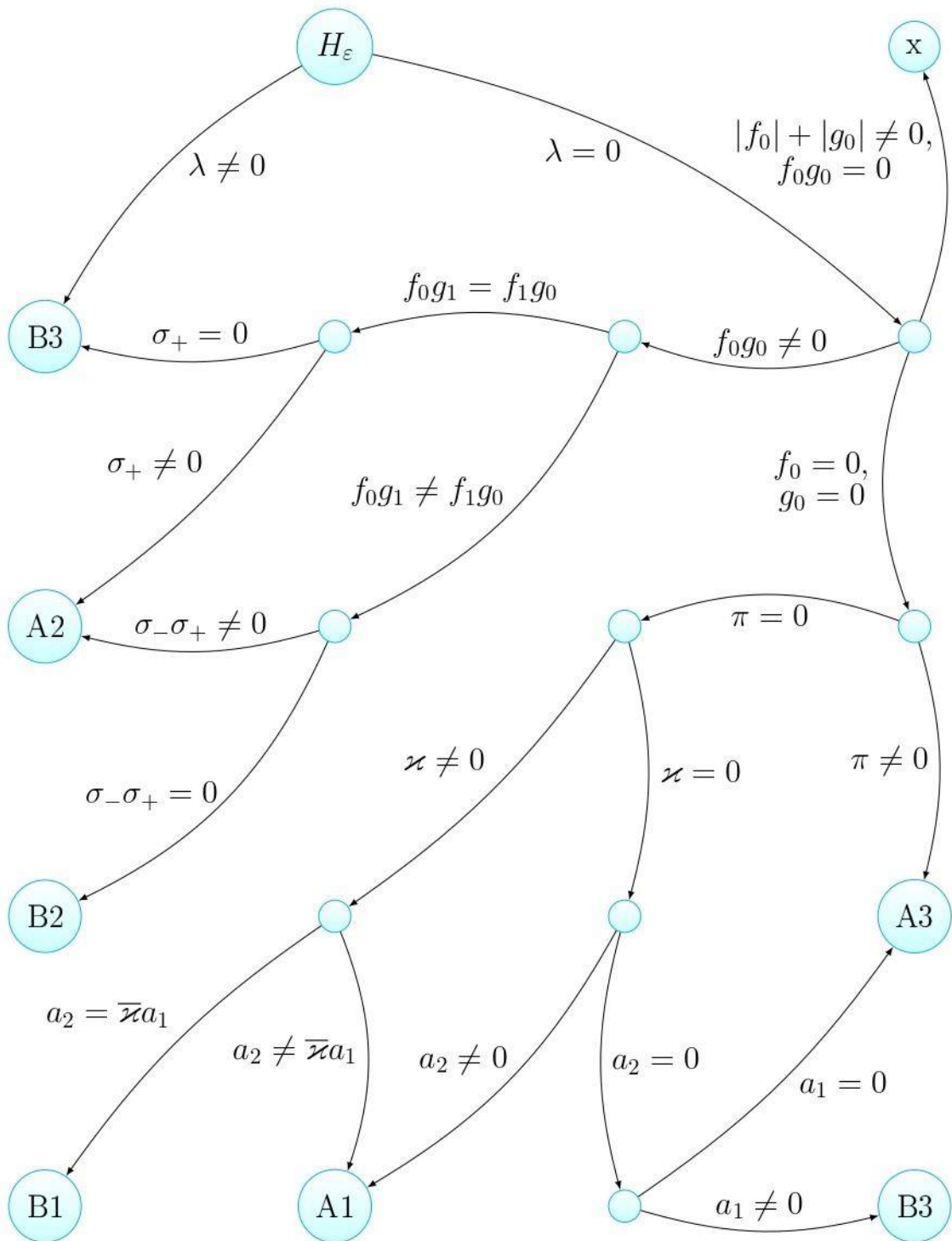


Рис. 3.1: Граф, який описує усі випадки граничної поведінки операторів H_ϵ .

$\omega = F^{(-1)} - G^{(-1)}$ і ми можемо обчислити $\varkappa = \omega(+\infty)$. З лінійної незалежності F і G випливає лінійна незалежність f і g , а також лінійна незалежність функцій 1 , ω та $|\omega|^2$ на кожному інтервалі $[-r, r]$. Тоді очевидно для довільної трійки чисел a_0 , a_1 і a_2 , де a_1 — комплексне, а решта дійсні, існує такий дійснозначний потенціал q з компактним носієм, для якого виконуються рівності (3.8). Зокрема, потенціал можна вибрати так, щоб $a_2 \neq \bar{\varkappa}a_1$.

Випадок *A1* містить приклади операторів Шредингера з екзотичними точковими взаємодіями, зокрема, з матрицями вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha^{-1} & \beta \end{pmatrix}.$$

У випадку комплекснозначних функцій f і g надзвичайно цікавою і неочікуваною є поява в точкових взаємодіях так званого фазового множника $e^{i\varphi}$. Дотепер вважалося, що цей множник може виникати лише для операторів Шредингера з нетривіальним магнітним полем. Це питання ми детальніше розглянемо в наступному розділі. Також теорема 3.2 описує регуляризації для багатьох типів розділених крайових умов. Так у випадках *B1* та *B2* в границі виникають різні комбінації умов Діріхле, Неймана та Робена для операторів на півосях.

Чи будь-яку дійсну матрицю (c_{kl}) порядку 2 з одиничним визначником можна реалізувати як матрицю в умовах (3.11) для деяких f , g та q ? Відповідь на це питання є негативною. Контрприкладом є матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

з відмінним від одиниці елементом α . Справді, поклавши $\varkappa = 0$ в (3.11), ми відразу отримаємо матрицю з одиничною діагоналлю. Проте матриці вигляду (3.15) з'являються у випадку *A2*, а також виникали у розділі 1.3.3 при аналізі операторів Шредингера з $(a\delta' + b\delta)$ -подібними потенціалами.

Нехай функцій f і g вибрані так, що $f_0 = \alpha$, $g_0 = 0$ та $g_1 = -1$. Тоді

$$\varepsilon^{-1}f(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \alpha\delta(x), \quad \varepsilon^{-2}g(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \delta'(x)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в просторі узагальнених функцій. Крім того, $\varepsilon^{-1}q(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow a_0\delta(x)$. Тоді H_ε можна трактувати як регуляризацію формального оператора (3.1) з $\beta = a_0$.

Якщо число α відмінне від нуля, бо в іншому разі задача стає тривіальною, то маємо $\lambda = \alpha^2 \|g^{(-1)}\|^2 \neq 0$. Ми потрапляємо в умови випадку ВЗ. Отже, оператори H_ε збігаються до прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$.

3.2 Напівзв'язні стани інтегро-диференціальних операторів

Ми бачили у попередніх розділах, що на структуру точкових взаємодій, які породжують граничні оператори, значний вплив мають резонанси нульової енергії деяких операторів, пов'язаних із локальними збуреннями. То, як дані Коші (v_-, v'_-) зліва від нуля трансформуватимуться матрицею точкової взаємодії у дані (v_+, v'_+) справа від нуля, залежить насамперед від поведінки на нескінченностях напівзв'язних станів, що виникають при резонансах. Дотепер усі простори напівзв'язних станів були одновимірними. Для інтегро-диференціальних операторів, які виникають при локальних збуреннях скінченного рангу, ці простори можуть мати більшу вимірність. Розглянемо самоспряжений оператор

$$T = -\frac{d^2}{dx^2} + \langle g, \cdot \rangle f(x) + \langle f, \cdot \rangle g(x), \quad \text{dom } T = W_2^2(\mathbb{R})$$

в просторі $L_2(\mathbb{R})$. Кажемо, що оператор T має резонанс нульової енергії та володіє напівзв'язним станом, якщо існує нетривіальний розв'язок рівняння

$$-u'' + \langle g, u \rangle f + \langle f, u \rangle g = 0,$$

який обмежений на всій дійсній осі.

Лема 3.1. *Оператор T має резонанс нульової енергії тоді і лише тоді, коли*

$$\|g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}\|^2 = 2 \operatorname{Re}(f_0 \bar{g}_0), \quad (3.16)$$

тобто коли $\lambda = 0$ в позначеннях (3.7).

(i) *Якщо $\lambda = 0$ і $f_0 g_0 \neq 0$, то T має напівзв'язний стан*

$$\sigma = |g_0|^2 \left(\bar{f}_0 f^{(-2)} - \langle f, f^{(-2)} \rangle \right) - |f_0|^2 \left(\bar{g}_0 g^{(-2)} - \langle g, g^{(-2)} \rangle \right). \quad (3.17)$$

(ii) *Якщо $f_0 = 0$, $g_0 = 0$ і $\pi \neq 0$, то лише стала функція є напівзв'язним станом.*

(iii) Якщо $f_0 = 0$, $g_0 = 0$ і $\pi = 0$, то існують два лінійно незалежні напівзв'язні стани оператор T , а саме, стала функція та функція

$$\omega = e^{i \arg \vartheta} \|g^{(-1)}\| f^{(-2)} - \|f^{(-1)}\| g^{(-2)},$$

$$\text{де } \vartheta = \arg(\langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle + 1).$$

Доведення. Рівняння $Tu = 0$ має загальний розв'язок

$$u = c_1 f^{(-2)} + c_2 g^{(-2)} + c_3 + c_4 x,$$

де чотири сталі підпорядковані двом умовам

$$\begin{aligned} \langle f, f^{(-2)} \rangle c_1 + (\langle f, g^{(-2)} \rangle - 1) c_2 + \bar{f}_0 c_3 + \bar{f}_1 c_4 &= 0, \\ (\langle g, f^{(-2)} \rangle - 1) c_1 + \langle g, g^{(-2)} \rangle c_2 + \bar{g}_0 c_3 + \bar{g}_1 c_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ці умови дістаємо, підставивши u до рівняння і скориставшись лінійною незалежністю f і g . Шукатимемо обмежені розв'язки u . В околі від'ємної нескінченності маємо $u(x) = c_3 + c_4 x$, бо там $f^{(-2)}$ і $g^{(-2)}$ обертаються в нуль. Щоб розв'язок був обмеженим, покладемо $c_4 = 0$. Далі, для великих додатних x

$$f^{(-2)}(x) = f_0 x - f_1, \quad g^{(-2)}(x) = g_0 x - g_1. \quad (3.19)$$

Справді, якщо x лежить справа від носія f , то

$$f^{(-2)}(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)f(t) dt = x \int_{\mathbb{R}} f(t) dt - \int_{\mathbb{R}} t f(t) dt = f_0 x - f_1.$$

Отже, при $x \rightarrow +\infty$ маємо

$$u(x) = (c_1 f_0 + c_2 g_0)x - c_1 f_1 - c_2 g_1 + c_3 \quad (3.20)$$

Розв'язок u буде обмеженим на всій прямій, коли

$$f_0 c_1 + g_0 c_2 = 0. \quad (3.21)$$

З (3.18) і (3.21) випливає, що u буде напівзв'язним станом тоді і лише тоді, коли вектор $c = (c_1, c_2, c_3)$ буде ненульовим розв'язком лінійної системи $Ac = 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} \langle f, f^{(-2)} \rangle & \langle f, g^{(-2)} \rangle - 1 & \bar{f}_0 \\ \langle g, f^{(-2)} \rangle - 1 & \langle g, g^{(-2)} \rangle & \bar{g}_0 \\ f_0 & g_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатися безпосередніми обчисленнями, що

$$\det A = -\langle g_0 f - f_0 g, g_0 f^{(-2)} - f_0 g^{(-2)} \rangle - 2 \operatorname{Re}(f_0 \bar{g}_0).$$

Для функцій v, w з компактним носієм і нульовим середнім справедлива формула інтегрування частинами

$$\langle v, w^{(-2)} \rangle = -\langle v^{(-1)}, w^{(-1)} \rangle, \quad (3.22)$$

зокрема $\langle v, v^{(-2)} \rangle = -\|v^{(-1)}\|^2$. Тому остаточно матимемо

$$\det A = \|g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}\|^2 - 2 \operatorname{Re}(f_0 \bar{g}_0),$$

бо $g_0 f - f_0 g$ є функцією з нульовим середнім. Отже, оператор T володіє напівзв'язним станом тоді і лише тоді, коли виконується умова (3.16), тобто $\lambda = 0$.

Припустимо, що $f_0 g_0 \neq 0$ і матриця A є виродженою. Це трапиться лише тоді, коли перший і другий рядки A будуть лінійно залежними. Зокрема, коли

$$\bar{g}_0 (\langle f, g^{(-2)} \rangle - 1) = \bar{f}_0 \langle g, g^{(-2)} \rangle. \quad (3.23)$$

Вектор $(g_0, -f_0, c_3)$ є розв'язком третього рівняння системи для довільного c_3 . Підставимо його у перше рівняння і отримаємо

$$g_0 \langle f, f^{(-2)} \rangle - f_0 (\langle f, g^{(-2)} \rangle - 1) + \bar{f}_0 c_3 = 0.$$

Помножимо останню рівність на \bar{g}_0 і скористаємося (3.23):

$$|g_0|^2 \langle f, f^{(-2)} \rangle - |f_0|^2 \langle g, g^{(-2)} \rangle + \bar{f}_0 \bar{g}_0 c_3 = 0.$$

Отже, лінійна система має розв'язок

$$c_1 = |g_0|^2 \bar{f}_0, \quad c_2 = -|f_0|^2 \bar{g}_0, \quad c_3 = |f_0|^2 \langle g, g^{(-2)} \rangle - |g_0|^2 \langle f, f^{(-2)} \rangle.$$

Повертаючи ці значення сталих разом з $c_4 = 0$ до зображення розв'язку (3.20), знаходимо напівзв'язний стан

$$\sigma(x) = |g_0|^2 (\bar{f}_0 f^{(-2)}(x) - \langle f, f^{(-2)} \rangle) - |f_0|^2 (\bar{g}_0 g^{(-2)}(x) - \langle g, g^{(-2)} \rangle).$$

У випадках (ii) та (iii), функції f і g мають нульові середні. Тому з огляду на формулу (3.22) матриця A набуває вигляду

$$A = - \begin{pmatrix} \|f^{(-1)}\|^2 & \langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle + 1 & 0 \\ \langle g^{(-1)}, f^{(-1)} \rangle + 1 & \|g^{(-1)}\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Вона матиме ранг один, коли

$$\|f^{(-1)}\| \|g^{(-1)}\| = |\langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle + 1|, \quad (3.25)$$

тобто коли $\pi = 0$ згідно з позначеннями (3.7). Тоді $\ker A$ є лінійною оболонкою двох векторів $(0, 0, 1)$ і $(e^{i\vartheta} \|g^{(-1)}\|, -\|f^{(-1)}\|, 0)$. Другий з них є розв'язком системи, бо підставивши його, наприклад, в перше рівняння, отримаємо

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta} \|f^{(-1)}\|^2 \|g^{(-1)}\| - \|f^{(-1)}\| (\langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle + 1) \\ = \|f^{(-1)}\| \left(e^{i\vartheta} |\langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle + 1| - \langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

з огляду на (3.25). Отже, оператор T володіє напівзв'язними станами 1 і ω . Коли $\pi \neq 0$, то A має ранг 2, а система — розв'язок $(0, 0, c_3)$. Тому лише стала функція є напівзв'язним станом T у цьому випадку. \square

Остання лема пояснює походження позначень (3.7) та деяких умов в теоремах 3.1 і 3.2. Надалі випадок (iii) цієї леми називатимемо *подвійним резонансом нульової енергії*.

Лема 3.2. *Якщо оператор T має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом σ , заданим формулою (3.17), то*

$$\sigma_+ - \sigma_- = \bar{f}_0 \bar{g}_0 (f_0 g_1 - f_1 g_0). \quad (3.26)$$

Крім того, число σ_+ є дійсним.

Доведення. Напівзв'язний стан має вигляд

$$\sigma(x) = |g_0|^2 (\bar{f}_0 f^{(-2)}(x) - \langle f, f^{(-2)} \rangle) - |f_0|^2 (\bar{g}_0 g^{(-2)}(x) - \langle g, g^{(-2)} \rangle),$$

причому $f^{(-2)}$ і $g^{(-2)}$ дорівнюють нулеві при великих додатних x . Тому

$$\sigma_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma(x) = |f_0|^2 \langle g, g^{(-2)} \rangle - |g_0|^2 \langle f, f^{(-2)} \rangle,$$

а також $\sigma = \sigma_- + |g_0|^2 \bar{f}_0 f^{(-2)} - |f_0|^2 \bar{g}_0 g^{(-2)}$. При $x \geq 1$ з огляду на (3.19) маємо

$$\sigma(x) = \sigma_- + |g_0|^2 \bar{f}_0 (f_0 x - f_1) - |f_0|^2 \bar{g}_0 (g_0 x - g_1) = \sigma_- + \bar{f}_0 \bar{g}_0 (f_0 g_1 - f_1 g_0),$$

звідки випливає (3.26).

Зауважимо, що $f^{(-1)}(-1) = 0$, $f^{(-2)}(-1) = 0$, $f^{(-1)}(1) = f_0$, $f^{(-2)}(1) = f_0 - f_1$.

Тому, інтегруючи частинами, дістаємо

$$\langle f, f^{(-2)} \rangle = \bar{f}^{(-1)} f^{(-2)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 |f^{(-1)}|^2 dt = \bar{f}_0 (f_0 - f_1) - \|f^{(-1)}\|_{L_2(\mathcal{I})}^2.$$

Аналогічно, $\langle g, g^{(-2)} \rangle = \bar{g}_0 (g_0 - g_1) - \|g^{(-1)}\|_{L_2(\mathcal{I})}^2$. Отже,

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= |g_0|^2 (\bar{f}_0 (f_0 - f_1) - \langle f, f^{(-2)} \rangle) - |f_0|^2 (\bar{g}_0 (g_0 - g_1) - \langle g, g^{(-2)} \rangle) = \\ &= |g_0|^2 \|f^{(-1)}\|_{L_2(\mathcal{I})}^2 - |f_0|^2 \|g^{(-1)}\|_{L_2(\mathcal{I})}^2, \end{aligned}$$

і тому $\sigma_+ \in \mathbb{R}$. □

3.3 Випадки зв'язаних точкових взаємодій

Припустимо, не зменшуючи загальності, що носії f , g та q лежать в інтервалі $\mathcal{I} = [-1, 1]$. Тоді кожен напівзв'язний стан u оператора T є сталим поза \mathcal{I} , а його звуження на \mathcal{I} є ненульовим розв'язком задачі

$$-u'' + (g, u) f + (f, u) g = 0 \quad t \in \mathcal{I}, \quad u'(-1) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (3.27)$$

Через (\cdot, \cdot) позначаємо скалярний добуток в $L_2(\mathcal{I})$. Варто зауважити, що тоді

$$\varkappa = \omega(1), \quad \sigma_- = \sigma(-1), \quad \sigma_+ = \sigma(1). \quad (3.28)$$

Розглянемо неоднорідну задачу

$$-v'' + (g, v) f + (f, v) g = r \quad \text{в } \mathcal{I}, \quad v'(-1) = a, \quad v'(1) = b \quad (3.29)$$

для довільних $r \in L_2(\mathcal{I})$ та $a, b \in \mathbb{C}$. Якщо T має резонанс нульової енергії, то ця задача, взагалі кажучи, може і не мати розв'язку.

Лема 3.3. (i) Нехай функція σ , задана формулою (3.17), є напівзв'язним станом оператора T . Тоді задача (3.29) має розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$a\bar{\sigma}_- - b\bar{\sigma}_+ = (\sigma, r). \quad (3.30)$$

(ii) Якщо лише стала функція є напівзв'язним станом T , то задача (3.29) має розв'язок тоді і лише тоді, коли $a - b = (1, r)$.

(iii) У випадку подвійного резонансу нульової енергії для T задача (3.29) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови

$$a - b = (1, r), \quad b\bar{\varkappa} = -(\omega, r). \quad (3.31)$$

(iv) Якщо для деяких a , b та r задача (3.29) є сумісною, то її розв'язок, ортогональний в $L_2(\mathcal{I})$ до підпростору звужень на \mathcal{I} усіх напівзв'язних станів, задовольняє нерівність

$$\|v\|_{W_2^2(\mathcal{I})} \leq c(|a| + |b| + \|r\|_{L_2(\mathcal{I})}) \quad (3.32)$$

зі сталою c , незалежною від f та g .

Доведення. Лема є простим наслідком альтернативи Фредгольма для оператора

$$T_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + K \quad \text{dom } T_0 = \{h \in W_2^2(\mathcal{I}) : h'(-1) = 0, h'(1) = 0\}$$

в просторі $L_2(\mathcal{I})$. Тут $K = (g, \cdot) f + (f, \cdot) g$ — оператор рангу два в $L_2(\mathcal{I})$. Умови існування у всіх випадках можна отримати інтегруванням частинами рівняння (3.29), помноженого на напівзв'язний стан. З теореми Фредгольма випливатиме, що ці умови будуть і достатніми. Тоді існує єдиний розв'язок v , який ортогональний ядру $\ker T_0$ і задовольняє оцінку (3.32). \square

Зауважимо, що при подвійному резонансі та умові $\varkappa \neq 0$ нерівність (3.32) можна записати у вигляді

$$\|v\|_{W_2^2(\mathcal{I})} \leq c\|r\|_{L_2(\mathcal{I})}, \quad (3.33)$$

в якому відсутні a і b . Справді, переписавши умови (3.31) так

$$a(r) = (1 - \varkappa^{-1}\omega, r), \quad b(r) = -\bar{\varkappa}^{-1}(\omega, r), \quad (3.34)$$

бачимо, що ці числа можна трактувати як лінійні неперервні функціонали в $L_2(\mathcal{I})$, для яких маємо оцінку $|a(r)| + |b(r)| \leq c_1 \|r\|_{L_2(\mathcal{I})}$.

Якщо ж $\varkappa = 0$, то одна з умов (3.31) має вигляд $(\omega, r) = 0$. Коли ця умова для функції r не виконується, то навіть рівняння $-v'' + (g, v) f + (f, v) g = r$, без жодних крайових умов, не має розв'язку. Воно також не має розв'язку у випадку (i) леми, коли обидві величини σ_- та σ_+ дорівнюють нулеві, але $(\sigma, r) \neq 0$.

3.3.1 Побудова граничних операторів

Нехай $h \in L_2(\mathbb{R})$ і $\zeta \in \mathbb{C}$, де $\text{Im } \zeta \neq 0$. Покладемо $y_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)^{-1} h$ і знайдемо формальну асимптотику y_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ у випадках A1–A3. Нехай

$$y_\varepsilon(x) \sim \begin{cases} y(x) + \dots, & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, & \text{коли } |x| < \varepsilon \end{cases} \quad (3.35)$$

і виконуються умови узгодження $[y_\varepsilon]_{\pm\varepsilon} = 0$, $[y'_\varepsilon]_{\pm\varepsilon} = 0$. Позаяк

$$-y''_\varepsilon + V_0(x)y_\varepsilon + \varepsilon^{-3}K_\varepsilon y_\varepsilon + \varepsilon^{-1}q(\varepsilon^{-1}x)y_\varepsilon = \zeta y_\varepsilon + h,$$

то y має бути розв'язком рівняння

$$-y'' + V_0(x)y = \zeta y + h, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (3.36)$$

на кожній з півосей, бо носій збурення стягується в точку. Тепер до цього рівняння треба долучити ще умови у початку координат. Природно очікувати, що вони залежатимуть від характеру локального збурення.

Нехай $t = \varepsilon^{-1}x$ і $z_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(\varepsilon t)$. Тоді при $|t| < 1$ матимемо

$$-\frac{d^2 z_\varepsilon}{dt^2} + (g, z_\varepsilon) f(t) + (f, z_\varepsilon) g(t) + \varepsilon q(t) z_\varepsilon = \varepsilon^2 (\zeta z_\varepsilon - V_0(\varepsilon t) z_\varepsilon + h(\varepsilon t)).$$

Підставимо асимптотику $z_\varepsilon(t) \sim u(t) + \varepsilon v(t) + \dots$ в рівняння та умови $[y_\varepsilon]_{\pm\varepsilon} = 0$, $[y'_\varepsilon]_{\pm\varepsilon} = 0$. Насамперед бачимо, що $-u'' + Ku = 0$ та $-v'' + Kv = -qu$ для $t \in \mathcal{I}$. Оператор K визначений у доведенні леми 3.3. Далі з асимптотичних рівностей

$$y(\pm\varepsilon) \sim u(\pm 1) + \varepsilon v(\pm 1) + \dots, \quad y'(\pm\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1} u'(\pm 1) + v'(\pm 1) + \dots$$

виводимо, що

$$u(\pm 1) = y_\pm, \quad u'(\pm 1) = 0, \quad v'(\pm 1) = y'_\pm. \quad (3.37)$$

Тут використані позначення $y_{\pm} = y(\pm 0)$ та $y'_{\pm} = y'(\pm 0)$. Тоді дістаємо дві задачі

$$-u'' + Ku = 0, \quad t \in \mathcal{I}, \quad u'(-1) = 0, \quad u'(1) = 0; \quad (3.38)$$

$$-v'' + Kv = -qu, \quad t \in \mathcal{I}, \quad v'(-1) = y'_-, \quad v'(1) = y'_+. \quad (3.39)$$

Випадки *A1–A3* виникають, коли перша з цих задач має нетривіальний розв'язок, тобто коли оператор T володіє резонансом нульової енергії, а u є звуженням на \mathcal{I} деякого напівзв'язного стану.

Випадок *A1*

Якщо оператор T має подвійний резонанс нульової енергії, то з огляду на лему 3.1 (*iii*) задача (3.38) володіє двовимірним простором розв'язків, який породжений функціями 1 і ω . Спершу припустимо, що $\varkappa \neq 0$, і покладемо

$$u(t) = y_- + \varkappa^{-1}(y_+ - y_-)\omega(t), \quad t \in \mathcal{I}. \quad (3.40)$$

Такий вибір u продиктований умовами $u(-1) = y_-$ і $u(1) = y_+$. Нагадаємо, що $\omega(-1) = 0$ і $\omega(1) = \varkappa$. Згідно з (3.31) задача (3.39) із такою функцією u в правій частині рівняння матиме розв'язок, якщо $y'_- - y'_+ = -(1, qu)$, $y'_+ = (\omega, qu)$. Підставимо u у вигляді (3.40) в обидві умови і згадаємо позначення (3.8). Нескладні перетворення дають умови існування у матричній формі

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\varkappa} & -1 \\ \frac{a_2}{|\varkappa|^2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_+ \\ y'_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 - \varkappa a_0}{\varkappa} & -1 \\ \frac{a_2 - \varkappa \bar{a}_1}{|\varkappa|^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_- \\ y'_- \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

У випадку *A1* виконується умова $a_2 \neq \bar{\varkappa}a_1$, тому матриця зліва має обернену

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\varkappa} & -1 \\ \frac{a_2}{|\varkappa|^2} & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{|\varkappa|^2}{a_2 - \bar{\varkappa}a_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{a_2}{|\varkappa|^2} & \frac{a_1}{\varkappa} \end{pmatrix}.$$

Тепер матричну рівність (3.41) можемо записати так

$$\begin{pmatrix} y_+ \\ y'_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{a_2 - \bar{\varkappa}a_1} \begin{pmatrix} |\varkappa|^2 a_0 - 2\operatorname{Re}(\bar{\varkappa}a_1) + a_2 & |\varkappa|^2 \\ a_0 a_2 - |a_1|^2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_- \\ y'_- \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Беручи до уваги рівності

$$a_2 - \bar{\varkappa}a_1 = e^{i \arg(a_2 - \bar{\varkappa}a_1)} |a_2 - \bar{\varkappa}a_1|, \quad e^{-i \arg(a_2 - \bar{\varkappa}a_1)} = e^{i \arg(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)},$$

остаточно дістаємо

$$\begin{pmatrix} y_+ \\ y'_+ \end{pmatrix} = e^{i \arg(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)} \begin{pmatrix} \frac{|\varkappa|^2 a_0 - 2\operatorname{Re}(\bar{\varkappa} a_1) + a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} & \frac{|\varkappa|^2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \\ \frac{a_0 a_2 - |a_1|^2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} & \frac{a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_- \\ y'_- \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Отже, функція y в асимптотиці (3.35) має бути $L_2(\mathbb{R})$ -розв'язком рівняння (3.36), який справджує умови (3.11) з теореми 3.1. Водночас за побудовою ці умови є умовами існування розв'язку задачі (3.39). Розв'язок v існує і визначений з точністю до лінійної комбінації $c_1 + c_2 \omega$ напівзв'язних станів. Підпорядкуємо його умові ортогональності в $L_2(\mathcal{I})$ до підпростору, утвореного звуженнями на \mathcal{I} усіх напівзв'язних станів.

На рис. 3.1 бачимо, що граф має інший шлях до вузла $A1$, на якому $\varkappa = 0$. Тоді напівзв'язний стан ω обертається в нуль на обох кінцях відрізка \mathcal{I} і для будь-якого розв'язку $u = c_1 + c_2 \omega$ задачі (3.38) маємо $u(-1) = u(1) = c_1$. З умов $u(-1) = y_-$, $u(1) = y_+$ відразу випливає

$$y_+ = y_-, \quad (3.44)$$

тобто функція y неперервна в нулі. Ще одну умову спряження дістанемо з умов існування для задачі (3.39). Підставимо зображення $u = y(0) + c_2 \omega$ в (3.31):

$$y'_+ - y'_- = a_0 y(0) + a_1 c_2, \quad \bar{a}_1 y(0) + a_2 c_2 = 0. \quad (3.45)$$

Ми аналізуємо випадок, коли $a_2 \neq 0$, тому з цих рівностей маємо

$$y'_+ = y'_- + a_2^{-1}(a_0 a_2 - |a_1|^2) y(0).$$

Отже, y є розв'язком рівняння (3.36), який підпорядкований умовам

$$\begin{pmatrix} y_+ \\ y'_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_0 a_2 - |a_1|^2}{a_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_- \\ y'_- \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що вони збігаються з умовами (3.11) при $\varkappa = 0$.

Обчисливши сталу c_2 через y , матимемо

$$u(t) = y(0)(1 - \bar{a}_1 a_2^{-1} \omega(t)). \quad (3.46)$$

Умови (3.45) гарантують існування розв'язку v задачі (3.39), який для однозначності виберемо ортогональним до двовимірного простору звужень на \mathcal{I} напівзв'язних станів.

Випадок A2

Припустимо, що $\lambda = 0$ і $f_0 g_0 \neq 0$, тобто оператор T володіє резонансом нульової енергії з напівзв'язним станом σ . Задача (3.38) має однопараметричну сім'ю розв'язків $u(t) = c_0 \sigma(t)$. З умов $u(-1) = y_-$, $u(1) = y_+$ дістаємо

$$y_- = c_0 \sigma_-, \quad y_+ = c_0 \sigma_+.$$

Тут ми також скористалися (3.28). Тепер застосуємо умову існування розв'язку (3.30) задачі (3.39):

$$\bar{\sigma}_+ y'_+ - \bar{\sigma}_- y'_- = c_0 \int_{-1}^1 q(t) |\sigma(t)|^2 dt.$$

Зауважимо, що інтеграл справа дорівнює сталій σ_* з формули (3.9).

До вершини A2 на графі 3.1 теж ведуть два шляхи, причому в обох випадках числа σ_- і σ_+ відмінні від нуля. Справді, на ребрі одного з шляхів умова $\sigma_- \sigma_+ \neq 0$ виписана явно. Вздовж іншого шляху ($f_0 g_1 = f_1 g_0$) $\mapsto (\sigma_+ \neq 0)$ маємо рівність $\sigma_- = \sigma_+$ з огляду на лему 3.2, тобто стала σ_- теж відмінна від нуля. Тоді

$$c_0 = \frac{y_+}{\sigma_+} = \frac{y_-}{\sigma_-}, \quad \bar{\sigma}_+ y'_+ - \bar{\sigma}_- y'_- = \frac{\sigma_*}{\sigma_-} y_-.$$

Звідси відразу отримуємо умови

$$y_+ = \frac{\sigma_+}{\sigma_-} y_-, \quad y'_+ = \frac{\bar{\sigma}_-}{\bar{\sigma}_+} y'_- + \frac{\sigma_*}{\bar{\sigma}_+ \sigma_-} y_-,$$

а також розв'язок задачі (3.38) у вигляді

$$u(t) = \frac{y_+}{\sigma_+} \sigma(t). \quad (3.47)$$

Згадаємо, що згідно з лемою 3.2 число σ_+ є дійсним, а також скористаємося очевидними рівностями $\sigma_- = e^{i \arg \sigma_-} |\sigma_-|$ та $\bar{\sigma}_- = e^{-i \arg \sigma_-} |\sigma_-|$. Тоді умови спряження можна записати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} y_+ \\ y'_+ \end{pmatrix} = e^{-i \arg \sigma_-} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_+}{|\sigma_-|} & 0 \\ \frac{\sigma_*}{\sigma_+ |\sigma_-|} & \frac{|\sigma_-|}{\sigma_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_- \\ y'_- \end{pmatrix}.$$

Тепер задача (3.39) теж має розв'язок v , який підпорядкуємо умові ортогональності $(v, \sigma) = 0$.

Випадок $A\mathcal{Z}$

Два різні шляхи з вершини H_ε до вершини $A\mathcal{Z}$ на графа 3.1 розгалужуються у вузлі, де ми перевіряємо, чи π дорівнює нулеві. Коли $\pi \neq 0$, то згідно з лемою 3.1(ii) напівзв'язними станами оператора T є лише сталі функції. Тому з умов узгодження асимптотики $u(-1) = y_-$, $u(1) = y_+$ дістаємо

$$y_+ = y_-, \quad u(t) = y(0). \quad (3.48)$$

Далі нам треба розв'язати задачу

$$-v'' + Kv = -y(0)q, \quad t \in \mathcal{I}, \quad v'(-1) = y'_-, \quad v'(1) = y'_+.$$

З огляду на лему 3.3(ii) вона сумісна тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$y'_+ - y'_- = y(0) \int_{-1}^1 q(t) dt,$$

тобто $y'_+ = y'_- + a_0 y(0)$. Об'єднуючи її з умовою неперервності y в нулі, дістаємо

$$\begin{pmatrix} y_+ \\ y'_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_- \\ y'_- \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Вздовж шляху $(\pi = 0) \mapsto (\varkappa = 0) \mapsto (a_2 = 0) \mapsto (a_1 = 0)$ є подвійний резонанс нульової енергії. Аналіз розпочинаємо з рівностей (3.44), (3.45)

$$y_+ = y_-, \quad y'_+ - y'_- = a_0 y(0) + a_1 c_2, \quad \bar{a}_1 y(0) + a_2 c_2 = 0,$$

які виникли при $\varkappa = 0$. А оскільки $a_1 = a_2 = 0$, то третя умова тотожно виконується, а з перших двох знову дістаємо умови спряження (3.49). Виконання цих умов забезпечує існування розв'язку v задачі (3.39), який можна взяти ортогональним до простору усіх звужень напівзв'язних станів на \mathcal{I} . Цей простір одновимірний для $\pi \neq 0$ і двовимірний, коли $\pi = 0$.

3.3.2 Збіжність операторів

Через \mathcal{H} позначатимемо граничний оператор у випадку, який будемо вивчати. Функція $y = (\mathcal{H} - \zeta)^{-1}h$ є прийнятним наближенням для $y_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)^{-1}h$, коли $|x| > \varepsilon$. Однак побудова достатньо точного наближення на носіїві збурення $(-\varepsilon, \varepsilon)$ є дещо складнішою задачею. Нехай

$$\hat{z}_\varepsilon(x) = \begin{cases} y(x) & \text{при } |x| > \varepsilon, \\ u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{при } |x| < \varepsilon, \end{cases} \quad (3.50)$$

де y , u та v побудовані вище для кожного з випадків, а w_ε буде розв'язком задачі

$$-w_\varepsilon'' + K w_\varepsilon = h(\varepsilon t) + \gamma_\varepsilon \theta(t), \quad t \in \mathcal{I}, \quad w_\varepsilon'(-1) = \alpha_\varepsilon, \quad w_\varepsilon'(1) = \beta_\varepsilon. \quad (3.51)$$

Остання задача містить три числові параметри α_ε , β_ε , γ_ε і функцію θ з простору $L_2(\mathcal{I})$, які ми вибиратимемо для кожного з випадків окремо. Припустимо, що функція θ має нульове середнє на \mathcal{I} і задовольняє умову $(\theta, \omega) = 1$.

У випадку *A1* оператор T володіє подвійним резонансом нульової енергії, а задача (3.51) має розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$\varkappa \alpha_\varepsilon + \gamma_\varepsilon = (\varkappa - \omega, h(\varepsilon \cdot)), \quad \alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon = (1, h(\varepsilon \cdot)). \quad (3.52)$$

Спершу припустимо, що $\varkappa \neq 0$. Тоді ці умови можна виконати, поклавши

$$\gamma_\varepsilon = 0, \quad \alpha_\varepsilon = (1 - \varkappa^{-1}\omega, h(\varepsilon \cdot)), \quad \beta_\varepsilon = -(\varkappa^{-1}\omega, h(\varepsilon \cdot)). \quad (3.53)$$

Тепер існує розв'язок w_ε задачі (3.51), який виберемо ортогональним в $L_2(\mathcal{I})$ до функцій 1 та ω . Як ми зауважили на стор. 120, коли $\varkappa = 0$, то існування розв'язку задачі (3.51) не можна забезпечити лише вибором параметрів α_ε та β_ε . Саме це стало причиною появи доданка $\gamma_\varepsilon \theta$ в правій частині рівняння (3.51).

Поклавши

$$\alpha_\varepsilon = 0, \quad \beta_\varepsilon = -(1, h(\varepsilon \cdot)), \quad \gamma_\varepsilon = -(\omega, h(\varepsilon \cdot)), \quad (3.54)$$

ми виконаємо умови (3.52) і знову виберемо w_ε ортогональним до 1 та ω . Побудований розв'язок нам підходить і у випадку *A3* при умові, що $\pi = 0$ і $\varkappa = 0$. Якщо ж $\pi \neq 0$, то лише сталі функції є напівзв'язними станами оператора T .

Згідно з лемою 3.3 (ii) задача (3.51) має розв'язок, коли виконується умова $\alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon = (1, h(\varepsilon \cdot))$. Нагадаємо, що $(1, \theta) = 0$. Покладемо

$$\alpha_\varepsilon = 0, \quad \gamma_\varepsilon = 0, \quad \beta_\varepsilon = -(1, h(\varepsilon \cdot)), \quad (3.55)$$

і підпорядкуємо w_ε умові ортогональності $(w_\varepsilon, 1) = 0$. У випадок A2 оператор T має напівзв'язний стан σ . Задача (3.51) матиме розв'язки тоді і лише тоді, коли

$$\bar{\sigma}_- \alpha_\varepsilon - \sigma_+ \beta_\varepsilon = (\sigma, h(\varepsilon \cdot)) + \gamma_\varepsilon(\sigma, \theta). \quad (3.56)$$

Виконаємо цю вимогу, поклавши

$$\alpha_\varepsilon = 0, \quad \gamma_\varepsilon = 0, \quad \beta_\varepsilon = -\sigma_+^{-1}(\sigma, h(\varepsilon \cdot)) \quad (3.57)$$

і далі підпорядкувавши розв'язок умові $(w_\varepsilon, \sigma) = 0$.

З формул (3.53)–(3.57) бачимо, що у всіх випадках величини α_ε , β_ε і γ_ε можна трактувати як лінійні неперервні функціонали відносно h . Їх можна оцінити

$$|\alpha_\varepsilon(h)| + |\beta_\varepsilon(h)| + |\gamma_\varepsilon(h)| \leq c_1 \|h(\varepsilon \cdot)\|_{L_2(\mathcal{I})} \leq c_2 \varepsilon^{-1/2} \|h\|. \quad (3.58)$$

Функції y , u , v та w_ε задовольняють такі ж оцінки, які у попередніх випадках. З властивостей резольвенти $(\mathcal{H} - \zeta)^{-1}$ та теорем вкладення дістаємо

$$\|y\|_{W_2^2(-a,0)} + \|y\|_{W_2^2(0,a)} \leq c_3 \|h\|, \quad \|y\|_{C^1(-a,0)} + \|y\|_{C^1(0,a)} \leq c_4 \|h\|$$

для довільних $a > 0$. Зокрема, $|y_-| + |y_+| \leq c_4 \|h\|$. З цієї нерівності маємо

$$\|u\|_{L_2(\mathcal{I})} \leq c_5 (|y_-| + |y_+|) \leq c_6 \|h\|. \quad (3.59)$$

Це впливає з явного вигляду u , заданого формулами (3.40), (3.46), (3.47), (3.48).

Вибір розв'язків v та w_ε дозволяє скористатися лемою 3.3 (iv):

$$\|v\|_{W_2^2(\mathcal{I})} \leq c_7 (|y_-| + |y_+| + \|qu\|_{L_2(\mathcal{I})}) \leq c_8 \|h\|, \quad (3.60)$$

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^2(\mathcal{I})} \leq c_9 (|\alpha_\varepsilon(h)| + |\beta_\varepsilon(h)| + |\gamma_\varepsilon(h)| + \|h(\varepsilon \cdot)\|_{L_2(\mathcal{I})}) \leq c_{10} \varepsilon^{-1/2} \|h\|, \quad (3.61)$$

Зауважимо, що потенціал q обмежений і є оцінка (3.58). Звідси

$$\|\hat{z}_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot)\|_{L_2(-\varepsilon, \varepsilon)} = \varepsilon^{1/2} \|\hat{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{I})} = \varepsilon^{1/2} \|u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{I})} \leq c_{11} \varepsilon^{1/2} \|h\|. \quad (3.62)$$

За побудовою стрибки функції \hat{z}_ε в точках $x = \pm\varepsilon$ є малі. Справді, згадавши умови (3.37), які виконують у всіх випадках, маємо

$$\begin{aligned} [\hat{z}_\varepsilon]_{-\varepsilon} &= y_- - y(-\varepsilon) + \varepsilon v(-1) + \varepsilon^2 w_\varepsilon(-1), & [\hat{z}_\varepsilon]_\varepsilon &= y(\varepsilon) - y_+ - \varepsilon v(1) - \varepsilon^2 w_\varepsilon(1), \\ [\hat{z}'_\varepsilon]_{-\varepsilon} &= y'_- - y'(-\varepsilon) + \varepsilon \alpha_\varepsilon, & [\hat{z}'_\varepsilon]_\varepsilon &= y'(\varepsilon) - y'_+ - \varepsilon \beta_\varepsilon. \end{aligned}$$

З огляду на твердження 1.4 та нерівності (3.59)–(3.61) всі ці стрибки є порядку $O(\varepsilon^{1/2})\|h\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тому твердження 1.1 гарантує існування такого коретора ρ_ε з компактним носієм, що функція

$$z_\varepsilon(x) = \begin{cases} y(x) + \rho_\varepsilon(x) & \text{при } |x| > \varepsilon, \\ u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{при } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

належить до області визначення оператора H_ε і

$$\|\rho_\varepsilon\|_{C^2(|x| \geq \varepsilon)} \leq c_{12} \varepsilon^{1/2} \|h\|. \quad (3.63)$$

Нагадаємо, що ρ_ε дорівнює нулю на множині $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Переконаємося, що функції $r_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)z_\varepsilon - h$ та $s_\varepsilon = z_\varepsilon - y$ нескінченно малі в $L_2(\mathbb{R})$ -нормі при $\varepsilon \rightarrow 0$. Коли $|x| > \varepsilon$, то згідно з (3.36) маємо

$$r_\varepsilon(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) - \zeta\right)(y(x) + \rho_\varepsilon(x)) - h(x) = -\rho_\varepsilon''(x) + (V_0(x) - \zeta)\rho_\varepsilon(x).$$

Коли ж $|x| < \varepsilon$, то з використанням (3.38), (3.39) та (3.51) отримаємо

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} \left(z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + (V_0(x) - \zeta)z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\quad + \varepsilon^{-3} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\bar{g}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \bar{f}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) z_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt + \varepsilon^{-1} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - h(x) \\ &= \varepsilon^{-2} \left(-u''\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + (Ku)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + \varepsilon^{-1} \left(-v''\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + (Kv)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \\ &\quad + \left(-w_\varepsilon''\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + (Kw_\varepsilon)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - h(x) - \gamma_\varepsilon \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \gamma_\varepsilon \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\quad + (V_0(x) - \zeta)z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \gamma_\varepsilon \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + (V_0(x) - \zeta)z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Отже, залишок r_ε має вигляд

$$r_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\rho_\varepsilon''(x) + (V_0(x) - \zeta)\rho_\varepsilon(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \gamma_\varepsilon \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + (V_0(x) - \zeta)z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

Різниця асимптотики z_ε і її головного члена y є такою

$$s_\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho_\varepsilon(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - y(x), & \text{коли } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

Структура обох функцій є схожою. Застосувавши нерівності (3.59)–(3.63), маємо

$$\|r_\varepsilon\| + \|s_\varepsilon\| \leq c_{13}\varepsilon^{1/2}\|h\|,$$

де стала c_{13} не залежить від ε та h .

Нагадаємо, що $y_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)^{-1}h$ та $y = (\mathcal{H} - \zeta)^{-1}h$ для елемента $h \in L_2(\mathbb{R})$ та комплексного числа ζ з ненульовою уявною частиною. Запишемо тепер рівність $r_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)z_\varepsilon - h$ у вигляді $z_\varepsilon - (H_\varepsilon - \zeta)^{-1}h = (H_\varepsilon - \zeta)^{-1}r_\varepsilon$. Також зауважимо, що $s_\varepsilon = z_\varepsilon - (\mathcal{H} - \zeta)^{-1}h$. Отже,

$$\begin{aligned} \|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1}h - (\mathcal{H} - \zeta)^{-1}h\| &\leq \|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1}h - z_\varepsilon\| + \|z_\varepsilon - (\mathcal{H} - \zeta)^{-1}h\| \\ &\leq \|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1}\| \|r_\varepsilon\| + \|s_\varepsilon\| \leq |\operatorname{Im} \zeta|^{-1} \|r_\varepsilon\| + \|s_\varepsilon\| \leq C\varepsilon^{1/2}\|h\|, \end{aligned}$$

що доводить рівномірну резольвентну збіжність операторів H_ε до оператора \mathcal{H} , а також дає ефективну оцінку різниці резольвент $\|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1} - (\mathcal{H} - \zeta)^{-1}\| \leq C\varepsilon^{1/2}$. Теорема 3.1 доведена.

3.4 Випадки розділених точкових взаємодій

Нехай $h \in L_2(\mathbb{R})$ і $\zeta \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$. Наближення елемента $y_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)^{-1}h$ у випадках $B1$ – $B3$ теж шукатимемо у вигляді

$$\hat{z}_\varepsilon(x) = \begin{cases} y(x) & \text{при } |x| > \varepsilon, \\ u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{при } |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

де функції u , v та w_ε — розв'язки задач (3.38), (3.39) та (3.51) відповідно. Функція y має бути $L_2(\mathbb{R})$ -розв'язком рівняння (3.36), підпорядкованим крайовим умовам в початку координат. Ці випадки виникають як в тому разі, коли оператор T володіє резонансом нульової енергії, так і при його відсутності.

Випадок B1

Це вироджений випадок A1, коли $\varkappa \neq 0$, але $a_2 = \bar{\varkappa}a_1$ (див. граф 3.1). Оператор T має два лінійно незалежні напівзв'язні стани 1 та ω . Аналіз розпочинаємо з вибору u у формі (3.40) та умов існування (3.41) розв'язку v , які набувають вигляду

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\varkappa} & -1 \\ \frac{a_2}{|\varkappa|^2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_+ \\ y'_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{|\varkappa|^2} - a_0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_- \\ y'_- \end{pmatrix}.$$

Тепер матриця зліва є виродженою. Проте з другого рівняння дістаємо

$$y'_+ - |\varkappa|^{-2}a_2y_+ = 0. \quad (3.64)$$

Перше ж рівняння

$$\frac{a_1}{\varkappa} y_+ - y'_+ = \left(\frac{a_2}{|\varkappa|^2} - a_0 \right) y_- - y'_-$$

з врахуванням (3.64) та рівності $\varkappa^{-1}a_1 = |\varkappa|^{-2}a_2$ можна записати у вигляді

$$y'_- - (|\varkappa|^{-2}a_2 - a_0) y_- = 0. \quad (3.65)$$

Отже, функція y в початку координат задовольняє крайові умови (3.64), (3.65), а граничний оператор, який у випадках групи B позначатимемо \mathcal{H}_0 , є таким

$$\mathcal{H}_0\psi = -\psi'' + V_0\psi,$$

$$\text{dom } \mathcal{H}_0 = \{ \psi \in \mathcal{V}_0 : \psi'(-0) = (|\varkappa|^{-2}a_2 - a_0) \psi(-0), \psi'(0) = |\varkappa|^{-2}a_2\psi(0) \}.$$

Цей оператор є прямою сумою $\mathcal{R}_{\mu_1}^- \oplus \mathcal{R}_{\mu_2}^+$, де $\mu_1 = |\varkappa|^{-2}a_2 - a_0$ та $\mu_2 = |\varkappa|^{-2}a_2$. Вибір y , який задовольняє умови (3.64), (3.65), гарантує існування v , а такий вибір $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon, \gamma_\varepsilon$ як в (3.53) — існування w_ε . Обидва розв'язки візьмемо ортогональними в $L_2(\mathcal{I})$ до функцій 1 та ω .

Випадок B2

Цей випадок теж пов'язаний з резонансом нульової енергії оператора T , коли він володіє напівзв'язним станом σ , описаним в лемі 3.1 (i). Міркуючи як у випадку A2, покладемо $u(t) = c_0\sigma(t)$ і відразу дістанемо

$$y_- = c_0\sigma_-, \quad y_+ = c_0\sigma_+, \quad \bar{\sigma}_+y'_+ - \bar{\sigma}_-y'_- = c_0\sigma_*. \quad (3.66)$$

З визначальною умови $\sigma_- \sigma_+ = 0$, яка відрізняє випадок $B\mathcal{Z}$ від випадку $A\mathcal{Z}$, випливає, що принаймні одна з величин σ_- чи σ_+ дорівнює нулю. Проте одночасно нулями вони бути не можуть, бо згідно з лемою 3.2 $\sigma_+ - \sigma_- = \bar{f}_0 \bar{g}_0 (f_0 g_1 - f_1 g_0)$, а також в цьому разі $f_0 g_0 \neq 0$, $f_0 g_1 \neq f_1 g_0$.

Якщо $\sigma_- = 0$, то з (3.66) відразу дістаємо

$$y_- = 0, \quad c_0 = \sigma_+^{-1} y_+, \quad y'_+ = \sigma_* |\sigma_+|^{-2} y_+,$$

а також $u(t) = \sigma_+^{-1} y_+ \sigma(t)$. Якщо ж $\sigma_+ = 0$, то

$$c_0 = \sigma_-^{-1} y_-, \quad y_+ = 0, \quad y'_- = -\sigma_* |\sigma_-|^{-2} y_-,$$

а також $u(t) = \sigma_-^{-1} y_- \sigma(t)$. Отже, граничний оператор теж є прямою сумою операторів на півосях

$$\mathcal{H}_0 = \begin{cases} \mathcal{D}^- \oplus \mathcal{R}_{\nu_+}^+, & \text{коли } \sigma_- = 0, \\ \mathcal{R}_{\nu_-}^- \oplus \mathcal{D}^+, & \text{коли } \sigma_+ = 0, \end{cases}$$

де $\nu_- = -\sigma_* |\sigma_-|^{-2}$ та $\nu_+ = \sigma_* |\sigma_+|^{-2}$.

Тепер існує розв'язок v задачі (3.39), визначений з точністю до доданка $c_1 \sigma$. Виберемо його однозначно, підпорядкувавши умові $(v, \sigma) = 0$. Нагадаємо, що задача (3.51) матиме розв'язки тоді і лише тоді, коли

$$\bar{\sigma}_- \alpha_\varepsilon - \sigma_+ \beta_\varepsilon = (\sigma, h(\varepsilon \cdot)) + \gamma_\varepsilon(\sigma, \theta).$$

У випадку $\sigma_- = 0$ покладемо $\alpha_\varepsilon = 0$, $\gamma_\varepsilon = 0$, $\beta_\varepsilon = -\sigma_+^{-1} (\sigma, h(\varepsilon \cdot))$, а коли $\sigma_+ = 0$, то можемо вважати, що $\alpha_\varepsilon = \bar{\sigma}_-^{-1} (\sigma, h(\varepsilon \cdot))$, $\gamma_\varepsilon = 0$, $\beta_\varepsilon = 0$. Розв'язок w_ε теж виберемо ортогональним до σ в $L_2(\mathcal{I})$.

Випадок $B\mathcal{Z}$

На графі 3.1 є дві вершини з міткою $B\mathcal{Z}$, до яких сумарно ведуть три шляхи. Всі ці випадки об'єднує граничний оператор, який є прямою сумою $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ двох незбурених операторів Шрединґера з потенціалом V_0 , підпорядкованих умовам Діріхле в початку координат.

Найкоротший шлях до $B\mathcal{Z}$ є вздовж ребра $\lambda \neq 0$. Тоді лема 3.1 каже, що оператор T не володіє резонансом нульової енергії, а задача (3.38) має лише

тривіальний розв'язок $u = 0$. З двох перших умов узгодження асимптотик в (3.37) відразу дістаємо, що $y_- = 0$ та $y_+ = 0$. При відсутності резонансу задача (3.39), а також задача

$$-w_\varepsilon'' + K w_\varepsilon = h(\varepsilon t), \quad t \in \mathcal{I}, \quad w_\varepsilon'(-1) = 0, \quad w_\varepsilon'(1) = 0$$

мають єдині розв'язки з апіорними оцінками вигляду (3.32).

Вздовж шляху $(\lambda = 0) \mapsto (f_0 g_0 \neq 0) \mapsto (f_0 g_1 = f_1 g_0) \mapsto (\sigma_+ = 0)$ матимемо резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом σ . У цьому разі σ_- теж дорівнює нулеві. Справді, це випливає з леми 3.2 та умови $f_0 g_1 = f_1 g_0$. Тоді з рівностей (3.66) відразу отримуємо, що $y_- = 0$, $y_+ = 0$, а стала c_0 в зображенні $u(t) = c_0 \sigma(t)$ залишається поки невизначеною. Проте умова існування $\bar{\sigma}_+ y'_+ - \bar{\sigma}_- y'_- = c_0 \sigma_*$ розв'язку v буде виконуватися лише, коли $c_0 = 0$, бо $\sigma_- = \sigma_+ = 0$. Тому $u(t) = 0$, а v підпорядкуємо звичній умові ортогональності до σ . В цьому випадку, згідно з умовою (3.56), величини α_ε та β_ε не мають впливу на існування розв'язку w_ε задачі (3.51). Тому покладемо $\alpha_\varepsilon = 0$, $\beta_\varepsilon = 0$, $\theta(t) = \sigma(t)$, $\gamma_\varepsilon = -\|\sigma\|_{L_2(\mathcal{I})}^{-2}(\sigma, h(\varepsilon \cdot))$ і вважатимемо, що w_ε ортогональний до σ .

Нарешті, вздовж шляху

$$(\lambda = 0) \mapsto (f_0 = 0, g_0 = 0) \mapsto (\pi = 0) \mapsto (\varkappa = 0) \mapsto (a_2 = 0) \mapsto (a_1 \neq 0)$$

оператор T має подвійний резонанс нульової енергії. Розпочнемо аналіз з формул (3.44) (3.45), які виникають у випадку $A1$ при $\varkappa = 0$. З умовою $a_2 = 0$ вони набувають вигляду

$$y_+ = y_-, \quad y'_+ - y'_- = a_0 y(0) + a_1 c_2, \quad \bar{a}_1 y(0) = 0$$

і до того ж $u(t) = y(0) + c_2 \omega(t)$. Позаяк зараз $a_1 \neq 0$, то дістаємо умову Діріхле $y(0) = 0$. Тепер знайшовши розв'язок y , можемо побудувати u у вигляді

$$u(t) = a_1^{-1}(y'_+ - y'_-) \omega(t).$$

Ми перевірили умови існування для v і він тепер існує, а w_ε існуватиме, коли вибрати α_ε , β_ε та γ_ε так, як в (3.54). Обидва розв'язки фіксуємо умовою ортогональності до площини $c_1 + c_2 \omega$.

Отже, для випадків $B1-B3$ теж побудовано наближення

$$z_\varepsilon(x) = \begin{cases} y(x) + \rho_\varepsilon(x) & \text{при } |x| > \varepsilon, \\ u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{при } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

до елемента $y_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)^{-1}h$, де ρ_ε — функція-коректор з компактним носієм і малою C^2 -нормою, а саме, $\|\rho_\varepsilon\|_{C^2(|x|\geq\varepsilon)} \leq c_{12}\varepsilon^{1/2}\|h\|$. Цю малість гарантують умови узгодження асимптотики (3.37), яких ми дотримувалися у всіх випадках. Тоді стрибки функції \hat{z}_ε та її похідної в точках узгодження $x = \pm\varepsilon$ є нескінченно малими порядку $O(\varepsilon^{1/2})\|h\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Застосувавши такі ж міркування як при завершенні доведення теореми 3.1, можна показати, що оператори H_ε збігаються до граничного оператора \mathcal{H}_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$ в рівномірній резольвентній топології. Крім того, різниця резольвент задовольняє нерівність $\|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1} - (\mathcal{H} - \zeta)^{-1}\| \leq C\varepsilon^{1/2}$. Теорема 3.2 доведена.

Доведення теореми 3.3 міститься в доведеннях теорем 3.1 та 3.2, оскільки вони разом покривають усі випадки і містять оцінки для різниці резольвент.

3.5 Зауваги до регуляризації класичної δ' -взаємодії

В цьому підрозділі ми звернемося до питання регуляризації псевдогамільтоніана

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\langle\delta'(x), \cdot\rangle\delta'(x), \quad (3.67)$$

який пов'язує з сім'єю самоспряжених операторів T_β , що діють як вільний оператор Шредингера $T_\beta\phi = -\phi''$, звужений на

$$\text{dom } T_\beta = \{\phi \in W_2^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : \phi'(+0) = \phi'(-0), \quad \phi(+0) - \phi(-0) = \beta\phi'(0)\}.$$

Передбачається, що між сталими α та β існує певний зв'язок, визначений моделлю. Ці оператори часто називають класичними δ' -взаємодіями [12, Ch.1.4]. Загальне дослідження таких збурень рангу один для абстрактних операторів належить С. Альбеверію, В. Кошманенку, П. Курасову та Л. Нижнику [66]. Ми реалізуємо ці абстрактні результати в $L_2(\mathbb{R})$ для операторів Шредингера з локальними збуреннями рангу один і отримуємо конструктивні оцінки збіжності резольвент.

Нехай f_ε та g_ε — дві дійсні функції класу $L_2(\mathbb{R})$ з компактними носіями. Розглянемо оператори в $L_2(\mathbb{R})$ вигляду

$$A_\alpha^\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha g_\varepsilon(x) \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t) \cdot dt, \quad \text{dom } A_\alpha^\varepsilon = W_2^2(\mathbb{R}). \quad (3.68)$$

Тут ε — малий додатний параметр, α — дійсна стала взаємодії. Оператори A_α^ε є самоспряженими лише, коли $f_\varepsilon = g_\varepsilon$. Щоб описати ширший клас точних моделей у випадку збурення рангу один, ми вивчимо несамоспряжені регуляризації. Також локальні збурення будуть більш сингулярними.

Послідовність $h_\varepsilon = \varepsilon^{-2}H(\varepsilon^{-1} \cdot)$ збігається до $\delta'(x)$, якщо

$$\int_{\mathbb{R}} H(x) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} xH(x) dx = -1. \quad (3.69)$$

Функцію H називаємо профілем δ' -подібної послідовності. Скористаємося такими профілями, щоб побудувати складнішу апроксимацію для $\delta'(x)$. Нехай послідовність профілів $\{H_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ володіє властивостями:

- (i) носії H_ε лежать в деякому скінченному відрізку $[-r, r]$ для всіх $\varepsilon > 0$;
- (ii) послідовність H_ε є обмеженою в $L^\infty(-r, r)$ рівномірно стосовно ε ;
- (iii) функції H_ε задовольняють умови (3.69) для достатньо малих ε .

Тоді послідовність $h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} H_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ теж є δ' -подібною. Справді,

$$\begin{aligned} \langle h_\varepsilon, \phi \rangle &= \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) \phi(x) dx = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(t) \phi(\varepsilon t) dt = \\ &= \varepsilon^{-1} \phi(0) \int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(t) dt + \phi'(0) \int_{\mathbb{R}} t H_\varepsilon(t) dt + \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} \zeta(\varepsilon t) H_\varepsilon(t) dt = \\ &= -\phi'(0) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

для кожної $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Залишковий член ζ у формулі Тейлора для функції ϕ задовольняє нерівність $\max_{t \in [-r, r]} |\zeta(\varepsilon t)| \leq c\varepsilon^2$.

Введемо величину

$$I(f, g) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) |t - \tau| g(\tau) d\tau dt,$$

яку називатимемо *порядком взаємодії* функцій f та g з класу $L_2(\mathbb{R})$. Розглянемо дві δ' -подібні послідовності

$$f_\varepsilon = \varepsilon^{-2}F_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot), \quad g_\varepsilon = \varepsilon^{-2}G_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot). \quad (3.71)$$

Означення 3.1. Кажемо, що послідовності f_ε та g_ε сильно взаємодіють при $\varepsilon \rightarrow 0$, якщо $I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \rightarrow \infty$, і слабо взаємодіють, коли $I(f_\varepsilon, g_\varepsilon)$ має скінченну границю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лема 3.4. Якщо f і g — функції з компактним носієм і нульовим середнім, то

$$I(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f^{(-1)} g^{(-1)} dt. \quad (3.72)$$

Доведення. Запишемо другу первісну функції g у вигляді

$$g^{(-2)}(t) = C_g - \int_t^{+\infty} (t - \tau)g(\tau) d\tau$$

зі сталою $C_g = - \int_{\mathbb{R}} \tau g(\tau) d\tau$. Це зображення справедливе лише для функцій з нульовим середнім. Позаяк f теж має нульове середнє, то

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g^{(-2)}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(C_g - \int_t^{+\infty} (t - \tau)g(\tau) d\tau \right) dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_t^{+\infty} (t - \tau)g(\tau) d\tau dt.$$

Звідси дістаємо

$$\begin{aligned} I(f, g) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{-\infty}^t (t - \tau)g(\tau) d\tau dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_t^{+\infty} (t - \tau)g(\tau) d\tau dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t)g^{(-2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Доведення завершується інтегруванням частинами

$$I(f, g) = - \int_{\mathbb{R}} f g^{(-2)} dt = \int_{\mathbb{R}} f^{(-1)} g^{(-1)} dt$$

з врахуванням того, що первісні $f^{(-1)}$ і $g^{(-1)}$ теж мають компактний носій. \square

Наслідок 3.1. Для δ^l -подібних послідовностей (3.71) виконується рівність

$$I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} I(F_\varepsilon, G_\varepsilon). \quad (3.73)$$

Доведення. Спершу зауважимо, що

$$f_\varepsilon^{(-1)}(x) = \varepsilon^{-2} \int_{-\infty}^x F_\varepsilon(\varepsilon^{-1}t) dt = \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{x/\varepsilon} F_\varepsilon(\tau) d\tau = \varepsilon^{-1} F_\varepsilon^{(-1)}(\varepsilon^{-1}x).$$

Така ж формула є і для $g_\varepsilon^{(-1)}$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon^{(-1)} g_\varepsilon^{(-1)} dt = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon^{(-1)}(\varepsilon^{-1}t) G_\varepsilon^{(-1)}(\varepsilon^{-1}t) dt = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon^{(-1)}(\tau) G_\varepsilon^{(-1)}(\tau) d\tau = \varepsilon^{-1} I(F_\varepsilon, G_\varepsilon). \quad \square \end{aligned}$$

Лема 3.5. Для кожного дійсного числа a існує пара δ' -подібних послідовностей f_ε та g_ε вигляду (3.71), що $I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \rightarrow a$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. До того ж a може дорівнювати $\pm\infty$.

Доведення. Кожна δ' -подібна послідовність f_ε сильно взаємодіє зі собою. Справді, згідно з наслідком

$$I(f_\varepsilon, f_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} I(F_\varepsilon, F_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(F_\varepsilon^{(-1)}(t) \right)^2 dt.$$

Проте останній інтеграл не може прямувати до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, бо

$$\int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon^{(-1)}(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} t F_\varepsilon(t) dt = 1$$

з огляду на другу умову в (3.69). Отже, $I(f_\varepsilon, f_\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Зрозуміло, що $I(f_\varepsilon, -f_\varepsilon) \rightarrow -\infty$. Якщо ж ми розглянемо послідовності f_ε і g_ε , для яких носії профілів F_ε і G_ε не перетинаються для малих ε , то носії первісних $F_\varepsilon^{(-1)}$ і $G_\varepsilon^{(-1)}$ теж матимуть порожній перетин. Тому $I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) = 0$ згідно з (3.72). Маємо приклад послідовностей, які слабо взаємодіють, а точніше цілком не взаємодіють.

Нехай тепер $a > 0$, а функція V така, як на рис. 3.2. Покладемо

$$F(x) = 6a V(\sqrt{6a} x), \quad G_\varepsilon(x) = V(x + 2 - \varepsilon^{1/3}), \quad (3.74)$$

і побудуємо δ' -подібні послідовності $f_\varepsilon = \varepsilon^{-2} F(\varepsilon^{-1} \cdot)$, $g_\varepsilon = \varepsilon^{-2} G_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot)$. Профіль першої послідовності не залежить від ε , а щодо профілів другої, то легко переконатися, що G_ε задовольняють умови (i)-(iii) на стор. 133. Перетином носіїв F_ε та G_ε , як і носіїв їхніх первісних $F_\varepsilon^{(-1)}$ та $G_\varepsilon^{(-1)}$, є відрізок $[0, \varepsilon^{1/3}]$. Тому

$$\begin{aligned} I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} I(F_\varepsilon, G_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon^{1/3}} F_\varepsilon^{(-1)}(x) G_\varepsilon^{(-1)}(x) dx = \\ &= \sqrt{6a} \varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon^{1/3}} V^{(-1)}(\sqrt{6a} x) V^{(-1)}(x + 2 - \varepsilon^{1/3}) dx = 6a \varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon^{1/3}} x(\varepsilon^{1/3} - x) dx = a \end{aligned}$$

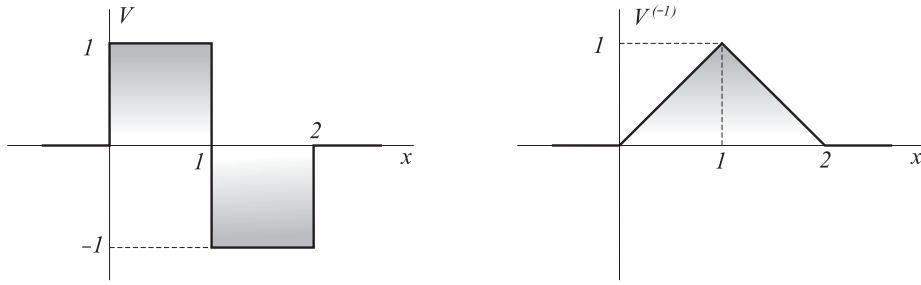


Рис. 3.2: Графіки функції V та її первісної $V^{(-1)}$.

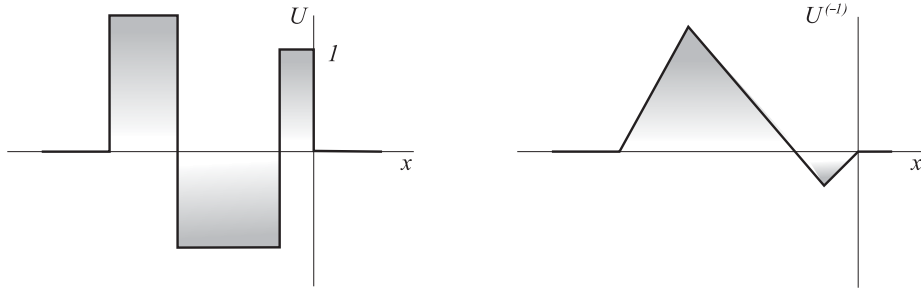


Рис. 3.3: Графіки функції U та її первісної $U^{(-1)}$.

для всіх достатньо малих ε .

У випадку від'ємного a , виберемо таку пару профілів

$$F(x) = -6a V(\sqrt{-6a} x), \quad G_\varepsilon(x) = U(x - \varepsilon^{1/3}),$$

де графік функції U зображений на рис. 3.3. Головним для нас у δ' -подібному профілі U є те, що він дорівнює одиниці, а тоді $U^{(-1)}(x) = x$, в деякому лівосторонньому околі нуля. Решту параметрів цієї кусково-сталої функції підбрані так, щоб виконувалися умови (3.69). Як і в попередньому випадку, безпосередніми обчисленнями переконуємося, що $I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) = a < 0$. \square

Нехай A — вільний оператор Шредингера на прямій

$$A\phi = -\phi'', \quad \text{dom } A = W_2^2(\mathbb{R}).$$

Оператори A_α^ε та T_β визначені на початку цього підрозділу. Сформулюємо основний результат.

Теорема 3.4. *Нехай f_ε і g_ε — δ' -подібні послідовності вигляду (3.71).*

Якщо послідовності f_ε та g_ε сильно взаємодіють, тобто $I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то сім'я операторів A_α^ε збігається в рівномірній резольвентній топології до оператора A і для усіх $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ справедлива оцінка

$$\|(A_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} - (A - \lambda)^{-1}\| \leq c |I(f_\varepsilon, g_\varepsilon)|^{-1}. \quad (3.75)$$

Коли ж f_ε і g_ε слабо взаємодіють та $I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) = \nu + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $A_\alpha^\varepsilon \rightarrow T_\beta$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, де $\beta = -\frac{\alpha}{\alpha\nu+1}$. Крім того,

$$\|(A_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} - (T_\beta - \lambda)^{-1}\| \leq c_1 (|I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) - \nu| + \sqrt{\varepsilon}).$$

Наслідок 3.2. Якщо $f_\varepsilon = g_\varepsilon$ для всіх $\varepsilon > 0$, то сім'я самоспряжених операторів A_α^ε збігається в рівномірній резольвентній топології до вільного оператора Шрединґера.

Спершу доведемо дві леми.

Лема 3.6. Нехай $h_\varepsilon = \varepsilon^{-2} H_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \cdot)$ — δ' -подібна послідовність. Для кожного $k \in \mathbb{C}$ з додатною уявною частиною маємо

$$(A - k^2)^{-1} h_\varepsilon \rightarrow u(k, \cdot) \quad \text{в } L_2(\mathbb{R}), \quad (3.76)$$

де $u(k, \cdot)$ — розв'язок рівняння $-u'' = k^2 u + \delta'(x)$. Крім того,

$$\|(A - k^2)^{-1} h_\varepsilon - u(k, \cdot)\| \leq c_1 \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.77)$$

Доведення. Рівняння $-u'' = k^2 u + \delta'(x)$ володіє єдиним $L_2(\mathbb{R})$ -розв'язком

$$u(k, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-ikx}, & x < 0, \\ -\frac{1}{2} e^{ikx}, & x > 0. \end{cases} \quad (3.78)$$

Введемо позначення $u_\varepsilon(k, \cdot) = (A - k^2)^{-1} h_\varepsilon$. Тоді

$$u_\varepsilon(k, x) = \frac{i}{2k} \int_{\mathbb{R}} e^{ik|x-t|} h_\varepsilon(t) dt. \quad (3.79)$$

Нехай $\text{supp } H_\varepsilon \subset [-r, r]$ для малих $\varepsilon > 0$. Бачимо, що

$$u_\varepsilon(k, x) = \frac{i}{2k} \mu_\varepsilon^-(k) e^{-ikx} \quad \text{при } x \leq -\varepsilon r, \quad u_\varepsilon(k, x) = \frac{i}{2k} \mu_\varepsilon^+(k) e^{ikx} \quad \text{при } x \geq \varepsilon r$$

зі сталими

$$\mu_\varepsilon^-(k) = \int_{-\varepsilon r}^{\varepsilon r} e^{ikt} h_\varepsilon(t) dt, \quad \mu_\varepsilon^+(k) = \int_{-\varepsilon r}^{\varepsilon r} e^{-ikt} h_\varepsilon(t) dt.$$

Проте з (3.70) відразу отримуємо, що $\mu_\varepsilon^\pm(k) = \pm ik + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а тому

$$\left| \frac{i}{2k} \mu_\varepsilon^-(k) - \frac{1}{2} \right| \leq c_1 \varepsilon, \quad \left| \frac{i}{2k} \mu_\varepsilon^+(k) + \frac{1}{2} \right| \leq c_2 \varepsilon.$$

Отже, на множині $x \in \mathbb{R} \setminus (-\varepsilon r, \varepsilon r)$ справедлива оцінка

$$|u_\varepsilon(k, x) - u(k, x)| \leq c_3 \varepsilon e^{-\text{Im } k |x|}. \quad (3.80)$$

Далі, якщо $|x| \leq \varepsilon r$, то u_ε можна записати так

$$u_\varepsilon(k, x) = \frac{i}{2k\varepsilon} \int_{-r}^r (e^{ik|x-\varepsilon\tau|} - 1) H_\varepsilon(\tau) d\tau,$$

згадуючи, що H_ε має нульове середнє на $[-r, r]$. Застосуємо очевидну нерівність

$$\left| \frac{e^{ik|x-\varepsilon\tau|} - 1}{k\varepsilon} \right| = \left| \frac{e^{ik|x-\varepsilon\tau|} - 1}{ik|x-\varepsilon\tau|} \right| \left| \frac{x}{\varepsilon} - \tau \right| \leq c_4$$

при $|\tau| \leq r$, $|x| \leq \varepsilon r$ і дістанемо

$$\max_{x \in [-\varepsilon r, \varepsilon r]} |u_\varepsilon(k, x)| \leq \frac{c_4}{2} \int_{-r}^r |H_\varepsilon(\tau)| d\tau \leq c_5.$$

Беручи до уваги (3.80) та останню нерівність, матимемо

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(k, x) - u(k, x)\|^2 &\leq \int_{|x| > \varepsilon r} |u_\varepsilon(k, x) - u(k, x)|^2 dx + \int_{|x| < \varepsilon r} |u_\varepsilon(k, x)|^2 dx + \\ &+ \int_{|x| < \varepsilon r} |u(k, x)|^2 dx \leq c_3^2 \varepsilon^2 \int_{|x| > \varepsilon r} e^{-2\text{Im } k |x|} dx + c_6 \varepsilon \leq c_7 \varepsilon, \end{aligned}$$

що завершує доведення. □

Лема 3.7. При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива асимптотична формула

$$\langle (A - k^2)^{-1} g_\varepsilon, f_\varepsilon \rangle = I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) + \frac{ik}{2} + O(\varepsilon). \quad (3.81)$$

Доведення. Скористаємося явним зображення (3.79) резольвенти $(A - k^2)^{-1}$:

$$\langle (A - k^2)^{-1} g_\varepsilon, f_\varepsilon \rangle = \frac{i}{2k} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{ik|x-y|} g_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) dy dx.$$

Введемо позначення $\gamma(k, x, y) = e^{ik|x-y|} - 1 - ik|x-y| + \frac{1}{2}k^2(x-y)^2$ та

$$\gamma_\varepsilon = \frac{i}{2k} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \gamma(k, x, y) g_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) dy dx.$$

Тоді, враховуючи умови (3.69) для F_ε і G_ε , дістаємо

$$\begin{aligned} \langle (A - k^2)^{-1} g_\varepsilon, f_\varepsilon \rangle &= \\ &= \frac{i}{2k} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1 + ik|x-y| - \frac{1}{2}k^2(x-y)^2 + \gamma(k, x, y)) g_\varepsilon(y) f_\varepsilon(x) dy dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) |x-y| g_\varepsilon(y) dy dx + \frac{ik}{2} \int_{\mathbb{R}} x f_\varepsilon(x) dx \int_{\mathbb{R}} y g_\varepsilon(y) dy + \gamma_\varepsilon = \\ &= I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) + \frac{ik}{2} + \gamma_\varepsilon. \end{aligned}$$

Далі $|\gamma(k, x, y)| \leq c(|x|^3 + |y|^3)$ на кожній компактній підмножині в \mathbb{R}^2 . Тому

$$\gamma_\varepsilon = \frac{i}{2k \varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \gamma(k, \varepsilon t, \varepsilon \tau) G_\varepsilon(\tau) F_\varepsilon(t) d\tau dt = O(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Прямуювання γ_ε до нуля є рівномірним на $(t, \tau) \in [-r, r] \times [-r, r]$, бо профілі F_ε і G_ε рівномірно обмежені в $L^\infty(-r, r)$. \square

Перейдемо до безпосереднього доведення теореми 3.4. Резольвента збуреного оператора A_α^ε має зображення

$$(A_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} \phi = (A - \lambda)^{-1} \phi - \frac{\alpha \langle \phi, (A - \bar{\lambda})^{-1} f_\varepsilon \rangle}{1 + \alpha \langle (A - \lambda)^{-1} g_\varepsilon, f_\varepsilon \rangle} (A - \lambda)^{-1} g_\varepsilon \quad (3.82)$$

для всіх $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ та $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ [66, формула (3.10)]. При $\alpha = 0$ твердження теореми очевидно виконується. Припустимо, що стала α відмінна від нуля.

Спершу нехай $I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. З огляду на лему 3.7 маємо

$$|1 + \alpha \langle (A - \lambda)^{-1} g_\varepsilon, f_\varepsilon \rangle| \geq |\alpha| |I(f_\varepsilon, g_\varepsilon)|$$

для достатньо малих ε . Тоді

$$\begin{aligned} \|(A_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} \phi - (A - \lambda)^{-1} \phi\| &\leq \\ &\leq \frac{|\alpha| |\langle \phi, (A - \bar{\lambda})^{-1} f_\varepsilon \rangle| \cdot \|(A - \lambda)^{-1} g_\varepsilon\|}{|1 + \alpha \langle (A - \lambda)^{-1} g_\varepsilon, f_\varepsilon \rangle|} \leq \frac{c_1}{|I(f_\varepsilon, g_\varepsilon)|} \|\phi\| \end{aligned}$$

для всіх $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ та $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, бо згідно з лемою 3.6 норми $\|(A - \bar{\lambda})^{-1}f_\varepsilon\|$ та $\|(A - \lambda)^{-1}g_\varepsilon\|$ є рівномірно обмеженими в стосунку до ε . Отже, ми довели (3.75).

Нехай $I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \rightarrow \nu$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Скориставшись лемами 3.6 та 3.7, отримаємо

$$\begin{aligned} (A_\alpha^\varepsilon - k^2)^{-1}\phi &= (A - k^2)^{-1}\phi - \frac{\alpha \langle \phi, (A - \bar{k}^2)^{-1}f_\varepsilon \rangle}{1 + \alpha \langle (A - k^2)^{-1}g_\varepsilon, f_\varepsilon \rangle} (A - k^2)^{-1}g_\varepsilon \rightarrow \\ &\rightarrow (A - k^2)^{-1}\phi - \frac{\alpha}{1 + \alpha\nu + i\alpha k/2} \langle \phi, u(\bar{k}, \cdot) \rangle u(k, \cdot), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.83)$$

для всіх $\phi \in L_2(\mathbb{R})$. Функція $u(k, \cdot)$ визначена формулою (3.78). З іншого боку, резольвента оператора T_β має зображення [12, 77]

$$(T_\beta - k^2)^{-1}\phi = (A - k^2)^{-1}\phi + \frac{\beta}{1 - i\beta k/2} \langle \phi, u(\bar{k}, \cdot) \rangle u(k, \cdot). \quad (3.84)$$

Порівнюючи граничний оператор в (3.83) з цією резольвентою, бачимо, що граничний оператор збігається з T_β , коли

$$\beta = -\frac{\alpha}{\alpha\nu + 1}. \quad (3.85)$$

Запишемо різницю резольвент для цього значення β у вигляді

$$\begin{aligned} (A_\alpha^\varepsilon - k^2)^{-1}\phi - (T_\beta - k^2)^{-1}\phi &= (b_\varepsilon - b_0) \langle \phi, (A - \bar{k}^2)^{-1}f_\varepsilon \rangle (A - k^2)^{-1}g_\varepsilon + \\ &+ b_0 \langle \phi, (A - \bar{k}^2)^{-1}f_\varepsilon \rangle ((A - k^2)^{-1}g_\varepsilon - u(k, \cdot)) + b_0 \langle \phi, (A - \bar{k}^2)^{-1}f_\varepsilon - u(\bar{k}, \cdot) \rangle u(k, \cdot), \end{aligned}$$

де $b_0 = -\frac{\alpha}{1 + \alpha\nu + i\alpha k/2}$, $b_\varepsilon = -\frac{\alpha}{1 + \alpha \langle R(k, A)g_\varepsilon, f_\varepsilon \rangle}$. Ще раз використавши леми 3.6 та 3.7, спершу дістанемо $|b_\varepsilon - b_0| \leq c_2 |I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) - \nu|$, а потім також

$$\|(A_\alpha^\varepsilon - k^2)^{-1}\phi - (T_\beta - k^2)^{-1}\phi\| \leq c_3 (|I(f_\varepsilon, g_\varepsilon) - \nu| + \sqrt{\varepsilon}) \|\phi\|,$$

що завершує доведення теореми 3.4.

Порівняємо отриманий результат з результатами робіт [16, 66, 77]. П. Шеба був першим, хто будував регуляризації псевдогамільтоніана (3.67). В [16] він досліджував поведінку сім'ї самоспряжених операторів

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \langle \cdot, u_\varepsilon \rangle,$$

де $u_\varepsilon(x) = u(\varepsilon^{-1}x)$, u — функція класу $C_0^\infty(\mathbb{R})$ з нульовим середнім, а стала взаємодії λ_ε мала вигляд $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^{-3}(I(u, u) + \varepsilon)^{-1}$. Доведено, що оператори H_ε

збігаються при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сильній резольвентній топології до оператора T_β , де $\beta = B^2$ та $B = \int_{\mathbb{R}} xu(x) dx$. В наших позначеннях $f_\varepsilon = g_\varepsilon = \varepsilon^{-2}B^{-1}u(\varepsilon^{-1}\cdot)$ оператори H_ε набувають вигляду

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha_\varepsilon f_\varepsilon(x) \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t) \cdot dt, \quad \alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon B^2}{I(u, u) + \varepsilon}.$$

Тут стала взаємодії α_ε прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так автор компенсує сильну взаємодію δ' -подібної послідовності f_ε з собою, бо $I(f_\varepsilon, f_\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В праці [77] С. Альбеверіо та Л. Нижник довели таку теорему. *Нехай $V_\varepsilon^{(1)}$, $V_\varepsilon^{(2)}$ — дві послідовності регулярних потенціалів, які прямують до $\delta'(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в просторі $W_2^{-2}(\mathbb{R})$, причому $\text{supp } V_\varepsilon^{(1)}$ лежить лівіше від $\text{supp } V_\varepsilon^{(2)}$. Тоді сім'я операторів Шрединґера $\mathcal{L}_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha V_\varepsilon^{(1)}(x) \langle V_\varepsilon^{(2)}, \cdot \rangle$ збігається в сильній резольвентній топології до оператора $T_{-\alpha}$. Цей результат відповідає ситуації, коли потенціали не взаємодіють, тобто $I(V_\varepsilon^{(1)}, V_\varepsilon^{(2)}) = 0$. Тоді при $\nu = 0$ з формули (3.85) дістаємо $\beta = -\alpha$.*

Нехай A — самоспряжений оператор, який діє в гільбертовому просторі \mathcal{H} . Оператор породжує шкалу просторів $\dots \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-1} \subset \mathcal{H}_{-2} \subset \dots$, де \mathcal{H}_s визначають нормою $\|u\|_s^2 = \langle u, (|A| + 1)^s u \rangle$. Збурення оператора A рангу один формально задається виразом $A_\alpha = A + \alpha \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi$ з дійсною сталою взаємодії α та вектором φ з просторів \mathcal{H}_s . Несамоспряжений варіант збурення має вигляд $A_\alpha = A + \alpha \langle \psi, \cdot \rangle \varphi$. Ситуації з псевдогамільтоніаном (3.67) відповідає збурення елементами з класу \mathcal{H}_{-2} . Теорія таких збурень побудована С. Альбеверіо, В. Кошманенком, П. Курасовим та Л. Нижником в [66].

Один з результатів цієї праці є таким. *Нехай — самоспряжений оператор, а φ — функціонал з простору \mathcal{H}_{-2} такий, що $\|(A - i)^{-1}\varphi\| = 1$. Припустимо, що φ_n та ψ_n — дві довільні послідовності з гільбертового простору \mathcal{H} , які збігаються до φ в \mathcal{H}_{-2} і, крім того, $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n, A(A^2 + 1)^{-1}\varphi_n \rangle = c$. Тоді сім'я несамоспряжених операторів $B_\alpha^n = A + \alpha \langle \psi_n, \cdot \rangle \varphi_n$ збігається до оператора A_α в сенсі рівномірної резольвентної збіжності. Якщо ж $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n, A(A^2 + 1)^{-1}\varphi_n \rangle = \infty$, то оператори B_α^n збігаються до незбуреного оператора A .*

Теорема 3.4 є конкретизацією цього результату для вільного оператора Шрединґера на прямій зі збуренням з простору Соболева $W_2^{-2}(\mathbb{R})$.

Розділ 4

ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З ЛОКАЛЬНИМИ ЗБУРЕННЯМИ МАГНІТНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

У цьому розділі ми вивчимо поведінку сімей операторів Шредингера з одночасним локальним збуренням як електричного, так і магнітного потенціалів, і опишемо вплив магнітних полів на точкові взаємодії, що виникають в точних моделях. Цей вплив суттєво відрізняється від впливу неперервних магнітних полів, які можна виключити з оператора Шредингера калібрувальними перетвореннями. Ми розглянемо випадки, коли магнітні поля взаємодіють із сингулярними електричними полями у формі локальних потенціальних збурень та збурень рангу два. Узагальнимо теореми про збіжність сімей операторів Шредингера зі збуреннями електричного поля, які доведені у попередніх розділах. Локалізоване магнітне поле стає перешкодою для рівномірної резольвентної збіжності операторів, тому збіжність операторів з магнітним полем ми отримуємо в сильній резольвентній топології. Ми вивчатимемо сім'ї операторів Шредингера, які в частковому випадку можна трактувати як регуляризації псевдогамільтоніанів

$$\begin{aligned} & \left(i \frac{d}{dx} + b_1 \delta'(x) + b_2 \delta(x) \right)^2 + b_3 \delta'(x) + b_4 \delta(x), \\ & \left(i \frac{d}{dx} + b_1 \delta(x) \right)^2 + b_2 (\langle \delta'(x), \cdot \rangle \delta(x) + \langle \delta(x), \cdot \rangle \delta'(x)) + b_3 \delta(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ці результати дещо змінюють загальноприйнятий погляд на роль магнітного поля в одновимірних точних моделях нерелятивістської квантової механіки. Результати розділу опубліковані в [82].

В останні роки одновимірні оператори Шредингера з магнітними полями стали активно застосовувати в теорії квантових графів. Однією з важливих проблем

цієї теорії є наближений опис динаміки квантової частинки, що перебуває у реальному мезоскопічному хвилеводі дуже малого радіусу, її динамікою на квантовому графі. В [83] автори продемонстрували як самоспряжену взаємодію на квантовому графі можна апроксимувати сім'єю магнітних операторів Шрединґера на трубчастій мережі, побудованій навколо графа. У двовимірному випадку збіжність операторів $\mathcal{H}_\varepsilon = (i\nabla + \varepsilon^{-1}A(x/\varepsilon))^2 + \varepsilon^{-2}V(x/\varepsilon)$ із сингулярними магнітним і електричним потенціалами з компактними носіями та відповідну задачу розсіювання вивчав Тамура [84–86]. Математичні основи магнітних операторів Шрединґера закладені в працях Аврона, Хербста і Саймона [87–90].

4.1 Калібрувальні перетворення магнітного поля

Одновимірний оператор Шрединґера з неперервно диференційовним магнітним потенціалом

$$M(b) = \left(i \frac{d}{dx} + b(x) \right)^2 + V(x)$$

не вважають цікавим об'єктом у математичних дослідженнях, бо неперервне магнітне поле b є еквівалентним нульовому полю при відповідному калібруванні. Математичні моделі часто містять параметри, які не визначаються фізичною моделлю і можуть змінюватися на деяких множинах, не змінюючи водночас фізики процесу. Найпростішими прикладами є потенціали векторних полів та енергетичні потенціали, які зазвичай визначені з точністю до сталого доданка, або ж хвильова функція в квантовій механіці, яка визначена з точністю до унімодулярного множника $e^{i\alpha}$. Проте в моделях часто присутні не лише числові, а й функційні параметри. Калібрувальна інваріантність — це вимога незалежності фізичних теорій від певних перетворень, які відображають приховану симетрію фізичних полів. Перетворення, щодо яких вимагається інваріантність фізичних теорій, називають калібрувальними перетвореннями.

Нехай $B(x) = \int_0^x b(t) dt$. Якщо потенціал магнітного поля b є неперервно диференційовний, або хоча б абсолютно неперервний, то легко переконатися, що

$$e^{-iB(x)} \left(i \frac{d}{dx} + b(x) \right)^2 \left(e^{iB(x)} \psi(x) \right) = - \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) \quad (4.2)$$

для усіх функцій $\psi \in W_{2,loc}^2(\mathbb{R})$. Зауважимо, що ліва частина формули в розгорнутому вигляді містить доданок $ib'(x)\psi(x)$, тому додаткові умови гладкості для b є необхідними. Ввівши на області визначення оператора $M(b)$ унітарне перетворення $G\psi = e^{-iB}\psi$, дістанемо $GM(b)G^{-1} = M(0)$. Ця рівність означає, що оператор $M(b)$ є унітарно еквівалентним операторові Шредингера $M(0) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ без магнітного поля. Унітарний оператор G є калібрувальним перетворенням в теорії операторів Шредингера з магнітними полями. Отже, з погляду різноманітних досліджень достатньо вивчати лише властивості оператора $M(0)$. Проте для сімей операторів $M(b^\varepsilon)$ з послідовністю полів b^ε , які збігаються в просторах Соболева W_2^p з від'ємним показником p , рівність (4.2) не витримує граничного переходу. Іншими словами, граничний оператор для сім'ї $G_\varepsilon M(b^\varepsilon)G_\varepsilon^{-1}$ часто не збігається з $M(0)$. Тому питання збіжності операторів $M(b^\varepsilon)$ є цікавим і вимагає додаткових досліджень.

Усталеною є думка [35], що так званий фазовий множник $e^{i\varphi}$ у зв'язаних точкових взаємодіях, для прикладу в початку координат

$$\begin{pmatrix} \psi(+0) \\ \psi'(+0) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(-0) \\ \psi'(-0) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

може виникати в точних моделях лише при наявності локального магнітного поля, причому це поле має вплив лише на параметр φ , але не на елементи матриці c_{kl} . В праці [91] Коунтіно, Ногамі та Томіо навіть припустили, що цей фазовий множник є зайвим при описі точкових взаємодій і він не продукує цікавих ефектів. Вони стверджували, що коли в системі передбачають часову інверсію, то кількість незалежних параметрів, що описують взаємодії (4.3), можна звести до трьох. Нагадаємо, що в (4.3) п'ять дійсних параметрів φ , c_{11} , c_{12} , c_{21} та c_{22} пов'язані одним співвідношенням $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1$, тобто формула (4.3) задає чотирьохпараметричну сім'ю зв'язаних точкових взаємодій. Проте Альбеверіо, Феї та Курасов [92] заперечили тезу, що фазовим параметром можна ігнорувати, зокрема коли мова йде про нестационарні задачі. В теоремі 3.1 ми також показали, що фазовий множник $e^{i\varphi}$ може виникати в точних моделях і для операторів Шредингера без магнітного поля. В цьому підрозділі ми побудуємо точні моделі, в яких магнітне поле матиме вплив на усю четвірку параметрів в (4.3), а не лише на параметр φ .

Доведемо деякі твердження, пов'язані з калібрувальними перетвореннями.

Лема 4.1. *В гільбертовому просторі \mathcal{L} розглянемо сім'ю самоспряжених операторів S_ε та сім'ю унітарних операторів G_ε . Нехай*

- $S_\varepsilon \rightarrow S$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності;
- $G_\varepsilon \rightarrow G$ в сильній операторній топології при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- G є унітарним оператором в \mathcal{L} .

Тоді оператори $G_\varepsilon S_\varepsilon G_\varepsilon^{-1}$ збігаються в сильній резольвентній топології до оператора GSG^{-1} з областю визначення $\{\phi \in \mathcal{L}: G^{-1}\phi \in \text{dom } S\}$.

Доведення. Введемо позначення $Q_\varepsilon = G_\varepsilon S_\varepsilon G_\varepsilon^{-1}$ та $Q = GSG^{-1}$. Зауважимо, що

$$\begin{aligned} (Q_\varepsilon - z)^{-1} - (Q - z)^{-1} &= G_\varepsilon((S_\varepsilon - z)^{-1} - (S - z)^{-1})G_\varepsilon^{-1} + \\ &\quad + G_\varepsilon(S - z)^{-1}(G_\varepsilon^{-1} - G^{-1}) + (G_\varepsilon - G)(S - z)^{-1}G^{-1} \end{aligned}$$

для усіх $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Оператор S є самоспряженим як границя самоспряжених операторів S_ε у рівномірній резольвентній топології. Тому

$$\begin{aligned} \|(Q_\varepsilon - z)^{-1}f - (Q - z)^{-1}f\| &\leq \|(S_\varepsilon - z)^{-1} - (S - z)^{-1}\| \|f\| + \\ &\quad + |\text{Im } z|^{-1} \|(G_\varepsilon^{-1} - G^{-1})f\| + \|(G_\varepsilon - G)(S - z)^{-1}G^{-1}f\| \end{aligned} \quad (4.4)$$

для всіх $f \in \mathcal{L}$. Перший доданок в правій частині прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, бо резольвенти операторів S_ε збігаються до резольвенти S в рівномірній нормі. Останні два доданки є нескінченно малими при $\varepsilon \rightarrow 0$, завдяки тому, що G_ε збігаються в сильній топології. \square

Тепер розглянемо послідовність магнітних потенціалів спеціального вигляду

$$b^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}b_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^{-1}b_0(\varepsilon^{-1}x), \quad (4.5)$$

де b_0 та b_1 — абсолютно неперервні функції на прямій з компактним носієм. Нехай носії b_0 і b_1 містяться у відрізку $\mathcal{I} = [-1, 1]$, а

$$B^\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^x b^\varepsilon(t) dt = \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{x/\varepsilon} b_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{x/\varepsilon} b_0(\tau) d\tau$$

— первісна функції b^ε . Очевидно, що $B_\varepsilon(x) = 0$ для $x \leq -\varepsilon$, а також

$$B^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} b_1(\tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} b_0(\tau) d\tau \quad \text{при } x \geq \varepsilon. \quad (4.6)$$

Введемо позначення

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} b_0(\tau) d\tau$$

і розглянемо два унітарні оператори

$$(G_\varepsilon\phi)(x) = e^{iB^\varepsilon(x)}\phi(x), \quad (G\phi)(x) = e^{i\mu H(x)}\phi(x) \quad (4.7)$$

в просторі $L_2(\mathbb{R})$, де H — функція Гевісайда, а саме,

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0, \\ 1, & \text{коли } x > 0. \end{cases}$$

Лема 4.2. *Якщо послідовність b^ε збігається в просторі узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, то оператори G_ε збігаються до оператора G при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сильній операторній топології.*

Доведення. Послідовність b^ε збігається в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ тоді і лише тоді, коли функція b_1 має нульове середнє, тобто

$$\int_{\mathbb{R}} b_1(\tau) d\tau = 0. \quad (4.8)$$

Тоді $b^\varepsilon \rightarrow \mu_1\delta'(x) + \mu\delta(x)$, де $\mu_1 = -\int_{\mathbb{R}} \tau b_1(\tau) d\tau$. До того ж з (4.6), (4.8) відразу дістаємо, що $B^\varepsilon(x) = \mu$ при $x \geq \varepsilon$. Для кожної функції $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ маємо

$$\begin{aligned} \|G_\varepsilon\phi - G\phi\|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| e^{iB^\varepsilon(x)} - e^{i\mu H(x)} \right|^2 |\phi(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| e^{iB^\varepsilon(x)} - e^{i\mu H(x)} \right|^2 |\phi(x)|^2 dx \leq 4 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\phi(x)|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.9)$$

оскільки $B^\varepsilon(x) = \mu H(x)$, коли $|x| \geq \varepsilon$. Права частина в (4.9) прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ з огляду на абсолютну неперервність інтеграла Лебега. \square

Зауважимо, що коли δ -подібний потенціал b_0 теж має нульове середнє, тобто $\mu = 0$, то G_ε збігаються до одиничного оператора. В цьому випадку магнітне поле зникає в границі.

4.2 Взаємодія магнітних потенціалів з $(\alpha\delta' + \beta\delta)$ -подібними збуреннями електричних потенціалів

Розглянемо сім'ю самоспряжених операторів

$$\mathcal{M}_{\varepsilon,\nu} = \left(i \frac{d}{dx} + b^\varepsilon(x) \right)^2 + V_0(x) + \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) + \beta\nu^{-1}U(\nu^{-1}x), \quad (4.10)$$

де магнітний потенціал b^ε задано рівністю (4.5). Решта потенціалів такі, як в операторах $H_{\varepsilon,\nu} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \alpha\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) + \beta\nu^{-1}U(\nu^{-1}x)$, які ми вивчали в розділі 2. Крім того, $\text{dom } \mathcal{M}_{\varepsilon,\nu} = \text{dom } H_{\varepsilon,\nu}$. Нагадаємо, що означення простору \mathcal{V}_0 наведено на стор. 39.

Теорема 4.1. *Припустимо, що послідовність магнітних потенціалів*

$$b^\varepsilon = \varepsilon^{-2}b_1(\varepsilon^{-1} \cdot) + \varepsilon^{-1}b_0(\varepsilon^{-1} \cdot)$$

є збіжною в просторі узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а числова додатна послідовність $\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є такою, що $\nu_\varepsilon \rightarrow 0$ і відношення $\varepsilon^{-1}\nu_\varepsilon$ має скінченну чи нескінченну границю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Якщо стала взаємодії α належить до резонансної множини $\mathcal{R}(V)$ потенціалу V , то сім'я операторів $\mathcal{M}_{\varepsilon\nu_\varepsilon}$ збігається в сильній резольвентній топології при $\varepsilon \rightarrow 0$. Граничний оператор \mathcal{M} діє за правилом $\mathcal{M}\phi = -\phi'' + V_0\phi$ на функціях ϕ з класу \mathcal{V}_0 , які підпорядковані умовам спряження

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi'(+0) \end{pmatrix} = e^{i\mu} \begin{pmatrix} \theta_\alpha & 0 \\ \beta\zeta_\alpha & \theta_\alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ \phi'(-0) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Тут $\mu = \int_{\mathbb{R}} b_0(x) dx$, діагональний елемент матриці θ_α визначений в (2.3), а величина ζ_α задана формулами (2.4)–(2.6) залежно від значення границі відношення $\varepsilon^{-1}\nu_\varepsilon$.

Якщо ж $\alpha \notin \mathcal{R}(V)$, то сім'я операторів $\mathcal{M}_{\varepsilon\nu_\varepsilon}$ збігається в сильній резольвентній топології при $\varepsilon \rightarrow 0$ до прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ двох операторів Шрединґера на півосях з умовами Діріхле, які визначені в (1.12).

Доведення. Оператори $\mathcal{M}_{\varepsilon,\nu}$ є унітарно еквівалентні операторам $H_{\varepsilon,\nu}$, бо для кожного додатного ε маємо рівність $\mathcal{M}_{\varepsilon,\nu} = G_\varepsilon H_{\varepsilon,\nu} G_\varepsilon^{-1}$ з унітарними перетворенням G_ε , визначеним в (4.7). Умови, при яких оператори $H_{\varepsilon,\nu}$ збігаються в

рівномірній резольвентній топології при одночасному прямуванні до нуля параметрів ε та ν , описані на стор. 82 (див. також теореми 2.1–2.3). Якщо b^ε збігаються в сенсі узагальнених функцій, то згідно з лемою 4.2 маємо також збіжність $G_\varepsilon \rightarrow G$ в сильній резольвентній топології, причому границя $G\phi = e^{i\mu H}\phi$ є унітарним оператором. Нехай \mathcal{H} — граничний оператор для сім'ї $\mathcal{H}_{\varepsilon\nu_\varepsilon}$ в одному з трьох резонансних випадків, тобто $\mathcal{H}\psi = -\psi'' + V_0\psi$ і $\text{dom } \mathcal{H}$ складається з функцій $\psi \in \mathcal{V}_0$ таких, що

$$\begin{pmatrix} \psi(+0) \\ \psi'(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_\alpha & 0 \\ \beta\zeta_\alpha & \theta_\alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(-0) \\ \psi'(-0) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Тоді відображення $G^{-1}: \text{dom } \mathcal{M} \rightarrow \text{dom } \mathcal{H}$ є лінійним ізоморфізмом. Справді, для будь-якої функції ϕ маємо

$$\psi(x) = G^{-1}\phi(x) = e^{-i\mu H(x)}\phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{коли } x < 0, \\ e^{-i\mu}\phi(x), & \text{коли } x > 0. \end{cases}$$

Очевидно, що функція $\psi \in \mathcal{V}_0$ задовольнятиме умови (4.12) тоді і лише тоді, коли функція $\phi \in \mathcal{V}_0$ задовольнятиме умови (4.11). Тому граничний оператор \mathcal{M} в теоремі можна записати так $\mathcal{M} = G\mathcal{H}G^{-1}$. Такі ж міркування справедливі і в разі відсутності резонансу, коли $\text{dom } \mathcal{M} = \text{dom } \mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$. Тепер теза теореми випливає з леми 4.1. \square

Запишемо матрицю точкових взаємодій (4.12)

$$e^{i\mu(b_0)} \begin{pmatrix} \theta_\alpha(V) & 0 \\ \beta\zeta_\alpha(V, U) & \theta_\alpha^{-1}(V) \end{pmatrix},$$

акцентуючи на залежності її елементів від потенціалів оператора $\mathcal{M}_{\varepsilon, \nu}$. Бачимо, що після переходу до границі від магнітного потенціалу залежить лише фазовий множник $e^{i\mu}$. Це типова ситуація для операторів Шредингера з потенціальними збуреннями. Проте ситуація кардинально змінюється для операторів зі збуреннями скінченного рангу.

4.3 Взаємодія магнітних потенціалів з локальними збуреннями рангу два електричного потенціалу

Звернемося до іншої сім'ї самоспряжених операторів

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \left(i \frac{d}{dx} + \varepsilon^{-1} b(\varepsilon^{-1} x) \right)^2 + V_0(x) + \varepsilon^{-3} K_{\alpha, \varepsilon} + \beta \varepsilon^{-1} q(\varepsilon^{-1} x), \quad (4.13)$$

де b — абсолютно неперервна функція на \mathbb{R} з компактним носієм, а

$$\begin{aligned} (K_{\alpha, \varepsilon} \phi)(x) &= \bar{\alpha} \langle g(\varepsilon^{-1} \cdot), \phi \rangle f(\varepsilon^{-1} x) + \alpha \langle f(\varepsilon^{-1} \cdot), \phi \rangle g(\varepsilon^{-1} x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\bar{\alpha} \bar{g}(\varepsilon^{-1} t) f(\varepsilon^{-1} x) + \alpha \bar{f}(\varepsilon^{-1} t) g(\varepsilon^{-1} x)) \phi(t) dt \end{aligned}$$

— оператор рангу два в просторі $L_2(\mathbb{R})$, β — дійсна стала взаємодії. Функції f , g та q мають такі ж властивості, як в підрозділі 3.1. Оператор $K_{\alpha, \varepsilon}$, на відміну від оператора K_ε в (3.5), містить комплексну сталу взаємодії α . Насправді, $K_{\alpha, \varepsilon}$ — це оператор K_ε , який побудований за парою функцій f та αg . Вводити дві сталі взаємодії немає сенсу, бо тоді фактичною сталою взаємодії буде їх добуток.

Зрозуміло, що гранична поведінка операторів \mathcal{T}_ε , як і операторів H_ε в (3.6), суттєво залежатиме від того, чи має інтегро-диференціальний оператор

$$K_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \bar{\alpha} \langle g, \cdot \rangle f(x) + \alpha \langle f, \cdot \rangle g(x)$$

резонанси нульової енергії, а також яка вимірність та структура лінійного простору напівзв'язних станів. Виникає питання, чи можна отримати резонанси нульової енергії цього оператора для заданої пари функцій f та g , змінюючи лише сталу α . В лемі 1.4 ми довели, що у випадку потенціального збурення вільного оператор Шрединґера $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha V$ для кожного потенціал V існує зліченна множина резонансних сталих взаємодії α . Для K_α резонанси нульової енергії теж не є чимось рідкісним, і вибрана пара f та αg , взагалі кажучи, має доволі багату множину резонансних α . Через $\mathcal{R}(f, g)$ позначимо множину усіх комплексних чисел α , для яких K_α володіє резонансом нульової енергії. З огляду на лему 3.1 ця множина може містити три підмножини. Нехай $\mathcal{R}_c(f, g)$ — множина усіх сталих взаємодії, при яких оператор K_α має простий резонанс нульової енергії зі сталими функціями, як напівзв'язними станами; $\mathcal{R}_\sigma(f, g)$ — множина усіх значень

α , при яких оператор K_α має простий резонанс з напівзв'язними станами σ ; $\mathcal{R}_\omega(f, g)$ — множина сталих взаємодії, для яких оператор володіє подвійним резонансом. Доведемо для оператора K_α твердження, схоже до леми 1.4, і опишемо, як влаштовані такі резонансні множина на комплексній площині.

Використовуватимемо позначення $n_f = \|f^{(-1)}\|$, $n_g = \|g^{(-1)}\|$ і $p = \langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle$.

Лема 4.3. *Нехай f та g — лінійно незалежні в $L_2(\mathbb{R})$ функції з компактними носіями.*

(i) *Якщо обидва числа f_0 і g_0 відмінні від нуля, то*

$$\mathcal{R}(f, g) = \mathcal{R}_\sigma(f, g) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - \alpha_0| = |\alpha_0|\},$$

де $\alpha_0 = f_0 \bar{g}_0 \|g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}\|^{-2}$, тобто резонансною множиною оператор K_α є колом на площині \mathbb{C} з центром в точці α_0 , яке проходить через початок координат.

(ii) *Нехай функції f_0 і g_0 мають нульове середнє, тобто $f_0 = 0$ і $g_0 = 0$. Тоді резонансна множина оператор K_α збігається з усією комплексною множиною. До того ж $\mathcal{R}(f, g) = \mathcal{R}_c(f, g) \cup \mathcal{R}_\omega(f, g)$, а множина подвійних резонансів є колом $\mathcal{R}_\omega(f, g) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - \alpha_1| = \rho\}$, де*

$$\alpha_1 = \frac{\bar{p}}{n_f^2 n_g^2 - |p|^2}, \quad \rho = \frac{n_f n_g}{n_f^2 n_g^2 - |p|^2}.$$

(iii) *Якщо лише одна з величин f_0 чи g_0 відмінна від нуля, то резонансна множина $\mathcal{R}(f, g)$ складається з однієї точки $\alpha = 0$.*

Доведення. Згідно з лемою 3.1 оператор K_α має резонанс нульової енергії тоді і лише тоді, коли

$$|\alpha|^2 \|g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}\|^2 = 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha} f_0 \bar{g}_0). \quad (4.14)$$

Якщо, наприклад, $f_0 = 0$, але g_0 відмінне від нуля, то $|\alpha| \|f^{(-1)}\| = 0$. Ця умова виконується лише при $\alpha = 0$, бо в іншому випадку функція f мала б бути нульовою, що суперечить лінійній незалежності пари f і g . Зрозуміло, що оператор T_0 є вільним оператором Шредингера і має резонанс. Ми довели пункт (iii).

Нехай $f_0 g_0 \neq 0$. Позначимо $a = \|g_0 f^{(-1)} - f_0 g^{(-1)}\|^2$ та $m = f_0 \bar{g}_0$. Тоді (4.14) набуде вигляду $a|\alpha|^2 = 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha} m)$. Поклавши $\alpha = x + iy$ та $m = m_R + im_I$, легко отримуємо $a(x^2 + y^2) - 2(m_R x + m_I y) = 0$, яке можна записати так

$$\left(x - \frac{m_R}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{m_I}{a}\right)^2 = \frac{m_R^2 + m_I^2}{a^2}.$$

Зауважимо, число a не дорівнює нулю, бо первісні $f^{(-1)}$ і $g^{(-1)}$ теж лінійно незалежні. Якщо ввести позначення $\alpha_0 = m/a$, то рівняння набуде остаточного вигляду $|\alpha - \alpha_0| = |\alpha_0|$.

Нарешті припустимо, що $f_0 = 0$ і $g_0 = 0$. Тоді рівність (4.14) виконується безумовно, а оператор K_α має резонанс нульової енергії при всіх $\alpha \in \mathbb{C}$. До того ж множина $\mathcal{R}_\sigma(f, g)$ є порожньою. А з огляду на лему 3.1 (iii) множина $\mathcal{R}_\omega(f, g)$ визначена рівнянням $\pi_\alpha = |\alpha| \|f^{(-1)}\| \cdot \|g^{(-1)}\| - |\alpha \langle f^{(-1)}, g^{(-1)} \rangle + 1| = 0$, яке можна коротко записати так $n_f n_g |\alpha| = |p\alpha + 1|$ або ж $|\alpha^{-1} + p| = n_f n_g$.

Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$ та $r \in \mathbb{R}$. Легко переконатися, що дробово-лінійне відображення $z \mapsto z^{-1}$ переводить коло $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ в інше коло

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{\bar{z}_0}{r^2 - |z_0|^2} \right| = \frac{r}{r^2 - |z_0|^2} \right\}$$

при умові, що коло-прообраз не містить точки $z = 0$, тобто $r \neq |z_0|$. Отже, область резонансів $\mathcal{R}_\omega(f, g)$ виникає як образ кола $\{z \in \mathbb{C} : |z + p| = n_f n_g\}$ під дією перетворення $z \mapsto z^{-1}$. Таке коло не містить $z = 0$, бо $|p| < n_f n_g$. Справді, остання нерівність є нерівністю Коші-Буняковського для лінійно незалежних функцій $f^{(-1)}$ та $g^{(-1)}$. Отриманий образ є колом, описаним в пункті (ii). \square

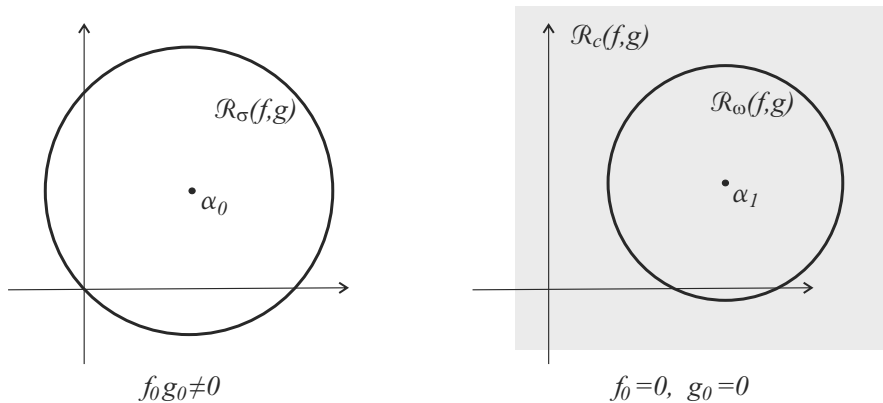


Рис. 4.1: Резонансні множини оператора K_α

Множиною простих резонансів $\mathcal{R}_\sigma(f, g)$ можуть бути довільні кола, які проходять через початок координат. Поведінка ж на площині множини подвійних резонансів $\mathcal{R}_\omega(f, g)$ є складнішою. Наприклад, якщо функції $f^{(-1)}$ і $g^{(-1)}$ ортонормовані, то $\mathcal{R}_\omega(f, g)$ — це одиничне коло з центром в нулі, бо $n_f = n_g = 1$ і $p = 0$. Якщо ж $f^{(-1)}$ і $g^{(-1)}$ просто ортогональні, то $\mathcal{R}_\omega(f, g) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = n_f^{-1} n_g^{-1}\}$. Коли $g = f + \varepsilon h$ і кут між f і g стає малим при $\varepsilon \rightarrow 0$, то центр α_0 прямує на нескінченність, а радіус стає нескінченно великим, бо $n_f n_g - |p|$ є порядку ε .

Введемо позначення

$$B(x) = \int_{-\infty}^x b(t) dt$$

і застосуємо до операторів \mathcal{T}_ε калібрувальне перетворення $G_\varepsilon \phi = e^{-iB(\frac{x}{\varepsilon})} \phi$. Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon = G_\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon G_\varepsilon^{-1}$ не збігається з оператором H_ε в (3.6), як це було у доведенні теореми 4.1 для пари операторів $\mathcal{M}_{\varepsilon, \nu}$ та $H_{\varepsilon, \nu}$. Хоча \mathcal{H}_ε має таку ж структуру як H_ε , проте його збурення рангу два породжене іншою парою функцій. На відміну від операторів множення на функцію U , які є інваріантними щодо калібрування $G_\varepsilon U(x) G_\varepsilon^{-1} = U(x)$, оператор $K_{\alpha, \varepsilon}$ такою інваріантністю не володіє. Справді,

$$\begin{aligned} (G_\varepsilon K_{\alpha, \varepsilon} G_\varepsilon^{-1} \phi)(x) &= \bar{\alpha} \langle g(\varepsilon^{-1} \cdot), e^{iB(\varepsilon^{-1} \cdot)} \phi \rangle e^{-iB(\varepsilon^{-1} x)} f(\varepsilon^{-1} x) + \\ &\quad + \alpha \langle f(\varepsilon^{-1} \cdot), e^{iB(\varepsilon^{-1} \cdot)} \phi \rangle e^{-iB(\varepsilon^{-1} x)} g(\varepsilon^{-1} x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\bar{\alpha} \overline{e^{-iB(\frac{t}{\varepsilon})} g(\frac{t}{\varepsilon})} e^{-iB(\frac{x}{\varepsilon})} f(\frac{x}{\varepsilon}) + \alpha \overline{e^{-iB(\frac{t}{\varepsilon})} f(\frac{t}{\varepsilon})} e^{-iB(\frac{x}{\varepsilon})} g(\frac{x}{\varepsilon}) \right) \phi(t) dt = \\ &= \bar{\alpha} \langle g_b(\varepsilon^{-1} \cdot), \phi \rangle f_b(\varepsilon^{-1} x) + \alpha \langle f_b(\varepsilon^{-1} \cdot), \phi \rangle g_b(\varepsilon^{-1} x), \end{aligned}$$

де нові функції, на які проектує оператор рангу два, мають вигляд

$$f_b(x) = e^{-iB(x)} f(x) = e^{-i \int_{-\infty}^x b(t) dt} f(x), \quad g_b(x) = e^{-iB(x)} g(x) = e^{-i \int_{-\infty}^x b(t) dt} g(x).$$

Отже, оператор \mathcal{T}_ε є унітарно еквівалентним оператору

$$\mathcal{H}_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \varepsilon^{-3} (\bar{\alpha} \langle g_b(\varepsilon^{-1} \cdot), \cdot \rangle f_b(\frac{x}{\varepsilon}) + \alpha \langle f_b(\varepsilon^{-1} \cdot), \cdot \rangle g_b(\frac{x}{\varepsilon})) + \beta \varepsilon^{-1} q(\frac{x}{\varepsilon}),$$

в якому збурення рангу два “пам’ятає” про магнітний потенціал b . Згодом через функції f_b і g_b вплив магнітного потенціалу пошириться на усі елементи матриці точкових взаємодій. У випадку $\alpha \in \mathcal{R}_\omega(f_b, g_b)$, тобто коли оператор

$$T_b = -\frac{d^2}{dx^2} + \bar{\alpha} \langle g_b, \cdot \rangle f_b(x) + \alpha \langle f_b, \cdot \rangle g_b(x)$$

володіє подвійним резонансом нульової енергії, його простір напівзв'язних станів породжують стала функція та функція вигляду

$$\omega_{\alpha,b} = e^{i \arg(\alpha^{-1} + \langle f_b^{(-1)}, g_b^{(-1)} \rangle)} \|g_b^{(-1)}\| f_b^{(-2)} - \|f_b^{(-1)}\| g_b^{(-2)}.$$

Введемо позначення, схожі до тих, які були в попередньому розділі:

$$\begin{aligned} \varkappa &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega_{\alpha,b}(x), & \mu &= \int_{\mathbb{R}} b(x) dx, \\ a_0 &= \int_{\mathbb{R}} q(x) dx, & a_1 &= \int_{\mathbb{R}} q(x) \omega_{\alpha,b}(x) dx, & a_2 &= \int_{\mathbb{R}} q(x) |\omega_{\alpha,b}(x)|^2 dx, \\ m_{b,f} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iB(x)} f(x) dx, & m_{b,g} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iB(x)} g(x) dx. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови:*

- f і g — лінійно незалежні функції в $L_2(\mathbb{R})$;
- величини $m_{b,f}$ і $m_{b,g}$ дорівнюють нулеві;
- стала взаємодії α належить до множини $\mathcal{R}_\omega(e^{-iB}f, e^{-iB}g)$ подвійних резонансів оператора T_b ;
- $a_2 \neq \bar{\varkappa}a_1$ та $\beta \neq 0$.

Тоді сім'я операторів \mathcal{T}_ε збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сильній резольвентній топології до оператора \mathcal{T} , що діє за правилом $\mathcal{T}\phi = -\phi'' + V_0\phi$ на функціях ϕ з \mathcal{V}_0 , які підпорядковані умовам

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi'(+0) \end{pmatrix} = e^{i\vartheta} \begin{pmatrix} \frac{a_0|\varkappa|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\varkappa}a_1) + a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa}a_1|} & \frac{|\varkappa|^2}{\beta|a_2 - \bar{\varkappa}a_1|} \\ \frac{\beta(a_0a_2 - |a_1|^2)}{|a_2 - \bar{\varkappa}a_1|} & \frac{a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa}a_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ \phi'(-0) \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

де $\vartheta = \mu + \arg(a_2 - \varkappa\bar{a}_1)$, а решта величин визначені формулами (4.15).

Доведення. Умови теореми вибрані такими, щоб граничну поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$ операторів $\mathcal{H}_\varepsilon = G_\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon G_\varepsilon^{-1}$ описував випадок $A1$ теореми 3.1. В цій теоремі стала взаємодії β була одиницею, але її поява в операторі \mathcal{H}_ε має вплив лише на a_k —

в умовах спряження (3.11) треба усіх їх змінити на βa_k . Тоді матимемо

$$e^{i \arg \beta(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{|\beta|} \cdot \frac{a_0 |\varkappa|^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\varkappa} a_1) + a_2}{\beta^2 \cdot \frac{a_0 a_2 - |a_1|^2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|}} & \frac{1}{|\beta|} \cdot \frac{|\varkappa|^2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \\ \frac{\beta}{|\beta|} \cdot \frac{a_0 a_2 - |a_1|^2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} & \frac{\beta}{|\beta|} \cdot \frac{a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{i \arg \beta(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)} \frac{\beta}{|\beta|} \begin{pmatrix} \frac{a_0 |\varkappa|^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\varkappa} a_1) + a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} & \frac{|\varkappa|^2}{\beta |a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \\ \frac{\beta(a_0 a_2 - |a_1|^2)}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} & \frac{a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \end{pmatrix},$$

Але $e^{i \arg \beta(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)} \frac{\beta}{|\beta|} = e^{2i \arg \beta} e^{i \arg(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)} = e^{i \arg(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)}$, оскільки для дійсних β маємо $e^{2i \arg \beta} = 1$. Тоді оператори \mathcal{H}_ε збігаються при $\varepsilon \rightarrow 0$ в рівномірній резольвентній топології до оператора $\mathcal{H}\psi = -\psi'' + V_0\psi$, заданого на функціях $\psi \in \mathcal{V}_0$, для яких виконуються умови

$$\begin{pmatrix} \psi(+0) \\ \psi'(+0) \end{pmatrix} = e^{i \arg(a_2 - \varkappa \bar{a}_1)} \begin{pmatrix} \frac{a_0 |\varkappa|^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\varkappa} a_1) + a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} & \frac{|\varkappa|^2}{\beta |a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \\ \frac{\beta(a_0 a_2 - |a_1|^2)}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} & \frac{a_2}{|a_2 - \bar{\varkappa} a_1|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(-0) \\ \psi'(-0) \end{pmatrix}.$$

З огляду на лему 4.2 послідовність унітарних операторів $G_\varepsilon = e^{iB(\frac{x}{\varepsilon})}$ збігається в сенсі сильної збіжності резольвент до унітарного оператора $G = e^{i\mu H(x)}$, де H — функція Гевісайда. До того ж $G: \operatorname{dom} \mathcal{T} \rightarrow \operatorname{dom} \mathcal{H}$ — лінійний ізоморфізм. Застосовуючи знову лему 4.1 для сімей операторів $\{\mathcal{H}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ та $\{G_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, робимо висновок про сильну резольвентну збіжність $\mathcal{T}_\varepsilon = G_\varepsilon^{-1} \mathcal{H}_\varepsilon G_\varepsilon \rightarrow G^{-1} \mathcal{H} G = \mathcal{T}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, що завершує доведення. \square

Неінваріантність збурень скінченного рангу відносно калібрувальних перетворень привела до того, що магнітний потенціал b проявився в усіх коефіцієнтах матриці (4.16). Через функцію $\omega_{\alpha,b}$ залежати від b стали також величини a_1 , a_2 та \varkappa . Тому точкові взаємодії (4.16) схематично можна записати так

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi'(+0) \end{pmatrix} = e^{i\mu(b)} \begin{pmatrix} c_{11}(b) & c_{12}(b) \\ c_{21}(b) & c_{22}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ \phi'(-0) \end{pmatrix},$$

акцентуючи на залежності від потенціала b не лише фазового множника $e^{i\mu(b)}$.

Сформулюємо результати для магнітних операторів Шредингера, які пов'язані з випадками $A2$ та $A3$ теореми 3.1, коли магнітне поле відсутнє. Доведення двох

наступних теорем аналогічні доведенню теореми 4.2. Якщо α належить до множини $\mathcal{R}_\sigma(f_b, g_b)$, то згідно з лемою 3.1 (i) напівзв'язний стан оператор T_β в наших позначеннях має вигляд

$$\sigma_b(x) = |m_{b,g}|^2 \left(\overline{m}_{b,f} f_b^{(-2)}(x) - \langle f_b, f_b^{(-2)} \rangle \right) - |m_{b,f}|^2 \left(\overline{m}_{b,g} g_b^{(-2)}(x) - \langle g_b, g_b^{(-2)} \rangle \right)$$

при $\alpha \neq 0$ і $\sigma_b(x) = 1$ при $\alpha = 0$. Нехай також, що $\sigma_b^- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma_b(x)$, $\sigma_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma_b(x)$ та $\sigma_* = \int_{\mathbb{R}} q(x) |\sigma_b(x)|^2 dx$.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються такі умови:*

- f і g — лінійно незалежні функції в $L_2(\mathbb{R})$;
- обидві величини $m_{b,f}$ і $m_{b,g}$ є відмінними від нуля;
- стала взаємодії α належить до резонансної множини $\mathcal{R}_\sigma(e^{-iB}f, e^{-iB}g)$ оператора T_b ;
- границі σ_- та σ_+ напівзв'язного стану σ_b на обох нескінченностях є відмінні від нуля.

Тоді сім'я операторів \mathcal{T}_ε збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сильній резольвентній топології до оператора \mathcal{T} , що діє за правилом $\mathcal{T}\phi = -\phi'' + V_0\phi$ на функціях ϕ з \mathcal{V}_0 , які підпорядковані умовам

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi'(+0) \end{pmatrix} = e^{\mu - i \arg \sigma_-} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_+}{|\sigma_-|} & 0 \\ \frac{\beta \sigma_*}{\sigma_+ |\sigma_-|} & \frac{|\sigma_-|}{\sigma_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ \phi'(-0) \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.4. *Нехай величини \varkappa , μ , a_k , $m_{b,f}$ і $m_{b,g}$ визначені формулами (4.15). Припустимо, що f і g — лінійно незалежні функції в $L_2(\mathbb{R})$, обидва числа $m_{b,f}$ і $m_{b,g}$ дорівнюють нулеві та виконується одна із умов*

- стала взаємодії α не належить до множини $\mathcal{R}_\omega(e^{-iB}f, e^{-iB}g)$ подвійних резонансів оператора T_b ;
- α належить до множини $\mathcal{R}_\omega(e^{-iB}f, e^{-iB}g)$, але $\varkappa = 0$, $a_1 = 0$ і $a_2 = 0$.

Тоді сім'я операторів \mathcal{T}_ε збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сильній резольвентній топології до оператора \mathcal{T} , що діє за правилом $\mathcal{T}\phi = -\phi'' + V_0\phi$ на функціях ϕ з \mathcal{V}_0 ,

які підпорядковані умовам

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi'(+0) \end{pmatrix} = e^{\int_{\mathbb{R}} i b dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta \int_{\mathbb{R}} q dt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ \phi'(-0) \end{pmatrix}.$$

Схожі результати можна б було сформулювати і для випадків $B1$ – $B2$ з теореми 3.2. Проте ця теорема описує лише точні моделі з незв'язаними точковими взаємодіями, на які магнітне поле не має жодного впливу, і це поле зникає в границі.

Розділ 5

ПОРОГОВА ПОВЕДІНКА ВІД'ЄМНИХ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ОПЕРАТОРІВ ШРЕДИНГ'ЕРА

Результати розділу 2 можна ефективно застосувати у спектральній теорії операторів Шредингера, а саме, дослідженні існування від'ємних власних значень, які при малих сталих взаємодії поглинає неперервний спектр. Для спектральної теорії такі дослідження порогової поведінки власних значень і резонансів є цікавими самі по собі. Проте вивчення такого явища має також стосунок до питання стійкості розв'язків рівняння Кортевега-де-Вріза [93], а також існування “бризерів” (англ. breathers) — нелінійних локалізованих хвиль пульсуючої природи — для дискретних нелінійних операторів Шредингера [94, 95].

В 70–80-х роках минулого століття активно вивчали поведінку гамільтоніанів $\mathcal{H}_\lambda = -\Delta + \lambda U$ при малих енергіях, зокрема асимптотики при $\lambda \rightarrow 0$ власних значень та резонансів нульової енергії, а також явище абсорбування власних значень неперервними ділянками спектрів. Відомо, що у тривимірному випадку оператори \mathcal{H}_λ не мають власних значень, якщо потенціальна яма λU стає досить плиткою. Проте у вимірах 1 та 2 існують потенціали, які породжують обмежені стани з від'ємними значеннями енергії для як завгодно малих λ . Так Б. Саймон [96] довів для операторів Шредингера $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda U$, що умови

$$\int_{\mathbb{R}} U(x) dx \leq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2) |U(x)| dx < \infty,$$

накладені на потенціал U , гарантують для всіх додатних λ існування єдиного від'ємного власного значення e_λ , яке прямує до нуля при $\lambda \rightarrow 0$. М. Клаус [97] поширив цей результат на клас потенціалів Фаддеева-Марченка. Крім того, коли потенціали швидко спадають на нескінченності, зокрема мають компактний

носій, то власне значення e_λ є аналітичною функцією аргументу λ в околі $\lambda = 0$.

Питання про те, коли і як від’ємні власні значення операторів Шрединґера \mathcal{H}_λ поглинаються при $\lambda \rightarrow 0$ нижньою границею суттєвого спектру, вивчали в останні тридцять років багато дослідників [47, 53, 98–110]. Ця порогова поведінка власних значень теж суттєво залежить від вимірності задачі [98]. Так у двовимірному випадку власне значення e_λ є експоненціально малим при $\lambda \rightarrow 0$; у випадку одновимірного оператора — це власне значення має асимптотику $e_\lambda \sim c\lambda^2$ з ненульовою сталою c , коли $\int_{\mathbb{R}} U dx < 0$, та $e_\lambda \sim c\lambda^4$, коли $\int_{\mathbb{R}} U dx = 0$. В працях [47, 99] порогову поведінку власних значень та їх абсорбцію неперервним спектром вивчали як феномен абстрактної теорії збурень, зокрема отримана відповідь на питання, що трапиться з власним значенням в границі — воно зникне чи залишиться власним значенням, зануреним в неперервний спектр? Порогову поведінку власних значень у випадку гамільтоніанів з періодичними потенціалами, які піддавалися локальним збуренням, досліджували у [47, 111, 112].

Результати цього розділу опубліковані в працях [113, 114].

5.1 Порогова поведінка власних значень: теореми збіжності

5.1.1 Формулювання задачі та основних результатів

Основною метою підрозділу буде детальний асимптотичний аналіз порогової поведінки від’ємних власних значень сім’ї одновимірних операторів Шрединґера

$$H_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \lambda\alpha_\lambda U(\alpha_\lambda x), \quad \text{dom } H_\lambda = W_2^2(\mathbb{R}), \quad (5.1)$$

де U та V — дійснозначні потенціали класу $L^\infty(\mathbb{R})$ з компактним носієм і λ — додатний параметр. Про додатну послідовність $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda>0}$ припускатимемо, що вона має скінченну чи нескінченну границю при $\lambda \rightarrow 0$. Збурення $\lambda\alpha_\lambda U(\alpha_\lambda \cdot)$ оператора $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ поєднує масштабування потенціалу U у двох напрямках. Справді, трактуючи добуток $\lambda\alpha_\lambda$ як сталу взаємодії, бачимо, що ця стала може ставити безмежно малою чи безмежно великою, відповідно змінюючи амплітуду енергетичного бар’єру. З іншого боку, носій збурення може стягуватися в точку, коли $\alpha_\lambda \rightarrow +\infty$, розтягуватися на усю пряму, коли $\alpha_\lambda \rightarrow 0$, або ж залишатися фіксованого розміру, коли α_λ прямує до скінченної додатної границі.

Спектр оператора H_λ складається з неперервного спектру $[0, \infty)$ та можливо деякої скінченної кількості від'ємних власних значень [115, теореми 3.1 і 4.1]. За певних додаткових умов на потенціали U та V оператор H_λ має також єдине власне значення e_λ , яке поглинається суттєвим спектром при $\lambda \rightarrow 0$ (або ж власне значення виникає з неперервного спектру, якщо параметр λ рухати у протилежному керунку). Власне значення з пороговою поведінкою при $\lambda \rightarrow 0$ може бути або не бути основним станом системи, тобто найменшим власним значенням оператора H_λ .

Ми вивчимо асимптотику власного значення e_λ , коли λ прямує до критичного значення $\lambda = 0$ і побудуємо явні формули для головного члена у різних випадках граничної поведінки послідовності α_λ . Варто зауважити, що наш метод відрізняється від методу Саймона та Клауса, які використовували принцип Бірман-Швінгера. Наше дослідження базується на асимптотичних методах, розвинутих в попередніх розділах, та методі квазімод для самоспряжених операторів.

В праці [47] М. Клаус отримав загальні теореми щодо існування та порогової поведінки власних значень самоспряжених операторів вигляду $A + \lambda B$, які він застосував до кількох конкретних фізичних моделей, зокрема до систем з гамільтоніанами $-\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U$, де потенціали U та V мали компактні носії. Було доведено, що поглинання власного значення суттєвим спектром в момент $\lambda = 0$ буде тоді, коли оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u , а також $\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx < 0$. Єдине власне значення e_λ , яке прямує до нуля при $\lambda \rightarrow 0$, є аналітичною функцією в точці $\lambda = 0$ і володіє асимптотикою

$$e_\lambda = -\lambda^2 \left(\frac{1}{u_+^2 + u_-^2} \int_{\mathbb{R}} U u^2 dx \right)^2 + O(\lambda^3), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (5.2)$$

where $u_\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x)$. Якщо $\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx > 0$, то оператор не має власних значень. Як нам відомо, М. Клаус був першим, хто помітив зв'язок між резонансами нульової енергії незбуреного оператора та пороговою поведінкою власних значень. Зараз зрозуміло, в чому суть цього зв'язку і як він виникає. У всіх випадках порогової поведінки власних значень, які ми вивчатимемо, власне значення e_λ завжди зникає при $\lambda = 0$. Механізм цього зникнення доволі простий: зв'язні стани (власні функції) u_λ для e_λ в границі вироджуються в напівзв'язний стан u незбуреного оператора.

Означення 5.1. Нехай A і B_λ – самоспряжені оператори і для всіх $\lambda > 0$ оператор B_λ є відносно компактним збуренням A (тоді $\sigma_{ess}(A + B_\lambda) = \sigma_{ess}(A)$). Припустимо, що інтервал (a, b) лежить поза спектром A , але b є точкою $\sigma_{ess}(A)$. Якщо для всіх $\lambda > 0$ в інтервалі (a, b) існує власне значення e_λ оператора $A + B_\lambda$ таке, що $e_\lambda \rightarrow b - 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, то $\lambda = 0$ називаємо пороговим значенням сталої взаємодії. Про власне значення e_λ кажемо, що воно має порогову поведінку при $\lambda \rightarrow 0$.

Надалі напівзв'язні стани u оператора $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ нормуватимемо умовою $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$. Нехай $\theta = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.

Теорема 5.1. Нехай оператор $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u . Якщо виконується одна з умов

$$(i) \quad \alpha_\lambda \rightarrow 0, \lambda^{-1}\alpha_\lambda \rightarrow \infty \text{ та } \int_{\mathbb{R}_-} U(x) dx + \theta^2 \int_{\mathbb{R}_+} U(x) dx < 0;$$

$$(ii) \quad \alpha_\lambda \rightarrow \alpha \text{ для деякого додатного } \alpha \text{ та } \int_{\mathbb{R}} U(\alpha x) u^2(x) dx < 0;$$

$$(iii) \quad \alpha_\lambda \rightarrow +\infty, u(0) \neq 0 \text{ та } \int_{\mathbb{R}} U(x) dx < 0,$$

то для оператора $H_\lambda = H_0 + \lambda \alpha_\lambda U(\alpha_\lambda \cdot)$ число $\lambda = 0$ є пороговим значенням, тобто для всіх достатньо малих додатних λ існує від'ємне власне значення e_λ оператора H_λ таке, що $e_\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Крім того, це власне значення володіє асимптотикою $e_\lambda = -\lambda^2(k^2 + o(1))$ при $\lambda \rightarrow 0$, де

$$k = \frac{1}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}_-} U(x) dx + \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}_+} U(x) dx, \quad \text{коли } \alpha_\lambda \rightarrow 0;$$

$$k = \frac{\alpha}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U(\alpha x) u^2(x) dx, \quad \text{коли } \alpha_\lambda \rightarrow \alpha \text{ і } \alpha > 0;$$

$$k = \frac{u^2(0)}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U(x) dx, \quad \text{коли } \alpha_\lambda \rightarrow +\infty.$$

Сформулюємо два наслідки цієї теореми. Ми знаємо, що потенціал $V = 0$ є резонансним з напівзв'язним станом $u = 1$. Тоді $\theta = 1$, $u(0) = 1$ і всі умови (i)–(iii) набувають однакового вигляду $\int_{\mathbb{R}} U dx < 0$, так само, як і формули для головного члена асимптотики $k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} U dx$.

Наслідок 5.1. *Нехай $V = 0$. Якщо $\int_{\mathbb{R}} U dx < 0$ і послідовність α_λ має границю при $\lambda \rightarrow 0$ (скінченну чи нескінченну), то оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\alpha_\lambda U(\alpha_\lambda \cdot)$ володіє від'ємним власним значенням e_λ з пороговою поведінкою*

$$e_\lambda = -\frac{\lambda^2}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} U dx \right)^2 + o(\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Зауважимо, що теорема XIII.110 у 4-му томі відомої монографії з математичної фізики [116, р.338] стверджує, що оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda U(x)$ з C_0^∞ -потенціалом U має від'ємне власне значення при всіх додатних λ , коли $\int_{\mathbb{R}} U dx < 0$. До того ж це власне значення є аналітичним при $\lambda = 0$. Доведення аналітичності спирається на аналітичність деяких визначників. Теорема 5.1 та її наслідок дають приклади неаналітичних сімей операторів, які мають власні значення з неаналітичною пороговою поведінкою при $\lambda \rightarrow 0$.

Теорема також містить приклад порогової поведінки, коли множник $\lambda\alpha_\lambda$ перед потенціалом стає нескінченно великим при $\lambda \rightarrow 0$. Можемо вважати, що у цьому випадку велика амплітуда потенціалу компенсується його швидкою локалізацією в нулі.

Наслідок 5.2. *Нехай оператор H_0 володіє резонансом нульової енергії з таким напівзв'язним станом u , що $u(0) \neq 0$. Якщо $\int_{\mathbb{R}} U dx < 0$, то при $\varkappa \geq 1$ число $\lambda = 0$ є пороговим значенням для операторів*

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \frac{1}{\lambda^{\varkappa-1}} U\left(\frac{x}{\lambda^\varkappa}\right).$$

Відповідне власне значення має асимптотику

$$e_\lambda = -\lambda^2 \left(\frac{u^2(0)}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U dx \right)^2 + o(\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Зокрема, це справедливо для операторів $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + U\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Теорема 5.1 описує поглинання власних значень суттєвим спектром зі швидкістю $O(\lambda^2)$. Проте така абсорбція можлива і з більшою швидкістю, коли нерівності в умовах (i)–(iii) перетворюються у рівності.

Теорема 5.2. *Нехай потенціал U належить до простору $W_2^1(\mathbb{R})$. Припустимо, що $\alpha_\lambda \rightarrow \alpha$ та $(\alpha_\lambda - \alpha)\lambda^{-1/3} \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$, де α — додатне число, а оператор H_0 має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u . Якщо*

$$\int_{\mathbb{R}} U(\alpha x) u^2(x) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} xU'(\alpha x) u^2(x) dx < 0, \quad (5.3)$$

то оператор $H_\lambda = H_0 + \lambda\alpha_\lambda U(\alpha_\lambda x)$ має від'ємне власне значення e_λ при всіх $\lambda > 0$ з пороговою поведінкою

$$e_\lambda = -\lambda^2(\alpha_\lambda - \alpha)^2 \left(\left(\frac{\alpha}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} xU'(\alpha x) u^2(x) dx \right)^2 + o(1) \right), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Наступна теорема описує явище порогової поведінки, коли носій збурення $\lambda\alpha_\lambda V(\alpha_\lambda \cdot)$ є малим і стягується в точку.

Теорема 5.3. *Нехай $\alpha_\lambda \rightarrow +\infty$, але $\alpha_\lambda = o(\lambda^{-1/3})$ при $\lambda \rightarrow 0$. Якщо H_0 володіє резонансом нульової енергії з напівзв'язним станом u та*

$$\int_{\mathbb{R}} U(x) dx = 0, \quad u(0)u'(0) \int_{\mathbb{R}} xU(x) dx < 0, \quad (5.4)$$

то $\lambda = 0$ є пороговим значенням для H_λ . Власне значення з пороговою поведінкою має асимптотику

$$e_\lambda = -\frac{\lambda^2}{\alpha_\lambda^2} \left(\left(\frac{2u(0)u'(0)}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} xU(x) dx \right)^2 + o(1) \right), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Введемо функцію

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ \theta & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Теорема 5.4. *Припустимо, що $\alpha_\lambda \rightarrow 0$, але $\alpha_\lambda\lambda^{-1/4} \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow 0$. Нехай потенціал U є неперервним в околі нуля, а оператор H_0 має резонанс нульової енергії з напівзв'язним станом u . Якщо виконуються умови*

$$\int_{\mathbb{R}_-} U dx + \theta^2 \int_{\mathbb{R}_+} U dx = 0, \quad U(0) \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx < 0, \quad (5.6)$$

то H_λ володіє при всіх $\lambda > 0$ від'ємним власним значенням e_λ з асимптотикою

$$e_\lambda = -\lambda^2\alpha_\lambda^2 \left(\left(\frac{U(0)}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx \right)^2 + o(1) \right), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Остання теорема стосується випадку, коли носій збурення $\lambda\alpha_\lambda U(\alpha_\lambda \cdot)$ нескінченно розширюється при $\lambda \rightarrow 0$.

На відміну від теореми 5.1, в тому разі, коли $V = 0$, припущення теорем 5.2-5.4 не виконуються для жодного потенціалу U . Справді, коли $V = 0$, то $u = 1$. Тоді $u'(0) = 0$, $u^2 = \Theta^2$, а тому умови (5.4) та (5.6) не виконуються. Щодо умов (5.3), то інтегрування частинами дає

$$\int_{\mathbb{R}} xU'(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} U(\alpha x) dx < 0,$$

що суперечить першій умові $\int_{\mathbb{R}} U(\alpha x) dx = 0$. Ці результати не проектуються на результат Саймона з аналітичним в нулі пороговим власним значенням.

Умови щодо поведінки при $\lambda \rightarrow 0$ послідовності α_λ такі, як $\lambda^{-1/3}(\alpha_\lambda - \alpha) \rightarrow \infty$ в теоремі 5.2, $\alpha_\lambda = o(\lambda^{-1/3})$ — в теоремі 5.3 чи $\lambda^{1/4}\alpha_\lambda^{-1} \rightarrow 0$ — в теоремі 5.4, виникають винятково з техніки доведення, а саме, методу наближення власних функцій. Наприклад, теорема 5.2 не охоплює випадку $\alpha_\lambda = 1$, який вивчав Клаус [47] і в якому теж присутнє явище порогової поведінки. Щоб отримати схожі результати в інших випадках, треба мати точнішу асимптотику α_λ при $\lambda \rightarrow 0$, а не лише її границю. Тоді можна побудувати і точніші асимптотики порогових власних значень, що зроблено в наступному підрозділі.

5.1.2 Порогова поведінка порядку $O(\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$

Введемо оператор $S(\theta, \zeta)$, який є збуренням вільного оператора Шрединґера точковою взаємодією

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi'(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ \zeta & \theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ \phi'(-0) \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

тобто $S(\theta, \zeta)\phi = -\phi''$, де функції ϕ належать до простору $W_2^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ і задовольняють умови (5.7).

Лема 5.1. *Якщо $\theta\zeta < 0$, то оператор $S(\theta, \zeta)$ має єдине власне значення*

$$E = -\left(\frac{\theta\zeta}{\theta^2 + 1}\right)^2.$$

Доведення. Шукатимемо ненульовий $L^2(\mathbb{R})$ -розв'язок рівняння $-\phi'' + \omega^2\phi = 0$, який задовольняє умовам (5.7). Якщо розв'язок ϕ існує, то $\phi(x) = c_1 e^{\omega x}$ при $x < 0$

та $\phi(x) = c_2 e^{-\omega x}$ при $x > 0$, де число ω є додатним. Підставивши ϕ такого вигляду в (5.7), дістанемо

$$\begin{pmatrix} \theta & -1 \\ \zeta + \theta^{-1}\omega & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Нетривіальність розв'язку ϕ вимагає виродженості матриці:

$$(\theta + \theta^{-1})\omega + \zeta = 0.$$

Додатний корінь $\omega = -\frac{\theta\zeta}{\theta^2+1}$ рівняння має при умові $\theta\zeta < 0$. Тоді оператор $S(\theta, \zeta)$ має від'ємне власне значення $E = -\left(\frac{\theta\zeta}{\theta^2+1}\right)^2$ з власною функцією $\phi(x) = e^{\omega x}$ при $x < 0$ та $\phi(x) = \theta e^{-\omega x}$ при $x > 0$. \square

Щоб довести теорему 5.1, застосуємо результати про рівномірну резольвентну збіжність операторів Шредингера з двопараметричними $(a\delta' + b\delta)$ -подібними потенціалами з розділу 2. Розглянемо сім'ю самоспряжених операторів (2.1), коли $V_0 = 0$, $\alpha = \beta = 1$ та $\varepsilon = \lambda$:

$$H_{\lambda,\nu} = -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^{-2}V(\lambda^{-1}x) + \nu^{-1}U(\nu^{-1}x), \quad \text{dom } H_{\lambda,\nu} = W_2^2(\mathbb{R}).$$

Ввівши нову змінну $\tau = x/\lambda$, матимемо

$$H_{\lambda,\nu} = \lambda^{-2} \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V(\tau) + \lambda^2 \nu^{-1} U(\lambda \nu^{-1} \tau) \right) = \lambda^{-2} (H_0 + \lambda^2 \nu^{-1} U(\lambda \nu^{-1} \tau)).$$

Пов'яжемо параметри λ та ν формулою $\nu_\lambda = \lambda/\alpha_\lambda$ і введемо позначення

$$A_\lambda = H_{\lambda,\alpha_\lambda^{-1}\lambda} = \lambda^{-2} (H_0 + \lambda \alpha_\lambda U(\alpha_\lambda \tau)).$$

Порівнявши з (5.1), бачимо, що $A_\lambda = \lambda^{-2} H_\lambda$.

Нехай потенціал V є резонансним. Спершу припустимо, що $\alpha_\lambda = \frac{\lambda}{\nu_\lambda} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Тоді $\frac{\nu_\lambda}{\lambda} \rightarrow +\infty$. Крім того, $\nu_\lambda \rightarrow 0$, оскільки $\lambda^{-1}\alpha_\lambda \rightarrow \infty$. Тепер з огляду на теорему 2.1 оператори A_λ збігаються в рівномірній резольвентній топології до оператора $S(\theta, \zeta)$, де $\theta = u(+\infty)$ та

$$\zeta = \theta^{-1} \int_{\mathbb{R}_-} U dt + \theta \int_{\mathbb{R}_+} U dt.$$

Згідно з лемою 5.1 оператор $S(\theta, \zeta)$ має від'ємне власне значення E , бо

$$\theta\zeta = \int_{\mathbb{R}_-} U dx + \theta^2 \int_{\mathbb{R}_+} U dx < 0$$

за припущенням (i) теореми. Власне значення має вигляд $E = -k^2$, де

$$k = \frac{\theta\zeta}{\theta^2 + 1} = \frac{1}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}_-} U dx + \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}_+} U dx.$$

З огляду на лему 1.3 з рівномірної резольвентної збіжності $A_\lambda \rightarrow S(\theta, \zeta)$ випливає існування власного значення E_λ оператора A_λ , яке прямує до E при $\lambda \rightarrow 0$. Оператори A_λ і H_λ пов'язані співвідношенням $A_\lambda = \lambda^{-2}H_\lambda$, тому H_λ володіє власним значенням $e_\lambda = \lambda^2 E_\lambda$, яке має асимптотику $e_\lambda = -\lambda^2(k^2 + o(1))$ при $\lambda \rightarrow 0$ (див. рис 5.1).



Рис. 5.1: Від'ємне власне значення e_λ лежить в малому околі $\lambda^2 E$

Нехай тепер $\alpha_\lambda \rightarrow \alpha$ при $\lambda \rightarrow 0$. Зауважимо, що $\nu_\lambda = \lambda/\alpha_\lambda$ теж прямує до нуля. Застосуємо теорему 2.2, згідно з якою оператори A_λ збігаються в сенсі рівномірної резольвентної збіжності до $S(\theta, \zeta)$, де

$$\zeta = \alpha\theta^{-1} \int_{\mathbb{R}} U(\alpha x) u^2(x) dx.$$

Граничний оператор має від'ємне власне значення $E = -k^2$, бо

$$\theta\zeta = \alpha \int_{\mathbb{R}} U(\alpha x) u^2(x) dx < 0,$$

що є припущенням теореми. В цьому випадку

$$k = \frac{\theta\zeta}{\theta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U(\alpha \cdot) u^2 dx.$$

Отже, $H_\lambda = \lambda^2 A_\lambda$ має від'ємне власне значення порядку $O(\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Нарешті у випадку $\alpha_\lambda \rightarrow \infty$ скористаємося теоремою 2.3. Сім'я операторів A_λ збігається до $S(\theta, \zeta)$ при $\lambda \rightarrow 0$ в сенсі рівномірної збіжності резольвент, де

$$\zeta = \theta^{-1} u^2(0) \int_{\mathbb{R}} U dx.$$

Умова (iii) теореми гарантує існування від'ємного власного значення

$$E = -k^2, \quad k = \frac{\theta\zeta}{\theta^2 + 1} = \frac{u^2(0)}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U dx$$

оператора $S(\theta, \zeta)$, бо $\theta\zeta = u^2(0) \int_{\mathbb{R}} U dx < 0$. Отже, існує також від'ємне власне значення e_λ оператора H_λ . Доведення теореми 5.1 завершено.

5.1.3 Порогова поведінка порядку $o(\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$

Теореми 5.2–5.4, на відміну від доведеної вище теореми 5.1, не впливають з результатів розділу 2. Незважаючи на те, що збіжність $A_\lambda \rightarrow S(\theta, \zeta)$ є і в цьому випадку, умови цих теорем не гарантують існування від'ємного власного значення граничного оператора $S(\theta, \zeta)$. Проте відсутність такого власного значення не є перепоною до існування власного значення оператора A_λ , яке прямує до нуля при $\lambda \rightarrow 0$, бо воно може мати порогову поведінку вищого порядку малості, ніж $O(\lambda^2)$. Для доведення цих теорем застосуємо метод квазімод — майже-власних значень та майже-власних функцій.

Нехай A — самоспряжений оператор в гільбертовому просторі L .

Означення 5.2. *Казатимемо, що пара $(\mu, \phi) \in \mathbb{R} \times \text{dom } A$ є квазімодою оператора A з похибкою ε , якщо $\|\phi\|_L = 1$ та $\|(A - \mu)\phi\|_L \leq \varepsilon$.*

Лема 5.2. *[117, р.139] Нехай (μ, ϕ) — квазімода оператора A з похибкою ε і спектр A є дискретним на відрізку $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$. Тоді існує власне значення μ_* of A таке, що $|\mu_* - \mu| \leq \varepsilon$.*

Доведення. Якщо $\varepsilon = 0$, то очевидно $\mu_* = \mu$. Припустимо, що $\varepsilon > 0$ і μ не є власним значенням оператора A . Тоді відстань d_μ від точки μ до спектру A можна знайти за формулою

$$d_\mu^{-1} = \|(A - \mu I)^{-1}\| = \sup_{\psi \neq 0} \frac{\|(A - \mu I)^{-1}\psi\|_L}{\|\psi\|_L},$$

де ψ — довільний вектор L . Поклавши $\psi = (A - \mu)\phi$, відразу дістаємо

$$d_\mu^{-1} \geq \frac{\|\phi\|_L}{\|(A - \mu I)\phi\|_L} \geq \varepsilon^{-1}.$$

Отже, $d_\mu \leq \varepsilon$, що завершує доведення. □

Лема 5.3. *Нехай $W \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } W \subset (-\ell, \ell)$ і $-\frac{d^2}{dx^2} + W$ володіє резонансом нульової енергії з нормалізованим напівзв'язним станом u . Для кожної функції h з простору $L_2(-\ell, \ell)$ і дійсного числа γ розв'язок w задачі Коші*

$$-w'' + Ww = h, \quad t \in \mathcal{I}, \quad w(-\ell) = 0, \quad w'(-\ell) = \gamma \quad (5.8)$$

задовольняє рівність

$$\theta w'(\ell) = \gamma - \int_{-\ell}^{\ell} hu \, dx. \quad (5.9)$$

Крім того, справедлива оцінка

$$\|w\|_{C^1(-\ell, \ell)} \leq C(|\gamma| + \|h\|_{L_2(-\ell, \ell)}). \quad (5.10)$$

Доведення. Помножимо рівняння в (5.8) на u і проінтегруємо частинами:

$$(-w'u + wu')|_{-\ell}^{\ell} + \int_{-\ell}^{\ell} (-u'' + Wu)w \, dx = \int_{-\ell}^{\ell} hu \, dx.$$

Враховавши означення напівзв'язного стану, дістанемо

$$-w'(\ell)u(\ell) + w'(-\ell)u(-\ell) = \int_{-\ell}^{\ell} hu \, dx.$$

Щоб отримати (5.9), застосуємо умови Коші для w та рівності $u(-\ell) = 1$, $u(\ell) = \theta$ для напівзв'язного стану, які випливають з того, що носій W лежить в $(-\ell, \ell)$. Оцінка (5.10) випливає з твердження 1.2. \square

Випадок, коли послідовність α_λ має додатну границю

Доведемо теорему 5.2. Без втрати загальності припустимо, що носії потенціалів U та V лежать у відрізку $\mathcal{I} = (-1, 1)$. Справді, стиском прямої завжди можна цього досягти. Тоді напівзв'язний стан u оператора H_0 є сталим поза \mathcal{I} , а його звуження на це інтервал є ненульовим розв'язком задачі

$$-u'' + Vu = 0, \quad t \in \mathcal{I}, \quad u'(-1) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (5.11)$$

До того ж $u(-1) = 1$ та $u(1) = \theta$.

Ми побудуємо сім'ю квазімод $(-\omega_\lambda^2, \phi_\lambda)$ оператора H_λ для малих λ . Введемо нескінченно малу $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda - \alpha$ при $\lambda \rightarrow 0$ і покладемо $\omega_\lambda = \lambda \varepsilon_\lambda k_\lambda$ для додатних k_λ . Через U_0 позначимо границю потенціалів $U_\lambda = \alpha_\lambda U(\alpha_\lambda \cdot)$ при $\lambda \rightarrow 0$, тобто $U_0 = \alpha U(\alpha \cdot)$. Для достатньо малих λ носії U_λ містяться у відрізку $[-b, b]$ для деякого числа b більшого за $\max\{1, \alpha^{-1}\}$. Нехай

$$\psi_\lambda(x) = \begin{cases} e^{\omega_\lambda(x+b)}, & \text{коли } x < -b, \\ u(x) + \lambda v(x) + \lambda \varepsilon_\lambda w_\lambda(x), & \text{коли } |x| < b, \\ a_{0,\lambda} e^{-\omega_\lambda(x-b)} + a_{1,\lambda} \rho(x-b), & \text{коли } x > b, \end{cases}$$

де v і w_λ — розв'язки задач

$$-v'' + Vv = -U_0u, \quad v(-b) = 0, \quad v'(-b) = 0; \quad (5.12)$$

$$-w'' + Vw = -\varepsilon_\lambda^{-1}(U_\lambda - U_0)u, \quad w(-b) = 0, \quad w'(-b) = k_\lambda \quad (5.13)$$

відповідно, а $a_{j,\lambda}$ — деякі дійсні сталі. Зауважимо, що число ε_λ відмінне від нуля при малих λ , бо $\lambda^{-1/3}\varepsilon_\lambda \rightarrow \infty$. Функція $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ є гладкою, $\rho(0) = 0$, $\rho'(0) = 1$ і $\rho(x) = 0$ при $x \geq 1$. Ми використаємо її, щоб досягти неперервної диференційовності ψ_λ в точці $x = b$.

Тепер виберемо $a_{0,\lambda}$, $a_{1,\lambda}$ і k_λ так, щоб функція ψ_λ належала до $\text{dom } H_\lambda$. За побудовою ψ_λ є неперервно диференційовною в точці $x = -b$. Зробимо ψ_λ також неперервно диференційовною в $x = b$. Маємо $[\psi_\lambda]_b = a_{0,\lambda} - \theta - \lambda v(b) - \lambda \varepsilon_\lambda w_\lambda(b)$. Тому покладемо $a_{0,\lambda} = \theta + \lambda v(b) + \lambda \varepsilon_\lambda w_\lambda(b)$. Далі дістаємо

$$\begin{aligned} [\psi'_\lambda]_b &= -\omega_\lambda a_{0,\lambda} + a_{1,\lambda} \rho'(0) - \lambda v'(b) - \lambda \varepsilon_\lambda w'_\lambda(b) \\ &= -\lambda v'(b) - \lambda \varepsilon_\lambda (w'_\lambda(b) + \theta k_\lambda) + a_{1,\lambda} - \lambda^2 \varepsilon_\lambda k_\lambda v(b) - \lambda^2 \varepsilon_\lambda^2 k_\lambda w_\lambda(b), \end{aligned}$$

бо $\rho'(0) = 1$. З огляду на формулу (5.9) та першу умову в (5.3) похідна $v'(b)$ дорівнює нулю. Справді,

$$\theta v'(b) = \int_{-b}^b U_0 u^2 dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} U(\alpha x) u^2(x) dx = 0.$$

Застосуємо такі ж міркування до (5.13) і матимемо

$$\theta w'_\lambda(b) = k_\lambda + \varepsilon_\lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}} (U_\lambda - U_0) u^2 dx. \quad (5.14)$$

Ми часто будемо заміняти інтеграли на носіях функцій на інтеграли на усій прямій і навпаки без додаткового коментування. Тепер покладемо

$$w'_\lambda(b) = -\theta k_\lambda, \quad a_{1,\lambda} = \lambda^2 \varepsilon_\lambda k_\lambda (v(b) + \varepsilon_\lambda w_\lambda(b)) \quad (5.15)$$

і дістанемо неперервність ψ'_λ в точці $x = b$. Поєднавши першу рівність в (5.15) та (5.14), дістаємо

$$k_\lambda = -\frac{1}{\varepsilon_\lambda(\theta^2 + 1)} \int_{\mathbb{R}} (U_\lambda - U_0) u^2 dx. \quad (5.16)$$

Лема 5.4. При виконанні умов теореми 5.2, величина k_λ , задана формулою (5.16), має асимптотичне зображення

$$k_\lambda = -\frac{\alpha}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} xU'(\alpha x) u^2(x) dx + o(1), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (5.17)$$

Доведення. Позаяк $\alpha_\lambda = \alpha + \varepsilon_\lambda$, то

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^{-1}(U_\lambda(x) - U_0(x)) &= \varepsilon_\lambda^{-1}(\alpha_\lambda U(\alpha_\lambda x) - \alpha U(\alpha x)) = \\ &= \varepsilon_\lambda^{-1}((\alpha + \varepsilon_\lambda)U(\alpha_\lambda x) - \alpha U(\alpha x)) = U(\alpha_\lambda x) + \alpha \varepsilon_\lambda^{-1}(U(\alpha_\lambda x) - U(\alpha x)). \end{aligned}$$

Нагадаємо, що потенціал $U \in W_2^1(\mathbb{R})$. Тому, враховуючи неперервність оператора скінченної різниці в $W_2^1(\mathbb{R})$, маємо

$$\begin{aligned} U(\alpha_\lambda x) + \alpha \varepsilon_\lambda^{-1}(U(\alpha_\lambda x) - U(\alpha x)) &= \\ &= U(\alpha_\lambda x) + \alpha x \frac{U(\alpha_\lambda x) - U(\alpha x)}{(\alpha_\lambda - \alpha)x} \rightarrow U(\alpha x) + \alpha x U'(\alpha x) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в просторі $L^2(\mathbb{R})$. Згадуючи умову $\int_{\mathbb{R}} U(\alpha \cdot) u^2 dx = 0$, відразу отримуємо

$$\varepsilon_\lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}} (U_\lambda - U_0) u^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} (U(\alpha x) + \alpha x U'(\alpha x)) u^2(x) dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} x U'(\alpha x) u^2(x) dx,$$

що завершує доведення. \square

Формула (5.17) забезпечує додатність $\omega_\lambda = \lambda \varepsilon_\lambda k_\lambda$ при достатньо малому λ , бо виконується нерівність в (5.3). Тоді функція ψ_λ належить до простору $L_2(\mathbb{R})$, оскільки обидві експоненти $e^{\pm \omega_\lambda(x \pm b)}$ спадають при $x \rightarrow \mp \infty$ відповідно. Далі вибір чисел $a_{0,\lambda}$ та $a_{1,\lambda}$ гарантує приналежність ψ_λ до простору $W_2^2(\mathbb{R})$, а тому $\psi \in \text{dom } H_\lambda$. Скористаємося тепер лемами 5.3 і 5.4:

$$\|\psi_\lambda\|_{W_2^2(-b,b)} \leq c_1(|k_\lambda| + \varepsilon_\lambda^{-1} \|U_\lambda - U_0\|_{L_2(-b,b)}) \leq c_1,$$

Отже,

$$\|\psi_\lambda\|_{L^2(-b,b)} \leq c_2. \quad (5.18)$$

Крім того, прості обчислення дають

$$c\omega_\lambda^{-1/2} \leq \|\psi_\lambda\| \leq C\omega_\lambda^{-1/2} \quad (5.19)$$

зі сталими c та C , які не залежать від λ .

Лема 5.5. Пара $(-\omega_\lambda^2, \phi_\lambda)$, де $\omega_\lambda = \lambda \varepsilon_\lambda k_\lambda$ та $\phi_\lambda = \psi_\lambda / \|\psi_\lambda\|$, є квазімодою оператора H_λ з похибкою $o(\omega_\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Доведення. Нехай $r_\lambda = (H_\lambda + \omega_\lambda^2)\psi_\lambda$. Тоді $(H_\lambda + \omega_\lambda^2)\phi_\lambda = \|\psi_\lambda\|^{-1}r_\lambda$. Нам треба оцінити L_2 -норму залишку r_λ , щоб перекоонатися в малості похибки. На множині $|x| > b$ експонати $e^{\pm\omega_\lambda(x\pm b)}$ є точними розв'язками рівняння $-\psi'' + \omega_\lambda^2\psi = 0$, а також $\text{supp } \rho = [0, 1]$. Тому ми маємо

$$r_\lambda(x) = -a_{1,\lambda}(\rho''(x-b) - \omega_\lambda^2\rho(x-b)), \quad \text{коли } b \leq x \leq b+1 \quad (5.20)$$

та $r_\lambda(x) = 0$ для інших значень x з множини $|x| > b$. Позаяк ρ і ρ'' є обмеженими на $[0, 1]$, то згідно з (5.15) справедлива оцінка

$$\max_{|x| \geq b} |r_\lambda(x)| = \max_{b \leq x \leq b+1} |r_\lambda(x)| \leq c_1 |a_{1,\lambda}| \leq c_2 \lambda^2 \varepsilon_\lambda. \quad (5.21)$$

Далі, згадуючи задачі (5.11)–(5.13), обчислюємо

$$\begin{aligned} r_\lambda &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U_\lambda + \omega_\lambda^2 \right) \psi_\lambda = (-u'' + Vu) + \lambda(-v'' + Vv + U_0u) + \\ &+ \lambda \varepsilon_\lambda (-w_\lambda'' + Vw_\lambda + \varepsilon_\lambda^{-1}(U_\lambda - U_0)u) + \lambda^2 U_\lambda v + \lambda^2 \varepsilon_\lambda U_\lambda w_\lambda + \omega_\lambda^2 \psi_\lambda = \\ &= \lambda^2 (U_\lambda v + \varepsilon_\lambda U_\lambda w_\lambda + \varepsilon_\lambda^2 k_\lambda^2 \psi_\lambda) \end{aligned}$$

при $|x| < b$. Отже, $\|r_\lambda\|_{L_2(-b,b)} = O(\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$, бо виконується нерівність (5.18). Далі, $\|r_\lambda\| = O(\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$, згідно з (5.21). Нарешті, скориставшись (5.19), матимемо $\|(H_\lambda + \omega_\lambda^2)\phi_\lambda\| = \|\psi_\lambda\|^{-1}\|r_\lambda\| \leq c_1 \lambda^{5/2} \varepsilon_\lambda^{1/2} \leq c_2 \omega_\lambda^2 (\lambda^{1/2} \varepsilon_\lambda^{-3/2})$, причому $\lambda^{1/2} \varepsilon_\lambda^{-3/2} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ згідно з припущенням $\lambda^{-1/3} \varepsilon_\lambda \rightarrow \infty$. \square

Позаяк $(-\omega_\lambda^2, \phi_\lambda)$ – квазімода H_λ з похибкою $o(\omega_\lambda^2)$, а від'ємна піввісь вільна від його неперервного спектру, то оператор H_λ має від'ємне власне значення e_λ , причому $|e_\lambda + \omega_\lambda^2| = o(\omega_\lambda^2)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Це впливає з леми 5.2. Власне значення e_λ володіє асимптотикою

$$e_\lambda = -\lambda^2 \varepsilon_\lambda^2 k_\lambda^2 (1 + o(1)) = -\lambda^2 (\alpha_\lambda - \alpha)^2 \left(\left(\frac{\alpha}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} x V'(\alpha x) u^2(x) dx \right)^2 + o(1) \right),$$

коли λ прямує до нуля, що завершує доведення теореми 5.2.

Випадок нескінченно великої послідовності α_λ

Тепер доведемо теорему 5.3. Як і в попередньому випадку, доведення полягатиме у побудові квазімоди оператора H_λ . Позаяк тепер послідовність α_λ нескінченно велика, то носій потенціалів $U_\lambda = \alpha_\lambda U(\alpha_\lambda \cdot)$ лежить в \mathcal{I} для малих λ . Ми покладемо $\omega_\lambda = \lambda k_\lambda \alpha_\lambda^{-1}$, де k_λ — деяке додатне число. Нехай також

$$\psi_\lambda(x) = \begin{cases} e^{\omega_\lambda(x+1)}, & \text{коли } x < -1, \\ u(x) + \frac{\lambda}{\alpha_\lambda} v_\lambda(x) + \frac{\lambda^2}{\alpha_\lambda^2} w_\lambda(x), & \text{коли } |x| < 1, \\ a_{0,\lambda} e^{-\omega_\lambda(x-1)} + a_{1,\lambda} \rho(x-1), & \text{коли } x > 1, \end{cases}$$

де u — нормалізований напівзв'язний стан H_0 , а v_λ та w_λ — розв'язки задач

$$-v'' + Vv = -\alpha_\lambda U_\lambda u, \quad v(-1) = 0, \quad v'(-1) = k_\lambda; \quad (5.22)$$

$$-w'' + Vw = -\alpha_\lambda U_\lambda v_\lambda, \quad w(-1) = 0, \quad w'(-1) = 0 \quad (5.23)$$

відповідно. Ми знову доведемо, що існують такі $a_{0,\lambda}$, $a_{1,\lambda}$ та додатна величина k_λ , що $\psi_\lambda \in \text{dom } A_\lambda$.

Умови Коші в задачах (5.22) і (5.23) разом з умовами $u(-1) = 1$, $u'(-1) = 0$ забезпечують неперервність функцій ψ_λ та ψ'_λ в точці $x = -1$. Далі, якщо покладемо $a_{0,\lambda} = \theta + \frac{\lambda}{\alpha_\lambda} v_\lambda(1) + \frac{\lambda^2}{\alpha_\lambda^2} w_\lambda(1)$, то $[\psi_\lambda]_{x=1} = 0$. Також легко обчислюємо

$$\begin{aligned} [\psi'_\lambda]_b &= -\omega_\lambda a_{0,\lambda} + a_{1,\lambda} - \frac{\lambda}{\alpha_\lambda} v'_\lambda(1) - \frac{\lambda^2}{\alpha_\lambda^2} w'_\lambda(1) = \\ &= -\frac{\lambda}{\alpha_\lambda} (\theta k_\lambda + v'_\lambda(1)) + a_{1,\lambda} - \frac{\lambda^2 k_\lambda}{\alpha_\lambda^2} v_\lambda(1) - \frac{\lambda^3 k_\lambda}{\alpha_\lambda^3} w_\lambda(1) - \frac{\lambda^2}{\alpha_\lambda^2} w'_\lambda(1). \end{aligned}$$

Тому, щоб досягти неперервності ψ'_λ в точці $x = 1$, покладемо

$$v'_\lambda(1) = -\theta k_\lambda, \quad a_{1,\lambda} = \frac{\lambda^2 k_\lambda}{\alpha_\lambda^2} (v_\lambda(1) + \frac{1}{k_\lambda} w'_\lambda(1) + \frac{\lambda}{\alpha_\lambda} w_\lambda(1)). \quad (5.24)$$

Застосуємо формулу (5.9) до задачі (5.22) і дістанемо рівність

$$\theta v'_\lambda(1) = k_\lambda + \alpha_\lambda \int_{\mathbb{R}} U_\lambda u^2 dx. \quad (5.25)$$

Підставивши сюди першу рівність (5.24), отримаємо

$$k_\lambda = -\frac{\alpha_\lambda}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U_\lambda u^2 dx. \quad (5.26)$$

Наступне твердження нам потрібне, щоб знайти асимптотику k_λ .

Лема 5.6. Якщо U має нульове середнє, тобто $\int_{\mathbb{R}} U dx = 0$, то

$$\alpha_\lambda \int_{\mathbb{R}} U_\lambda g dx = g'(0) \int_{\mathbb{R}} xU(x) dx + o(\alpha_\lambda^{-1/2}), \quad \alpha_\lambda \rightarrow \infty,$$

для кожної функції $g \in W_{2,loc}^2(\mathbb{R})$.

Доведення. Ми припустили, що $\text{supp } U \subset \mathcal{I}$, а тому носій $U(\alpha_\lambda \cdot)$ міститься в $\mathcal{I}_\lambda = (-\alpha_\lambda^{-1}, \alpha_\lambda^{-1})$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda \int_{\mathbb{R}} U_\lambda g dx &= \alpha_\lambda^2 \int_{\mathcal{I}_\lambda} U(\alpha_\lambda x) g(x) dx + \\ &= \alpha_\lambda \int_{\mathcal{I}} U(t) g\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right) dt = \alpha_\lambda \int_{\mathcal{I}} U(t) \left(g(0) + g'(0) \frac{t}{\alpha_\lambda} + \zeta\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right)\right) dt = \\ &= g'(0) \int_{\mathbb{R}} tU(t) dt + \alpha_\lambda \int_{\mathcal{I}} U(t) \zeta\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right) dt, \end{aligned}$$

де $\zeta(x) = \int_0^x (x-s)g''(s) ds$. Крім того, залишок ζ можна оцінити так

$$|\zeta(x)| = \left| \int_0^x (x-s)g''(s) ds \right| \leq |x| \left| \int_0^x |g''(s)| ds \right| \leq \|g''\|_{L_2(\mathcal{I})} |x|^{3/2},$$

бо $g'' \in L_2(\mathcal{I})$. Отже, $|\zeta(\frac{t}{\alpha_\lambda})| \leq c|t|^{3/2}\alpha_\lambda^{-3/2}$ для $t \in \mathcal{I}$, що завершує доведення. \square

Застосуємо лему до інтеграла в правій частині (5.26) і дістанемо

$$k_\lambda = -\frac{2u(0)u'(0)}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} xU(x) dx + o(\alpha_\lambda^{-1/2}), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (5.27)$$

Отже, k_λ має скінченну границю при $\lambda \rightarrow 0$, а нерівність в (5.4) гарантує, що k_λ і ω_λ будуть додатними для λ достатньо малих.

Як і в доведенні леми 5.5, при $|x| > 1$ залишок $r_\lambda = (H_\lambda + \omega_\lambda^2)\psi_\lambda$ має вигляд (5.20). Отже, його абсолютна величина має такий ж порядок малості, як $a_{1,\lambda}$ в (5.24). Для $x \in \mathcal{I}$ отримаємо

$$\begin{aligned} r_\lambda &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U_\lambda + \omega_\lambda^2\right) \left(u + \frac{\lambda}{\alpha_\lambda} v_\lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha_\lambda^2} w_\lambda\right) = \\ &= (-u'' + Vu) + \frac{\lambda}{\alpha_\lambda} (-v_\lambda'' + Vv_\lambda + \alpha_\lambda U_\lambda u) + \frac{\lambda^2}{\alpha_\lambda^2} (-w_\lambda'' + Vw_\lambda + \alpha_\lambda U_\lambda v_\lambda) + \\ &\quad + \frac{\lambda^3}{\alpha_\lambda} U_\lambda w_\lambda + \omega_\lambda^2 \psi_\lambda = \lambda^3 U(\alpha_\lambda \cdot) w_\lambda + \omega_\lambda^2 \psi_\lambda. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Лема 5.7. Розв'язки v_λ і w_λ задач (5.22) і (5.23) задовольняють нерівності

$$\|v_\lambda\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq C_1 \alpha_\lambda, \quad \|w_\lambda\|_{C^1(\mathcal{I})} \leq C_2 \alpha_\lambda^2$$

зі сталими C_1 та C_2 , які не залежать від λ .

Доведення. Нехай u_1 — розв’язок рівняння $-y'' + Vy = 0$ такий, що $u_1(x) = x + 1$ при $x \leq -1$. Цей розв’язок є лінійно незалежним з u і легко переконатися, що

$$v_\lambda(x) = k_\lambda u_1(x) + \alpha_\lambda \int_{-\alpha_\lambda^{-1}}^x K(x, s) U_\lambda(s) u(s) ds,$$

де $K(x, s) = u(s)u_1(x) - u(x)u_1(s)$. Тоді для всіх $x \in \mathcal{I}$ матимемо

$$\left| \int_{-\alpha_\lambda^{-1}}^x K(x, s) U_\lambda(s) u(s) ds \right| \leq \alpha_\lambda \int_{\mathcal{I}_\lambda} |K(x, s)| |U(\alpha_\lambda s)| |u(s)| ds \leq c_1 \alpha_\lambda \int_{\mathcal{I}_\lambda} ds \leq c_2,$$

а отже, справедлива оцінка

$$\max_{x \in \mathcal{I}} |v_\lambda(x)| \leq |k_\lambda| \max_{x \in \mathcal{I}} |u_1(x)| + \alpha_\lambda \left| \int_{-\alpha_\lambda^{-1}}^x K(x, s) U_\lambda(s) u(s) ds \right| \leq c_1 \alpha_\lambda.$$

Аналогічно отримуємо оцінку $\max_{x \in \mathcal{I}} |v'_\lambda(x)| \leq c_1 \alpha_\lambda$, бо

$$v'_\lambda(x) = k_\lambda u'_1(x) + \alpha_\lambda \int_{-\alpha_\lambda^{-1}}^x K'_x(x, s) U_\lambda(s) u(s) ds.$$

Ці нерівності застосуємо також до розв’язку задачі (5.23)

$$w_\lambda(x) = \alpha_\lambda \int_{-\alpha_\lambda^{-1}}^x K(x, s) U_\lambda(s) v_\lambda(s) ds$$

і матимемо $|w_\lambda(x)| \leq c \alpha_\lambda^2$ для всіх $x \in \mathcal{I}$. Нарешті, дістаємо

$$|w'_\lambda(x)| \leq \alpha_\lambda \int_{\mathcal{I}_\lambda} |K'_x(x, s)| |U_\lambda(s)| |v_\lambda(s)| ds \leq c \alpha_\lambda^2,$$

що завершує доведення. □

Повернемося до рівностей (5.24) та (5.28) і застосуємо лему 5.7:

$$\begin{aligned} |a_{1,\lambda}| &\leq c_1 \lambda^2 \alpha_\lambda^{-2} (|v_\lambda(1)| + |w'_\lambda(1)| + \lambda \alpha_\lambda^{-1} |w_\lambda(1)|) \leq c_2 \lambda^2, \\ \|U(\alpha_\lambda \cdot) w_\lambda\|_{L_2(\mathcal{I})}^2 &= \int_{\mathcal{I}_\lambda} |U(\alpha_\lambda \cdot) w_\lambda|^2 dx \leq c_3 \alpha_\lambda^4 \int_{\mathcal{I}_\lambda} dx \leq c_4 \alpha_\lambda^3. \end{aligned}$$

Тоді з огляду на (5.18) дістанемо $\|r_\lambda\| \leq c_4 (\lambda^2 + \lambda^3 \alpha_\lambda^{3/2}) \leq c_5 \lambda^2$, бо за умовою теореми $\alpha_\lambda = o(\lambda^{-1/3})$ при $\lambda \rightarrow 0$. Тепер покладемо $\phi_\lambda = \psi_\lambda / \|\psi_\lambda\|$ і скористаємося нерівністю (5.19):

$$\|(H_\lambda + \omega_\lambda^2) \phi_\lambda\| = \|\psi_\lambda\|^{-1} \|r_\lambda\| \leq c_6 \omega_\lambda^{1/2} \lambda^2 \leq c_7 \omega_\lambda^2 \lambda^{1/2} \alpha_\lambda^{3/2},$$

де $\lambda^{1/2}\alpha_\lambda^{3/2}$ прямує до нуля. Отже, пара $(-\lambda^2 k_\lambda^2 \alpha_\lambda^{-2}, \phi_\lambda)$ є квазімодою оператора H_λ з похибкою $o(\omega_\lambda^2)$, а тому H_λ володіє малим від'ємним власним значенням e_λ з асимптотикою $-\lambda^2 \alpha_\lambda^{-2} (k_\lambda^2 + o(1))$ при $\lambda \rightarrow 0$, де число k_λ задане формулою (5.27). Теорема 5.3 доведена.

Випадок нескінченно малої послідовності $\alpha_\lambda \rightarrow 0$

Доведемо тепер теорему 5.4. У випадку, коли α_λ прямує до нуля, носій потенціалу U_λ лежить у відрізку $\mathcal{I}_\lambda = (-\alpha_\lambda^{-1}, \alpha_\lambda^{-1})$ і розширюється на усю числову вісь при $\lambda \rightarrow 0$. Тому шукатимемо наближення до власної функції оператора H_λ у вигляді

$$\psi_\lambda(x) = \begin{cases} e^{\omega_\lambda(x+\alpha_\lambda^{-1})}, & \text{коли } x < -\alpha_\lambda^{-1}, \\ u(x) + \lambda \alpha_\lambda v_\lambda(x), & \text{коли } |x| < \alpha_\lambda^{-1}, \\ a_{0,\lambda} e^{-\omega_\lambda(x-\alpha_\lambda^{-1})} + a_{1,\lambda} \rho(x - \alpha_\lambda^{-1}), & \text{коли } x > \alpha_\lambda^{-1}, \end{cases}$$

де $\omega_\lambda = \lambda \alpha_\lambda k_\lambda$, а v_λ — розв'язок задачі

$$-v'' + Vv = -U(\alpha_\lambda x)u(x), \quad v(-\alpha_\lambda^{-1}) = 0, \quad v'(-\alpha_\lambda^{-1}) = k_\lambda. \quad (5.29)$$

Тут u — нормалізований напівзв'язний стан H_0 . Якщо покласти

$$a_{0,\lambda} = \theta + \lambda \alpha_\lambda v_\lambda(\alpha_\lambda^{-1}), \quad a_{1,\lambda} = \lambda^2 \alpha_\lambda^2 v_\lambda(\alpha_\lambda^{-1}), \quad k_\lambda = -\theta^{-1} v'_\lambda(\alpha_\lambda^{-1}),$$

то функція ψ_λ належатиме до класу $W_{2,loc}^2(\mathbb{R})$. Тепер треба довести, що k_λ буде додатним, бо тоді $\psi_\lambda \in \text{dom } H_\lambda$. Напівзв'язний стан u є сталим поза \mathcal{I} , тому $u(-\alpha_\lambda^{-1}) = 1$ і $u(\alpha_\lambda^{-1}) = \theta$. Застосуємо формулу (5.9) до задачі (5.29) і дістанемо рівність

$$\theta v'_\lambda(\alpha_\lambda^{-1}) - k_\lambda = \int_{\mathbb{R}} U(\alpha_\lambda x) u^2(x) dx.$$

З цієї рівності та $v'_\lambda(\alpha_\lambda^{-1}) = -\theta k_\lambda$ виводимо, що

$$k_\lambda = -\frac{1}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U(\alpha_\lambda x) u^2(x) dx. \quad (5.30)$$

Лема 5.8. У припущеннях теореми 5.4 маємо

$$\int_{\mathbb{R}} U(\alpha_\lambda \cdot) u^2 dx = U(0) \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx + o(\alpha_\lambda) \quad \text{при } \alpha_\lambda \rightarrow 0,$$

де Θ — функція, задана формулою (5.5).

Доведення. Позаяк $u(x) = 1$ при $x < -1$ та $u(x) = \theta$ при $x > 1$, то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} U(\alpha_\lambda x) u^2(x) dx &= \frac{1}{\alpha_\lambda} \int_{\mathbb{R}} U(t) u^2\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\alpha_\lambda} \left(\int_{-\alpha_\lambda}^{\alpha_\lambda} U(t) u^2\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right) dt + \int_{-\infty}^{-\alpha_\lambda} U(t) dt + \theta^2 \int_{\alpha_\lambda}^{+\infty} U(t) dt \right). \end{aligned}$$

Далі з першої умови в (5.6) дістаємо

$$\int_{-\infty}^{-\alpha_\lambda} U(t) dt + \theta^2 \int_{\alpha_\lambda}^{+\infty} U(t) dt = - \int_{-\alpha_\lambda}^0 U(t) dt - \theta^2 \int_0^{\alpha_\lambda} U(t) dt.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} U(\alpha_\lambda x) u^2(x) dx &= \frac{1}{\alpha_\lambda} \left(\int_{-\alpha_\lambda}^{\alpha_\lambda} U(t) u^2\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right) dt - \int_{-\alpha_\lambda}^0 U(t) dt - \theta^2 \int_0^{\alpha_\lambda} U(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha_\lambda} \int_{-\alpha_\lambda}^{\alpha_\lambda} U(t) \left(u^2\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right) - \Theta^2(t) \right) dt = \frac{1}{\alpha_\lambda} \int_{\mathbb{R}} U(t) \left(u^2\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right) - \Theta^2(t) \right) dt, \end{aligned}$$

бо $u(\alpha_\lambda^{-1} \cdot) - \Theta$ має компактний носій, що міститься в $[-\alpha_\lambda, \alpha_\lambda]$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} U(\alpha_\lambda x) u^2(x) dx &= \frac{1}{\alpha_\lambda} \int_{\mathbb{R}} U(t) \left(u^2\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right) - \Theta^2\left(\frac{t}{\alpha_\lambda}\right) \right) dt \\ &= U(0) \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx + o(\alpha_\lambda), \quad \alpha_\lambda \rightarrow 0, \end{aligned}$$

оскільки $\Theta = \Theta(\alpha_\lambda^{-1} \cdot)$, U неперервна в точці $x = 0$ та $\alpha_\lambda^{-1} (u^2(\alpha_\lambda^{-1} \cdot) - \Theta^2(\alpha_\lambda^{-1} \cdot))$ є δ -подібною послідовністю. \square

Застосуємо лему до формули (5.30) і дістанемо асимптотику

$$k_\lambda = -\frac{U(0)}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx + o(\alpha_\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Отже, k_λ залишається обмеженою величиною при $\lambda \rightarrow 0$ і є додатною при достатньо малих λ згідно з (5.6).

Лема 5.9. Розв'язок v_λ задачі (5.29) задовольняє нерівність

$$|v_\lambda(x)| \leq C \alpha_\lambda^{-2}$$

для всіх $x \in \mathcal{I}_\lambda$.

Доведення. Цей розв'язок має зображення

$$v_\lambda(x) = \frac{k_\lambda}{\alpha_\lambda} u(x) + k_\lambda u_1(x) + \int_{-1/\alpha_\lambda}^x K(x, s) U(\alpha_\lambda s) u(s) ds,$$

де u_1 та K такі ж, як в доведенні леми 5.7. Позаяк

$$|u_1(x)| \leq C_1(|x| + 1), \quad |K(x, s)| \leq C_2(|x| + |s| + 1)$$

для всіх $x, s \in \mathbb{R}$ і величина k_λ є обмеженою відносно λ , то ми дістаємо оцінку

$$|v_\lambda(x)| \leq c_1 \alpha_\lambda^{-1} + c_2(|x| + 1) + c_3 \int_{-1/\alpha_\lambda}^x (|x| + |s| + 1) ds \leq C \alpha_\lambda^{-2}, \quad x \in \mathcal{I}_\lambda,$$

що завершує доведення. □

Тепер оцінимо залишок $r_\lambda = (H_\lambda + \omega_\lambda^2)\psi_\lambda$, який в цьому випадку має вигляд

$$r_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda^2 \alpha_\lambda^2 U(\alpha_\lambda x) v_\lambda(x) + \omega_\lambda^2 \psi_\lambda(x), & \text{коли } |x| < \alpha_\lambda^{-1} \\ -\lambda^2 \alpha_\lambda^2 v_\lambda\left(\frac{b}{\alpha_\lambda}\right) \left(\rho''\left(x - \frac{b}{\alpha_\lambda}\right) - \omega_\lambda^2 \rho\left(x - \frac{b}{\alpha_\lambda}\right)\right), & \text{коли } \alpha_\lambda^{-1} \leq x \leq \alpha_\lambda^{-1} + 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Застосувавши лему 5.9, ми отримаємо

$$\|\psi_\lambda\| \geq c_1 \omega_\lambda^{-1/2}, \quad \|\psi_\lambda\|_{L_2(\mathcal{I}_\lambda)} \leq c_2 \alpha_\lambda^{-1/2}, \quad \|U(\alpha_\lambda \cdot) v_\lambda\|_{L_2(\mathcal{I}_\lambda)} \leq c_3 \alpha_\lambda^{-5/2}.$$

Далі, згадуючи умову $\lambda^{1/4} \alpha_\lambda^{-1} \rightarrow 0$, дістаємо

$$\|r_\lambda\| \leq \lambda^2 \alpha_\lambda^2 \|U(\alpha_\lambda \cdot) v_\lambda\|_{L_2(\mathcal{I}_\lambda)} + \omega_\lambda^2 \|\psi_\lambda\|_{L_2(\mathcal{I}_\lambda)} + \lambda^2 \alpha_\lambda^2 |v_\lambda(\alpha_\lambda^{-1})| \|\rho'' - \omega_\lambda^2 \rho\|_{L_2(0,1)} \leq c_4 \lambda^2 \alpha_\lambda^{-1/2}.$$

Введемо функцію $\phi_\lambda = \psi_\lambda / \|\psi_\lambda\|$. Тоді

$$\|(H_\lambda + \omega_\lambda^2)\phi_\lambda\| = \|\psi_\lambda\|^{-1} \|r_\lambda\| \leq c_5 \omega_\lambda^{1/2} \lambda^2 \alpha_\lambda^{-1/2} \leq c_6 \omega_\lambda^2 \lambda^{1/2} \alpha_\lambda^{-2},$$

причому $\lambda^{1/2} \alpha_\lambda^{-2}$ прямує до нуля при $\lambda \rightarrow 0$. Отже, $(-\lambda^2 \alpha_\lambda^2 k_\lambda^2, \phi_\lambda)$ — квазімода оператора H_λ з похибкою $o(\omega_\lambda^2)$. Існування такої квазімоди еквівалентне існуванню власного значення $e_\lambda = -\omega_\lambda^2$, де

$$\omega_\lambda = \lambda \alpha_\lambda \left(\frac{U(0)}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx + o(1) \right), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Ми довели теорему 5.4.

5.2 Двочленна асимптотика порогових власних значень

Класичний результат Б. Саймона [96] каже, що одновимірний оператор Шредингера $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda U$ з відмінним від нуля потенціалом, що задовольняє умову $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2) |U(x)| dx < \infty$, матиме при як завгодно малих λ від'ємне власне значення e_λ тоді і лише тоді, коли $\int_{\mathbb{R}} U(x) dx \leq 0$. Крім того, якщо таке власне значення існує, то воно єдине, просте і володіє асимптотикою

$$\sqrt{-e_\lambda} = -\frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}} U(x) dx - \frac{\lambda^2}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} U(x) |x - y| U(y) dx dy + o(\lambda^2) \quad (5.31)$$

при $\lambda \rightarrow 0$. Ця асимптотична формула належить Абарбанелю, Калану та Гольдбергеру (Abarbanel, Callan, Goldberger), хоча і не була ними опублікована. Вона вперше появилась в праці Б. Саймона [96] в 1976 році. Через рік М. Клаус узагальнив цей результат на потенціали U з класу Фадєєва-Марченка [97]. Ми вже згадували вище, що в праці [47] Клаус досліджував порогову поведінку від'ємних власних значень операторів $\mathcal{H}_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U$, де потенціали U та V мали компактний носій. Він довів, що поглинання власного значення суттєвим спектром при $\lambda = 0$ буде тоді, коли оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ має резонанс нульової енергії та $\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx < 0$. Серед від'ємних власних значень лише одне власне прямує до нуля при $\lambda \rightarrow 0$, є аналітичною функцією в точці $\lambda = 0$ і володіє асимптотикою (5.2). Коли $\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx = 0$ і носій потенціалу U лежить між двома сусідніми нулями напівзв'язного стану u , то власне значення з пороговою поведінкою існує для всіх малих λ (як додатних, так і від'ємних). Нарешті, якщо $\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx > 0$, то оператор \mathcal{H}_λ не має власних значень.

В цьому підрозділі ми знайдемо умови існування від'ємних власних значень та побудуємо двочленну асимптотику власного значення з пороговою поведінкою для сім'ї операторів Шредингера

$$H_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U_\lambda, \quad (5.32)$$

де $U_\lambda = U + \lambda U_1 + o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Потенціали V та U_λ мають компактні носії. Фактично, ми поширимо результат Абарбанеля, Калана і Гольдбергера на такий клас операторів і уточнимо асимптотику (5.2). Зокрема, у випадку $V = 0$ та $U_\lambda = U$ наша асимптотична формула збігається з формулою (5.31).

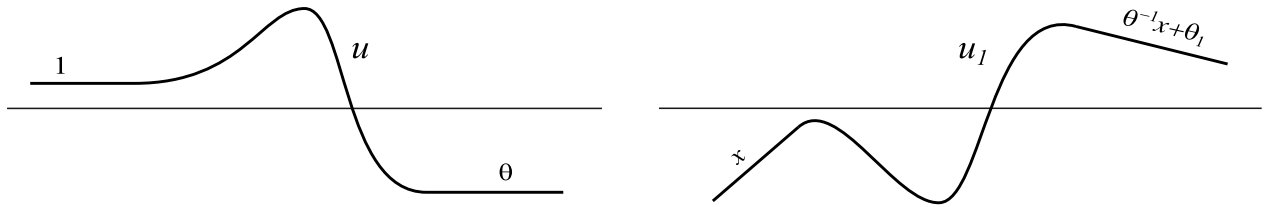


Рис. 5.2: Графіки розв'язків u та u_1

5.2.1 Формулювання основних результатів

Нехай u — напівзв'язний стан незбуреного оператора $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V$, який володіє резонансом нульової енергії. Припустимо, що $u(-\infty) = 1$ та $u(+\infty) = \theta$. Нам знадобиться розв'язок u_1 рівняння $-y'' + Vy = 0$, який лінійно незалежний з u . Припустимо, що $u_1(x) = x$ зліва від носія V . Ми далі доведемо, що справа від носія $u_1(x) = \theta^{-1}x + \theta_1$ з деякою сталою θ_1 (див. рис. 5.2). Нехай також v_* — розв'язок рівняння $-v'' + Vv = -Uu$, який дорівнює нулю зліва від носіїв V та U , а функція Θ задана формулою (5.5). У формулюванні усіх теорем ми припустимо, що V , U та U_1 — функції класу $L^\infty(\mathbb{R})$ з компактним носієм, а також

$$\|U_\lambda - U - \lambda U_1\| = o(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (5.33)$$

Теорема 5.5. *Припустимо, що оператор H_0 має резонанс нульової енергії з нормалізованим напівзв'язним станом u . Якщо*

$$\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx < 0, \quad (5.34)$$

то $\lambda = 0$ є пороговим значенням для операторів $H_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U_\lambda$, тобто для всіх як завгодно малих додатних λ існує від'ємне власне значення e_λ , яке прямує до нуля при $\lambda \rightarrow 0$. Крім того, порогове власне значення має асимптотику $e_\lambda = -\lambda^2 (\omega_0 + \omega_1 \lambda + o(\lambda))^2$ при $\lambda \rightarrow 0$, де

$$\omega_0 = \frac{1}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U u^2 dx, \quad (5.35)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\theta^2 + 1} \left(\int_{\mathbb{R}} U (v_* + \omega_0(\theta^2 - 1)u_1) u dx + \right. \\ \left. + \omega_0^2 \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx - \omega_0^2 \theta^3 \theta_1 + \int_{\mathbb{R}} U_1 u^2 dx \right). \quad (5.36)$$

Порогова поведінка власних значень спостерігається і у випадку, коли нерівність (5.34) обертається в рівність. Тоді поглинання власного значення нижнім краєм неперервного спектру відбувається зі швидкістю $O(\lambda^4)$.

Теорема 5.6. *Припустимо, що*

$$\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx = 0. \quad (5.37)$$

Сім'я операторів H_λ має від'ємне порогове власне значення тоді, коли

$$\int_{\mathbb{R}} (U v_* + U_1 u) u dx < 0. \quad (5.38)$$

Це власне значення допускає асимптотику

$$e_\lambda = -\frac{\lambda^4}{(\theta^2 + 1)^2} \left(\int_{\mathbb{R}} U v_* u dx + \int_{\mathbb{R}} U_1 u^2 dx \right)^2 + o(\lambda^4), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Звернемося до операторів $-\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U$, які вивчав М. Клаус в [47].

Теорема 5.7. *Нехай оператор H_0 має резонанс нульової енергії з нормалізованим напівзв'язним станом u . Якщо $\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx < 0$, то $\lambda = 0$ є пороговим значенням сталої взаємодії для операторів $-\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U$, а порогове власне значення e_λ має асимптотику при $\lambda \rightarrow 0$*

$$e_\lambda = -\lambda^2(\omega_0 + \lambda\omega_1 + o(\lambda))^2, \quad (5.39)$$

де число ω_0 задане формулою (5.35) та

$$\omega_1 = \frac{1}{\theta^2 + 1} \left(\int_{\mathbb{R}} U (v_* + \omega_0(\theta^2 - 1)u_1) u dx + \omega_0^2 \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx - \omega_0^2 \theta^3 \theta_1 \right).$$

Якщо потенціал U відмінний від нуля і

$$\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx = 0, \quad (5.40)$$

то оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U$ має від'ємне власне значення e_λ з асимптотикою

$$e_\lambda = -\frac{\lambda^4}{(\theta^2 + 1)^2} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} U(x)u(x)\mathcal{E}_V(x-y)U(y)u(y) dx dy + o(1) \right)^2, \quad (5.41)$$

де \mathcal{E}_V — фундаментальний розв'язок оператора $\frac{d^2}{dx^2} - V$, який є тотожно нульовим при $x < 0$.

Формула (5.2) була записана для довільного напівзв'язного стану, а при формулюванні теореми 5.7 ми використали нормалізований стан. Щоб узгодити наш результат з результатом М. Клауса, запишемо члени асимптотики (5.39) в термінах довільного напівзв'язного стану

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{u_-^2 + u_+^2} \int_{\mathbb{R}} U u^2 dx, \\ \omega_1 &= \frac{1}{u_-^2 + u_+^2} \left(u_- \int_{\mathbb{R}} U \left(v_* + \frac{\omega_0(u_+^2 - u_-^2)}{u_-^2} u_1 \right) u dx \right. \\ &\quad \left. + \omega_0^2 \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Xi^2) dx - \omega_0^2 \theta_1 \frac{u_+^3}{u_-} \right),\end{aligned}$$

де $u_{\pm} = u(\pm\infty)$, а функція Ξ визначена так: $\Xi(x) = u_-$ при $x < 0$ і $\Xi(x) = u_+$ при $x > 0$.

Порівняємо результат теореми 5.7 з результатом Б. Саймона, коли незбуреним оператором був вільний оператор Шредингера.

Наслідок 5.3. *Припустимо, що $V = 0$. Якщо*

$$\int_{\mathbb{R}} U dx < 0, \quad (5.42)$$

то оператор $H_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda U_\lambda$ має від'ємне власне значення з асимптотикою

$$e_\lambda = -\lambda^2(\omega_0 + \lambda\omega_1 + o(\lambda))^2,$$

коли λ прямує до нуля, де

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} U dx, \quad \omega_1 = \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} U(x) |x - y| U(y) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} U_1 dx. \quad (5.43)$$

Якщо $U_\lambda = U$, то ця асимптотична формула збігається з формулою Абарбанеля-Калана-Гольдбергера (5.31).

Якщо ж потенціал U ненульовий, $\int_{\mathbb{R}} U dx = 0$ та

$$\int_{\mathbb{R}} U_1 dx \leq 0, \quad (5.44)$$

то для всіх достатньо малих λ (додатних чи від'ємних) оператор H_λ володіє власним значенням e_λ з асимптотикою

$$e_\lambda = -\frac{\lambda^4}{16} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} U(x) |x - y| U(y) dx dy + 2 \int_{\mathbb{R}} U_1 dx + o(1) \right)^2, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Цю асимптотичну формулу можна записати і так

$$e_\lambda = -\frac{\lambda^4}{16} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^x U(y) dy \right)^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}} U_1 dx + o(1) \right)^2. \quad (5.45)$$

5.2.2 Побудова та обґрунтування двочленних асимптотик

Зробимо стандартне припущення, що носії потенціалів V та U_λ містяться у відрізьку $\mathcal{I} = [-1, 1]$. Це не зменшує загальності задачі. Надалі також припустимо, що потенціал V резонансний, а u — нормалізований напівзв'язний стан і $\theta = u(1)$.

Лема 5.10. *Нехай u_1 — такий розв'язок рівняння $-y'' + Vy = 0$, що $u_1(x) = x$ при $x \leq -1$. Тоді при $x > 1$ цей розв'язок має вигляд $u_1(x) = \theta^{-1}x + \theta_1$ з деякою сталою θ_1 .*

Доведення. Очевидно, що u_1 є лінійною функцією справа від носія потенціалу V . Треба лише довести, що кутовий коефіцієнт дорівнює θ^{-1} . Функція $w = u + u_1$ розв'язує задачу Коші

$$-w'' + Vw = 0, \quad t \in \mathcal{I}, \quad w(-1) = 0, \quad w'(-1) = 1,$$

а отже, $u_1'(1) = \theta^{-1}$ згідно з формулою (5.9). □

Доведення теорем 5.5 та 5.6

Доведення полягатиме у побудові квазімод $(-\omega_\lambda^2, \phi_\lambda)$ оператора H_λ , який має вигляд (5.32). Проте наближення будуватимемо точніше, бо конкретнішою є асимптотика (5.33) потенціалів U_λ . У припущенні, що $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ володіє резонансом нульової енергії, покладемо $\omega_\lambda = \lambda(\omega_0 + \lambda\omega_{1,\lambda} + \lambda^2\omega_{2,\lambda})$ та $\phi_\lambda = \psi_\lambda / \|\psi_\lambda\|$, де

$$\psi_\lambda(x) = \begin{cases} e^{-\omega_\lambda(x+1)}, & \text{коли } x < -1, \\ u(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_{2,\lambda}(x) + \lambda^3 v_{3,\lambda}(x), & \text{коли } |x| < 1, \\ a_\lambda e^{\omega_\lambda(x-1)} + b_\lambda \rho(x-1), & \text{коли } x > 1. \end{cases} \quad (5.46)$$

Функції v_1 , $v_{2,\lambda}$ та $v_{3,\lambda}$ є розв'язками задач

$$-v_1'' + Vv_1 = -Uu, \quad v_1(-1) = 0, \quad v_1'(-1) = -\omega_0; \quad (5.47)$$

$$\begin{cases} -v_2'' + Vv_2 = -Uv_1 - (U_1 + g_\lambda)u, \\ v_2(-1) = 0, \quad v_2'(-1) = -\omega_{1,\lambda} \end{cases} \quad (5.48)$$

$$-v_3'' + Vv_3 = -f_{3,\lambda}, \quad v_3(-1) = 0, \quad v_3'(-1) = -\omega_{2,\lambda} \quad (5.49)$$

відповідно, де $g_\lambda = \lambda^{-1}(U_\lambda - U - \lambda U_1)$ та $f_{3,\lambda} = Uv_{2,\lambda} + (U_1 + \omega_0^2 + g_\lambda)v_1 + 2\omega_0\omega_{1,\lambda}u$. Припустимо, а далі це доведемо, що величини $\omega_{1,\lambda}$ і $\omega_{2,\lambda}$ мають скінченні границі при $\lambda \rightarrow 0$. Функція ρ , яка забезпечує гладкість ψ_λ , визначена на стор. 168.

Покажемо спершу, що сталі ω_0 , $\omega_{1,\lambda}$, $\omega_{2,\lambda}$, a_λ та b_λ в (5.46) можна вибрати так, що ψ_λ належатиме до $\text{dom } H_\lambda$. Щоб функція ψ_λ була елементом простору $L_2(\mathbb{R})$ мусимо накласти умову $\omega_0 < 0$ (випадок $\omega_0 = 0$ вивчатимемо в теоремі 5.6). Зауважимо, що u та v_k належать до простору Соболева $W_2^2(\mathcal{I})$ як розв'язки рівняння $-y'' + Vy = f$ з правою частиною $f \in L_2(\mathcal{I})$. За побудовою ψ_λ є неперервно диференційовною в точці $x = -1$. Треба забезпечити таку ж властивість в $x = 1$.

Позаяк $[\psi_\lambda]_{x=1} = \theta + \lambda v_1(1) + \lambda^2 v_{2,\lambda}(1) + \lambda^3 v_{3,\lambda}(1) - a_\lambda$, ми покладемо

$$a_\lambda = \theta + \lambda v_1(1) + \lambda^2 v_{2,\lambda}(1) + \lambda^3 v_{3,\lambda}(1). \quad (5.50)$$

Врахувавши цей вибір a_λ , обчислимо стрибок похідної

$$\begin{aligned} [\psi'_\lambda]_{x=1} &= \omega_\lambda a_\lambda + b_\lambda \rho'(0) - \lambda v_1'(1) - \lambda^2 v_{2,\lambda}'(1) - \lambda^3 v_{3,\lambda}'(1) = \\ &= \lambda(\omega_0 + \lambda\omega_{1,\lambda} + \lambda^2\omega_{2,\lambda}) (\theta + \lambda v_1(1) + \lambda^2 v_{2,\lambda}(1) + \lambda^3 v_{3,\lambda}(1)) + b_\lambda - \lambda v_1'(1) - \\ &\quad - \lambda^2 v_{2,\lambda}'(1) - \lambda^3 v_{3,\lambda}'(1) = \lambda(\omega_0\theta - v_1'(1)) + \lambda^2 (\omega_{1,\lambda}\theta + \omega_0 v_1(1) - v_{2,\lambda}'(1)) + \\ &\quad + \lambda^3 (\omega_{2,\lambda}\theta + \omega_{1,\lambda} v_1(1) + \omega_0 v_{2,\lambda}(1) - v_{3,\lambda}'(1)) + b_\lambda + \\ &\quad + \lambda^4 (\omega_0 v_{3,\lambda}(1) + \omega_{1,\lambda}(v_{2,\lambda}(1) + \lambda v_{3,\lambda}(1)) + \omega_{2,\lambda}(v_1(1) + \lambda v_{2,\lambda}(1) + \lambda^2 v_{3,\lambda}(1))). \end{aligned}$$

Щоб цей стрибок був нульовим, ми покладемо

$$\omega_0 = \theta^{-1} v_1'(1), \quad \omega_{1,\lambda} = \theta^{-1} (v_{2,\lambda}'(1) - \omega_0 v_1(1)), \quad (5.51)$$

$$\omega_{2,\lambda} = \theta^{-1} (v_{3,\lambda}'(1) - \omega_0 v_{2,\lambda}(1) - \omega_{1,\lambda} v_1(1)) \quad (5.52)$$

$$b_\lambda = -\lambda^4 (\omega_0 v_{3,\lambda}(1) + \omega_{1,\lambda} (v_{2,\lambda}(1) + \lambda v_{3,\lambda}(1)) + \omega_{2,\lambda} (v_1(1) + \lambda v_{2,\lambda}(1) + \lambda^2 v_{3,\lambda}(1)))|_{x=1}. \quad (5.53)$$

Далі, застосувавши формулу (5.9) з леми 5.3 до задач (5.47)–(5.49), ми дістанемо

$$\theta v'_1(1) = -\omega_0 + \int_{-1}^1 U u^2 dx, \quad \theta v'_{3,\lambda}(1) = -\omega_{2,\lambda} + \int_{-1}^1 f_{3,\lambda} u dx, \quad (5.54)$$

$$\theta v'_{2,\lambda}(1) = -\omega_{1,\lambda} + \int_{-1}^1 U v_1 u dx + \int_{-1}^1 (U_1 + \omega_0^2 + g_\lambda) u^2 dx. \quad (5.55)$$

З рівностей (5.51), (5.52), (5.54) та (5.55) відразу випливає

$$\omega_0 = \frac{1}{\theta^2 + 1} \int_{-1}^1 U u^2 dx, \quad (5.56)$$

$$\omega_{1,\lambda} = \frac{1}{\theta^2 + 1} \left(\int_{-1}^1 U v_1 u dx - \theta \omega_0 v_1(1) + \int_{-1}^1 (U_1 + \omega_0^2 + g_\lambda) u^2 dx \right),$$

$$\omega_{2,\lambda} = \frac{1}{\theta^2 + 1} \left(\int_{-1}^1 f_{3,\lambda} u dx - \theta (\omega_0 v_{2,\lambda}(1) + \omega_{1,\lambda} v_1(1)) \right).$$

Враховуючи компактний носій потенціалу U , формулу для ω_0 запишемо так

$$\omega_0 = \frac{1}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U u^2 dx. \quad (5.57)$$

Згідно з умовою (5.34) число ω_0 є від'ємним, а тому від'ємною буде при малих λ і величина ω_λ . Отже, $\psi_\lambda \in L_2(\mathbb{R})$.

Далі, $\omega_{1,\lambda}$ має скінченну границю ω_1 , коли $\lambda \rightarrow 0$, бо $\|g_\lambda\| = o(1)$ з огляду на (5.33), причому

$$\omega_1 = \frac{1}{\theta^2 + 1} \left(\int_{-1}^1 U v_1 u dx - \theta \omega_0 v_1(1) + \int_{-1}^1 (U_1 + \omega_0^2) u^2 dx \right). \quad (5.58)$$

Треба записати цю формулу інваріантно, позбувшись залежності від відрізка \mathcal{I} та значення функції v_1 в одному з кінців цього відрізка. Замінити безпосередньо інтегрування на \mathcal{I} інтегруванням на всій дійсній осі не можна, бо, наприклад, функція $\omega_0^2 u^2$ не має компактного носія. Зате носій функції $u^2 - \Theta^2$ є компактим і тому маємо

$$\int_{-1}^1 u^2 dx = \int_{-1}^1 (u^2 - \Theta^2) dx + \int_{-1}^1 \Theta^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx + (\theta^2 + 1). \quad (5.59)$$

Далі, $v_1 = v_* - \omega_0(u_1 + u)$, де v_* – розв'язок задачі Коші $-v_*'' + V v_* = -U u$, $v_*(-1) = 0$, $v'_*(-1) = 0$ з однорідними початковими умовами. Тоді ми отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 U v_1 u dx &= \int_{-1}^1 U (v_* - \omega_0 u_1) u dx - \omega_0 \int_{-1}^1 U u^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} U (v_* - \omega_0 u_1) u dx - \omega_0^2 (\theta^2 + 1), \end{aligned} \quad (5.60)$$

бо згідно з (5.57) інтеграл $\int_{-1}^1 Uu^2 dx$ дорівнює $\omega_0(\theta^2 + 1)$. Тепер помножимо рівняння в (5.47) на u_1 і проінтегруємо двічі частинами $(v_1' u_1 - v_1 u_1')|_{-1}^1 = \int_{-1}^1 U u u_1 dx$. Позаяк $u_1(-1) = -1$, $u_1(1) = \theta^{-1} + \theta_1$, $u_1'(1) = \theta^{-1}$ і $v_1'(1) = \omega_0 \theta$, ми матимемо

$$v_1(1) = \omega_0 \theta^2 \theta_1 - \theta \int_{\mathbb{R}} U u_1 u dx. \quad (5.61)$$

Підставивши (5.59)–(5.61) до (5.58), остаточно знайдемо

$$\omega_1 = \frac{1}{\theta^2 + 1} \left(\int_{\mathbb{R}} U v_0 u dx + \int_{\mathbb{R}} U_1 u^2 dx + \omega_0^2 \int_{\mathbb{R}} (u^2 - \Theta^2) dx - \omega_0^2 \theta^3 \theta_1 \right), \quad (5.62)$$

де $v_0 = v_* + \omega_0(\theta^2 - 1)u_1$. Це формула для ω_1 , яка не залежить від того, в якому відрізку розташований носій потенціалів. Аналогічно можна проаналізувати формулу для $\omega_{2,\lambda}$. Ця величина теж має границю при $\lambda \rightarrow 0$. Отже, такий вибір ω_0 , $\omega_{1,\lambda}$, $\omega_{2,\lambda}$, a_λ та b_λ гарантує, що $\psi_\lambda \in \text{dom } H_\lambda$.

Лема 5.11. *Існують такі сталі c та C , що $c\omega_\lambda^{-1/2} \leq \|\psi_\lambda\| \leq C\omega_\lambda^{-1/2}$.*

Доведення. Очевидно, що розв'язки $v_{2,\lambda}$ і $v_{3,\lambda}$ задач (5.48) і (5.49) є обмеженими в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$ рівномірно відносно λ . Лема 5.3 дає нам оцінки

$$\begin{aligned} \|v_{2,\lambda}\|_{C^1(\mathcal{I})} &\leq C(|\omega_{1,\lambda}| + \|Uv_1 + (U_1 + g_\lambda)u\|_{L_2(\mathcal{I})}) \leq c_1, \\ \|v_{3,\lambda}\|_{C^1(\mathcal{I})} &\leq C(|\omega_{2,\lambda}| + \|f_{3,\lambda}\|_{L_2(\mathcal{I})}) \leq c_2, \end{aligned}$$

де сталі c_1 та c_2 не залежать від λ . Тоді з (5.50) і (5.53) відразу отримаємо

$$|a_\lambda| \leq c_3, \quad |b_\lambda| \leq c_4 \lambda^4. \quad (5.63)$$

Тепер зрозуміло, що основний внесок до $L_2(\mathbb{R})$ -норми функції ψ_λ роблять експоненти $e^{\pm\omega_\lambda(x \mp 1)}$. Безпосередні обчислення дають $\|e^{-\omega_\lambda(x+1)}\|_{L_2(-\infty, -1)} = (2\omega_\lambda)^{-1/2}$ та $\|e^{\omega_\lambda(x-1)}\|_{L_2(1, +\infty)} = (2\omega_\lambda)^{-1/2}$. Отже, $\|\psi_\lambda\| \sim a\omega_\lambda^{-1/2}$ при $\lambda \rightarrow 0$. Зокрема, $\|\psi_\lambda\| \sim a_0\lambda^{-1/2}$, коли $\omega_0 \neq 0$, та $\|\psi_\lambda\| \sim a_1\lambda^{-1}$, коли $\omega_0 = 0$. \square

Лема 5.12. *Пара $(-\omega_\lambda^2, \phi_\lambda)$ є квазімодюю H_λ з похибкою $o(\lambda^{9/2})$ при $\lambda \rightarrow 0$.*

Доведення. Нехай $r_\lambda = (H_\lambda + \omega_\lambda^2)\psi_\lambda$, тоді $(H_\lambda + \omega_\lambda^2)\phi_\lambda = \|\psi_\lambda\|^{-1}r_\lambda$. Оцінимо норму залишку r_λ в просторі $L_2(\mathbb{R})$. Експоненти $e^{\pm\omega_\lambda(x \mp 1)}$ є точними розв'язками $-\psi'' + \omega_\lambda^2\psi = 0$, а також $\text{supp } \rho = [0, 1]$, тому

$$r_\lambda(x) = -b_\lambda(\rho''(x-1) - \omega_\lambda^2\rho(x-1)) \quad \text{при } 1 \leq x \leq 2 \quad (5.64)$$

і $r_\lambda(x) = 0$ для решти значень x з множини $\{x: |x| > 1\}$. З другої нерівності в (5.63) ми відразу маємо

$$|r_\lambda(x)| \leq c_1 \lambda^4 \quad \text{при } |x| \geq 1, \quad (5.65)$$

бо ρ та ρ'' обмежені на $[0, 1]$. Тепер обчислимо r_λ для $|x| < 1$. Згадуючи означення напівзв'язного стану та задачі (5.47)–(5.49), дістаємо

$$\begin{aligned} r_\lambda &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V + \lambda U + \lambda^2 U_1 + \lambda^2 g_\lambda + \omega_\lambda^2 \right) (u + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \lambda^3 v_3) = \\ &= (-u'' + Vu) + \lambda(-v_1'' + Vv_1 + Uu) + \lambda^2(-v_2'' + Vv_2 + Uv_1 + \\ &\quad + U_1 u + \omega_0^2 u + g_\lambda u) + \lambda^3(-v_3'' + Vv_3 + f_{3,\lambda}) + \lambda^4 R_\lambda = \lambda^4 R_\lambda, \end{aligned}$$

де норма залишку R_λ в просторі $L_2(\mathcal{I})$ є рівномірно обмежена за λ . Отже, з урахуванням (5.65), маємо, що $\|r_\lambda\| = O(\lambda^4)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Тому

$$\|(H_\lambda + \omega_\lambda^2)\phi_\lambda\| = \|\psi_\lambda\|^{-1} \|r_\lambda\| \leq c\lambda^{9/2} \quad (5.66)$$

з огляду на лему 5.11. □

Тепер леми 5.2 та 5.12 гарантують, що оператор H_λ володіє від'ємним власним значенням e_λ , яке задовольняє нерівність

$$|e_\lambda + \lambda^2(\omega_0 + \lambda\omega_{1,\lambda} + \lambda^2\omega_{2,\lambda})^2| \leq c\lambda^{9/2}.$$

Проте з іншого боку, при $\lambda \rightarrow 0$ маємо

$$(\omega_0 + \lambda\omega_{1,\lambda} + \lambda^2\omega_{2,\lambda})^2 - (\omega_0 + \lambda\omega_1)^2 \sim 2\omega_0\lambda(\omega_{1,\lambda} - \omega_1),$$

а також $\omega_{1,\lambda} - \omega_1 = o(1)$. Звідси виводимо асимптотичну формулу

$$e_\lambda + \lambda^2(\omega_0 + \lambda\omega_1)^2 = o(\lambda^3), \quad \lambda \rightarrow 0,$$

яку перепишемо так $(\lambda^{-1}\sqrt{-e_\lambda})^2 - (\omega_0 + \lambda\omega_1)^2 = o(\lambda)$. Далі можна отримати рівність $\lambda^{-1}\sqrt{-e_\lambda} + \omega_0 + \lambda\omega_1 = o(\lambda)$, а отже, $\sqrt{-e_\lambda} = -\lambda(\omega_0 + \lambda\omega_1 + o(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$, що завершує доведення теореми 5.5.

Розглянемо граничний випадок, коли нерівність (5.34) обертається в рівність

$$\int_{\mathbb{R}} U u^2 dx = 0. \quad (5.67)$$

Отже, $\omega_0 = 0$ згідно з (5.56), а також $v_0 = v_*$. Формула (5.62) набуває вигляду

$$\omega_1 = \frac{1}{\theta^2 + 1} \left(\int_{\mathbb{R}} U v_* u \, dx + \int_{\mathbb{R}} U_1 u^2 \, dx \right).$$

Тепер треба вимагати, щоб виконувалася нерівність $\omega_1 < 0$, яка гарантуватиме експоненціальне спадання майже-власної функції ψ_λ . Зрозуміло, що тоді величина $\omega_\lambda = \lambda^2(\omega_{1,\lambda} + \lambda\omega_{2,\lambda})$ теж буде від'ємною для малих λ . Умова (5.38) дає нам від'ємність ω_1 .

З огляду на лему 5.11, при $\omega_0 = 0$ ми маємо $\|\psi_\lambda\| \sim a\lambda^{-1}$ при $\lambda \rightarrow 0$. Тому оцінку (5.66) можна посилити $\|(H_\lambda + \omega_\lambda^2)\phi_\lambda\| \leq c\lambda^5$ і отримати

$$|e_\lambda + \lambda^4(\omega_{1,\lambda} + \lambda\omega_{2,\lambda})^2| \leq c_1\lambda^5.$$

Якщо ми перепишемо її у вигляді $(\lambda^{-2}\sqrt{-e_\lambda})^2 - (\omega_{1,\lambda} + \lambda\omega_{2,\lambda})^2 = O(\lambda)$, то далі виводимо $\lambda^{-2}\sqrt{-e_\lambda} = -\omega_{1,\lambda} + O(\lambda) = -\omega_1 + o(1)$. І нарешті,

$$\sqrt{-e_\lambda} = -\lambda^2(\omega_1 + o(1)), \quad \lambda \rightarrow 0,$$

що і є тезою теореми 5.6.

Доведення теореми 5.7 та наслідку 5.3

Перша частина теореми 5.7 випливає з доведених вище теорем 5.5 та 5.6, якщо покласти $U_\lambda = U$ для всіх λ . Залишилося лише вивести формулу (5.41). Якщо ж виконується умова (5.40), то $\omega_0 = 0$ та

$$\omega_1 = \frac{1}{\theta^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} U v_* u \, dx. \quad (5.68)$$

Нагадаємо, що v_* є таким розв'язком рівняння $v_*'' - Vv_* = Uu$, який тотожно дорівнює нулю зліва від носії потенціалів V і U . Візьмемо фундаментальний розв'язок \mathcal{E}_V цього рівняння, який теж обертається в нуль зліва від носії V і U . Тоді v_* є згорткою $v_*(x) = (\mathcal{E}_V * Uu)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_V(x-y)U(y)u(y) \, dy$. Отже,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} U v_* u \, dx &= \int_{\mathbb{R}} U(x)u(x)(\mathcal{E}_V * Uu)(x) \, dx = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} U(x)u(x)\mathcal{E}_V(x-y)U(y)u(y) \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Підстановка рівності (5.69) до (5.68) завершує доведення теореми 5.7.

Залишилося довести наслідок 5.3. Ми знаємо, що потенціал $V = 0$ має резонанс і $u = 1$. Тоді $\theta = 1$ та $\Theta(x) = 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Крім того, $\theta_1 = 0$, бо рівняння $u'' = 0$ володіє розв'язком $u_1 = x$. З цих причин умова (5.34) набуває вигляду (5.42), а формули (5.35), (5.36) спрощуються

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} U dx, \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} U v_* dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} U_1 dx.$$

Фундаментальний розв'язок оператора $\frac{d^2}{dx^2}$, який обертається в нуль при $x < 0$, має вигляд $\mathcal{E}_0(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} U(x) v_*(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} U(x) (\mathcal{E}_0 * U)(x) dx = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} U(x) |x - y| U(y) dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} U(x) (x - y) U(y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} U(x) |x - y| U(y) dx dy, \end{aligned}$$

оскільки $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x) (x - y) f(y) dx dy = 0$ для кожної функції f , для якої цей інтеграл існує. Це дає нам формулу для ω_1 в (5.43).

Друга частина наслідку, коли потенціал U має нульове середнє, відрізняється від усіх доведених вище тверджень тим, що $\lambda = 0$ є пороговим значенням для операторів \mathcal{H}_λ незалежно від знаку параметра λ , тобто λ може бути і додатним, і від'ємним. Для випадку $U_\lambda = U$ такий результат був отриманий Б. Саймоном [96]. Позаяк тепер $\int_{\mathbb{R}} U dx = 0$, то з (5.43) маємо, що $\omega_0 = 0$. В цьому разі

$$\iint_{\mathbb{R}^2} U(x) |x - y| U(y) dx dy = - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^x U(y) dy \right)^2 dx. \quad (5.70)$$

Справді з рівності $\int_{\mathbb{R}} U dx = 0$ відразу дістаємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x U(y) dy &= - \int_x^{+\infty} U(y) dy, \\ \int_{\mathbb{R}} U(x) \int_{-\infty}^x y U(y) dy dx &= - \int_{\mathbb{R}} U(x) \int_x^{+\infty} y U(y) dy dx. \end{aligned}$$

З цими формулами маємо

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} U(x) |x - y| U(y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} U(x) \int_{-\infty}^x (x - y) U(y) dy dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}} U(x) \int_x^{+\infty} (y - x) U(y) dy dx = 2 \int_{\mathbb{R}} x U(x) \int_{-\infty}^x U(y) dy dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^x U(y) dy \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Якщо потенціал U відмінний від нуля, то з формули (5.70) та умови (5.44) отримуємо $\omega_1 < 0$. Отже, величина $\omega_\lambda = \lambda^2 \omega_{1,\lambda} + \lambda^3 \omega_{2,\lambda}$ є від'ємною для всіх λ достатньо малих, як додатних, так і від'ємних. А тоді порогове власне значення має асимптотику (5.45).

Розділ 6

ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА З ПОТЕНЦІАЛАМИ ТИПУ КУЛОНА

Одновимірні оператори Шредингера з потенціалами типу Кулона спричинили багато гарячих наукових дискусій [118–124], історія яких розпочалася з роботи Р. Лаудона [125] 1959 року. З погляду фізики предметом цих дискусій стала модель одновимірного атома водню, у дослідженнях якої важливою була структура спектру та питання проникності через потенціал Кулона в задачах розсіювання. Проте не Лаудон був першим, хто ввів у фізику таку модель. Ще в 1928 і 1929 роках фон В. С. Врклян опублікував дві праці [126, 127], в яких вперше вказав на важливість т. з. “одновимірної фізики” і описав спектри двох класичних задач у одновимірному варіанті – згадану вище задачу про атом водню та задачу Кеплера в загальній теорії відносності. В 2016 році вийшла оглядова стаття Р. Лаудона [128], в якій автор спробував систематизувати результати про одновимірну модель атома водню, отримані за останні шість десятиліть. Він також навів вагомні аргументи щодо актуальності моделі для сучасної фізики, проаналізувавши сучасний стан теорії та її застосувань. Ми повернемося до історії досліджень одновимірного атома водню після того, як доведемо основні результати розділу і матимемо змогу провести порівняння з результатами, отриманими іншими дослідниками. В цьому розділі ми вивчимо значно ширший клас операторів Шредингера з потенціалами типу Кулона. Наслідком отриманих результатів стане повний математичний розв’язок проблеми одновимірного атома водню, який опубліковано в [129].

6.1 Формулювання задачі та основні результати

Одновимірною моделлю атома водню пов'язана з властивостями диференціальних рівнянь вигляду

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{\gamma}{|x|}\psi = E\psi, \quad -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\psi = E\psi, \quad (6.1)$$

коефіцієнти яких мають степеневі особливості. Сингулярність потенціалів в цих формальних операторах Шредингера спричиняє негладкість розв'язків. Тому розв'язки, визначені в односторонніх околах точки сингулярності, треба поєднати деякими умовами. Щоб побудувати гамільтоніан атома водню — самоспряжений оператор, що відповідає енергії системи, — потрібно явно вказати умови спряження чи крайові умови в точці сингулярності потенціалу Кулона. Проте теорія самоспряжених розширень симетричних операторів дає досить велику множину умов, які перетворюють формальні диференціальні вирази (6.1) в самоспряжені оператори в $L_2(\mathbb{R})$ [121, 130, 131]. Основним питанням тут є математично і фізично обумовлений вибір таких умов.

Одновимірні псевдогамільтоніани з потенціалами Кулона мають багато схожого з псевдогамільтоніанами з δ' -потенціалами. Перш за все, обидва типи таких формальних диференціальних виразів є чутливими до того, як ми їх регуляризуємо. Не варто сподіватися, що існує лише одна точна модель для кожного з псевдогамільтоніанів (6.1). А оскільки “одновимірні атоми водню” виникають в моделюванні різних фізичних явищ, тому природно очікувати певну різноманітність квантово-механічних систем, формально пов'язаних з такими диференціальними виразами. Такої думки притримуються й фізики [121, 132], вважаючи, що модель критично залежить від поведінки потенціалів, близьких до потенціалу Кулона, на малих відстанях до атома.

Опишемо основний об'єкт дослідження. В попередніх розділах ми збудували оператор $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$. На відміну від δ' -подібних потенціалів, потенціали типу Кулона мають нелокальний характер, і тому нам зручно у виразах

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) - \frac{\gamma}{|x|}, \quad -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \frac{\gamma}{x}$$

об'єднати два потенціальні доданки в один. При цьому ми збережемо у потенціалі

степеневу особливість в нулі і таку поведінку на нескінченності, яка б гарантувала самоспряженість оператора в $L_2(\mathbb{R})$, коли особливість стягти. Нехай Q — дійснозначна функція на прямій, яка є локально обмежена поза нулем, а в нулі має особливість вигляду

$$Q(x) = \begin{cases} \frac{q_-}{x}, & \text{коли } x \in (-x_0, 0), \\ \frac{q_+}{x}, & \text{коли } x \in (0, x_0) \end{cases} \quad (6.2)$$

з дійсними q_-, q_+ та $x_0 > 0$ (див. рис. 6.1). Також припускатимемо, що оператор

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)(1 - \chi(x)), \quad (6.3)$$

де χ — характеристична функція відрізка $[-1, 1]$, є самоспряженим в $L_2(\mathbb{R})$.

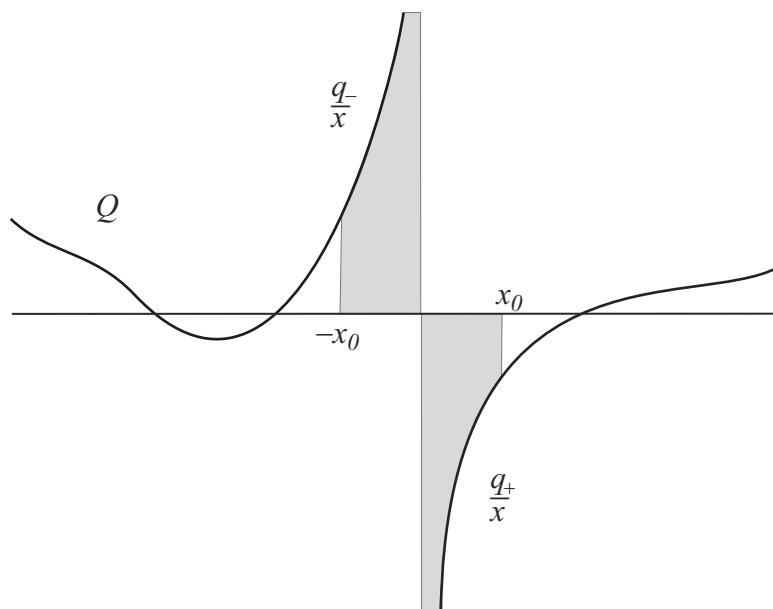


Рис. 6.1: Потенціал типу Кулона.

Введемо для потенціалу Q клас локально інтегровних регуляризацій Q_ε , які при $\varepsilon \rightarrow 0$ збігаються до нього майже скрізь. Нехай

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} Q(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} \varkappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases} \quad (6.4)$$

де функція $\varkappa = \varkappa(t)$ належить до простору $L^\infty(\mathbb{R})$ і дорівнює нулеві поза відрізком $\mathcal{I} = [-1, 1]$. Вивчатимемо поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$ сім'ї операторів

$$H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_\varepsilon(x) + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}x), \quad (6.5)$$

де V та U — дійснозначні обмежені потенціали з компактним носієм. Область визначення H_ε збігається з областю визначення самоспряженого оператора H_0 , заданого в (6.3). Введемо простори

$$\mathcal{U}_\pm = \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}_\pm) : \psi, \psi' \in AC_{loc}(\mathbb{R}_\pm), -\psi'' + Q\psi \in L^2(\mathbb{R}_\pm) \}.$$

Нехай простір \mathcal{U} , який складається з $L^2(\mathbb{R})$ -функцій ϕ таких, що $\phi|_{\mathbb{R}_\pm} \in \mathcal{U}_\pm$. Через $AC_{loc}(\mathbb{R}_\pm)$ позначаємо простір абсолютно неперервних функцій на кожному компактні в \mathbb{R}_\pm .

Спершу опишемо умови, при яких оператори H_ε збігаються до оператора, породженого зв'язаними умовами в початку координат.

Теорема 6.1. *Припустимо, що оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ в $L_2(\mathbb{R})$ володіє резонансом нульової енергії з напівзв'язним станом h . Нехай також $\theta = h(+\infty)$ при умові, що $h(-\infty) = 1$. Якщо*

$$\theta^2 q_+ - q_- = \int_{\mathbb{R}} \varkappa h^2 dx, \quad (6.6)$$

то оператори H_ε збігаються в рівномірній резольвентній топології. Граничний оператор \mathcal{H} діє за правилом $\mathcal{H}\phi = -\phi'' + Q\phi$ на функціях $\phi \in \mathcal{U}$, підпорядкованих умовам спряження

$$\begin{aligned} \phi(+0) &= \theta\phi(-0), \\ \lim_{x \rightarrow +0} (\theta\phi'(x) - \phi'(-x) - (\theta^2 q_+ - q_-)\phi(-0) \ln x) &= \phi(-0) \int_{\mathbb{R}} U h^2 dx. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Крім того, для кожного $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ справедлива оцінка

$$\|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1} - (\mathcal{H} - \zeta)^{-1}\| \leq C\varepsilon^{1/4}. \quad (6.8)$$

Наступна теорема описує ситуацію, коли граничний оператор є породженим розділеними крайовими умовами.

Теорема 6.2. *Якщо оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ не має резонансу нульової енергії, то оператори H_ε збігаються в рівномірній резольвентній топології до прямої суми $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$ двох операторів на півосях $\mathcal{D}_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + Q$ з областями визначення $\text{dom } \mathcal{D}_\pm = \{ \psi \in \mathcal{U}_\pm : \psi(0) = 0 \}$. Крім того, для кожного $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ маємо оцінку*

$$\|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1} - (\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+ - \zeta)^{-1}\| \leq C\varepsilon^{1/4}. \quad (6.9)$$

Умова (6.6), яка забезпечує збіжність операторів, та умови спряження (6.7), які виникають в границі, нетривіально залежать від потенціалів Q_ε , V та U , поєднуючи напівзв'язний стан h і його структурний параметр θ , характеристики q_- та q_+ кулонівського потенціалу та форму його регуляризації \varkappa . Точкові взаємодії (6.7) не схожі на ті, які описані в лемі 1.6. Річ у тім, що перша похідна розв'язку ϕ диференціального рівняння $-\phi'' + Q\phi = f$ може мати логарифмічну особливість в нулі і значення $\phi'(\pm 0)$ не визначені [118, 121, 122]. Зауважимо, що простір \mathcal{U} “витримує” такі сингулярності похідних. Зате регулярну поведінку при підході зліва і справа до нуля мають вирази $\phi'(x) - q_-\phi(x) \ln|x|$ і $\phi'(x) - q_+\phi(x) \ln|x|$ відповідно. Ввівши позначення

$$b_\pm(\phi) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} (\phi'(x) - q_\pm \phi(\pm 0) \ln|x|), \quad \mu = \int_{\mathbb{R}} U h^2 dx, \quad (6.10)$$

умови спряження (6.7) можна записати так

$$\phi(+0) = \theta \phi(-0), \quad \theta b_+(\phi) - b_-(\phi) = \mu \phi(-0). \quad (6.11)$$

Справді, врахувавши першу умову стрибка для ϕ , другу можна перетворити

$$\begin{aligned} \theta b_+(\phi) - b_-(\phi) &= \\ &= \theta \lim_{x \rightarrow +0} (\phi'(x) - q_+ \phi(+0) \ln|x|) - \lim_{x \rightarrow -0} (\phi'(x) - q_- \phi(-0) \ln|x|) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left(\theta \phi'(x) - \phi'(-x) - (\theta q_+ \phi(+0) - q_- \phi(-0)) \ln|x| \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (\theta \phi'(x) - \phi'(-x) - (\theta^2 q_+ - q_-) \phi(-0) \ln x). \end{aligned}$$

Оператор \mathcal{H} , породжений точковою взаємодією (6.7), є самоспряженим з огляду на рівномірну резольвентну збіжність операторів H_ε . Справді, рівномірна ре-

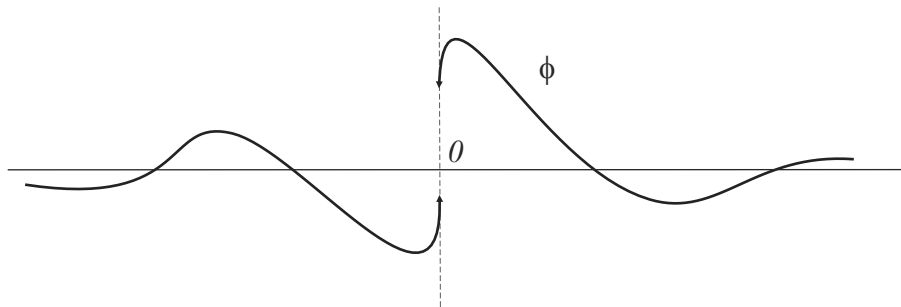


Рис. 6.2: Хвильова функція з точковими взаємодіями (6.7).

зольвентна границя самоспряжених операторів є знову самоспряженим оператором. Проте легко довести, що оператори $H\phi = -\phi'' + Q\phi$ з умовам спряження

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ b_+(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ b_-(\phi) \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathcal{U},$$

є самоспряженим, коли усі елементи матриці c_{kl} дійсні та $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1$. Умови ж (6.11) в матричному зображенні є такими

$$\begin{pmatrix} \phi(+0) \\ b_+(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ \mu\theta^{-1} & \theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(-0) \\ b_-(\phi) \end{pmatrix}.$$

Коли q_-, q_+ і κ дорівнюють нулю, то потенціал Q не має жодної особливості, бо дорівнює тотожно нулю на $(-x_0, x_0)$. Тоді теореми 6.1 і 6.2 обертаються в теорему 2.2 з $\omega = 1$ для гамільтоніанів з $(\alpha\delta' + \beta\delta)$ -подібними потенціалами.

Якщо потенціал V є резонансним, але рівність (6.6) не виконується, то оператори H_ε , взагалі кажучи, не збігаються при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таке згладження потенціалу Кулона може привести до нерегулярної асимптотичної поведінки при малих ε самих операторів, їхніх спектрів та даних розсіювання. Коли потенціал V є нульовим (отже, резонансним), є результати щодо збіжності операторів в рівномірній та сильній резольвентних топологіях. Ми опишемо їх нижче.

6.2 Збіжність в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ потенціалів типу Кулона

Клас узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ значно розширює множину класичних функцій, зокрема, такими екзотичними функціоналами як функція Дірака та її похідні. Водночас багато навіть елементарних функцій опиняються за межами цього класу, а питання чи можна трактувати їх як узагальнені функції і як саме, вимагає додаткового дослідження. Звісно, йдеться про функції, які не належать до простору $L_{1,loc}(\mathbb{R})$. Наприклад, функція Q вигляду (6.2) є неінтегрованою в околі нуля, а тому лінійне відображення $C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni \psi \mapsto \int_{\mathbb{R}} Q\psi dx$ не є неперервним в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, тобто не є узагальненою функцією. Проте існує безліч неперервних функціоналів g , які збігаються з Q поза початком координат, тобто

$$g(\psi) = \int_{\mathbb{R}} Q\psi dx \quad \text{для всіх } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}). \quad (6.12)$$

Скориставшись аналогією з формулою $(\ln |x|)' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$, розглянемо локально інтегровну функцію на \mathbb{R} таку, що

$$G(x) = \begin{cases} q_- \ln(-x), & \text{коли } x \in (-x_0, 0), \\ q_+ \ln x, & \text{коли } x \in (0, x_0). \end{cases} \quad (6.13)$$

Тепер введемо функціонал \mathcal{Q} як узагальнену похідну G , тобто $\mathcal{Q} = G'$.

Лема 6.1. *Множина \mathcal{F} узагальнених функцій, які збігаються з \mathcal{Q} поза нулем, тобто функціоналів з властивістю (6.12), має вигляд*

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathcal{Q} + \sum_{k=0}^m a_k \delta^{(k)}(x), a_k \in \mathbb{C}, m = 0, 1, \dots \right\}.$$

Доведення. Очевидно, що \mathcal{Q} належить до множини \mathcal{F} . Для будь-якого іншого функціоналу $g \in \mathcal{F}$ маємо $\langle g - \mathcal{Q}, \psi \rangle = 0$ для всіх $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Отже, носій $g - \mathcal{Q}$ складається лише з точки $x = 0$. Такий функціонал є скінченною лінійною комбінацією функції $\delta(x)$ та її похідних, що завершує доведення. \square

На множині \mathcal{F} можна ввести шкалу за порядком сингулярності розподілів $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots$, де $\mathcal{F}_n = \left\{ \mathcal{Q} + \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)}(x), a_k \in \mathbb{C} \right\}$.

Лема 6.2. *Для кожного $\gamma \in (0, 1)$ елементи $\mathcal{F}_0 = \{ \mathcal{Q} + a_0 \delta(x), a_0 \in \mathbb{C} \}$ є лінійними неперервними функціоналами на просторі неперервних за Гельдером функцій $C_0^{0,\gamma}(\mathbb{R})$ з компактними носіями. На просторі неперервних функцій з компактними носіями вони є неперервними лише, коли $q_- = q_+ = 0$.*

Доведення. Порядок функціоналів сім'ї \mathcal{F}_0 визначає особливість функції Q в нулі. Нехай функція $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ дорівнює одиниці на відрізку $[-x_0, x_0]$. Тоді для всіх $\psi \in C_0^{0,\gamma}(\mathbb{R})$ з носієм в $[-x_0, x_0]$ маємо

$$\psi(x) = \psi(x)\chi(x) = (\psi(x) - \psi(0))\chi(x) + \psi(0)\chi(x).$$

Подіємо на тестову функцію ψ розподілом \mathcal{Q} і отримаємо

$$\langle \mathcal{Q}, \psi \rangle = \langle \mathcal{Q}, (\psi - \psi(0))\chi \rangle + c_0 \langle \delta(x), \psi \rangle,$$

де $c_0 = \langle \mathcal{Q}, \chi \rangle$. Функція Дірака є неперервним функціоналом на класі неперервних функцій, а перший доданок можна оцінити так

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{Q}, (\psi - \psi(0))\chi \rangle| &= \left| \int_{-x_0}^{x_0} Q(x)(\psi(x) - \psi(0)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{-x_0}^{x_0} |x|^\gamma |Q(x)| \frac{|\psi(x) - \psi(0)|}{|x|^\gamma} dx \leq C \|\psi\|_{C_0^{0,\gamma}(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

бо

$$\int_{-x_0}^{x_0} |x|^\gamma |Q(x)| dx = \int_{-x_0}^0 |q_-| |x|^{\gamma-1} dx + \int_0^{x_0} |q_+| |x|^{\gamma-1} dx = \gamma^{-1} (|q_-| + |q_+|) |x_0|^\gamma.$$

Отже, \mathcal{Q} є лінійним неперервним функціоналом на просторі $C_0^{0,\gamma}(\mathbb{R})$. З доведення також зрозуміло, що в тому разі, коли хоча б одне з чисел q_- чи q_+ відмінне від нуля, функціонал \mathcal{Q} визначений не для всіх неперервних функцій. Наприклад, він набуває нескінченного значення на неперервній функції $\phi(x) = \chi(x) \ln^{-1} |x|$ при $x \neq 0$ та $\phi(0) = 0$. \square

Узагальнена функція \mathcal{Q} є сингулярнішою, ніж δ -функція, але вона регулярніша за першу похідну δ -функції. Сім'я \mathcal{F}_0 містить узагальнені функції найменшого порядку сингулярності. Наприклад, коли $Q(x) = 1/x$, то до \mathcal{F}_0 належить узагальнена похідна логарифма $\mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}} = (\ln |x|)'$, а також функціонали

$$\mathcal{S}_- = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\varepsilon}, \quad \mathcal{S}_+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x + i\varepsilon}. \quad (6.14)$$

Відомі формули Сохоцького $\mathcal{S}_- = \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}} + i\pi\delta(x)$ та $\mathcal{S}_+ = \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}} - i\pi\delta(x)$ показують, що функціонали $\mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}}$, \mathcal{S}_- і \mathcal{S}_+ різняться доданками $s\delta(x)$ і належать до \mathcal{F}_0 .

Потенціали $Q_\varepsilon(x) + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}x)$ операторів H_ε можна трактувати як регуляризацію розподілів $\mathcal{Q} + a_1\delta'(x) + a_0\delta(x)$ з множини \mathcal{F}_1 , де a_0, a_1 — дійсні. Варто зауважити, що регуляризація вигляду (6.4) для функції \mathcal{Q} не є надуманою. Вона природна для потенціалів кулонівського типу. Узагальнена функція \mathcal{Q} визначена неявно через похідну розподілу G з логарифмічною особливістю вигляду (6.13). Апроксимуємо G послідовністю неперервних функцій

$$G_\varepsilon(x) = \begin{cases} G(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln \varepsilon, & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

де q — функція класу $C^1(-1, 1)$ така, що $q(-1) = q_-$ та $q(1) = q_+$ (див. рис. 6.3). Позаяк $G_\varepsilon \rightarrow G$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $G'_\varepsilon \rightarrow \mathcal{Q}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Причому регуляризація

$$G'_\varepsilon(x) = \begin{cases} Q(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} q'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

має вигляд (6.4), якщо покласти $\varkappa = q'$.

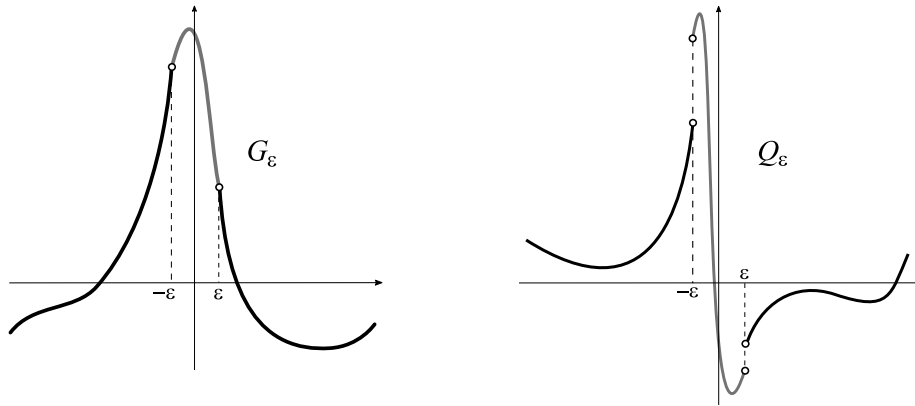


Рис. 6.3: Графіки функцій G_ε та G'_ε .

Лема 6.3. *Послідовність функцій Q_ε , задана формулою (6.4), збігається в просторі узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ тоді і лише тоді, коли виконується умова*

$$q_+ - q_- = \int_{\mathcal{I}} \varkappa dx. \quad (6.15)$$

Доведення. Згадавши вигляд (6.2) функції Q на інтервалі $(-x_0, x_0)$, матимемо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} Q_\varepsilon(x) \psi(x) dx &= \int_{|x| > x_0} Q(x) \psi(x) dx + \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varkappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \psi(x) dx + \\ &+ q_+ \int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\psi(x)}{x} dx + q_- \int_{-x_0}^{-\varepsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx \end{aligned}$$

для кожної $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Три останні інтеграли залежать від ε і при $\psi(0) \neq 0$ мають порядок $O(\ln \varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Справді, запишемо інтеграли так

$$\begin{aligned} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varkappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \psi(x) dx &= \psi(0) \ln \varepsilon \int_{-1}^1 \varkappa(t) dt + \ln \varepsilon \int_{-1}^1 \varkappa(t) (\psi(\varepsilon t) - \psi(0)) dt, \\ \int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\psi(x)}{x} dx &= -\psi(0) \ln \varepsilon + \psi(0) \ln x_0 + \int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} dx, \\ \int_{-x_0}^{-\varepsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx &= \psi(0) \ln \varepsilon - \psi(0) \ln x_0 + \int_{-x_0}^{-\varepsilon} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} dx. \end{aligned}$$

Очевидно, що коли ε прямує до нуля, то

$$\begin{aligned} \ln \varepsilon \int_{-1}^1 \varkappa(t)(\psi(\varepsilon t) - \psi(0)) dt &\rightarrow 0, \\ \int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} dx &\rightarrow \int_0^{x_0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} dx, \\ \int_{-x_0}^{-\varepsilon} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} dx &\rightarrow \int_{-x_0}^0 \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} dx, \end{aligned}$$

оскільки $\psi(x) - \psi(0) = O(x)$ при $x \rightarrow 0$. Тому

$$\int_{\mathbb{R}} Q_{\varepsilon}(x)\psi(x) dx = \left(\int_{\mathcal{I}} \varkappa dt - q_+ + q_- \right) \psi(0) \ln \varepsilon + f_{\varepsilon}(\psi),$$

де $\{f_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ — послідовність неперервних функціоналів, яка збігається в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отже, збіжність послідовності Q_{ε} в сенсі узагальнених функцій еквівалентна виконанню рівності $q_+ - q_- = \int_{\mathcal{I}} \varkappa dt$. \square

Насправді ми довели, що умова (6.15) є достатньою для збіжності функціоналів Q_{ε} в просторі Гельдера $C_0^{0,\gamma}(\mathbb{R})$, $\gamma \in (0, 1)$, бо для збіжності f_{ε} достатньо, щоб $\psi(x) - \psi(0) = O(x^{\gamma})$ при $x \rightarrow 0$. Отже, якщо послідовність Q_{ε} збігається, то гранична узагальнена функція належить до \mathcal{F}_0 .

6.3 Оператори Шредингера з регуляризованими потенціалами Кулона

Розглянемо диференціальне рівняння

$$-y'' + (Q - \zeta)y = f, \quad (6.16)$$

де $f \in L^2(\mathbb{R})$ і $\zeta \in \mathbb{C}$. Особливість коефіцієнта Q вигляду (6.2) визначає поведінку розв'язку y при підході зліва та справа до точки $x = 0$. Асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь (6.1) вивчали в [118, 124, 130]. Щоб побудувати граничний оператор \mathcal{H} , скористаємося твердженням з [124].

Твердження 6.1. *Нехай функція y належить до $L_2(\mathbb{R})$ і в односторонніх околах початку координат задовольняє диференціальні рівняння*

$$-y'' + \left(\frac{q_-}{x} - \zeta \right) y = f, \quad x \in (-x_0, 0); \quad -y'' + \left(\frac{q_+}{x} - \zeta \right) y = f, \quad x \in (0, x_0). \quad (6.17)$$

Тоді існують скінченні границі $y(\pm 0) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} y(x)$ і виконуються при $x \rightarrow \pm 0$ асимптотичні формули

$$y(x) = y(\pm 0) + O(|x|^{1/2}), \quad y'(x) = q_{\pm} y(x) \ln |x| + b_{\pm}(y) + o(1), \quad (6.18)$$

де b_- і b_+ — деякі сталі, які залежать від розв'язку y .

Нижче ми доведемо сильніше твердження про асимптотичну поведінку розв'язків рівняння (6.16).

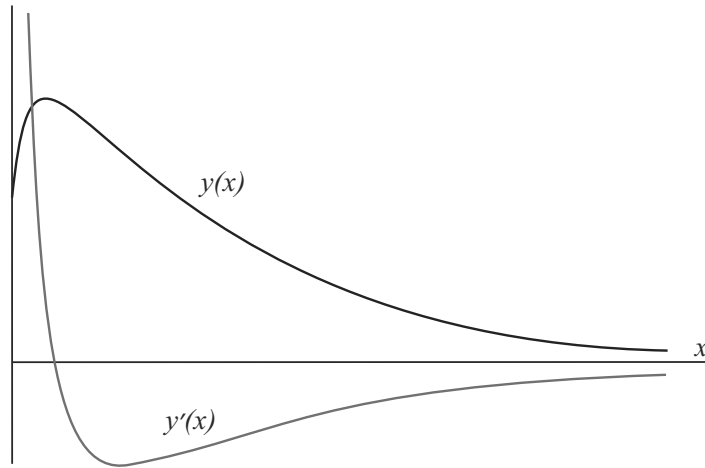


Рис. 6.4: Графіки розв'язку y та похідної y' рівняння (6.17).

6.3.1 Випадок зв'язаних точкових взаємодій

Доведення теореми 6.1 розпочнемо з формальної побудови граничного оператора \mathcal{H} для сім'ї H_{ε} . Нехай оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ в $L_2(\mathbb{R})$ володіє резонансом нульової енергії з нормалізованим напівзв'язним станом h . Як завжди, припустимо, що носії потенціалів U і V містяться у відрізку $\mathcal{I} = [-1, 1]$. Тоді звуження h на інтервал \mathcal{I} є нетривіальним розв'язком задачі

$$-h'' + Vh = 0, \quad t \in \mathcal{I}, \quad h'(-1) = 0, \quad h'(1) = 0, \quad (6.19)$$

причому $h(-1) = 1$ і $h(1) = \theta$. Нехай $y_{\varepsilon} = (H_{\varepsilon} - \zeta)^{-1} f$ для $f \in L^2(\mathbb{R})$ та $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Шукатимемо формальну асимптотику y_{ε} у вигляді

$$y_{\varepsilon}(x) \sim \begin{cases} u(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varepsilon \ln \varepsilon + v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varepsilon, & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases} \quad (6.20)$$

припускаючи виконання умов спряження

$$[y_\varepsilon]_{\pm\varepsilon} = 0, \quad [y'_\varepsilon]_{\pm\varepsilon} = 0. \quad (6.21)$$

Функція y_ε — це розв'язок диференціального рівняння

$$-y''_\varepsilon + (Q_\varepsilon(x) + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}x))y_\varepsilon = \zeta y_\varepsilon + f, \quad (6.22)$$

а оскільки носії потенціалів $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}\cdot) + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}\cdot)$ стягуються в точку, то природно вважати, що u задовольняє рівняння $-u'' + Qu = \zeta u + f$ в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Це рівняння треба доповнити умовами в нулі, які залежатимуть від структури збурення. Перепишемо рівняння (6.22) в нових змінних $t = x/\varepsilon$

$$-\frac{d^2v^\varepsilon}{dt^2} + (V(t) + \varepsilon \ln \varepsilon \varkappa(t) + \varepsilon U(t))v^\varepsilon = \varepsilon^2 \zeta v^\varepsilon + \varepsilon^2 f, \quad (6.23)$$

поклавши $v^\varepsilon(t) = y_\varepsilon(\varepsilon t)$. Підставивши в нього розвинення (6.20) при $|x| < \varepsilon$, матимемо: $-v''_0 + Vv_0 = 0$, $-v''_1 + Vv_1 = -\varkappa v_0$, $-v''_2 + Vv_2 = -Uv_0$. Далі, умови узгодження розвинень (6.21) в точках $x = \pm\varepsilon$ із врахуванням асимптотичних формул (6.18) дають

$$\begin{aligned} v_0(\pm 1) + O(\varepsilon \ln \varepsilon) &= u(\pm 0) + O(\varepsilon^{1/2}), \\ \varepsilon^{-1}v'_0(\pm 1) + v'_1(\pm 1) \ln \varepsilon + v'_2(\pm 1) &= q_\pm u(\pm 0) \ln \varepsilon + b_\pm(u) + o(1). \end{aligned}$$

Звідси ми, зокрема, маємо

$$v_0(\pm 1) = u(\pm 0), \quad v'_0(\pm 1) = 0, \quad v'_1(\pm 1) = q_\pm u(\pm 0), \quad v'_2(\pm 1) = b_\pm(u). \quad (6.24)$$

Тепер можемо сформулювати задачу для коефіцієнтів асимптотики:

$$-v''_0 + Vv_0 = 0, \quad t \in \mathcal{I}, \quad v'_0(-1) = 0, \quad v'_0(1) = 0; \quad (6.25)$$

$$-v''_1 + Vv_1 = -\varkappa v_0, \quad t \in \mathcal{I}, \quad v'_1(-1) = q_- u(-0), \quad v'_1(1) = q_+ u(+0); \quad (6.26)$$

$$-v''_2 + Vv_2 = -Uv_0, \quad t \in \mathcal{I}, \quad v'_2(-1) = b_-(u), \quad v'_2(1) = b_+(u). \quad (6.27)$$

Задача (6.25) має однопараметричну сім'ю розв'язків $v_0 = c_0 h$, але з огляду на рівність $v_0(-1) = u(-0)$ дістаємо

$$v_0 = u(-0)h. \quad (6.28)$$

Тому $v_0(1) = u(-0)h(1) = \theta u(-0)$. Проте з іншого боку, $v_0(1) = u(+0)$ згідно з (6.24). З цих двох рівностей маємо

$$u(+0) = \theta u(-0), \quad (6.29)$$

що і є першою умовою спряження для u в нулі. Щоб знайти ще одну умову, звернемося до задачі (6.26). Вона не завжди сумісна, бо відповідна однорідна задача має нетривіальні розв'язки. Підставимо у рівняння (6.26) зображення (6.28) для v_0 , помножимо його на h і проінтегруємо частинами. Тоді дістанемо

$$\theta q_+ u(+0) - q_- u(-0) = u(-0) \int_{\mathcal{I}} \varkappa h^2 dx. \quad (6.30)$$

Згідно з альтернативою Фредгольма ця умова є не лише необхідною, але й достатньою для існування розв'язку v_1 . Ми отримали ще одну рівність, яка пов'язує значення $u(-0)$ та $u(+0)$. Отже, ці числа повинні бути розв'язком системи

$$\begin{cases} u(+0) - \theta u(-0) = 0, \\ \theta q_+ u(+0) - (q_- + \int_{\mathcal{I}} \varkappa h^2 dx) u(-0) = 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

Ненульовий розв'язок $(u(-0), u(+0))$ цієї лінійної однорідної системи існує, коли її матриця вироджена, тобто $\theta^2 q_+ - q_- = \int_{\mathcal{I}} \varkappa h^2 dx$. Ця рівність збігається з умовою (6.6) теореми 6.1. В цьому разі рівняння (6.31) є лінійно залежними, і ми братимемо до уваги лише перше з них. Воно гарантує існування розв'язку задачі (6.26), який визначений з точністю до доданка ch . Підпорядкуємо v_1 умові ортогональності до h в $L_2(\mathcal{I})$. Нарешті ми звернемося до задачі (6.27). Вона є сумісною тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\theta b_+(u) - b_-(u) = u(-0) \int_{\mathcal{I}} U h^2 dt. \quad (6.32)$$

Розв'язок v_2 виберемо ортогональним до h в $L_2(\mathcal{I})$.

Отже, коли потенціал V є резонансним і виконується умова (6.6), то головний член u асимптотики (6.20) повинен розв'язувати задачу

$$-u'' + Qu = \zeta u + f \quad \text{в } \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (6.33)$$

$$u(+0) - \theta u(-0) = 0, \quad \theta b_+(u) - b_-(u) = \mu u(-0), \quad (6.34)$$

де число μ задане рівністю

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} U h^2 dx.$$

Умови (6.34) узгоджуються з точковими взаємодіями (6.7) з теореми 6.1, записаними у вигляді (6.11). Нехай \mathcal{H} — самоспряжений оператор, який породжений задачею (6.33)–(6.34). Для доведення рівномірної резольвентної збіжності операторів H_ε нам потрібні точніші результати щодо асимптотики розв'язку u .

Лема 6.4. *Для всіх $f \in L^2(\mathbb{R})$ і $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ функція $u = (\mathcal{H} - \zeta)^{-1}f$ задовольняє при $x \rightarrow \pm 0$ нерівності*

$$|u(x) - u(\pm 0)| \leq C_1 \|f\| |x \ln |x||, \quad (6.35)$$

$$|u'(x) - q_\pm u(\pm 0) \ln |x| - b_\pm(u)| \leq C_2 \|f\| |x|^{1/2}, \quad (6.36)$$

де b_\pm — лінійні неперервні функціонали на області визначення оператор \mathcal{H} . Крім того, справедлива оцінка

$$|b_\pm(u)| \leq C_3 \|f\|. \quad (6.37)$$

Сталі C_1 , C_2 і C_3 не залежать від f .

Доведення. Спершу зауважимо, що функція u , як елемент $\text{dom } \mathcal{H}$, є неперервно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Крім того, вона задовольняє нерівності

$$\|u\| \leq c_1 \|f\|, \quad \|u\|_{C^1(K)} \leq c_2(K) \|f\|, \quad (6.38)$$

де K — компактна підмножина в \mathbb{R} , яка не містить нуля.

Доведемо нерівності (6.35), (6.36) лише для розв'язку u на додатній півосі, а оцінку (6.37) лише для b_+ . Решта нерівностей доводяться схоже. На інтервалі $(0, x_0)$ виконується тотожність

$$u'' = \frac{q_+}{x} u - \zeta u - f. \quad (6.39)$$

Введемо тимчасове позначення $g = \zeta u + f$ для суми доданків, які належать до простору $L_2(\mathbb{R}_+)$. Інтегруючи двічі тотожність на інтервалі (x, x_0) , дістаємо

$$u'(x) = -q_+ \int_x^{x_0} \frac{u(s)}{s} ds + \int_x^{x_0} g(s) ds + u'(x_0), \quad (6.40)$$

$$u(x) = q_+ \int_x^{x_0} \frac{s-x}{s} u(s) ds - \int_x^{x_0} (s-x)g(s) ds + u(x_0) + u'(x_0)(x-x_0). \quad (6.41)$$

Функції u , f , а отже g , належать до $L_2(\mathbb{R})$. Тому існує скінченне значення

$$u(+0) = q_+ \int_0^{x_0} u(s) ds + x \int_0^{x_0} g(s) ds + u(x_0) - x_0 u'(x_0). \quad (6.42)$$

Справді, найсингулярніший при $x \rightarrow +0$ інтеграл

$$\int_x^{x_0} \frac{s-x}{s} u(s) ds$$

збігається до $\int_0^{x_0} u(s) ds$ за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, оскільки

$$\left| \frac{s-x}{s} \chi_{(x,x_0)}(s) \right| \leq 1 \quad \text{для всіх } s \in (0, x_0).$$

Тут $\chi_{(x,x_0)}$ — характеристична функція інтервалу (x, x_0) . Тепер з (6.42) та другої нерівності (6.38) виводимо

$$\|u\|_{C^0([0,x_0])} \leq c_1 \|f\|. \quad (6.43)$$

Віднявши (6.42) від (6.41), запишемо отриману різницю у вигляді

$$\begin{aligned} u(x) - u(+0) = & -q_+ x \int_x^{x_0} \frac{u(s)}{s} ds + \int_0^x (sg(s) - q_+ u(s)) ds + \\ & + x \int_x^{x_0} g(s) ds + u'(x_0)x. \end{aligned}$$

А оскільки

$$\int_x^{x_0} \frac{u(s)}{s} ds = u(+0) x (\ln x_0 - \ln x) + \int_x^{x_0} \frac{u(s) - u(+0)}{s} ds, \quad (6.44)$$

то різницю можна переписати і так

$$\begin{aligned} u(x) - u(+0) = & q_+ u(+0) x (\ln x - \ln x_0) + \int_0^x (sg(s) - q_+ u(s)) ds + \\ & + x \int_x^{x_0} g(s) ds + u'(x_0)x - q_+ x \int_x^{x_0} \frac{u(s) - u(+0)}{s} ds. \end{aligned} \quad (6.45)$$

З огляду на нерівності (6.38) та (6.43) маємо

$$\begin{aligned} |u(+0)| + |u'(x_0)| & \leq c_2 \|f\|, \quad \|g\| = \|\zeta u + f\| \leq c_3 \|f\|, \\ \left| \int_0^x u(s) ds \right| & \leq x \sup_{s \in (0,x)} |u(s)| \leq c_4 x \|f\|, \\ \left| \int_0^x sg(s) ds \right| & \leq x \int_0^x |g(s)| ds \leq c_5 x^{3/2} \|f\|. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Тому з (6.45) відразу дістаємо

$$|u(x) - u(+0)| \leq c_6 \|f\| x |\ln x| + |q_+| x \int_x^{x_0} \frac{|u(s) - u(+0)|}{s} ds.$$

Тепер застосуємо нерівність Гронуолла-Беллмана і отримаємо

$$|u(x) - u(+0)| \leq c_7 \|f\| e^{|q_+| x (\ln x_0 - \ln x)} x |\ln x| \leq c_8 \|f\| x |\ln x|. \quad (6.47)$$

Звідси випливає нерівність (6.35).

Якщо знову скористатися зображенням (6.44) і на цей раз підставити його до (6.40), то матимемо

$$\begin{aligned} u'(x) &= q_+ u(+0) (\ln x - \ln x_0) - q_+ \int_x^{x_0} \frac{u(s) - u(+0)}{s} ds + \\ &+ \int_x^{x_0} g(s) ds + u'(x_0) = q_+ u(+0) \ln x + b_+(u) + r(x, u), \end{aligned}$$

приймавши позначення

$$\begin{aligned} b_+(u) &= u'(x_0) - q_+ u(+0) \ln x_0 + \int_0^{x_0} g(s) ds - q_+ \int_0^{x_0} \frac{u(s) - u(+0)}{s} ds, \quad (6.48) \\ r(x, u) &= q_+ \int_0^x \frac{u(s) - u(+0)}{s} ds - \int_0^x g(s) ds. \end{aligned}$$

Тепер нерівності (6.35), (6.43) та щойно доведена оцінка (6.38) дають

$$\begin{aligned} |r(x, u)| &\leq |q_+| \int_0^x \frac{|u(s) - u(+0)|}{s} ds + |\zeta| \int_0^x |u| ds + \int_0^x |f| ds \\ &\leq c_9 \|f\| \int_0^x |\ln s| ds + c_4 (\|u\| + \|f\|) x^{1/2} \leq c_{10} \|f\| x^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |b_+(u)| &\leq c_{11} (|u'(x_0)| + |u(+0)|) + c_{12} \|g\| \\ &+ |q_+| \int_0^{x_0} \frac{|u(s) - u(+0)|}{s} ds \leq c_{13} \|f\| + c_{14} \|f\| \int_0^{x_0} |\ln s| ds \leq c_{15} \|f\|. \end{aligned}$$

Це доводить (6.36) та (6.37).

Зауважимо, що b_+ з формули (6.48) насправді є лінійним функціоналом на області визначення \mathcal{H} , бо g можна записати у вигляді $g = \zeta u + f = \zeta u + (\mathcal{H} - \zeta)u$. Крім того, права частина (6.48) не залежить від точки x_0 . Зокрема, з цієї формули маємо $b_+(u) = \lim_{x_0 \rightarrow +0} (u'(x_0) - q_+ u(+0) \ln x_0)$, що узгоджується з означенням (6.10) цього функціоналу. \square

Наслідок 6.1. Нехай функція u належить до $L_2(\mathbb{R})$ і в односторонніх околах початку координат задовольняє рівняння (6.17). Тоді при $x \rightarrow \pm 0$ маємо

$$u(x) = u(\pm 0) + O(x \ln |x|), \quad (6.49)$$

$$u'(x) = q_{\pm} u(\pm 0) \ln |x| + b_{\pm}(u) + O(|x|^{1/2}), \quad (6.50)$$

де b_{\pm} — деякі сталі, які залежать від розв'язку u .

Доведення. В доведенні леми той факт, що u задовольняє в нулі деякі умови спряження, використовується лише для отримання оцінок (6.46), де фігурує норма f . Щодо асимптотики u , то вона визначається рівностями (6.40), (6.41) і (6.45), які є наслідком тотожності (6.39) та приналежності функцій u і f до $L_2(\mathbb{R})$. \square

За побудовою функції v_k належать до $W_2^2(\mathcal{I})$, а їхні норми можна оцінити через $L_2(\mathbb{R})$ -норму правої частини f .

Лема 6.5. Нехай v_0 , v_1 та v_2 — розв'язки задач (6.25), (6.26) та (6.27) відповідно, причому вони вибрані так, що $v_0(-1) = u(-0)$, а v_1 та v_2 ортогональні до h в $L_2(\mathcal{I})$. Тоді

$$\|v_k\|_{W_2^2(\mathcal{I})} \leq C \|f\|, \quad k = 0, 1, 2, \quad (6.51)$$

зі сталою C незалежною від f .

Доведення. Оцінка для v_0 випливає з (6.28) та нерівності (6.38). Справді,

$$\|v_0\|_{W_2^2(\mathcal{I})} = |u(-0)| \|h\|_{W_2^2(\mathcal{I})} \leq C \|f\|. \quad (6.52)$$

Для розв'язків v_1 і v_2 задач (6.26) і (6.27), які є ортогональні до ядра відповідної однорідної задачі (6.25), виконуються оцінки

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{W_2^2(\mathcal{I})} &\leq c_1 (|q_-| |u(-0)| + |q_+| |u(+0)| + \|z\|_{L^\infty(\mathcal{I})} \|v_0\|), \\ \|v_2\|_{W_2^2(\mathcal{I})} &\leq c_1 (|b_-(u)| + |b_+(u)| + \|U\|_{L^\infty(\mathcal{I})} \|v_0\|). \end{aligned}$$

Тоді потрібні нерівності слідує з (6.37), (6.38) та доведеної оцінки (6.52). \square

Щоб отримати рівномірну апроксимацію y_ε в $L^2(\mathbb{R})$, треба також врахувати у наближенні вплив функції f в околі нуля. Нехай z_ε — розв'язок задачі Коші

$$-z'' + V(t)z = f(\varepsilon t), \quad z(-1) = 0, \quad z'(-1) = 0. \quad (6.53)$$

Цей розв'язок належить до простору $W_2^2(\mathcal{I})$ і з огляду на твердження 1.2 та нерівність (1.17) оцінюється так

$$\|z_\varepsilon\|_{W_2^2(\mathcal{I})} \leq C\varepsilon^{-1/2}\|f\| \quad (6.54)$$

зі сталою C , незалежною від f та ε . Нехай

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon \ln \varepsilon + v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon + z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^2, & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases} \quad (6.55)$$

а також $\hat{y}_\varepsilon = w_\varepsilon + \rho_\varepsilon$. Тут ρ_ε — коректор з твердження 1.1 такий, що $\hat{y}_\varepsilon \in \text{dom } H_\varepsilon$.

Лема 6.6. *Нехай функція ρ_ε має вигляд*

$$\rho_\varepsilon(x) = [w_\varepsilon]_{-\varepsilon} \eta_0(-x - \varepsilon) - [w'_\varepsilon]_{-\varepsilon} \eta_1(-x - \varepsilon) - [w_\varepsilon]_\varepsilon \eta_0(x - \varepsilon) - [w'_\varepsilon]_\varepsilon \eta_1(x - \varepsilon),$$

де функції η_0 та η_1 описані на стор. 38. Тоді існують незалежні від f сталі C_1 та C_2 такі, що

$$\sup_{|x|>\varepsilon} (|\rho_\varepsilon(x)| + |\rho''_\varepsilon(x)|) \leq C_1\varepsilon^{1/2}\|f\|, \quad (6.56)$$

$$\|Q\rho_\varepsilon\| \leq C_2\varepsilon^{1/4}\|f\|. \quad (6.57)$$

Доведення. Нерівність (6.56) випливатиме з оцінки стрибків

$$|[w_\varepsilon]_{-\varepsilon}| + |[w_\varepsilon]_\varepsilon| + |[w'_\varepsilon]_{-\varepsilon}| + |[w'_\varepsilon]_\varepsilon| \leq c\varepsilon^{1/2}\|f\|$$

згідно з твердженням 1.1. З лем 6.4, 6.5 та нерівності (6.54) дістаємо

$$|[w_\varepsilon]_{-\varepsilon}| = |u(-\varepsilon) - u(-0) - v_1(-1)\varepsilon \ln \varepsilon - v_2(-1)\varepsilon| \leq c_1\|f\|\varepsilon|\ln \varepsilon|,$$

$$|[w'_\varepsilon]_{-\varepsilon}| = |u'(-\varepsilon) - q_-u(-0)\ln \varepsilon - b_-(u)| \leq c_2\|f\|\varepsilon^{1/2},$$

$$|[w_\varepsilon]_\varepsilon| = |u(\varepsilon) - u(+0) - v_1(1)\varepsilon \ln \varepsilon - v_2(1)\varepsilon - z_\varepsilon(\varepsilon)\varepsilon^2| \leq c_3\|f\|\varepsilon|\ln \varepsilon|,$$

$$|[w'_\varepsilon]_\varepsilon| = |u'(\varepsilon) - q_+u(+0)\ln \varepsilon - b_+(u) - z'_\varepsilon(\varepsilon)\varepsilon| \leq c_4\|f\|\varepsilon^{1/2},$$

що доводить (6.56). Далі, зафіксуємо число γ з інтервалу $(0, \frac{1}{2})$. Функція η_1 є порядку $O(|x|)$ при $|x| \rightarrow 0$, тому

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon < |x| < \varepsilon^\gamma} |\rho_\varepsilon(x)| &\leq c_5\left(|[w_\varepsilon]_{-\varepsilon}| + |[w_\varepsilon]_\varepsilon| + (|[w'_\varepsilon]_{-\varepsilon}| + |[w'_\varepsilon]_\varepsilon|)\varepsilon^\gamma\right) \leq \\ &\leq c_6(\varepsilon|\ln \varepsilon| + \varepsilon^{\gamma+1/2})\|f\| \leq c_7\varepsilon^{\gamma+1/2}\|f\|. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Нагадаємо, що для малих значень ε функція $\rho_\varepsilon(x)$ є нульовою, коли $|x| < \varepsilon$ та $|x| > x_0$. Поєднуючи нерівності (6.56) і (6.58), ми дістаємо оцінку

$$\begin{aligned}
\|Q\rho_\varepsilon\|^2 &= \int_{\varepsilon < |x| < x_0} Q^2 |\rho_\varepsilon|^2 dx \leq \max\{|q_-|, |q_+|\} \int_{\varepsilon < |x| < x_0} x^{-2} |\rho_\varepsilon|^2 dx \leq \\
&\leq c_8 \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon^\gamma} x^{-2} |\rho_\varepsilon|^2 dx + c_8 \int_{\varepsilon^\gamma < |x| < x_0} x^{-2} |\rho_\varepsilon|^2 dx \leq \\
&\leq c_8 \sup_{\varepsilon < |x| < \varepsilon^\gamma} |\rho_\varepsilon(x)|^2 \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon^\gamma} x^{-2} dx + c_8 \sup_{\varepsilon^\gamma < |x| < x_0} x^{-2} |\rho_\varepsilon(x)|^2 \int_{\varepsilon^\gamma < |x| < x_0} dx \leq \\
&\leq c_9 \varepsilon^{2\gamma+1} \|f\| \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon^\gamma} x^{-2} dx + c_{10} \varepsilon^{1-2\gamma} \|f\| \leq c_{11} (\varepsilon^{2\gamma} + \varepsilon^{1-2\gamma}) \|f\|.
\end{aligned}$$

Звідси випливає нерівність (6.57), якщо покладемо $\gamma = 1/4$. \square

Тепер переконаємося, що наближення $\hat{y}_\varepsilon = w_\varepsilon + \rho_\varepsilon$ з достатньою точністю задовольняє рівняння (6.22). Обчислимо залишок $r_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)\hat{y}_\varepsilon - f$. Якщо $|x| > \varepsilon$, то з врахуванням рівняння (6.33) маємо

$$r_\varepsilon(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + Q(x) - \zeta\right)(u(x) + \rho_\varepsilon(x)) - f(x) = -\rho_\varepsilon''(x) + (Q(x) - \zeta)\rho_\varepsilon(x). \quad (6.59)$$

Якщо ж $|x| < \varepsilon$, то за побудовою v_k та z_ε дістаємо

$$\begin{aligned}
r_\varepsilon(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} \hat{y}_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \left(\varepsilon^{-2}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon \kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{-1}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \zeta\right) \hat{y}_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \\
&- f(x) = \varepsilon^{-2} \left(-v_0''\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + \\
&+ \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon \left(-v_1''\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + \\
&+ \varepsilon^{-1} \left(-v_2''\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_2 + U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) - \\
&- z_\varepsilon''\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - f(x) + \\
&+ \ln \varepsilon \kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln \varepsilon + v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + \\
&+ U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln \varepsilon + v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) - \zeta \hat{y}_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \\
&= \left(\kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln \varepsilon + U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \left(v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln \varepsilon + v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varepsilon\right) - \zeta \hat{y}_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).
\end{aligned} \quad (6.60)$$

Тепер можемо оцінити r_ε в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$. Застосуємо нерівності, доведені

В лемах 6.5 та 6.6:

$$\begin{aligned} \|r_\varepsilon\| &\leq \|\rho_\varepsilon'' + \zeta\rho_\varepsilon\| + \|Q\rho_\varepsilon\| + \sup_{t \in \mathcal{I}} (|V(t)| |\ln \varepsilon| + |U(t)|) \times \\ &\quad \times \|v_1(\varepsilon^{-1}\cdot) \ln \varepsilon + v_2(\varepsilon^{-1}\cdot) + \varepsilon z_\varepsilon(\varepsilon^{-1}\cdot)\|_{L^2(-\varepsilon, \varepsilon)} + |\zeta| \|u_\varepsilon(\varepsilon^{-1}\cdot)\|_{L^2(-\varepsilon, \varepsilon)} \leq \\ &\leq c_1(\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{1/4}) \|f\| + c_2 \varepsilon^{1/2} |\ln \varepsilon| \|v_1 \ln \varepsilon + v_2 + \varepsilon z_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{I})} + |\zeta| \varepsilon^{1/2} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{I})} \leq c \varepsilon^{1/4} \|f\|. \end{aligned}$$

Отже, наближення є досить точним, бо

$$\|y_\varepsilon - \hat{y}_\varepsilon\| = \|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1} r_\varepsilon\| \leq |\operatorname{Im} \zeta|^{-1} \|r_\varepsilon\| \leq c \varepsilon^{1/4} \|f\|. \quad (6.61)$$

Нагадаємо, що $\hat{y}_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)^{-1}(f + r_\varepsilon) = y_\varepsilon + (H_\varepsilon - \zeta)^{-1} r_\varepsilon$. Нам треба також оцінити різницю

$$\hat{y}_\varepsilon(x) - u(x) = \begin{cases} \rho_\varepsilon(x), & |x| > \varepsilon, \\ v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varepsilon \ln \varepsilon + v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varepsilon + z_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varepsilon^2 - u(x), & |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

Знову звернувшись до лем 6.5 і 6.6, а також оцінки (6.38), дістаємо

$$\begin{aligned} \|\hat{y}_\varepsilon - u\| &\leq \|\rho_\varepsilon\| + \varepsilon^{1/2} \|v_0 + v_1 \varepsilon \ln \varepsilon + v_2 \varepsilon + z_\varepsilon \varepsilon^2\|_{L^2(\mathcal{I})} + \\ &\quad + \|u\|_{L^2(-\varepsilon, \varepsilon)} \leq c_1 \varepsilon^{1/2} (\|f\| + \max_{|x| \leq \varepsilon} |u(x)|) \leq c_2 \varepsilon^{1/2} \|f\|. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Згадавши, що $y_\varepsilon = (H_\varepsilon - \zeta)^{-1} f$ та $u = (\mathcal{H} - \zeta)^{-1} f$, з отриманих нерівностей (6.61) і (6.62) виводимо

$$\|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1} f - (\mathcal{H} - \zeta)^{-1} f\| = \|y_\varepsilon - u\| \leq \|y_\varepsilon - \hat{y}_\varepsilon\| + \|\hat{y}_\varepsilon - u\| \leq C \varepsilon^{1/4} \|f\|.$$

Ця оцінка встановлює рівномірну резольвентну збіжність $H_\varepsilon \rightarrow \mathcal{H}$, а також справедливність нерівності (6.8). Теорема 6.1 доведена.

6.3.2 Випадок розділених точкових взаємодій

Тепер звернемося до теореми 6.2. Доведення, як і у попередньому підрозділі, розпочинається з формальної побудови граничного оператора. Припустимо, що потенціал V нерезонансний. Тоді задача (6.25) має лише нульовий розв'язок v_0 . З рівностей $u(\pm 0) = v_0(\pm 1)$ відразу випливає, що $u(0) = 0$. Отже, в цьому разі u є розв'язком задачі

$$-u'' + Qu = \zeta u + f \quad \text{в } \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad u(0) = 0. \quad (6.63)$$

Водночас асимптотичні формули з леми 6.4 залишаються справедливими і для розв'язку цієї задачі, бо доведення лем не залежить від вигляду умов спряження в нулі. А саме, при $x \rightarrow \pm 0$ маємо

$$u(x) = O(x \ln |x|), \quad u'(x) = u'(\pm 0) + O(|x|^{1/2}), \quad (6.64)$$

бо $b_{\pm}(u) = u'(\pm 0)$, коли $u(\pm 0) = 0$. Тоді задачі (6.26), (6.27) набувають вигляду

$$\begin{aligned} -v_1'' + Vv_1 &= 0, \quad t \in \mathcal{I}, & v_1'(-1) &= 0, & v_1'(1) &= 0; \\ -v_2'' + Vv_2 &= 0, \quad t \in \mathcal{I}, & v_2'(-1) &= u'(-0), & v_2'(1) &= u'(0). \end{aligned} \quad (6.65)$$

При відсутності резонансу перша з них володіє лише тривіальним розв'язком, тому $v_1 = 0$. Для другої ж задачі існує єдиний розв'язок v_2 . Нехай

$$w_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ \varepsilon v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 z_{\varepsilon}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

де z_{ε} — розв'язок задачі Коші (6.53). З огляду на асимптотичні формули (6.64) розриви функції w_{ε} в точках $x = \pm\varepsilon$ є нескінченно малими при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} |[w_{\varepsilon}]_{-\varepsilon}| &= |u(-\varepsilon) - \varepsilon v_2(-1)| \leq c_1 \|f\| \varepsilon |\ln \varepsilon|, \\ |[w'_{\varepsilon}]_{-\varepsilon}| &= |u'(-\varepsilon) - u'(-0)| \leq c_2 \|f\| \varepsilon^{1/2}, \\ |[w_{\varepsilon}]_{\varepsilon}| &= |u(\varepsilon) - \varepsilon v_2(1) - \varepsilon^2 z_{\varepsilon}(\varepsilon)| \leq c_3 \|f\| \varepsilon |\ln \varepsilon|, \\ |[w'_{\varepsilon}]_{\varepsilon}| &= |u'(\varepsilon) - u'(0) - \varepsilon z'_{\varepsilon}(\varepsilon)| \leq c_4 \|f\| \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Тут ми також скористалися оцінками (6.51) та (6.54). Отже, існує функція ρ_{ε} з описаними в лемі 6.6 властивостями, що сума $\hat{y}_{\varepsilon} = w_{\varepsilon} + \rho_{\varepsilon}$ вже є елементом області визначення H_{ε} .

Тепер треба оцінити точність апроксимації \hat{y}_{ε} , а саме, $L_2(\mathbb{R})$ -норму залишку

$$r_{\varepsilon} = (H_{\varepsilon} - \zeta)\hat{y}_{\varepsilon} - f = \begin{cases} -\rho_{\varepsilon}''(x) + (Q(x) - \zeta)\rho_{\varepsilon}(x), & |x| > \varepsilon, \\ (\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln \varepsilon + U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \zeta\varepsilon)(v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon z_{\varepsilon}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)), & |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

Вигляд залишку впливає з формул (6.59) та (6.60), коли покласти $v_1 = 0$. Застосувавши знову оцінки з лем 6.5 та 6.6, дістанемо $\|r_{\varepsilon}\| \leq c\varepsilon^{1/4}\|f\|$. Звідси, як і в попередньому доведенні, виводимо дві оцінки

$$\|y_{\varepsilon} - \hat{y}_{\varepsilon}\| \leq c\varepsilon^{1/4}\|f\|, \quad \|\hat{y}_{\varepsilon} - u\| \leq c\varepsilon^{1/2}\|f\|.$$

Отже, остаточно маємо

$$\|(H_\varepsilon - \zeta)^{-1}f - (\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+ - \zeta)^{-1}f\| \leq \|y_\varepsilon - \hat{y}_\varepsilon\| + \|\hat{y}_\varepsilon - u\| \leq C\varepsilon^{1/4}\|f\|,$$

що встановлює рівномірну резольвентну збіжність операторів H_ε до прямої суми $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$, а також нерівності (6.9). Теорема 6.2 доведена.

Якщо потенціал V є резонансним і $\theta^2 q_+ - q_- \neq \int_{\mathcal{I}} \kappa h^2 dx$, то лінійна система (6.31) теж має лише тривіальний розв'язок $u(-0) = 0$ і $u(+0) = 0$. Проте поширити доведення теореми 6.2 на цей випадок не вдається. При побудові наближення w_ε ми приходимо до задачі (6.65), яка в цьому разі, взагалі кажучи, не має розв'язку.

6.4 Проблема одновимірного атома водню

В 1913 році Нільс Бор запропонував модель атома водню, яка базувалася на “квазікласичному підході”. За основу він взяв планетарну модель атома Резерфорда (див. рис. 6.5). Модель Резерфорда, побудована на законах класичної електродинаміки, мала той недолік, що електрон, обертаючись навколо ядра і неперервно випромінюючи енергію, мав з часом впасти на ядро. Бор зробив припущення, що електрон може рухатися лише вздовж певних стаціонарних орбіт, на яких він не випромінює енергії, а випромінювання чи поглинання відбуваються лише при переході на іншу орбіту. Передбачення Бора про дискретність енергетичних станів атома отримало підтвердження в квантовій теорії. З погляду сучасної квантової механіки енергетичні рівні атома водню описує спектр оператора енергії

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|},$$

де \hbar — стала Планка, m_e — маса електрона, e — заряд електрона, ε_0 — електрична стала. Потенціал цього гамільтоніана

$$V(x) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}$$

описує взаємодію між двома зарядженими частинками (протон-електрон) і його називають *потенціалом Кулона*. В такому формулюванні модель атома водню є

класичною задачею нерелятивістської квантової механіки і детально описана в кожному підручнику з квантової механіки (див., наприклад, [133]). Але у фізиці трапляються моделі, аналоги яких у менших вимірах приводять до складних математичних проблем, а не до очікуваного спрощення. Модель атома водню є саме такою.

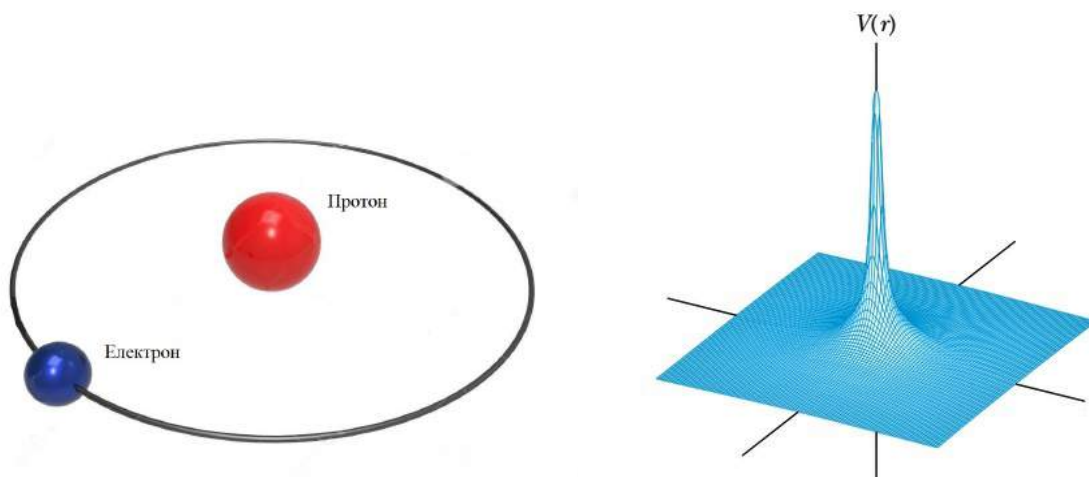


Рис. 6.5: Планетарна модель атома водню та потенціал Кулона.

6.4.1 Одновимірна фізика та дискусії щодо потенціалу Кулона

Піонерські статті фон В. С. Вркляна 1928 і 1929 років у *Zeitschrift für Physik* [126, 127], дали початок т. з. одновимірній фізиці. Є фізичні моделі, в яких обмеження ступенів свободи атома вважається фізично вмотивованим, а не лише математичним спрощенням. Через три десятиліття Родні Лоудон в *American Journal of Physics* публікує статтю під назвою “One-dimensional hydrogen atom” [125], в якій повертається до вивчення одновимірного гамільтоніана з кулонівським потенціалом

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{e^2}{|x|} \psi = E\psi. \quad (6.66)$$

Праця дала поштовх до багаторічних наукових досліджень та дискусій, які тривають і зараз. Пошук в наукометричних базах засвідчує, що принаймні кілька сотень праць містять у назві фразу “one-dimensional hydrogen atom”, а щонайменше дві з половиною тисячі публікацій так чи інакше пов’язані з цією моделлю.

В першій своїй роботі Лоудон відмітив дивну поведінку моделі в стосунку до звичних моделей, пов’язаних з одновимірними операторами Шредингера. Функ-

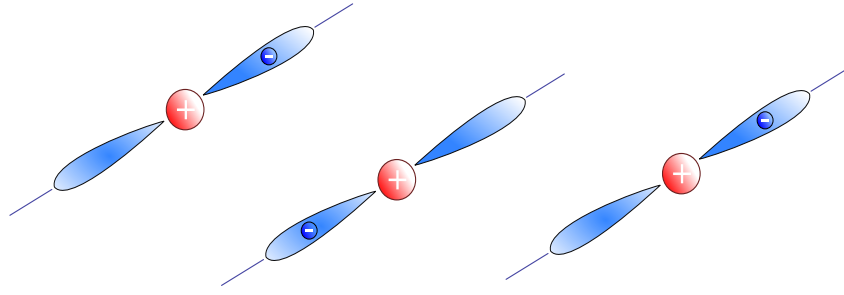


Рис. 6.6: Одновимірні атоми водню.

ція $-e^2/|x|$ є прикладом глибокої потенціальної ями і гамільтоніан (6.66) звісно повинен мати власні значення. Виявилось, що власних значення є нескінченно багато і всі вони двократні, що невласливо одновимірним моделям, а основний стан системи, якщо він взагалі існує, мав би відповідати нескінченно великій від'ємній енергії. До таких висновків автор прийшов, аналізуючи дві різні регуляризації потенціалу Кулона, в яких особливість в нулі була відсутня.

Зрозуміло, що сингулярність потенціалу $1/|x|$ на прямій є набагато сильнішою, аніж сингулярність потенціалу Кулона в просторі, де вона в певному сенсі компенсується елементарним об'ємом порядку $|x|^2$ при $x \rightarrow 0$. Про розв'язки рівняння (6.66) можна говорити лише на кожній з півосей окремо. Математично є некоректним визначати хвильову функцію ψ як розв'язок рівняння (6.66) на всій прямій — її треба конструювати з двох розв'язків на півосях, узгоджуючи їх певними додатковими умовами спряження в нулі. При спробі знайти такі умови наштовхуємося на ще одну складність: похідні розв'язків на півосях, взагалі кажучи, не мають скінченних односторонніх границь в нулі. Інакше кажучи, проблема одновимірного атома водню — це проблема пошуку лінійного оператора (чи операторів) в $L_2(\mathbb{R})$, який був би самоспряженою реалізацією формального диференціального виразу $-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\gamma}{|x|}$, і ця проблема пов'язана з вибором фізично вмотивованих точкових взаємодій в точці, де потенціал Кулона має особливість.

Природно виникає запитання, чи одновимірні моделі є цікавими з погляду сучасної фізики і чи знаходять такі теоретичні результати реальне застосування. В оглядові статті 2016 року [128] з такою ж назвою, як і стаття 1959 року, Р. Лоудон акцентує, що моделі одновимірної фізики стали дуже актуальними останніми десятиліттями. Обмежити рух частинок до якогось одного напрямку

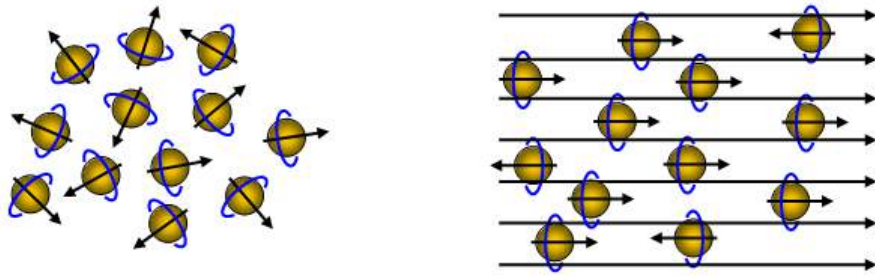


Рис. 6.7: Атоми у сильному магнітному полі.

можна лише під дією дуже сильних полів (рис. 6.7) чи коли ці частинки вимушені рухаються в тонких наноструктурах (рис. 6.8). Зрозуміло, що результати одновимірної фізики були і залишаються цінними для спрощення багатовимірних моделей в теоретичних та чисельних дослідженнях. Проте в багатьох задачах сучасної фізичної науки вони відіграють роль первинних математичних моделей. Зокрема, математичні результати щодо одновимірної моделі атому водню знаходять застосування в таких фізичних процесах [128, 134]:

- рух атомів водню в дуже високих магнітних полях [135, 136] — сильне поле, прикладене до атомів, звужує динаміку електрона до прямої, що проходить через протон;
- рух атомів в напівпровідникових квантових дротах та вуглецевих нанотрубках [137–139] — 3D-атом проявляє ознаки 1D-атома, коли він перебуває у волокнистих структурах з діаметром, значно меншим радіусу Бора атома;

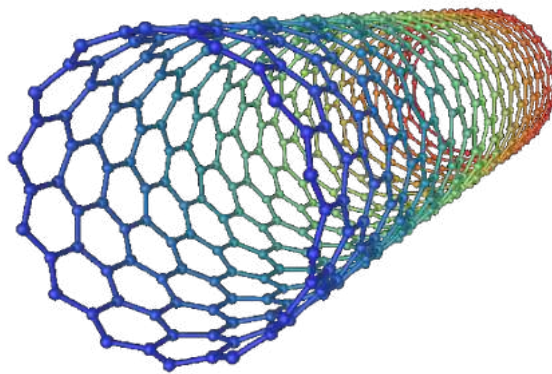


Рис. 6.8: Вуглецеві нанотрубки.

- зависання електронів над рідинами у фазі надплинності [140];
- іонізації атомів при дуже інтенсивних лазерних полях [141];
- рух електронів, захоплених одновимірними водневими рівнями [142] — явище, яке виникає в одному з можливих пристроїв для квантових обчислень;
- локалізація домішок та збуджених станів в полімерних ланцюгових системах [143, 144];
- електронний розподіл атомів у збуджених станах під дією періодичних в часі електричних полів [145] — фізики зауважили, що таке явище адекватно моделюється одновимірними атомами водню.

Математика одновимірних моделей лежить в основі теорії квантових графів [146, 147], яка інтенсивно розвивається. Ця теорія займається процесами, що протікають у квантових хвилеводах — тонких трубкоподібних конструкціях зі складною мережеподібною геометрією. Основна проблема полягає в апроксимації таких квантово-механічних процесів, одновимірними процесами, що моделюються операторами Шрединґера на метричних графах. Такою ж цікавою з погляду сучасної фізики є і релятивістська модель одновимірного атома водню [148].

Дослідження одновимірної моделі атома водню з парним і непарним потенціалами Кулона (6.1) велися загалом в трьох напрямках: пошук точкових взаємодій в точці сингулярності потенціалу, дослідження операторів Шрединґера з регуляризованими потенціалами Кулона, вивчення спектру і даних розсіювання для конкретної моделі. Так склалося історично, що основна наукова суперечка стосувалася питання, чи можуть частинки проникати з ненульовою ймовірністю через потенціали типу Кулона. Зрозуміло, що мова тут йде про те, які точкові взаємодії є фізично обумовлені для потенціалу Кулона — розділені чи зв'язані.

6.4.2 Про проникність через потенціали типу Кулона

Застосуємо отримані в цьому розділі результати до задачі розсіювання частинок на потенціалах вигляду (6.2). Звісно, що відповідь на питання про проникність чи непроникність таких потенціалів є неоднозначною і залежить від способу його регуляризації. Наші математичні результати узгоджуються і з думкою фізи-

ків [121, 132], які вважають, що ця модель критично залежить від поведінки потенціалів типу Кулона на малих відстанях до джерела сингулярності.

Будемо називати потенціали вигляду

$$Q_\varepsilon + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1} \cdot) + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1} \cdot) \quad (6.67)$$

асимптотично проникними при $\varepsilon \rightarrow 0$, коли відповідна сім'я операторів Шрединґера H_ε збігається до оператора \mathcal{H} , породженого точковими взаємодіями (6.7). Якщо ж ці оператори збігаються до прямої суми $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$, то казатимемо, що потенціали є *непроникними в границі* або *асимптотично відбивними*.

З огляду на доведені вище теореми 6.1 і 6.2 в ситуації загального положення потенціали (6.67) є асимптотично непроникними. Проте в тому разі, коли δ' -подібний потенціал V має резонанс, існує безліч профілів \varkappa регуляризації потенціалу типу Кулона Q , для яких виконується умова

$$\theta^2 q_+ - q_- = \int_{\mathbb{R}} \varkappa h^2 dx,$$

і тоді потенціали (6.67) є проникними для частинок при малих ε , а граничне значення ймовірності проникнення є додатним. Варто також нагадати, що потенціали V , для яких оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ володіє резонансом нульової енергії, не є чимось екзотичним. Згідно з лемою 1.4 потенціал V можна зробити резонансним, помноживши його на деяку сталу взаємодію.

Припустимо, що потенціали операторів H_ε не містять δ' -подібного доданку і введемо позначення

$$H_{0,\varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_\varepsilon + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1} \cdot).$$

Потенціали $H_{0,\varepsilon}$ можна трактувати як регуляризацію найменш сингулярної родини функціоналів \mathcal{F}_0 з леми 6.2, які поза нулем збігаються із функцією Q (див. рис. 6.2). Зауважимо, що δ -подібний потенціал U не має жодного впливу на проникність потенціалу типу Кулона. Проте він присутній в точкових взаємодіях і від нього, взагалі кажучи, залежить гранична ймовірність проникнення.

Теорема 6.3. *Якщо регуляризації Q_ε потенціалу типу Кулона збігаються в просторі узагальнених функцій, тобто виконується умова $q_+ - q_- = \int_{\mathcal{I}} \varkappa dx$, то потенціали $Q_\varepsilon + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1} \cdot)$ є проникними в границі при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Доведення. Відомо, що потенціал $V = 0$ є резонансним з напівзв'язним станом $h = 1$. Згідно з теоремою 6.1 сім'я операторів $H_{0,\varepsilon}$ збігається до оператора \mathcal{H} , породжений точковими взаємодіями

$$\phi(+0) = \phi(-0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\phi'(x) - \phi'(-x) - (q_+ - q_-)\phi(0) \ln x) = \beta\phi(0), \quad (6.68)$$

якщо виконується умова $q_+ - q_- = \int_{\mathcal{I}} \varkappa dx$. Тут β — середнє значення потенціалу U . Але з огляду на лему 6.3 остання умова виконується тоді і лише тоді, коли послідовність Q_ε є збіжною в просторі узагальнених функцій. Точкові взаємодії (6.68) є зв'язаними, що дає нам ненульовий коефіцієнт проникнення в границі при $\varepsilon \rightarrow 0$. Варто зауважити, що хоча функція ϕ недиференційовна в нулі, її графік є гладкою кривою на площині (див. рис. 6.9). \square

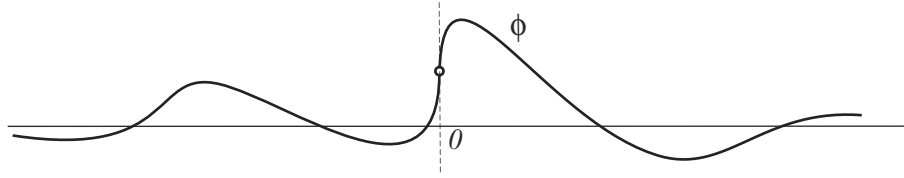


Рис. 6.9: Графік хвильової функції, що задовольняє умови спряження (6.68).

В тому разі, коли припущення теореми 6.3 не виконуються, можна довести такий умовний результат.

Теорема 6.4. *Припустимо, що $q_+ - q_- \neq \int_{\mathcal{I}} \varkappa dx$. Якщо сім'я операторів $H_{0,\varepsilon}$ збігається в сильній резольвентній топології, то граничним оператором може бути лише пряма сума $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$.*

Доведення. Нехай $H_{0,\varepsilon} \rightarrow H$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сильній резольвентній топології. Тоді $u_\varepsilon = (H_{0,\varepsilon} - \zeta)^{-1}f \rightarrow u = (H - \zeta)^{-1}f$ в $L_2(\mathbb{R})$ для кожного $f \in L_2(\mathbb{R})$. Поза ε -околом нуля маємо $-u_\varepsilon'' + Qu_\varepsilon = \zeta u_\varepsilon + f$, тому гранична функція u є розв'язком цього ж рівняння на кожній з півосей

$$-u'' + Qu = \zeta u + f, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (6.69)$$

Крім того, з огляду на твердження 6.1 маємо

$$u'_\varepsilon(\pm\varepsilon) = q_\pm u_\varepsilon(\pm\varepsilon) \ln |\varepsilon| + b_\pm(u_\varepsilon) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.70)$$

Із зображення (6.41), записаного для u_ε , (6.42) та збіжності $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $L_2(\mathbb{R})$ легко довести, що

$$u_\varepsilon(\pm\varepsilon) = u(\pm 0) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.71)$$

Далі, на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$ для u_ε виконується рівняння

$$-u_\varepsilon'' + \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon \kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon + \varepsilon^{-1} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon = \zeta u_\varepsilon + f(x). \quad (6.72)$$

Помножимо його на x та проінтегруємо частинами:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\varepsilon) - u_\varepsilon(-\varepsilon) &= \varepsilon(u_\varepsilon'(\varepsilon) + u_\varepsilon'(-\varepsilon)) - \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x \kappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x) dx - \\ &- \varepsilon^{-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x) dx + \zeta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x u_\varepsilon(x) dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x f(x) dx. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Доведемо, що права частина отриманої рівності прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функція $v_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(\varepsilon t)$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{aligned} v_\varepsilon'' &= \varepsilon \ln \varepsilon \kappa(t) v_\varepsilon + \varepsilon U(t) v_\varepsilon - \varepsilon^2 \zeta v_\varepsilon + \varepsilon^2 f(\varepsilon t), \quad t \in \mathcal{I}, \\ v_\varepsilon(-1) &= u_\varepsilon(-\varepsilon), \quad v_\varepsilon(1) = u_\varepsilon(\varepsilon). \end{aligned}$$

А оскільки $\|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{I})} \leq c\varepsilon^{-1/2}\|u_\varepsilon\|$, то з (6.71) і (1.17) дістаємо

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^2(\mathcal{I})} \leq c_1(|u_\varepsilon(-\varepsilon)| + |u_\varepsilon(\varepsilon)| + \varepsilon |\ln \varepsilon| \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{I})} + \varepsilon^2 \|f(\varepsilon \cdot)\|_{L^2(\mathcal{I})}) \leq c_2.$$

Згідно з теоремою вкладення Соболева $\max_{t \in \mathcal{I}} |u_\varepsilon(\varepsilon t)| \leq c_3$. Тому для кожної функції b з простору $L^\infty(\mathcal{I})$ справедлива нерівність

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x) dx \right| = \varepsilon^2 \left| \int_{-1}^1 t b(t) u_\varepsilon(\varepsilon t) dt \right| \leq c_4 \varepsilon^2.$$

З цієї нерівності, а також (6.70) і (1.17), випливає, що права частина рівності (6.73) прямує до нуля. Тому $u_\varepsilon(\varepsilon) - u_\varepsilon(-\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто $u(-0) = u(+0)$.

Нехай $w_\varepsilon = v_\varepsilon - u(0)$. Тоді w_ε розв'язує крайову задачу

$$\begin{aligned} w_\varepsilon'' &= \varepsilon \ln \varepsilon \kappa(t) v_\varepsilon + \varepsilon U(t) v_\varepsilon - \varepsilon^2 \zeta v_\varepsilon + \varepsilon^2 f(\varepsilon t), \quad t \in \mathcal{I}, \\ w_\varepsilon(-1) &= u_\varepsilon(-\varepsilon) - u(0), \quad w_\varepsilon(1) = u_\varepsilon(\varepsilon) - u(0) \end{aligned}$$

і задовольняє оцінку

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^2(\mathcal{I})} \leq c_1(|u_\varepsilon(-\varepsilon) - u(0)| + |u_\varepsilon(\varepsilon) - u(0)| + \varepsilon |\ln \varepsilon| \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{I})} + \varepsilon^2 \|f(\varepsilon \cdot)\|_{L^2(\mathcal{I})}).$$

Звідси $\|w_\varepsilon\|_{W^2_2(\mathcal{I})} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Зокрема, $\max_{x \in \mathcal{I}} |u_\varepsilon(\varepsilon t) - u(0)| \rightarrow 0$. Тому

$$\varepsilon^{-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varkappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x) dx = \int_{-1}^1 \varkappa(t) u_\varepsilon(\varepsilon t) dt \rightarrow u(0) \int_{-1}^1 \varkappa(t) dt. \quad (6.74)$$

Проінтегруємо рівняння (6.72) на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} u'_\varepsilon(\varepsilon) - u'_\varepsilon(-\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varkappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x) dx + \\ &+ \varepsilon^{-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x) dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\zeta u_\varepsilon(x) + f(x)) dx. \end{aligned} \quad (6.75)$$

З огляду на (6.70) цю рівність можна записати у вигляді

$$q_+ u_\varepsilon(\varepsilon) - q_- u_\varepsilon(-\varepsilon) - \varepsilon^{-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varkappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x) dx = O(|\ln \varepsilon|^{-1})$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ліва сторона прямує до $u(0) (q_+ - q_- - \int_{\mathcal{I}} \varkappa dx)$ згідно з (6.71) і (6.74), а права — до нуля. За умовою леми $q_+ - q_- \neq \int_{\mathcal{I}} \varkappa dx$, тому $u(0) = 0$. Отже, граничний оператор H є прямою сумою $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$. \square

З огляду на теореми 6.3 та 6.4 можемо зробити такий висновок.

Теорема 6.5 (Критерій проникності). *Нехай Q_ε такі регуляризації вигляду (6.4) потенціалу Q , що відповідні оператори $H_{0,\varepsilon}$ мають границю в сильній резольвентній топології. Потенціали Q_ε асимптотично проникні при $\varepsilon \rightarrow 0$ тоді і лише тоді, коли вони збігаються в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Отже, формальний диференціальним оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)$ має не лише самоспряжену реалізацію, яка є прямою сумою $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$ і в якій потенціал Q треба вважати абсолютно непроникним для частинок. Для кожного Q існує досить широкий клас апроксимацій

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} q_- x^{-1}, & x \in (-x_0, 0), \\ \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon \varkappa\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & |x| < \varepsilon, \\ q_+ x^{-1}, & x \in (0, x_0), \\ Q(x), & \text{в іншому разі,} \end{cases} \quad (6.76)$$

де параметри пов'язані умовою $q_+ - q_- = \int_{\mathcal{I}} \varkappa dx$, що послідовність самоспряжених операторів $H_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_\varepsilon + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}\cdot)$ в рівномірній резольвентній топології збігається до оператора $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q$ з точковими взаємодіями

$$\phi(+0) = \phi(-0), \quad b_+(\phi) - b_-(\phi) = \beta\phi(0)$$

у початку координат. В такій самоспряженій реалізації потенціал Q вже є проникним для частинок. Отже, потенціали типу Кулона, як і δ' -потенціали, є чутливими до способу їх регуляризації і можуть мати різні самоспряжені реалізації залежно від специфіки конкретної квантово-механічної моделі.

Класичний потенціал Кулона $Q(x) = -1/|x|$, з якого властиво розпочали дослідження проблеми одновимірного атома водню, донедавна вважався абсолютно непроникним з єдиною самоспряженою реалізацією $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$. Річ у тім, що всі відомі нам регуляризації, які раніше вивчали дослідники, не задовольняли умови теореми 6.3. В працях [125, 132, 149, 150], наприклад, одновимірну модель атома водню отримували як границю операторів Шрединґера з т.з. зрізаними потенціалами Кулона $R_\varepsilon(x) = -\min\{|x|^{-1}, \varepsilon^{-1}\}$ (див. лівий графік на рис. 6.10). Ця родина потенціалів є частковим випадком потенціалів операторів $H_{0,\varepsilon}$. Справді, $R_\varepsilon(x) = Q_{0,\varepsilon}(x) + \varepsilon^{-1}\chi_{[-1,1]}(\varepsilon^{-1}x)$, де

$$Q_{0,\varepsilon}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|}, & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ 0, & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

а $\chi_{[-1,1]}$ — характеристична функція відрізка $[-1, 1]$. Графік функції $Q_{0,\varepsilon}$ зображений на рис. 6.11. В цьому випадку $q_- = 1$, $q_+ = 1$ та $\varkappa = 0$, а тому умова (6.15) не виконується і сім'я функцій Q_ε розбігається в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. З огляду на теорему 6.4, якщо відповідна родина операторів збігається, то лише до $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$. Тому

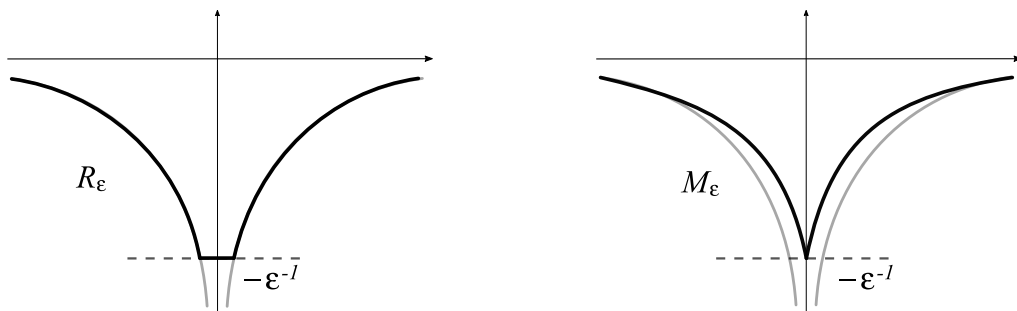


Рис. 6.10: Зрізані та модифіковані потенціали Кулона

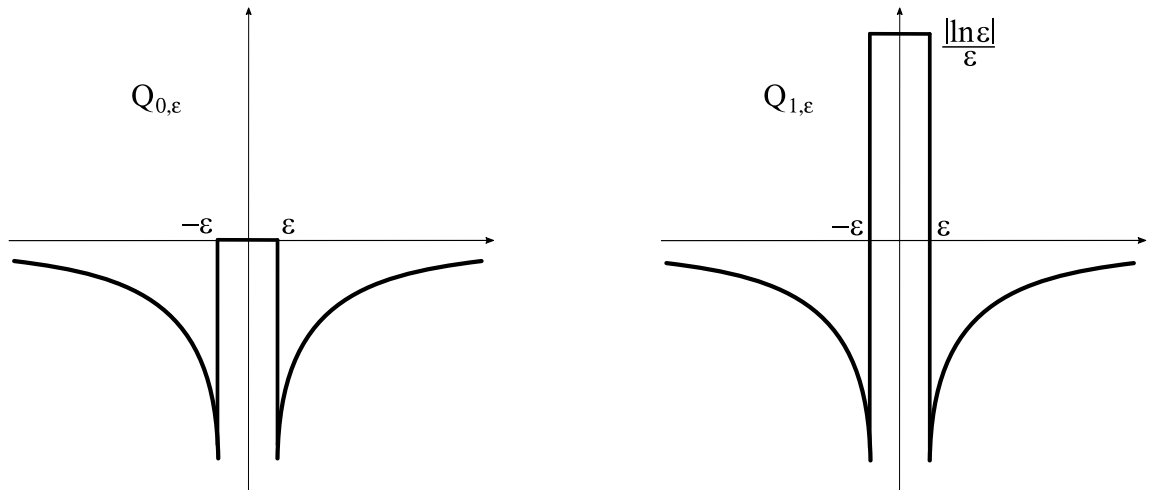


Рис. 6.11: Графіки асимптотично непроникних та проникних регуляризацій парного потенціалу Кулона $-|x|^{-1}$.

у згаданих публікаціях модель одновимірного атома водню пов'язували саме з цією прямою сумою. В працях [125, 132, 151–153], які стосуються регуляризацій кулонівських взаємодій т. з. модифікованими потенціалами Кулона

$$M_\epsilon(x) = -\frac{1}{|x| + \epsilon}$$

(див. правий графік на рис. 6.10), автори теж приходять до висновку, що потенціал $-1/|x|$ абсолютно відбивний. Звісно, $M_\epsilon(x) = Q_{0,\epsilon}(x) + \epsilon^{-1}U(\epsilon^{-1}x)$, де

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|(|x| + 1)}, & \text{коли } |x| > 1, \\ \frac{1}{|x| + 1}, & \text{коли } |x| < 1. \end{cases}$$

Тому умова (6.15) знову не виконується, а модифіковані потенціали Кулона розбігаються в просторі $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Природно, що умова Діріхле в нулі для хвильової функції, яка виникали у цих дослідженнях, вважалася фізично вмотивованою для моделі одновимірного атома водню. Водночас це означало, що потенціал Кулона не може пропускати через себе потік частинок.

Збіжність операторів з модифікованими потенціалами Кулона вивчав також Ф. Гештезі [152]. Сформулюємо його результат у такій формі: якщо потенціал U задовольняє нерівність $|U(x)| \leq c|x|^{-2}$ при $|x| \rightarrow \infty$, то сім'я операторів $H_\epsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_{0,\epsilon}(x) + \epsilon^{-1}U(\epsilon^{-1}x)$ збігається в сильній резольвентній топології при $\epsilon \rightarrow 0$ до прямої суми $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$. Метод доведення дає змогу легко перенести цей

результат на випадок зрізаних потенціалів. В праці також запропонована інша самоспряжена реалізація моделі. На відміну від операторів H_ε , які є збуренням вільного оператора Шрединґера $-\frac{d^2}{dx^2}$ на прямій, розглянемо сім'ю операторів $A_\varepsilon = H_D + Q_{0,\varepsilon}(x) + \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}x)$, в якій незбурений оператор є таким

$$H_D = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom } H_D = \{f \in W_2^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : f(0) = 0\}.$$

В цьому разі, оператори A_ε збігаються до $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$ в рівномірній резольвентній топології. Навздогін статті Гештезі в листі до редакції [153] М. Клаус узагальнив деякі з результатів на клас операторів $S_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + V_\varepsilon(x)$, де $L_{1,loc}(\mathbb{R})$ -потенціали V_ε збігаються поточково до V_0 , для деякого $\gamma \in (0, 2)$ задовольняють оцінку

$$|V_\varepsilon(x)| \leq c(1 + |x|^{\gamma-a})/|x|^\gamma, \quad (6.77)$$

а також умови

$$\int_{-b}^b V_\varepsilon(x) dx \rightarrow -\infty \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \frac{\int_{-b}^b |V_\varepsilon(x)| dx}{\left| \int_{-b}^b V_\varepsilon(x) dx \right|} < \infty \quad (6.78)$$

для деякого $b > 0$. Клаус довів, що оператори S_ε збігаються в рівномірній резольвентній топології до оператора $S_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$. Зрозуміло, що регуляризації, зображені на рис. 6.10, задовольняються усі ці припущення.

В літературі зустрічаються й інші регуляризації потенціалу Кулона, які будують як апроксимації функціоналів Сохоцького \mathcal{S}_\pm [134]:

$$S_{0,\varepsilon}(x) = \left| \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}}, \quad S_{1,\varepsilon}(x) = \left| \text{Re} \left(\frac{1}{x \pm i\varepsilon} \right) \right| = \frac{|x|}{x^2 + \varepsilon^2}$$

(див. рис. 6.12). Обидві регуляризації є порядку $O(\varepsilon^{-1})$ в околі нуля, тому вони не збігаються в просторі узагальнених функцій згідно з лемою 6.3.

Автори усіх згаданих вище публікацій приходили до висновку, що усунути особливість парного потенціалу Кулона $\gamma/|x|$ можна, лише підпорядкувавши хвильову функцію умові Діріхле в нулі. Показовою є навіть назва статті де Олівейри та Веррі [134] — Mathematical predominance of Dirichlet condition for the one-dimensional Coulomb potential. Але розглянемо сім'ю операторів Шрединґера

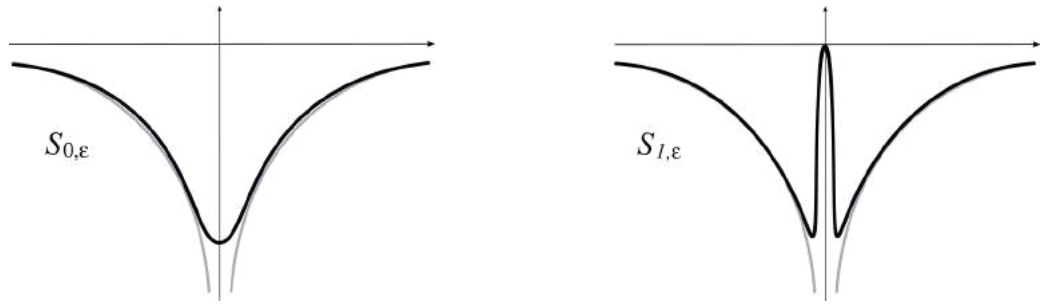


Рис. 6.12: Регуляризації функціоналів Сохоцького.

$H_{1,\epsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_{1,\epsilon}(x)$ з потенціалами вигляду

$$Q_{1,\epsilon}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|}, & \text{коли } |x| > \epsilon, \\ \epsilon^{-1} |\ln \epsilon|, & \text{коли } |x| < \epsilon, \end{cases}$$

зображеними справа на рис. 6.11. В цьому випадку ми маємо $q_- = 1$, $q_+ = -1$ і $\varkappa = -1$, а тому згідно леми 6.3 послідовність $Q_{1,\epsilon}$ збіжна в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $\epsilon \rightarrow 0$ до деякого функціоналу $g \in \mathcal{F}_0$. З огляду на теорему 6.3 оператори $H_{1,\epsilon}$ збігаються до оператора $\mathcal{H}\phi = -\phi'' - \frac{1}{|x|}\phi$, де функції ϕ підпорядковані умовам

$$\phi(+0) = \phi(-0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\phi'(x) + \phi(+0) \ln |x|) = \lim_{x \rightarrow -0} (\phi'(x) - \phi(-0) \ln |x|).$$

Така регуляризація дає нетривіальну модель для одновимірного атома водню, а потенціал Кулона в такій моделі є проникним для частинок.

Для непарного потенціалу Кулона $Q(x) = x^{-1}$ теж довгий час вважалося, що він непроникний для частинок, а єдиною самоспряженою реалізацією формального диференціального виразу

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\psi = k^2\psi \quad (6.79)$$

є оператор з умовами Діріхле в нулі. Проте в 1993 році мексиканський фізик Маркос Мошинські, уродженець Києва, опублікував працю [118], в якій доводив проникність потенціалу x^{-1} . За кілька років до того Мошинські і Щепаняк ввели у фізику концепцію релятивістського гармонічного осцилятора [154], назвавши його осцилятором Дірака. Цей об'єкт дає змогу описати спектр мас мезонів. Задача звелася до вивчення радіального рівняння із сингулярним потенціалом в нулі, а спектр мас залежав від того, чи потенціал x^{-1} є проникним.

В праці [118] Мошинські заміною звів рівняння (6.79) до рівняння Віттакера, записавши розв’язок через спеціальні функції. Зрозумівши, що похідні розв’язків мають логарифмічні особливості в нулі, він поєднав розв’язки на півосях умовами

$$\psi(+0) = \psi(-0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\psi'(x) - \gamma\psi(+0) \ln |x|) = \lim_{x \rightarrow -0} (\psi'(x) - \gamma\psi(-0) \ln |x|).$$

Такі точкові взаємодії в нулі роблять потенціал x^{-1} проникним для частинок, а коефіцієнти відбиття та проходження можна обчислити за формулами

$$R(k) = -\frac{\Gamma(1 + i\gamma/2k) \operatorname{sh}(\pi\gamma/2k)}{\Gamma(1 - i\gamma/2k) \operatorname{ch}(\pi\gamma/2k)}, \quad T(k) = \frac{e^{\pi\gamma/2k}}{\operatorname{ch}(\pi\gamma/2k)}.$$

Назва статті Мошинського “Penetrability of a one-dimensional Coulomb potential (Проникність одновимірного потенціалу Кулона)” була досить провокативною на той час. І провокація вдалася, бо відомий американський фізик, багаторічний редактор *Journal of Mathematical Physics* Роджер Г. Ньютон написав злісний коментар [119] на цю статтю. Критика Ньютона, який пробував захистити стару усталену парадигму, зводилася до того, що обидва рівняння (6.1) з парним і непарним потенціалами Кулона мають схожі властивості. У багатьох дослідженнях встановлено, що парний потенціал є непроникним, тому таким має бути і непарний. А Мошинські просто ігнорують ці наукові здобутки.

У відповіді [120] на коментар Мошинські акцентує, що вся вказана його критиком література стосувалася парного потенціалу $|x|^{-1}$, а його об’єкт дослідження має дещо інші властивості. Для переконливості аналізує також матричне представлення задачі, яке, як відомо, є еквівалентним операторній формі. Завершує відповідь жартом кінематографістів: ніщо так не збільшує дохід від фільму, ніж заборона його дивитися, бо він непристойний. Несподіваний результат Мошинського змінив погляд фізиків на питання проникності потенціалів Кулона і дав поштовх до нових дискусій. Так В. Фішер, Г. Лешке та П. Мюллер [121], скориставшись ідеєю Мошинського, побудували чотирьохпараметричну сім’ю самоспряжених реалізацій для гамільтоніана з парним потенціалом Кулона. В оригінальних позначеннях авторів, диференціальний оператор

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\gamma}{|x|}$$

разом з точковими взаємодіями вигляду

$$\begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow +0} (2\gamma\phi(x) \ln(|\gamma|x) + \phi'(x)) \\ \lim_{x \rightarrow -0} (2\gamma\phi(x) \ln(-|\gamma|x) - \phi'(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \zeta \\ \bar{\zeta} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(+0) \\ \phi(-0) \end{pmatrix}$$

для довільних $\rho, \lambda \in \mathbb{R}$ та $\zeta \in \mathbb{C}$, породжує самоспряжений оператор в $L_2(\mathbb{R})$. Автори також роблять важливий висновок, що варто зважати на багатоманітність гамільтоніанів, моделюючи конкретну фізичну ситуацію, зокрема, квантові хвилеводи. Тобто сама лише математика не дасть відповіді, який гамільтоніан має бути вибраний — необхідно скористатися додатковою фізичною інформацією.

Через рік П. Курасов публікує статтю [122], в якій наполягає на однозначному трактуванні диференціальних виразів (6.1). На його думку, умови спряження

$$\phi(+0) = \phi(-0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\phi'(x) - \phi(+0) \ln |x|) = \lim_{x \rightarrow -0} (\phi'(x) - \phi(-0) \ln |x|)$$

— це єдина правильна точкова взаємодія, яка відповідає непарному потенціалу x^{-1} . Легко зрозуміти звідки у автора виникає ця єдиність. Згідно з лемою 6.1 існує безліч функціоналів, які породжуються неінтегрованою в нулі функцією x^{-1} . Курасов фіксує цей функціонал, вибравши його як \mathcal{P}_x^1 . Він насправді досліджує “диференціальний вираз” $-\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{P}_x^1$, припускаючи, що елементи області визначення самоспряженої реалізації задовольняють умову

$$v.p. \left(-\frac{d^2}{dx^2} \psi + \frac{1}{x} \psi \right) \in L_2(\mathbb{R}).$$

Це припущення, зокрема, неявно передбачає існування такої регуляризації x^{-1} , яка збігається до \mathcal{P}_x^1 . Тому результат Курасова узгоджується з теоремою 6.3. Крім того, схожими міркуваннями він приходить до висновку, що для парного потенціалу $|x|^{-1}$ єдиними точковими взаємодіями є умови Діріхле в нулі.

Проте Фішер, Лешке та Мюллер не погодилися з єдиністю точкової взаємодії для $|x|^{-1}$, опублікувавши свої заперечення в коментарі [123] до статті Курасова. Вони наполягали, що жодна математика не може гарантувати адекватного вибору самоспряженої реалізації, якщо не враховувати специфіку фізичного експерименту. В свою чергу, Курасов не згодився з “багатоманіттям” гамільтоніанів і розписав детальніше свої математичні аргументи у відповіді [124] на коментар

опонентів. Зокрема, він провів міркування для ширшої сім'ї операторів

$$H = v.p. \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \right) + \beta\delta(x),$$

для яких він отримав точкові взаємодії

$$\phi(+0) = \phi(-0), \quad b_+(\phi) - b_-(\phi) = \beta\phi(0),$$

де $b_{\pm}(\phi) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} (\phi'(x) - \gamma\phi(\pm 0) \ln|x|)$. Цей результат теж узгоджується з теоремою 6.3. В кінцевому підсумку усі залишилися при своїй думці.

В наших дослідження ми не робимо різниці між парними і непарними потенціалами Кулона, вкладаючи їх в одну множину потенціалів типу Кулона Q , які володіють в нулі особливістю (6.2). І для кожного Q існують різні регуляризації Q_{ε} вигляду (6.76), які як асимптотично проникні, так і асимптотично відбивні при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для $Q(x) = x^{-1}$ розглянемо регуляризації вигляду

$$Q_{2,\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon, & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases} \quad Q_{3,\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{коли } |x| > \varepsilon, \\ \varepsilon^{-2} |\ln \varepsilon| x, & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

графіки яких зображені на рис. 6.13. В цьому випадку $q_- = q_+ = 1$ і тому умова (6.15) виконується лише для $Q_{3,\varepsilon}$, коли $\varkappa(x) = -x$. Отже, $Q_{3,\varepsilon}$ — асимптотично проникний потенціал при $\varepsilon \rightarrow 0$, на відміну від $Q_{2,\varepsilon}$, який є асимптотично відбивним для частинок. Справді, потенціали $Q_{2,\varepsilon}$ задовольняють умови (6.77), (6.78) і згідно з результатом Гештезі відповідні оператори $H_{0,\varepsilon}$ збігаються до прямої суми операторів Діріхле на півосях.

Зауважимо, що оператори Штурма-Ліувілля з потенціалами Кулона вивчав Д. Гансон ще в 1987 році [155]. Він досліджував збіжність операторів із гладкими потенціалами, які були різними апроксимаціями функції x^{-1} , зокрема, наближеннями $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$ в сенсі головного значення, як в Курасова, та наближеннями $(x - i\varepsilon)^{-1}$ функціоналу Сохоцького. Варто згадати також, що ґрунтовне дослідження оператора Штурма-Ліувілля $-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x}$ на скінченному відрізьку з умовами Діріхле провели Б. Боденштофер, А. Діксма та Х. Лангер [130]. Вони описали всі самоспряжені та максимальні дисипативні розширення такого оператора. Зокрема, доведено, що для кожного дійсного γ сім'я операторів Штурма-Ліувілля

$$T_{\gamma,\varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} - \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \gamma/i\pi}{x + i\varepsilon} \right), \quad \operatorname{dom} T_{\gamma,\varepsilon} = \{f \in W_2^2(a, b) : f(a) = f(b) = 0\}$$

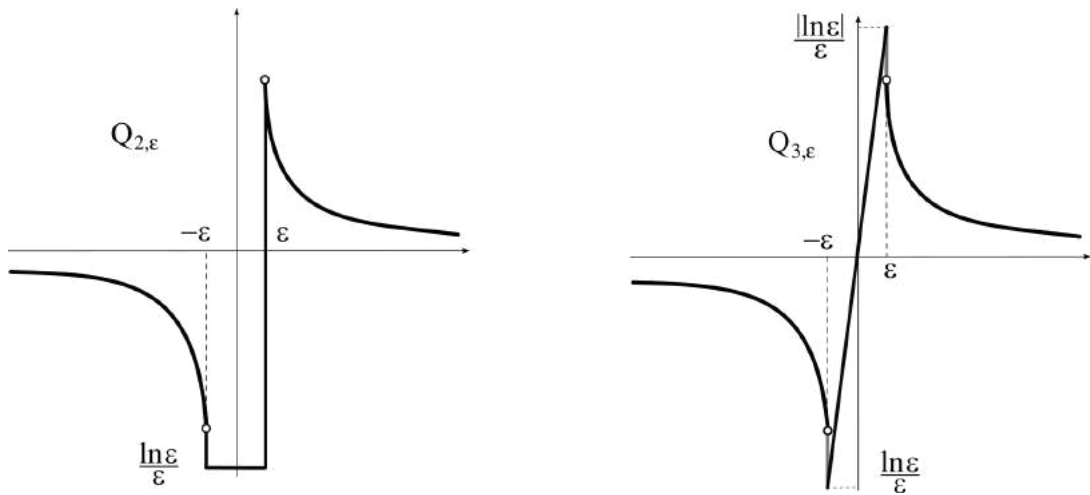


Рис. 6.13: Непроникна і проникна регуляризації непарного потенціалу Кулона

збігається в рівномірній резольвентній топології до оператора $T_\gamma = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x}$, функції з області визначення якого підпорядковані умовам Діріхле в точка a і b та умовам спряження

$$f(-0) = f(+0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} (f'(x) - f'(-x)) = \gamma f(0)$$

в початку координат. Цей результат узгоджується з теоремою 6.3, бо відповідає дає випадкові $q_- = q_+ = -1$, $\varkappa = 0$ та $U(x) = +\infty$ при $x \notin (a, b)$.

Розділ 7

ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНГЕРА ІЗ СИНГУЛЯРНИМ ЗБУРЕННЯМ ПОТЕНЦІАЛУ В ОКОЛІ КРИВОЇ

Вивчатимемо спектральні властивості двовимірних операторів Шредингера зі збуреннями потенціалів, що концентруються в околі гладкої замкненої кривої. Узагальнимо на випадок площини результати про $(a\delta' + b\delta)$ -подібні збурення операторів Шредингера на прямій. Останнім часом у науковій літературі спостерігаємо значне зацікавлення точними моделями, в яких взаємодії зосередженні на багатовидах меншої вимірності. Оператори Шредингера з псевдопотенціалами, які є узагальненими функціями з носіями на кривих, поверхнях чи метричних графах є основним математичним інструментом моделювання квантових хвилеводів, рідких квантових графів чи квантових систем із зарядженими включеннями [146, 147]. Проте багато математичних питань, пов'язаних з такими псевдогамільтоніанами, залишаються відкритими.

Наукових публікацій, пов'язаних з багатовимірними точними моделями у квантовій механіці, дуже багато. Ми обмежимося коротким оглядом випадку, коли збурення були зосереджені на гіперповерхні – багатовиді кривимірності 1. Саме такі збурення є природним узагальненням на більші виміри гамільтоніанів з точковими взаємодіями на кшталт δ - чи δ' -взаємодій на прямій. Найактивніше вивчали оператори Шредингера з δ -потенціалами, зосередженими на компактних чи некомпактних орієнтованих багатовидах S . Їх формально можна записати так $-\Delta + \beta\delta_S$, де псевдопотенціал $\beta\delta_S$ є розподілом в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, що діє за правилом

$$\langle \beta\delta_S, \phi \rangle = \int_S \beta\phi \, d\sigma, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

β – інтегровна функція на S , а через $d\sigma$ позначена міра на S , індукована ріма-

новою метрикою в \mathbb{R}^n . Математичні моделі з такими операторами виникають в ядерній фізиці, молекулярній фізиці, фізиці твердого тіла [157–160], і їх вивчали з 60-х років минулого століття під назвою SDI-моделі (Surface Delta Interaction).

Коли гіперповерхня S є достатньо гладкою, оператору $-\Delta + \beta\delta_S$ можна надати математичний зміст кількома способами. Наприклад, можемо ввести оператор $H_{\beta,S}$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ як оператор Лапласа на функціях f з простору $W_2^2(\mathbb{R}^n \setminus S)$, що задовольняють умови спряження $f^+ = f^-$, $\partial_\nu f^+ - \partial_\nu f^- = \beta f$ на поверхні S . Тут f^- і f^+ – односторонні сліди функції f на S , а ν – нормальне векторна поле на S . Цей евристичний оператор можна також строго математично визначити за допомогою симетричної напівлінійної форми

$$\mathfrak{b}(f, g) = (\nabla f, \nabla g)_{L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)} + \int_S \beta f \bar{g} |d\sigma, \quad \text{dom } \mathfrak{b} = W_2^1(\mathbb{R}^n).$$

Форма \mathfrak{b} – щільно визначена, замкнена і напівобмежена в $L_2(\mathbb{R}^n)$, тому існує самоспряжений оператор $B_{\beta,S}$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ такий, що $(B_{\beta,S}f, g)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \mathfrak{b}(f, g)$ для всіх $f \in \text{dom } B_{\beta,S}$ та $g \in \text{dom } \mathfrak{b}$.

Важливою перевагою таких самоспряжених реалізацій формального оператора $-\Delta + \beta\delta_S$ є їхня “стабільність” відносно регуляризацій δ_S гладкими потенціалами. Якщо сім’я потенціалів U_ε з компактними носіями збігається до $\beta\delta_S$ в просторі узагальнених функцій, то оператори $-\Delta + U_\varepsilon$ збігаються при $\varepsilon \rightarrow 0$ до $H_{\beta,S}$ в рівномірній резольвентній топології [161]. Спектральні властивості та властивості задач розсіювання для операторів Шрединґера з δ_S -взаємодіями вивчені досить ґрунтовно. Зокрема, моделі із взаємодіями на скінченній чи нескінченній кількості концентричних сфер розглядали в [162–168]. У статтях [161, 169–176] вивчали випадки замкнених гіперповерхонь загального вигляду та гіперповерхонь з краєм. Ситуацію, коли δ_S -подібні взаємодії концентрувалися в околі поверхонь з кінчними точками, досліджували в працях [177, 178]. На багатовимірний випадок можна узагальнити усю чотирьохпараметричну родину точкових взаємодій з леми 1.6, що і було зроблено в [179]. Проте в літературі найбільш популярними, звісно разом з δ_S -взаємодіями, стали т.з. δ'_S -взаємодії на поверхнях [176, 180–182], які задають умовами спряження $\partial_\nu f^+ = \partial_\nu f^-$, $f^+ - f^- = \beta \partial_\nu f$ на S .

Результати розділу опубліковано в [156].

7.1 Формулювання задачі та основні результати

Розглянемо в просторі \mathbb{R}^2 формальні оператори вигляду

$$H = -\Delta + W + a\partial_\nu\delta_\gamma + b\delta_\gamma, \quad (7.1)$$

де W – регулярний потенціал, γ – замкнена крива, a і b – функції класу $L^1(\gamma)$, а δ_γ – функція Дірака, зосереджена на кривій γ . Псевдопотенціал $a\partial_\nu\delta_\gamma + b\delta_\gamma$ є узагальненою функцією, що діє за правилом

$$\langle a\partial_\nu\delta_\gamma + b\delta_\gamma, \phi \rangle = \int_\gamma (-\partial_\nu(a\phi) + b\phi) d\gamma, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Очевидно, що такі потенціали є сингулярнішими ніж потенціал δ_γ , тому проблема надання йому математичного сенсу є складнішою. Збільшення сингулярності збурення робить задачу схожою на проблему δ' -потенціалу в одновимірному випадку. Оператор H вже не володіє стійкістю щодо регуляризацій гамільтоніанами $H_\varepsilon = -\Delta + W + V_\varepsilon$ з гладкими локальними потенціалами V_ε . З погляду фізики це означає, що квантово-механічні системи з $(a\partial_\nu\delta_\gamma + b\delta_\gamma)$ -подібними потенціалами різної форми можуть володіти, взагалі кажучи, дещо різними властивостями. Позаяк диференціальний вираз з таким псевдопотенціалом не можна однозначно пов'язати з якоюсь взаємодією на кривій, то нашою ціллю є побудова цілого класу точних моделей або ж класу умов спряження на носіїві псевдопотенціалу. Пошук моделі пов'язаний із вивченням асимптотичної поведінки операторів H_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, і тут ми зустрічаємося ще з однією особливістю багатовимірного випадку. Оператори H_ε не збігаються в рівномірній резольвентній топології. Проте збіжність операторів не є самоціллю: коли така збіжність є в хорошій топології, то з неї можна отримати апроксимацію кількісних характеристик фізичної системи – спектру чи даних розсіювання. В нашому випадку оператори збігаються лише в сильній резольвентній топології, тому ми відразу займемося аналізом їхніх спектрів. Зауважимо, що коли псевдогамільтоніан $a\partial_\nu\delta_\gamma + b\delta_\gamma$ трактувати як збурення скінченного рангу, то рівномірна збіжність резольвент регуляризованих операторів доведена в [183–185]

Ми вивчатимемо сім'ю операторів Шрединґера

$$H_\varepsilon = -\Delta + W + V_\varepsilon$$

в просторі $L^2(\mathbb{R}^2)$, а саме, асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ власних значень λ^ε задачі

$$-\Delta u_\varepsilon + (W + V_\varepsilon)u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{в } \mathbb{R}^2. \quad (7.2)$$

Водночас асимптотичний аналіз спектру дасть нам граничний оператор для сім'ї H_ε , а, отже, і фізично вмотивовані взаємодії на кривій. Нехай потенціал W належить до простору $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$, зростає при $|x| \rightarrow +\infty$ і є гладким в деякому околі кривої γ . Незбурений оператор $H_0 = -\Delta + W$ самоспряжений в $L^2(\mathbb{R}^2)$, а його спектр дискретний, бо потенціал W зростає на нескінченності. Очевидно, що оператори H_ε теж самоспряжені з дискретним спектром і з такою ж областю визначення, як в оператора H_0 , бо V_ε мають компактні носії.

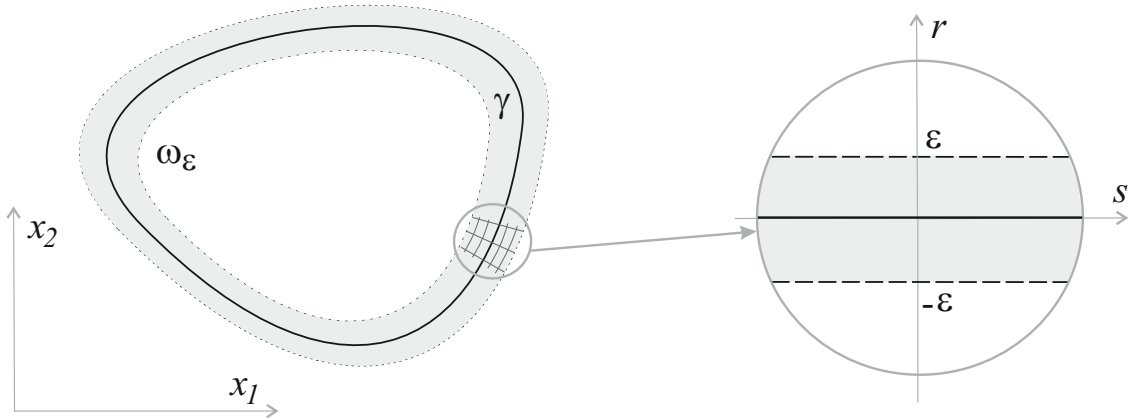


Рис. 7.1: Локальні координати в ω_ε .

Опишемо, як влаштовані потенціали V_ε . Нехай γ — замкнена гладка крива без точок самоперетину, ω_ε — ε -оکیل кривої γ , тобто об'єднання всіх відкритих куль радіуса ε з центром в точках γ . Для малих ε множина ω_ε є областю з гладкою границею. Щоб описати залежність V_ε від малого параметра, введемо локальні координати в ω_ε . Нехай $\alpha: [0, |\gamma|) \rightarrow \mathbb{R}^2$ — параметризація кривої γ натуральним параметром s , де $|\gamma|$ — довжина кривої. Тоді $\nu = (-\dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_1)$ — одиничне нормальне векторне поле на γ . Покладемо $x = \alpha(s) + r\nu(s)$ для точок $(s, r) \in [0, |\gamma|) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, де r — орієнтована відстань від x до γ (див. рис. 7.1). Нехай

$$V_\varepsilon(\alpha(s) + r\nu(s)) = \varepsilon^{-2} V(\varepsilon^{-1}r) + \varepsilon^{-1} U(s, \varepsilon^{-1}r), \quad (7.3)$$

де V та U — гладкі функції з компактними носіями. Припустимо, що носії V і $U(s, \cdot)$ лежать в інтервалі $[-1, 1]$ для всіх s . Тоді носії збурень V_ε містяться в області ω_ε .

В загальному випадку потенціали V_ε розбігаються в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Проте, коли V є функцією з нульовим середнім, то вони збігаються до розподілу вигляду $a\partial_\nu\delta_\gamma + b\delta_\gamma$, що ми доведемо нижче. Варто зауважити, що узагальнена функція $\partial_\nu\delta_\gamma$ насправді є з точністю до знаку лапласіаном від характеристичною функції $\mathbf{1}_{x\in\Omega}$ обмеженої області Ω , яку охоплює крива γ . А саме, $\partial_\nu\delta_\gamma = -\Delta\mathbf{1}_{x\in\Omega}$ в сенсі узагальнених функцій. Якщо послідовність гладких функцій χ^ε є такою, що χ^ε дорівнює тотожно одиниці на Ω , обертається в нуль поза деяким оточенням Ω , а також $\chi^\varepsilon \rightarrow \mathbf{1}_{x\in\Omega}$ в просторі $L^1(\mathbb{R}^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $V_\varepsilon = -\Delta\chi^\varepsilon$ є прикладом $\partial_\nu\delta_\gamma$ -подібних потенціалів (див. рис. 7.2). Такі потенціали є цікавими не лише в контексті операторів Шредингера, вони також виникають в теорії рівнянь Нав'є-Стокса, задачах з вільними межами, теорії потенціалу для параболічних і еліптичних диференціальних рівнянь, теорії інтегралів Феймана [186–189].

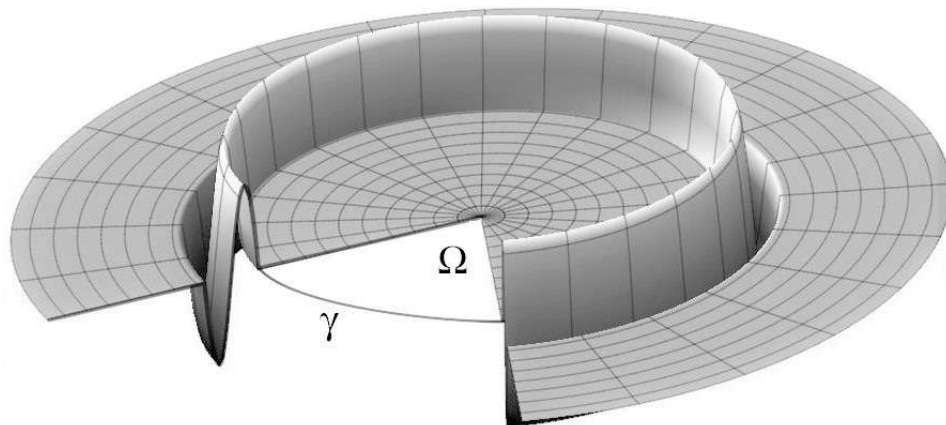


Рис. 7.2: Графік $\partial_\nu\delta_\gamma$ -подібного потенціалу (частина графіка вирізана для кращої візуалізації).

Замкнена крива γ ділить площину на дві області Ω_{in} та Ω_{out} . Вважатимемо, що область Ω_{out} є необмеженою. Введемо простір $\mathcal{W}^+ \subset L^2(\Omega_{out})$: кажемо, що f належить до \mathcal{W}^+ , якщо f в області Ω_{out} збігається з деякою функцією з області визначення $\text{dom } H_0$. Нехай $\mathcal{W} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : f|_{\Omega_{in}} \in W_2^2(\Omega_{in}), f|_{\Omega_{out}} \in \mathcal{W}^+\}$. Через \mathcal{E} позначатимемо нескінченну підмножину інтервала $(0, 1)$, для якої нуль є граничною точкою. Нагадаємо, що v^\pm – односторонні сліди функції v на γ .

Теорема 7.1. *Припустимо, що оператор $-\frac{d^2}{dr^2} + V$ в $L^2(\mathbb{R})$ володіє резонансом нульової енергії з напівзв'язним станом h . Нехай $\theta = h(+\infty)$, коли $h(-\infty) = 1$.*

(i) Нехай $\{\lambda^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ — послідовність власних значень оператора H_ε , а $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ — відповідна послідовність нормованих в $L^2(\mathbb{R}^2)$ власних функцій. Якщо

$$\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda, \quad u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{слабко в } L^2(\mathbb{R}^2) \quad (7.4)$$

при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$ і гранична функція u ненульова, то λ є власним значенням з власною функцією u оператора $\mathcal{H} = -\Delta + W$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$, визначеного на області

$$\text{dom } \mathcal{H} = \left\{ v \in \mathcal{W} : v^+ = \theta v^-, \theta \partial_\nu v^+ - \partial_\nu v^- = \left(\frac{1}{2}(\theta^2 - 1)\varkappa + \mu \right) v^- \text{ на } \gamma \right\}.$$

Тут $\varkappa = \varkappa(s)$ — кривина кривої γ та $\mu(s) = \int_{\mathbb{R}} U(s, r) h^2(r) dr$.

(ii) Якщо виконуються умови (7.4) і λ не належить до спектру $\sigma(\mathcal{H})$, то послідовність власних функцій u_ε збігається до нуля при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$ в слабкій топології простору $L^2(\mathbb{R}^2)$.

(iii) Для кожного власного значення λ оператора \mathcal{H} та всіх достатньо малих ε існує таке власне значення λ^ε оператора H_ε , що виконується нерівність $|\lambda^\varepsilon - \lambda| \leq c\varepsilon$ зі сталою c , незалежною від ε .

Введемо два оператори

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^- &= -\Delta + W \quad \text{в } L^2(\Omega_{in}), & \text{dom } \mathcal{D}^- &= \{v \in W_2^2(\Omega_{in}) : v = 0 \text{ на } \gamma\}, \\ \mathcal{D}^+ &= -\Delta + W \quad \text{в } L^2(\Omega_{out}), & \text{dom } \mathcal{D}^+ &= \{v \in \mathcal{W}^+ : v = 0 \text{ на } \gamma\}. \end{aligned}$$

Теорема 7.2. Нехай $\{\lambda^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ — послідовність власних значень оператора H_ε , а $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ — відповідна послідовність власних функцій, нормованих в $L^2(\mathbb{R}^2)$. Припустимо, що оператор $-\frac{d^2}{dr^2} + V$ не має резонансу нульової енергії.

(i) Якщо $\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабко в $L^2(\mathbb{R}^2)$ при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$ і гранична функція u є ненульовою, то λ — власне значення прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$, а u — відповідна власна функція.

(ii) У випадку, коли $\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda$ при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$ і $\lambda \notin \sigma(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)$, то власні функції u_ε збігаються до нуля слабко в $L^2(\mathbb{R}^2)$.

(iii) Якщо $\lambda \in \sigma(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)$, то для малих ε можна знайти таке власне значення λ^ε оператора H_ε , що $|\lambda^\varepsilon - \lambda| \leq c\varepsilon$, де стала c не залежить від ε .

Тонка область ω_ε , яка є носієм збурення V_ε , може продукувати зліченну кількість власних значень оператора H_ε , які прямують до від'ємної нескінченності

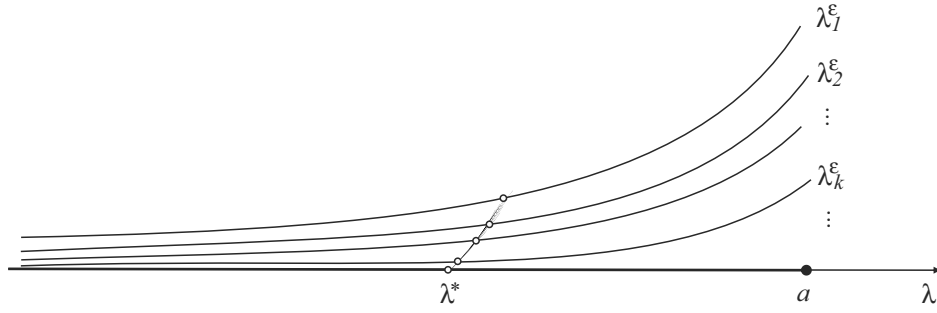


Рис. 7.3: Точку λ^* променя $(-\infty, a)$ можна апроксимувати власними значеннями λ_k^ε , які прямують до $-\infty$.

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Хоча при кожному $\varepsilon > 0$ число від'ємних власних значень є скінченним, для деяких потенціалів V_ε воно може зростати при $\varepsilon \rightarrow 0$. Зокрема, це означає, що оператори H_ε не є обмеженими знизу рівномірно відносно ε . Крім того, у цьому випадку існує промінь $(-\infty, a)$, кожна точка якого є граничною точкою для власних значень (див. рис. 7.3). Зауважимо, що згідно з варіаційним принципом власні значення можна вибрати як неперервні функції аргументу ε . Теорема 7.1 і 7.2 вказують на принципову різницю між точками спектру граничного оператора та іншими точками скупчення власних значень. А саме, лише точки спектру $\sigma(\mathcal{H})$ в резонансному випадку або ж точки $\sigma(\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+)$ в разі його відсутності можна так апроксимувати власними значеннями λ^ε оператора H_ε так, щоб відповідні власні функції u_ε мали нетривіальну границю в $L^2(\mathbb{R}^2)$. Асимптотика власних значень, які прямують до від'ємної нескінченності, залишається наразі відкритою проблемою.

В разі резонансу виникають умови $f^+ = \theta f^-$, $\theta \partial_\nu f^+ - \partial_\nu f^- = \beta(s) f^-$ на γ , вигляд яких був очікуваним з огляду на результати розділів 1 і 2. Те, що θ не змінюється на γ , є наслідком незалежності потенціалу V від координати s . Знаходження явного вигляду функції β стало однією з мотивацій у дослідженні цієї задачі. Спеціалісти давно передбачали, що взаємодії на підмноговидах повинні залежати від геометрії цих підмноговидів. В структурі функції

$$\beta(s) = \frac{1}{2}(\theta^2 - 1)\varkappa(s) + \int_{\mathbb{R}} U(s, r)h^2(r) dr$$

бачимо залежність між геометрією кривої та спектральними характеристиками $\partial_\nu \delta_\gamma$ -подібного потенціалу V , а саме, між кривиною кривої та напівзв'язним станом. Зрештою, β залежить і від δ_γ -подібного потенціалу U .

Зі зростанням порядку сингулярності збурень геометрія підмноговидів впливає все більше на структуру взаємодій. Якщо $V = 0$, то потенціали мають вигляд $V_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} U(s, \varepsilon^{-1}r)$ і збігаються до $\mu_0 \delta_\gamma$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, де

$$\mu_0(s) = \int_{\mathbb{R}} U(s, r) dr. \quad (7.5)$$

Як ми вже знаємо, вільний оператор Шрединґера $-\frac{d^2}{dr^2}$ має резонанс нульової енергії з $h = 1$. Тоді $\theta = 1$, а умови спряження на кривій γ

$$v^+ = \theta v^-, \quad \theta \partial_\nu v^+ - \partial_\nu v^- = \left(\frac{1}{2}(\theta^2 - 1)\varkappa + \mu\right) v^- \quad (7.6)$$

набувають вигляду $v^+ = v^-$, $\partial_\nu v^+ - \partial_\nu v^- = \mu_0 v$. Це узгоджується з недавнім результатом Д. Берндта, П. Екснера, М. Хольцмана та В. Лоторейчика [161], де доведено рівномірну резольвентну збіжність операторів з δ_S -подібними збуреннями потенціалу в околі замкненої гіперповерхні S в \mathbb{R}^n . Бачимо, що у цьому разі доданок, який містив кривину \varkappa , зникає з умов.

Кривина \varkappa потрапляє в умови спряження з якобіану координат (s, r) . Вектори $\alpha = (\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2)$, $\nu = (-\dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_1)$ утворюють репер Френе на γ . Якобіан перетворення $x_1 = \dot{\alpha}_1(s) - r\dot{\alpha}_2(s)$, $x_2 = \dot{\alpha}_2(s) + r\dot{\alpha}_1(s)$ має вигляд

$$\begin{aligned} J(s, r) &= \begin{vmatrix} \dot{\alpha}_1(s) - r\ddot{\alpha}_2(s) & -\dot{\alpha}_2(s) \\ \dot{\alpha}_2(s) + r\ddot{\alpha}_1(s) & \dot{\alpha}_1(s) \end{vmatrix} = \\ &= \dot{\alpha}_1^2(s) + \dot{\alpha}_2^2(s) - r(\dot{\alpha}_1(s)\ddot{\alpha}_2(s) - \dot{\alpha}_2(s)\ddot{\alpha}_1(s)) = 1 - r\varkappa(s), \end{aligned}$$

де $\varkappa = \det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ — орієнтована кривина γ . Загальноприйнятою кривиною плоскої кривої є абсолютна величина \varkappa . Функція J відмінна від нуля для малих значень r , бо кривина \varkappa є обмеженою на γ . Репер Френе разом з кривиною \varkappa визначені з точністю до зміни натуральної параметризації $s \mapsto -s$, бо тоді \varkappa змінює знак. При цьому параметри θ та μ в умовах (7.6) теж залежать від вибору параметризації.

Лема 7.1. *Оператор \mathcal{H} в теоремі 7.1 є інваріантним щодо вибору натуральної параметризації кривої γ .*

Доведення. На гладкій криві можна вибрати дві натуральні параметризації і два різні репери Френе. Змінимо репер $\{\alpha, \nu\}$ на репер $\{-\alpha, -\nu\}$ і доведемо,

що умови (7.6) при цьому залишаються такими ж. Змінивши напрямок нормалі, ми змінюємо напрямок осі r , а тому треба перенормувати напівзв'язний стан h оператора $-\frac{d^2}{dr^2} + V$. Перетворення $r \mapsto -r$ та $h(r) \mapsto \theta^{-1}h(-r)$ приводять до одночасного перетворення багатьох величин:

$$\theta \mapsto \theta^{-1}, \quad \varkappa \mapsto -\varkappa, \quad \mu \mapsto \theta^{-2}\mu, \quad u_{\pm} \mapsto u_{\mp}, \quad \partial_{\nu}u_{\pm} \mapsto -\partial_{\nu}u_{\mp}.$$

Перша з умов спряження $u^+ - \theta u^- = 0$ набуває вигляду $u^- - \theta^{-1}u^+ = 0$, а отже, залишається незмінною. Друга умова набуває вигляду

$$-\theta^{-1}\partial_{\nu}u^- + \partial_{\nu}u^+ - \left(-\frac{1}{2}(\theta^{-2} - 1)\varkappa + \theta^{-2}\mu\right)u^+ = 0.$$

Помноживши її на θ , з рівності $\theta(\theta^{-2} - 1) = -\theta^{-1}(\theta^2 - 1)$ дістанемо

$$\theta\partial_{\nu}u^+ - \partial_{\nu}u^- - \left(\frac{1}{2}(\theta^2 - 1)\varkappa + \mu\right)\theta^{-1}u^+ = 0,$$

Залишилося $\theta^{-1}u^+$ замінити на u^- згідно з першою умовою. \square

Теореми 7.1 і 7.2 стосуються операторів H_{ε} з потенціалами V_{ε} вигляду (7.3), які, взагалі кажучи, розбігаються в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, а їх збіжність чи розбіжність не мають впливу на збіжність спектрів H_{ε} до спектру граничного оператора. Умови збіжності потенціалів V_{ε} та умови збіжності спектрів цілком різні.

Лема 7.2. *Потенціали V_{ε} , задані формулою (7.3), збігаються в просторі узагальнених функцій тоді і лише тоді, коли $\int_{\mathbb{R}} V(r) dr = 0$. В цьому разі*

$$V_{\varepsilon} \rightarrow \mu_1 \partial_{\nu}\delta_{\gamma} + (\mu_1\varkappa + \mu_0)\delta_{\gamma} \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

де $\mu_1 = -\int_{\mathbb{R}} rV(r) dr$, а функція μ_0 визначена формулою (7.5).

Доведення. Очевидно, що $\varepsilon^{-1}U(s, \varepsilon^{-1}r) \rightarrow \mu_0\delta_{\gamma}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Нехай $n = \varepsilon^{-1}r$. Тоді

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2}\langle V(\varepsilon^{-1}\cdot), \phi \rangle &= \varepsilon^{-2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_0^{|\gamma|} V(\varepsilon^{-1}r)\phi(s, r)(1 - r\varkappa(s)) ds dr = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{|\gamma|} V(n)\phi(s, \varepsilon n)(1 - \varepsilon n\varkappa(s)) ds dn = \varepsilon^{-1} \int_{-1}^1 V(n) dn \int_0^{|\gamma|} \phi(s, 0) ds + \\ &\quad + \int_{-1}^1 nV(n) dn \int_0^{|\gamma|} (\partial_n\phi(s, 0) - \varkappa(s)\phi(s, 0)) ds + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всіх $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Отже, ця послідовність має границю в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ лише тоді, коли $\int_{\mathbb{R}} V dn = 0$, причому $\varepsilon^{-2}\langle V(\varepsilon^{-1}\cdot), \phi \rangle \rightarrow \mu_1 \int_{\gamma} (\partial_{\nu}\delta_{\gamma} + \varkappa\delta_{\gamma}) \phi d\gamma$. Це завершує доведення. \square

7.2 Формальна асимптотика

Побудуємо формальну асимптотику власних значення та власних функцій оператора H_ε і водночас покажемо як виникають умови спряження (7.6). Надалі нам буде зручно параметризувати криву γ не точками інтервалу $[0, |\gamma|)$, а точками кола S довжини $|\gamma|$. Це дозволить не вказувати щоразу, що функції є $|\gamma|$ -періодичні за змінною s . Тоді ω_ε є дифеоморфна циліндру $Q_\varepsilon = S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Через γ_t позначимо криву, отриману перенесенням γ за “час” t вздовж нормального векторного поля, тобто $\gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^2: x = \alpha(s) + t\nu(s), s \in S\}$. Тоді межа ω_ε складається з двох кривих $\gamma_{-\varepsilon}$ та γ_ε . Нехай векторне поле ν є зовнішнім до області Ω_{in} , тобто координата r зростає в напрямку від Ω_{in} до Ω_{out} .

Шукатимемо асимптотичні наближення власних значень і власних функцій задачі (7.2) у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \approx \lambda, \quad u_\varepsilon(x) \approx \begin{cases} u(x) & \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon, \\ v_0(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon v_1(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 v_2(s, \frac{r}{\varepsilon}) & \text{в } \omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (7.7)$$

Наближення в областях ω_ε і $\mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon$ узгодимо умовами

$$[u_\varepsilon]_{-\varepsilon} = 0, \quad [u_\varepsilon]_\varepsilon = 0, \quad [\partial_r u_\varepsilon]_{-\varepsilon} = [\partial_r u_\varepsilon]_\varepsilon = 0, \quad (7.8)$$

де $[w]_t$ — стрибок функції w при переході через γ_t в напрямку зростання координати r . За допомогою цих наближень ми побудуємо квазімоди оператора H_ε .

Позаяк функція u_ε — розв’язок рівняння (7.2), а область ω_ε стягується в криву γ , то функція u повинна бути розв’язком рівняння

$$-\Delta u + Wu = \lambda u \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \gamma. \quad (7.9)$$

Зрозуміло, що u має ще задовольняти деякі умови на γ , які ми знайдемо, аналізуючи рівняння (7.2) в локальних координатах навколо γ . Метричний тензор $g = (g_{ij})$ в системі координат (s, r) має вигляд

$$g = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Справді, $g_{11} = |x_s|^2 = |\dot{\alpha} + r\dot{\nu}|^2 = |(1 - r\kappa)\dot{\alpha}|^2 = J^2$, бо $\dot{\nu} = -\kappa\dot{\alpha}$ згідно з формулами Френе, а також $g_{22} = |x_r|^2 = |\nu|^2 = 1$. Позадіагональні елементи

дорівнюють нулю, бо система координат ортогональна. Тоді

$$\nabla\phi = J^{-1}\partial_s\phi\alpha + \partial_r\phi\nu, \quad \Delta\phi = J^{-1}(\partial_s(J^{-1}\partial_s\phi) + \partial_r(J\partial_r\phi)). \quad (7.10)$$

Запишемо оператор Лапласа-Бельтрамі в координатах (s, n) , $n = r/\varepsilon$:

$$\Delta = \frac{1}{1 - \varepsilon n\chi} \left(\varepsilon^{-2}\partial_n(1 - \varepsilon n\chi)\partial_n + \partial_s\left(\frac{1}{1 - \varepsilon n\chi}\partial_s\right) \right), \quad (s, n) \in S \times (-1, 1).$$

Він має зображення

$$\Delta = \varepsilon^{-2}\partial_n^2 - \varepsilon^{-1}\chi(s)\partial_n - n\chi^2(s)\partial_n + \partial_s^2 + \varepsilon P_\varepsilon, \quad (7.11)$$

де P_ε – диференціальний оператор другого порядку щодо змінної s та першого – щодо n , а його коефіцієнти обмежені в Q рівномірно відносно ε .

Підставимо зображення (7.11) та суму $v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2$ до рівняння (7.2). Тоді

$$\begin{aligned} -\partial_n^2 v_0 + V v_0 &= 0, & -\partial_n^2 v_1 + V v_1 &= -\chi\partial_n v_0 - U v_0, \\ -\partial_n^2 v_2 + V v_2 &= -(\chi\partial_n + U)v_1 + (\partial_s^2 - n\chi^2\partial_n - W(\cdot, 0) + \lambda)v_0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

в циліндрі Q , а умови узгодження (7.8) дають

$$u^-(s) = v_0(s, -1), \quad u^+(s) = v_0(s, 1), \quad (7.13)$$

$$\partial_n v_0(s, -1) = 0, \quad \partial_n v_0(s, 1) = 0, \quad (7.14)$$

$$\partial_n v_1(s, -1) = \partial_r u^-(s), \quad \partial_n v_1(s, 1) = \partial_r u^+(s). \quad (7.15)$$

З цих рівностей складемо задачі

$$\begin{cases} -\partial_n^2 v_0 + V(n)v_0 = 0 & \text{в } Q, \\ \partial_n v_0(s, -1) = 0, \quad \partial_n v_0(s, 1) = 0, & s \in S; \end{cases} \quad (7.16)$$

$$\begin{cases} -\partial_n^2 v_1 + V(n)v_1 = -\chi(s)\partial_n v_0 - U(s, n)v_0 & \text{в } Q, \\ \partial_n v_1(s, -1) = \partial_r u^-(s), \quad \partial_n v_1(s, 1) = \partial_r u^+(s), & s \in S, \end{cases} \quad (7.17)$$

які є крайовими задачами в циліндрі Q для “нееліптичного” диференціального оператора з частинними похідними $-\partial_n^2 + V$. Через таке виродження оператора Лапласа відсутня рівномірна резольвентна збіжність операторів H_ε , бо немає класичних еліптичних оцінок для розв’язків v_k через праві частини рівняння.

Надалі ми трактуватимемо ці задачі як крайові задачі на інтервалі $\mathcal{I} = (-1, 1)$ для звичайного диференціального рівняння, які залежать від параметра $s \in S$.

Спершу розглянемо випадок резонансу нульової енергії для $-\frac{d^2}{dn^2} + V$. Тоді існує напівзв'язний стан h , який є сталим поза \mathcal{I} , бо $\text{supp } V \subset \mathcal{I}$. До того ж звуження h на \mathcal{I} — це нетривіальний розв'язком крайової задачі

$$-h'' + Vh = 0 \text{ в } \mathcal{I}, \quad h'(-1) = 0, \quad h'(1) = 0, \quad (7.18)$$

а також $h(-1) = 1$ та $h(1) = \theta$. В цьому разі задача (7.16) має розв'язки вигляду $v_0(s, n) = a_0(s)h(n)$, де a_0 — довільна функція на колі S . Тоді з (7.13) відразу дістаємо $u^- = a_0$ і $u^+ = h(1)a_0 = \theta a_0$. Отже, $v_0(s, n) = u^-(s)h(n)$ та

$$u^+ = \theta u^- \text{ на } \gamma. \quad (7.19)$$

Далі, задача (7.17) може бути несумісною, бо відповідна однорідна задача (7.16) має нетривіальне ядро. Щоб знайти умови існування її розв'язку, перепишемо рівняння (7.17) у вигляді

$$-\partial_n^2 v_1 + V(n)v_1 = -(\chi(s)h'(n) + U(s, n)h(n))u^-(s).$$

Помноживши його на $a(s)h(n)$, $a \in L^2(S)$, і проінтегрувавши на Q , отримаємо

$$\begin{aligned} \int_Q (-\partial_n^2 v_1 + V(n)v_1) a(s)h(n) dn ds = \\ = - \int_Q (\chi(s)h'(n) + U(s, n)h(n))u^-(s)a(s)h(n) dn ds. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Тепер зліва проінтегруємо двічі частинами, врахувавши крайові умови для v_1 і той факт, що h є розв'язком (7.18):

$$\begin{aligned} \int_S \int_{\mathcal{I}} (-\partial_n^2 v_1 + Vv_1) ah dn ds = - \int_S (\partial_n v_1 h - v_1 h') \Big|_{n=-1}^{n=1} a ds - \\ - \int_S \int_{\mathcal{I}} av_1 (-h'' + Vh) dn ds = - \int_S (\theta \partial_r u^+ - \partial_r u^-) a ds. \end{aligned}$$

Формула (7.20) набуває вигляду

$$\int_S (\theta \partial_r u^+ - \partial_r u^-) a ds = \int_S u^- a \int_{\mathcal{I}} (\chi h h' + U h^2) dn ds.$$

З рівності $hh' = \frac{1}{2}(h^2)'$ випливає, що

$$\int_{\mathcal{I}} hh' \, dn = \frac{1}{2}(h^2(1) - h^2(-1)) = \frac{1}{2}(\theta^2 - 1). \quad (7.21)$$

Остаточно для всіх $a \in L^2(S)$ отримуємо

$$\int_S (\theta \partial_r u^+ - \partial_r u^-) a \, ds = \int_S \left(\frac{1}{2}(\theta^2 - 1)\varkappa + \mu \right) u^- a \, ds,$$

де $\mu(s) = \int_{\mathcal{I}} U(s, n) h^2(n) \, dn$. З цієї тотожності маємо рівність

$$\theta \partial_r u^+ - \partial_r u^- = \left(\frac{1}{2}(\theta^2 - 1)\varkappa + \mu \right) u^- \quad \text{на } \gamma, \quad (7.22)$$

яка є необхідною умовою сумісності задачі (7.17). Водночас це умова стрибка нормальної похідної u , бо $\partial_\nu u^\pm = \partial_r u^\pm$ на γ . З іншого боку, коли (7.22) виконується для майже всіх $s \in S$, то задача (7.17) має розв'язок. Це випливає з альтернативи Фредгольма, застосованої до оператора Штурма-Ліувілля $-\frac{d^2}{dr^2} + V$ на \mathcal{I} при фіксованому s . Отже, для λ і u ми дістали задачу

$$-\Delta u + Wu = \lambda u \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \gamma, \quad (7.23)$$

$$u^+ - \theta u^- = 0, \quad \theta \partial_\nu u^+ - \partial_\nu u^- = \left(\frac{1}{2}(\theta^2 - 1)\varkappa + \mu \right) u^- \quad \text{на } \gamma, \quad (7.24)$$

яку можна коротко записати у вигляді спектрального рівняння $\mathcal{H}u = \lambda u$. Нехай λ буде власним значенням \mathcal{H} з власною функцією. Тепер можемо обчислити слід u^- на кривій γ і остаточно знайти $v_0(s, n) = u^-(s)h(n)$. З огляду на другу умову в (7.24) задача (7.17) має розв'язок v_1 , визначений з точністю до доданка $a_1(s)h(n)$. Підпорядкуємо його додатковій умові

$$v_1(s, -1) = 0, \quad s \in S. \quad (7.25)$$

Функцію v_2 виберемо як розв'язок рівняння (7.12), що задовольняє умови

$$v_2(s, -1) = 0, \quad \partial_n v_2(s, -1) = 0, \quad s \in S. \quad (7.26)$$

Така задача Коші має єдиний розв'язок для майже всіх $s \in S$. Зауважимо, що всі розв'язки v_k є гладкими в циліндрі Q , бо гладкими є V , U і \varkappa , а також W в околі кривої γ . Отже, ми побудували всі члени асимптотичних наближень (7.7).

Тепер звернемося до випадку, коли оператор $-\frac{d^2}{dr^2} + V$ не має резонансу нульової енергії. В цьому разі задача (7.18), а тоді і задача (7.16), мають лише тривіальні розв'язки $h = 0$ та $v_0 = 0$. З умови (7.13) відразу випливає, що $u^- = 0$ та $u^+ = 0$ на γ . Отже, ми маємо задачу

$$-\Delta u + Wu = \lambda u \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \gamma, \quad u = 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Припустимо, що λ – власне значення прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$, а u – відповідна власна функція. В цьому разі задача (7.17) набуває вигляду

$$\begin{cases} -\partial_n^2 v_1 + V(n)v_1 = 0 & \text{в } Q, \\ \partial_n v_1(s, -1) = \partial_\nu u^-, & \partial_n v_1(s, 1) = \partial_\nu u^+ \end{cases}$$

і володіє єдиним розв'язком. Тепер підставимо $v_0 = 0$ до рівняння (7.12) і вважатимемо, що v_2 є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} -\partial_n^2 v_2 + V(n)v_2 = -\varkappa(s)\partial_n v_1 + U(s, n)v_1 & \text{в } Q, \\ v_2(s, -1) = 0, & \partial_n v_2(s, -1) = 0, \quad s \in S. \end{cases}$$

Щоб побудувати квазімоди оператора H_ε , нам треба дещо модифікувати отримані вище наближення власної функції

$$\hat{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon, \\ v_0\left(s, \frac{r}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(s, \frac{r}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 v_2\left(s, \frac{r}{\varepsilon}\right) & x = (s, r) \in \omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Ці наближення не належать до області визначення H_ε , бо \hat{v}_ε є розривною на $\partial\omega_\varepsilon$. На рис. 7.4 зображений графік функції ζ , яка є гладкою поза нулем, $\zeta(r) = 1$ для $r \in [0, \beta/2]$ та $\zeta(r) = 0$ на множині $\mathbb{R} \setminus [0, \beta]$. Виберемо β таким, щоб в області $\omega_{2\beta}$ були коректно визначені локальні координати. Введемо функцію

$$\rho_\varepsilon = ([\hat{v}_\varepsilon]_\varepsilon + [\partial_\nu \hat{v}_\varepsilon]_\varepsilon(r - \varepsilon)) \zeta(r - \varepsilon) + ([\hat{v}_\varepsilon]_{-\varepsilon} + [\partial_\nu \hat{v}_\varepsilon]_{-\varepsilon}(r + \varepsilon)) \zeta(-r - \varepsilon). \quad (7.27)$$

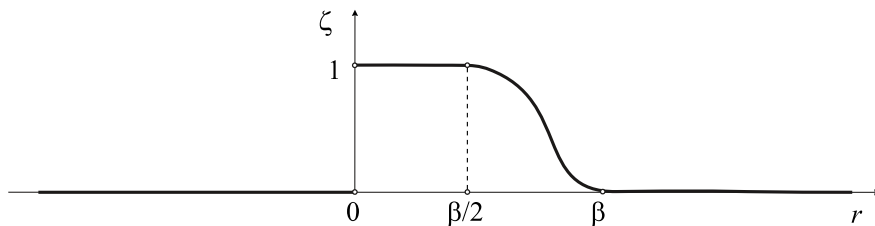


Рис. 7.4: Графік функції ζ .

За побудовою стрибки ρ_ε і $\partial_r \rho_\varepsilon$ на $\partial\omega_\varepsilon$ є такими ж як стрибки як \hat{v}_ε і $\partial_\nu \hat{v}_\varepsilon$ відповідно. Крім того, ρ_ε відмінна від нуля лише на множині $\omega_{\beta+\varepsilon} \setminus \omega_\varepsilon$. Тому функція

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x) - \rho_\varepsilon(x) & \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon, \\ v_0(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon v_1(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 v_2(s, \frac{r}{\varepsilon}) & \text{в } \omega_\varepsilon \end{cases} \quad (7.28)$$

належить до області визначення оператора \mathcal{H}_ε . Крім того,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}_\varepsilon} (|\rho_\varepsilon(x)| + |\Delta \rho_\varepsilon(x)|) \leq c\varepsilon. \quad (7.29)$$

Нерівність (7.27) є наслідком малості стрибків функції \hat{v}_ε та її нормальної похідної на $\partial\omega_\varepsilon$. Справді, скориставшись (7.13)–(7.15), (7.25) і (7.26) у випадку резонансу, матимемо

$$\begin{aligned} [\hat{v}_\varepsilon]_{-\varepsilon} &= v_0(s, -1) - u(s, -\varepsilon) = u^-(s) - u(s, -\varepsilon) = O(\varepsilon), \\ [\hat{v}_\varepsilon]_\varepsilon &= u(s, \varepsilon) - v_0(s, 1) - \varepsilon v_1(s, 1) - \varepsilon^2 v_2(s, 1) = \\ &= u(s, \varepsilon) - \theta u^-(s) + O(\varepsilon) = u(s, \varepsilon) - u^+(s) + O(\varepsilon) = O(\varepsilon), \\ [\partial_\nu \hat{v}_\varepsilon]_{-\varepsilon} &= \varepsilon^{-1} \partial_n v_0(s, -1) + \partial_n v_1(s, -1) - \partial_r u(s, -\varepsilon) = \\ &= \partial_r u^-(s) - \partial_r u(s, -\varepsilon) = O(\varepsilon), \\ [\partial_\nu \hat{v}_\varepsilon]_\varepsilon &= \partial_r u(s, \varepsilon) - \varepsilon^{-1} \partial_n v_0(s, 1) - \partial_n v_1(s, 1) - \varepsilon \partial_n v_2(s, 1) + O(\varepsilon) = \\ &= \partial_r u^+(s) - \partial_r u(s, \varepsilon) + O(\varepsilon) = O(\varepsilon) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тут ми також застосували умову (7.19) та нерівність

$$|u(s, \pm\varepsilon) - u^\pm(s)| + |\partial_r u(s, \pm\varepsilon) - \partial_r u^\pm(s)| \leq c\varepsilon.$$

Зауважимо, що власна функція u є гладкою в односторонніх околах кривої γ . У разі відсутності резонансу, коли $v_0 = 0$ і $u^\pm = 0$, стрибки теж є порядку $O(\varepsilon)$.

Лема 7.3. *Нехай λ – власне значення оператора \mathcal{H} у випадку резонансу чи прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ у разі його відсутності, а u – відповідна власна функція. Тоді пара (λ, v_ε) , де v_ε задана формулою (7.28), є квазімодою оператора H_ε з похибкою $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Доведення. Нехай $r_\varepsilon = (H_\varepsilon - \lambda)v_\varepsilon$. Тоді поза областю ω_ε маємо

$$r_\varepsilon = (-\Delta + W - \lambda)(u - \rho_\varepsilon) = (-\Delta + W - \lambda)\rho_\varepsilon,$$

бо виконується рівняння (7.9). З огляду на (7.29) відразу отримаємо

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon} |r_\varepsilon(x)| \leq c_1 \varepsilon.$$

Нагадаємо також, що ρ_ε має компактний носій. Щоб обчислити залишок r_ε в точках області ω_ε , застосуємо зображення (7.11) для оператора Лапласа

$$\begin{aligned} -\Delta + W(x) + V_\varepsilon(x) &= -\varepsilon^{-2} \partial_n^2 + \varepsilon^{-1} \kappa \partial_n + n \kappa^2 \partial_n - \partial_s^2 - \varepsilon P_\varepsilon + W(s, \varepsilon n) + \\ &+ \varepsilon^{-2} V(n) + \varepsilon^{-1} U(s, n) = \varepsilon^{-2} \ell_0 + \varepsilon^{-1} \ell_1 + \ell_2 + W(s, \varepsilon n) - \varepsilon P_\varepsilon, \end{aligned}$$

де $\ell_0 = -\partial_n^2 + V$, $\ell_1 = \kappa \partial_n + U$ та $\ell_2 = n \kappa^2 \partial_n - \partial_s^2$. Тоді

$$\begin{aligned} r_\varepsilon &= (-\Delta + W + V_\varepsilon - \lambda) v_\varepsilon = (\varepsilon^{-2} \ell_0 + \varepsilon^{-1} \ell_1 + \ell_2 + W(s, \varepsilon n) - \varepsilon P_\varepsilon - \lambda) (v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2) = \\ &= \varepsilon^{-2} \ell_0 v_0 + \varepsilon^{-1} (\ell_0 v_1 + \ell_1 v_0) + (\ell_0 v_2 + \ell_1 v_1 + (\ell_2 + W(s, 0) - \lambda) v_0) + \\ &+ (W(s, \varepsilon n) - W(s, 0)) v_0 + \varepsilon (\ell_1 v_2 + (\ell_2 + W(s, \varepsilon n) - \lambda) (v_1 + \varepsilon v_2) - P_\varepsilon v_\varepsilon) \end{aligned}$$

при $x = (s, \varepsilon n) \in \omega_\varepsilon$. За побудовою квазімод перші три доданки в правій частині дорівнюють нулеві, незалежно від того, чи є резонанс чи він відсутній. Потенціал W є гладким в околі γ , тому $\sup_{x \in \omega_\varepsilon} |r_\varepsilon(x)| \leq c_2 \varepsilon$. Отже,

$$\|(H_\varepsilon - \lambda) v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|r_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq |\omega_{2\beta}|^{1/2} \sup_{\mathbb{R}^2} |r_\varepsilon| \leq c_3 \varepsilon,$$

оскільки $\text{supp } r_\varepsilon \subset \omega_{\beta+\varepsilon} \subset \omega_{2\beta}$ для малих ε . Далі, головний внесок у $L^2(\mathbb{R}^2)$ -норму функції v_ε дає власна функція u . Тому $\|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ для достатньо малих ε , або ж $2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{-1} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq 1$. Нарешті, ми дістаємо нерівність

$$\|(H_\varepsilon - \lambda) v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq c_3 \varepsilon \leq 2c_3 \varepsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{-1} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq c_4 \varepsilon \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

яка означає, що пара (λ, v_ε) є квазімодом H_ε з похибкою $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

7.3 Обґрунтування асимптотики спектрів

Нехай $\{\lambda^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ — послідовність власних значень оператора H_ε , а $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ — відповідна послідовність власних функцій, нормованих умовою $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$. Через χ_ε позначатимемо характеристичну функцію множини $\mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon$.

Лема 7.4. Припустимо, що $\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda$ та $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо в $L^2(\mathbb{R}^2)$ при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$.

(i) На будь-якій обмеженій чи необмеженій області D в \mathbb{R}^2 , замикання якої має порожній перетин з кривою γ , власні функції u_ε збігаються в $W_2^2(D)$ слабо до функції u , яка розв'язком рівняння

$$-\Delta u + Wu = \lambda u \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \gamma. \quad (7.30)$$

(ii) В областях Ω_{in} і Ω_{out} послідовність $\chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon$ збігається до ∇u слабо в L^2 .

(iii) Якщо в околі кривої γ функцію $u_\varepsilon(x)$ трактувати як $u_\varepsilon(s, r)$, то

$$u_\varepsilon(\cdot, -\varepsilon) \rightarrow u^- \quad \text{і} \quad u_\varepsilon(\cdot, \varepsilon) \rightarrow u^+ \quad \text{слабо в } L^2(S).$$

Доведення. (i) Виберемо область D , яка задовольняє умови леми. Тоді для малих ε маємо $D \cap \omega_\varepsilon = \emptyset$. Позаяк носій збурення V_ε лежить в ω_ε , то для будь-якої $\phi \in C_0^\infty(D)$ з рівняння (7.2) випливає, що

$$\int_D \Delta u_\varepsilon \phi \, dx = \int_D (W - \lambda^\varepsilon) u_\varepsilon \phi \, dx.$$

За припущенням права частина має границю при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$, а тому і ліва частина збігається для кожної тестової функції $\phi \in C_0^\infty(D)$, тобто $\Delta u_\varepsilon \rightarrow \Delta u$ слабо в $L^2(D)$. Звідси виводимо, що u_ε збігається до u слабо в $W_2^2(D)$, а отже,

$$\int_D \Delta u \phi \, dx = \int_D (W - \lambda) u \phi \, dx.$$

В наших міркуваннях D довільна область з властивістю $\overline{D} \cap \gamma = \emptyset$, тому насправді ми довели тотожність

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Delta u \phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} (W - \lambda) u \phi \, dx$$

для всіх функцій $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ таких, що $\text{supp } \phi \cap \gamma = \emptyset$. Тому u є розв'язком рівняння (7.30) в області $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$.

(ii) З тотожності

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon} (W - \lambda^\varepsilon) u_\varepsilon \psi \, dx, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

робимо висновок, що сім'я функціоналів $\chi_\varepsilon \Delta u_\varepsilon$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ є обмеженою для кожної функції ψ , бо обмеженою при $\varepsilon \rightarrow 0$ є права частина. Згідно з теоремою Банаха-Штейнгауза маємо $\|\chi_\varepsilon \Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq c_1$, звідки відразу випливає нерівність $\|u_\varepsilon\|_{W_2^2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon)} \leq c_2$. Тепер для довільної $\psi \in C_0^\infty(\Omega_{out})$ дістанемо

$$\int_{\Omega_{out}} (\chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - \nabla u) \psi \, dx = \int_{\text{supp } \psi} (\nabla u_\varepsilon - \nabla u) \psi \, dx \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ з огляду на пункт (i). Отже, $\chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$ слабо в $L^2(\Omega_{out})$, оскільки множина $C_0^\infty(\Omega_{out})$ є щільна в просторі $L^2(\Omega_{out})$. Доведення для Ω_{in} схоже.

(iii) Виберемо функцію-зрізку

$$\zeta_\varepsilon(r) = \begin{cases} (r - \varepsilon)\zeta(r), & \text{коли } r \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

де ζ зображена на рис. 7.4. Нехай a — гладка функція на кривій γ . Помножимо рівняння (7.2) на $a(s)\zeta_\varepsilon(r)$ і проінтегруємо частинами. Врахувавши, що $\zeta_\varepsilon(\varepsilon) = 0$ і $\zeta'_\varepsilon(\varepsilon + 0) = 1$, дістанемо

$$\int_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon a \, d\gamma = \int_{\omega_{\varepsilon,\beta}} (W - \lambda^\varepsilon) u_\varepsilon a \zeta_\varepsilon \, dx - \int_{\omega_{\varepsilon,\beta}} u_\varepsilon \Delta(a \zeta_\varepsilon) \, dx. \quad (7.31)$$

Тут $\omega_{\varepsilon,\beta} = \{x(s,r) : s \in S, \varepsilon < r < \beta\}$ є носієм функції $a \zeta_\varepsilon$. Аналогічно, з рівняння (7.30) отримаємо

$$\int_{\gamma} u^+ a \, d\gamma = \int_{\omega_{0,\beta}} (W - \lambda) u a \zeta_0 \, dx - \int_{\omega_{0,\beta}} u \Delta(a \zeta_0) \, dx,$$

де $\zeta_0(r) = r\zeta(r)$. Послідовність ζ_ε прямує до ζ_0 рівномірно на \mathbb{R} , тому

$$\int_{\omega_{\varepsilon,\beta}} (W - \lambda^\varepsilon) u_\varepsilon a \zeta_\varepsilon \, dx \rightarrow \int_{\omega_{0,\beta}} (W - \lambda) u a \zeta_0 \, dx.$$

Також ми маємо

$$\int_{\omega_{\varepsilon,\beta}} u_\varepsilon \Delta(a \zeta_\varepsilon) \, dx = \int_{\omega_{\frac{\beta}{2},\beta}} u_\varepsilon \Delta(a \zeta_\varepsilon) \, dx + \int_{\omega_{\varepsilon,\frac{\beta}{2}}} u_\varepsilon \Delta(a \zeta_\varepsilon) \, dx,$$

де перший справа інтеграл прямує до

$$\int_{\omega_{\frac{\beta}{2},\beta}} u \Delta(a \zeta_0) \, dx,$$

оскільки $\Delta(a\zeta_\varepsilon) \rightarrow \Delta(a\zeta_0)$ рівномірно на $[\frac{\beta}{2}, \beta]$. Щодо другого інтеграла, то згадавши (7.10), матимемо

$$\Delta(a\zeta_\varepsilon) = (\zeta_\varepsilon \partial_s(a' J^{-1}) + \partial_r(a J \zeta'_\varepsilon)) = J^{-1}((r - \varepsilon) \partial_s(a' J^{-1}) - a \varkappa)$$

на множині $\omega_{\varepsilon, \frac{\beta}{2}}$, бо $\zeta_\varepsilon(r) = r - \varepsilon$ для $r \in [\varepsilon, \frac{\beta}{2}]$. Звідси дістаємо

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{\varepsilon, \frac{\beta}{2}}} u_\varepsilon \Delta(a\zeta_\varepsilon) dx &= \int_\varepsilon^{\frac{\beta}{2}} \int_S u_\varepsilon(s, r) ((r - \varepsilon) \partial_s(a'(s) J^{-1}(s, r)) - a(s) \varkappa(s)) ds dr \rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^{\frac{\beta}{2}} \int_S u(s, r) (r \partial_s(a'(s) J^{-1}(s, r)) - a(s) \varkappa(s)) ds dr = \int_{\omega_{0, \frac{\beta}{2}}} u \Delta(a\zeta_0) dx \end{aligned}$$

при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$, і остаточно

$$\int_{\omega_{\varepsilon, \beta}} u_\varepsilon \Delta(a\zeta_\varepsilon) dx \rightarrow \int_{\omega_{0, \beta}} u \Delta(a\zeta_0) dx. \quad (7.32)$$

Тепер з (7.31) і (7.32) відразу маємо $\int_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon a d\gamma \rightarrow \int_\gamma u^+ a d\gamma$ для всіх $a \in C^\infty(\gamma)$, тобто $u_\varepsilon(\cdot, \varepsilon) \rightarrow u^+$ слабо в $L^2(S)$. Доведення збіжності $u_\varepsilon(\cdot, -\varepsilon)$ є схожим. \square

7.3.1 Доведення у випадку резонансу

Спершу припустимо, що оператор $-\frac{d^2}{dr^2} + V$ володіє резонансом нульової енергії. Введемо два класи пробних функцій. Нехай Ψ_θ – множина функцій ψ з компактними носіями, які двічі диференційовні в $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, обмежені разом зі своїми першими і другими похідними в замиканні областей Ω_{out} і Ω_{in} , а також $\psi^+ = \theta \psi^-$ на γ . Ми також введемо множину $\Phi = \{\phi \in W_2^1(\mathbb{R}^2) : \phi \text{ має компактний носій}\}$. Для власної функції u оператора \mathcal{H} виконується тотожність

$$\int_{\Omega_{out}} \nabla u \nabla \psi dx + \int_{\Omega_{in}} \nabla u \nabla \psi dx + \int_{\mathbb{R}^2} (W - \lambda) u \psi dx + \int_\gamma \Upsilon u^- \psi^- d\gamma = 0 \quad (7.33)$$

для всіх $\psi \in \Psi_\theta$, де $\Upsilon = \frac{1}{2}(\theta^2 - 1)\varkappa + \mu$, а для власної функції u_ε оператора H_ε –

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_\varepsilon \nabla \phi + (W + V_\varepsilon - \lambda^\varepsilon) u_\varepsilon \phi) dx = 0 \quad (7.34)$$

для всіх $\phi \in \Phi$. Ми хочемо перейти до границі при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$ в останній тотожності і довести, що гранична пара (λ, u) задовольняє тотожність (7.33). Проте у

тотожностях (7.34) і (7.33) різні множини пробних функцій. Зокрема, коли $\theta \neq 1$, то множина Ψ_θ не міститься в Φ , бо функції з Ψ_θ є розривними на γ .

Побудуємо сім'ю операторів $R_\varepsilon: \Psi_\theta \rightarrow \Phi$, яка пов'язує два класи пробних функцій. Нехай $h_1 = h_1(n)$ і $h_2 = h_2(s, n)$ — розв'язки задач Коші

$$-h_1'' + Vh_1 = 0, \quad h_1(-1) = 0, \quad h_1'(-1) = 1; \quad (7.35)$$

$$-h_2'' + Vh_2 = \varkappa h_2' + Uh_2, \quad h_2(s, -1) = 0, \quad \partial_n h_2(s, -1) = 0 \quad (7.36)$$

на інтервалі \mathcal{I} відповідно, де h — напівзв'язний стан. Для заданої $\psi \in \Psi_\theta$ ми побудуємо дві функції

$$\psi_0^\varepsilon(s, n) = \psi(s, -\varepsilon) h(n), \quad \psi_1^\varepsilon(s, n) = \partial_r \psi(s, -\varepsilon) h_1(n) - \psi(s, -\varepsilon) h_2(s, n) \quad (7.37)$$

і покладемо

$$\hat{\psi}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{коли } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon, \\ \psi_0^\varepsilon(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon \psi_1^\varepsilon(s, \frac{r}{\varepsilon}), & \text{коли } x \in \omega_\varepsilon. \end{cases}$$

За побудовою функція $\hat{\psi}_\varepsilon$ неперервна на $\gamma_{-\varepsilon}$. Щоб вона належала до простору $W_2^1(\mathbb{R}^2)$, треба усунути розрив на γ_ε . Це, як і раніше, можна зробити за допомогою функції-коректора. Покладемо $R_\varepsilon \psi = \hat{\psi}_\varepsilon + \rho_\varepsilon$, де

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} -[\hat{\psi}_\varepsilon]_\varepsilon \zeta(r - \varepsilon), & \text{коли } x \in \omega_{2\beta} \setminus \omega_\varepsilon, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Очевидно, що $[R_\varepsilon \psi]_\varepsilon = 0$, і тому $R_\varepsilon \psi$ є елементом простору $W_2^1(\mathbb{R}^2)$. Крім того,

$$R_\varepsilon \psi \rightarrow \psi \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Справді, функції ψ_0^ε і ψ_1^ε є обмеженими на множині нескінченно малої міри ω_ε та

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_\varepsilon]_\varepsilon(s) &= \psi(s, \varepsilon) - \psi_0^\varepsilon(s, 1) - \varepsilon \psi_1^\varepsilon(s, 1) = \psi(s, \varepsilon) - \theta \psi(s, -\varepsilon) + O(\varepsilon) \\ &= \psi(s, +0) - \theta \psi(s, -0) + O(\varepsilon) = O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (7.38)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ рівномірно на колі S .

Лема 7.5. Для кожної функції $\psi \in \Psi_\theta$ виконуються рівності

$$\int_Q (\partial_n u_\varepsilon \partial_n \psi_0^\varepsilon + V u_\varepsilon \psi_0^\varepsilon) J_\varepsilon dn ds = \varepsilon \int_Q \varkappa u_\varepsilon \partial_n \psi_0^\varepsilon dn ds, \quad (7.39)$$

$$\begin{aligned} \int_Q (\partial_n u_\varepsilon \partial_n \psi_1^\varepsilon + V u_\varepsilon \psi_1^\varepsilon + U u_\varepsilon \psi_0^\varepsilon) J_\varepsilon dn ds = \\ = \int_S \left(u_\varepsilon(s, -\varepsilon) \partial_r \psi(s, -\varepsilon) (1 + \varepsilon \varkappa(s)) - \right. \\ \left. - \theta^{-1} u_\varepsilon(s, \varepsilon) (\partial_r \psi(s, -\varepsilon) - \Upsilon(s) \psi(s, -\varepsilon)) (1 - \varepsilon \varkappa(s)) \right) ds - \\ - \int_Q \varkappa u_\varepsilon \partial_n \psi_0^\varepsilon dn ds + \varepsilon \int_Q \varkappa u_\varepsilon (\varkappa \partial_n \psi_0^\varepsilon - \partial_n \psi_1^\varepsilon) dn ds, \end{aligned} \quad (7.40)$$

де $J_\varepsilon(s, n) = 1 - \varepsilon n \varkappa(s)$, а функції ψ_k^ε задано в (7.37).

Доведення. Функція $\psi_0^\varepsilon = \psi(s, -\varepsilon) h(n)$ є розв'язком рівняння $-\partial_n^2 v + Vv = 0$ на циліндрі Q , тому

$$\begin{aligned} 0 = \int_Q u_\varepsilon (-\partial_n^2 \psi_0^\varepsilon + V \psi_0^\varepsilon) J_\varepsilon dn ds = - \int_S \psi(s, -\varepsilon) (u_\varepsilon J_\varepsilon h') \Big|_{n=-1}^{n=1} ds + \\ + \int_Q (\partial_n u_\varepsilon \partial_n \psi_0^\varepsilon + V u_\varepsilon \psi_0^\varepsilon) J_\varepsilon dn ds + \int_Q u_\varepsilon \partial_n J_\varepsilon \partial_n \psi_0^\varepsilon dn ds = \\ = \int_Q (\partial_n u_\varepsilon \partial_n \psi_0^\varepsilon + V u_\varepsilon \psi_0^\varepsilon) J_\varepsilon dn ds - \varepsilon \int_Q \varkappa u_\varepsilon \partial_n \psi_0^\varepsilon dn ds, \end{aligned} \quad (7.41)$$

звідки випливає (7.39). Далі, функції h і h_1 — лінійно незалежні розв'язки рівняння в (7.35), тому з рівності Лагранжа $(h_1 h' - h'_1 h) \Big|_{-1}^1 = 0$ дістаємо

$$h'_1(1) = \theta^{-1}, \quad (7.42)$$

оскільки $h(1) = \theta$. Помножимо рівняння в (7.36) на h і проінтегруємо частинами:

$$(h' h_2 - h \partial_n h_2) \Big|_{-1}^1 = \varkappa(s) \int_I h h' dn + \int_I U(s, n) h^2(n) dn.$$

Згадавши (7.21), дістанемо $\theta \partial_n h_2(s, 1) = -\frac{1}{2}(\theta^2 - 1) \varkappa(s) - \mu(s)$, тобто

$$\partial_n h_2(s, 1) = -\theta^{-1} \Upsilon(s). \quad (7.43)$$

З (7.35) і (7.36) випливає, що ψ_1^ε є розв'язком рівняння $-\partial_n^2 v + Vv = -\varkappa \partial_n \psi_0^\varepsilon - U \psi_0^\varepsilon$. Тому справедлива рівність

$$\int_Q u_\varepsilon (-\partial_n^2 \psi_1^\varepsilon + V \psi_1^\varepsilon + U \psi_0^\varepsilon) J_\varepsilon dn ds = - \int_Q \varkappa u_\varepsilon \partial_n \psi_0^\varepsilon J_\varepsilon dn ds. \quad (7.44)$$

З іншого боку, інтегруючи частинами за змінною n і беручи до уваги початкові умови (7.35), (7.36) та рівності (7.42), (7.43), ми знаходимо

$$\begin{aligned}
& - \int_Q u_\varepsilon \partial_n^2 \psi_1^\varepsilon J_\varepsilon \, dn \, ds = \int_Q (J_\varepsilon \partial_n u_\varepsilon - \varepsilon \varkappa u_\varepsilon) \partial_n \psi_1^\varepsilon \, dn \, ds - \\
& - \int_S u_\varepsilon(s, \varepsilon n) J_\varepsilon(s, n) (\partial_r \psi(s, -\varepsilon) h_1'(n) - \psi(s, -\varepsilon) \partial_n h_2(s, n)) \Big|_{n=-1}^{n=1} ds = \\
& = \int_Q (J_\varepsilon \partial_n u_\varepsilon - \varepsilon \varkappa u_\varepsilon) \partial_n \psi_1^\varepsilon \, dn \, ds - \\
& - \int_S \left(\theta^{-1} u_\varepsilon(s, \varepsilon) (\partial_r \psi(s, -\varepsilon) - \Upsilon(s) \psi(s, -\varepsilon)) (1 - \varepsilon \varkappa(s)) - \right. \\
& \quad \left. - u_\varepsilon(s, -\varepsilon) \partial_r \psi(s, -\varepsilon) (1 + \varepsilon \varkappa(s)) \right) ds.
\end{aligned}$$

Щоб отримати формулу (7.40), треба останню рівність підставити до (7.44). \square

Лема 7.6. *Нехай виконуються припущення лемми 7.4. Тоді*

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla (R_\varepsilon \psi) \, dx \rightarrow \int_{\Omega_{out}} \nabla u \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega_{in}} \nabla u \nabla \psi \, dx, \quad (7.45)$$

$$\int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \nabla (R_\varepsilon \psi) + V_\varepsilon u_\varepsilon R_\varepsilon \psi) \, dx \rightarrow \int_\gamma \Upsilon u^- \psi^- \, d\gamma \quad (7.46)$$

при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$ для всіх $\psi \in \Psi_\theta$.

Доведення. Нехай $\psi_\varepsilon = R_\varepsilon \psi$ для деякої $\psi \in \Psi_\theta$. Згадавши зображення градієнта (7.10) в локальних координатах, дістаємо

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon \, dx &= \int_{\Omega_{out}} \chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega_{in}} \chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla \psi \, dx - \\
&- \int_\varepsilon^{2\beta} \int_S [\hat{\psi}_\varepsilon]_\varepsilon \partial_r u_\varepsilon \zeta'(r - \varepsilon) J \, ds \, dr - \int_\varepsilon^{2\beta} \int_S \zeta(r - \varepsilon) \partial_s u_\varepsilon \partial_s [\hat{\psi}_\varepsilon]_\varepsilon J^{-1} \, ds \, dr.
\end{aligned}$$

Тоді справедливість граничного переходу (7.45) випливає з лемми 7.4 (ii) та формули (7.38). Далі ми маємо

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon + V_\varepsilon u_\varepsilon \psi_\varepsilon) \, dx &= \varepsilon^{-1} \int_Q (\partial_n u_\varepsilon \partial_n \psi_0^\varepsilon + V u_\varepsilon \psi_0^\varepsilon) J_\varepsilon \, dn \, ds + \\
&+ \int_Q (\partial_n u_\varepsilon \partial_n \psi_1^\varepsilon + V u_\varepsilon \psi_1^\varepsilon + U u_\varepsilon \psi_0^\varepsilon) J_\varepsilon \, dn \, ds + \varepsilon \int_Q U u_\varepsilon \psi_1^\varepsilon J_\varepsilon \, dn \, ds + \\
&+ \varepsilon^2 \int_Q \partial_s u_\varepsilon \partial_s \psi_\varepsilon J_\varepsilon^{-1} \, dn \, ds. \quad (7.47)
\end{aligned}$$

З леми 7.5 відразу дістаємо

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon + V_\varepsilon u_\varepsilon \psi_\varepsilon) dx &= \int_S \left(u_\varepsilon(s, -\varepsilon) \partial_r \psi(s, -\varepsilon) (1 + \varepsilon \kappa(s)) - \right. \\ &\quad \left. - \theta^{-1} u_\varepsilon(s, \varepsilon) (\partial_r \psi(s, -\varepsilon) - \Upsilon(s) \psi(s, -\varepsilon)) (1 - \varepsilon \kappa(s)) \right) ds + \\ &\quad + \varepsilon \int_Q u_\varepsilon (\kappa^2 \partial_n \psi_0^\varepsilon - \kappa \partial_n \psi_1^\varepsilon + U \psi_1^\varepsilon J_\varepsilon) dn ds + \varepsilon^2 \int_Q \partial_s u_\varepsilon \partial_s \psi_\varepsilon J_\varepsilon^{-1} dn ds. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Для обмеженої в просторі $L^2(Q)$ послідовності $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \left| \int_Q u_\varepsilon(s, \varepsilon n) w_\varepsilon(s, n) dn ds \right| &\leq \left(\int_Q |u_\varepsilon(s, \varepsilon n)|^2 dn ds \right)^{1/2} \|w_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq \\ &\leq c_1 \left(\varepsilon^{-1} \int_{\omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq c_2 \varepsilon^{-1/2}, \end{aligned}$$

оскільки $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$. Ми також маємо

$$\left| \int_Q \partial_s u_\varepsilon \partial_s \psi_\varepsilon J_\varepsilon^{-1} dn ds \right| = \left| \int_Q u_\varepsilon \partial_s (J_\varepsilon^{-1} \partial_s \psi_\varepsilon) dn ds \right| \leq c_3 \varepsilon^{-1/2},$$

бо $\kappa \in C^\infty(\gamma)$ і $\psi \in \Psi_\theta(\mathbb{R}^2)$, а отже, функція $\partial_s (J_\varepsilon^{-1} \partial_s \psi_\varepsilon)$ є обмеженою в Q рівномірно відносно ε . Тоді з рівності (7.48) та леми 7.4 (iii) випливає, що

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon + V_\varepsilon u_\varepsilon \psi_\varepsilon) dx &\rightarrow \\ &\rightarrow \int_S \left(u(s, -0) \partial_r \psi(s, -0) - \theta^{-1} u(s, +0) (\partial_r \psi(s, -0) - \Upsilon(s) \psi(s, -0)) \right) ds = \\ &= \int_\gamma \left(u^- \partial_r \psi^- - \theta^{-1} u^+ (\partial_r \psi^- - \Upsilon \psi^-) \right) d\gamma = \int_\gamma \Upsilon u^- \psi^- d\gamma. \end{aligned}$$

Тут ми також скористалися умовою $u^- = \theta^{-1} u^+$. \square

Тепер ми можемо завершити доведення теореми 7.1. Якщо $\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda$ та $u_\varepsilon \rightarrow u$ слабо в $L^2(\mathbb{R}^2)$ при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$, то для всіх $\psi \in \Psi_\theta$ виконується тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon + (W + V_\varepsilon - \lambda^\varepsilon) u_\varepsilon \psi_\varepsilon) dx &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon dx + \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon + V_\varepsilon u_\varepsilon \psi_\varepsilon) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (W - \lambda^\varepsilon) u_\varepsilon \psi_\varepsilon dx \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\Omega_{out}} \nabla u \nabla \psi dx + \int_{\Omega_{in}} \nabla u \nabla \psi dx + \int_\gamma \Upsilon u^- \psi^- d\gamma + \int_{\mathbb{R}^2} (W - \lambda) u \psi dx, \end{aligned}$$

що є наслідком леми 7.6. Отже, для граничної пари виконується тотожність (7.33). Якщо функція u відмінна від нуля, то вона мусить бути власною функцією оператора \mathcal{H} , що відповідає власному значенню λ . Якщо ж $\lambda \notin \sigma(\mathcal{H})$, то $u = 0$. З огляду на леми 7.3 та 5.2, існує таке власне значення λ^ε оператора H_ε , що виконується нерівність $|\lambda^\varepsilon - \lambda| \leq c_4\varepsilon$ для малих ε і не лише з множини \mathcal{E} .

7.3.2 Доведення при відсутності резонансу

Припустимо тепер, що оператор $-\frac{d^2}{dr^2} + V$ не має резонансу нульової енергії. Зауважимо, що лема 7.4 є справедливою і в цьому випадку. Введемо клас пробних функцій $\Phi_0 = \{\phi \in \Phi: \phi = 0 \text{ на } \gamma\}$. Якщо λ є власним значенням прямої суми $\mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ з власною функцією u , то u належить до множини Φ_0 і виконується тотожність

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla \phi + (W - \lambda)u\phi) dx = 0, \quad \phi \in \Phi_0. \quad (7.49)$$

Тут доведення значно простіше, бо Φ_0 є підмножиною Φ . Покладемо $R_\varepsilon = I$. Міркуючи як в доведенні теореми 7.1, ми переходимо до границі при $\mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0$ в тотожності (7.34) для всіх $\phi \in \Phi_0$ і отримуємо для u тотожність (7.49). Проте ще треба довести, що $u = 0$ на кривій γ .

Лема 7.7. *Якщо виконуються припущення теореми 7.2, то*

$$u_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{слабко в } L^2(S) \text{ при } \mathcal{E} \ni \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доведення. Нехай $\theta_1 = h_1(1)$, де h_1 – розв’язок задачі Коші (7.35). Для функції $\psi \in \Psi_{\theta_1}$ побудуємо послідовність $\psi_\varepsilon(x) = \psi(s, -\varepsilon)h_1(\frac{r}{\varepsilon})$. Тоді сім’я функцій

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi(x) + (\theta_1\psi(s, -\varepsilon) - \psi(s, \varepsilon))\zeta(r - \varepsilon), & \text{коли } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega_\varepsilon, \\ \psi_\varepsilon(x), & \text{коли } x \in \omega_\varepsilon \end{cases}$$

буде належати до множини Φ . Міркуючи так, як у доведенні леми 7.5, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_Q (\partial_n u_\varepsilon \partial_n \psi_\varepsilon + V u_\varepsilon \psi_\varepsilon) J_\varepsilon dn ds &= -h'_1(1) \int_S u_\varepsilon(s, \varepsilon) \psi(s, -\varepsilon) ds + \\ &+ \varepsilon h'_1(1) \int_S \varkappa(s) u_\varepsilon(s, \varepsilon) \psi(s, -\varepsilon) ds + \varepsilon \int_Q \varkappa u_\varepsilon \partial_n \psi_\varepsilon dn ds \end{aligned}$$

замість формули (7.39) при резонансі. Тоді з (7.47) виводимо

$$\int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon + V_\varepsilon u_\varepsilon \psi_\varepsilon) dx = -\varepsilon^{-1} h_1'(1) \int_S u_\varepsilon(s, \varepsilon) \psi(s, -\varepsilon) ds + o(1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. У нерезонансному випадку величина $h_1'(1)$ завжди відмінна від нуля, тому останню рівність можемо переписати так

$$\int_S u_\varepsilon(s, \varepsilon) \psi(s, -\varepsilon) ds = -\frac{\varepsilon}{h_1'(1)} \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon + V_\varepsilon u_\varepsilon \psi_\varepsilon) dx + o(\varepsilon).$$

З тотожності (7.34) та леми 7.4 (ii) відразу випливає оцінка

$$\left| \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon + V_\varepsilon u_\varepsilon \psi_\varepsilon) dx \right| \leq C$$

зі сталою C , незалежною від ε . Отже,

$$\int_S u_\varepsilon(s, \varepsilon) \psi(s, -\varepsilon) ds = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Функція ψ довільна, тому $u_\varepsilon(\cdot, \varepsilon) \rightarrow 0$ слабо в $L^2(S)$. Щоб довести збіжність до нуля слідів $u_\varepsilon(\cdot, -\varepsilon)$, треба для h_1 поставити умови Коші в точці $n = 1$. \square

Скориставшись тепер частиною (iii) леми 7.4 та лемою 7.7, отримаємо $u^\pm = 0$, тобто гранична функція не лише задовольняє тотожність (7.49) для всіх пробних функцій з класу Φ_0 , але й сама належить до цього класу. Завершення доведення теореми 7.2 таке ж, як і у випадку резонансу.

Розділ 8

ОПЕРАТОРИ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ІЗ СИНГУЛЯРНИМИ ВАГОВИМИ ФУНКЦІЯМИ

Для математиків і механіків коливні системи з приєднаними масами були предметом активних досліджень ще з часів Пуассона та Бесселя [190, Ch.2]. Їм присвячено безліч публікацій і продовжують з'являтися нові. Перші дослідження стосувалися властивостей струн і стержнів з приєднаними масами у скінченній чи нескінченній кількості точок. Сучасною математичною мовою автори цих досліджень вивчали коливні властивості одновимірних континуумів, в яких густина маси збурювалася сумами вигляду $\sum_k M_k \delta(x - x_k)$, де δ — функція Дірака (див., наприклад, [191–194] та бібліографію, яка там наведена).

У вищих вимірах моделі коливних систем з δ -функціями у густині маси не завжди мають математичний сенс. Навіть в одновимірному випадку, коли приєднані маси великі, моделі з δ -функціями перестають бути адекватними. Велика приєднана маса спричиняє сильну локальну реакцію системи, і цю зміну у коливаннях не можна описати на дискретній множині — носіях функцій Дірака. Геометрія множини, на якій концентрується маса, теж має вплив на коливний процес З 80-х років минулого століття після публікацій Е. Санчез-Паленсії [195–197] стали популярними реалістичніші і водночас математично складніші моделі з концентрованими масами. Асимптотичний аналіз почали застосовувати до спектральних задач зі збуреннями вагової функції вигляду

$$r_\varepsilon(x) = r_0(x) + \sum_k \varepsilon^{-m_k} p_k \left(\frac{x - x_k}{\varepsilon} \right),$$

де p_k — функції з компактними носіями, а дійсні показники m_k відповідають за кількість маси, яка концентрується в околі точок x_k .

Такі удосконалені моделі активно досліджували протягом останніх сорока років (див. огляд [198]). Пружні системи — струни, стержні, мембрани, пластини, тіла — з сингулярною густиною r_ε вивчали в працях [199–208], де доводили збіжність спектрів для різних значень показників m_k і будували асимптотичні розвинення власних значень та власних функцій. Вплив концентрованих мас на спектральні властивості та форми коливань т. з. густих з'єднань — об'єктів з дуже складною геометрією — був вивчений в [209–211]. Асимптотику власних значень та власних функцій мембран та тіл з багатьма концентрованими масами вздовж границі досліджували в працях [212–218], а мембран та пластин, в яких густина маси збурювалася в околі замкненої кривої — в працях [219–221]. Спектральні задачі на метричних графах, які моделюють пружні мережні конструкції з важкими вузлами-з'єднаннями, вивчали в [222, 223]. В недавній роботі [224] побудовано асимптотику спектру тривимірного оператора Лапласа в тонкій області, яка є малим околom графа, а в околі вершини концентрується додаткова маса.

Спільною ознакою усіх таких спектральних задач є збурена вагова функція r_ε коло спектрального параметра. Це веде до самоспряженої реалізації таких задач у вагових просторах Лебега, які залежать від параметра ε . Сім'ї операторів, що діють у різних просторах, вивчати складно. Виникає питання, як розуміти збіжність таких операторів, а коли такі оператори в якомусь сенсі і збігаються, то чи така збіжність гарантує збіжність їхніх спектрів (див., наприклад, [206, III.1], [225–227]).

У більшості згаданих вище робіт автори будували асимптотики власних значень та власних функцій і обґрунтовували їх, використовуючи метод квазімод. Питання ж збіжності операторів зазвичай не розглядали, а деколи навіть не будували граничного оператора, досліджуючи асимптотичну поведінку лише якоїсь частини спектру.

В цьому розділі ми вивчимо спектральні властивості операторів Штурма-Ліувілля із загальними крайовими умовами і ваговою функцією з δ' -подібним збуренням $\varepsilon^{-2}p(x/\varepsilon)$. Відмовившись від самоспряженості, реалізуємо задачу як сім'ю несамоспряжених матричних операторів \mathcal{A}_ε , що діють в одному гільбертовому просторі, і доведемо їх рівномірну резольвентну збіжність при $\varepsilon \rightarrow 0$. Хоча

усі оператори \mathcal{A}_ε є подібними до самоспряжених, несподіваним став результат, що граничний оператор такою властивістю не володіє. Він є несамоспряженим по суті, бо має кратні власні значення з жордановими ланцюгами довжини 2. Задача є нетривіальним прикладом сім'ї самоспряжених операторів T_ε у змінних гільбертових просторах \mathcal{H}_ε , спектри яких збігаються за Гаусдорфом до спектру несамоспряженого оператора, а граничне розташування власних підпросторів T_ε визначають його кореневі підпростори. Результати розділу опубліковано в [228].

Нехай $I = (a, b)$ — інтервал, що містить початок координат. Введемо також позначення $I_a = (a, 0)$, $I_b = (0, b)$, $I_a^\varepsilon = (a, -\varepsilon)$, $I_b^\varepsilon = (\varepsilon, b)$ та $\mathcal{I} = (-1, 1)$. Вивчимо поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$ власних значень λ^ε та власних функцій y_ε задачі

$$-y_\varepsilon'' + q(x)y_\varepsilon = \lambda^\varepsilon r_\varepsilon(x)y_\varepsilon, \quad x \in I, \quad (8.1)$$

$$y_\varepsilon(a) \cos \alpha + y_\varepsilon'(a) \sin \alpha = 0, \quad (8.2)$$

$$y_\varepsilon(b) \cos \beta + y_\varepsilon'(b) \sin \beta = 0 \quad (8.3)$$

з дійсними α, β та сингулярно збуреною ваговою функцією

$$r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x), & x \in I_a^\varepsilon \cup I_b^\varepsilon, \\ \varepsilon^{-2}p(\varepsilon^{-1}x), & x \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases}$$

Припустимо, що $q, r \in L^\infty(I)$, $p \in L^\infty(\mathcal{I})$ та r, p — строго додатні функції.

Задачу (8.1)–(8.3) для випадку умов Діріхле $y(a) = 0$ і $y(b) = 0$, нульового потенціалу q , а також загальнішого збурення $\varepsilon^{-m}p(\varepsilon^{-1}x)$ вивчали в [202]. Було доведено, що існує кілька якісно різних випадків граничної поведінки спектрів та власних функцій, а саме, $m < 1$, $m = 1$, $1 < m < 2$, $m = 2$ та $m > 2$. Перший з випадків відповідає слабким збуренням, коли приєднана маса зникає в границі, а власні значення та власні функції збігаються до відповідних власних елементів задачі з ваговою функцією r . У випадку $m = 1$, коли в точці $x = 0$ концентрується скінченна маса величини M , то граничною є задача

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda r(x)y, \quad x \in I_a \cup I_b, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \\ y(-0) &= y(+0), \quad y'(+0) - y'(-0) + \lambda M y(0) = 0, \end{aligned}$$

де $M = \int_{-1}^1 p(t) dt$, в якій спектральний параметр λ присутній двічі — в рівнянні та умові спряження. При $m > 1$ перше власне значення володіє асимптотикою

$\lambda_1^\varepsilon = \mu_0 \varepsilon^{m-1} + o(\varepsilon^{m-1})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, де μ_0 — єдине власне значення задачі

$$\begin{aligned} -y'' &= 0, \quad x \in I_a \cup I_b, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \\ y(-0) &= y(+0), \quad y'(+0) - y'(-0) + \lambda M y(0) = 0. \end{aligned}$$

Це власне значення легко обчислити $\mu_0 = \frac{M|a|b}{b-a}$. В разі, коли $m \in (1, 2)$, решта власних значень λ_k^ε , $k \geq 2$, та власних функцій $y_{\varepsilon, k}$ збігаються до власних значень і власних функцій задачі $-y'' = \lambda r y$ в $I_a \cup I_b$, $y(a) = y(0) = y(b) = 0$, тобто прямої суми двох операторів Штурма-Ліувілля з умовами Діріхле на відрізках I_a та I_b . Додана маса нескінченно зростає при $\varepsilon \rightarrow 0$, тому ця вона “перетискає” струну в нулі; в границі усі власні форми коливань, окрім першої, відповідають системі двох незалежних струн.

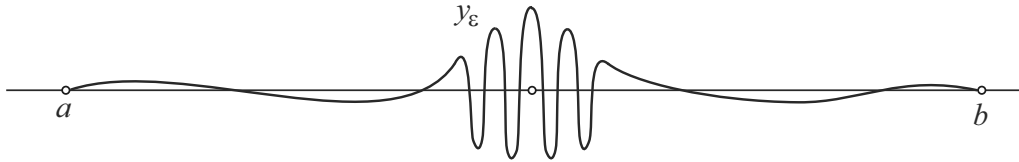


Рис. 8.1: Локальні власні коливання.

Коли ж $m > 2$, то вперше починає домінувати приєднана маса і гранична спектральна задача вже пов’язана з інтервалом $(-\varepsilon, \varepsilon)$, де вона концентрується. Власні значення збуреної задачі, починаючи з другого, прямують до нуля і мають асимптотику $\lambda_k^\varepsilon = \nu_{k-1} \varepsilon^{m-2} + o(\varepsilon^{m-2})$, де ν_k — власні значення задачі Неймана $-w'' = \nu r w$ в \mathcal{I} , $w'(-1) = 0$, $w(1) = 0$. Відповідні власні функції, зображені на рис. 8.1, отримали назву *локальних власних коливань*. Такі коливання локалізуються в околі приєднаної маси, де вони близькі до власних функцій $w(x/\varepsilon)$ задачі Неймана, і зникають поза ним. Іншими словами, основна енергія власних коливань, порахована в нормі простору W_2^1 , концентрується на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

В усіх згаданих випадках були побудовані та обґрунтовані повні асимптотичні розвинення власних значень. Проте випадок $m = 2$ залишився фактично не дослідженим, бо граничний оператор не був знайдений. Тому в цьому розділі ми звернемося до δ' -подібних збурень вагової функції, коли $m = 2$, що відповідає загальному контексту дисертаційної роботи.

8.1 Оператори Штурма-Ліувілля з δ' -подібним збуренням вагової функції

Надалі через $L_2(h, K)$ позначатимемо ваговий простір Лебега

$$\|f\|_{L_2(h,K)} = \left(\int_K h(x)|f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

з додатна вагою h . Через $\ell_a\phi = 0$ та $\ell_b\phi = 0$ коротко позначатимемо крайові умови (8.2) та (8.3) відповідно. Для кожної пари дійсних α і β задача (8.1)–(8.3) має самоспряжену реалізацію у просторі $L_2(r_\varepsilon, I)$. Розглянемо диференціальний вираз $\tau(\phi) = -\phi'' + q\phi$ і введемо оператор T_ε , що діє за правилом $T_\varepsilon\phi = r_\varepsilon^{-1}\tau(\phi)$ на області визначення $\text{dom } T_\varepsilon = \{\phi \in W_2^2(I) : \ell_a\phi = 0, \ell_b\phi = 0\}$. Спектри операторів T_ε є дійсними, дискретними і простими. Зауважимо, що вага r_ε сингулярно залежить від малого параметра, тому геометрія просторів $L_2(r_\varepsilon, I)$ сильно міняється при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сингулярність ваги можна обійти у дослідженні, реалізувавши задачу (8.1)–(8.3) як сім'ю матричних несамоспряжених операторів, що діють в одному гільбертовому просторі. Введемо функцію $w_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(\varepsilon t)$, де $t = x/\varepsilon$ — нова допоміжна змінна. Тоді задачу можна записати у вигляді

$$-y_\varepsilon'' + q(x)y_\varepsilon = \lambda^\varepsilon r(x)y_\varepsilon, \quad x \in I_a^\varepsilon, \quad \ell_a y_\varepsilon = 0, \quad (8.4)$$

$$-w_\varepsilon'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon t)w_\varepsilon = \lambda^\varepsilon p(t)w_\varepsilon, \quad t \in \mathcal{I}, \quad (8.5)$$

$$-y_\varepsilon'' + q(x)y_\varepsilon = \lambda^\varepsilon r(x)y_\varepsilon, \quad x \in I_b^\varepsilon, \quad \ell_b y_\varepsilon = 0 \quad (8.6)$$

з умовами спряження

$$y_\varepsilon(-\varepsilon) = w_\varepsilon(-1), \quad y_\varepsilon(\varepsilon) = w_\varepsilon(1), \quad (8.7)$$

$$\varepsilon y_\varepsilon'(-\varepsilon) = w_\varepsilon'(-1), \quad \varepsilon y_\varepsilon'(\varepsilon) = w_\varepsilon'(1). \quad (8.8)$$

Нехай \mathring{A}_a і \mathring{A}_b — оператори в просторах $L_2(r, I_a)$ і $L_2(r, I_b)$ відповідно такі, що

$$\mathring{A}_a\phi = r^{-1}\tau(\phi), \quad \text{dom } \mathring{A}_a = \{\phi \in W_2^2(I_a) : \ell_a\phi = 0\},$$

$$\mathring{A}_b\phi = r^{-1}\tau(\phi), \quad \text{dom } \mathring{A}_b = \{\phi \in W_2^2(I_b) : \ell_b\phi = 0\}.$$

Введемо в $L_2(p, \mathcal{I})$ оператор $\mathring{B} = -p^{-1}\frac{d^2}{dt^2}$ з областю $\text{dom } \mathring{B} = W_2^2(\mathcal{I})$, а також його потенціальне збурення $\mathring{B}_\varepsilon = \mathring{B} + \varepsilon^2\frac{q(\varepsilon t)}{p(t)}$.

В просторі $\mathcal{L} = L_2(r, I_a) \times L_2(p, \mathcal{I}) \times L_2(r, I_b)$ розглянемо матричний оператор

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathring{A}_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathring{B}_\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \mathring{A}_b \end{pmatrix}$$

з областю визначення

$$\text{dom } \mathcal{A}_\varepsilon = \{(\phi_a, \psi, \phi_b) \in \text{dom } \mathring{A}_a \times \text{dom } \mathring{B}_\varepsilon \times \text{dom } \mathring{A}_b :$$

$$\phi_a(-\varepsilon) = \psi(-1), \quad \phi_b(\varepsilon) = \psi(1), \quad \varepsilon\phi'_a(-\varepsilon) = \psi'(-1), \quad \varepsilon\phi'_b(\varepsilon) = \psi'(1)\}.$$

Легко перекоонатися, що цей оператор несамоспряжений. Спектральне рівняння $(\mathcal{A}_\varepsilon - \lambda^\varepsilon)Y_\varepsilon = 0$ дещо відрізняється від задачі (8.4)–(8.8). Записавши вектор Y_ε у вигляді $(y_a^\varepsilon, w_\varepsilon, y_b^\varepsilon)$, бачимо, що y_a^ε — це розв'язок рівняння (8.4) на усьому інтервалі I_a , а не лише на I_a^ε . Аналогічно, y_b^ε є розв'язком рівняння (8.6) на інтервалі I_b . Так ми уникнули залежності операторів \mathring{A}_a і \mathring{A}_b від параметра ε , яка тут є несуттєвою. Розв'язки y_a^ε та y_b^ε однозначно продовжуються на інтервали I_a та I_b відповідно, тому продовження не впливає на спектр оператор \mathcal{A}_ε .

Лема 8.1. *Оператори \mathcal{A}_ε і T_ε мають однакові спектри, $\sigma(\mathcal{A}_\varepsilon) = \sigma(T_\varepsilon)$.*

Доведення. Зафіксуємо додатне ε і доведемо, що резольвентні множини $\rho(\mathcal{A}_\varepsilon)$ та $\rho(T_\varepsilon)$ збігаються. Для $\zeta \in \rho(T_\varepsilon)$ розглянемо рівняння $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)Y = F$ з правою частиною F з простору \mathcal{L} . За вектором $F = (f_a, f_0, f_b)$ побудуємо функцію

$$f(x) = \begin{cases} f_a(x), & \text{коли } x \in I_a^\varepsilon, \\ f_0(x/\varepsilon), & \text{коли } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ f_b(x), & \text{коли } x \in I_b^\varepsilon, \end{cases}$$

яка належить до $L_2(r_\varepsilon, I)$. За припущенням рівняння $(T_\varepsilon - \zeta)y = f$ має єдиний розв'язок для кожного $f \in L_2(r_\varepsilon, I)$ і є операторним записом задачі

$$-y'' + qy - \zeta ry = rf_a \quad \text{в } I_a^\varepsilon, \quad \ell_a y = 0, \quad (8.9)$$

$$-\varepsilon^2 y'' + \varepsilon^2 qy - \zeta py = pf_0 \quad \text{в } (-\varepsilon, \varepsilon), \quad (8.10)$$

$$-y'' + qy - \zeta ry = rf_b \quad \text{в } I_b^\varepsilon, \quad \ell_b y = 0, \quad (8.11)$$

$$[y]_{-\varepsilon} = 0, \quad [y]_\varepsilon = 0, \quad [y']_{-\varepsilon} = 0, \quad [y']_\varepsilon = 0. \quad (8.12)$$

Через y_a позначимо продовження y з I_a^ε на I_a як розв'язку диференціального рівняння (8.9). Таке продовження можливе, бо права частина f_a визначена на усьому інтервалі I_a , і воно однозначне. Схоже продовжимо y з I_b^ε до розв'язку y_b на I_b . Тоді вектор $Y(x) = (y_a(x), y(x/\varepsilon), y_b(x))$ належить до $\text{dom } \mathcal{A}_\varepsilon$ і є розв'язком рівняння $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)Y = F$. Цей розв'язок єдиний, бо припустивши протилежне, отримаємо суперечність з єдиністю розв'язку y задачі (8.9)–(8.12). Отже, $\rho(\mathcal{A}_\varepsilon) \subset \rho(T_\varepsilon)$.

Тепер припустимо, що $\zeta \in \rho(\mathcal{A}_\varepsilon)$. Доведемо, що рівняння $(T_\varepsilon - \zeta)y = f$ має єдиний розв'язок для кожної правої частини $f \in L_2(r_\varepsilon, I)$. Для заданого f побудуємо вектор $F = (f_a(x), f(\varepsilon t), f_b(x))$ з простору \mathcal{L} , де f_a та f_b — звуження f на I_a та I_b відповідно. Тоді задача

$$\begin{aligned} -\phi_a'' + q\phi_a - \zeta r\phi_a &= rf_a \quad \text{в } I_a, & \ell_a\phi_a &= 0, \\ -\psi'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon \cdot)\psi - \zeta p\psi &= hf(\varepsilon \cdot) \quad \text{в } \mathcal{I}, \\ -\phi_b'' + q\phi_b - \zeta r\phi_b &= rf_b \quad \text{в } I_b, & \ell_b\phi_b &= 0, \\ \phi_a(-\varepsilon) &= \psi(-1), \quad \phi_b(\varepsilon) = \psi(1), & \varepsilon\phi_a'(-\varepsilon) &= \psi'(-1), \quad \varepsilon\phi_b'(\varepsilon) = \psi'(1). \end{aligned}$$

володіє єдиним розв'язком $Y = (\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)^{-1}F$. Якщо $Y = (\phi_a, \psi, \phi_b)$, то функція

$$y(x) = \begin{cases} \phi_a(x), & \text{коли } x \in I_a^\varepsilon, \\ \psi(x/\varepsilon), & \text{коли } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ \phi_b(x), & \text{коли } x \in I_b^\varepsilon \end{cases}$$

є розв'язком задачі (8.9)–(8.12). Спектр оператора T_ε дискретний, тому існування єдиного розв'язку рівняння $(T_\varepsilon - \zeta)y = f$ для всіх $f \in L_2(r_\varepsilon, I)$ гарантує, що ζ є точкою резольвентної множини $\rho(T_\varepsilon)$, а отже, $\rho(T_\varepsilon) \subset \rho(\mathcal{A}_\varepsilon)$. Лему доведено. \square

Доведемо, що сім'я матричних операторів \mathcal{A}_ε збігається в рівномірній резольвентній топології. Для цього спершу опишемо оператор, який буде границею. Нехай B — звуження оператора \mathring{B} на область

$$\text{dom } B = \{\psi \in \text{dom } \mathring{B} : \psi'(-1) = 0, \psi'(1) = 0\}.$$

Введемо матричний оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathring{A}_a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & \mathring{A}_b \end{pmatrix}$$

в просторі \mathcal{L} , який діє на області визначення

$$\text{dom } \mathcal{A} = \{(\phi_a, \psi, \phi_b) \in \text{dom } \mathring{A}_a \times \text{dom } B \times \text{dom } \mathring{A}_b : \phi_a(0) = \psi(-1), \phi_b(0) = \psi(1)\}.$$

Він пов'язаний зі спектральною задачею

$$-u'' + q(x)u = \lambda r(x)u, \quad x \in I_a, \quad \ell_a u = 0, \quad (8.13)$$

$$-w'' = \lambda p(t)w, \quad t \in \mathcal{I}, \quad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0, \quad (8.14)$$

$$-v'' + q(x)v = \lambda r(x)v \quad x \in I_b, \quad \ell_b v = 0, \quad (8.15)$$

$$u(0) = w(-1), \quad v(0) = w(1) \quad (8.16)$$

яку надалі називатимемо *граничною*.

Теорема 8.1. *Сім'я операторів \mathcal{A}_ε збігається до \mathcal{A} при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності. Для кожного $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ виконується нерівність*

$$\|\mathbf{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon) - \mathbf{R}_\zeta(\mathcal{A})\| \leq c\sqrt{\varepsilon}, \quad (8.17)$$

з незалежною від ε сталою c .

Наведемо означення операторів, які далі використовуватимемо в доведенні.

- Оператори $T_a^\varepsilon(\zeta)$, $T_b^\varepsilon(\zeta)$, $T_a(\zeta)$ і $T_b(\zeta)$. Оснастимо область $\text{dom } \mathring{B}$ нормою графіка, яка в цьому разі є нормою в $W_2^2(\mathcal{I})$. Оператор $T_a^\varepsilon(\zeta): \text{dom } \mathring{B} \rightarrow L_2(r, I_a)$ діє за правилом $T_a^\varepsilon(\zeta)\psi = u_a$, де u_a — розв'язок задачі

$$-u'' + qu - \zeta ru = 0, \quad x \in I_a, \quad \ell_a u = 0, \quad u(-\varepsilon) = \psi(-1) \quad (8.18)$$

для заданих $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ і $\psi \in \text{dom } \mathring{B}$. Аналогічно, оператор $T_b^\varepsilon(\zeta): \text{dom } \mathring{B} \rightarrow L_2(r, I_b)$ розв'язує задачу

$$-v'' + qv - \zeta rv = 0, \quad x \in I_b, \quad v(\varepsilon) = \psi(1), \quad \ell_b v = 0. \quad (8.19)$$

Через $T_a(\zeta)$ і $T_b(\zeta)$ позначатимемо оператори $T_a^\varepsilon(\zeta)$ і $T_b^\varepsilon(\zeta)$ при $\varepsilon = 0$.

- Оператори $S_a^\varepsilon(\zeta)$ і $S_b^\varepsilon(\zeta)$. Области $\text{dom } \mathring{A}_a$ та $\text{dom } \mathring{A}_b$ оснастимо нормами графіків, які еквівалентні нормам у просторах $W_2^2(I_a)$ та $W_2^2(I_b)$ відповідно.

Тоді для $\phi \in \text{dom } \mathring{A}_b$ та $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ оператор $S_a^\varepsilon(\zeta): \text{dom } \mathring{A}_a \rightarrow L_2(p, \mathcal{I})$ визначимо так $S_a^\varepsilon(\zeta)\phi = w_a$, де w_a є розв'язком задачі

$$-w'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon \cdot)w = \zeta p w, \quad t \in \mathcal{I}, \quad w'(-1) = \phi'(-\varepsilon), \quad w'(1) = 0. \quad (8.20)$$

Аналогічно, оператор $S_b^\varepsilon(\zeta): \text{dom } \mathring{A}_b \rightarrow L_2(p, \mathcal{I})$ розв'язує задачу

$$-w'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon \cdot)w = \zeta p w, \quad t \in \mathcal{I}, \quad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = \phi'(\varepsilon) \quad (8.21)$$

для заданих $\phi \in \text{dom } \mathring{A}_a$ та $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

- *Оператор B_ε .* Цей оператор є звуженням \mathring{B}_ε на область

$$\text{dom } B_\varepsilon = \{\psi \in \text{dom } \mathring{B}_\varepsilon: \psi'(-1) = 0, \quad \psi'(1) = 0\}.$$

- *Оператори $A_a^\varepsilon, A_b^\varepsilon, A_a$ і A_b .* Оператори A_a^ε та A_b^ε є звуженнями \mathring{A}_a і \mathring{A}_b на $\text{dom } A_a^\varepsilon = \{\phi \in \text{dom } \mathring{A}_a: \phi(-\varepsilon) = 0\}$ і $\text{dom } A_b^\varepsilon = \{\phi \in \text{dom } \mathring{A}_b: \phi(\varepsilon) = 0\}$ відповідно. Через A_a і A_b позначаємо оператори A_a^ε і A_b^ε при $\varepsilon = 0$.

Побудуємо резольвенти операторів \mathcal{A}_ε і \mathcal{A} в явному вигляді. Нехай $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Оператори $T_a^\varepsilon(\zeta), T_b^\varepsilon(\zeta), S_a^\varepsilon(\zeta)$ і $S_b^\varepsilon(\zeta)$ коректно визначені для таких ζ і до того ж є компактними. Розв'яжемо рівняння $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)Y = F$ для заданої правої частини $F = (f_a, f_0, f_b) \in \mathcal{L}$. Компонента ϕ_a вектора $Y = (\phi_a, \psi, \phi_b)$ є розв'язком задачі

$$-\phi'' + q\phi - \zeta r\phi = r f_a, \quad x \in I_a, \quad \ell_a \phi = 0, \quad \phi(-\varepsilon) = \psi(-1).$$

Подамо цей розв'язок як суму розв'язку неоднорідного рівняння з однорідними крайовими умовами та розв'язку задачі (8.18), тобто $\phi_a = R_\zeta(A_a^\varepsilon)f_a + T_a^\varepsilon(\zeta)\psi$. Схожими міркуваннями дістаємо $\phi_b = R_\zeta(A_b^\varepsilon)f_b + T_b^\varepsilon(\zeta)\psi$. Середня компонента ψ вектора Y — це розв'язок задачі Неймана

$$-\psi'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon \cdot)\psi - \zeta p\psi = h f_0 \quad \text{в } \mathcal{I}, \quad \psi'(-1) = \varepsilon \phi'_a(-\varepsilon), \quad \psi'(1) = \varepsilon \phi'_b(\varepsilon),$$

який має зображення $\psi = R_\zeta(B_\varepsilon)f_0 + \varepsilon S_a^\varepsilon(\zeta)\phi_a + \varepsilon S_b^\varepsilon(\zeta)\phi_b$. Отже,

$$\begin{aligned} \phi_a - T_a^\varepsilon(\zeta)\psi &= R_\zeta(A_a^\varepsilon)f_a, \\ -\varepsilon S_a^\varepsilon(\zeta)\phi_a + \psi - \varepsilon S_b^\varepsilon(\zeta)\phi_b &= R_\zeta(B_\varepsilon)f_0, \\ -T_b^\varepsilon(\zeta)\psi + \phi_b &= R_\zeta(A_b^\varepsilon)f_b. \end{aligned}$$

Звідси відразу дістаємо $Y = \mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1}\mathcal{R}_\varepsilon(\zeta)F$, де

$$\mathcal{R}_\varepsilon(\zeta) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\zeta(A_a^\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\zeta(B_\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_\zeta(A_b^\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (8.22)$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta) = \begin{pmatrix} E & -T_a^\varepsilon(\zeta) & 0 \\ -\varepsilon S_a^\varepsilon(\zeta) & E & -\varepsilon S_b^\varepsilon(\zeta) \\ 0 & -T_b^\varepsilon(\zeta) & E \end{pmatrix}, \quad (8.23)$$

а E — тотожний оператор у відповідному просторі. Отже,

$$\mathcal{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon) = \mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1}\mathcal{R}_\varepsilon(\zeta). \quad (8.24)$$

Те, що оператор $\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)$ є оборотним, ми доведемо далі.

Тепер побудуємо резольвенту граничного оператора \mathcal{A} . Розглянемо рівняння $(\mathcal{A} - \zeta)Y = F$ для $F \in \mathcal{L}$. Нехай $Y = (\phi_a, \psi, \phi_b)$ і $F = (f_a, f_0, f_b)$. Тоді в координатному зображенні маємо

$$(\mathring{A}_a - \zeta)\phi_a = f_a, \quad (B - \zeta)\psi = f_0, \quad (\mathring{A}_b - \zeta)\phi_b = f_b.$$

Зрозуміло, що $\psi = \mathcal{R}_\zeta(B)f_0$. Щодо функцій ϕ_a і ϕ_b , то вони є розв'язками задач

$$\begin{aligned} -\phi'' + q\phi - \zeta r\phi &= r f_a, & x \in I_a, & \quad \ell_a\phi = 0, & \quad \phi(0) = \psi(-1); \\ -\phi'' + q\phi - \zeta r\phi &= r f_b, & x \in I_b, & \quad \phi(0) = \psi(-1), & \quad \ell_b\phi = 0 \end{aligned}$$

відповідно. Міркуючи як при побудові резольвенти \mathcal{A}_ε , знаходимо

$$\phi_a = \mathcal{R}_\zeta(A_a)f_a + T_a(\zeta)\mathcal{R}_\zeta(B)f_0, \quad \phi_b = \mathcal{R}_\zeta(A_b)f_b + T_b(\zeta)\mathcal{R}_\zeta(B)f_0.$$

Отже, резольвента оператора \mathcal{A} має матричне зображення

$$\mathcal{R}_\zeta(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\zeta(A_a) & T_a(\zeta)\mathcal{R}_\zeta(B) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\zeta(B) & 0 \\ 0 & T_b(\zeta)\mathcal{R}_\zeta(B) & \mathcal{R}_\zeta(A_b) \end{pmatrix}. \quad (8.25)$$

Щоб оцінити норму різниці резольвент, спершу доведемо деякі твердження.

Лема 8.2. *Оператори A_a^ε , A_b^ε та B_ε збігаються при $\varepsilon \rightarrow 0$ до операторів A_a , A_b та B відповідно в рівномірній резольвентній топології. Крім того,*

$$\|\mathbf{R}_\zeta(A_a^\varepsilon) - \mathbf{R}_\zeta(A_a)\| \leq C_1\sqrt{\varepsilon}, \quad \|\mathbf{R}_\zeta(A_b^\varepsilon) - \mathbf{R}_\zeta(A_b)\| \leq C_2\sqrt{\varepsilon}, \quad (8.26)$$

$$\|\mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon) - \mathbf{R}_\zeta(B)\| \leq C_3\varepsilon^2, \quad (8.27)$$

де сталі C_k не залежать від ε .

Доведення. Зафіксуємо $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ та порівняємо L_2 -норми функцій $u_\varepsilon = \mathbf{R}_\zeta(A_b^\varepsilon)f$, $u = \mathbf{R}_\zeta(A_b)f$ для заданого $f \in L_2(r, I_b)$. Позаяк u_ε та u розв'язують задачі

$$\begin{aligned} -u_\varepsilon'' + qu_\varepsilon - \zeta ru_\varepsilon &= rf, & x \in I_b, & \quad u_\varepsilon(\varepsilon) = 0, \quad \ell_b u_\varepsilon = 0; \\ -u'' + qu - \zeta ru &= rf, & x \in I_b, & \quad u(0) = 0, \quad \ell_b u = 0, \end{aligned}$$

то вони пов'язані рівністю $u_\varepsilon(x) = u(x) - \frac{u(\varepsilon)}{z(\varepsilon)} z(x)$ на I_b , де z — розв'язок задачі

$$-z'' + qz - \zeta rz = 0, \quad x \in I_b, \quad z(0) = 1, \quad \ell_b z = 0. \quad (8.28)$$

А оскільки $|u(\varepsilon)| = \left| \int_0^\varepsilon u'(x) dx \right| \leq c_3\sqrt{\varepsilon} \|u\|_{W_2^1(I_b)}$ і $z(\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L_2(r, I_b)} \leq \frac{|u(\varepsilon)|}{|z(\varepsilon)|} \|z\|_{L_2(r, I_b)} \leq c_1|u(\varepsilon)| \leq c_2\sqrt{\varepsilon} \|u\|_{W_2^1(I_b)}.$$

Тепер зауважимо, що $\mathbf{R}_\zeta(A_b)$ є обмеженим оператором з $L_2(r, I_b)$ в область значення A_b з нормою графіка. А оскільки ця область є підпростором в $W_2^1(I_b)$, то існує незалежна від f стала c_4 , що $\|u\|_{W_2^1(I_b)} \leq c_4\|f\|_{L_2(r, I_b)}$. Отже,

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L_2(r, I_b)} = \|(\mathbf{R}_\zeta(A_b^\varepsilon) - \mathbf{R}_\zeta(A_b))f\|_{L_2(r, I_b)} \leq C_2\sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L_2(r, I_b)},$$

що і доводить рівномірну резольвентну збіжність $A_b^\varepsilon \rightarrow A_b$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ і відповідну оцінку в (8.26). Доведення для операторів A_a^ε є схожим.

Звернемося до операторів B_ε і спершу встановимо нерівність $\|\mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon)\| \leq c$ для всіх ε достатньо малих. Функція $w_\varepsilon = \mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon)g$ є розв'язком задачі

$$-w_\varepsilon'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon \cdot) w_\varepsilon - \zeta p w_\varepsilon = pg \quad \text{в } \mathcal{I}, \quad w_\varepsilon'(-1) = 0, \quad w_\varepsilon'(1) = 0$$

для заданої правої частини $g \in L_2(p, \mathcal{I})$. Нагадаємо, що q та p є обмеженими в I та \mathcal{I} відповідно, а p є рівномірно додатна на I . Тому маємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon)g\|_{L_2(p, \mathcal{I})} &= \|\mathbf{R}_\zeta(B)(g - \varepsilon^2 q(\varepsilon \cdot) p^{-1} w_\varepsilon)\|_{L_2(p, \mathcal{I})} \leq \|\mathbf{R}_\zeta(B)g\|_{L_2(p, \mathcal{I})} + \\ &+ \varepsilon^2 \|q\|_{L^\infty(I)} \|p^{-1}\|_{L^\infty(\mathcal{I})} \|w_\varepsilon\|_{L_2(p, \mathcal{I})} \leq c_0 \|g\|_{L_2(p, \mathcal{I})} + c_1 \varepsilon^2 \|\mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon)g\|_{L_2(p, \mathcal{I})}. \end{aligned}$$

Отже, для достатньо малих ε виконується нерівність

$$\|\mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon)g\|_{L_2(p,\mathcal{I})} \leq \frac{c_0}{1 - c_1\varepsilon^2} \|g\|_{L_2(p,\mathcal{I})} \leq c\|g\|_{L_2(p,\mathcal{I})}. \quad (8.29)$$

Далі покладемо $w = \mathbf{R}_\zeta(B)g$. Тоді різниця $s_\varepsilon = w_\varepsilon - w$ є розв'язком задачі

$$-s_\varepsilon'' - \zeta p(t)s_\varepsilon = -\varepsilon^2 q(\varepsilon t)w_\varepsilon, \quad t \in \mathcal{I}, \quad s_\varepsilon'(-1) = 0, \quad s_\varepsilon'(1) = 0.$$

З огляду на оцінку (8.29) для резольвенти оператора B_ε матимемо

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon) - \mathbf{R}_\zeta(B))g\|_{L_2(p,\mathcal{I})} &= \|s_\varepsilon\|_{L_2(p,\mathcal{I})} \leq c_2\varepsilon^2 \|w_\varepsilon\|_{L_2(p,\mathcal{I})} = \\ &= c_2\varepsilon^2 \|\mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon)g\|_{L_2(p,\mathcal{I})} \leq c_3\varepsilon^2 \|g\|_{L_2(p,\mathcal{I})}, \end{aligned}$$

що завершує доведення. □

Лема 8.3. (i) Для кожного $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ справедливі нерівності

$$\|T_a^\varepsilon(\zeta) - T_a(\zeta)\| \leq c\varepsilon, \quad \|T_b^\varepsilon(\zeta) - T_b(\zeta)\| \leq c\varepsilon$$

зі сталою c , яка не залежить від ε .

(ii) Існує така стала C , що $\|S_a^\varepsilon(\zeta)\| + \|S_b^\varepsilon(\zeta)\| \leq C$.

Доведення. (i) Покажемо, що оператори $T_b^\varepsilon(\zeta)$ збігаються за нормою до $T_b(\zeta)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Доведення для $T_a^\varepsilon(\zeta)$ є схожим. Нехай $u_\varepsilon = T_b^\varepsilon(\zeta)\psi$ — розв'язок задачі (8.19) для заданого $\psi \in \text{dom } \mathring{B}$. Тоді $u_\varepsilon(x) = \frac{\psi(1)}{z(\varepsilon)} z(x)$ на I_a , де функція z визначена задачею (8.28). Якщо $u = T_b(\zeta)\psi$, то маємо $u = \psi(1)z$. Отже,

$$\begin{aligned} \|(T_b^\varepsilon(\zeta) - T_b(\zeta))\psi\|_{L_2(r,I_b)} &= \left\| \frac{\psi(1)}{z(\varepsilon)} z - \psi(1)z \right\|_{L_2(r,I_b)} \leq \\ &\leq \left| \frac{z(\varepsilon) - 1}{z(\varepsilon)} \right| |\psi(1)| \|z\|_{L_2(r,I_b)} \leq c_1\varepsilon \|\psi\|_{W_2^2(\mathcal{I})}, \end{aligned}$$

бо z неперервно диференційовна та $z(0) = 1$. Нагадаємо, що $\text{dom } \mathring{B} = W_2^2(\mathcal{I})$.

(ii) Для $\phi \in \text{dom } \mathring{A}_b$ функція $w_\varepsilon = S_b^\varepsilon(\zeta)\phi$ є розв'язком задачі (8.21), який задовольняє нерівність $\|w_\varepsilon\|_{L_2(p,\mathcal{I})} \leq c_2 |\phi'(\varepsilon)|$. Справді, згідно з лемою 8.2 резольвенти $\mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon)$, а також оператор сліду $j_\varepsilon: \text{dom } \mathring{A}_b \rightarrow \mathbb{C}$, $j_\varepsilon\phi = \phi'(\varepsilon)$, рівномірно обмежені відносно ε . Тому $\|S_b^\varepsilon(\zeta)\phi\|_{L_2(p,\mathcal{I})} = \|w_\varepsilon\|_{L_2(p,\mathcal{I})} \leq C\|\phi\|_{W_2^2(I_b)}$. Таке ж доведення справедливе і для $S_a^\varepsilon(\zeta)$. □

Тепер доведемо теорему 8.1. З огляду на лему 8.3 сім'я матричних операторів $\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)$, задана в (8.23), збігається за нормою до оператора

$$\mathcal{H}(\zeta) = \begin{pmatrix} E & -T_a(\zeta) & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & -T_b(\zeta) & E \end{pmatrix}.$$

До того ж справедлива оцінка $\|\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta) - \mathcal{H}(\zeta)\| \leq c_1\varepsilon$. Зауважимо, що оператор $\mathcal{H}(\zeta)$ є оборотним. Справді,

$$\mathcal{H}(\zeta)^{-1} = \begin{pmatrix} E & T_a(\zeta) & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & T_b(\zeta) & E \end{pmatrix}.$$

Тому $\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)$ теж є оборотним при малих ε , а також

$$\|\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1} - \mathcal{H}(\zeta)^{-1}\| \leq c_2\varepsilon. \quad (8.30)$$

Згадавши зображення (8.24) та застосувавши лему 8.2, ми дістаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon) &= \mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1}\mathcal{R}_\varepsilon(\zeta) = \\ &= \begin{pmatrix} E & -T_a^\varepsilon(\zeta) & 0 \\ -\varepsilon S_a^\varepsilon(\zeta) & E & -\varepsilon S_b^\varepsilon(\zeta) \\ 0 & -T_b^\varepsilon(\zeta) & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\zeta(A_a^\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_\zeta(B_\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_\zeta(A_b^\varepsilon) \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} E & T_a(\zeta) & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & T_b(\zeta) & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\zeta(A_a) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_\zeta(B) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_\zeta(A_b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_\zeta(A_a) & T_a(\zeta)\mathbf{R}_\zeta(B) & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_\zeta(B) & 0 \\ 0 & T_b(\zeta)\mathbf{R}_\zeta(B) & \mathbf{R}_\zeta(A_b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в операторній нормі. Згідно з формулою (8.25) отримана в границі матриця є резольвентою оператора \mathcal{A} . Отже, $\mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{A}$ в рівномірній резольвентній топології. Оцінку (8.17) можна отримати з рівності

$$\mathbf{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon) - \mathbf{R}_\zeta(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1}(\mathcal{R}_\varepsilon(\zeta) - \mathcal{R}(\zeta)) - (\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1} - \mathcal{H}(\zeta)^{-1})\mathcal{R}(\zeta)$$

та нерівностей (8.26), (8.27) і (8.30). Тут $\mathcal{R}(\zeta) = \text{diag}\{\mathbf{R}_\zeta(A_a), \mathbf{R}_\zeta(B), \mathbf{R}_\zeta(A_b)\}$. Теорему 8.1 доведено.

8.2 Спектр граничного оператора

Побудований вище граничний оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathring{A}_a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & \mathring{A}_b \end{pmatrix}, \quad \text{dom } \mathcal{A} = \left\{ (\phi_a, \psi, \phi_b) \in \text{dom } \mathring{A}_a \times \text{dom } B \times \text{dom } \mathring{A}_b : \right. \\ \left. \phi_a(0) = \psi(-1), \quad \phi_b(0) = \psi(1) \right\}$$

є несамоспряженим. Безпосередньо переконуємося, що спряжений в просторі \mathcal{L} оператор має вигляд

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathring{B} & 0 \\ 0 & 0 & A_b \end{pmatrix}, \quad \text{dom } \mathcal{A}^* = \left\{ (\phi_a, \psi, \phi_b) \in \text{dom } A_a \times \text{dom } \mathring{B} \times \text{dom } A_b : \right. \\ \left. \phi'_a(0) = \psi'(-1), \quad \phi'_b(0) = \psi'(1) \right\}.$$

Через u_λ , v_λ та w_λ позначатимемо власні функції операторів A_a , A_b та B для власного значення λ відповідно. Вважатимемо, що вони нормовані умовами $\|u_\lambda\|_{L_2(r, I_a)} = \|v_\lambda\|_{L_2(r, I_b)} = \|w_\lambda\|_{L_2(p, \mathcal{I})} = 1$. Нехай X_λ — кореневий підпростір \mathcal{A} , що відповідає власному значенню λ , тобто $X_\lambda = \text{span} \{ \ker(\mathcal{A} - \lambda)^k : k \in \mathbb{N} \}$. Цей простір породжений усіма власними та кореневими (приєднаними) векторами для λ . Якщо ненульовий вектор h належить до простору $\ker(\mathcal{P} - \mu)^j$ і не належить до $\ker(\mathcal{P} - \mu)^{j-1}$, то називаємо його кореневим вектором порядку $j - 1$.

Теорема 8.2. (i) Спектр оператора \mathcal{A} дійсний дискретний і є об'єднанням спектрів трьох операторів, а саме, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A_a) \cup \sigma(A_b) \cup \sigma(B)$.

(ii) Якщо λ належить лише до однієї з множин $\sigma(A_a)$, $\sigma(B)$ чи $\sigma(A_b)$, то λ є простим власним значенням оператора \mathcal{A} .

(iii) Коли $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b)$, але λ не є точкою спектру оператора B , то λ є двократним власним значенням і $X_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda E)$.

(iv) Припустимо, що λ належить до перетину $\sigma(A_a) \cap \sigma(B)$ (відповідно $\sigma(A_b) \cap \sigma(B)$), але λ не є власним значенням A_b (відповідно A_a), тоді λ є двократним власним значенням оператора \mathcal{A} . Коли ж $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b) \cap \sigma(B)$, то λ є власним значенням \mathcal{A} кратності 3. В усіх цих випадках, окрім власних, простір X_λ містить ще кореневі вектори: $X_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda)^2$ і $X_\lambda \neq \ker(\mathcal{A} - \lambda)$.

Доведення. (i) Те, що спектр оператора \mathcal{A} є об'єднанням спектрів операторів A_a , A_b і B , ми отримуємо безпосередньо із зображення (8.25) для резольвенти $R_\zeta(\mathcal{A})$.

Справді, кожен із спектрів $\sigma(A_a)$, $\sigma(A_b)$ і $\sigma(B)$ містить в спектрі \mathcal{A} . Коли ж ζ не належить до множини $\sigma(A_a) \cup \sigma(A_b) \cup \sigma(B)$, то не лише оператори $R_\zeta(A_a)$, $R_\zeta(A_b)$, $R_\zeta(B)$, але й також $T_a(\zeta)$ і $T_b(\zeta)$ є обмеженими. В цьому разі задачі (8.18) та (8.19) при $\varepsilon = 0$ володіють єдиними розв'язками для кожної функції $\psi \in W_2^2(\mathcal{I})$. Отже, оператор $R_\zeta(\mathcal{A})$ теж є обмеженим. Оператори A_a , A_b і B є самоспряженими і мають компактні резольвенти, тому спектр \mathcal{A} дійсний і дискретний.

(ii) Спектри операторів A_a , A_b та B прості. Тому коли λ належить лише до однієї з множин $\sigma(A_a)$, $\sigma(A_b)$ або $\sigma(B)$, то λ є простим власним значенням оператора \mathcal{A} . Йому відповідає власний вектор вигляду $(u_\lambda, 0, 0)$ для $\lambda \in \sigma(A_a)$, $(0, 0, v_\lambda)$ для $\lambda \in \sigma(A_b)$ та $(T_a(\lambda)w_\lambda, w_\lambda, T_b(\lambda)w_\lambda)$, коли $\lambda \in \sigma(B)$.

(iii) Якщо $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b)$ і $\lambda \notin \sigma(B)$, то існують два лінійно незалежні власні вектори $U = (u_\lambda, 0, 0)$ та $V = (0, 0, v_\lambda)$ оператора \mathcal{A} . Крім того, рівняння $(\mathcal{A} - \lambda)Y = c_1U + c_2V$ для кореневих векторів не має розв'язків, коли хоча б одна зі сталих c_1 чи c_2 відмінна від нуля. Якщо, наприклад, $c_1 \neq 0$, то задача

$$-u'' + qu - \lambda ru = c_1 ru_\lambda \quad \text{в } I_a, \quad \ell_a u = 0, \quad u(0) = 0$$

розв'язку не має, бо умовою існування розв'язку є рівність $c_1 \|u_\lambda\|_{L_2(r, I_a)}^2 = 0$. Отже, $X_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda)$ та $\dim X_\lambda = 2$.

(iv) Припустимо, що $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(B)$ та $\lambda \notin \sigma(A_b)$. В цьому разі існує власний вектор $U = (u_\lambda, 0, 0)$. До того ж рівняння $(\mathcal{A} - \lambda)U_* = U$ для кореневих векторів є сумісним. Шукатимемо розв'язок $U_* = (u, w, v)$ задачі

$$-u'' + qu - \lambda ru = ru_\lambda \quad \text{в } I_a, \quad \ell_a u = 0, \quad u(0) = w(-1); \quad (8.31)$$

$$-w'' - \lambda pw = 0 \quad \text{в } \mathcal{I}, \quad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0; \quad (8.32)$$

$$-v'' + qv - \lambda rv = 0 \quad \text{в } I_b, \quad v(0) = w(1), \quad \ell_b v = 0. \quad (8.33)$$

Зрозуміло, що $w = c_0 w_\lambda$, де w_λ – нормована власна функція оператора B . Далі, задача (8.33) має єдиний розв'язок $v_* = c_0 T_b(\lambda)w_\lambda$ для кожного c_0 , бо $\lambda \in \rho(A_b)$. Щодо задачі (8.31) з крайовою умовою $u(0) = c_0 w_\lambda(-1)$, то вона, взагалі кажучи, несумісна, оскільки λ є точкою спектру оператора A_a . Проте досягти сумісності задачі можна, поклавши $c_0 = \frac{1}{w_\lambda(-1)u'_\lambda(0)}$. Зауважимо, що числа $w_\lambda(-1)$ та $u'_\lambda(0)$ відмінні від нуля. Нехай u_0 – розв'язок (8.31). Тоді оператор \mathcal{A} має кореневий

вектор $U_* = (u_0, c_0 w_\lambda, c_0 T_b(\lambda)w_\lambda)$. Отже, простір X_λ є лінійною оболонкою власного вектора U та кореневого вектора U_* . Кореневих векторів вищого порядку немає, бо рівняння $(\mathcal{A} - \lambda)Y = U_*$ містить в одній з координат несумісну задачу

$$-w'' - \lambda r w = c r w_\lambda \quad \text{в } \mathcal{I}, \quad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0. \quad (8.34)$$

Схоже аналізуємо випадок $\lambda \in \sigma(A_b) \cap \sigma(B)$ та $\lambda \notin \sigma(A_a)$.

Нарешті припустимо, що $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b) \cap \sigma(B)$. Тоді оператор \mathcal{A} володіє двома лінійно незалежними векторами $U = (u_\lambda, 0, 0)$ і $V = (0, 0, v_\lambda)$. Зауважимо, що власних векторів $Y = (u, w, v)$, в яких компонента w відмінна від нуля, не існує. В цьому разі числа $w(-1)$ і $w(1)$ завжди ненульові, а тому задачі для u і v є несумісними. Доведемо, що $X_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda)^2$ та $\dim X_\lambda = 3$. Розглянемо рівняння $(\mathcal{A} - \lambda)Y = c_1 U + c_2 V$ з довільними сталими c_1 і c_2 , тобто

$$-u'' + q u - \lambda r u = c_1 r u_\lambda \quad \text{в } I_a, \quad \ell_a u = 0, \quad u(0) = w(-1); \quad (8.35)$$

$$-w'' - \lambda r w = 0 \quad \text{в } \mathcal{I}, \quad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0; \quad (8.36)$$

$$-v'' + q v - \lambda r v = c_2 r v_\lambda \quad \text{в } I_b, \quad v(0) = w(1), \quad \ell_b v = 0. \quad (8.37)$$

Міркуючи як у попередньому випадкові, дістаємо, що $w = c_0 w_\lambda$, а задачі (8.35) та (8.37) матимуть одночасно розв'язок тоді і лише тоді, коли виконуються рівності

$$c_1 = c_0 w_\lambda(-1) u'_\lambda(0), \quad c_2 = -c_0 w_\lambda(1) v'_\lambda(0).$$

Тоді умова $c_1 = -\frac{w_\lambda(-1)u'_\lambda(0)}{w_\lambda(1)v'_\lambda(0)} c_2$ гарантує існування кореневого вектора Y_* . Інших кореневих векторів немає. Отже, підпростір X_λ для потрібного власного значення λ породжений власними векторами U, V та кореневим Y_* . \square

8.3 Збіжність спектрів та власних просторів

Нехай $\lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon < \dots < \lambda_n^\varepsilon < \dots$ — послідовність власних значень оператора \mathcal{A}_ε або ж задачі (8.1)–(8.3). Зауважимо, що всі власні значення λ_n^ε є простими. Нехай також $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ — власні значення оператора \mathcal{A} або ж задачі (8.13)–(8.16), перераховані із врахування їхньої кратності.

Теорема 8.3. Для усіх $n \in \mathbb{N}$ власне значення λ_n^ε задачі (8.1)–(8.3) збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до власного значення λ_n задачі (8.13)–(8.16). Зокрема, якщо λ —

власне значення задачі (8.13)–(8.16) з алгебраїчною кратністю t , то при малих ε в деякому околі λ існує рівно t власних значень задачі (8.1)–(8.3).

Доведення. Це твердження випливає з рівномірної резольвентної збіжності операторів \mathcal{A}_ε , яка доведена в теоремі 8.1, та деяких загальних результатів стосовно збурень власних значень компактних операторів.

Нехай K — компактний оператор в сепарабельному гільбертовому просторі \mathcal{H} , а μ_1, μ_2, \dots — його ненульові власні значення, перенумеровані за спаданням модуля і з врахуванням алгебраїчної кратності. Нехай послідовність компактних операторів $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ в просторі \mathcal{H} збігається до K при $\varepsilon \rightarrow 0$ за нормою. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке впорядкування власних значень $\mu_1(\varepsilon), \mu_2(\varepsilon), \dots$ оператора K_ε , що $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_n(\varepsilon) = \mu_n$ для всіх натуральних n . Припустимо, що μ — ненульове власне значення оператора K кратності t , а Γ_μ — коло з центром в точці μ , яке лежить в резольвентній множині $\rho(K)$ і не охоплює жодних інших точок $\sigma(K)$, окрім μ . Тоді для малих ε існує рівно t власних значень оператора K_ε (з врахуванням їхньої кратності), які лежать всередині кола Γ_μ , а усі решта точок $\sigma(K_\varepsilon)$ лежать на додатній відстані від Γ_μ [229, Ch.1], [230, Ch.XI-9], [231].

Застосуємо цей результат до $K = R_\zeta(\mathcal{A})$ і $K_\varepsilon = R_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon)$. Тоді

$$\sigma_p(R_\zeta(\mathcal{A})) = \left\{ \frac{1}{\lambda_n - \zeta}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \sigma_p(R_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon)) = \left\{ \frac{1}{\lambda_n^\varepsilon - \zeta}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Обидві послідовності власних значень впорядковані за спаданням абсолютної величини. Згідно з теоремою 8.1 резольвенти $R_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon)$ збігаються в рівномірній нормі до $R_\zeta(\mathcal{A})$, тому маємо “пономерну” збіжність власних значень

$$\frac{1}{\lambda_n^\varepsilon - \zeta} \rightarrow \frac{1}{\lambda_n - \zeta} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

що завершує доведення. □

За рахунок кратності в спектрі граничного оператора \mathcal{A} , біфуркації власних значень та власних функцій можуть бути досить складними. Опис усіх біфуркаційних картин вимагає більш прискіпливого асимптотичного аналізу, який ми проведемо в наступному розділі для задачі у двовимірному випадку. Тут ми отримаємо лише ті результати для власних функцій, які безпосередньо впливають з рівномірної резольвентної збіжності операторів \mathcal{A}_ε .

Повернемося до компактних операторів K та K_ε і введемо проектори Ріса

$$E(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\mu} R_z(K) dz, \quad E_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\mu} R_z(K_\varepsilon) dz,$$

де контур Γ_μ описано вище. Образом проектора $E(\mu)$ є простір, породжений власними і кореневими векторами оператора K , що відповідають власному значенню μ . Образ $R(E_\varepsilon(\mu))$ — це пряма сума всіх корневих підпросторів, пов'язаних з точками спектру K_ε , що лежать всередині Γ_μ . Зі збіжності $K_\varepsilon \rightarrow K$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в рівномірній операторній нормі випливає така ж збіжність проекторів $E_\varepsilon(\mu) \rightarrow E(\mu)$. Тому $\dim R(E_\varepsilon(\mu)) = \dim R(E(\mu)) = m$, де m — алгебраїчна кратність μ . Звідси випливає таке твердження.

Теорема 8.4. *Нехай X_λ — корневий простір оператора \mathcal{A} , що відповідає власному значенню λ . Нехай також X_λ^ε — простір, породжений усіма власними векторами \mathcal{A}_ε , для яких власні значення прямують до λ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тоді для достатньо малих ε простори X_λ^ε і X_λ мають однакову вимірність, а розхил між ними є нескінченно малим при $\varepsilon \rightarrow 0$ в тому сенсі, що*

$$\int_{\Gamma_\lambda} R_z(\mathcal{A}_\varepsilon) dz \rightarrow \int_{\Gamma_\lambda} R_z(\mathcal{A}) dz$$

для кожного замкненого контуру $\Gamma_\lambda \subset \rho(\mathcal{A})$, що охоплює лише єдину точку λ зі спектру \mathcal{A} .

В тому разі, коли λ є простим власним значенням, близькість підпросторів X_λ^ε і X_λ можна переформулювати в термінах збіжності власних функцій.

Теорема 8.5. *Нехай y_ε — власна функція задачі (8.1)–(8.3), яка відповідає власному значенню λ^ε і нормована умовою $\|y_\varepsilon\|_{L_2(r,I)} = 1$.*

(i) *Припустимо, що $\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, де λ — просте власне значення оператора \mathcal{A} , яке належить до множини $\sigma(A_a)$. Тоді власна функція y_ε збігається в просторі $L_2(I)$ до функції $y(x) = u(x)$ при $x \in I_a$ і $y(x) = 0$ при $x \in I_b$, де u — нормована власна функція оператора A_a з власним значенням λ , тобто*

$$-u'' + qu = \lambda u \quad \text{в } I_a, \quad \ell_a u = 0, \quad u(0) = 0, \quad \|u\|_{L_2(r,I_a)} = 1.$$

Якщо λ — просте власне значення з множини $\sigma(A_b)$, то $y_\varepsilon \rightarrow y$ в $L_2(I)$, де $y(x) = 0$ при $x \in I_a$ та $y(x) = v(x)$ при $x \in I_b$, а v — нормована власна функція

оператора A_b з власним значенням λ , тобто

$$-v'' + qv = \lambda rv \quad \text{в } I_b, \quad v(0) = 0, \quad \ell_b v = 0, \quad \|v\|_{L_2(r, I_b)} = 1.$$

(ii) Нехай $\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda$, де λ — просте власне значення оператора \mathcal{A} з множини $\sigma(B)$. Тоді власна функція y_ε збігається в $L_2(I)$ до розв'язку y задачі

$$-y'' + qy = \lambda ry \quad \text{в } I_a \cup I_b, \quad \ell_a y = 0, \quad \ell_b y = 0, \quad y(-0) = \vartheta w(-1), \quad y(+0) = \vartheta w(1),$$

де w — відповідна власна функція оператора B , $\|w\|_{L_2(p, \mathcal{I})} = 1$. Нормівний множник має вигляд $\vartheta = \left(\|T_a(\lambda)w\|_{L_2(r, I_a)}^2 + \|T_b(\lambda)w\|_{L_2(r, I_b)}^2 \right)^{-1}$.

Доведення. Нехай Y — власний вектор оператора \mathcal{A} , що відповідає простому власному значенню λ . Цей вектор породжує одновимірний простір X_λ . Згідно з теоремою 8.4 простір X_λ^ε теж одновимірний при малих ε і породжений власним вектором Y_ε оператора \mathcal{A}_ε з власним значенням λ^ε . До того ж $Y_\varepsilon \rightarrow Y$ в просторі \mathcal{L} при $\varepsilon \rightarrow 0$, якщо ці вектори були заздалегідь нормовані $\|Y_\varepsilon\|_{\mathcal{L}} = \|Y\|_{\mathcal{L}} = 1$. Припустимо, що $\lambda \in \sigma(A_a)$. Тоді простір X_λ породжений вектором $Y = (u, 0, 0)$. Якщо $Y_\varepsilon = (u_\varepsilon, w_\varepsilon, v_\varepsilon)$, то власна функція y_ε задачі (8.1)–(8.3) матиме вигляд

$$y_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x), & \text{коли } x \in I_a^\varepsilon, \\ w_\varepsilon(x/\varepsilon), & \text{коли } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ v_\varepsilon(x), & \text{коли } x \in I_b^\varepsilon. \end{cases}$$

З такими позначеннями ми маємо

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon - y\|_{L_2(I)}^2 &= \int_a^{-\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^2 dx + \int_{-\varepsilon}^0 |w_\varepsilon(\frac{x}{\varepsilon}) - u(x)|^2 dx + \\ &+ \int_0^\varepsilon |w_\varepsilon(\frac{x}{\varepsilon})|^2 dx + \int_\varepsilon^b |v_\varepsilon(x)|^2 dx \leq c_1 \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(r, I_a)}^2 + \\ &+ c_2 \|v_\varepsilon\|_{L_2(r, I_b)}^2 + c_3 \varepsilon \|w_\varepsilon\|_{L_2(p, \mathcal{I})}^2 + \int_{-\varepsilon}^0 |u(x)|^2 dx \leq c_4 \|Y_\varepsilon - Y\|_{\mathcal{L}}^2 + c_5 \varepsilon. \end{aligned}$$

Права частина нерівності прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, бо $Y_\varepsilon \rightarrow Y$ в просторі \mathcal{L} , а також u є обмеженою функцією на I_a як елемент простору $W_2^2(I_a)$. Схожі доведення справедливі для випадків $\lambda \in \sigma(A_b)$ та $\lambda \in \sigma(B)$. \square

Розділ 9

МЕМБРАНИ З ВАЖКИМИ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ: АСИМПТОТИКА СПЕКТРУ

В цьому розділі розглянемо коливні системи, які є узагальненням на двовимірний випадок моделі з розділу 8. Вивчатимемо спектральні властивості обмежених мембран з тонкими важкими включеннями і побудуємо асимптотику власних значень крайової задачі для оператора $-\Delta + a$ з ваговою функцією, збуреною в околі гладкої кривої. Останнім часом двовимірні і тривимірні моделі систем з важкими включеннями різноманітної геометрії знаходять застосування не лише в механіці, але й у фізиці рідких кристалів, фізичній хімії полімерів, міцел і мікроемульсій, молекулярній теорії, теорії клітинних мембран [232–234]. Клітинна мембрана, наприклад, містить протеїнові включення різної форми та колоїдні частинки [235]. Огляд математичних результатів, що стосуються коливних систем з концентрованими масами, ми зробили у вступі до розділу 8. Проте в контексті проблеми цього розділу варто згадати серію робіт [212–218], присвячену дво- і тривимірним коливним системам з великою кількістю концентрованих мас, розташованих в околі границі. За своєю фізичною суттю такі моделі схожі на моделі, в яких маса концентрується в тонкому околі границі. В працях [236–239] отримано цікаві асимптотичні результати для спектральних задач в областях, які обмежені тонкою, жорсткою і важкою оболонкою, коли одночасно збурювалися вагова функція та коефіцієнт жорсткості. В [240] вивчали спектральну задачу Неймана для мембрани, майже вся маса якої концентрувалася навколо границі. Дещо інший підхід до моделювання важких включень, при якому вони трактувалися як абсолютно жорсткі, запропоновано в роботі [241]. Результати розділу частково опубліковано в працях [220, 221].

Нехай Ω — обмежена область в \mathbb{R}^2 з гладкою межею, а γ — гладка замкнена крива без точок самоперетину, яка розташована в Ω . Через ω_ε позначимо ε -окіл кривої γ . При малих ε цей окіл лежить в Ω і є областю з гладкою межею. Введемо в ω_ε локальні координати $x = \alpha(s) + r\nu(s)$, $(s, r) \in S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, описані в розділі 7 (див. рис. 7.1 на стор. 230). Нагадаємо, що S — коло довжини $|\gamma|$. Нехай ρ — гладка строго додатна функція в області Ω , а q — гладка і додатна на відрізку $[-1, 1]$. Введемо вагову функцію вигляду

$$\rho_\varepsilon(x, m) = \begin{cases} \rho(x) & \text{в } \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ \varepsilon^{-m} q\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) & \text{в } \omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (9.1)$$

Ми вивчатимемо спектральну задачу

$$-\Delta u_\varepsilon + a(x)u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon(x, m)u_\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad \ell u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.2)$$

де $a \in C^\infty(\overline{\Omega})$, а $\ell v = 0$ — один з класичних типів крайових умов на $\partial\Omega$, а саме, умови Діріхле, Неймана чи Робена. Нашою метою є повний опис асимптотичної поведінки власних значень λ^ε задачі при $\varepsilon \rightarrow 0$. Як і у випадку струни, тут теж є п'ять різних граничних випадків: $m < 1$, $m = 1$, $1 < m < 2$, $m = 2$ та $m > 2$. Випадки відрізняються формою власних коливань та місцем, де на мембрані концентрується основна частка їх енергії. Коли $m < 1$, то приєднана маса нескінченно мала при $\varepsilon \rightarrow 0$ і в границі отримуємо мембрану з незбуреною густиною ρ . Коли ж $m = 1$, то величина додаткової маси є сталою $M = |\gamma|q_0$, де $q_0 = \int_{-1}^1 q(r) dr$. Гранична задача

$$-\Delta u + au = \lambda(\rho + q_0\delta_\gamma)u \quad \text{в } \Omega, \quad \ell u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega$$

моделює мембрану з приєднаною вздовж кривої масою. Тут δ_γ — функціонал, що діє на пробні функції $\phi \in C^\infty(\Omega)$ за правилом $\langle \delta_\gamma, \phi \rangle = \int_\gamma \phi d\gamma$. При $m > 1$ задача стає сингулярною, а асимптотична поведінка спектру доволі складною. З математичного погляду випадки відрізняються тим, що в граничній задачі спектральний параметр з'являється почергово в рівнянні на усій області Ω , рівнянні на циліндрі $S \times (-1, 1)$, який є розтягом ω_ε , чи умовах спряження на кривій γ . Цікавим є пороговий випадок $m = 2$, коли спектральний параметр містять одночасно два диференціальні рівняння, а тому можливий резонанс між важким включенням

та усією мембраною. Схоже до випадку струни, задачу (9.2) можна реалізувати як сім'ю матричних операторів, що збігаються до деякого несамоспряженого оператора. Проте принципова відмінність в тому, що у випадку мембрани немає рівномірної резольвентної збіжності цих операторів. Якби вона була, то граничний оператор мав би компактну резольвенту, бо такими є резольвенти дограничних операторів [46, теорема 2.26, с.207]. Але граничний оператор, отриманий в сильній резольвентній топології, такою властивістю не володіє, і зокрема, його спектр містить власні значення нескінченної кратності. Відомо, що із сильної збіжності резольвент, взагалі кажучи, не випливає збіжність спектрів відповідних операторів. З цієї причини ми вивчаємо асимптотику спектру і обминаємо питання збіжності самих операторів.

9.1 Мембрани з $\partial_\nu \delta_\gamma$ -подібним збуренням густини

Задача (9.2) пов'язана із самоспряженим оператором у ваговому просторі Лебега $L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)$. Нехай T_ε — оператор, який діє за правилом $T_\varepsilon \phi = \rho_\varepsilon^{-1}(-\Delta \phi + a\phi)$ на функціях $\phi \in W_2^2(\Omega)$, підпорядкованих крайовим умовам $\ell \phi = 0$ на $\partial\Omega$. Очевидно, його спектр дійсний і дискретний. Спершу вивчимо задачу (9.2) у випадку $m = 2$, коли збурення вагової функції має $\partial_\nu \delta_\gamma$ -подібний характер як у розділі 7.

9.1.1 Граничний оператор та його властивості

Крива γ розділяє Ω на дві підобласті Ω_{out} та Ω_{in} . Припустимо, що $\partial\Omega_{out} = \partial\Omega \cup \gamma_-$ і $\partial\Omega_{in} = \gamma_+$, де γ_- і γ_+ — два береги розрізу γ . Нехай локальна координата r зростає в напрямку від Ω_{out} до Ω_{in} . Шукатимемо асимптотику власних значень λ^ε та власних функцій u_ε задачі (9.2) у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda + \dots, \quad u_\varepsilon(x) \sim \begin{cases} v(x) + \dots, & \text{коли } x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ w(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \dots, & \text{коли } x \in \omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (9.3)$$

Поза множиною ω_ε функція u_ε розв'язує незбурене рівняння, а оскільки ω_ε стягується при $\varepsilon \rightarrow 0$ в криву γ , то $-\Delta v + av = \lambda \rho v$ в $\Omega \setminus \gamma$, а також $\ell v = 0$ на $\partial\Omega$. Щоб знайти умови спряження для v на кривій γ , розглянемо рівняння (9.2) в локальних координатах в околі кривої. Підставимо розвинення (9.3) до рівняння

(9.2), скориставшись зображенням (7.11) для оператора Лапласа. Згадуючи, що $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}q(\frac{r}{\varepsilon})$ в області ω_ε , для функції w дістанемо рівняння $-\partial_n^2 w = \lambda q w$ в циліндрі $Q = S \times (-1, 1)$, де $n = r/\varepsilon$. Власна функція u_ε як елемент області визначення оператора T_ε задовольняє умови

$$[u_\varepsilon]_{-\varepsilon} = 0, \quad [u_\varepsilon]_\varepsilon = 0, \quad [\partial_r u_\varepsilon]_{-\varepsilon} = 0, \quad [\partial_r u_\varepsilon]_\varepsilon = 0, \quad (9.4)$$

де $[\cdot]_t$ — стрибок функції на кривій γ_t . Звідси маємо

$$v^- = w(\cdot, -1), \quad v^+ = w(\cdot, 1), \quad \partial_n w(\cdot, -1) = 0, \quad \partial_n w(\cdot, 1) = 0,$$

де v^\pm — односторонні сліди функції v кривій γ , тобто $v^\pm = v|_{\gamma_\pm}$. Тому формально число λ та пара функцій (v, w) задовольняють задачу

$$-\Delta v + av = \lambda \rho v \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.5)$$

$$-\partial_n^2 w = \lambda q w \quad \text{в } Q, \quad \partial_n w(s, -1) = 0, \quad \partial_n w(s, 1) = 0, \quad (9.6)$$

$$v^- = w(s, -1), \quad v^+ = w(s, 1), \quad s \in S, \quad (9.7)$$

яку далі називатимемо *граничною спектральною задачею*.

Введемо оператори

$$\mathring{A} = \rho^{-1}(-\Delta + a) \quad \text{в } L_2(\rho, \Omega), \quad \text{dom } \mathring{A} = \{f \in W_2^2(\Omega \setminus \gamma) : \ell f = 0 \text{ на } \partial\Omega\},$$

$$B = -q^{-1}\partial_n^2 \quad \text{в } L_2(q, Q), \quad \text{dom } B = \left\{g \in W_2^{2,0}(Q) : \partial_n g(\cdot, -1) = \partial_n g(\cdot, 1) = 0\right\},$$

де $W_2^{2,0}(Q)$ — анізотропний простір Соболева

$$W_2^{2,0}(Q) = \{g \in L_2(Q) : \partial_n^k g \in L_2(Q) \text{ для } k = 1, 2\}.$$

В просторі $\mathcal{L} = L_2(\rho, \Omega) \times L_2(q, Q)$ ми розглянемо матричний оператор

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathring{A} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{dom } \mathcal{P} = \{(f, g) \in \text{dom } \mathring{A} \times \text{dom } B :$$

$$f^- = g(\cdot, -1), \quad f^+ = g(\cdot, 1)\}.$$

Тепер задачу (9.5)–(9.7) можна записати у вигляді $\mathcal{P}u = \lambda u$, де через u позначено вектор $(v, w)^\top$. Надалі писатимемо (v, w) , опускаючи знак транспонування.

Оператор \mathcal{P} несамоспряжений, бо безпосередні обчислення дають

$$\mathcal{P}^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathring{B} \end{pmatrix}, \quad \text{dom } \mathcal{P}^* = \{(f, g) \in \text{dom } A \times W_2^{2,0}(Q) :$$

$$\partial_r f^- = -\partial_n g(\cdot, -1), \quad \partial_r f^+ = \partial_n g(\cdot, 1)\}.$$

Тут A — звуження оператора \mathring{A} на область $\text{dom } A = \{f \in \text{dom } \mathring{A} : f = 0 \text{ на } \gamma\}$, а \mathring{B} — розширення B на весь простір $W_2^{2,0}(Q)$. Через $\partial_r f^\pm$ позначені односторонні сліди нормальної похідної функції f на γ . Гранична задача не має самоспряженої реалізації, бо, як ми покажемо, оператор \mathcal{P} має кореневі вектори, а отже, не є подібним до самоспряженого.

Спектр граничного оператора

Опишемо спектр оператора \mathcal{P} , який буде граничною множиною для власних значень задачі (9.2) при $m = 2$.

Лема 9.1. *Спектр оператора B є зліченною множиною дійсних власних значень нескінченної кратності. Число λ належить до спектру $\sigma(B)$ тоді і лише тоді, коли λ є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля*

$$y'' + \lambda q(n)y = 0, \quad n \in (-1, 1), \quad y'(-1) = 0, \quad y'(1) = 0. \quad (9.8)$$

Доведення. Зрозуміло, що оператор B є самоспряженим. Рівняння $(B - \lambda)\phi = g$ можна трактувати як крайову задачу для оператора Штурма-Ліувілля

$$-\partial_n^2 \phi + \lambda q(n)\phi = q(n)g(s, n) \text{ в } Q, \quad \partial_n \phi(s, -1) = 0, \quad \partial_n \phi(s, 1) = 0$$

з параметром $s \in S$. Коли λ не є власним значенням (9.8), то задача має єдиний розв'язок $\phi(s, \cdot)$ для всіх функцій $g(s, \cdot) \in L_2(-1, 1)$ і майже всіх $s \in S$. До того ж ϕ належить до $L_2(q, Q)$, що випливає із зображення розв'язку через функцію Гріна. Тому для такого λ існує обмежений оператор $(B - \lambda)^{-1}$. Якщо ж λ — власне значення (9.8) з власною функцією y , то наша задача, взагалі кажучи, не має розв'язку. Причиною цього є нескінченновимірне ядро відповідної однорідної задачі, породжене функціями вигляду $b(s)y(n)$, де $b \in L_2(\gamma)$. Отже, спектр оператора B складається з усіх власних значень задачі (9.8), а відповідні власні підпростори нескінченновимірні. \square

Теорема 9.1. *Спектр \mathcal{P} дійсний, дискретний, а також $\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$.*

Доведення. Побудуємо резольвенту \mathcal{P} в явному вигляді. Розглянемо рівняння $(\mathring{A} - \mu)v = f$, $(B - \mu)w = g$ для заданих $\mu \in \mathbb{C}$, $f \in L_2(\rho, \Omega)$ та $g \in L_2(q, Q)$. Друге рівняння має єдиний розв'язок $w = R_\mu(B)g$, коли $\mu \in \rho(B)$. Тоді v є розв'язком крайової задачі

$$\begin{aligned} -\Delta v + av - \mu\rho v &= \rho f \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, & \ell v &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ v^- &= w(\cdot, -1), & v^+ &= w(\cdot, 1). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Введемо оператор $T(\mu): W_2^2(Q) \rightarrow L_2(\rho, \Omega)$, який розв'язує задачу

$$\begin{aligned} -\Delta\phi + a\phi - \mu\rho\phi &= 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, & \ell\phi &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ \phi^- &= \psi(\cdot, -1), & \phi^+ &= \psi(\cdot, 1) \end{aligned} \quad (9.10)$$

для заданої функції $\psi \in W_2^2(Q)$. Коли $\mu \in \rho(A)$, то задача має єдиний розв'язок $\phi = T(\mu)\psi$, а отже, оператори $T(\mu)$ обмежені на $\rho(A)$. Подамо v як суму розв'язку рівняння в (9.9), підпорядкованого однорідним крайовим умовам на γ_\pm , і розв'язку задачі (9.10) з $\psi = w$. Тому, коли $\mu \in \rho(A) \cap \rho(B)$, ми дістаємо

$$v = R_\mu(A)f + T(\mu)w = R_\mu(A)f + T(\mu)R_\mu(B)g.$$

Тепер можемо записати резольвенту \mathcal{P} у вигляді

$$R_\mu(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} R_\mu(A) & T(\mu)R_\mu(B) \\ 0 & R_\mu(B) \end{pmatrix}.$$

Рівність $\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$ випливає безпосередньо з цього зображення і того, що оператори $T(\mu)$ обмежені при $\mu \in \rho(A)$. Спектр \mathcal{P} дійсний і дискретний, бо оператори A і B самоспряжені з компактними резольвентами. \square

Наслідок 9.1. *Резольвента \mathcal{P} є некомпактним оператором.*

Доведення. З огляду на лему 9.1 елемент $R_\mu(B)$ матриці $R_\mu(\mathcal{P})$ є некомпактним оператором. Причина полягає в тому, що друга похідна ∂_n^2 не є еліптичним оператором на двовимірному многовиді Q . \square

Структура власних і кореневих підпросторів граничного оператора

Вивчимо структуру кореневих підпросторів X_μ оператора \mathcal{P} . Нагадаємо, що

$$X_\mu = \{h \in \mathcal{L} : h \in \ker(\mathcal{P} - \mu)^k \text{ для деякого } k \in \mathbb{N}\},$$

тобто це простір, породжений усіма власними і кореневими векторами для власного значення μ . Через X_μ^0 позначатимемо власний підпростір $\ker(\mathcal{P} - \mu)$.

Випадок $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma(B)$. Спершу шукатимемо власні вектори оператора \mathcal{P} , тобто ненульові розв'язки $u = (v, w)$ системи

$$(\mathring{A} - \lambda)v = 0, \quad (B - \lambda)w = 0. \quad (9.11)$$

Позаяк λ не належить до $\sigma(B)$, то маємо $w = 0$. Тоді з огляду на умови (9.7) відразу дістаємо $v|_\gamma = 0$. Це в свою чергу означає, що v мусить бути власною функцією оператора A , яка відповідає λ . Всі власні значення цього оператора мають скінченну кратність. Припустимо, що λ є власним значенням кратності K , а V_1, \dots, V_K — власні функції A такі, що

$$\int_{\Omega} \rho V_i V_j dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, K. \quad (9.12)$$

Тут δ_{ij} — символ Кронекера. Отже, власний підпростір X_λ^0 породжують вектори

$$u_1 = (V_1, 0), \quad u_2 = (V_2, 0), \quad \dots, \quad u_K = (V_K, 0). \quad (9.13)$$

Кореневі вектори першого порядку задовольняють рівняння $(\mathcal{P} - \lambda)u_* = u$, де u — власний вектор \mathcal{P} . Проте таких векторів $u_* = (v_*, w_*)$ немає, бо другі компоненти власних векторів u_k є нульовими і з рівняння $(B - \lambda)w_* = 0$ дістаємо, що $w_* = 0$. Тому функція v_* мала б бути розв'язком рівняння $(A - \lambda)v_* = v$, де v — власна функція A . Проте останнє рівняння несумісне, бо оператор A самоспряжений.

Випадок $\lambda \in \sigma(B) \setminus \sigma(A)$. Якщо λ належить до спектру оператора B , то згідно з лемою 9.1 це число є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля (9.8). Нехай y — відповідна власна функція цієї задачі, яку нормуємо умовою $y(-1) = 1$. Зауважимо, що величини $y(-1)$ і $y(1)$ відмінні від нуля для будь-якої власної функції задачі (9.8). Введемо також позначення $\theta = y(1)$. Тоді B має зліченну множину

лінійно незалежних власних функцій $\{b_j(s)y(n)\}_{j=1}^{\infty}$, де $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ — база простору $L_2(\gamma)$, яка складається з гладких функцій. Покладемо $u = (v(x), b(s)y(n))$. Тепер перше рівняння системи (9.11) разом з умовами (9.7) породжують задачу

$$-\Delta v + av = \lambda \rho v \text{ в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad v^- = b, \quad v^+ = \theta b \text{ на } \gamma, \quad (9.14)$$

яка має єдиний розв'язок для всіх $b \in C^\infty(\gamma)$, бо $\lambda \notin \sigma(A)$. Зауважимо, що функція b ненульова, бо вектор u має бути ненульовим. Знайшовши розв'язки v_j задачі (9.14) для елементів $b = b_j$ гладкої бази в $L_2(\gamma)$, ми побудуємо зліченну множину лінійно незалежних власних векторів

$$u_1 = (v_1, b_1 y), \quad u_2 = (v_2, b_2 y), \quad \dots, \quad u_j = (v_j, b_j y), \quad \dots, \quad (9.15)$$

оператора \mathcal{P} для $\lambda \in \sigma(B) \setminus \sigma(A)$. Кореневих векторів $u_* = (v_*, w_*)$ в цьому випадку немає, бо для ненульових функцій b рівняння $(B - \lambda)w_* = by$ є несумісним через самоспряженість оператора B . Отже, $X_\lambda = X_\lambda^0$ і $\dim X_\lambda = \infty$.

Випадок $\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$. Коли λ належить до $\sigma(B)$, то власні вектори оператора \mathcal{P} мають вигляд $(v(x), b(s)y(n))$, де v — розв'язок задачі (9.14), а b — відмінна від нуля достатньо гладка функція на γ . Проте в цьому разі виникає проблема з існуванням розв'язків задачі (9.14), бо λ є точкою спектру $\sigma(A)$.

Лема 9.2. *Нехай λ — власне значення оператора A кратності K , а власні функції V_1, \dots, V_K задовольняють умову ортонормованості (9.12). Тоді для кожної пари функцій $f \in L_2(\Omega)$ і $b_\pm \in W_2^{3/2}(\gamma)$ задача*

$$-\Delta v + av = \lambda \rho v + f \text{ в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad v^- = b_-, \quad v^+ = b_+ \quad (9.16)$$

має розв'язок з класу $W_2^2(\Omega \setminus \gamma)$ тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\int_\gamma (b_+ \partial_r V_k^+ - b_- \partial_r V_k^-) d\gamma + \int_\Omega f V_k dx = 0 \quad (9.17)$$

для всіх $k = 1, \dots, K$.

Доведення. Твердження є наслідком альтернативи Фредгольма для самоспряженого оператора A з компактною резольвентою. Умови (9.17) можна отримати, помноживши рівняння в (9.16) по черзі на функції V_1, \dots, V_K і проінтегрувавши двічі частинами з врахуванням крайових умов. \square

Застосуємо лему 9.2 до задачі (9.14). Ця задача має розв'язок тоді і лише тоді, коли для усіх $k = 1, \dots, K$ виконуються умови $(b, \Psi_k)_{L_2(\gamma)} = 0$, де

$$\Psi_k = \theta \partial_r V_k^+ - \partial_r V_k^-. \quad (9.18)$$

Якщо через H_λ позначимо підпростір в $L_2(\gamma)$, породжений функціями Ψ_1, \dots, Ψ_K , то умова існування розв'язку задачі (9.14) є фактично умовою ортогональності функції b до простору H_λ . Таке формулювання умови сумісності є навіть точніше, бо серед функцій Ψ_1, \dots, Ψ_K є, взагалі кажучи, лінійно залежні і тому серед K умов $(b, \Psi_k)_{L_2(\gamma)} = 0$ можуть бути зайві рівності.

Зауважимо, що як і у випадку струни, оператор A є прямою сумою двох операторів на підобластях Ω_{out} та Ω_{in} . А саме, $A = A_- \oplus A_+$, де

$$\begin{aligned} A_- &= \rho^{-1}(-\Delta + a), \quad \text{dom } A_- = \{f \in W_2^2(\Omega_{out}) : \ell f = 0 \text{ на } \partial\Omega, f = 0 \text{ на } \gamma\}, \\ A_+ &= \rho^{-1}(-\Delta + a), \quad \text{dom } A_+ = \{f \in W_2^2(\Omega_{in}) : f = 0 \text{ на } \gamma\}. \end{aligned}$$

Тому $\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(A_-) \cup \sigma(A_+) \cup \sigma(B)$.

Лема 9.3. *Припустимо, що λ — власне значення оператора $A = A_- \oplus A_+$, а k_\pm — кратності λ в спектрах операторів A_\pm відповідно. Тоді $\dim H_\lambda \geq \max(k_-, k_+)$.*

Доведення. Базу у власному просторі A можемо вибрати так, щоб власні функції V_1, \dots, V_{k_+} були нельовими в підобласті Ω_{out} , а решта $k_- = K - k_+$ власних функцій V_{k_++1}, \dots, V_K — нульовими в Ω_{in} . Тоді H_λ є лінійної оболонкою функцій

$$\partial_r V_1^+, \dots, \partial_r V_{k_+}^+, \partial_r V_{k_++1}^-, \dots, \partial_r V_K^-. \quad (9.19)$$

Ці похідні, взагалі кажучи, можуть бути лінійно залежними в $L_2(\gamma)$, але перші k_+ похідних завжди лінійно незалежні, як і останні k_- . Припустимо, наприклад, що $\partial_r V_1^+, \dots, \partial_r V_{k_+}^+$ лінійно залежні. Тоді б існувала така власна функція v задачі $-\Delta v + av = \lambda \rho v$ в Ω_{in} , $v = 0$ на $\partial\Omega_{in}$, що $\partial_r v = 0$ на Ω_{in} . А це неможливо. Такі ж міркування можна застосувати до другої групи власних функцій. \square

Нехай простір H_λ має вимірність d , а гладка база $\{b_j\}_{j=1}^\infty$ в $L_2(\gamma)$ вибрана так, що b_1, \dots, b_d є елементами простору H_λ . Нехай v_j — розв'язок задачі (9.14) при $b = b_j \in H_\lambda^\perp$, який ортогональний в $L_2(\rho, \Omega)$ власним функціям V_1, \dots, V_K . Тоді

$$(V_1, 0), \dots, (V_K, 0), (v_{d+1}, b_{d+1}y), (v_{d+2}, b_{d+2}y), \dots \quad (9.20)$$

— зліченна множина лінійно незалежних власних векторів оператора \mathcal{P} . Отже, простір X_λ^0 нескінченновимірний.

В цьому випадку існують кореневі вектори $u_* = (v_*, w_*)$, які є розв'язками рівняння $(\mathcal{P} - \lambda)u_* = u$ з власним вектором $u = (v, w)$ в правій частині. Маємо

$$-\Delta v_* + av_* = \lambda \rho v_* + \rho v \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_* = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.21)$$

$$-\partial_n^2 w_* = \lambda q w_* + q w \quad \text{в } Q, \quad \partial_n w_*(\cdot, -1) = 0, \quad \partial_n w_*(\cdot, 1) = 0, \quad (9.22)$$

$$v_*^- = w_*(\cdot, -1), \quad v_*^+ = w_*(\cdot, 1). \quad (9.23)$$

Ця задача несумісна при $w \neq 0$, бо оператор B самоспряжений. Тому кореневі вектори пов'язані лише з векторами $(V_1, 0), \dots, (V_K, 0)$. Покладемо $w = 0$ та $v = c_1 V_1 + \dots + c_K V_K$. Тоді $w_*(s, n) = b_*(s)y(n)$, а також

$$-\Delta v_* + av_* = \lambda \rho v_* + \rho \sum_{j=1}^K c_j V_j \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_* = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.24)$$

$$v_*^- = b_*, \quad v_*^+ = \theta b_*. \quad (9.25)$$

Згідно з лемою 9.2, задача матиме розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$c_1 = (b_*, \Psi_1)_{L_2(\gamma)}, \quad \dots, \quad c_K = (b_*, \Psi_K)_{L_2(\gamma)}.$$

Функція v ненульова, тому b_* має ненульову проекцію на H_λ . Такими є функції b_1, \dots, b_d . Покладемо $b_* = b_j$ для $j = 1, \dots, d$ в задачі (9.24), (9.25) і отримаємо жорданові ланцюги $(V^{(j)}, 0) \mapsto (v_*^{(j)}, b_j y)$, де $V^{(j)} = -\sum_{k=1}^K (b_j, \Psi_k)_{L_2(\gamma)} V_k$. Кореневих векторів вищого порядку немає, бо всі кореневі вектори першого порядку мають ненульову другу компоненту, а тому рівняння $(B - \lambda)y_* = b_j y$ є несумісним для $b_j \neq 0$. Отже, кореневий простір X_λ має базу, яку формують:

- d ланцюгів Жордана довжини 2

$$(V^{(1)}, 0) \mapsto (v_*^{(1)}, b_1 y), \dots, (V^{(d)}, 0) \mapsto (v_*^{(d)}, b_d y); \quad (9.26)$$

- послідовність власних векторів вигляду

$$(v_{d+1}, b_{d+1} y), (v_{d+2}, b_{d+2} y), \dots, (v_j, b_j y), \dots; \quad (9.27)$$

о $K - d$ власних векторів вигляду

$$(V^{(d+1)}, 0), \dots, (V^{(K)}, 0). \quad (9.28)$$

Тут $V^{(1)}, \dots, V^{(K)}$ — лінійно незалежні функції оператора A , що відповідають власному значенню λ .

Підсумуємо усю отриману інформацію про спектр, власні та кореневі вектори граничного оператора \mathcal{P} .

Теорема 9.2. *Нехай X_λ — кореневий простір, а X_λ^0 — власний підпростір, що відповідають $\lambda \in \sigma(\mathcal{P})$.*

(i) *Якщо $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma(B)$, то X_λ скінченновимірний, $X_\lambda = X_\lambda^0$. Базу в X_λ описано в (9.13).*

(ii) *Частина $\sigma(B) \setminus \sigma(A)$ спектру оператора \mathcal{P} складається з власних значень λ нескінченної кратності, яким відповідають власні простори $X_\lambda = X_\lambda^0$, породжені векторами (9.15).*

(iii) *Підмножина $\sigma(A) \cap \sigma(B)$ спектру \mathcal{P} теж складається з власних значень λ нескінченної кратності, проте $X_\lambda \neq X_\lambda^0$. В цьому разі, окрім власних векторів, існують кореневі вектори першого порядку, а базою в X_λ є система векторами, задана в (9.26)–(9.28). Вимірність фактор-простору X_λ/X_λ^0 не перевищує кратності λ в спектрі оператора A , а саме, виконуються нерівності*

$$\max(k_-, k_+) \leq \dim X_\lambda/X_\lambda^0 \leq k_- + k_+,$$

де k_- і k_+ — кратності λ в спектрах A_- і A_+ відповідно.

Зауважимо, що оператор \mathcal{P} завжди має власне значення $\lambda = 0$ нескінченної кратності, бо $0 \in \sigma(B)$. Це нульове власне значення є найменшим нескінченно-кратним власним значенням, оскільки оператор B є невід’ємним. Всі від’ємні власні значення, коли вони існують, мають скінченну кратність.

З погляду асимптотичного аналізу (але не з фізичного погляду) точки спектру оператора B , які породжують нескінченновимірні інваріантні простори для \mathcal{P} , схожі на резонанси нульової енергії для операторів Шредингера з попередніх розділів. Власні ж функції y задачі Штурма-Ліувілля (9.8) в цій моделі відіграють роль “напівзв’язних станів”.

9.1.2 Асимптотика спектру збуреного оператора

Асимптотика власних значень в околі множини $\sigma(B) \setminus \sigma(A)$

Розпочнемо дослідження з випадків, коли збурення пов'язані з нескінченнократними власними значеннями. Побудуємо асимптотику зліченної множини власних значень задачі (9.2) при $m = 2$, які збігаються до $\lambda_0 \in \sigma(B) \setminus \sigma(A)$. Шукатимемо асимптотичні розвинення власних елементів у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon + \dots, \quad u_\varepsilon(x) \sim \begin{cases} v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots, & \text{коли } x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ w_0(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon w_1(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \dots, & \text{коли } x \in \omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (9.29)$$

де (v_0, w_0) — ненульовий елемент з простору X_{λ_0} . Щоб узгодити розвинення на $\gamma_{\pm\varepsilon}$, запишемо функції v_k в локальних координатах (s, n) . Тоді з (9.4) дістанемо

$$\begin{aligned} w_0(s, \pm 1) + \varepsilon w_1(s, \pm 1) - v_0(s, \pm\varepsilon) - \varepsilon v_1(s, \pm\varepsilon) + \dots &\sim 0, \\ \varepsilon^{-1} \partial_n w_0(s, \pm 1) + \partial_n w_1(s, \pm 1) - \partial_r v_0(s, \pm\varepsilon) - \varepsilon \partial_r v_1(s, \pm\varepsilon) + \dots &\sim 0. \end{aligned}$$

Розвинемо $v_k(s, \pm\varepsilon)$ та їхні похідні в ряд Тейлора в односторонніх околах точки $n = 0$ при зафіксованому s . Зрозуміло, що $w_0(\cdot, \pm 1) = v_0^\pm$ та $\partial_n w_0(\cdot, \pm 1) = 0$, бо $(v_0, w_0) \in \text{dom } \mathcal{P}$. Крім того, $w_1(\cdot, \pm 1) = v_1^\pm \pm \partial_r v_0^\pm$ та $\partial_n w_1(\cdot, \pm 1) = \partial_r v_0^\pm$.

Підставимо розвинення (9.29) до задачі (9.2) при $m = 2$, врахувавши зображення (7.11) для оператора Лапласа. Тоді для пари (v_1, w_1) отримаємо задачу

$$-\Delta v_1 + a v_1 = \lambda_0 \rho v_1 + \lambda_1 \rho v_0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.30)$$

$$-\partial_n^2 w_1 = \lambda_0 q w_1 - \varkappa \partial_n w_0 + \lambda_1 q w_0 \quad \text{в } Q, \quad (9.31)$$

$$\partial_n w_1(\cdot, -1) = \partial_r v_0^-, \quad \partial_n w_1(\cdot, 1) = \partial_r v_0^+, \quad (9.32)$$

$$v_1^- = w_1(\cdot, -1) + \partial_r v_0^-, \quad v_1^+ = w_1(\cdot, 1) - \partial_r v_0^+ \quad (9.33)$$

з вільним параметром λ_1 . Задача (9.31), (9.32), взагалі кажучи, є несумісною, бо $\lambda_0 \in \sigma(B)$. Скористаємося альтернативою Фредгольма для самоспряженого оператора, пов'язаного із задачею Штурма-Ліувілля (9.8). Необхідна і достатня умова існування розв'язку задачі (9.31), (9.32) матиме вигляд

$$\partial_r v_0^- - \theta_{\lambda_0} \partial_r v_0^+ + \varkappa \int_{-1}^1 \partial_n w_0 y \, dn = \lambda_1 \int_{-1}^1 q w_0 y \, dn \quad \text{на } \gamma, \quad (9.34)$$

де \varkappa — кривина кривої γ , $y = y(n, \lambda_0)$ — власна функція (9.8), $y(-1, \lambda_0) = 1$, а також $\theta_{\lambda_0} = y(1, \lambda_0)$. Співвідношення (9.34) є спектральним рівнянням відносно λ_1 для деякого псевдодиференціального оператора на γ . Введемо в просторі $L_2(\gamma)$ два відображення типу Діріхле-Нейман. Нехай z — розв'язок задачі

$$-\Delta z + az = \lambda \rho z \text{ в } \Omega_{out}, \quad z = \varphi \text{ на } \gamma, \quad \ell z = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad (9.35)$$

для заданої функції φ . Тоді покладемо $N_\lambda^- \varphi = \partial_r z|_\gamma$, де

$$\text{dom } N_\lambda^- = \{\varphi \in L_2(\gamma) : z \in W_2^1(\Omega_{out}) \text{ і } \partial_r z|_\gamma \in L_2(\gamma)\}.$$

Таке означення відображення Діріхле-Нейман введене в праці [242], де і досліджено його властивості. Схоже визначимо відображення $N_\lambda^+ \varphi = -\partial_r z|_\gamma$ з областю визначення $\text{dom } N_\lambda^+ = \{\varphi \in L_2(\gamma) : z \in W_2^1(\Omega_{in}) \text{ і } \partial_r z|_\gamma \in L_2(\gamma)\}$, де z — розв'язок задачі

$$-\Delta z + az = \lambda \rho z \text{ в } \Omega_{in}, \quad z = \varphi \text{ на } \gamma. \quad (9.36)$$

Оператори N_λ^\pm перетворюють умови Діріхле на γ для розв'язків відповідних крайових задач в умови Неймана. Обидва оператори є коректно визначені, коли $\lambda \notin \sigma(A)$. Знак мінус в означенні N_λ^+ вказує на те, що напрямок осі r збігається з внутрішньою нормаллю на $\gamma = \partial\Omega_{in}$. У випадку, який ми аналізуємо, база в X_{λ_0} задана системою векторів (9.15), тому $w_0(s, n) = b_0(s)y(n)$, а v_0 — розв'язок задачі (9.14) при $b = b_0$. Тоді $\partial_r v_0^- = N_{\lambda_0}^- b_0$ та $\partial_r v_0^+ = -\theta_{\lambda_0} N_{\lambda_0}^+ b_0$. Отже, умова (9.34) набуває вигляду

$$N_{\lambda_0}^- b_0 + \theta_{\lambda_0}^2 N_{\lambda_0}^+ b_0 + \varkappa b_0 \int_{-1}^1 yy' dn = \lambda_1 b_0 \int_{-1}^1 qy^2 dn.$$

Зауважимо, що $\int_{-1}^1 yy' dn = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (y^2)' dn = \frac{1}{2} (\theta_{\lambda_0}^2 - 1)$. Введемо позначенням $\pi_{\lambda_0} = \int_{-1}^1 qy^2(n, \lambda_0) dn$. Тоді рівність (9.34) остаточно можна записати у вигляді

$$N_{\lambda_0} b_0 = \lambda_1 b_0, \quad (9.37)$$

де $N_\lambda = \pi_\lambda^{-1} (N_\lambda^- + \theta_\lambda^2 N_\lambda^+ + \frac{1}{2} (\theta_\lambda^2 - 1) \varkappa)$. Величини π_λ та θ_λ не залежать від вибору власної функції $y = y(n, \lambda)$, бо власні значення задачі Штурма-Ліувілля прості.

Лема 9.4. Для всіх $\lambda \notin \sigma(A)$ оператор N_λ є самоспряженим, обмеженим знизу і він має компактну резольвенту.

Доведення. Оператори N_λ^- і N_λ^+ самоспряжені, обмежені знизу і мають компактну резольвенту [242]. Тоді оператор $\pi_\lambda^{-1}(N_\lambda^- + \theta_\lambda^2 N_\lambda^+)$ має такі ж властивості, бо коефіцієнти лінійної комбінації додатні. Нарешті, N_λ є збуренням цього оператора оператором множення на дійснозначну обмежену функцію $\frac{1}{2\pi_\lambda}(\theta_\lambda^2 - 1)\varkappa(s)$, що завершує доведення. \square

Зауважимо, що рівняння (9.37) є операторним записом крайової задачі

$$-\Delta v_0 + av_0 = \lambda_0 \rho v_0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.38)$$

$$v_0^+ - \theta_{\lambda_0} v_0^- = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (9.39)$$

$$\theta_{\lambda_0} \partial_r v_0^+ - \partial_r v_0^- - \left(\frac{1}{2}(\theta_{\lambda_0}^2 - 1)\varkappa - \lambda_1 \pi_{\lambda_0}\right) v_0^- = 0 \quad \text{на } \gamma \quad (9.40)$$

з параметром λ_1 в умовах спряження. Задача є поєднанням рівностей (9.5), (9.7) і (9.34) із врахуванням того, що $w_0(s, n) = v_0^-(s)y(n)$.

Нехай $\{\lambda_1^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ – спектр оператора N_{λ_0} . Власні значення N_{λ_0} дають нам множину коректорів в асимптотиці $\lambda_k^\varepsilon \sim \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(k)}$ тих власних значень задачі (9.2), на які “розпадається” нескінченнократне власне значення λ_0 оператора \mathcal{P} . Щоб не ускладнювати і так непростий асимптотичний аналіз задачі, припустимо, що спектр оператора N_{λ_0} є простим, тобто розглянемо лише випадок, коли λ_0 внаслідок збурення розсипається на зліченну кількість простих власних значень. Нехай $\{b^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ – ортонормована база в $L_2(\gamma)$, складена з власних функцій N_{λ_0} .

Виберемо коректор $\lambda_1^{(k)}$ і покладемо $w_0 = w^{(k)} = b^{(k)}y$. Тоді функція $v_0 = v^{(k)}$ буде розв’язком задачі (9.14) з λ_0 та $b^{(k)}$ замість λ та b . Завдяки такому вибору $(v^{(k)}, w^{(k)})$ задача (9.31), (9.32) стає сумісною, бо виконується умова (9.37). Вона володіє розв’язками $w_1(s, n) = \hat{w}_1^{(k)}(s, n) + b_1(s)y(n)$, де $b_1 \in L_2(\gamma)$, а $\hat{w}_1^{(k)}$ – такий частковий розв’язок, що

$$\int_{-1}^1 qy \hat{w}_1^{(k)} dn = 0 \quad \text{для всіх } s \in S. \quad (9.41)$$

Тепер розв’язок задачі (9.30), (9.33) можна записати так $v_1 = \hat{v}_1^{(k)} + \tilde{v}_1$, де $\hat{v}_1^{(k)}$ (відповідно \tilde{v}_1) розв’язує задачу

$$-\Delta \phi + a\phi = \lambda \rho \phi + \lambda_1^{(k)} \rho v^{(k)} \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell \phi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \phi^- = g_-, \quad \phi^+ = g_+ \quad (9.42)$$

з умовами $g_\pm = \hat{w}_1^{(k)}(\cdot, \pm 1) \mp \partial_n v^{(k)}|_{\gamma_\pm}$ (відповідно $g_\pm = y(\pm 1)b_1$). Доданок $\hat{v}_1^{(k)}$ однозначно визначений, тоді як \tilde{v}_1 разом з b_1 ми виберемо нижче.

Нехай $a_0(s) = a(s, 0)$. Розглянемо задачу для (v_2, w_2) в асимптотиці u_ε :

$$-\Delta v_2 + av_2 = \lambda_0 \rho v_2 + \lambda_1 \rho v_1 + \lambda_2 \rho v_0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_2 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.43)$$

$$-\partial_n^2 w_2 = \lambda_0 q w_2 - (\varkappa \partial_n - \lambda_1 q) w_1 - (\varkappa^2 n \partial_n - \partial_s^2 + a_0 - \lambda_2 q) w_0 \quad \text{в } Q, \quad (9.44)$$

$$\partial_n w_2(\cdot, -1) = \partial_r v_1^- - \partial_r^2 v_0^-, \quad \partial_n w_2(\cdot, 1) = \partial_r v_1^+ + \partial_r^2 v_0^+, \quad (9.45)$$

$$v_2^- = w_2(\cdot, -1) + \partial_r v_1^- - \partial_r^2 v_0^-, \quad v_2^+ = w_2(\cdot, 1) - \partial_r v_1^+ - \partial_r^2 v_0^+. \quad (9.46)$$

Схожими міркуваннями дістаємо умову сумісності для задачі (9.44), (9.45)

$$(N_{\lambda_0} - \lambda_1^{(k)}) b_1 = \lambda_2 b^{(k)} + h_1^{(k)}, \quad (9.47)$$

де права частина визначена через уже відомі величини

$$\begin{aligned} h_1^{(k)} = & \theta_{\lambda_0} (\partial_r \hat{v}_1^{(k)}|_{\gamma_+} + \partial_r^2 v^{(k)}|_{\gamma_+}) - \partial_r \hat{v}_1^{(k)}|_{\gamma_-} + \partial_r^2 v^{(k)}|_{\gamma_-} - \\ & - \int_{-1}^1 (\varkappa \partial_n - \lambda_1^{(k)} q) y \hat{w}_1^{(k)} dn - \int_{-1}^1 (\varkappa^2 n y y' b^{(k)} - (\partial_s^2 b^{(k)} - a_0 b^{(k)}) y^2) dn. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Позаяк $\lambda_1^{(k)}$ є простим власним значенням N_{λ_0} , то наступний коректор в асимптотиці власного значення обчислюємо з умови сумісності $\lambda_2^{(k)} = -(h_1^{(k)}, b^{(k)})_{L_2(\gamma)}$ для рівняння (9.47). До того ж існує єдиний розв'язок $b_1^{(k)}$ цього рівняння, який підпорядкований умові $(b_1^{(k)}, b^{(k)})_{L_2(\gamma)} = 0$. Далі остаточно знаходимо $v_1^{(k)}$, вибравши \tilde{v}_1 як розв'язок (9.42) з умовами $g_\pm = y(\pm 1) b_1^{(k)}$. Виконання умови (9.47) дозволяє нам по чергово розв'язати задачі (9.44), (9.45) та (9.43), (9.46) і знайти $w_2^{(k)}$ та $v_2^{(k)}$. За таким алгоритмом можна послідовно побудувати всі члени асимптотичних розвинень (9.29). Ми ж обмежимося формальними асимптотичними формулами

$$\Lambda_\varepsilon^{(k)} = \lambda_0 + \lambda_1^{(k)} \varepsilon + \lambda_2^{(k)} \varepsilon^2 + \lambda_3^{(k)} \varepsilon^3, \quad (9.49)$$

$$\hat{u}_\varepsilon^{(k)}(x) = \begin{cases} v_0^{(k)}(x) + \varepsilon v_1^{(k)}(x) + \varepsilon^2 v_2^{(k)}(x) + \varepsilon^3 v_3^{(k)}(x) & \text{в } \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ w_0^{(k)}(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon w_1^{(k)}(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 w_2^{(k)}(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon^3 w_3^{(k)}(s, \frac{r}{\varepsilon}) & \text{в } \omega_\varepsilon \end{cases} \quad (9.50)$$

до членів порядку $O(\varepsilon^3)$, за допомогою яких побудуємо квазімоди оператора T_ε .

Функції $v_j^{(k)}$ і $w_j^{(k)}$ є гладкими за побудовою, бо гладкими є коефіцієнти a , ρ і q . Проте функція $\hat{u}_\varepsilon^{(k)}$, взагалі кажучи, не належить до $\text{dom } T_\varepsilon$, бо має розриви

на $\partial\omega_\varepsilon$. Знову скористаємося функцією ζ , яка описана на стор. 240 і зображена на рис. 7.4. Покладемо

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon^{(k)} = & \left([\hat{u}_\varepsilon^{(k)}]_\varepsilon + [\partial_r \hat{u}_\varepsilon^{(k)}]_\varepsilon (r - \varepsilon) \right) \zeta(r - \varepsilon) + \\ & + \left([\hat{u}_\varepsilon^{(k)}]_{-\varepsilon} + [\partial_r \hat{u}_\varepsilon^{(k)}]_{-\varepsilon} (r + \varepsilon) \right) \zeta(-r - \varepsilon). \end{aligned} \quad (9.51)$$

Ця функція відмінна від нуля лише в $\omega_{\beta+\varepsilon} \setminus \omega_\varepsilon$ і разом з похідною $\partial_r \eta_\varepsilon^{(k)}$ мають такі ж розриви на межі ω_ε , як функції $\hat{u}_\varepsilon^{(k)}$ та $\partial_r \hat{u}_\varepsilon^{(k)}$ відповідно. Тому $U_\varepsilon^{(k)} = \hat{u}_\varepsilon^{(k)} - \eta_\varepsilon^{(k)}$ належить до області визначення оператора T_ε . До того ж маємо оцінку

$$\sup_{x \in \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon} (|\eta_\varepsilon^{(k)}(x)| + |\Delta \eta_\varepsilon^{(k)}(x)|) \leq c\varepsilon^3, \quad (9.52)$$

яка впливає з малості стрибків $\hat{u}_\varepsilon^{(k)}$, $\partial_r \hat{u}_\varepsilon^{(k)}$ вздовж $\partial\omega_\varepsilon$. За побудовою асимптотики усі стрибки є порядку $O(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лема 9.5. *Нехай $m = 2$. Для кожного натурального k побудована вище пара $(\Lambda_\varepsilon^{(k)}, \|U_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)}^{-1} U_\varepsilon^{(k)})$ є квазімодулю оператора T_ε з похибкою $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Доведення. Для спрощення формул опускаємо індекс k в таких позначеннях, як $(\Lambda_\varepsilon^{(k)}, U_\varepsilon^{(k)})$, $v_j^{(k)}$, $w_j^{(k)}$ чи $\lambda_j^{(k)}$. Нехай $F_\varepsilon = (T_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon)U_\varepsilon$. Тоді, врахувавши рівняння для функцій v_j , поза замиканням множини ω_ε матимемо

$$\begin{aligned} F_\varepsilon = (-\Delta + a - \Lambda_\varepsilon \rho)U_\varepsilon = & \sum_{j=0}^3 \varepsilon^j (-\Delta v_j + a v_j - \rho \sum_{i=0}^j \lambda_i v_{j-i}) + \\ & + \Delta \eta_\varepsilon - a \eta_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon \rho \eta_\varepsilon = \Delta \eta_\varepsilon - a \eta_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon \rho \eta_\varepsilon. \end{aligned}$$

Тому $\sup_{x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon} |F_\varepsilon(x)| \leq c_1 \varepsilon^3$ згідно з (9.52). З огляду на зображення (7.11) маємо $\Delta - a + \varepsilon^{-2} \Lambda_\varepsilon q = \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j-2} p_j + \varepsilon^2 P_\varepsilon - a_\varepsilon$, де $p_0 = \partial_n^2 + \lambda_0 q$, $p_1 = -\varkappa \partial_n + \lambda_1 q$, $p_2 = -n \varkappa^2 \partial_n + \partial_s^2 - a(s, 0) + \lambda_2 q$, $p_3 = 2n \varkappa \partial_s^2 + n \varkappa' \partial_s - n^2 \varkappa^3 \partial_n - n a(s, 0) \partial_n + \lambda_3 q$, а також $a_\varepsilon(s, n) = a(s, \varepsilon n) - a(s, 0) - \varepsilon n \partial_n a(s, 0)$. Тоді в області ω_ε дістаємо

$$F_\varepsilon = (-\Delta + a - \varepsilon^{-2} \Lambda_\varepsilon q)U_\varepsilon = \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j-2} \sum_{i=0}^{j-i} p_i w_{j-i} - \varepsilon^2 P_\varepsilon U_\varepsilon + a_\varepsilon = -\varepsilon^2 P_\varepsilon U_\varepsilon + a_\varepsilon,$$

бо функції w_0, \dots, w_3 розв'язують рівняння $\sum_{i=0}^{j-i} p_i w_{j-i} = 0$. Тепер маємо

$$\sup_{x \in \omega_\varepsilon} |F_\varepsilon(x)| = \varepsilon^2 \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |P_\varepsilon U_\varepsilon(x)| + \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |a_\varepsilon(x)| \leq c_2 \varepsilon^2.$$

Отже, остаточно отримуємо оцінку

$$\|F_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)}^2 \leq \int_{\Omega \setminus \omega_\varepsilon} \rho |F_\varepsilon|^2 dx + \varepsilon^{-2} \int_{\omega_\varepsilon} q |F_\varepsilon|^2 dx \leq c_3 \varepsilon^6 + c_4 |\omega_\varepsilon| \varepsilon^2 \leq c_5 \varepsilon^3.$$

Основний внесок в $L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)$ -норму функції U_ε дає інтеграл $\varepsilon^{-2} \int_{\omega_\varepsilon} q |w_0|^2 dx$, який є порядку $O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тому $\|U_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)} \geq c_6 \varepsilon^{-1/2}$ для малих ε , тобто $\|U_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)}^{-1} \leq c_7 \varepsilon^{1/2}$. Остання нерівність та оцінка $\|F_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)} \leq c_8 \varepsilon^{3/2}$ дають

$$\|U_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)}^{-1} \|(T_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon)U_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)} = \|U_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)}^{-1} \|F_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)} \leq c_9 \varepsilon^2, \quad (9.53)$$

що доводить лему. □

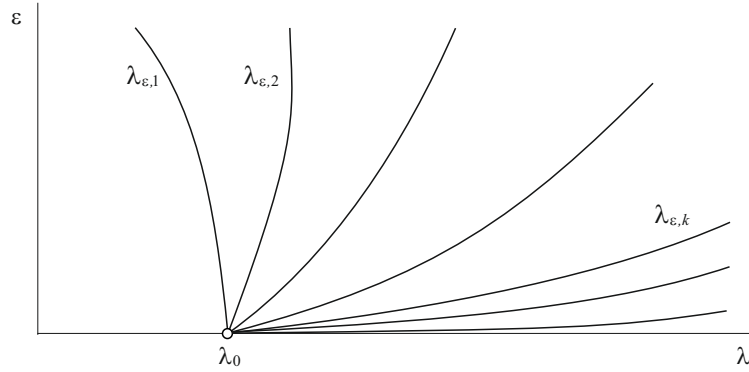


Рис. 9.1: Біфуркація власного значення $\lambda_0 \in \sigma(B) \setminus \sigma(A)$.

Теорема 9.3. *Нехай λ_0 – власне значення оператора \mathcal{P} з множини $\sigma(B) \setminus \sigma(A)$. Припустимо, що спектр $\{\lambda_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ оператора N_{λ_0} є простим. Тоді в спектрі оператора T_ε при $t = 2$ існує зліченна множина власних значень λ_k^ε , $k \in \mathbb{N}$, які збігаються до λ_0 і володіють асимптотикою*

$$\lambda_k^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(k)} + O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9.54)$$

Доведення. Зафіксуємо число $I \in \mathbb{N}$. З огляду на леми 5.2 і 9.5 існують такі власні значення $\lambda_{\varepsilon,1}, \dots, \lambda_{\varepsilon,I}$ оператора T_ε , що

$$|\lambda_k^\varepsilon - \Lambda_\varepsilon^{(k)}| = |\lambda_k^\varepsilon - (\lambda_0 + \lambda_1^{(k)} \varepsilon + \lambda_2^{(k)} \varepsilon^2 + \lambda_3^{(k)} \varepsilon^3)| \leq c_k \varepsilon^2$$

для $k = 1, 2, \dots, I$ та малих ε . Звідси випливає, що

$$|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_0 - \varepsilon \lambda_1^{(k)}| \leq C_I \varepsilon^2 \quad (9.55)$$

для деякої сталої C_I , залежної лише від I . Усі ці власні значення є попарно різними. Припустимо, що це не так і якийсь власне значення λ_ε оператора T_ε задовольняє одночасно дві нерівності, наприклад, коли $k = 1$ і $k = 2$. Тоді $\lambda_\varepsilon - \lambda_0 - \varepsilon\lambda_1^{(1)} \leq C_I\varepsilon^2$ і $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(2)} - \lambda_\varepsilon \leq C_I\varepsilon^2$. Додавши ці нерівності, дістанемо $\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)} \leq 2C_I\varepsilon$ для всіх ε достатньо малих. Проте це неможливо, бо спектр N_{λ_0} простий, а тому $\lambda_1^{(1)} < \lambda_1^{(2)}$. Нехай $\delta_I^\varepsilon = \varepsilon \max_{k=1, \dots, I} |\lambda_1^{(k)}| + C_I\varepsilon^2$. Тоді інтервал $[\lambda_0 - \delta_I^\varepsilon, \lambda_0 + \delta_I^\varepsilon]$ містить принаймні I різних власних значень оператора T_ε з асимптотикою (9.54). Залишилося зауважити, що число I довільне. \square

Асимптотика власних значень в околі множини $\sigma(A) \cap \sigma(B)$

Якщо перетин $\sigma(A) \cap \sigma(B)$ непорожній, то згідно з теоремою 9.2 оператор \mathcal{P} володіє кореневими векторами першого порядку. В структурі оператора присутні жорданові клітки розміру 2, тому асимптотика власних елементів матиме вигляд

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda_0 + \lambda_{1/2}\varepsilon^{1/2} + \lambda_1\varepsilon + \dots, \quad (9.56)$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \begin{cases} v_0(x) + \varepsilon^{1/2}v_{1/2}(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots, & \text{коли } x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ w_0(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon^{1/2}w_{1/2}(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon w_1(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \dots, & \text{коли } x \in \omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (9.57)$$

Головними членами асимптотики є власне значення $\lambda_0 \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$ та ненульовий елемент (v_0, w_0) власного підпростору $X_{\lambda_0}^0$, породженого векторами (9.20). Зокрема, $w_0(s, n) = b_0(s)y(n)$, де y — власна функція задачі (9.8), що відповідає λ_0 і підпорядкована умові $y(-1) = 1$, а b_0 — деяка функція з $L_2(\gamma)$. Нехай $\theta_{\lambda_0} = y(1)$. Підставляючи розвинення в задачу (9.2) при $m = 2$, дістанемо

$$-\Delta v_{1/2} + av_{1/2} = \lambda_0\rho v_{1/2} + \lambda_{1/2}\rho v_0 \text{ в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_{1/2} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (9.58)$$

$$-\partial_s^2 w_{1/2} = \lambda_0 q w_{1/2} + \lambda_{1/2} q w_0 \text{ в } Q, \quad (9.59)$$

$$\partial_n w_{1/2}(\cdot, -1) = 0, \quad \partial_n w_{1/2}(\cdot, 1) = 0, \quad (9.60)$$

$$v_{1/2}^- = w_{1/2}(\cdot, -1), \quad v_{1/2}^+ = w_{1/2}(\cdot, 1). \quad (9.61)$$

Рівняння (9.59) в циліндрі Q разом з крайовими умовами (9.60) можна записати так $(B - \lambda_0)w_{1/2} = \lambda_{1/2}b_0y$. Позаяк B самоспряжений, то розв'язок $w_{1/2}$ існує тоді і лише тоді, коли

$$\lambda_{1/2}b_0 = 0. \quad (9.62)$$

Ця умова є точкою розгалуження в нашому асимптотичному алгоритмі.

Асимптотики за цілими степенями: випадок $w_0 \neq 0$. Припустимо спершу, що функція b_0 відмінна від нуля, і тоді $\lambda_{1/2} = 0$. В цьому разі задача (9.58)–(9.61) збігається із задачею (9.5)–(9.7), а $(v_{1/2}, w_{1/2})$ належить до простору $X_{\lambda_0}^0$. Покладемо $(v_{1/2}, w_{1/2}) = 0$, вважаючи, що цей вектор увійшов в головний член асимптотики. До того ж легко переконатися, що у розвиненнях (9.56), (9.57) всі коефіцієнти $\lambda_{j/2}$, $(v_{j/2}, w_{j/2})$ з півцілими індексами нульові. Тобто у випадку $\lambda_{1/2} = 0$ ми повертаємо до цілостепеневі асимптотики (9.29), хоча алгоритм її побудови матиме деякі зміни. Річ у тім, що наступні члени λ_1 , (v_1, w_1) можна отримати із задачі (9.30)–(9.33), коли виконується умова її сумісності (9.34). Проте тепер цю умову не вдасться записати як спектральне рівняння для оператора N_{λ_0} , бо він не визначений для λ_0 зі спектру оператор A .

Ми “продовжимо” сім’ю операторів N_λ на множину $\sigma(A)$, звузивши простір, на якому вони діють. Зауважимо, що обидві задачі (9.35) та (9.36) мають розв’язки і коли $\lambda \in \sigma(A)$. Функція φ має бути ортогональною до підпростору $H_\lambda \subset L_2(\gamma)$, який породжений функціями (9.18), що впливає з леми 9.2. В цьому випадку існує єдиний розв’язок z задачі (9.35) (чи задачі (9.36)), який задовольняє умову $\partial_r z|_\gamma \perp H_\lambda$. Тому визначимо відображення типу Діріхле-Нейман $M_\lambda^- \varphi = \partial_r z|_\gamma$ на просторі H_λ^\perp , де z — розв’язок задачі (9.35), що належить до H_λ^\perp . Аналогічно, ми введемо відображення $M_\lambda^+ \varphi = -\partial_r z|_\gamma$, де $z \in H_\lambda^\perp$ — розв’язок задачі (9.36). Обидва оператори коректно визначені для усіх $\lambda \in \mathbb{C}$. Фактично, ми маємо

$$M_\lambda^\pm = (I - P_\lambda)N_\lambda^\pm(I - P_\lambda),$$

де P_λ — ортогональний проектор на H_λ . До того ж $M_\lambda^\pm = N_\lambda^\pm$ для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, оскільки в цьому разі $H_\lambda = \{0\}$. Умова (9.34) набуває вигляду $M_{\lambda_0} b_0 = \lambda_1 b_0$, де

$$M_\lambda = \pi_\lambda^{-1} (M_\lambda^- + \theta_\lambda^2 M_\lambda^+ + \frac{1}{2} (\theta_\lambda^2 - 1) \varkappa).$$

Псевдодиференціальний оператор M_λ має такі ж властивості, як N_λ .

Припустимо, що спектр M_{λ_0} простий, а $\lambda_1^{(k)}$ — k -те власне значення M_λ з нормованою в $L_2(\gamma)$ власною функцією $b^{(k)}$. Покладемо $w_0 = b^{(k)}(s)y(n)$. Також нехай λ_0 буде K -кратним власним значенням оператора A з власним підпростором \mathcal{V}_{λ_0} . Для скорочення деяких формул введемо вектор $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_K)$ з

власних функцій V_k , підпорядкованих умовам (9.12). Тоді головний член $v_0 = v_0^{(k)}$ в розвиненні (9.57) є розв'язком задачі (9.14) при $\lambda = \lambda_0$ та $b = b^{(k)}$ і має вигляд

$$v_0^{(k)}(x) = \hat{v}_0^{(k)}(x) + \alpha_0 \cdot \mathbf{V}(x),$$

де α_0 — довільний вектор з \mathbb{R}^K , а $\hat{v}_0^{(k)}$ — частковий розв'язок (9.14) такий, що $\hat{v}_0^{(k)} \perp \mathcal{V}_{\lambda_0}$. Крапка означає скалярний добуток в \mathbb{R}^K . Нижче ми однозначно визначимо $v_0^{(k)}$, обчисливши α_0 . Далі,

$$w_1(s, n) = \hat{w}_1^{(k)}(s, n) + b_1(s)y(n), \quad (9.63)$$

де $\hat{w}_1^{(k)}$ — частковий розв'язок (9.31), (9.32), який задовольняє умову (9.41), а b_1 — довільна $L_2(\gamma)$ -функція. Припустимо, що $b_1 = g_0 + g$, де $g_0 \in H_{\lambda_0}$ та $g \in H_{\lambda_0}^\perp$. Тоді задача (9.30), (9.33) матиме розв'язок

$$v_1 = \phi + \psi + \alpha_1 \cdot \mathbf{V}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}^K, \quad (9.64)$$

де ϕ та ψ обчислюємо із задач

$$\begin{aligned} -\Delta\phi + a\phi &= \lambda_0\rho\phi \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell\phi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \phi = y(\pm 1)g \quad \text{на } \gamma_\pm; \\ -\Delta\psi + a\psi &= \lambda_0\rho\psi + \lambda_1^{(k)}\rho \left(\hat{v}_0^{(k)} + \alpha_0 \cdot \mathbf{V} \right) \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell\psi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ \psi^\pm &= \hat{w}_1^{(k)}(\cdot, \pm 1) \mp \partial_r \hat{v}_0^{(k)} + y(\pm 1)g_0 \mp \alpha_0 \cdot \partial_r \mathbf{V} \quad \text{на } \gamma \end{aligned}$$

відповідно. А оскільки функція g ортогональна до H_{λ_0} , то перша задача сумісна і має розв'язок з $\mathcal{V}_{\lambda_0}^\perp$. Щодо другої, то умову її сумісності можна записати так $(C_{\lambda_0} - \lambda_1^{(k)})\alpha_0 = f$, де C_{λ_0} — квадратна симетрична матриця з елементами

$$c_{ij} = \int_{\gamma_+} \partial_r V_i \partial_r V_j d\gamma + \int_{\gamma_-} \partial_r V_i \partial_r V_j d\gamma, \quad i, j = 1, \dots, K,$$

а f — вектор правих частин з компонентами

$$\begin{aligned} f_i &= \lambda_1^{(k)} \int_{\Omega} \rho \hat{v}_0^{(k)} V_i dx + \int_{\gamma_+} (\hat{w}_1^{(k)} - \partial_r \hat{v}_0^{(k)} + \theta_{\lambda_0} g_0) \partial_r V_i d\gamma - \\ &\quad - \int_{\gamma_-} (\hat{w}_1^{(k)} + \partial_r \hat{v}_0^{(k)} + g_0) \partial_r V_i d\gamma, \quad i = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Коли $\lambda_1^{(k)}$ не є власним значенням C_{λ_0} , то покладемо $\alpha_0 = (C_{\lambda_0} - \lambda_1^{(k)})^{-1} f$, у такий спосіб виконавши умову сумісності задачі для ψ . Отже, друга задача теж

володіє розв'язком $\phi \in \mathcal{V}_{\lambda_0}^\perp$. Зауважимо, що вектор α_0 ще не визначений, бо f залежить від невідомої функції g_0 . Скористаємося зображеннями (9.63), (9.64), а також тим, що $g \in H_{\lambda_0}^\perp$, і запишемо умову сумісності для (9.44), (9.45) у вигляді

$$(M_{\lambda_0} - \lambda_1^{(k)})g = \lambda_2^{(k)}b^{(k)} + \lambda_1^{(k)}g_0 + h_1^{(k)}, \quad (9.65)$$

де функція $h_1^{(k)}$ задана в (9.48). Щоб рівняння (9.65) мало сенс, треба забезпечити ортогональність його правої частини до простору H_{λ_0} . Очевидно, що $b^{(k)}$ належить до $H_{\lambda_0}^\perp$. Далі, коли $\lambda_1^{(k)}$ відмінне від нуля, то існує єдиний вектор $g_0 \in H_{\lambda_0}$ такий, що $\lambda_1^{(k)}g_0 + h_1^{(k)} \in H_{\lambda_0}^\perp$. Тепер, маючи g_0 , можемо однозначно знайти f , α_0 і головний член асимптотики $(v_0^{(k)}, w_0^{(k)})$. Умова існування розв'язку рівняння (9.65) має вигляд $\lambda_2^{(k)} = -(h_1^{(k)} + \lambda_1^{(k)}g_0, b^{(k)})_{L_2(\gamma)}$. Тоді існує розв'язок g , підпорядкований умові $(g, b^{(k)})_{L_2(\gamma)} = 0$. І нарешті, ми можемо знайти $w_1^{(k)}$ та $v_1^{(k)}$ (з точністю до вектора α_1). Такий алгоритм дозволяє крок за кроком побудувати усі члени $\lambda_j^{(k)}$, $v_j^{(k)}$ і $w_j^{(k)}$ в наближеннях $\Lambda_\varepsilon^{(k)}$, $\hat{u}_\varepsilon^{(k)}$ вигляду (9.49), (9.50). Як і у попередньому випадку, $\hat{u}_\varepsilon^{(k)}$ можна підправити до елемента $U_\varepsilon^{(k)} = \hat{u}_\varepsilon^{(k)} - \eta_\varepsilon^{(k)}$ з області визначення оператора T_ε , де коректор $\eta_\varepsilon^{(k)}$ заданий формулою (9.52).

Під час побудови наближень ми зробили припущення, що $\lambda_1^{(k)}$ відмінне від нуля і не є власним значенням матриці C_{λ_0} . Нехай $\{\lambda_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ — ця частина спектру оператора M_{λ_0} , яка задовольняє вказані умови. Від повного спектру вона відрізняється не більше ніж $(K+1)$ -ю точкою. Тому ми побудували зліченну кількість асимптотичних формул (9.49), (9.50). Підсумуємо результат наших обчислень.

Лема 9.6. *Нехай $m = 2$. Пари $(\Lambda_\varepsilon^{(k)}, \|U_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)}^{-1} U_\varepsilon^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, є квазімодами оператора T_ε з похибкою $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, які апроксимують спектр оператора T_ε в околі точки $\lambda_0 \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$.*

Доведення леми схоже на доведення леми 9.5.

Асимптотики за цілими степенями: випадок $w_0 = 0$. Асимптотика вигляду (9.29) виникає і у випадку, коли одночасно $\lambda_{1/2} = 0$ і $b_0 = 0$. А оскільки

тепер $w_0 = 0$, то задача (9.30)–(9.33) набуває вигляду

$$-\Delta v_1 + av_1 = \lambda_0 \rho v_1 + \lambda_1 \rho v_0 \quad \text{in } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_1 = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (9.66)$$

$$-\partial_n^2 w_1 = \lambda_0 q w_1 \quad \text{in } \omega, \quad \partial_n w_1(\cdot, -1) = \partial_r v_0^-, \quad \partial_n w_1(\cdot, 1) = \partial_r v_0^+, \quad (9.67)$$

$$v_1^- = w_1(\cdot, -1) + \partial_r v_0^-, \quad v_1^+ = w_1(\cdot, 1) - \partial_r v_0^+. \quad (9.68)$$

Умова сумісності (9.34) для задачі (9.67) спрощується

$$\theta_{\lambda_0} \partial_r v_0^+ - \partial_r v_0^- = 0. \quad (9.69)$$

Вона набуває ще простішого вигляду $\alpha \cdot \Psi = 0$, якщо покласти $v_0 = \alpha \cdot \mathbf{V}$. Тут $\alpha \in \mathbb{R}^K \setminus \{0\}$, $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_K)$, а Ψ_k задані формулою (9.18). Нехай y_* — розв’язок задачі Коші $-y_*'' = \lambda_0 q y_*$ в $(-1, 1)$, $y_*(-1) = 0$, $y_*'(-1) = \theta_{\lambda_0}$. Тоді розв’язок задачі (9.67) є таким $w_1(s, n) = \theta_{\lambda_0}^{-1} y_*(n) \alpha \cdot \partial_r \mathbf{V}^-(s) + y(n) b_1(s)$, де b_1 — довільна функція класу $L_2(\gamma)$. Очевидно, що $\partial_n w_1(\cdot, -1) = \partial_r v_0^-$. Для розв’язків рівняння в (9.8) маємо рівність $(yy_*' - y_*'y)|_{-1}^1 = 0$, з якої отримуємо $y_*'(1) = 1$. Тому і друга умова виконується: $\partial_n w_1(\cdot, 1) = \theta_{\lambda_0}^{-1} \alpha \cdot \partial_r \mathbf{V}^- = \alpha \cdot \partial_r \mathbf{V}^+ = \partial_r v_0^+$, бо $\theta_{\lambda_0} \alpha \cdot \partial_r \mathbf{V}^+ = \alpha \cdot \partial_r \mathbf{V}^-$ згідно з (9.69). Задача (9.66), (9.68) набуває вигляду

$$-\Delta v_1 + av_1 = \lambda_0 \rho v_1 + \lambda_1 \rho \alpha \cdot \mathbf{V} \quad \text{in } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_1 = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (9.70)$$

$$v_1^- = \alpha \cdot \partial_r \mathbf{V}^- + b_1, \quad v_1^+ = \theta_{\lambda_0}^{-1} (y_*(1) - 1) \alpha \cdot \partial_r \mathbf{V}^- + \theta_{\lambda_0} b_1. \quad (9.71)$$

Досягти сумісності цієї задачі можна правильним вибором числа λ_1 та вектора α . Помножимо рівняння (9.70) почергово на V_1, \dots, V_K і проінтегруємо частинами з врахуванням умов (9.71). Ми отримаємо спектральне рівняння $L\alpha = \lambda_1 \alpha$ для симетричної матриці $L = (l_{ij})_{i,j=1}^K$ з елементами

$$l_{ij} = (\theta_{\lambda_0}^{-2} (1 - y_*(1)) + 1) \int_{\gamma} \partial_r V_i^- \partial_r V_j^- d\gamma. \quad (9.72)$$

Зауважимо, що матриця L не залежить від b_1 , з огляду на умову (9.69).

Отже, пара (λ_1, α) задовольняє дві умови $L\alpha = \lambda_1 \alpha$, $\alpha \cdot \Psi = 0$. Задача полягає у знаходженні таких власних векторів матриці L , які “ортогональні” до Ψ . Простір $h_{\lambda_0} = \{\alpha \in \mathbb{C}^K : \alpha \cdot \Psi = 0\}$ має вимірність $K - d$, бо $\dim H_{\lambda_0} = d$. Припустимо, що матриця L має прості власні значення ν_1, \dots, ν_p з власними векторами $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, які належать до h_{λ_0} . Зрозуміло, що $p \leq K - d$. Тепер для кожної пари

(ν_k, α_k) можемо розв'язати задачу (9.70), (9.71), знайшовши $v_1^{(k)} = \hat{v}_1^{(k)} + \alpha_1^{(k)} \cdot \mathbf{V}$ з точністю до вектора $\alpha_1^{(k)} \in \mathbb{R}^K$. З першої умови в (9.71) також знаходимо функцію $b_1^{(k)}(s) = \hat{v}_1^{(k)}(s, -1) - \alpha_k \cdot \partial_r \mathbf{V}(s, -1)$, а отже, $w_1^{(k)} = y_* \alpha_k \cdot \partial_r \mathbf{V}^- + y b_1^{(k)}$ тепер визначена однозначно.

Після розщеплення λ_0 на прості власні значення збуреної задачі можемо обчислити решту членів асимптотики і отримати нові квазімоди оператора T_ε вигляду

$$\Lambda_\varepsilon^{(k)} = \lambda_0 + \nu_k \varepsilon + \lambda_{2,k} \varepsilon^2 + \lambda_{3,k} \varepsilon^3, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$W_\varepsilon^{(k)}(x) = \begin{cases} \alpha_k \cdot \mathbf{V}(x) + \varepsilon v_1^{(k)}(x) + \varepsilon^2 v_2^{(k)}(x) + \varepsilon^3 v_3^{(k)}(x) - \eta_\varepsilon^{(k)}(x), & x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ \varepsilon w_1^{(k)}(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 w_2^{(k)}(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon^3 w_3^{(k)}(s, \frac{r}{\varepsilon}), & x \in \omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Лема 9.7. *Пари $(\Lambda_\varepsilon^{(k)}, \|W_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)}^{-1} W_\varepsilon^{(k)})$, $k = 1, \dots, p$, — квазімоди оператора T_ε з точністю $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, які апроксимують спектр оператора T_ε в околі точки $\lambda_0 \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$.*

Асимптотики за півцілими степенями Нехай число $\lambda_{1/2}$ в (9.57) відмінне від нуля, і тоді $b_0 = 0$ згідно з умовою (9.62). Тепер, згадуючи (9.20), маємо $v_0 = \beta_0 \cdot \mathbf{V}$, де β_0 — довільний одиничний вектор в \mathbb{R}^K . Задача (9.58)-(9.61) володіє розв'язком $w_{1/2}(s, n) = b_{1/2}(s)y(n)$, $v_{1/2} = \hat{v}_{1/2} + \beta_{1/2} \cdot \mathbf{V}$ де $\beta_{1/2} \in \mathbb{R}^K$, а $\hat{v}_{1/2}$ — частковий розв'язок задачі

$$-\Delta v_{1/2} + a v_{1/2} = \lambda_0 \rho v_{1/2} + \lambda_{1/2} \rho v_0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_{1/2} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.73)$$

$$v_{1/2}^- = b_{1/2}, \quad v_{1/2}^+ = \theta_{\lambda_0} b_{1/2}, \quad (9.74)$$

який ортогональний в $L_2(\rho, \Omega)$ до \mathcal{V}_{λ_0} . Нагадаємо, що $y(-1) = 1$ і $y(1) = \theta_{\lambda_0}$. Згідно з лемою 9.2 умова сумісності задачі (9.73), (9.74) є такою

$$\int_\gamma b_{1/2} \Psi d\gamma + \lambda_{1/2} \beta_0 = 0. \quad (9.75)$$

Наступні члени асимптотики є розв'язком задачі

$$-\Delta v_1 + a v_1 = \rho(\lambda_0 v_1 + \lambda_{1/2} v_{1/2} + \lambda_1 v_0) \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.76)$$

$$-\partial_n^2 w_1 = \lambda_0 q w_1 + \lambda_{1/2} q w_{1/2} \quad \text{в } Q, \quad (9.77)$$

$$\partial_n w_1(\cdot, -1) = \partial_r v_0^-, \quad \partial_n w_1(\cdot, 1) = \partial_r v_0^+, \quad (9.78)$$

$$v_1^- = w_1(\cdot, -1) + \partial_r v_0^-, \quad v_1^+ = w_1(\cdot, 1) - \partial_r v_0^+. \quad (9.79)$$

Задача (9.77), (9.78) сумісна тоді і лише тоді, коли $\theta_{\lambda_0} \partial_r v_0^+ - \partial_r v_0^- + \lambda_{1/2} b_{1/2} = 0$. Але оскільки $\partial_r v_0^\pm = \beta_0 \cdot \partial_r \mathbf{V}^\pm$, то її можна записати у вигляді

$$\beta_0 \cdot (\theta_{\lambda_0} \partial_r \mathbf{V}^+ - \partial_r \mathbf{V}^-) + \lambda_{1/2} b_{1/2} = 0,$$

або ж з позначеннями (9.18) так

$$\beta_0 \cdot \Psi + \lambda_{1/2} b_{1/2} = 0. \quad (9.80)$$

Помножимо цю рівність на Ψ^\top , проінтегруємо вздовж γ . Тоді, врахувавши (9.75), отримаємо $(G_{\lambda_0} - \lambda_{1/2}^2) \beta_0 = 0$, де G_{λ_0} — матриця Грама функцій Ψ_1, \dots, Ψ_K . Ця матриця невід’ємна і її ранг дорівнює вимірності простору H_{λ_0} .

Нехай ω^2 — додатне просте власне значення матриці G_{λ_0} з власним вектором β_0 . Тоді існують два різні коректори $\lambda_{1/2} = \omega$ і $\lambda_{1/2} = -\omega$ в розвиненні (9.56) з тим самим головним членом $v_0 = \beta_0 \cdot \mathbf{V}$ в асимптотиці власної функції (9.57). Спершу припустимо, що $\lambda_{1/2} = \omega$. Тоді з (9.80) маємо $b_{1/2} = -\omega^{-1} \beta_0 \cdot \Psi$. Далі можемо знайти $w_1(s, n) = \hat{w}_1(s, n) + b_1(s)y(n)$ з точністю до функції b_1 , де \hat{w}_1 — частковий розв’язок (9.77), (9.78), підпорядкований умові $(\hat{w}_1, y)_{L_2(q, (-1, 1))} = 0$. Задача (9.76), (9.79) сумісна, коли $\int_\gamma b_1 \Psi d\gamma + \omega \beta_{1/2} + \lambda_1 \beta_0 = h$, де

$$h = \int_{\gamma_+} (\hat{w}_1 - \partial_r v_0) \partial_r \mathbf{V}_k d\gamma - \int_{\gamma_-} (\hat{w}_1 + \partial_r v_0) \partial_r \mathbf{V} d\gamma - \omega \int_\Omega \rho \hat{v}_{1/2} \mathbf{V}_k dx,$$

а розв’язок задачі

$$-\partial_n^2 w_{3/2} = q(\lambda_0 w_{3/2} + \omega w_1 + \lambda_1 w_{1/2}) \quad \text{в } \omega, \quad \partial_n w_{3/2}(\cdot, \pm 1) = \partial_n v_{1/2}^\pm$$

існує тоді і лише тоді, коли

$$\partial_r v_{1/2}^- - \theta_{\lambda_0} \partial_r v_{1/2}^+ = \omega b_1 + \lambda_1 b_{1/2}. \quad (9.81)$$

Міркуючи, як на попередньому кроці алгоритму, умову можна записати так

$$(G_{\lambda_0} - \omega^2) \beta_{1/2} = 2\omega \lambda_1 \beta_0 - \omega h + f,$$

де $f = \int_{\gamma_-} \partial_r \hat{v}_{1/2} \Psi d\gamma - \theta_{\lambda_0} \int_{\gamma_+} \partial_r \hat{v}_{1/2} \Psi d\gamma$. А оскільки ω^2 є власним значенням G_{λ_0} , то системи має розв’язок $\beta_{1/2}$ тоді і лише тоді, коли

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\omega} \beta_0 \cdot (\omega h - f). \quad (9.82)$$

Хоча одиничний вектор β_0 визначений з точністю до знаку, величина λ_1 визначена однозначно, бо перетворення $\beta_0 \mapsto -\beta_0$ приводить до зміни знаку в h та f . Нехай розв'язок $\beta_{1/2}$ підпорядкований умові $\beta_{1/2} \cdot \beta_0 = 0$. Тоді з (9.81) маємо

$$b_1 = \frac{1}{\omega} \left(\partial_r \hat{v}_{1/2}^- - \theta_{\lambda_0} \partial_r \hat{v}_{1/2}^+ - \beta_{1/2} \cdot \Psi - \lambda_1 b_{1/2} \right).$$

Отже, для $\lambda_{1/2}^+ = \omega$ ми обчислили λ_1^+ , $w_{1/2}^{(+)}$, $w_1^{(+)}$ і $v_{1/2}^{(+)}$ в асимптотиці (9.56), (9.57). За таким алгоритмом можна отримати наступні члени апроксимації. Поклавши $\lambda_{1/2}^- = -\omega$ ми схожим чином обчислимо коефіцієнти λ_k^- , $w_k^{(-)}$ і $v_k^{(-)}$ в асимптотиці іншої пари власного значення та власної функції. До того ж простий аналіз цих формул дає рівності $w_{1/2}^{(-)} = -w_{1/2}^{(+)}$ і $v_{1/2}^{(-)} = -v_{1/2}^{(+)}$. Справді, за побудовою маємо $w_{1/2}^{(\pm)}(s, n) = \mp \omega^{-1} y(n) \beta_0 \cdot \Psi(s)$ і $v_{1/2}^{(\pm)}(x) = \pm v_*(x)$, де v_* — розв'язок задачі

$$\begin{aligned} -\Delta v + av &= \lambda_0 \rho v + \omega \rho \beta_0 \cdot \mathbf{V} \text{ в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v = 0 \text{ на } \partial\Omega, \\ v^- &= -\omega^{-1} \beta_0 \cdot \Psi, \quad v^+ = -\omega^{-1} \theta_{\lambda_0} \beta_0 \cdot \Psi, \end{aligned}$$

який ортогональний до \mathcal{V}_{λ_0} .

Лема 9.8. *Нехай $t = 2$, $\lambda_0 \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$ і $\dim H_{\lambda_0} = d$. Припустимо, що всі ненульові власні значення $\omega_1^2, \dots, \omega_d^2$ матриці G_{λ_0} є простими, а $\beta_{0,1}, \dots, \beta_{0,d}$ — відповідні нормовані власні вектори. Тоді оператор T_ε має d пар квазімод $(\hat{\mu}_{\varepsilon,j}^\pm, n_{\varepsilon,j}^\pm V_{\varepsilon,j}^{(\pm)})$ з похибкою $O(\varepsilon^{3/2})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, де $n_{\varepsilon,j}^\pm = \|V_{\varepsilon,j}\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)}^{-1}$ та*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\varepsilon,j}^\pm &= \lambda_0 \pm \varepsilon^{1/2} \omega_j + \sum_{k=2}^6 \varepsilon^{k/2} \lambda_{k/2,j}^\pm, \quad j = 1, \dots, d, \\ V_{\varepsilon,j}^{(\pm)} &= \beta_{0,j} \cdot \mathbf{V} \pm \varepsilon^{1/2} v_{*,j} + \sum_{k=2}^6 \varepsilon^{k/2} v_{k/2,j}^{(\pm)} - \eta_{\varepsilon,j}^{(\pm)} \text{ в } \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \\ V_{\varepsilon,j}^{(\pm)} &= \mp \varepsilon^{1/2} \omega_j^{-1} y\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \beta_{0,j} \cdot \Psi(s) + \sum_{k=2}^6 \varepsilon^{k/2} w_{k/2,j}^{(\pm)}\left(s, \frac{r}{\varepsilon}\right) \text{ в } \omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

Малий коректор $\eta_{\varepsilon,j}^{(\pm)}$ є таким, як в (9.51), і з ним $V_{\varepsilon,j}^{(\pm)}$ належить до області визначення оператора T_ε .

Доведення. Доведення різниться від доведення леми 9.5 лише оцінкою (9.53). Наближення власних значень і власних функцій побудовані з точністю до членів порядку $O(\varepsilon^3)$, а тому залишок F_ε (в позначеннях леми 9.5) оцінюється так

$\|F_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)} \leq c_1 \varepsilon^{3/2}$. Але головний член w_0 в цій асимптотиці дорівнює нулю, а тому $L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)$ -норма $V_{\varepsilon, j}^{(\pm)}$ є рівномірно обмеженою стосовно ε . Тоді нормівний множник $n_{\varepsilon, j}^\pm$ має додатну границю при $\varepsilon \rightarrow 0$ і

$$\|(T_\varepsilon - \hat{\mu}_{\varepsilon, j}^\pm)(n_{\varepsilon, j}^\pm V_{\varepsilon, j}^{(\pm)})\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)} = n_{\varepsilon, j}^\pm \|F_\varepsilon\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)} \leq c_2 \varepsilon^{3/2},$$

що завершує доведення. □

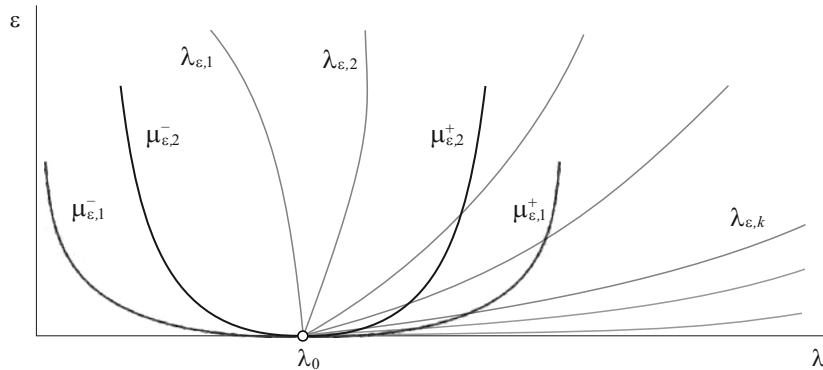


Рис. 9.2: Біфуркація власного значення $\lambda_0 \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$.

Теорема 9.4. *Нехай множина $\sigma(A) \cap \sigma(B)$ непорожня і λ_0 — власне значення граничного оператора \mathcal{P} , яке належить до цього перетину.*

(i) *Припустимо, що спектр $\{\lambda_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ оператора M_{λ_0} простий. Тоді існує зліченна множина власних значень λ_k^ε , $k \in \mathbb{N}$, в спектрі оператора T_ε при $m = 2$, які володіють асимптотикою $\lambda_k^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(k)} + O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

(ii) *Нехай $\dim H_{\lambda_0} = d$ і всі ненульові власні значення ω_j^2 матриці G_{λ_0} є простими. Тоді оператор T_ε також має $2d$ власних значень з асимптотикою*

$$\begin{aligned} \mu_{\varepsilon, j}^- &= \lambda_0 - \varepsilon^{1/2} \omega_j + \varepsilon \lambda_{1, j}^- + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \mu_{\varepsilon, j}^+ &= \lambda_0 + \varepsilon^{1/2} \omega_j + \varepsilon \lambda_{1, j}^+ + O(\varepsilon^{3/2}), \quad j = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, де $\lambda_{1, j}^\pm$ можна обчислити за формулою (9.82).

(iii) *Також оператор T_ε може мати не більше $K - d$ власних значень з асимптотикою $\lambda_i^\varepsilon = \lambda_0 + \nu_i \varepsilon + O(\varepsilon^2)$, де ν_i — прості власні значення матриці (9.72) з такими власними векторами α_i , що $\alpha \cdot \Psi = 0$.*

Доведення. Зафіксуємо $I \in \mathbb{N}$. З огляду на лему 9.6 існують такі власні значення $\lambda_{\varepsilon,1}, \dots, \lambda_{\varepsilon,I}$ оператора T_ε , що $|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_0 - \varepsilon\lambda_1^{(k)}| \leq c_I \varepsilon^2$ для $k = 1, 2, \dots, I$ та малих ε , причому вони попарно різні. Доведення цього факту таке ж, як доведення в теоремі 9.3. Аналогічно доводимо пункт (iii), скориставшись лемою 9.7. Далі згідно з лемою 9.8 існують $2d$ власних значень $\mu_{\varepsilon,1}^\pm, \dots, \mu_{\varepsilon,d}^\pm$ таких, що $|\mu_{\varepsilon,j}^\pm - \lambda_0 \mp \varepsilon^{1/2}\omega_j - \varepsilon\lambda_{1,j}^\pm| \leq c_I \varepsilon^{3/2}$. З додатності чисел ω_j випливає, що власні значення $\{\mu_{\varepsilon,j}^\pm\}_{j=1,\dots,d}$ при достатньо малих ε відрізняються від власних значень з пункту (iii) та власних значень $\{\lambda_1^{(k)}\}_{k=1,\dots,I}$. До того ж, знову міркуючи як в доведенні теореми 9.3, з простоти власних значень ω_j^2 матриці G_{λ_0} виводимо, що усі числа $\mu_{\varepsilon,j}^\pm$ попарно різні. Отже, ми показали, що при малих ε в $c\varepsilon^{1/2}$ -околі λ_0 існує принаймні $I + 2d$ різних власних значень оператора T_ε , причому $2d$ з них розташовані від λ_0 на відстані порядку $O(\varepsilon^{1/2})$, а решта на відстані порядку $O(\varepsilon)$. Залишилося зауважити, що I довільне натуральне число. \square

Яка ж роль жорданових ланцюгів довжини 2 та корневих векторів з цих ланцюгів у побудованій асимптотиці? Спершу зауважимо, що задача (9.58)–(9.61) для $(v_{1/2}, w_{1/2})$ з точністю до множника $\lambda_{1/2}$ в правій частині диференціальних рівнянь збігається із задачею (9.21)–(9.23) для корневих векторів. Якщо уважно придивитися до структури наближень $V_{\varepsilon,j}^{(\pm)}$ в лемі 9.8, то бачимо, що

$$V_{\varepsilon,j}^{(\pm)} = U_j \pm \varepsilon^{1/2}U_j^* + O(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

де вектори $U_j = (\beta_{0,j} \cdot \mathbf{V}(x), 0)$ та $U_j^* = (v_{*,j}(x), -\omega_j^{-1}y(n) \beta_{0,j} \cdot \Psi(s))$ утворюють жордановий ланцюг, що відповідає власному значенню λ_0 . Це спостереження має цікаву геометричну інтерпретацію. Оператор T_ε володіє парами власних значень з асимптотикою $\mu_{\varepsilon,j}^\pm = \lambda_0 \pm \omega_j \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, відповідні нормовані власні функції $u_{\varepsilon,j}^{(-)}$ та $u_{\varepsilon,j}^{(+)}$ яких збігаються в $L_2(\Omega)$ до однієї функції $v_{0,j} = \beta_{0,j} \cdot \mathbf{V}$. Хоча $u_{\varepsilon,j}^{(-)}$ та $u_{\varepsilon,j}^{(+)}$ залишаються ортогональними для усіх ε у лебеговому просторі $L_2(\rho_\varepsilon, \Omega)$ із сингулярною ваговою функцією, кут між ними стає нескінченно малим при $\varepsilon \rightarrow 0$ в просторі $L_2(\Omega)$ зі стандартною метрикою. В границі ці власні функції злипаються в одну і втрачається повнота системи граничних власних функцій в $L_2(\Omega)$. Проте площина, породжена векторами $u_{\varepsilon,j}^{(-)}$ і $u_{\varepsilon,j}^{(+)}$, має регулярну асимптотичну поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$, а її граничне положення — це лінійна оболонка функцій $\beta_{0,j} \cdot \mathbf{V}$ та $v_{*,j}$, які присутні в жордановому ланцюгу.

Насправді, ми маємо приклад сингулярно збуреної сім'ї самоспряжених операторів в змінних гільбертових просторах, коли повнота системи збурених власних функцій переходить в границі у певному сенсі в повноту системи власних і кореневих векторів граничного несамоспряженого оператора. Несамоспряжений оператор \mathcal{P} містить усю інформацію, яка необхідна для асимптотичного аналізу спектрів сім'ї самоспряжених операторів T_ε : (i) спектр \mathcal{P} — це гранична множина при $\varepsilon \rightarrow 0$ для спектрів $\sigma(T_\varepsilon)$; (ii) за кратностями власних значень \mathcal{P} можемо розбити збурений спектр на скінченні і нескінченні множини власних значень з однаковими границями; (iii) у випадку $\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$ вимірність простору H_λ або ж кількість ланцюгів Жордана визначають кількість власних значень з асимптотикою за півцілими степенями; (iv) елементи жорданових ланцюгів з'являються у квазімодах — формальній асимптотиці власних функцій оператора T_ε .

Асимптотика власних значень в околі множини $\sigma(A) \setminus \sigma(B)$

Ми також коротко опишемо збурення власних значень λ_0 оператора \mathcal{P} , які не належать до спектру оператора B . В цьому разі згідно з теоремою 9.2(i) власне значення λ_0 має скінченну кратність. В асимптотиці (9.29) маємо $v_0 = \alpha_0 \cdot \mathbf{V}$ та $w_0 = 0$, де $\alpha_0 \in \mathbb{R}^K \setminus \{0\}$. Тоді з (9.31) та (9.32) отримуємо

$$-\partial_n^2 w_1 = \lambda_0 q w_1 \text{ в } Q, \quad \partial_n w_1(\cdot, -1) = \alpha_0 \cdot \partial_r \mathbf{V}^-, \quad \partial_n w_1(\cdot, 1) = \alpha_0 \cdot \partial_r \mathbf{V}^+.$$

Ця задача завжди має єдиний розв'язок, бо $\lambda_0 \notin \sigma(B)$. Нехай $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_K)$, де W_k — розв'язки задач

$$-\partial_n^2 w = \lambda_0 q w \text{ в } Q, \quad \partial_n w(\cdot, -1) = \partial_r V_k^-, \quad \partial_n w(\cdot, 1) = \partial_r V_k^+.$$

Тоді маємо $w_1 = \alpha_0 \cdot \mathbf{W}$. Далі, перепишемо (9.30), (9.33) у вигляді

$$-\Delta v_1 + a v_1 = \lambda_0 \rho v_1 + \lambda_1 \rho \alpha_0 \cdot \mathbf{V} \text{ в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (9.83)$$

$$v_1^- = \alpha_0 \cdot (\mathbf{W}(\cdot, -1) + \partial_r \mathbf{V}^-), \quad v_1^+ = \alpha_0 \cdot (\mathbf{W}(\cdot, 1) - \partial_r \mathbf{V}^+). \quad (9.84)$$

Ця задача, взагалі кажучи, несумісна, бо $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Проте її сумісність можна досягти вибором вектора α_0 та числа λ_1 . Помноживши рівняння (9.83) почергово на V_1, \dots, V_K і проінтегрувавши двічі частинами з врахуванням умов (9.84),

отримаємо умову сумісності $R\alpha_0 = \lambda_1\alpha_0$. Матриця $R = (r_{ij})$ має елементи

$$r_{ij} = \int_{\gamma} ((W_i(\cdot, 1) - \partial_r V_i^+) \partial_r V_j^+ + (W_i(\cdot, -1) + \partial_r V_i^-) \partial_r V_j^-) d\gamma,$$

причому вона симетрична, бо легко перевірити рівності

$$\int_{\gamma} W_i(\cdot, \pm 1) \partial_r V_j^{\pm} d\gamma = \int_{\gamma} W_j(\cdot, \pm 1) \partial_r V_i^{\pm} d\gamma.$$

Припустимо, що матриця R має K простих власних значення $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(K)}$ з власними векторами $\alpha_0^{(1)}, \dots, \alpha_0^{(K)}$ відповідно. Для кожної пари $(\lambda_1^{(k)}, \alpha_0^{(k)})$ можемо розв'язати задачу (9.83), (9.84) і знайти $v_1^{(k)} = \hat{v}_1^{(k)} + \alpha_1^{(k)} \cdot \mathbf{V}$ з точністю до довільного вектора $\alpha_1^{(k)} \in \mathbb{R}^K$. Отже, ми знайшли перші коректори в асимптотиці власних значень та власних функцій. Продовжуючи крок за кроком цей алгоритм, дістанемо K різних квазімод з достатньо високою точністю для оператора T_{ε} , які апроксимують цю частину спектру, яка лежить в околі λ_0 .

Теорема 9.5. *Припустимо, що λ_0 — власне значення граничного оператора \mathcal{P} таке, що $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \sigma(B)$. Нехай λ_0 має кратність K , а власні значення $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(K)}$ матриці R є простими. Тоді в спектрі оператора T_{ε} при $m = 2$ існує K власних значень з асимптотикою $\lambda_k^{\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(k)} + O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

9.2 Локальні власні коливання в околі збуренням густини

У випадку $m = 3$ гранична спектральна задача виникає в околі кривої γ , а точніше на циліндрі Q . В цьому разі усі власні значення задачі (9.2) прямують до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, але формують зліченну кількість послідовностей з різною швидкістю збіжності. Власні коливання мембрани в певному сенсі концентруюся навколо кривої.

Шукатимемо асимптотику власних значень та власних функцій у вигляді

$$\lambda^{\varepsilon} \sim \varepsilon \mu_0 + \varepsilon^2 \mu_1 + \dots, \quad u_{\varepsilon}(x) \sim \begin{cases} v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots, & x \in \Omega \setminus \omega_{\varepsilon}, \\ w_0(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \varepsilon w_1(s, \frac{r}{\varepsilon}) + \dots, & x \in \omega_{\varepsilon}. \end{cases} \quad (9.85)$$

Підставляючи ці розвинення до задачі (9.2) при $m = 3$, для головних членів

дістанемо спектральну задачу

$$-\Delta v_0 + av_0 = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.86)$$

$$-\partial_n^2 w_0 = \mu_0 q w_0 \quad \text{в } Q, \quad \partial_n w_0(s, -1) = 0, \quad \partial_n w_0(s, 1) = 0, \quad (9.87)$$

$$v_0^- = w_0(s, -1), \quad v_0^+ = w_0(s, 1), \quad s \in S. \quad (9.88)$$

Відсутність спектрального параметра в рівнянні (9.86) для v_0 суттєво змінює природу граничної задачі. Зберігаючи усі позначення попереднього підрозділу (див. стор. 274), задачу (9.86)–(9.88) можемо трактувати як узагальнену задачу на власні значення $\mathcal{P}u_0 = \mu_0 \mathcal{Q}u_0$ з виродженою матрицею \mathcal{Q} коло спектрального параметра, а саме

$$\begin{pmatrix} \mathring{A} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \text{dom } \mathcal{P}. \quad (9.89)$$

Теорема 9.6. *Якщо оператор A , визначений на с. 275, є оборотним, то множина власних значень узагальненої спектральної задачі (9.89) збігається зі спектром оператора B . Всі власні значення задачі мають нескінченну кратність.*

Доведення. Згідно з лемою 9.1 спектр оператора B збігається зі спектром оператора Штурма-Ліувілля із задачі (9.8). Нехай $\mu_0 \in \sigma(B)$. Тоді існує ненульовий розв’язок y задачі (9.8) з $\lambda = \mu_0$. Задача (9.87) має розв’язки вигляду $w_0(s, n) = b(s)y(n)$, де b — довільна функція з простору $L_2(\gamma)$. Нормуємо власну функцію y умовою $y(-1) = 1$ і нехай $\theta_{\mu_0} = y(1)$. Тоді v_0 задовольняє задачу

$$-\Delta v_0 + av_0 = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad v_0^- = b, \quad v_0^+ = \theta_{\mu_0} b, \quad (9.90)$$

яка завжди має єдиний розв’язок, бо оператор A оборотний. Отже, (v_0, by) — власні вектори задачі (9.89) для кожної функції $b \in L_2(\gamma)$. Зрозуміло, що вони породжують нескінченновимірний власний підпростір. Якщо ж μ_0 не є точкою спектру B , то $w_0 = 0$. Тоді з (9.90) маємо $Av_0 = 0$, а з оборотності A дістаємо, що і функція v_0 є нульовою. \square

Зауважимо, що коли оператор A має нульове власне значення, то “спектр” задачі (9.89) — множина усіх μ_0 , при яких існують нетривіальні розв’язки — збігається з усією комплексною площиною. Справді, навіть коли μ_0 лежить поза

спектром B , то існують ненульові розв'язки цього матричного рівняння, а саме, $(v_0, 0)$, де $v_0 \in \ker A$. Тому надалі вважатимемо, що оператор A оборотний.

Припустимо, що μ_0 — власне значення задачі (9.89) з власним підпростором X_{μ_0} , який породжений векторами (v_0, by) , де b — довільна функція $L_2(\gamma)$, а v_0 — розв'язок (9.90). Нехай (v_0, w_0) — ненульовий елемент X_{μ_0} , де $w_0 = b_0(s)y(n)$. Наступні члени асимптотики треба шукати із задачі

$$-\Delta v_1 + av_1 = \mu_0 \rho v_0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.91)$$

$$-\partial_n^2 w_1 = \mu_0 q w_1 - \varkappa \partial_n w_0 + \mu_1 q w_0 \quad \text{в } Q, \quad (9.92)$$

$$\partial_n w_1(\cdot, -1) = \partial_r v_0^-, \quad \partial_n w_1(\cdot, 1) = \partial_r v_0^+, \quad (9.93)$$

$$v_1^- = w_1(\cdot, -1) + \partial_r v_0^-, \quad v_1^+ = w_1(\cdot, 1) - \partial_r v_0^+. \quad (9.94)$$

А оскільки $\mu_0 \in \sigma(B)$, то задача (9.92), (9.93) сумісна тоді і лише тоді, коли

$$K_{\mu_0} b_0 = \mu_1 b_0, \quad b_0 \neq 0, \quad (9.95)$$

де оператор K_μ має вигляд $K_\mu = \pi_\mu^{-1}(N_0^- + \theta_\mu^2 N_0^+ + \frac{1}{2}(\theta_\mu^2 - 1)\varkappa)$. Тут N_0^\pm — відображення Діріхле-Нейман N_λ^\pm , взяті при $\lambda = 0$, $\pi_\mu = \int_{-1}^1 q y^2(n, \mu) dn$, $\theta_\mu = y(1, \mu)$, а \varkappa — кривина кривої γ . Псевдодиференціальні оператори N_0^\pm коректно визначені, бо A оборотний. Оператор K_μ є самоспряженим, обмеженим знизу і з компактною резольвентою, що доводиться дослівно як в лемі 9.4 для N_λ . Отже, за допомогою оператора K_{μ_0} нескінченнократне власне значення μ_0 можна розщепити на серію власних значень λ_k^ε оператора T_ε скінченної кратності. Власні значення $\mu_1^{(k)}$ є першими коректорами в асимптотиках $\lambda_k^\varepsilon \sim \varepsilon(\mu_0 + \varepsilon \mu_1^{(k)})$.

Нехай спектр $\{\mu_1^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ оператора K_{μ_0} є простим, а $\{b^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ — ортонормована база в $L_2(\gamma)$, складена з відповідних власних функцій. Вибравши коректор $\mu_1^{(k)}$, покладемо $w_0 = w^{(k)} = b^{(k)}y$. Функція $v_0 = v^{(k)}$ буде розв'язком задачі (9.90) при $b = b^{(k)}$. Тепер задача (9.92), (9.93) є сумісною і має сім'ю розв'язків

$$w_1(s, n) = \hat{w}_1^{(k)}(s, n) + b_1(s)y(n),$$

де частковий розв'язок $\hat{w}_1^{(k)}$, підпорядкований умові (9.41), а b_1 — довільна $L_2(\gamma)$ -функція. Розв'язок задачі (9.91), (9.94) складається з двох доданків $v_1 = \hat{v}_1^{(k)} + \tilde{v}_1$. Перший з них відомий і його знаходимо із задачі

$$-\Delta \phi + a\phi = \mu_0 \rho v^{(k)} \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell \phi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \phi^- = g_-, \quad \phi^+ = g_+ \quad (9.96)$$

з умовами $g_{\pm} = \hat{w}_1^{(k)}(\cdot, \pm 1) \mp \partial_n v^{(k)}|_{\gamma_{\pm}}$. Другий доданок \tilde{v}_1 залежить від ще не визначеної функції b_1 і є розв'язком цієї ж задачі, але з умовами $g_{\pm} = y(\pm 1)b_1$.

На наступному кроці алгоритму розглянемо задачу для μ_2 та (v_2, w_2) :

$$-\Delta v_2 + av_2 = \mu_0 \rho v_1 + \mu_1 \rho v_0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_2 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.97)$$

$$-\partial_n^2 w_2 = \mu_0 q w_2 - (\mathcal{X}\partial_n - \mu_1 q)w_1 - (\mathcal{X}^2 n \partial_n - \partial_s^2 + a_0 - \mu_2 q)w_0 \quad \text{в } Q, \quad (9.98)$$

$$\partial_n w_2(\cdot, -1) = \partial_r v_1^- - \partial_r^2 v_0^-, \quad \partial_n w_2(\cdot, 1) = \partial_r v_1^+ + \partial_r^2 v_0^+, \quad (9.99)$$

$$v_2^- = w_2(\cdot, -1) + \partial_r v_1^- - \partial_r^2 v_0^-, \quad v_2^+ = w_2(\cdot, 1) - \partial_r v_1^+ - \partial_r^2 v_0^+, \quad (9.100)$$

де $a_0 = a(s, 0)$ — звуження потенціалу a на криву γ . Схожими міркуваннями дістаємо умову сумісності для задачі (9.98), (9.99)

$$(K_{\mu_0} - \mu_1^{(k)})b_1 = \mu_2 b^{(k)} + h_1^{(k)}, \quad (9.101)$$

де права частина визначена через відомі величини

$$h_1^{(k)} = \partial_r \hat{v}_1^{(k)}|_{\gamma_-} - \partial_r^2 v^{(k)}|_{\gamma_-} - \theta_{\mu_0} (\partial_r \hat{v}_1^{(k)}|_{\gamma_+} + \partial_r^2 v^{(k)}|_{\gamma_+}) + \\ + \int_{-1}^1 (\mathcal{X}^2 n y y' b^{(k)} - (\partial_s^2 b^{(k)} - a_0 b^{(k)})y^2) dn - \int_{-1}^1 (\mathcal{X}\partial_n - \mu_1^{(k)}q)y \hat{w}_1^{(k)} dn. \quad (9.102)$$

Рівняння (9.101) матиме розв'язок при умові $\mu_2^{(k)} = -(h_1^{(k)}, b^{(k)})_{L_2(\gamma)}$, що дає нам наступний член в асимптотиці власного значення. До того ж існує єдиний розв'язок $b_1^{(k)}$, підпорядкований умові $(b_1^{(k)}, b^{(k)})_{L_2(\gamma)} = 0$. Тепер знаходимо $v_1^{(k)}$, вибравши \tilde{v}_1 як розв'язок (9.96) з умовами $g_{\pm} = y(\pm 1)b_1^{(k)}$. Рівняння (9.101) забезпечує сумісність задачі (9.98), (9.99), тому знаходимо $w_2^{(k)}$ і $v_2^{(k)}$ з точністю до деякої функції $b_2 \in L_2(\gamma)$ в структурі $w_2^{(k)}$. Після розщепленням власного значення μ_0 на першому кроці алгоритму далі він стає досить простим і його можна продовжити, послідовно обчисливши члени асимптотичних розвинень (9.29). Ми ж обмежимося формальними асимптотичними формулами

$$\Lambda_{\varepsilon}^{(k)} = \varepsilon \mu_0 + \sum_{i=1}^4 \mu_i^{(k)} \varepsilon^{i+1}, \quad \hat{u}_{\varepsilon}^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i v_i^{(k)}(x) & \text{в } \Omega \setminus \omega_{\varepsilon}, \\ \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i w_i^{(k)}(s, \frac{r}{\varepsilon}) & \text{в } \omega_{\varepsilon}, \end{cases} \quad (9.103)$$

$k \in \mathbb{N}$, за допомогою яких побудуємо зліченну множину квазімод T_{ε} при $m = 3$.

Тепер виберемо пару $(\Lambda_\varepsilon^{(k)}, \hat{u}_\varepsilon^{(k)})$ і скористаємося коректором $\eta_\varepsilon^{(k)}$, визначеним як у (9.51). Тоді функція $U_\varepsilon^{(k)} = \hat{u}_\varepsilon^{(k)} - \eta_\varepsilon^{(k)}$ належатиме до області визначення оператора T_ε , бо є неперервно диференційовною на кривій γ .

Лема 9.9. *Нехай $t = 3$. Побудовані вище пари $(\Lambda_\varepsilon^{(k)}, \|U_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2(\rho_\varepsilon, \Omega)}^{-1} U_\varepsilon^{(k)})$ для кожного натурального k є квазімодами оператора T_ε з похибкою $O(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, які апроксимують спектр цього оператора в околі точки $\mu_0 \in \sigma(B)$.*

Доведення цієї леми схоже на доведення леми 9.5.

Теорема 9.7. *Нехай в задачі (9.2) крайові умови $\ell u_\varepsilon = 0$ і потенціал a вибрані так, що задача $-\Delta u + au = 0$ в $\Omega \setminus \gamma$, $\ell u = 0$ на $\partial\Omega$, $u = 0$ на γ має лише тривіальний розв'язок. Тоді спектр задачі (9.2), а точніше спектр оператора T_ε при $t = 3$, містить зліченну кількість послідовностей власних значень, які прямують до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, проте мають різну швидкість прямування залежно від послідовності.*

Нехай μ_0 — власне значення оператора B , а спектр $\{\mu_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ оператора K_{μ_0} є простим. Тоді існує зліченна серія власних значень λ_k^ε , $k \in \mathbb{N}$, в спектрі T_ε при $t = 3$, які володіють асимптотикою

$$\lambda_k^\varepsilon = \varepsilon \mu_0 + \varepsilon^2 \mu_1^{(k)} + O(\varepsilon^3) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9.104)$$

Доведення. З огляду на леми 5.2 і 9.9 для кожного натурального числа I існують власні значення $\lambda_{\varepsilon,1}, \dots, \lambda_{\varepsilon,I}$ оператора T_ε такі, що

$$\left| \lambda_k^\varepsilon - \varepsilon \sum_{i=0}^4 \mu_i^{(k)} \varepsilon^i \right| \leq c_k \varepsilon^3.$$

для $k = 1, 2, \dots, I$ та малих ε . Звідси відразу випливає, що

$$|\lambda_k^\varepsilon - \varepsilon \mu_0 - \varepsilon^2 \mu_1^{(k)}| \leq C_I \varepsilon^3. \quad (9.105)$$

з деякою сталою C_I , незалежною від k і ε . З цієї оцінки та простоти спектру K_{μ_0} робимо висновок, що всі числа $\lambda_{\varepsilon,1}, \dots, \lambda_{\varepsilon,I}$ попарно різні при малих ε . Деталі доведення містять в доведенні теореми 9.3. Отже, при достатньо малих ε в околі порядку $O(\varepsilon^2)$ числа $\varepsilon \mu_0$ міститься довільна наперед задана кількість власних значень оператора T_ε з асимптотикою (9.104). \square

В праці [221] ми вивчали спектральну задачу

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega$$

з умовами Діріхле та ваговою функцією ρ_ε , заданою в (9.1). Якщо власні значення цієї задачі занумерувати за зростанням із врахуванням кратності

$$0 < \lambda_{\varepsilon,1} < \lambda_{\varepsilon,2} \leq \lambda_{\varepsilon,3} \leq \dots \leq \lambda_{\varepsilon,k} \leq \dots, \quad (9.106)$$

то при $m > 1$ для кожного з них виконується нерівність $c\varepsilon^{m-1} \leq \lambda_{\varepsilon,k} \leq c_k\varepsilon^{m-1}$. Це впливає з варіаційного принципу Куранта. Такі власні значення володіють асимптотикою $\lambda_{\varepsilon,k} = \varepsilon^{m-1}(\eta_k + o(1))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, де η_k — власні значення задачі

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad [u]_\gamma = 0, \quad [\partial_r u]_\gamma + \eta q_0 u = 0$$

та $q_0 = \int_{-1}^1 q(t) dt$. У випадку $m = 3$ власні значення мали б бути порядку $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а не $O(\varepsilon)$, як ми довели вище. Проте цей результат не суперечить теоремі 9.7, як зрештою і теоремам 9.3 і 9.4 для $m = 2$. Річ у тім, що нумерація (9.106) охоплює лише першу серію власних значень, яка відповідає $\mu_0 = 0$. Зауважимо, що нуль є точкою спектру оператора B .

Наслідок 9.2. *Нехай виконуються умови теореми 9.7. Тоді задачі (9.2) при $m = 3$ має серію власних значень з асимптотикою $\lambda_{\varepsilon,k} = \eta_k \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, де η_k — власні значення задачі*

$$-\Delta v + av = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad [v]_\gamma = 0, \quad [\partial_r v]_\gamma + \eta q_0 v = 0 \quad \text{на } \gamma \quad (9.107)$$

зі спектральним параметром η в умовах спряження.

Доведення. Звісно, серія власних значень порядку $O(\varepsilon^2)$ існує. Достатньо в асимптотичних формулах (9.104) покласти $\mu_0 = 0$. Покажемо, що в цьому разі спектральне рівняння (9.95) рівносильне задачі (9.107). Рівняння $K_{\mu_0} b_0 = \mu_1 b_0$ насправді виникло із крайової задачі

$$-\Delta v_0 + av_0 = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad \ell v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9.108)$$

$$v^+ - \theta_{\mu_0} v^- = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (9.109)$$

$$\theta_{\mu_0} \partial_r v_0^+ - \partial_r v_0^- - \left(\frac{1}{2}(\theta_{\mu_0}^2 - 1)\varkappa - \mu_1 \pi_{\mu_0}\right) v_0^- = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (9.110)$$

якщо прийняти $b_0 = v_0^-$ (порівняйте із задачею (9.38)–(9.40)). Для $\mu_0 = 0$ маємо, що $y = 1$, а тому $\theta_0 = 1$ та $\pi_0 = q_0$. Замінивши μ_1 на η , із задачі (9.108)–(9.110) дістаємо задачу (9.107). \square

Наслідок 9.3. *Задача (9.2) при $m = 2$ має послідовність нескінченно малих власних значень з асимптотикою $\lambda_{\varepsilon,k} = \varepsilon\nu_k + O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, де ν_k – власні значення спектральної задачі (9.107). Крім того, якщо нуль є точкою спектру оператор A , то задача (9.2) також має скінченний набір малих власних значень з асимптотикою $\mu_{\varepsilon,j}^{\pm} = \pm\omega_j\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $j = 1, \dots, d$, де величини ω_j та d визначені в теоремі 9.4.*

Доведення. Існування нескінченно малих власних значень при $m = 2$ впливає безпосередньо з теорем 9.3 і 9.4 разом зі спостереженням, що $\lambda_0 = 0$ завжди належить до спектру оператора \mathcal{P} . А також задача (9.38), (9.40) в цьому разі трансформується в задачу (9.107). \square

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є дослідженням в теорії самоспряжених лінійних операторів та спектральній теорії диференціальних операторів. Вона містить нові результати з теорії операторів Шредингера та Штурма-Ліувілля, теорії крайових задач для еліптичних операторів, які мають безпосереднє застосування у сучасній фізичній науці, зокрема, нерелятивістській квантовій механіці, теорії сильно неоднорідних середовищ, а також нанотехнологіях. Запропоновано новий метод дослідження рівномірної і сильної резольвентних збіжностей сімей сингулярно збурених операторів, який ґрунтується на асимптотичному аналізі розв'язків диференціальних рівнянь. Шляхом встановлення рівномірної резольвентної збіжності операторів Шредингера із локальними збуреннями потенціалів побудовано важливі у фізиці точні моделі, які є найкращими апроксимаціями цих сімей операторів в класі операторів Шредингера з точковими взаємодіями чи взаємодіями на кривих. В разі, коли немає рівномірної резольвентної збіжності, точні моделі отримано як результат асимптотичного аналізу спектрів таких операторів. Побудовано теорію операторів Шредингера з $(a\delta' + b\delta)$ -подібними збуреннями потенціалів та теорію одновимірного атома водню. Обидві фізичні проблеми були предметом багаторічних наукових дискусій.

Запропоноване правильне математичне формулювання проблеми δ' -потенціалу, за якою ховалося багато нерозв'язаних математичних задач. Доведена рівномірна резольвентна збіжність операторів Шредингера з різноманітними $(a\delta' + b\delta)$ -подібними збуреннями потенціалів і збуреннями рангу два. Описано клас породжених точковими взаємодіями самоспряжених операторів, які виникають як оператори енергії у квантових системах з локалізованими диполями. Результати узагальнені на випадок двовимірних операторів Шредингера зі збуреннями

потенціалів дипольного характеру в околі замкнених кривих.

Знайдено відповідь на основне питання в одновимірній моделі атома водню, а саме, чи потенціали Кулона — потенціали зі степеневою особливістю — є проникним для частинок. Для класу операторів Шрединґера з природними регуляризаціями потенціалів типу Кулона доведена рівномірна резольвентна збіжність та знайдені точні моделі. З отриманих результатів випливає, що кожен потенціал типу Кулона залежно від способу регуляризації може бути як проникним, так і відбивним. Також встановлено критерій проникності.

Для операторів Шрединґера з нелінійною залежністю потенціалів від сталої взаємодії знайдено умови, при яких існують від'ємні власні значення з пороговою поведінкою, а саме, коли їх поглинає нижня межа неперервного спектру. Побудовані асимптотичні формули для порогових власних значень. Досліджено також вплив δ' -подібних збурень вагових функцій на спектр операторів Штурма-Ліувілля та еліптичних диференціальних операторів в двовимірних обмежених областях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I: Functional Analysis, Academic Press, New York–London, 1972. [1.2](#), [1.3](#), [1.3.1](#)
- [2] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Москва: Наука, 1986. [1.1](#), [1.5](#)
- [3] Čurgus B., Langer H. A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function. J. Diff. Eq. **79** (1989), no. 1, 31–61. [1.1](#)
- [4] Iohvidov I. S., Krein M. G. and Langer H. Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. Mathematical Research 9, Akademie-Verlag, Berlin, 1982. [1.1](#)
- [5] Chernoff P., Hughes R. A new class of point interactions in one dimension. J. Funct. Anal. – 1993. – V. 111, no. 1. – P. 97–117. [1.6](#)
- [6] Šeba P. The generalized point interaction in one dimension/ P. Šeba // Czech. J. Phys. B. – 1986. – V. 36. – P. 667–673. [1.6](#)
- [7] Головатий Ю. Д., Манько С. С. Точні моделі для операторів Шредінгера з δ' -подібними потенціалами. Укр. матем. вісник. – 2009. – Т. 6, № 2. – С. 173–207. ([document](#))
- [8] Golovaty Yu., Hryniv R. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ' -like potentials, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010), no. 15, 155204 (14pp); Corrigendum J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011), 049802; arXiv:0911.1046[math.SP]. ([document](#))

- [9] Golovaty Yu. D. and Hryniv R. O. Norm resolvent convergence of singularly scaled Schrödinger operators and δ' -potentials. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 143 (2013), 791–816. ([document](#))
- [10] Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом, Докл. АН СССР, 137:5 (1961), 1011–1014. [1.2](#)
- [11] Kronig R., Penney W. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices. Proc. Roy. Soc. (London), 1931, **130A** 499.
- [12] Albeverio S., Gesztesy F. Høegh-Krohn R. and Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics. (Providence, RI: AMS Chelsea Publishing), 2005, 488 pp. [1.2.1](#), [2.5](#), [3.5](#), [3.5](#)
- [13] Albeverio S. and Kurasov P. Singular Perturbations of Differential Operators. Solvable Schrödinger Type Operators (London Mathematical Society Lecture Note Series vol 271)(Cambridge: Cambridge University Press), 1999, 429 pp. [1.2.1](#)
- [14] Exner P., Neidhardt H., Zagrebnov V. Potential approximations to δ' : an inverse Klauder phenomenon with norm-resolvent convergence. Commun. Math. Phys. **224** (2001), 5930–612. [1.2.1](#), [2.5](#)
- [15] Cardone G., Khrabustovskyi A. (2019). δ' -interaction as a limit of a thin Neumann waveguide with transversal window. Journal of mathematical analysis and applications, 473(2), 1320–1342. [1.2.1](#)
- [16] Šeba P. Some remarks on the δ' -interaction in one dimension. Rep. Math. Phys. **24** (1986), no 1, 111–120. [1.2.1](#), [2.5](#), [3.5](#)
- [17] Golovaty Yu. Two-parametric δ' -interactions: approximation by Schrödinger operators with localized rank-two perturbations. J. Phys. A: Math. Theor. (25) **51** (2018), 255202. [1.2.1](#), [2.5](#)
- [18] Golovaty Yu. Schrödinger operators with singular rank-two perturbations and point interactions. Integr. Equ. Oper. Theory, (2018) 90: 57. [1.2.1](#), [2.5](#)

- [19] Christiansen P. L., Arnbak H. C., Zolotaryuk A. V., Ermakov V. N., Gaididei Y. B. On the existence of resonances in the transmission probability for interactions arising from derivatives of Dirac's delta function, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36 (2003), 7589–7600. [1.2.1](#), [1.2.3](#)
- [20] Zolotaryuk A. V., Christiansen P. L., Iermakova S. V. Scattering properties of point dipole interactions, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39 (2006), 9329–9338. [1.2.1](#)
- [21] Toyama F., Nogami Y. Transmission-reflection problem with a potential of the form of the derivative of the delta function, *J. Phys. A: Math. Theor.* 40 (2007), F685–F690. [1.2.1](#)
- [22] Zolotaryuk A. V. Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential, *Adv. Sci. Lett.* 1 (2008), 187–191. [1.2.1](#), [2.1](#)
- [23] Zolotaryuk A. V. Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential. *Adv. Sci. Lett.* 1 (2008), 187–191. [1.2.1](#), [2.1](#)
- [24] Zolotaryuk A. V. Point interactions of the dipole type defined through a three-parametric power regularization. *J. Phys. A: Math. Theor.* 43 (2010), 105302. [1.2.1](#), [2.1](#)
- [25] Zolotaryuk A. V. Boundary conditions for the states with resonant tunnelling across the δ' -potential. *Physics Letters A (15–16)* 374 (2010), 1636–1641. [1.2.1](#), [2.1](#)
- [26] Zolotaryuk, A. V., Zolotaryuk, Y. Intrinsic resonant tunneling properties of the one-dimensional Schrödinger operator with a delta derivative potential. *International Journal of Modern Physics B*, 28(01), (2014), 1350203. [1.2.1](#), [2.1](#)
- [27] Zolotaryuk A. V. Families of one-point interactions resulting from the squeezing limit of the sum of two-and three-delta-like potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(22) (2017), 225303. [1.2.1](#), [2.1](#)
- [28] Zolotaryuk, A. V. A phenomenon of splitting resonant-tunneling one-point interactions. *Annals of Physics*, 396 (2018), 479-494. [1.2.1](#), [2.1](#)

- [29] Zolotaryuk A. V. Contact interactions in one-dimensional quantum mechanics: a family of generalized δ' -potentials. *Ukrainian Journal of Physics*, 64(11) (2019), 1021-1021. [1.2.1](#), [2.1](#), [2.1](#)
- [30] Kurasov P., Elander N. On the δ' -interactions in one dimension. Technical report, MSI, Stockholm, 1993. [1.2.1](#)
- [31] Kurasov P., Scrinzi A., Elander N. On the δ' -interaction arising in the exterior complex scaling, *Phys. Rev A*, 49 (1994), 5095–5097. [1.2.1](#)
- [32] Gesztesy F., Holden H. A new class of solvable models in quantum mechanics describing point interactions on the line, *J. Phys. A* **20** (1987), 5157–5177. [1.2.1](#)
- [33] Griffiths D. J. Boundary conditions at the derivative of a delta function, *J. Phys. A*, **26** (1993), 2265–2267. [1.2.1](#)
- [34] Kiselev A. Some examples in one-dimensional “geometric” scattering on manifolds, *J. Math. Anal. Appl.* **212** (1997), 263–280. [1.2.1](#)
- [35] Kurasov P. Distribution Theory for Discontinuous Test Functions and Differential Operators with Generalized Coefficients, *J. Math. Anal. and Appl.* **201** (1996), 297–323. [1.2.1](#), [2.1](#), [4.1](#)
- [36] Нижник Л. П. Оператор Шрёдингера с δ' -взаимодействием. *Функц. анализ и его прил.* **37** (2003), № 1, 85–88. [1.2.1](#)
- [37] Šeba P. Schrödinger particle on a half line. *Lett. Math. Phys.* **10** (1) (1985), 21–27. [1.2.1](#)
- [38] Albeverio S., Cacciapuoti C., Finco D. Coupling in the singular limit of thin quantum waveguides, *J. Math. Phys.* 48 (3) (2007), 032103, 21 pp. [1.2.1](#)
- [39] Cacciapuoti C., Finco D. Graph-like models for thin waveguides with Robin boundary conditions, *Asymptotic Analysis*, 70 (3–4) (2010), 199–230. [1.2.1](#)
- [40] Cacciapuoti C., Exner P. Nontrivial edge coupling from a Dirichlet network squeezing: the case of a bent waveguide, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (26) (2007), F511–F523. [1.2.1](#)

- [41] Cacciapuoti C. Graph-like asymptotics for the Dirichlet Laplacian in connected tubular domains. *Anal. Geom. Number Theory* 2017, 2, 25–58.
- [42] Man’ko S. On δ' -like potential scattering on star graphs, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43, 445304 (2010). [1.2.1](#)
- [43] Man’ko S. Schrödinger operators on star graphs with singularly scaled potentials supported near vertices, *J. Math. Phys.*, 53, 123521 (2012). [1.2.1](#)
- [44] Exner P., Manko S. Approximations of quantum-graph vertex couplings by singularly scaled potentials, *J. Phys. A: Math. Theor.* 46, 345202 (2013). [1.2.1](#)
- [45] Exner P., Manko S. Approximations of quantum-graph vertex couplings by singularly scaled rank-one operators, *Lett. Math. Phys.* 104, 1079 (2014). [1.2.1](#), [2.5](#)
- [46] Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1966. [1.2.3](#), [1.3.1](#), [8.3](#)
- [47] Klaus M. Some applications of the Birman–Schwinger principle, *Helvetica Physica Acta* 55 (1982), 49–68. [1.3.1](#), [4.3](#), [5.1.1](#), [5.1.1](#), [5.2](#), [5.2.1](#)
- [48] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Inequalities*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1988. [1.3.1](#)
- [49] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R. The low energy expansion in nonrelativistic scattering theory, *Annales de l’I. H. P., sect. A*, 37 (1) (1982), 1–28. [1.3](#)
- [50] Jensen A., Kato T. Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, *Duke Mathematical Journal*, 46 (3) (1979), 583–611. [1.3](#)
- [51] Albeverio S., Høegh-Krohn R. Point interactions as limits of short range interactions, *J. Operator Theory* 6 (1981), 313–339. [1.3](#)
- [52] Bollé D., Gesztesy F., Klaus M. Scattering theory for one-dimensional systems with $\int dxV(x) = 0$, *J. Math. Anal. Appl.* 122 (1987), 496–518. [1.3](#)

- [53] Bollé D., Gesztesy F., Wilk S. F. J. A complete treatment of low-energy scattering in one dimension, *J. Operator Theory* 13 (1985), 3–31. [1.3](#), [4.3](#)
- [54] Brasche J. F., Figari R., Teta A. Singular Schrödinger operators as limits of point interaction Hamiltonians, *Potential Anal.* 8 (2) (1998), 163–178. [1.3](#)
- [55] Chadan K., Sabatier P. C. *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1989. [1.3](#), [1.3.2](#)
- [56] Deift P., Trubowitz E. Inverse scattering on the line, *Comm. Pure Appl. Math.* 32 (1979), 121–251. [1.3](#), [1.5](#)
- [57] Marchenko V. A., *Sturm–Liouville operators and applications*, Revised ed. of the 1986 ed., AMS Chelsea Publ., 2011. [1.3](#), [1.5](#)
- [58] Klaus M. Low-energy behaviour of the scattering matrix for the Schrödinger equation on the line, *Inverse Problems* 4 (2) (1988), 505–512. [1.3](#), [1.3.2](#), [1.3.3](#)
- [59] Kufner A., Persson L.-E. *Weighted Inequalities of Hardy Type*, World Scientific Publishing Co., 2003. [1.7](#)
- [60] Golovaty Yu. Schrödinger operators with $(\alpha\delta' + \beta\delta)$ -like potentials: norm resolvent convergence and solvable models. *Methods Funct. Anal. Topology*, Vol. 18, no. 3, 2012, pp. 243–255. [1.3.3](#)
- [61] Golovaty Yu. 1D Schrödinger Operators with Short Range Interactions: Two-Scale Regularization of Distributional Potentials. *Integral Equations and Operator Theory*, 2013, Volume 75, Issue 3, pp 341–362. [1.3.3](#)
- [62] Albeverio S., Dąbrowski L., Kurasov P. Symmetries of Schrödinger operators with point interactions. *Lett. Math. Phys.* 45 (1998), 33–47. [2.1](#)
- [63] Heydarov A. H., One-dimensional Schrödinger operator with point interactions, *Vestnik of the Baku University*, 3 (2005), 21–30. [2.1](#)
- [64] Gadella M., Negro J., Nieto L. M. Bound states and scattering coefficients of the $-a\delta(x) + b\delta'(x)$ potential, *Phys. Lett. A* 373 (2009), no. 15, 1310–1313. [2.1](#)

- [65] Gadella M., Glasser M. L., Nieto L. M. One dimensional models with a singular potential of the type $-\alpha\delta'(x) + \beta\delta(x)$. *International Journal of Theoretical Physics* 50.7 (2011): 2144–2152. [2.1](#)
- [66] Albeverio S., Koshmanenko V., Kurasov P. and Nizhnik L. On approximations of rank one \mathcal{H}_{-2} -perturbations. *Proceedings of the American Mathematical Society* Vol. 131, No. 5 (2003), pp. 1443–1452. [2.5](#), [3.5](#), [3.5](#), [3.5](#)
- [67] Albeverio S. and Nizhnik L. Schrödinger operators with nonlocal point interactions. *J. Math. Anal. Appl.* 332 884–895 (2007). [2.5](#)
- [68] Albeverio S. and Nizhnik L. Schrödinger operators with nonlocal potentials. *Methods Funct. Anal. Topology.* 19(3) 199–210 (2013). [2.5](#)
- [69] Albeverio S., Fassari S., Rinaldi F. A remarkable spectral feature of the Schrödinger Hamiltonian of the harmonic oscillator perturbed by an attractive δ' -interaction centred at the origin: double degeneracy and level crossing. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(38), 385305 (2013). [2.5](#)
- [70] Hassi S. and Kuzhel S. On symmetries in the theory of finite rank singular perturbations. *Journal of Functional Analysis* 256 (2009) 777–809. [2.5](#)
- [71] Kuzhel S. and Znojil M. Non-self-adjoint Schrödinger operators with nonlocal one-point interactions. *Banach J. Math. Anal.* V. 11, no. 4 (2017), 923–944. [2.5](#)
- [72] Nizhnik L. P. On rank one singular perturbations of selfadjoint operators. *Methods Funct. Anal. Topol.* **7** (2001), No. 3, 54–66. [2.5](#)
- [73] Kuzhel S. , Nizhnik L. Finite rank selfadjoint perturbations. *Methods Funct. Anal. Topol.* **12** (2006), N 3, 243–253. [2.5](#)
- [74] Koshmanenko V. D. Towards the rank one singular perturbations theory of selfadjoint operators. *Ukrainian Math. J.* **43** (1991), N 11, 1559–1566. [2.5](#)
- [75] Nizhnik L. P. A Schrödinger operator with δ' -interaction. *Funct. Anal. Appl.* **37** (2003), no. 1, 72–74. [2.5](#)

- [76] Albeverio S., Dudkin M., Konstantinov A., Koshmanenko V. On the point spectrum of \mathcal{H}^{-2} singular perturbations. *Mathematische Nachrichten*, 280(1-2), (2007) 20–27. [2.5](#)
- [77] Albeverio S. and Nizhnik L., Approximation of general zero-range potentials. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 52, no. 5, 2000. [2.5](#), [3.5](#), [3.5](#)
- [78] Zolotaryuk A. V. Families of one-point interactions resulting from the squeezing limit of the sum of two- and three-delta-like potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, V. 50 (2017), no. 22, p.225303. [2.5](#)
- [79] Albeverio S., Fassari S., Rinaldi F. The Hamiltonian of the harmonic oscillator with an attractive δ' -interaction centred at the origin as approximated by the one with a triple of attractive δ -interactions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 49.2 (2015): 025302. [2.5](#)
- [80] T. Cheon and T. Shigehara, Realizing discontinuous wave functions with renormalized short-range potentials. *Physics Letters A* 243.3 (1998): 111–116. [2.5](#)
- [81] Cheon T. and Exner P. An approximation to δ' couplings on graphs. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37.29 (2004): L329. [2.5](#)
- [82] Golovaty Yu. Some remarks on 1D Schrödinger operators with localized magnetic and electric potentials. *Frontiers in Physics*. Vol. 7 (2019) p.70-78. [3.5](#)
- [83] Exner P. and Post O. A general approximation of quantum graph vertex couplings by scaled Schrödinger operators on thin branched manifolds, *Commun. Math. Phys.* (2013) 322:207. [3.5](#)
- [84] Tamura H. Magnetic scattering at low energy in two dimensions, *Nagoya Math. J.* **155** (1999), 95–151. [3.5](#)
- [85] Tamura H. Norm resolvent convergence to magnetic Schrödinger operators with point interactions, *Rep. Math. Phys.* **13** (2001), no. 4, 465–511. [3.5](#)

- [86] Tamura H. Resolvent convergence in norm for Dirac operator with Aharonov-Bohm field, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 2967. [3.5](#)
- [87] Avron J., Herbst I., Simon B. Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions, *Duke Mathematical Journal*, **45** (1978), no. 4, 847–883. [3.5](#)
- [88] Avron J. E., Herbst I. W., Simon B. (1978). Separation of center of mass in homogeneous magnetic fields. *Annals of Physics*, 114(1-2), 431-451. [3.5](#)
- [89] Avron J. E., Herbst I. W., Simon B. Strongly bound states of hydrogen in intense magnetic field. *Physical Review A*, 20(6) (1979), 2287. [3.5](#)
- [90] Avron, J. E., Herbst I. W., Simon B. Schrödinger operators with magnetic fields. III. Atoms in homogeneous magnetic field. *Communications in Mathematical Physics*, 79(4) (1981), 529-572. [3.5](#)
- [91] Coutinho F. A. B. , Nogami Y., Tomio L. Time-reversal aspect of the point interactions in one-dimensional quantum mechanics, *J. Phys. A* **32** (1999), L133–L136. [4.1](#)
- [92] Albeverio S., Fei S.-M., Kurasov P. Gauge fields, point interactions and few-body problems in one dimension, *Rep. Math. Phys.* **53** (2004), no. 3, 363–370. [4.1](#)
- [93] Scharf G. and Wreszinski W. F. Stability for the Korteweg-de Vries equation by inverse scattering theory. *Annals of Physics* 134.1 (1981): 56–75. [4.3](#)
- [94] Weinstein M. I. Excitation thresholds for nonlinear localized modes on lattices. *Nonlinearity* 12.3 (1999): 673. [4.3](#)
- [95] Kevrekidis P. G., Rasmussen K.Ø. and Bishop A. R. The discrete nonlinear Schrödinger equation: a survey of recent results. *International Journal of Modern Physics B*, 15(21), 2001, 2833–2900. [4.3](#)
- [96] Simon B. The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions. *Annals of Physics* 97.2 (1976): 279-288. [4.3](#), [5.2](#), [5.2](#), [5.2.2](#)

- [97] Klaus M. On the bound state of Schrödinger operators in one dimension. *Annals of Physics* 108.2 (1977): 288–300. [4.3](#), [5.2](#)
- [98] Klaus M. and Simon B. Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. *Annals of Physics* 130.2 (1980): 251–281. [4.3](#)
- [99] Simon B. On the absorption of eigenvalues by continuous spectrum in regular perturbation problems. *Journal of Functional Analysis* 25.4 (1977): 338–344. [4.3](#)
- [100] Blankenbecler R., Goldberger M. L., and Simon B. The bound states of weakly coupled long-range one-dimensional quantum Hamiltonians. *Annals of Physics*, 108(1) (1977), 69–78. [4.3](#)
- [101] Rauch J. Perturbation theory for eigenvalues and resonances of Schrödinger Hamiltonians. *Journal of Functional Analysis*, 35(3), (1980) 304-315. [4.3](#)
- [102] Klaus M. and Simon B. Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics* 78.2 (1980): 153-168. [4.3](#)
- [103] Albeverio S., Gesztesy F. and Høegh-Krohn R. The low energy expansion in nonrelativistic scattering theory. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (NS)* 37 (1982): 1-28. [4.3](#)
- [104] Holden H. On coupling constant thresholds in two dimensions. *Journal of Operator Theory*, (1985): 263-276. [4.3](#)
- [105] Gesztesy F., Holden H. A unified approach to eigenvalues and resonances of Schrödinger operators using Fredholm determinants. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 123.1 (1987): 181-198. [4.3](#)
- [106] Jensen A. and Melgaard M. Perturbation of eigenvalues embedded at a threshold. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 132(1), (2002): 163-179. [4.3](#)
- [107] Gadyl'shin R. R. Local perturbations of the Schrödinger operator on the axis. *Theoretical and Mathematical Physics*, 132(1), 2002, 976-982. [4.3](#)

- [108] Albeverio S., Nizhnik L. On the number of negative eigenvalues of a one-dimensional Schrödinger operator with point interactions, *Letters in Mathematical Physics*, 65(1), 2003, 27-35. [4.3](#)
- [109] Gadyl'shin R. R. Local perturbations of the Schrödinger operator on the plane. *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, 138(1), 2004, 41-54. [4.3](#)
- [110] Borisov D. I., and Gadyl'shin R. R. The spectrum of the Schrödinger operator with a rapidly oscillating compactly supported potential. *Theoretical and Mathematical Physics*, 147(1), 2006, 496-500. [4.3](#)
- [111] Gesztesy F. and Simon B. A short proof of Zheludev's theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 335(1), 1993: 329-340. [4.3](#)
- [112] Fassari S. and Klaus M. Coupling constant thresholds of perturbed periodic Hamiltonians. *Journal of Mathematical Physics*, 39(9), (1998): 4369-4416. [4.3](#)
- [113] Golovaty Yu. Eigenvalues of Schrödinger operators near thresholds: two term approximation. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 26(01) (2020), 76-87. [4.3](#)
- [114] Golovaty Y. On coupling constant thresholds in one dimension. *Carpathian Math. Publ.* 2021, 13 (1), 22-38. [4.3](#)
- [115] Березин Ф. А., Шубин М. А., Уравнение Шредингера, Изд-во МГУ 1983, 392 с. [5.1.1](#)
- [116] Reed M. and Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 4: Analysis of Operators*. Academic Press, New York 1978. [5.1.1](#)
- [117] Fedoruyk M. V., Babich V. M., Lazutkin, V. F., ... & Vainberg, B. R. (1999). *Partial Differential Equations V: Asymptotic Methods for Partial Differential Equations (Vol. 5)*. Springer Science & Business Media. [5.2](#)
- [118] Moshinsky M. Penetrability of a one-dimensional Coulomb potential. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **26** (1993), 2445-2450. [5.2.2](#), [6.1](#), [6.3](#), [6.4.2](#)

- [119] Newton R. G. Comment on 'Penetrability of a one-dimensional Coulomb potential' by M Moshinsky. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **27** (1994), 4717-4718. [5.2.2](#), [6.4.2](#)
- [120] Moshinsky M. Response to "Comment on 'Penetrability of a one-dimensional Coulomb potential'" by Roger G Newton. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **27** (1994), 4719-4721. [5.2.2](#), [6.4.2](#)
- [121] Fischer W., Leschke H. and Müller P. The functional-analytic versus the functional-integral approach to quantum Hamiltonians. The one-dimensional hydrogen atom. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36** (1995), 2313-2323. [5.2.2](#), [6.1](#), [6.1](#), [6.4.2](#), [6.4.2](#)
- [122] Kurasov P. On the Coulomb potential in one dimension. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **29** (1996) 1767-1771. [5.2.2](#), [6.1](#), [6.4.2](#)
- [123] Fischer W., Leschke H. and Muller P. Comment on 'On the Coulomb potential in one dimension' by P Kurasov. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **30** (1997) 5579-5581. [5.2.2](#), [6.4.2](#)
- [124] Kurasov P. Response to "Comment on 'On the Coulomb potential in one dimension'" by Fischer, Leschke and Muller. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **30** (1997) 5583-5589. [5.2.2](#), [6.3](#), [6.4.2](#)
- [125] Loudon R. One-dimensional hydrogen atom. *American Journal of Physics* **27**(9) (1959), 649-655. [5.2.2](#), [6.4.1](#), [6.4.2](#)
- [126] Vrkljan V. S. Bemerkung über die Freiheitsgrade in der Wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 52(9) (1928), 735-738. [5.2.2](#), [6.4.1](#)
- [127] Vrkljan V. S. (1929). Das eindimensionale relativistische Kepler-Problem in der Wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 54(1-2), 133-136. [5.2.2](#), [6.4.1](#)
- [128] Loudon R. One-dimensional hydrogen atom. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472(2185), (2016), 20150534. [5.2.2](#), [6.4.1](#)

- [129] Golovaty Yu. 1D Schrödinger operators with Coulomb-like potentials. *Journal of Mathematical Physics* 60, 082105 (2019). [5.2.2](#)
- [130] Bodenstorfer B., Dijkstra A. and Langer H. Dissipative eigenvalue problems for a Sturm-Liouville operator with a singular potential. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* **130**(6) (2000), 1237-1257. [6.1](#), [6.3](#), [6.4.2](#)
- [131] de Oliveira C. R. and Verri A. A. Self-adjoint extensions of Coulomb systems in 1, 2 and 3 dimensions. *Annals of Physics* **324** (2009) 251-266.
- [132] Haines L. K., Roberts D. H. One-dimensional hydrogen atom. *American Journal of Physics* **37**(11), (1969), 1145-1154. [6.1](#)
- [133] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Теоретическая физика. — М. : Физматлит, 2008. — Т. 3. — 800 с. [6.1](#), [6.4.2](#), [6.4.2](#)
[6.4](#)
- [134] de Oliveira C. R. and Verri A. A. Mathematical predominance of Dirichlet condition for the one-dimensional Coulomb potential. *Journal of Mathematical Physics*, 53(5) (2012), 052104. [6.4.1](#), [6.4.2](#), [6.4.2](#)
- [135] Rössner W., Wunner G., Herold H. and Ruder H., Hydrogen atoms in arbitrary magnetic fields: I. Energy levels and wavefunctions, *J. Phys. B* 17(1), 29–52 (1984). [6.4.1](#)
- [136] López-Castillo A. and de Oliveira C. R. Classical ionization for the aperiodic driven hydrogen atom, *Chaos, Solitons Fractals* 15, 859–869 (2003). [6.4.1](#)
- [137] Zakhleniuk N. A., Ridley B. K. Cascade capture and hot photoelectrons in one-dimensional semiconductors. *Phys. Stat. Sol.* 204 (1997), 287-289. [6.4.1](#)
- [138] Gibbs H. M., Khitrova G., Koch S. W. Exciton–polariton light–semiconductor coupling effects. *Nat. Photonics* 5 (2011), 275-282. [6.4.1](#)

- [139] Charlier J.-C., Blase X., Roche S. Electronic and transport properties of nanotubes. *Rev. Mod. Phys.* 79 (2007), 677-732 [6.4.1](#)
- [140] Care C. M. One dimensional hydrogen-atom with a repulsive core, *J. Phys. C* 5 (1972), 1799-1805. [6.4.1](#)
- [141] Pen U., Jiang T. F. Strong-field effects of the one-dimensional hydrogen atom in momentum space, *Phys. Rev. A* 46(7) (1992), 4297-4305. [6.4.1](#)
- [142] Dykman M. I., Platzman P. M., Seddighrad P. Qubits with electrons on liquid helium, *Phys. Rev. B* 67 (2003), 155402. [6.4.1](#)
- [143] Moritomo Y., Tokura Y., Tachibana H, Kawabata Y, Miller R. D. Excited states of one-dimensional excitons in polysilanes as investigated by two-photon spectroscopy. *Phys. Rev. B* 43 (1991), 14746-14749. [6.4.1](#)
- [144] Hasegawa T., Iwasa Y., Sunamura H., Koda T., Tokura Y., Tachibana H., Matsumoto M., Abe S. Nonlinear optical spectroscopy on one-dimensional excitons in silicon polymer, polysilane. *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992), 668-671. [6.4.1](#)
- [145] Ghalim M., Barmaki, S., Mastour F. Large multiphoton ionization of hydrogen atom in an intense femto-second laser: A classical, one-dimensional computer model, *AIP Conf. Proc.* 574(1) (2001), 280-280. [6.4.1](#)
- [146] Kuchment P. Graph models for waves in thin structures. *Waves in Random Media*, 12(4) (2002), R1–R24. [6.4.1](#), [6.4.2](#)
- [147] Exner P., Keating J. P., Kuchment P., Teplyaev A., Sunada T. (Eds.). *Analysis on Graphs and Its Applications: Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK, January 8-June 29, 2007 (Vol. 77)*. American Mathematical Soc. (2008). [6.4.1](#), [6.4.2](#)
- [148] Hall R. L. Solutions to the 1d Klein-Gordon equation with cut-off Coulomb potentials, *Phys. Lett. A* 372 (2007), 12-15. [6.4.1](#)
- [149] Andrews M. Singular potentials in one dimension. *American Journal of Physics* 44(11), (1976), 1064-1066. [6.4.2](#)

- [150] Oseguera U. and de Llano M. Two singular potentials: the space-splitting effect. *Journal of Mathematical Physics* 34, 4575 (1993). [6.4.2](#)
- [151] Mehta C. H., Patil S. H. Bound states of the potential $V(r) = -\frac{Z}{(r+\beta)}$. *Physical Review A* **17**(1), (1978), 43-46. [6.4.2](#)
- [152] Gesztesy F. On the one-dimensional Coulomb Hamiltonian. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **13**(3), (1980), 867. [6.4.2](#), [6.4.2](#)
- [153] Klaus M. Removing cut-offs from one-dimensional Schrödinger operators. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **13**(9), (1980), L295. [6.4.2](#), [6.4.2](#)
- [154] Moshinsky M., Szczepaniak A. The Dirac oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22(17) (1989), L817. [6.4.2](#)
- [155] Gunson J. Perturbation theory for a Sturm-Liouville problem with an interior singularity. *Proc. R. Soc. Lond. A* 414 (1987), 255-269. [6.4.2](#)
- [156] Golovaty Yu. 2D Schrödinger operators with singular potentials concentrated near curves. *Applicable Analysis* (2021), 21 p. doi: 10.1080/00036811.2020.1859496. [6.4.2](#)
- [157] Green I. M., Moszkowski S. A. Nuclear coupling schemes with a surface delta interaction. *Physical Review*, 1965, 139(4B), B790. [6.4.2](#)
- [158] Lloyd P. Pseudo-potential models in the theory of band structure. *Proceedings of the Physical Society*, 1965, 86(4), 825. [6.4.2](#)
- [159] Faessler A., Plastino A. The surface delta interaction in the transuranic nuclei. *Zeitschrift für Physik*, 1967, 203(4), 333-345. [6.4.2](#)
- [160] Blinder S. M. Modified delta-function potential for hyperfine interactions. *Physical Review A*, 1978,18(3), 853. [6.4.2](#)
- [161] Behrndt J., Exner P., Holzmann M., Lotoreichik V. Approximation of Schrödinger operators with δ -interactions supported on hypersurfaces. *Mathematische Nachrichten*, 2017, 290(8-9), 1215-1248. [6.4.2](#), [7.1](#)

- [162] Antoine J. P., Gesztesy F., Shabani J. Exactly solvable models of sphere interactions in quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1987, 20(12), 3687. [6.4.2](#)
- [163] Shimada S. I. The approximation of the Schrödinger operators with penetrable wall potentials in terms of short range Hamiltonians. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 1992, 32(3), 583-592. [6.4.2](#)
- [164] Shimada S. I. Low energy scattering with a penetrable wall interaction. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 1994, 34(1), 95-147. [6.4.2](#)
- [165] Shimada S. I. The analytic continuation of the scattering kernel associated with the Schrödinger operator with a penetrable wall interaction. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 1994, 34(1), 171-190. [6.4.2](#)
- [166] Exner P., Fraas M. On the dense point and absolutely continuous spectrum for Hamiltonians with concentric δ shells. *Letters in Mathematical Physics*, 2007, 82(1), 25-37. [6.4.2](#)
- [167] Albeverio S., Kostenko A., Malamud M., Neidhardt H. Spherical Schrödinger operators with δ -type interactions. *Journal of Mathematical Physics*, 2013, 54(5), 052103. [6.4.2](#)
- [168] Exner P., Fraas M. Interlaced dense point and absolutely continuous spectra for Hamiltonians with concentric-shell singular interactions. In *Mathematical Results In Quantum Mechanics*, 2008, pp. 48-65. [6.4.2](#)
- [169] Exner P., Fraas M. On geometric perturbations of critical Schrödinger operators with a surface interaction. *Journal of Mathematical Physics*, 2009, 50(11), 112101. [6.4.2](#)
- [170] Dittrich J., Exner P., Kühn C., Pankrashkin K. On eigenvalue asymptotics for strong δ -interactions supported by surfaces with boundaries. *Asymptotic Analysis*, 2016, 97(1-2), 1-25. [6.4.2](#)

- [171] Mantile A., Posilicano A., Sini M. Self-adjoint elliptic operators with boundary conditions on not closed hypersurfaces. *Journal of Differential Equations*, 2016, 261(1), 1-55. [6.4.2](#)
- [172] Behrndt J., Langer M., Lotoreichik V. Schrödinger operators with δ - and δ' -potentials supported on hypersurfaces. In *Annales Henri Poincaré*, 2013, Vol. 14, No. 2, pp. 385-423. [6.4.2](#)
- [173] Exner P., Jex M. Spectral asymptotics of a strong δ' interaction supported by a surface. *Physics Letters A*, 2014, 378(30-31), 2091-2095. [6.4.2](#)
- [174] Behrndt J., Exner P., Lotoreichik V. Schrödinger operators with δ - and δ' -interactions on Lipschitz surfaces and chromatic numbers of associated partitions. *Reviews in mathematical physics*, 2014, 26(08), 1450015. [6.4.2](#)
- [175] Lotoreichik V. Spectral isoperimetric inequalities for singular interactions on open arcs. *Applicable Analysis*, 2019, 98(8), 1451-1460. [6.4.2](#)
- [176] Lotoreichik V., Rohleder J. An eigenvalue inequality for Schrödinger operators with δ - and δ' -interactions supported on hypersurfaces. In *Operator Algebras and Mathematical Physics*, 2015, pp. 173-184. [6.4.2](#)
- [177] Behrndt J., Exner P., Lotoreichik V. Schrödinger operators with δ -interactions supported on conical surfaces. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2014, 47(35), 355202. [6.4.2](#)
- [178] Ourmières-Bonafos T., Pankrashkin K. Discrete spectrum of interactions concentrated near conical surfaces. *Applicable Analysis*, 2018, 97(9), 1628-1649. [6.4.2](#)
- [179] Exner P., Rohleder J. Generalized interactions supported on hypersurfaces. *Journal of Mathematical Physics*, 2016, 57(4), 041507. [6.4.2](#)
- [180] Exner P., Khrabustovskyi A. On the spectrum of narrow Neumann waveguide with periodically distributed traps. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2015, 48(31), 315301. [6.4.2](#)

- [181] Jex M. Spectral asymptotics for a δ' interaction supported by an infinite curve. In *Mathematical Results in Quantum Mechanics: Proceedings of the QMath12 Conference, 2015*, (pp. 259-265). [6.4.2](#)
- [182] Jex M., Lotoreichik V. On absence of bound states for weakly attractive δ' -interactions supported on non-closed curves in \mathbb{R}^2 . *Journal of Mathematical Physics*, 2016, 57(2), 022101. [6.4.2](#)
- [183] Antonevich A. B., Romanchuk T. A. Equations with δ -shaped coefficients: the finite-dimensional perturbations approach, *Integral Transforms and Special Functions*, 20:3-4 (2009) , 239-246. [7.1](#)
- [184] Романчук Т. А. Об операторе Шредингера с δ' -образным потенциалом. *Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика.* - 2008. - N 1. - С. 88-94. [7.1](#)
- [185] Antonevich A., Romanchuk T. Schrödinger operator of the form $-\Delta u + a\delta u + b$. *Università e Politecnico di Torino*, 69(4) (2011), 319–330. [7.1](#)
- [186] Unverdi S. O., Tryggvason G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 1992, 100, 25–37. [7.1](#)
- [187] Juric D., Tryggvason G. A front-tracking method for dendritic solidification. *Journal of Computational Physics*, 1996, 123(1), 127-148. [7.1](#)
- [188] Uddin E., Sung H. J. Simulation of flow-flexible body interactions with large deformation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2012, 70(9), 1089-1102. [7.1](#)
- [189] Lange R. J. Potential theory, path integrals and the Laplacian of the indicator. *Journal of High Energy Physics*, 2012(11), 32. [7.1](#)
- [190] Sarpkaya T. *Wave forces on offshore structures*. Cambridge University Press, 2010. [7.3.2](#)

- [191] Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах – Л. : Изд-во АН СССР, 1932. [7.3.2](#)
- [192] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950. [7.3.2](#)
- [193] Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. [7.3.2](#)
- [194] Timoshenko S. P. Stability and vibrations of elements of a structure, Nauka, Moscow, 1972. [7.3.2](#)
- [195] Sánchez-Palencia E. Nonhomogeneous media and vibration theory. Springer-Verlag, Berlin, 1980. [7.3.2](#)
- [196] Sánchez-Palencia E. Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses. In Trends and applications of pure mathematics to mechanics (pp. 346-368). Springer, Berlin, Heidelberg, 1984. [7.3.2](#)
- [197] Sánchez Hubert J., Sánchez-Palencia E. Vibration and coupling of continuous systems. Springer-Verlag, Berlin, 1989. [7.3.2](#)
- [198] Lobo M., Pérez E. Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review. Comptes Rendus Mécanique, V. 331(4) (2003), pp. 303-317. [7.3.2](#)
- [199] Oleinik O. A. Homogenization problems in elasticity. Spectra of singularly perturbed operators, in: R.J. Knops, A.A. Lacey (Eds.), Nonclassical Continuum Mechanics, Cambridge University Press, New York, 1987, pp. 81-95. [7.3.2](#)
- [200] Oleinik O. A. On the eigenoscillations of bodies with concentrated masses, in: Contemporary Problems of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Nauka, Moscow (1988). [7.3.2](#)

- [201] Oleinik O. A. On the frequencies of the eigenoscillations of bodies with concentrated masses, in: Functional and Numerical Methods of Mathematical Physics, Naukova Dumka, Kiev (1988). [7.3.2](#)
- [202] Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой. Сиб. мат. журн.– 1988. –Т.29, №5.– С.71–91. [7.3.2](#), [7.3.2](#)
- [203] Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями. Труды Математического института им. В.А.Стеклова. –1990.–Т.192– С.42–60. [7.3.2](#)
- [204] Головатый Ю.Д. О собственных частотах и собственных колебаниях упругого стержня с присоединенной массой. УМН.–1988.– Т.43, №4.– С.171-172. [7.3.2](#)
- [205] Головатый Ю.Д. О собственных частотах закрепленной пластинки с присоединенной массой. УМН.–1988.–Т.43, №5.–С.185–186. [7.3.2](#)
- [206] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: МГУ, 1990. [7.3.2](#)
- [207] Головатый Ю.Д. Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальных колебаний // Труды Московского мат. о-ва.–1992.–Т.54.–С.29–72. [7.3.2](#)
- [208] Hrabchak H. On Neumann spectral problem for system of linear elasticity with singular perturbed density. Visnyk Lviv. Univ., Ser. Mech. Math., Vol.45 (1996), 124-140. [7.3.2](#)
- [209] Mel'nik T. A., Nazarov S. A. Asymptotic analysis of the Neumann problem on the junction of a body and thin heavy rods, Algebra i Analiz, 12:2 (2000), 188–238; St. Petersburg Math. J., 12:2 (2001), 317–351 [7.3.2](#)

- [210] Mel'nik T. A. Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, (2001) 11:06, 1001-1027. [7.3.2](#)
- [211] Chechkin G. A., Mel'nyk T. A. Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses, *Applicable Analysis*, 91:6 (2012), 1055-1095. [7.3.2](#)
- [212] Lobo M., Perez E. On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 3 (1993) 249-273. [7.3.2](#), [8.3](#)
- [213] Lobo M., Perez E. Vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary: High frequency vibrations, *Spectral Analysis of Complex Structures* (Hermann, 1995) pp. 85-101. [7.3.2](#), [8.3](#)
- [214] Lobo M., Perez E. Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 5(5) (1995), 565-585. [7.3.2](#), [8.3](#)
- [215] Chechkin G. A. Estimation of solutions of boundary-value problems in domains with concentrated masses located periodically along the boundary: Case of light masses. *Mathematical Notes*, 76(5-6) (2004), 865-879. [7.3.2](#), [8.3](#)
- [216] Chechkin G. A. Asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions of an elliptic operator in a domain with many "light" concentrated masses situated on the boundary. Two-dimensional case. *Izvestiya: Mathematics*, 69(4) (2005), 805. [7.3.2](#), [8.3](#)
- [217] Nazarov S. A., Perez E. New asymptotic effects for the spectrum of problems on concentrated masses near the boundary. *Comptes Rendus Mécanique*, V. 337, Is. 8, 2009, pp 585-590. [7.3.2](#), [8.3](#)
- [218] Chechkin G. A., Pérez M. E., Yablokova E. I. Non-periodic boundary homogenization and "light" concentrated masses. *Indiana University Mathematics Journal*, 54(2) (2005), 321-348. [7.3.2](#), [8.3](#)

- [219] Golovaty Yu. D., Lavrenyuk A. S. Asymptotic expansions of local eigenvibrations for plate with density perturbed in neighbourhood of one-dimensional manifold. *Matematychni Studii*, 13(1) (2000), 51-62. [7.3.2](#)
- [220] Golovaty Yu., Gómez D., Lobo M. and Pérez E. Asymptotics for the eigenvalues of vibrating membranes with very heavy thin inclusions. *C. R., Méc., Acad. Sci. Paris*, 330(11):777-782, 2002. ([document](#)), [7.3.2](#), [8.3](#)
- [221] Golovaty Yu., Gómez D., Lobo M. and Pérez E. On vibrating membranes with very heavy thin inclusions. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(7):987–1034, 2004. ([document](#)), [7.3.2](#), [8.3](#), [9.2](#)
- [222] Головатий Ю. Д., Грабчак Г. Є. Асимптотика спектра задачі Штурма-Ліувіля на геометричному графі зі збуренням густини в околі вузлів.–Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. –2007.–Вип.67. – С.66–83. [7.3.2](#)
- [223] Головатий Ю. Д., Грабчак Г. Є. Про задачу Штурма-Ліувілля на зіркових графах з “важкими” вузлами// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. –2010.–Вип.72. – С.63–78. [7.3.2](#)
- [224] Mel’nyk T. A. Asymptotic approximations for eigenvalues and eigenfunctions of a spectral problem in a thin graph-like junction with a concentrated mass in the node. *Analysis and Applications* 19, No. 05 (2021), pp. 875-939. [7.3.2](#)
- [225] Mel’nyk T. A. Hausdorff convergence and asymptotic estimates of the spectrum of a perturbed operator. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 20(4) (2001), 941-957. [7.3.2](#)
- [226] Mugnolo D., Nittka R. and Post O. Convergence of sectorial operators on varying Hilbert space. *Operators and Matrices*, Vol.7(4) (2010), 955-995. [7.3.2](#)
- [227] Rösler F. A Note on Spectral Convergence in Varying Hilbert Spaces (2018). arXiv preprint:1812.02525. [7.3.2](#)
- [228] Golovaty Yu. On spectrum of strings with δ' -like perturbations of mass density. *Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.* -2020.-Вип.89 – С.60-79 [7.3.2](#)

- [229] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.— М: Наука.— 1965. [8.3](#)
- [230] Dunford N., Schwartz J. T. Linear operators II: Spectral theory. New York: Interscience, 1963. [8.3](#)
- [231] Bramble J. H., Osborn J. E. Rate of convergence estimates for nonselfadjoint eigenvalue approximations. *Mathematics of Computation*, 27(123) (1973), 525-549. [8.3](#)
- [232] Bates F. S., Fredrickson G. H. Block copolymer thermodynamics: theory and experiment. *Annual review of physical chemistry*, 41(1) (1990), 525-557. [8.3](#)
- [233] Sens P., Turner M. S. Inclusions in Thin Smectic Films. *Journal de Physique II*, 7(12) (1997), 1855-1870. [8.3](#)
- [234] Pratibha R., Park W., Smalyukh I. I. Colloidal gold nanosphere dispersions in smectic liquid crystals and thin nanoparticle-decorated smectic films. *Journal of Applied Physics*, 107(6) (2010), 063511. [8.3](#)
- [235] Ladbroke B. D., Chapman D. Thermal analysis of lipids, proteins and biological membranes a review and summary of some recent studies. *Chemistry and Physics of Lipids*, 3(4) (1969), 304-356. [8.3](#)
- [236] Gómez D., Lobo M., Nazarov S. A., Pérez E. Asymptotics for the spectrum of the Wentzell problem with a small parameter and other related stiff problems. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 86(5) (2006), 369-402. [8.3](#)
- [237] Gómez D., Lobo M., Nazarov S. A., Pérez E. Spectral stiff problems in domains surrounded by thin bands: Asymptotic and uniform estimates for eigenvalues. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 85(4) (2006), 598-632. [8.3](#)
- [238] Nazarov S. A., Pérez M. E. On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary. *Revista Matemática Complutense*, 31(1) (2018), 1-62. [8.3](#)

- [239] Gómez D., Nazarov S. A., Pérez-Martínez M. E. Localization effects for Dirichlet problems in domains surrounded by thin stiff and heavy bands. *Journal of Differential Equations*, 270 (2021), 1160-1195. [8.3](#)
- [240] Riva M. D., Provenzano L. On vibrating thin membranes with mass concentrated near the boundary: an asymptotic analysis. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 50(3) (2018), 2928-2967. [8.3](#)
- [241] Rybalko V. Vibrations of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions. *Asymptotic Analysis*, 32(1) (2002), 27-62. [8.3](#)
- [242] Arendt W., Mazzeo R. Spectral properties of the Dirichlet-to-Neumann operator on Lipschitz domains. *Ulmer Seminare Heft*, 12:23-38, 2007. [9.1.2](#), [9.1.2](#)
- [243] Gorbachuk V. I. , Gorbachuk M. L., Kochubej A. N. Extension theory of symmetric operators and boundary value problems for differential equations. *Ukr. Mat. Zh.* **41** (1989), N 10, 1299–1313.
- [244] Марченко, В. А., Хруслов, Е. Я. (1974). Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. *Наук. думка*, 1974.
- [245] Кочубей А. Н. Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи. *Мат. заметки*. 1979. Т. 25, № 3. С. 425—434.
- [246] Кочубей А. Н. Самосопряженные расширения оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом, *Сиб. матем. журн.*, 32:3 (1991), 60–69; *Siberian Math. J.*, 32:3 (1991), 401–409
- [247] Kochubej A. N. Point interactions in one dimension. *Ukr. Mat. Zh.* **41** (1989), N 10,1391–1395.
- [248] Kochubei A.N. Point interactions in one dimension. In *Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard*. – 1989. – P. 78-100.
- [249] Кошманенко В.Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов.– Киев:Наук. думка, 1993.–178с.

- [250] Albeverio, S., Dudkin, M., Konstantinov, A., Koshmanenko, V. (2007). On the point spectrum of \mathcal{H}_{-2} -singular perturbations. *Mathematische Nachrichten*, 280(1-2), 20-27. [2.5](#)
- [251] Нижник Л. П. О точечном взаимодействии в квантовой механике. *Укр. матем. журнал.*– 1997.– Т. 49, № 11.– С. 1557-1560.
- [252] Nizhnik L.P. On rank one singular perturbations of selfadjoint operators. *Method Funct. Anal. and Topology.* – 2001. – Vol. 7, № 3. – P. 54-66.
- [253] Kostenko A., Malamud M. 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set. *J. Differential Equations* 249 (2010) 253–304.
- [254] В. А. Михайлец, Об операторе Шредингера с точечными δ' -взаимодействиями, *Докл. РАН*, 348:6 (1996), 727-730.
- [255] В. А. Михайлец, Структура непрерывного спектра одномерного оператора Шредингера с точечными взаимодействиями, *Функц. анализ и его прил.*, 30:2 (1996), 90–93.
- [256] Goriunov A. S., Mikhailets V. A. Resolvent Convergence of Sturm–Liouville Operators with Singular Potentials *Mathematical Notes*, 2010, Vol. 87, No. 2, pp. 287–292.
- [257] Goriunov A. , Mikhailets V. Regularization of singular Sturm-Liouville equations *Methods of Functional Analysis and Topology* Vol. 16 (2010), no. 2, pp. 120–130.
- [258] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями. *Труды Моск. Мат. Об-ва.*–2003.– Т.64.– С. 159-212.
- [259] Савчук А. М., Шкаликов А. А. О собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева, *Матем. заметки*, 80:6 (2006), 864–884

- [260] Савчук А.М., Шкаликів А.А. Оператори Штурма-Ліувілля сингулярними потенціалами. Матем. заметки. –1999.–Т.66, вып. 6.-С. 897-912 .
- [261] Hryniv, R. O., Mykytyuk, Y. V. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. *Inverse Problems*, Volume 20, Number 5, 1423.
- [262] Hryniv, R. O., Mykytyuk, Y. V. Half-inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. *Inverse Problems*, Volume 19, Number 3, 665.
- [263] Frayer, C., Hryniv, R. O., Mykytyuk, Y. V., Perry, P. A. (2009). Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials: I. Unique Riccati representatives and ZS-AKNS systems. *Inverse Problems*, 25(11), 115007.
- [264] Hryniv, R. O., Mykytyuk, Y. V., Perry, P. A. (2009). Inverse scattering on the line for Schrödinger operators with Miura potentials, II. Different Riccati representatives. arXiv preprint arXiv:0910.0639.
- [265] Ismagilov R. S., Kostyuchenko A. G. Spectral asymptotics for the Sturm–Liouville operator with point interaction, *Funct. Anal. Appl.* 44 (4) (2010) 253–258.
- [266] Antonevich A. The Schrödinger operator with δ -potential: finite-dimensional perturbations approach. *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* 2 (4), 61–71.
- [267] Kulinskii V. L., Panchenko D. Y. Physical structure of point-like interactions for one-dimensional Schrödinger operator and the gauge symmetry. *Physica B: Condensed Matter*, 472 (2015), 78-83.
- [268] Quesne C., Tkachuk, V. M. (2004) Deformed algebras, position-dependent effective masses and curved spaces: an exactly solvable Coulomb problem. *J. Phys. A: Math. Gen.* 37, 4267.
- [269] Fityo T., Vakarchuk I., Tkachuk, V. M. (2006) One-dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length. *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 2143.

- [270] Samar, M. I., Tkachuk, V. M. (2016). One-dimensional Coulomb-like problem in general case of deformed space with minimal length. *Journal of Mathematical Physics*, 57(8), 082108.
- [271] Тацій, Р., Стасюк, М. Ф., Мазуренко, В. В., Власій, О. О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич, 2011.

ДОДАТОК А

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів

1. Основні публікації за темою дисертації

1. Головатий Ю. Д., Манько С. С. Точні моделі для операторів Шредінгера з δ' -подібними потенціалами. *Український математичний вісник.*–2009.– Т.6, N2.– С.173–212. (стаття доступна онлайн)
2. Golovaty Yu. D., Hryniv R. O. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ' -like potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **43** (2010) 155204 (14pp). doi: [10.1088/1751-8113/43/15/155204](https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/15/155204); Corrigendum: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **44** (2011) 049802 (1pp). doi: [10.1088/1751-8113/44/4/049802](https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/4/049802)
3. Golovaty Yu., Hryniv R. Norm resolvent convergence of singularly scaled Schrödinger operators and δ' -potentials. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **143**(4) (2013), 791–816. doi: [10.1017/S0308210512000194](https://doi.org/10.1017/S0308210512000194).
4. Golovaty Yu. Schrödinger operators with $(\alpha\delta' + \beta\delta)$ -like potentials: norm resolvent convergence and solvable models. *Methods of Functional Analysis and Topology*, **18**(3) (2012), pp. 243–255. (стаття доступна онлайн)
5. Golovaty Yu. 1D Schrödinger operators with short range interactions: two-scale regularization of distributional potentials. *Integral Equations and Operator Theory*, **75**(3) (2013) pp 341–362. doi: [10.1007/s00020-012-2027-z](https://doi.org/10.1007/s00020-012-2027-z)

6. Golovaty Yu. Two-parametric δ' -interactions: approximation by Schrödinger operators with localized rank-two perturbations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **51**(25) (2018) 255202. doi: [10.1088/1751-8121/aac110](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aac110)
7. Golovaty Yu. Schrödinger operators with singular rank-two perturbations and point interactions. *Integral Equations and Operator Theory*, **90**, 57 (2018). doi: [10.1007/s00020-018-2482-2](https://doi.org/10.1007/s00020-018-2482-2)
8. Golovaty Yu. Some remarks on 1D Schrödinger operators with localized magnetic and electric potentials. *Frontiers in Physics*, **7** (2019) pp. 70-78. In Research Topic “Contact Interactions in Quantum Mechanics: Theory, Mathematical Aspects and Applications.” doi: [10.3389/fphy.2019.00070](https://doi.org/10.3389/fphy.2019.00070)
9. Golovaty Yu. Eigenvalues of Schrödinger operators near thresholds: two term approximation. *Methods of Functional Analysis and Topology*, **26**(1) (2020), pp. 76–87. doi: [10.31392/MFAT-npu26_1.2020.06](https://doi.org/10.31392/MFAT-npu26_1.2020.06)
10. Golovaty Yu. On coupling constant thresholds in one dimension. *Carpathian Mathematical Publications*, **13**(1), (2021) pp. 22–38. doi: [10.1007/s00020-018-2482-2](https://doi.org/10.1007/s00020-018-2482-2)
11. Golovaty Yu. 1D Schrödinger operators with Coulomb-like potentials. *Journal of Mathematical Physics*, **60**, 082105 (2019). doi: [10.1063/1.5099309](https://doi.org/10.1063/1.5099309)
12. Golovaty Yu. 2D Schrödinger operators with singular potentials concentrated near curves. *Applicable Analysis*, (2020), published online. doi: [10.1080/00036811.2020.1859496](https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1859496)
13. Golovaty Yu. On spectrum of strings with δ' -like perturbations of mass density. *Вісник Львівського ун-ту, Серія мех.-мат.*–2020.– Вип. **89**.– С.60–79. (стаття доступна онлайн)
14. Golovaty Yu., Gomez D., Lobo M. and Perez E. Asymptotics for the eigenvalues of vibrating membranes with very heavy thin inclusions. *Comptes Rendus Mécanique*, **330**(11) (2002), pp. 777–782. doi: [10.1016/S1631-0721\(02\)01531-0](https://doi.org/10.1016/S1631-0721(02)01531-0)
15. Golovaty Yu., Gomez D., Lobo M. and Perez E. On vibrating membranes with very heavy thin inclusions. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, **14**(7) (2004) pp. 987–1034. doi: [10.1142/S0218202504003520](https://doi.org/10.1142/S0218202504003520)

N	Журнал	Країна	Рік	Q	×	Scopus
1	Укр. мат. вісник	Україна	2009		1	
2	J. Phys. A: Math. Theor.	Великобританія	2010	Q1	3	✓
3	Proc. Royal Soc. Edinburgh	Великобританія	2013	Q1	3	✓
4	MFAT	Україна	2012		1	
5	Integr. Equ. Oper. Theory	Швейцарія	2013	Q2	3	✓
6	J. Phys. A: Math. Theor.	Великобританія	2018	Q2	3	✓
7	Integr. Equ. Oper. Theory	Швейцарія	2018	Q2	3	✓
8	Frontiers in Physics	Швейцарія	2019	Q2	3	✓
9	MFAT	Україна	2020		1	✓
10	Carpathian Math. Publ.	Україна	2021		1	✓
11	J. Math. Phys.	США	2019	Q2	3	✓
12	Applicable Analysis	Великобританія	2021	Q2	3	✓
13	Вісник Львівського ун-ту	Україна	2021		1	
14	C. R. Mécanique	Франція	2002	Q2	3	✓
15	M ³ AS	Сингапур	2004	Q1	3	✓

Табл. 10.2: Додаткова інформація про основні публікації

Згідно з наведеною таблицею 12 праць опубліковано у виданнях, проіндексованих у наукометричній базі *Scopus*. Серед них 10 публікацій — у виданнях, віднесених до першого і другого кuartилів (Q1 і Q2) відповідно до класифікації *SCImago Journal and Country Rank*. Такі статті прирівнюються до трьох публікацій, тому загальна кількість публікацій з рейтинговими множниками — 35.

2. Матеріали конференцій за темою дисертації

1. Golovaty Yu. On Schrödinger operators with singular rank-two perturbations. *Intern. Conf. in Functional Analysis dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach*, 18-23 September, 2017, Lviv, Ukraine. P. 40–41.
2. Golovaty Yu. On W_2^{-2} -perturbations of 1-D Schrödinger operators with Coulomb potential. *Intern. Conf. on Differential Equations dedicated to 110th anniv. of*

Yu. Lopatynsky, Lviv, Ukraine, September 20–24, 2016.— p. 56.

3. Головатий Ю. Д. Оператори Шредингера зі сингулярними потенціалами. *Міжнар. наук. конф. “ Диференціальні рівняння та їх застосування”*, присвячена 70-річчю акад. М. О. Перестюка, Ужгород, 19–21 травня 2016.— С.57.
4. Golovaty Yu. 1-D Schrödinger operators with singular localized potentials. *Spectral Theory and Differential Equations: Inter. Conf. in honor of V. A. Marchenko’s 90th birthday*, August 20–24, 2012, Kharkiv, Ukraine. P.38-39.
5. Golovaty Yu. 1-D Schrödinger operators with singular local perturbations and point interactions// *Intern. Conf. dedicated to 120-th anniversary of Stefan Banach*, L’viv, Ukraine, September 17–21, 2012. P.38.
6. Golovaty Yu. Returning to the subject of Schrödinger operators with pseudopotentials. *Міжн. математична конф. ім. В.Я. Скоробогатька*, Дрогобич, Україна, 19–23 вересня, 2011.— С.51.
7. Golovaty Yu. On Schrödinger operators with point interactions. *Intern. Conf. on Functional Analysis dedicated to the 90th Anniversary of V. E. Lyantse*, Lviv, Ukraine, 17–21 November 2010. P. 40–41.
8. Головатий Ю. Д., Манько С. С. Асимптотика спектру оператора Шредингера з δ' -подібним збуренням потенціалу. *Міжн. наук. школа-конф. “Тарнопівські читання”*, Харків, 21-25 квітня 2008 р.— С.191.
9. Golovaty Yu., Man’ko S., On the Schrödinger operator with δ' -interaction. *The Tenth Intern. Conf. on Integral Methods in Science and Engineering 2008*, Santander, Spain, July 7–10, 2008. P.91.
10. Головатий Ю. Д., Манько С. С. Оператор Шредингера з δ' -потенціалом: неоднозначність моделі. *Міжн. конф. “Сучасні проблеми механіки та математики”*, присвячена 80-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С. Підстригача, Львів, 25–29 травня 2008 р.— С.105.
11. Головатий Ю., Манько С. Асимптотика власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля з δ' -подібним потенціалом. *XIV Всеукр. наук.*

конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, присвячена 90-річчю з дня народження проф. О. М. Костовського, Львів, 2–4 жовтня 2007 р.– С.51.

12. Головатий Ю. Д. Коливні системи з тонкими включеннями. Спектральні властивості. *XII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”*, присвячена 70-річчю з дня народження Й. В. Людкевича і 30-річчю ф-ту прикл матем. та інформ-ки, 4–6 жовтня 2005 р., Львів.– С.67.
13. Golovaty Yu. On vibration of membrane with soft thin inclusions. *Intern. Conf. “Differential Equations and Related Topics” dedicated to Ivan G. Petrovskii*, Moscow, May 16–22, 2004. P.73–74.
14. Golovaty Yu. Decomposition of eigenvalues of infinite multiplicity, *Intern. Conf. Nonlinear Partial Differential Equations*, Kyiv, August 22–28, 2001. P. 49.
15. Gołowaty J. O silnie zaburzonych zagadnieniach spektralnych. *Równania różniczkowe i teoria sterowania*. Krynica, 2000. P.15.

3. Апробація результатів на наукових семінарах

1. Research seminar on *Differential Equations and Homogenization Theory* by Prof. M. Lobo and Prof. M. E. Pèrez. University of Cantabria, Santander, Spain, December 2000.
2. Workshop *Asymptotic and Numerical Analysis of Structures and Heterogeneous Media*. Saint-Petersburg, Russia, December 2000.
3. Research seminar on *Homogenization Theory* by Prof. A. Piatnitsky. University of Narvik, Narvik, Norway, February 2014.
4. Workshop *Mathematical Techniques for Multiscale-Analysis*. Heidelberg University, Heidelberg, Germany, October 2005.
5. Research seminar on *Homogenization Theory* by Prof. A. Piatnitsky. University of Narvik, Narvik, Norway, December 2006.

6. *Львівський міжвузівський семінар з функціонального аналізу імені проф. В. Е. Лянце*, (проф. О. Г. Сторож) Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, березень 2009.
7. Research seminar of *The Bath Institute for Complex Systems* by Prof. V. Smyshlyaev. University of Bath, Bath, United Kingdom, July 2009.
8. Research seminar on *Differential Equations and Homogenization Theory* by Prof. M. Lobo and Prof. M. E. Pèrez. University of Cantabria, Santander, Spain, September 2009.
9. Research seminar on *Homogenization Theory* by Prof. A. Piatnitsky. University of Narvik, Narvik, Norway, February 2010.
10. Research seminar on *Partial Differential Equations* by Prof. W. Jäger. Heidelberg University, Heidelberg, Germany, June 2010.
11. *Київський семінар з функціонального аналізу*, (кер. професори А. Н. Кочубей, В. А. Михайлець, В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко) Інститут математики НАН України, Київ, листопад 2012.
12. Workshop *Mathematical Challenges of Zero Range Physics: rigorous results and open problems*. Sapienza University, Rome, Italy, July 2018.
13. *Різдвяні дискусії 2018*. Конференція кафедри теоретичної фізики, Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, грудень 2018.
14. *Різдвяні дискусії 2019*. Конференція кафедри теоретичної фізики, Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, грудень 2019.
15. *Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь*, (кер. професори М. І. Іванчов, П. І. Каленюк, Б. Й. Пташник) Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, виступи протягом останніх десяти років.