

## ВІДГУК

офіційного опонента

на дисертаційну роботу Ю. Д. Головатого

"Сингулярно збурені диференціальні оператори  
у моделях квантової механіки"

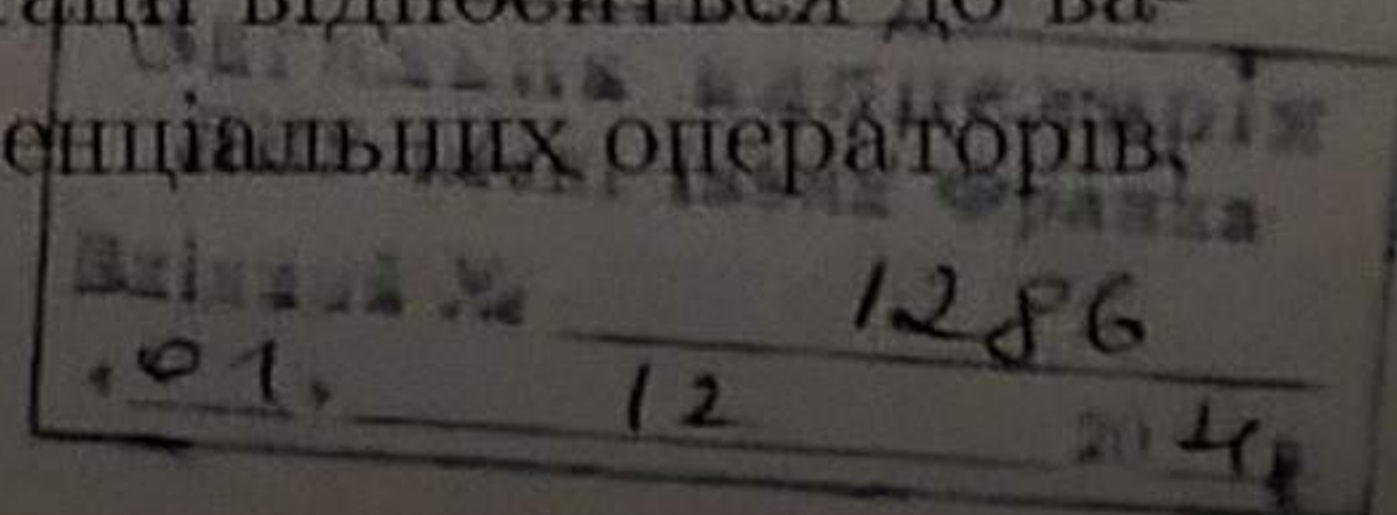
прийняту до захисту на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук зі спеціальності  
01.01.02 – диференціальні рівняння

### 1. Актуальність теми дисертації

Дисертація відноситься до одного із актуальних наукових напрямів, пов'язаних із побудовою і дослідженням явно розв'язних моделей диференціальних операторів сучасної квантової теорії, що описують взаємодії зосереджені в точках або на многовидах малих розмірностей. Ще в 30-х роках минулого століття ряд фізиків при дослідженні взаємодій з малим радіусом впливу почали розглядати точкову взаємодію. Так, в 1936 році Е. Фермі запропонував модель із точковим псевдопотенціалом, розглядаючи вільний оператор Шредінгера у всьому просторі без точки взаємодії, а в самій точці розглядав певні граничні умови. У 1961 році Ф.А. Березін і Л. Д. Фаддеев показали, що підхід Е.Фермі еквівалентний розгляду самоспряжених розширень симетричного вільного оператора Шредінгера, визначеного на фінітних функціях, носій яких не містить точки взаємодії. Це показує, що нетривіальна точкова взаємодія існує лише у просторах із розмірністю  $d \leq 3$ . При  $d = 1$  таких взаємодій є 4-параметрична сім'я, однозначно пов'язаних із унітарними матрицями у двовимірному просторі. Ця тематика була підхвачена великою кількістю математиків із різних країн, поскільки, виникаючі математичні проблеми і важливі застосування викликали збільшену зацікавленість в проведенні досліджень. Як показує монографія С. Албеверіо із співавторами, що видана у 1988 році та перевидана у 2004 році з доповненнями П. Екснера, вже в той час було опубліковано декілька тисяч робіт по цій тематиці.

Із математичної точки зору найбільш важливим стала побудова послідовностей звичайних квантово-механічних операторів, які збігаються до моделей із точковими взаємодіями. Саме до цього напрямку відносяться основні результати дисертації. В ній побудована апроксимація операторів із точковими взаємодіями в одновимірному просторі, а також для двовимірних моделей із взаємодією на замкнених кривих. Всі результати математично строго доведені і детально інтерпретовані з фізичної точки зору.

Таким чином, можна констатувати, що тема дисертації відноситься до важливого сучасного напрямку спектральної теорії диференціальних операторів.



пов'язаних в першу чергу з побудовою та дослідженням квантово-механічних моделей.

## 2. Зміст дисертації

Дисертація, об'ємом 339 сторінок, складається із анотації, вступу, дев'яти розділів, висновків, списку 271 використаних джерел та додатку, що містить список публікацій дисертанта за темою дисертації та відомості про апробацію результатів.

У вступі дисертації обгрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, визначено мету і задачі, об'єкт, предмет, та методи дослідження, вказано наукову новизну та оригінальність результатів, охарактеризовано особистий внесок дисертанта, наведено список конференцій та семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, дається огляд існуючої літератури, що мотивувала дисертанта, та огляд недавніх робіт, у яких було використано результати дисертації та які продовжили дослідження в даній галузі, наведено стислий огляд роботи та основних понять і результатів.

У першому розділі розглядується сім'я одновимірних самаспряжених операторів Шредінгера із потенціалами вигляду

$$V_\varepsilon(x) = \frac{\alpha}{\varepsilon^2} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (1)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , де потенціали  $V(x)$  є довільними дійснозначними абсолютно інтегровними функціями із класу Фаддєєва–Марченка. Для таких операторів введені важливі поняття потенціалів із резонансом нульової енергії, незв'язного стану (обмеженого розв'язку) та  $\theta$ -характеристика такого потенціалу, що визначається формулою  $\theta = \frac{\psi(+\infty)}{\psi(-\infty)}$  через обмежений розв'язок рівняння Шредінгера. Для таких операторів Шредінгера доводиться існування при  $\varepsilon \rightarrow 0$  граничного оператора із певними краєвими умовами в точці  $x = 0$ . Використовуючи результати із спектральної теорії операторів у просторах Крейна, дисертант доводить існування зліченної кількості дійсних значень  $\alpha$ , таких, що потенціали  $\alpha V$  мають резонанс. Це є ще одним важливим застосуванням результатів із теорії операторів у просторах Крейна.

У другому розділі розглядаються одновимірні оператори Шредінгера з двопараметричною  $(\varepsilon, \nu)$  сім'єю потенціалів

$$\frac{\alpha}{\varepsilon^2} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{\beta}{\varepsilon} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (2)$$

Для таких операторів досліджені граничні оператори, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\nu \rightarrow 0$  і  $(\varepsilon, \nu)$  певним чином пов'язані між собою. Досліджується характер збіжності даних розсіяння.

У розділі 3 розглянуті одновимірні оператори Шредінгера збурені крім потенціалів, ще і інтегральними операторами, залежними від  $\varepsilon$ . Досліджені виникаючі при  $\varepsilon \rightarrow 0$  граничні оператори.

У розділі 4 досліджуються граничні оператори у випадку одночасного розгляду як магнітних, так і електричних потенціалів.

У розділі 5 досліджується порогова поведінка від'ємних власних значень при  $\varepsilon \rightarrow 0$  у операторів Шредінгера, розглянутих у попередніх розділах.

У розділі 6 вивчаються оператори Шредінгера з потенціалами типу Кулона. Ці потенціали мають особливість  $x^{-1}$ , не є абсолютно інтегровними і їх регуляризація потребує спеціального розгляду, приведеному в цьому розділі.

У розділі 7 розглянуті двовимірні оператори Шредінгера із сингулярними збуреннями в околі замкненої кривої із особливостями типу  $\delta'$ -потенціалу. Фактично, в такій постановці дослідження проводиться вперше.

У розділі 8 досліджуються оператори Штурма-Ліувілля із сингулярними ваговими функціями. Розгляд ведеться для несамоспряжених операторів, поскільки граничний оператор може не бути самоспряженим.

У розділі 9 досліджується асимптотика спектру мембрани з важкими тонкими включеннями. Це є продовженням і перенесенням на двовимірний випадок результатів із розділу 8. Результати і їх доведення демонструють високу кваліфікацію дисертанта при дослідженні асимптотичних проблем.

### 3. Основні результати

Основні результати дисертації відносяться до спектральної теорії сингулярно збурених диференціальних операторів. Найбільш повними і важливими є наступні:

1. Доведено рівномірну збіжність при  $\varepsilon \rightarrow 0$  одновимірних операторів Шредінгера з потенціалами виду (1) до операторів з точковою взаємодією. Показано, що граничний оператор не буде прямою сумою операторів тоді і тільки тоді, коли потенціал  $\alpha V$  має резонанс. Для операторів Шредінгера з потенціалом (2) описані всі можливі точкові взаємодії.
2. Описані всі граничні моделі при сингулярно збурених одновимірних операторів Шредінгера з потенціалами виду (1)–(2) магнітними потенціалами, та інтегральними операторами рангу 2.
3. Для двовимірного оператора Шредінгера досліджена спектральна задача при сингулярному  $\delta'$ -подібному збуренні в околі замкненої кривої.
4. Знайдені умови і запропоновані різні форми регуляризації для операторів Шредінгера з потенціалами Кулона. На цій основі побудовано нову одновимірну математичну модель атома водню.
5. Досліджена асимптотика спектрів операторів Штурма-Ліувілля з локальними збуреннями вагових функцій та двовимірних еліптичних крайових за-

дач, коли вагові функції збурені в околі замкнених кривих.

#### 4. Достовірність нових результатів

Доведення як в самій дисертації, так і в публікаціях приведені в строгій та детальній формі, прийнятій в сучасній математиці. Автореферат правильно і повно відображає зміст дисертації. Достовірність нових результатів можна підкріпити такими фактами:

- 1) Результати опубліковані в 12 статтях в престижних зарубіжних журналах.
- 2) Результати доповідались більш, ніж на 11 міжнародних конференціях і семінарах в різних країнах світу ( Німеччина, Іспанія, Італія, Великобританія, Росія, Норвегія, Україна).
- 3) В дисертації є список із 271 цитованих робіт. Після кожної роботи вказані підрозділи дисертації, де розглядається така робота з певними зауваженнями. Аналіз цього списку показує, що дисертант дуже добре знає опубліковані роботи по розглядуваній темі.

#### 5. Зауваження по дисертації

1. В дисертації, на відміну від публікацій, є можливість розгляду різних ілюстративних прикладів. В даній роботі таких прикладів досить багато. Проте, корисно було б привести приклад потенціалу  $V$ , що є потенціальною ямою глибини  $h^2$  і ширини  $l$ , який буде мати резонанс тоді і лише тоді, коли  $hl = \pi n$ , де  $n \in \mathbb{N}$  цілі числа. Для таких потенціалів  $\theta$ -характеристика має вигляд  $\theta = (-1)^n$ .

Варто було б вказати, що будь-який потенціал  $V$ , що не приймає від'ємних значень не має резонансу. Добутки  $\alpha V$  будуть мати резонанс тільки для спеціальних від'ємних значень  $\alpha$ .

2. В дисертації досліджується резольвента збіжності операторів Шредінгера з потенціалами виду (1) або (2). Дана вичерпна відповідь про граничні оператори. Проте, в цей перелік не входять оператори Шредінгера з  $\delta'$ -точковими взаємодіями. Як показано в спільній з С. Албеверіо роботі опонента "Approximation of General Zero-Range Potentials" препринт № 585, 1998 р., університет м.Бонн і опублікованій в УМЖ т 52, №5, 582–589 за 2000 рік, для отримання граничної  $\delta'$ -взаємодії потрібно змінити вигляд (1) або (2) розглянутих апроксимацій потенціала і розглядувати більш спеціальні потенціали з резонансом і  $\theta$ -характеристикою рівною 1, що мають певні осциляційні характеристики  $w$ . Якщо  $V(x, w)$  – такий потенціал, то оператори Шредінгера з потенціалами

$$V_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} V\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}\right) \quad (3)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  збігаються до точкової  $\delta'$ -взаємодії інтенсивності  $\beta$ .

На цю роботу є посилання [77] в дисертації, як і на роботу [80], японських авторів, де фактично є представлення (3) для випадку, коли потенціал  $V$  є сумою трьох  $\delta$ -функцій із спеціально узгодженими інтенсивностями.

Ці зауваження не впливають на позитивну оцінку дисертації, а опонент сподівається, що вони будуть враховані при написанні нових оглядових робіт.

## 6. Висновок

На основі вищенаведеного, можна констатувати, що дисертація є завершеною науковою працею, а її результати відносяться до спектральної теорії сингулярно збурених диференціальних операторів важливих для різних квантово-механічних моделей і крайових задач з сингулярно збуреними ваговими функціями. Ці результати нові, математично строго обґрунтовані і, безумовно, важливі для застосувань. Автор розвиває сучасні методи функціонального аналізу і диференціальних рівнянь і вміло користується чисельними методами при ілюстрації отриманих результатів.

Дисертаційна робота “Сингулярно збурені диференціальні оператори у моделях квантової механіки” за актуальністю тематики і одержаними в ній науковими результатами повністю відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій, зокрема, вимогам постанови Кабінету Міністрів України за №567 від 24 липня 2013 року “Про затвердження Порядку присудження наукових ступенів” зі змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України від 19 серпня 2015 року за №656, від 30 грудня 2015 року за №1159, від 27 липня 2016 року за №567 і наказом №40 МОН України від 12 січня 2017 року, а її автор Юрій Данилович Головатий заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.02. – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент -

головний науковий співробітник

Інституту математики НАН України

доктор фізико-математичних наук, професор

23 листопада 2021 р.

