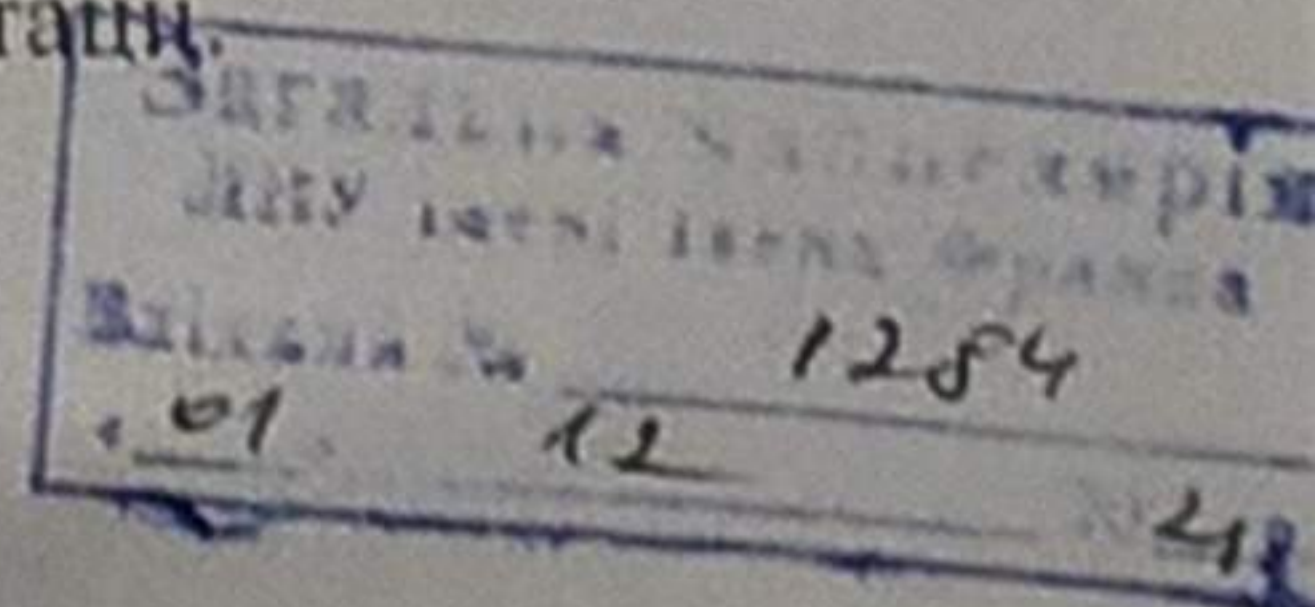


## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Головатого Юрія Даниловича  
«Сингулярно збурені диференціальні оператори у моделях квантової механіки»,  
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за  
спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

В дисертації Ю. Д. Головатого досліджуються диференціальні оператори із локальними сингулярними збуреннями. Основна частина роботи присвячена одновимірним локально збуреним задачам які моделюють диференціальні рівняння другого порядку з сингулярними потенціалами. Такі моделі виникають в нерелятивістській квантовій механіці, і саме одновимірні моделі набули актуальність в останні десятиріччя, переважно, через бурхливий розвиток нанотехнологій. Автор розглядає сім'ї диференціальних операторів з великим параметром перед локалізованими потенціалами і вивчає збіжність цих операторів в рівномірній та сильній операторних топологіях, або (також) досліджує асимптотичну поведінку спектрів. Таким чином надається визначення диференціальним операторам які не мають сенсу в просторі узагальнених функцій, як, наприклад, оператор Шредингера з  $\delta'$ -потенціалом. Таке саме питання, про самоспряжену реалізацію оператора розглянуто для потенціалів типу Кулона, які мають неінтегровану степеневу особливість. Воно має безпосереднє відношення до відомої проблеми атома водню. Значний інтерес також мають результати дисертанта щодо асимптотичної поведінки розв'язків спектральних задач з сингулярно збуреними ваговими функціями (моделей з концентрованими масами). Окрім одновимірних задач автором вивчено також декілька двовимірних моделей з сингулярними членами локалізованими на кривій.

Дисертаційна робота складається зі вступу, дев'яти розділів, списку використаних джерел та додатку. У вступі обґрунтовується актуальність теми дисертації, визначаються цілі та задачі дослідження, а також подано інформацію про публікацію і апробацію результатів дисертації.



У першому розділі автор вивчає одновимірні оператори Шредингера з локальними збуреннями потенціалів, які в частковому випадку є регуляризацією похідної функції Дірака. Доведено рівномірну резольвентну збіжність таких сімей операторів, коли профілі збурених потенціалів належать класу Фаддєєва-Марченка. Результати цього розділу мають стосунок до відомої проблеми  $\delta'$ -потенціалу.

Другий розділ є узагальненням результатів розділу I на випадок локальних збурень дипольного типу, які є двопараметричною регуляризацією функціоналів вигляду  $\alpha\delta'+\beta\delta$ . Параметри регуляризації відповідають швидкостям локалізації  $\delta'$ -подібної і  $\delta$ -подібної послідовностей. У випадку, коли відношення швидкостей мають скінченну чи нескінченну границю, доведено рівномірну резольвентну збіжність операторів та знайдено клас точних моделей.

Третій розділ присвячено дослідженню операторів Шредингера з локальними збуреннями рангу два, які теж пов'язані із проблемою  $\delta'$ -потенціалу. Зважаючи на складнішу структуру просторів напівзв'язних станів, доведено, що існує декілька різних випадків граничної поведінки таких сімей операторів в рівномірній резольвентній топології. При цьому виникає широкий клас точних моделей, які залежать від кратності резонансів нульової енергії та вигляду напівзв'язних станів.

Основним об'єктом дослідження у четвертому розділі були оператори Шредингера з одночасним локальним збуренням як електричного, так і магнітного потенціалів. Доведено сильну резольвентну збіжність таких сімей операторів і показано, що сингулярні магнітні потенціали мають значний вплив на формування точкових взаємодій.

У п'ятому розділі автор вивчає оператори Шредингера з нелінійною залежністю від сталої взаємодії. Знайдено низку достатніх умов для того, щоб оператори мали від'ємне власне значення, яке поглинається неперервним спектром при прямуванні сталої взаємодії до нуля. Крім того, побудовано асимптотичні формули для таких порогових власних значень.

У шостому розділі була розглянута проблема одновимірних операторів Шредингера з потенціалами типу Кулона. Степенева сингулярність потенціалу є причиною неоднозначності визначення гамільтоніана одновимірного атома водню – проблеми, яка відома у фізиці з 60-х років минулого століття. Автор вивчив умови збіжності операторів Шредингера з регуляризованими потенціалами типу Кулона та описав клас можливих гамільтоніанів. Показано, що вибір точної моделі одновимірного атома водню критично залежить від способу регуляризації потенціалу Кулона.

Узагальнення проблеми  $\delta'$ -потенціалу для двовимірного випадку розглянуто в розділі 7, де побудовано асимптотику спектру двовимірних операторів Шредингера, потенціали яких мають збурення в околі гладкої замкненої кривої. Асимптотичний аналіз задачі також дає змогу описати клас точних моделей із взаємодіями на кривій, які залежать як від профілів потенціалів локального збурення, так і від геометрії кривої.

Восьмий розділ дисертації присвячено дослідженню спектрів операторів Штурма-Ліувілля із сингулярними ваговими функціями. Побудовано резольвенти таких операторів та доведено їхню збіжність в рівномірній операторній топології. Хоча всі збурені оператори є подібними до самоспряжених, проте граничний оператор виявився несамоспряженим із нетривіальною жордановою структурою. Причиною цього є сингулярна поведінка метрики у вагових просторах, де діють збурені самоспряжені оператори. Побудовано асимптотику власних значень збуреної задачі.

В дев'ятому розділі вивчаються власні коливання мембрани із важким тонким включенням, що моделюється сингулярним збуренням вагової функції в околі гладкої замкненої кривої. Основним питанням є побудова асимптотики спектру. Це дослідження є узагальненням результатів попереднього розділу на двовимірний випадок. Граничний оператор, який виникає у цьому випадку, не лише є несамоспряженим, але й має некомпактну резольвенту і тому володіє власними значеннями нескінченної кратності.

Дисертація написана в яскравому стилі, строгі математичні доведення доповнені доступним поясненнями про фізичні проблеми, пов'язані з

наведеними дослідженнями, і ретельним висвітленням історії питань. Результати дисертаційної роботи «Сингулярно збурені диференціальні оператори у моделях квантової механіки» є новими і правильними, достовірність яких гарантують строгі математичні доведення. Дисертація є завершеною науковою працею, в ній отримано науково обґрунтовані результати, які в сукупності вирішують нові проблеми в теорії диференціальних операторів. Ці результати також мають вагомим практичне значення для нерелятивістської квантової механіки. Якість математичного дослідження свідчить про високий професійний рівень її автора.

Основні результати дисертації опубліковано у 15 статтях у фахових закордонних та вітчизняних журналах, причому 10 з них у виданнях з першого та другого кварталів. Крім того, 12 публікацій були опубліковані у журналах, індексованих в наукометричній базі Scopus. Результати дослідження пройшли апробацію на багатьох міжнародних наукових конференціях. Автореферат повністю та правильно відображає зміст і основні положення дисертації.

Однак є зауваження щодо змісту дисертації.

1. В Лемі 1.5 стверджується дискретність спектру операторів, що не є вірним якщо не накладати умови про компактність резольвенти.

2. Формула в розділі 7.1, де надається визначення узагальненої функції  $a\partial_\nu\delta_\gamma + b\delta_\gamma$ , не є коректною, зокрема не зрозуміло, що таке  $\partial_\nu a$  коли функція  $a$  є визначеною тільки на  $\gamma$  ?

3. В Розділах 8 і 9 спектральні задачі з концентрованими масами трактуються як задачі з  $\delta'$  ( $\partial_\nu\delta_\gamma$ ) – збуренням густини, проте густина не є знакозмінною, що важко узгоджується з уявою про похідну дельта-функції.

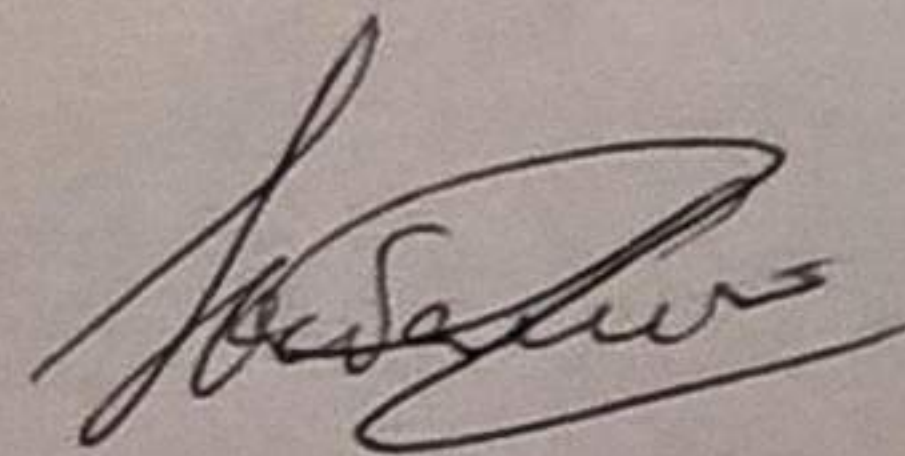
4. Виникає питання про повноту результатів Розділу 9, де описано певні асимптотики власних значень. Чи не існує інших гілок власних значень?

Ці зауваження не впливають на загальне враження від роботи та її позитивну оцінку.

Вважаю, що дисертаційна робота Ю. Д. Головатого «Сингулярно збурені диференціальні оператори у моделях квантової механіки» виконана на

високому науковому рівні і відповідає вимогам пп. 9, 10, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів №567 від 24.07.2013 р. зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМ України №656 від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р., №567 від 27.07.2016 р., №943 від 20.11.2019 р. і Наказом МОН України №40 від 12.01.2017 р., щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня доктора наук, а її автор Головатий Юрій Данилович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент –  
провідний науковий співробітник  
відділу диференціальних рівнянь і  
геометрії Фізико-технічного інституту  
низьких температур ім. Б.І. Веркіна  
НАН України,  
доктор фізико-математичних наук



В. О. Рибалко

