

АНОТАЦІЯ

Яджак Н.С. Розроблення моделей росту коротких тріщин у металевих матеріалах за тривалих навантажень та експлуатаційних середовищ. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика». – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2021.

Дисертація присвячена дослідженню поширення коротких втомних тріщин у металевих матеріалах та математичному моделюванню їх росту. Метою дисертаційної роботи є розроблення моделей, а саме диференціальних рівнянь з відповідними початковими та кінцевими умовами, для опису кінетики поширення коротких та малих втомних тріщин. Необхідність таких моделей зумовлена тим, що поведінка коротких і довгих тріщин відрізняється одна від одної, а підходи до дослідження довгих тріщин на основі таких параметрів як коефіцієнти інтенсивності напружень, не можуть коректно описати поширення коротких тріщин. З іншого боку, врахування коротких тріщин при визначенні довговічності елементів конструкцій сприяє отриманню більш коректних результатів.

Для представлення теми поширення коротких втомних тріщин і відповідних підходів до їх моделювання, у першому розділі звернуто увагу на деякі основні аспекти в області механіки руйнування і поширення коротких тріщин. По-перше, подано огляди критеріїв механіки руйнування за статичного навантаження, включаючи енергетичні критерії Гріффітса, Орована, Черепанова та Райса, силовий критерій Ірвіна, а також деформаційні критерії та пов'язані з ними критерій критичного розкриття вершини тріщини й δ_c -модель Леонова-Панасюка. По-друге, викладено принципи поширення втомних тріщин та основні підходи до їх моделювання. По-третє, розглянуто фундаментальні аспекти поширення коротких тріщин та моделі, що описують кінетику їх росту.

Другий розділ містить результати дослідження росту коротких тріщин у пластинах за нормального відриву з урахуванням та без урахування впливу корозивного середовища. Для побудови математичної моделі поширення короткої втомної тріщини в тонкій пластині, підданій циклічному розтягу, застосовано оснований на першому законі термодинаміки енергетичний підхід. Враховуючи, що коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) не використовується для опису поширення коротких тріщин, модель побудовано в параметрах розкриття у вершині тріщини (РВТ). У зв'язку з цим запропоновано формулу для визначення РВТ, яка враховує відносний рівень навантаження пластини. На основі запропонованої формули визначено довговічність пластини з тріщиною та проведено порівняння з відповідною довговічністю, отриманою за допомогою моделі у параметрах КІН. На підставі цих даних встановлено, що модель на основі коефіцієнта інтенсивності напружень дає завищені результати, особливо при малій відносній довжині тріщини, що сприяє ризику непередбаченого руйнування, а не запасу міцності.

Запропоновану модель адаптовано для врахування впливу корозивного середовища на поширення коротких втомних тріщин.

Загальну довговічність елемента конструкцій зазвичай поділяють на період зародження та період докритичного росту тріщини, причому період зародження тріщини займає значну частину довговічності. У зв'язку з цим, для визначення довговічності тонких пластин з тріщинами, що зароджуються у вершинах концентраторів напружень, запропоновано відповідну модель у деформаційних параметрах, яка дозволяє визначити обидва періоди. При порівнянні результатів, отриманих за допомогою моделі, з опублікованими експериментальними даними для задачі про розтяг пластини з двома боковими концентраторами напружень отримано добру збіжність.

У третьому розділі розглянуто поширення малих втомних тріщин у товстих пластинах за дії поперечного та повздовжнього зсувів. У цьому випадку до пластини прикладено три види навантажень, що викликають відповідні напружені стани. Для кожного режиму навантаження здійснено постановку

задачі в параметрах напружень та переміщень. Використовуючи інтегральне перетворення Фур'є та визначення напружень і переміщень через гармонічні функції, постановки задач переформульовано із використанням гармонічних функцій. Порівняння цих постановок задач показало, що застосування гармонічних функцій дозволило звести задачі поперечного та повздовжнього зсувів до задачі нормального відриву з точністю до сталих множників. Крім того, для задач поперечного та повздовжнього зсувів виведено відповідні формули для визначення розкриття тріщини біля контуру з використанням методу еквівалентних напружених станів, чисельного та математичного аналізу.

На основі еквівалентності задач нормального відриву, поперечного й повздовжнього зсувів та застосування енергетичного підходу, розроблено математичну модель у параметрах розкриття тріщини біля контуру для опису поширення малої втомної тріщини за дії поперечного та повздовжнього зсувів. Використовуючи ці моделі, побудовано графічні залежності довговічності від початкової довжини тріщини для обох режимів навантаження. Як і у випадку тонкої пластини, довговічність, розрахована з використанням параметрів КІН, більша від довговічності за параметрами розкриття тріщини.

Розглянуто задачу поширення малої втомної тріщини у товстих пластинках за сумісної дії поперечного та повздовжнього зсувів. На основі енергетичного підходу, формул для визначення розкриття тріщини біля контуру та існуючих досліджень про еквівалентність механізмів росту втомних тріщин за поперечного та повздовжнього зсувів, отримано математичну модель для визначення довговічності товстих пластин з тріщинами за одночасного впливу навантажень II та III типу. Крім того, досліджено вплив різних комбінацій значень навантажень поперечного та повздовжнього зсувів на довговічність.

У четвертому розділі представлено результати дослідження поширення малих плоских втомних тріщин опуклого контуру в тривимірних тілах. Для розв'язання таких задач крім енергетичного підходу використано узагальнений метод еквівалентних площ. Згідно з цим методом, поверхневу тріщину довільного опуклого контуру можна замінити круговою тріщиною тієї ж

початкової площі. У цьому випадку запропоновано відповідну формулу для визначення розкриття тріщини біля контуру і математичну модель, що описує поширення тріщини. Отриману модель апробовано на задачі розтягу тривимірного тіла з поверхневою еліптичною тріщиною. Задачу розв'язано аналітично з використанням узагальненого методу еквівалентних площ та чисельно методом Рунге-Кутта. Порівняння отриманих результатів свідчить про високу точність запропонованого аналітичного розв'язку.

Також розглянуто комплексну задачу поперечного та повздовжнього зсувів для тривимірного тіла з тріщиною, яка полягає в поширенні однієї частини контуру тріщини за механізмом поперечного зсуву, а іншої – за механізмом повздовжнього зсуву. Для цього розглянуто задачу кручення торсіону з малою еліптичною тріщиною, яку у два етапи наближено зведено до задачі розтягу простору з еліптичною тріщиною. Довговічність тіла знайдено шляхом чисельного розв'язання системи диференціальних рівнянь, що описують поширення тріщини у напрямі кожної з її головних пів осей.

У дисертації розглянуто й неінваріантність підходу на основі коефіцієнтів інтенсивності напружень, пов'язану із застосуванням КІН як основного параметра при моделюванні поширення коротких втомних тріщин. Для подальшого вивчення цієї проблеми проведено числовий експеримент. З цією метою до пластини прикладали зростаюче навантаження та щоразу покроково збільшували довжину тріщини. Отримана залежність між параметрами КІН K і швидкістю росту тріщини V показує, що одне значення коефіцієнта інтенсивності напружень відповідає декільком різним значенням швидкості росту тріщини, розташованим на паралельних кривих залежно від рівня прикладеного навантаження. Далі досліджено зміну характеру залежності $V \sim K$ під час використання параметра розкриття у вершині тріщини замість коефіцієнта інтенсивності напружень δ_t . Використовуючи запропоновану модель, співвідношення $V \sim K$ перетворено на співвідношення $V \sim \delta_t$. На отриманій кривій існує однозначна відповідність між розкриттям вершини

тріщини δ_i і швидкістю її росту V , що пояснюється врахуванням рівня навантаження в процесі визначення РВТ.

Такі числові експерименти проведено для задач поширення тріщин у товстих пластинах за поперечного та повздовжнього зсувів, втомних та корозійно-втомних тріщин нормального відриву в тонких пластинах та плоских поверхневих тріщин у тривимірних тілах за нормального відриву. У всіх розглянутих випадках отримано аналогічні результати: важливість врахування рівня навантаження при моделюванні поширення малих втомних тріщин і, відповідно, коректність застосування підходу через розкриття вершини тріщини.

Таким чином, наукова новизна дисертації полягає в розроблених коректних математичних моделях поширення коротких втомних тріщин у деформаційних параметрах розкриття у вершині тріщини і запропонованих формулах для наближеного їх визначення. До нових результатів відноситься також й адаптація цієї моделі на випадок дії корозивного середовища, а також сформульовані математичні моделі для визначення періодів зародження і докритичного росту тріщин у вершинах концентраторів напружень у пластинах. Крім того, вагомим внеском дослідження є розв'язання пружних задач поперечного та повздовжнього зсувів шляхом їх зведення до задачі нормального відриву з використанням постановки задачі в гармонічних функціях. Один із нових результатів дисертації полягає в адаптації згаданих раніше двовимірних моделей до випадку тривимірних елементів конструкцій для дослідження поширення малих втомних тріщин нормального відриву, поперечного та повздовжнього зсувів та визначення довговічності цих елементів. У результаті, низку актуальних інженерних задач розв'язано із застосуванням запропонованої теорії, що становить практичну цінність отриманих теоретичних результатів.

Ключові слова: втома, довговічність, коефіцієнт інтенсивності напружень, корозивне середовище, короткі тріщини, малі тріщини, математична модель, металеві матеріали, механіка руйнування, нормальний відрив, повздовжній зсув, поперечний зсув, поширення тріщин, розкриття тріщини у вершині, циклічне навантаження.

Список публікацій здобувачки

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. **N. Yadzhak**, “Generalization of the equivalent area method for the case of short fatigue cracks in a three-dimensional body,” *Visnyk of the Lviv University*, no. 89, Series Mech. Math., pp. 106-122, 2020.
2. O. Andreykiv, O. Hembara, I. Dolinska, Y. Sapuzhak, and **N. Yadzhak**, “Prediction of residual service life of oil pipeline under non-stationary oil flow taking into account steel degradation,” in *Degradation Assessment and Failure Prevention of Pipeline Systems. Lecture Notes in Civil Engineering*, G. Bolzon, G. Gabetta, and H. Nykyforchyn, Eds. Cham: Springer, 2020, pp. 203-216.
3. Y. Lapusta, O. Andreikiv, and **N. Yadzhak**, “Short crack problem in delayed fracture mechanics,” *Procedia Structural Integrity*, vol. 16, pp. 105-112, 2019.
4. O. E. Andreikiv and **N. S. Shtayura**, “Computational models of fatigue cracks growth in metallic materials under the action of force and physicochemical factors,” *Materials Science*, vol. 54, no. 4, pp. 465-476, 2019.
5. O. E. Andreikiv, A. R. Lysyk, **N. S. Shtayura**, and A. V. Babii, “Evaluation of the residual service life of thin-walled structural elements with short corrosion-fatigue cracks,” *Materials Science*, vol. 53, no. 4, pp. 514-521, 2018.
6. O. Andreykiv, **N. Shtayura**, and R. Yarema, “Energy-based approach to evaluation of short fatigue crack growth rate in plates,” *Strength of Materials*, vol. 49, no. 6, pp. 778-787, 2017.
7. С. Штаюра та **Н. Штаюра**, «Аналіз впливу водню на механічні характеристики середньокарбоневих сталей,» *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск «Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів»*, № 12, С. 58-63, 2018.
8. С. Штаюра, Р. Костів, І. Вергун, та **Н. Штаюра**, «Вплив водню за непропорційного двовісного навантаження на деформування та міцність сталі 20,» *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск*

«Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів», № 11, С. 76-81, 2016.

9. С. Штаюра, Р. Костів, І. Вергун, та **Н. Штаюра**, «Побудова діаграм руйнування сталі 20 за двовісного навантаження циліндричних порожнинних зразків і дії водню,» *Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск «Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів», № 10, С. 170-175, 2014.*

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

10. О. Є. Андрейків, Ю. М. Лапушта, та **Н. С. Яджак**, «Визначення залишкового ресурсу тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами,» *VI Міжнародна науково-технічна конференція «Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування і прогнозування», Тернопіль, 24-27 вересня 2019, С. 139-142.*
11. Ю. Лапушта, О. Андрейків, та **Н. Штаюра**, «Оцінка залишкового ресурсу елементів конструкцій з механічно малими тріщинами за дії силових і фізико-хімічних факторів,» *Сучасні проблеми механіки і математики, Львів, 22-25 травня 2018, том 2, С. 223-224.*
12. **Н. С. Штаюра**, «Визначення залишкової міцності тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами,» *Наукові нотатки, том 57, С. 187-189, 2017.*
13. I. Panko, S. Shtayura, O. Panko, and **N. Shtayura**, «Biaxial tension of the plate softened by the Griffith crack» *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University, no. 4, pp. 88-96, 2017.*

ABSTRACT

Yadzhak N.S. Development of the models for short crack growth in metallic materials under long-term loading and operating environments. – Manuscript. The thesis for the Degree of Doctor of Philosophy, speciality 113 “Applied Mathematics”. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2021.

The thesis is devoted to short fatigue crack propagation in metallic materials and mathematical modelling of their growth. Thus, this thesis intends to develop models, namely differential equations with corresponding initial and final conditions, that can describe the kinetics of short and small fatigue crack propagation. The need for these models arises from the fact that the short and long crack behaviour differ from each other, and the approaches used for the investigation of long cracks that are based on the parameters of stress intensity factors fail to correctly describe the short crack propagation. On the other hand, consideration of short cracks while determining the lifetime of structural elements contributes to more correct results.

In order to introduce the subject of short fatigue crack propagation and the corresponding modelling approaches, the first chapter addresses some main aspects in the domain of fracture mechanics and short crack propagation. Firstly, the fracture mechanics criteria under static loading are reviewed, including the energy criteria by Griffith, Orowan, Cherepanov and Rice, Irwin’s force criterion, as well as the deformation criteria, the associated critical crack tip opening criterion and Leonov-Panasiuk’s δ_c -model. Secondly, the principles of fatigue crack propagation and the main approaches to its modelling are considered. Thirdly, the fundamental aspects of short crack propagation and the models that describe the kinetics of their growth are addressed.

The second chapter is concerned with short crack growth in plates under mode I with and without the influence of a corrosive environment. To start with, the energy approach based on the first law of thermodynamics is applied to build a mathematical model for short fatigue crack propagation in a thin plate subjected to fatigue tension. Considering that the stress intensity factor (SIF) is inapplicable to the description of

short crack propagation, the model is formulated in parameters of crack tip opening displacement (CTOD). Subsequently, a formula is proposed for the CTOD determination that takes into account the relative load level of the plate. Using the proposed formula, the lifetime of the cracked plate has been determined and compared to the corresponding lifetime obtained by the model in SIF parameters. Based on these data, it has been established that the SIF-based model gives overestimated results, especially at small relative crack length, that contributes to the risk of an unforeseen failure and not to the strength reserve.

Considering the action of a corrosive environment, the proposed model has been adapted to account for the effect of a corrosion medium on short fatigue crack propagation.

The total lifetime of a structural element is generally divided into the period of initiation and subcritical crack growth, while the crack initiation period occupies a substantial part of the lifetime. Therefore, the corresponding model in deformational parameters is proposed for the lifetime determination of thin plates with cracks arising at the tips of stress risers, which allows us to determine both periods. A good correlation has been obtained by comparison of the results by the model to the published experimental data for a tension problem of a plate with two edge stress risers.

The small fatigue crack propagation in thick plates under mode II and mode III loading is considered in the third chapter. In this case, the three types of loading are applied to the plate causing the corresponding loading modes. For each loading mode, the problem was formulated separately in the parameters of stress and displacements. Further, using the integral Fourier transform and the determination of stresses and displacements via harmonic functions, the three problem statements were reformulated through harmonic functions. The comparison of these problem statements has shown that the use of harmonic functions allowed us to reduce the mode II and the mode III problems to the mode I problem within the accuracy of the constant factors. Moreover, the corresponding formulas for CTOD determination have been derived for the mode II and mode III problems using the method of equivalent stressed states, numerical and mathematical analysis.

Based on the equivalence of the mode I, mode II and mode III problems, as well as on the energy approach, the mathematical models in CTOD parameters are developed to describe the small fatigue crack growth under mode II and mode III loading. Using these models, the graphical relations are plotted between the lifetime and the initial crack length for both of these loading modes. As for the case of a thin plate, the lifetime calculated using the SIF-parameters is larger than the lifetime in the CTOD-parameters.

Furthermore, the problem of small fatigue crack propagation in thick plates under mixed-mode II+III has been considered. The application of the energy approach, the CTOD determination formulas and the existing studies on the equivalence of the mode II and mode III fatigue crack growth mechanisms resulted in the mathematical model for the lifetime determination of thick cracked plates under the simultaneous action of mode II and mode III loadings. In addition, the effect of various combinations of the mode II and mode III loading values on the lifetime has been studied.

The fourth chapter presents the research findings on the propagation of small surface fatigue cracks of convex contour in three-dimensional bodies. To solve this type of problem, the generalized equivalent area method is employed in addition to the energy approach. According to this method, a surface crack of an arbitrary convex contour can be replaced by a circular crack of the same initial area. In this case, the corresponding formula for the CTOD determination and the mathematical model describing crack propagation are proposed. The obtained model has been validated on the tension problem of a three-dimensional body with an elliptical surface crack. The problem was solved analytically using the generalized equivalent area method and numerically by the Runge-Kutta method. The comparison of these results indicates a good accuracy of the proposed analytical solution.

Furthermore, a complex mode II and mode III problem of a cracked three-dimensional body was addressed and consisted in the propagation of one part of the crack contour by the mode II mechanism and another part – by the mode III mechanism. For this purpose, a twisting problem of a torsion bar with a small elliptical crack was considered. The problem was approximately reduced in two steps to the tension problem of a space with an elliptical crack. The lifetime of the solid was sought

by the numerical solution of the system of differential equations describing the crack propagation on each of its major semiaxes.

Moreover, the thesis considers the non-invariance of the SIF-based approach, related to the application of the SIF as the main parameter in modelling the small fatigue crack propagation. In order to further investigate this problem, a numerical simulation has been conducted. For simulation purposes, loading of increasing level is applied to the plate and the crack length is augmented step-wise every time. The obtained relation between the SIF K and the crack growth rate V shows that one value of stress intensity factor relates to multiple different values of crack growth rate located on parallel curves depending on the level of the applied loading. Further, the change in the relation pattern was investigated under employment of the crack tip opening displacement parameter δ_t instead of the stress intensity factor. Therefore, the relation $V \sim K$ is transformed into the relation $V \sim \delta_t$ using the proposed model. On the obtained curve, a one-to-one correspondence exists between the crack tip opening displacement δ_t and its growth rate V , which can be explained by the consideration of the load level in the process of the CTOD determination.

These numerical experiments are conducted for the problems of mode II and mode III cracks in thick plates, mode I fatigue and corrosion-fatigue cracks in thin plates, as well as mode I flat surface cracks in three-dimensional bodies. All the considered cases indicated similar results: the importance of load level consideration while modelling small fatigue crack propagation and, correspondingly, the credibility of the crack tip opening displacement approach.

To summarise, the research contribution of the thesis consists in the developed mathematical models for short fatigue crack propagation in deformation parameters of crack tip opening displacement and the proposed formulas for the approximate CTOD determination. The adaptation of this model for the action of a corrosive environment as well as formulation of mathematical models for determination of the initiation and subcritical crack growth periods at stress risers in plates belong to the novel results too. The research contribution includes also the solutions of the elastic mode II and mode III problems by reduction to the mode I problem using the problem statement in harmonic functions. One of the novel findings of the thesis consists in the adaptation

of the mentioned earlier two-dimensional models to the case of three-dimensional structural elements to investigate the propagation of small fatigue mode I, mode II and mode III cracks and determination of the lifetime of these elements. Finally, a number of relevant engineering problems were solved by applying the proposed theory, which constitutes the practical value of the obtained theoretical results.

Keywords: corrosive environment, crack propagation, crack tip opening displacement, cyclic loading, fatigue, fracture mechanics, lifetime, mathematical model, metallic material, mode I, mode II, mode III, short crack, small crack, stress intensity factor.

Publication list of the PhD candidate

Publications containing the principal findings of the thesis:

1. **N. Yadzhak**, “Generalization of the equivalent area method for the case of short fatigue cracks in a three-dimensional body,” *Visnyk of the Lviv University*, no. 89, Series Mech. Math., pp. 106-122, 2020.
2. O. Andreykiv, O. Hembara, I. Dolinska, Y. Sapuzhak, and **N. Yadzhak**, “Prediction of residual service life of oil pipeline under non-stationary oil flow taking into account steel degradation,” in *Degradation Assessment and Failure Prevention of Pipeline Systems. Lecture Notes in Civil Engineering*, G. Bolzon, G. Gabetta, and H. Nykyforchyn, Eds. Cham: Springer, 2020, pp. 203-216.
3. Y. Lapusta, O. Andreikiv, and **N. Yadzhak**, “Short crack problem in delayed fracture mechanics,” *Procedia Structural Integrity*, vol. 16, pp. 105-112, 2019.
4. O. E. Andreikiv and **N. S. Shtayura**, “Computational models of fatigue cracks growth in metallic materials under the action of force and physicochemical factors,” *Materials Science*, vol. 54, no. 4, pp. 465-476, 2019.
5. O. E. Andreikiv, A. R. Lysyk, **N. S. Shtayura**, and A. V. Babii, “Evaluation of the residual service life of thin-walled structural elements with short corrosion-fatigue cracks,” *Materials Science*, vol. 53, no. 4, pp. 514-521, 2018.
6. O. Andreykiv, **N. Shtayura**, and R. Yarema, “Energy-based approach to evaluation of short fatigue crack growth rate in plates,” *Strength of Materials*, vol. 49, no. 6, pp. 778-787, 2017.
7. S. Shtayura and **N. Shtayura**, “Analiz vplyvu vodniu na mekhanichni kharakterystyky serednokarbonovykh stalei” [Analysis of hydrogen influence on mechanical characteristics of middle carbon steel], (in Ukrainian), *Physico-chemical Mechanics of Materials. Special Issue “Problems of Corrosion and Corrosion Protection of Materials”*, no. 12, pp. 58-63, 2018.
8. S. Shtayura, R. Kostiv, I. Verhun, and **N. Shtayura**, “Vplyv vodniu za neproportsiinoho dvovisnogo navantazhennia na deformuvannia ta mitsnist stali 20,” [Hydrogen influence on deformation and strength of steel 20 under unproportional biaxial loading], (in Ukrainian), *Physico-chemical Mechanics of*

Materials. Special Issue "Problems of Corrosion and Corrosion Protection of Materials", no. 11, pp. 76-81, 2016.

9. S. Shtayura, R. Kostiv, I. Vergun, and **N. Shtayura**, "Pobudova diahram ruinuvannia stali 20 za dvovisnoho navantazhennia tsylindrychnykh porozhnynnykh zrazkiv i dii vodniu," [Charting fracture of steel 20 under biaxial load hollow cylindrical samples and hydrogen action], (in Ukrainian), *Physico-chemical Mechanics of Materials. Special Issue "Problems of Corrosion and Corrosion Protection of Materials"*, no. 10, pp. 170-175, 2014.

Publications certifying approval of the thesis contribution:

10. O. Andreykiv, Y. Lapusta, and **N. Yadzhak**, "Vyznachennia zalyshkovoho resursu tonkostinnykh elementiv konstruktsii z korotkymy trishchynamy," [Determination of residual resource of thin-walled structural elements with short cracks], (in Ukrainian), in *6-th International Scientific and Technical Conference "In-Service Damage of Materials, its Diagnostics and Prediction"*, Ternopil, 24-27.09.2019, pp. 139-142.
11. Y. Lapusta, O. Andreykiv, and **N. Shtayura**, "Otsinka zalyshkovoho resursu elementiv konstruktsii z mekhanichno malymy trishchynamy za dii sylovykh i fizyko-khimichnykh faktoriv," [Residual lifetime evaluation of structural elements with mechanical small cracks under loading and physicochemical factors], (in Ukrainian), in *Modern Problems of Mechanics and Mathematics*, Lviv, 22-25.05.2018, vol. 2, pp. 223-224.
12. **N. Shtayura**, "Vyznachennia zalyshkovoi mitsnosti tonkostinnykh elementiv konstruktsii z korotkymy trishchynamy," [Residual strength determination of thin-walled structural elements with the short cracks], (in Ukrainian), *Scientific Notes*, vol. 57, pp. 184-189, 2017.
13. I. Panko, S. Shtayura, O. Panko, and **N. Shtayura**, "Biaxial tension of the plate softened by the Griffith crack," *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*, no. 4, pp. 88-96, 2017.